

Ю. С. Шинаков  
Ю. М. Колодяжный

---

# ОСНОВЫ РАДИО- ТЕХНИКИ

Ю. С. ШИНАКОВ, Ю. М. КОЛОДЯЖНЫЙ

# ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ

Допущено Министерством связи СССР в качестве  
учебника для учащихся электротехникумов связи  
специальностей 0701, 0706



МОСКВА «РАДИО И СВЯЗЬ» 1983

ББК 32.84

Ш62

УДК 621.37 (075)

Ш62      **Шинаков Ю. С., Колодяжный Ю. М.**  
Основы радиотехники. Учебник для технику-  
мов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с., ил.  
В пер.: 80 к.

Изложены принципы радиосвязи, описаны характеристики электрических и радиосигналов, важнейшие физические процессы в цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами, приведена методика расчета этих цепей, а также даны понятия о теории передачи информации и статистической радиотехнике. Отражены достижения в радиотехнике, обусловленные развитием микроэлектроники и статистических методов.

Для учащихся техникумов связи основных специальностей.

Ш 2402020000-138  
046(01)-83 111-83

ББК 32.84

6Ф2

РЕЦЕНЗЕНТЫ: В. П. ИЛЬИН, Н. Н. ВЕСЕЛОВА

**Редакция литературы по радиосвязи, радиовещанию  
и телевидению**

**Юрий Семенович Шинаков,  
Юрий Михайлович Колодяжный**

**ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ**

Редактор И. С. Балашова  
Художник В. Н. Давыдов  
Художественный редактор Р. А. Клочков  
Технический редактор Г. И. Колосова, А. Н. Золотарева  
Корректор Л. А. Буданцева

**ИБ № 507**

---

Сдано в набор 24.03.83. Подп. в печать 08.06.83. Т-03825. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага для глубокой печати № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 16,8. Усл. кр.-отт. 16,8. Уч.-изд. л. 17,21. Тираж 85 000 экз. Изд. № 19267. Зак. № 431. Цена 80 к.

---

Издательство «Радио и связь». 101000, Москва, Почтамт, а/я 693

Владимирская типография «Союзполиграфпрома»  
при Государственном комитете СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли.  
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

© Издательство «Радио и связь», 1983

# Оглавление

	Стр.
<b>Часть I. Передача информации. Сигналы</b>	<b>10</b>
<b>Глава 1. Передача информации с помощью электромагнитных волн</b>	<b>10</b>
1.1. Информация и сообщение. Источник и получатель информации	11
1.2. Электромагнитные волны	12
1.3. Система передачи информации	15
<b>Глава 2. Модулирующие сигналы и радиосигналы</b>	<b>22</b>
2.1. Сигналы и их детерминированные модели	22
2.2. Периодические сигналы и их спектры	26
2.3. Непериодические сигналы и их спектры	33
2.4. Ширина спектра сигнала. Сигналы с ограниченным спектром	38
2.5. Непрерывные и дискретные сигналы. Теорема Котельникова	40
2.6. Способы модуляции несущего колебания	43
<b>Часть II. Линейные, нелинейные и параметрические цепи</b>	<b>61</b>
<b>Глава 3. Классификация электрических цепей</b>	<b>61</b>
3.1. Элементы электрических цепей и их свойства	61
3.2. Разновидности электрических цепей	70
3.3. Четырехполюсники и их основные характеристики	72
<b>Глава 4. Свободные колебания в контуре</b>	<b>77</b>
4.1. Свободные колебания в идеальном контуре	78
4.2. Свободные колебания в реальном контуре	81
<b>Глава 5. Последовательный колебательный контур</b>	<b>86</b>
5.1. Переходные процессы	86
5.2. Резонанс напряжений	89
5.3. Амплитудно-частотные характеристики	92
5.4. Векторные диаграммы	97
<b>Глава 6. Параллельный колебательный контур</b>	<b>101</b>
6.1. Резонанс токов	101
6.2. Амплитудно-частотные характеристики	105
6.3. Расширение полосы пропускания	108
6.4. Векторные диаграммы	110
6.5. Параллельные контуры с неполным включением	112
<b>Глава 7. Связанные колебательные контуры</b>	<b>116</b>
7.1. Виды связи между контурами. Коэффициент связи	116
7.2. Входное сопротивление. Вносимые сопротивления	119
7.3. Резонансы в связанных контурах	124
7.4. Амплитудно-частотные характеристики и полоса пропускания	129
<b>Глава 8. Электрические фильтры и линии задержки сигналов</b>	<b>133</b>
8.1. Классификация и основные параметры электрических фильтров	134



	Стр.
8.2. Условие пропускания реактивного фильтра . . . . .	138
8.3. Реактивные фильтры типа «к» . . . . .	141
8.4. Реактивные фильтры типа «т» . . . . .	150
8.5. Безындуктивные электрические фильтры . . . . .	153
8.6. Фильтры сосредоточенной избирательности . . . . .	156
8.7. Понятие о цифровых фильтрах . . . . .	160
8.8. Применение электрических фильтров для задержки сигналов . . . . .	161
<b>Глава 9. Нелинейные и параметрические цепи . . . . .</b>	<b>164</b>
9.1. Нелинейные электрические цепи . . . . .	164
9.2. Преобразование сигналов при прохождении через нелинейные цепи . . . . .	169
9.3. Применение нелинейных цепей в радиотехнике . . . . .	174
9.4. Параметрические цепи . . . . .	194
9.5. Применение параметрических цепей в радиотехнике . . . . .	197
<b>Часть III. Электромагнитные волны и направляющие системы . . . . .</b>	<b>205</b>
<b>Глава 10. Электромагнитные волны . . . . .</b>	<b>205</b>
10.1. Основные законы электромагнитного поля . . . . .	205
10.2. Электромагнитные волны и их свойства . . . . .	212
<b>Глава 11. Длинные линии . . . . .</b>	<b>218</b>
11.1. Схема замещения и основные параметры длинных линий . . . . .	219
11.2. Распространение энергии в линии без потерь. Бегущие волны . . . . .	222
11.3. Стоячие волны в линии без потерь . . . . .	229
11.4. Смешанные волны в линии без потерь . . . . .	235
11.5. Применение длинных линий . . . . .	238
<b>Глава 12. Волноводы и объемные резонаторы . . . . .</b>	<b>242</b>
12.1. Передача электромагнитной энергии по волноводу . . . . .	242
12.2. Разновидности волноводов . . . . .	251
12.3. Объемные резонаторы . . . . .	253
<b>Часть IV. Элементы статистической радиотехники . . . . .</b>	<b>257</b>
<b>Глава 13. Сигналы и помехи в системах передачи информации . . . . .</b>	<b>257</b>
13.1. Реальные сигналы и их вероятностные модели . . . . .	258
13.2. Вероятностные модели модулирующих сигналов . . . . .	267
13.3. Вероятностные модели радиосигналов . . . . .	275
13.4. Помехи радиоприему . . . . .	279
13.5. Вероятностные модели помех . . . . .	282
13.6. Воздействие помех на сигналы . . . . .	286
<b>Глава 14. Элементы теории потенциальной помехоустойчивости и теории информации . . . . .</b>	<b>289</b>
14.1. Понятие о потенциальной помехоустойчивости . . . . .	289
14.2. Оптимальный прием сигналов . . . . .	297
14.3. Зависимость помехоустойчивости от вида модуляции . . . . .	307
14.4. Коды и импульсно-кодовая модуляция . . . . .	311
Список литературы . . . . .	319
Предметный указатель . . . . .	320

## Введение<sup>1</sup>

Радиотехника представляет собой обширную область науки и техники, которая предоставляет человеку широкие возможности для передачи информации на большие расстояния с помощью электромагнитных волн. В общем понимании, широком смысле слова информация — это совокупность сведений об окружающем человеке мире, о самом человеке. Потребность в обмене информацией существовала всегда и неуклонно возрастает по мере развития человеческого общества. Газеты, журналы, радио и телевидение ежедневно доставляют огромное количество сведений большому числу людей, проживающих на обширных территориях. Значительная часть этой информации передается с помощью радиотехнических средств.

Радиотехника как область науки и техники возникла вместе с рождением радио, когда были предприняты первые попытки передачи сообщений без проводов. Открытия, имеющие к ней непосредственное отношение, были сделаны еще в начале XIX века. В 1800 г. итальянский ученый А. Вольта изобрел электрохимический источник электрического тока — гальванический элемент и батарею. В 1820 г. Г. Х. Эрстед открыл магнитное действие электрического тока. В том же году французский физик А. М. Ампер указал, как усилить магнитное действие тока: для этого провод, по которому проходит ток, необходимо уложить спиралью. В 1831 г. английский физик М. Фарадей открыл закон электромагнитной индукции, устанавливающий связь между электрическими и магнитными возмущениями.

Однако радиотехника как наука могла родиться только с открытием электромагнитного поля, представляющего собой совокупность взаимосвязанных, меняющихся во времени полей — электрического и магнитного. Основы теории этого поля были разработаны и опубликованы в 1873 г. английским ученым Д. К. Максвеллом. Эк-

---

Введение, гл. 1, 2, 9, 13, 14 написаны Ю. С. Шинаковым, гл. 3—8, 10—12 — Ю. М. Колодяжным.

спериментально электромагнитные волны впервые получил немецкий физик Г. Герц, опубликовавший свои результаты в 1880 г. Перечисленные работы легли в основу создания радиотехнических средств передачи информации с помощью электромагнитных волн.

Идея применения электромагнитных волн для передачи информации на расстояние без проводов впервые была высказана и практически осуществлена талантливым русским ученым Александром Степановичем Поповым. Первая публичная демонстрация изобретенного А. С. Поповым устройства для приема электромагнитных волн состоялась в Петербурге 7 мая 1895 г. на заседании русского физико-химического общества. Этот день по постановлению Советского правительства объявлен Днем радио и вошел в историю как день изобретения радио.

Приемник А. С. Попова принимал электромагнитные волны, возникающие при грозовых разрядах в атмосфере на расстоянии до 30 км. Источник электромагнитных волн в данном случае был естественным. В 1899 г. под руководством А. С. Попова была организована радиосвязь на линии протяженностью 52 км между броненосцем «Генерал-адмирал Апраксин» и ближайшим селением Котка. Эта связь была необходимой и оказалась возможной в течение всего времени спасательных работ по снятию броненосца с камней у о. Гогланд.

Возможности организации радиосвязи исследовались и другими учеными и инженерами. Работая с группой ученых и инженеров, Г. Маркони к 1901 г. довел дальность радиосвязи до 560 км. Через некоторое время состоялась радиопередача через Атлантический океан на расстояние 2800 км.

Значительно ускорилось развитие отечественной радиотехники после Великой Октябрьской социалистической революции. В 1918 г. В. И. Ленин подписал декрет Совнаркома «О централизации радиотехнического дела». В этом же году было издано «Положение о радиолaborатории НКПиТ с мастерской «при ней», согласно которому в Нижнем Новгороде была организована радиолaborатория — первая в Советской России научно-исследовательская лаборатория в области радиотехники. Эта лаборатория рассматривалась как первый этап организации в России Государственного радиотехнического института; конечная цель состояла в том, чтобы объединить научно-технические силы России, работающие в области радиотелеграфа, радиотехнические учеб-

ные заведения и радиотехническую промышленность. В этой лаборатории работали такие выдающиеся ученые, как М. А. Бонч-Бруевич, В. П. Вологдин, А. Ф. Шорин и др. Нижегородская лаборатория в значительной степени обеспечила возможность строительства в СССР мощных радиостанций. В 1922 г. была введена в строй первая радиовещательная станция мощностью 12 кВт, в 1927 г. — станция мощностью 40 кВт; в 1929 и 1933 гг. начали передачи станции мощностью 100 и 500 кВт. В настоящее время в СССР работают сотни радиовещательных станций, ведущих передачи на многих языках.

В 1931 г. в СССР были начаты опытные радиопередачи телевидения, с 1938 г. — регулярное телевизионное вещание, а с 1 октября 1967 г. — регулярное цветное телевизионное вещание.

Значительным оказался вклад радиотехники в освоение космического пространства. Без радио невозможно осуществить запуск и управление космическими кораблями. В свою очередь, успехи в освоении околоземного космического пространства открыли новые возможности для передачи информации с помощью электромагнитных волн. К настоящему времени созданы системы космической спутниковой связи для передачи центральных программ телевизионного вещания и других видов информации в отдаленные и труднодоступные районы нашей страны. Продолжается создание и совершенствование Единой автоматизированной сети связи (ЕАСС) страны. Государственная сеть связи — ЕАСС — в будущем обеспечит возможность каждому жителю связываться с любым населенным пунктом нашей страны.

Передача сообщений по радио представляет собой лишь одну из нескольких отраслей радиотехники и имеет специальное название — *радиосвязь*. Радиосвязь широко используется во всех областях науки и техники. Особенно важное значение имеет радиосвязь для морского флота, авиации, космонавтики, где часто не могут быть использованы другие способы передачи сообщений. Разнообразием радиосвязи являются радиовещание — односторонняя передача по радио публицистических, художественных и научно-технических программ для массового радиослушателя — и телевидение.

*Телевидение* — передача и прием изображений на расстояние с помощью радиотехнических средств. Телевидение не только открывает принципиально новые воз-

можности для передачи сообщений, но существенно их обогащает. Благодаря телевидению неизмеримо возрос обмен культурными ценностями между народами, стала значительной и все возрастает его роль в научных исследованиях, в промышленности, медицине и других областях деятельности человека.

Радиотехника в настоящее время обеспечивает не только передачу информации. Радиотехника оказалась полезной человеку и при получении (извлечении), хранении и переработке информации при управлении на расстоянии, для нахождения местоположения различных подвижных средств, для обнаружения и опознавания объектов и т. д. Поэтому к исторически первым отраслям радиотехники, каковыми являются радиосвязь и радиовещание, телевидение, следует добавить радиотелемеханику, радионавигацию и радиолокацию.

*Радиотелемеханика* — это управление и измерение на расстоянии. Чтобы обеспечить движение космического корабля по требуемой траектории, им необходимо управлять. Во многих случаях управление необходимо обеспечить на значительном расстоянии между кораблем и центром управления. Такое управление можно осуществить только по радио, а точнее — радиотехническими средствами. Управление различными объектами на расстоянии с помощью радиотехнических средств называют *радиотелеуправлением*. Другой важной задачей радиотелемеханики является измерение на расстоянии — *радиотелеизмерение*. Автоматические метеостанции без обслуживающего персонала, атмосферные радиозонды, метеорологические ракеты, искусственные спутники Земли «Метеор», «Космос», межпланетные автоматические станции для исследования космического пространства — вот примеры технических устройств, в которых необходимы измерения на расстоянии с целью решения народнохозяйственных и научных задач. Радиотелеметрические средства нашли широкое применение в космической и земной медицине, в промышленности и других областях науки и техники.

Внедрение радиотелемеханических средств и расширение области их использования является одним из важных направлений комплексной механизации и автоматизации производственных процессов во всех отраслях народного хозяйства.

*Радионавигация* — обеспечение навигации с помощью радиотехнических средств. Так, на флоте и в авиации



в настоящее время применяется оборудование, позволяющее решать разные навигационные задачи: определять направления на ориентиры, находить местоположение самолетов и кораблей, проводить их по заданному курсу даже при отсутствии других ориентиров (в тумане, ночью) и т. д. Решение этих и других навигационных задач обеспечивает повышение эффективности важных отраслей народного хозяйства, каковыми являются морской флот и гражданская авиация.

*Радиолокация* — обнаружение, измерение пространственных координат и опознавание различных объектов с помощью радиотехнических средств. Такими объектами могут быть самолеты, ракеты, корабли в море, различные сооружения на земле; в метеорологии объектами могут служить грозовые облака, осадки; радиолокационными объектами могут быть и космические тела — спутники Земли, межпланетные корабли, планеты Солнечной системы.

Радиотехнические средства нашли широкое применение для дальней проводной связи и проводного вещания, звуко- и видеозаписи, для воспроизведения звука и изображения, в вычислительной технике, разнообразном медицинском оборудовании, при создании роботов, в автоматизированных линиях для производства разнообразных товаров, в электронной технике и т. д. Это далеко не полный перечень применения радиотехнических методов и средств в настоящее время, который лишь частично может характеризовать роль и место радиотехники в жизни современного общества.

Благодаря успехам в области электроники (создание электронных ламп, полупроводниковых диодов, транзисторов) и микроэлектроники, обеспечившей резкое уменьшение габаритов и повышение надежности электронных устройств, радиотехнические методы и средства получили небывало широкую область применения. Сейчас практически в любой исследовательской лаборатории, к какой бы отрасли народного хозяйства она ни относилась, имеется радиоэлектронная аппаратура. Такая аппаратура необходима физикам и биологам, врачам и металлургам, химикам, строителям, геологам и т. д. Таким образом, радиотехника служит людям во всех областях науки и техники. Это означает, что квалифицированный в области радиотехники специалист найдет применение своим знаниям в очень многих отраслях народного хозяйства, далеко за пределами основных задач радиотехники.

# Часть I.

## ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ. СИГНАЛЫ

---

### ГЛАВА 1

#### ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Жизнь современного общества немыслима без обмена информацией. Такой обмен может осуществляться с помощью различных средств. Радиотехника предоставляет человеку возможность передачи информации с помощью электромагнитных колебаний и радиоволн. Применение радиоволн для передачи информации позволяет осуществлять связь между неподвижными и движущимися объектами, передавать неограниченному числу слушателей речь, музыку и другие звуковые эффекты, проводить корабли и самолеты по заданному маршруту, обнаруживать и определять местоположение объектов в пространстве, передавать на расстояние меняющееся во времени изображение, обеспечивать управление различными объектами и т. д.

Несмотря на столь различные области применения, использование электромагнитных волн как средства передачи на расстояние информации базируется на общих принципах. При изучении основ радиотехники с самого начала важно получить общее представление об этих принципах и лежащих в их основе радиотехнических процессах. Особое внимание при этом необходимо уделить следующему:

1. *В какой форме необходимо представить информацию, чтобы ее можно было передать с помощью электромагнитных волн?*

2. *В чем сущность основных радиотехнических процессов при передаче информации с помощью электромагнитных волн?*

3. *Какие технические средства необходимо применять для обеспечения передачи информации с помощью электромагнитных волн?*

## 1.1. Информация и сообщение. Источник и получатель информации

Первоначально термин *информация* охватывал совокупность сведений, передаваемых между людьми устным, письменным или каким-либо другим способом; обычно это были сведения о каких-либо событиях, явлениях или предметах. Затем содержание термина было расширено; теперь информацией называют любые сведения, являющиеся объектом следующих операций: передачи, распределения, преобразования, хранения или непосредственного использования. Обмен такими сведениями осуществляется не только между людьми, но также между человеком и автоматом, между различными техническими устройствами, в животном и растительном мире.

Форма представления информации называется *сообщением*. Например, информация может быть передана с помощью письма или телеграммы; сообщением в этом случае является текст — последовательность букв, цифр и других знаков. При устном способе передачи информации сообщением является изменяющееся во времени звуковое давление; в отличие от предыдущего способа здесь сообщение является функцией времени. Другими примерами сообщений могут служить телевизионное изображение, команды в системах телеуправления космическими аппаратами, данные на выходе вычислительной машины и т. д. Для передачи информации необходимо передать содержащие эту информацию сообщения [5].

При передаче сообщения всегда можно указать *отправителя сообщения* и *получателя*, которому оно адресовано. Отправителем, например, можно назвать человека, опускающего письмо в почтовый ящик или говорящего в телефонную трубку. Отправляемое сообщение в этих примерах предназначается определенному человеку или коллективу людей, которые являются получателем сообщения. Однако отправителем и получателем сообщений могут быть не только люди. Так, при управлении на расстоянии человек-оператор посылает команды управления на исполнительное устройство управляемого объекта, т. е. является отправителем сообщений; получателем сообщений здесь является исполнительное устройство. При проведении автоматических измерений на расстоянии отправителями являются технические устройства-датчики, обеспечивающие измерение необходимых параметров контролируемого объекта. Получате-

лем же может быть либо человек-оператор, либо автоматические регистрирующие приборы.

Каждый отправитель создает, формирует сообщение. Например, перед отправкой письма или телеграммы человек пишет текст, с помощью которого он хочет передать нужную ему информацию (сведения). При разговоре по телефону человек подбирает слова и формирует такие фразы, которые выражают его мысль. Датчики, осуществляя автоматическое измерение значений контролируемых параметров, фактически формируют сообщение, содержащее в себе сведения о состоянии контролируемого объекта. Именно поэтому каждого отправителя сообщения принято называть *источником сообщения или источником информации*. Получатель сообщения называют также *получателем информации*.

## 1.2. Электромагнитные волны

Для передачи информации от источника к получателю необходимо передать содержащие эту информацию сообщения. Сообщения на расстояние могут передаваться с помощью какого-либо материального носителя или физического процесса, протекающего во времени. Таким материальным носителем при письменном способе передачи является бумага; при устном способе передача осуществляется благодаря процессу распространения звуковых волн в воздухе. В радиотехнике таким материальным носителем являются электромагнитные волны. Приведем здесь лишь некоторые сведения об этих волнах, являющиеся наиболее важными для получения общего представления о сущности и возможностях передачи информации с помощью электромагнитных волн. Более подробные сведения об электромагнитных волнах будут приведены в гл. 10.

Рассмотрим проводник конечной длины, по которому проходит постоянный ток. В пространстве, окружающем проводник, при этом будет существовать статическое магнитное поле. Если ток медленно уменьшать до нуля, то в каждой фиксированной точке пространства около проводника напряженность магнитного поля будет также медленно убывать до нуля. При этом говорят, что содержащаяся в поле энергия будет возвращена источнику тока. Аналогичная картина наблюдается и в том случае, когда ток и его направление периодически меняются с небольшой частотой: поле периодически возникает и ис-

чезает; когда ток увеличивается, растет и энергия магнитного поля, при уменьшении тока энергия поля возвращается источнику.

Однако с повышением частоты изменения величины и направления тока описанная картина существенно изменяется. Рассмотренный выше процесс периодического перемещения энергии из источника в окружающее проводник поле и обратно происходит только в ограниченной области пространства, непосредственно примыкающей к проводнику. Часть же энергии излучается во все стороны от проводника в виде *электромагнитных волн*.

Важным параметром электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью  $c$ , является *длина волны*. Если частота периодического изменения тока в проводнике  $f$ , то период этого изменения  $T=1/f$ . Длина прямого пути, проходимого излученной проводником электромагнитной волной за время  $T$ , называется длиной волны и обозначается символом  $\lambda$ , т. е.

$$\lambda = c/f. \quad (1.1)$$

Например, в вакууме скорость распространения электромагнитной волны  $c_0=3 \cdot 10^8$  м/с; если частота тока в проводнике  $f=3 \cdot 10^3$  Гц, то в соответствии с (1.1) длина излучаемой им волны  $\lambda=10^5$  м.

При частоте «питающего» проводник тока  $f=3 \times 10^9$  Гц  $=3$  ГГц будем иметь  $\lambda=10$  см.

Если обозначить символом  $l$  геометрическую длину проводника, то значительная часть энергии источника тока будет излучаться в окружающее пространство только в том случае, если  $l/\lambda \approx 1$ . Поэтому при низких частотах для обеспечения эффективного излучения потребовались бы проводники огромной длины. Именно поэтому в радиотехнике в качестве переносчиков сообщений используют электромагнитные колебания с достаточно короткими длинами волн. Такие волны оказалось возможным эффективно излучать с помощью специальных систем проводников приемлемых размеров. Системы проводников, которые создаются специально для излучения электромагнитных волн, называются *передающими антеннами*.

Используемый в настоящее время в радиотехнике диапазон частот токов, питающих передающие антенны, простирается от  $10^4$  до  $10^{12}$  Гц; эти частоты называют *высокими* или *радиочастотами*; электромагнитные волны с такими частотами называются *радиоволнами*. Радио-



волны с различными частотами по-разному распространяются в околоземном и космическом пространстве. Частота радиоволн, используемых в качестве переносчика сообщений, существенно влияет также и на принципы конструирования необходимых радиотехнических устройств. Поэтому с учетом особенностей распространения, генерации и излучения радиочастоты принято делить на диапазоны, наименования которых приведены в таблице. Деление радиоволн на диапазоны в радиосвязи установлено Международным регламентом радиосвязи (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Диапазоны радиочастот и радиоволн

Диапазон радиочастот		Границы диапазона	диапазон радиоволн	Границы диапазона
1-й	(Крайне низкие КНЧ)	3—30 Гц	1-й (Декаметровые)	100—10 Мм
2-й	(Сверхнизкие СНЧ)	30—300 Гц	2-й (Мегаметровые)	10—1 Мм
3-й	(Ицифранизкие ИНЧ)	0,3—3 кГц	3-й (Гектокилометровые)	1000—100 км
4-й	(Очень низкие ОНЧ)	3—30 кГц	4-й (Мириаметровые)	100—10 км
5-й	(Низкие частоты НЧ)	30—300 кГц	5-й (Километровые)	10—1 км
6-й	(Средние частоты СЧ)	0,3—3 МГц	6-й (Гектометровые)	1—0,1 км
7-й	(Высокие частоты ВЧ)	3—30 МГц	7-й (Декаметровые)	100—10 м
8-й	(Очень высокие ОВЧ)	30—300 МГц	8-й (Метровые)	10—1 м
9-й	(Ультравысокие УВЧ)	0,3—3 ГГц	9-й (Дециметровые)	1—0,1 м
10-й	(Сверхвысокие СВЧ)	3—300 ГГц	10-й (Сантиметровые)	10—1 см
11-й	(Крайне высокие КВЧ)	30—300 ГГц	11-й (Миллиметровые)	10—1 мм
12-й	(Гипервысокие ГВЧ)	300—3000 ГГц (0,3—3 ТГц)	12-й (Децимиллиметровые)	1—0,1 м

Следует отметить, что для современной радиотехники характерна тенденция перехода на более короткие волны, т. е. на более высокие радиочастоты<sup>1</sup>, что объясняется следующим: 1) с увеличением частоты уменьшаются геометрические размеры антенн, а также обеспечива-

<sup>1</sup> См., например, [1, с. 193—198].

ется излучение радиоволн в нужном направлении, что имеет большое практическое значение (можно увеличить расстояние, на которое передается информация, при той же мощности источника колебаний); 2) оказывается меньшим уровень посторонних электромагнитных излучений, обусловленных грозowymi разрядами, разрядами в линиях электропередач, нарушением контактов в токосъемках электропоездов и т. д.; такие сторонние излучения, называемые *помехами*, обуславливают появление искажений передаваемых сообщений; 3) если не принимать специальных мер, для реализации которых требуются дополнительные технические средства, то для одновременной передачи нескольких разных сообщений разным получателям нельзя использовать радиоволны с одной и той же частотой, так как сообщение, предназначенное для одного получателя, будет сторонним (помехой) для другого; поэтому каждой паре источник сообщения — получатель должна быть выделена своя *рабочая частота*, и с ростом таких пар растет число одновременно используемых рабочих частот; 4) некоторые сообщения можно передавать с хорошим качеством только при использовании достаточно высоких рабочих частот, в первую очередь это относится, например, к телевизионным изображениям, для передачи которых в настоящее время используются диапазоны метровых и дециметровых радиоволн.

Отметим также, что более коротковолновые диапазоны занимают более широкий интервал частот. Так, ширина диапазона километровых волн  $3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^4 = 27 \times 10^4$  Гц; а ширина диапазона более коротких сантиметровых волн  $3 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^9 = 27 \cdot 10^9$  Гц.

### 1.3. Система передачи информации

Итак, будем считать, что электромагнитная волна излучается в точке пространства, где находится источник сообщения. Если эта волна при распространении достигает точки, где расположен получатель сообщения, то ее можно использовать в качестве переносчика сообщений. Однако для этого необходимо обеспечить выполнение определенных условий. Охарактеризуем кратко каждое из них.

**Генерирование высокочастотных колебаний.** Электромагнитная волна формируется благодаря излучению антенны при питании ее током высокой частоты. Следовательно, первым условием, обеспечиваю-

щим возможность использования электромагнитных волн в качестве переносчиков сообщений, является необходимость *генерировать* (создавать) такие колебания электрического тока с помощью технических устройств; эти устройства называют *генераторами высокочастотных колебаний*. Как правило, используется гармоническое колебание, которое представляет собой следующую функцию времени:

$$i(t) = I_m \sin(2\pi ft + \psi), \quad (1.2)$$

где  $I_m$  — амплитуда;  $f$  — частота;  $\psi$  — начальная фаза колебания, описывающего в данном случае изменение во времени значения электрического тока  $i(t)$ .

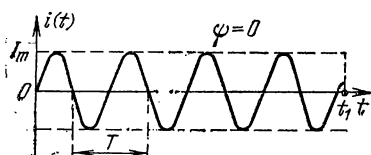


Рис. 1.1. График гармонического колебания

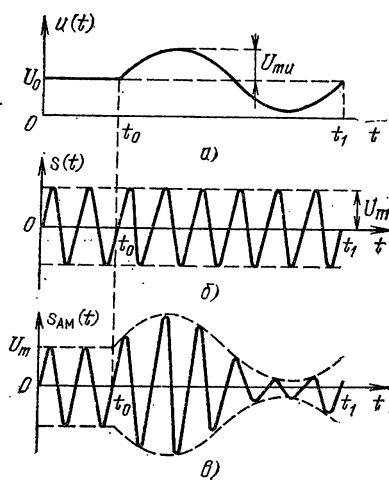


Рис. 1.2. Временные диаграммы при амплитудной модуляции

а — модулирующий сигнал; б — радиочастотное колебание; в — амплитудно-модулированный радиосигнал

В дальнейшем вместо  $f$  будем использовать также обозначение *угловой частоты*  $\omega = 2\pi f$ ;  $I_m$ ,  $f$  и  $\psi$  — параметры гармонического колебания. Параметр  $T = 1/f$  называется *периодом*. График функции (1.2) для частного случая, когда начальная фаза  $\psi = 0$ , изображен на рис. 1.1.

Гармоническое колебание, частота которого принадлежит какому-либо диапазону радиочастот (см. табл. 1), называется *радиочастотным колебанием*. Разработка устройств генерирования радиочастотных колебаний является важной для радиотехники задачей.

Модуляция высокочастотных колебаний. Второе условие, обеспечивающее возможность ис-

пользования электромагнитной волны в качестве переносчика сообщения, состоит в следующем: необходимо в исходное высокочастотное колебание до его излучения ввести передаваемое сообщение. Этот процесс обычно называют *модуляцией* радиочастотного колебания; он также должен осуществляться с помощью устройства, называемого *модулятором*. Частота гармонического колебания, подвергаемого модуляции с целью передачи информации, иногда называется *несущей частотой*, а само колебание — *несущим колебанием*.

Модуляция — это медленное изменение во времени значений каких-либо параметров несущего колебания — амплитуды, частоты или фазы. Значения модулируемых параметров на интервале времени, равном периоду несущего колебания, при этом практически не изменяются. Модулированное радиочастотное колебание называют часто *радиосигналом*.

В настоящее время в радиотехнике используется несколько способов модуляции. Одной из простейших является *амплитудная модуляция* (АМ). Например, при амплитудной модуляции гармонического колебания (1.2) «сообщение управляет амплитудой»  $I_m$ . Такое управление наиболее удобно осуществлять с помощью электрического сигнала, который в дальнейшем будем называть *управляющим или модулирующим сигналом*. Модулирующий сигнал обычно формируется из сообщения в специальном устройстве, которое часто называют *преобразователем сообщения* в электрический сигнал. Примеры графиков функций времени, описывающих указанные колебания, приведены на рис. 1.2. Здесь  $u(t)$  — модулирующий сигнал, получаемый с выхода преобразователя сообщения;  $s(t)$  — радиочастотное колебание на выходе высокочастотного генератора, являющееся в данном примере несущим колебанием;  $s_{AM}(t)$  — амплитудно-модулированное колебание, называемое также амплитудно-модулированным радиосигналом или, короче, АМ сигналом;  $u(t)$  и  $s(t)$  — электрические колебания, представляющие собой либо электрический ток, либо напряжение; если эти колебания являются гармоническими и описывают изменения напряжений между заданными точками, то символами  $U_{mi}$  и  $U_m$  будем обозначать их амплитуды. Подчеркнем, что в радиотехнике практически все сообщения преобразуются в электрические модулирующие сигналы, которые, следовательно, являются материальными носителями сообщений. Однако моду-

лирующие сигналы, как правило, не являются высокочастотными гармоническими колебаниями и поэтому не могут быть использованы непосредственно для создания электромагнитных волн.

Таким образом, любой модулятор можно представить как устройство с двумя входами и одним выходом. На один вход модулятора подается модулирующий сигнал  $u(t)$ , а на второй — несущее радиочастотное колебание  $s(t)$  с выхода генератора высокочастотного колебания; на выходе модулятора в этом случае можно наблюдать модулированный радиосигнал, который должен быть подведен к передающей антенне, излучающей его в виде радиоволны. Разработка способов модуляции и технических устройств — модуляторов, реализующих эти способы, является еще одной важной для радиотехники задачей.

**П р и е м р а д и о в о л н.** Третье условие, обеспечивающее возможность передачи информации с помощью электромагнитных волн, состоит в следующем: в точке пространства, где находится получатель информации, необходимо преобразовать распространяющуюся электромагнитную волну в колебания электрического тока или напряжения. Это преобразование осуществляется обычно *приемной антенной*; можно сказать, что приемная антенна осуществляет обратное преобразование: распространяющаяся электромагнитная волна наводит в ней ЭДС, представляющую собой в идеальном случае колебание, форма которого точно совпадает с формой модулированного радиосигнала, подводимого к передающей антенне. Это колебание называют *принятым радиосигналом*. Таким образом, благодаря приемной антенне, располагающейся вблизи получателя информации, оказывается возможным получить копию излученного модулированного радиосигнала, несущего в себе передаваемое сообщение.

**Д е т е к т и р о в а н и е.** Для получения переданного сообщения из принятого модулированного радиосигнала необходимо сначала выделить модулирующий сигнал. Для этого принятый радиосигнал подвергается преобразованию, обратному по отношению к преобразованию несущего колебания при модуляции. Такое преобразование называется *детектированием* или *демодуляцией*, а осуществляющее его устройство — *детектором* или *демодулятором*. Выполнение этого преобразования является четвертым условием, обеспечивающим возможность передачи информации с помощью электромагнитных волн. В идеальном случае на выходе детектора можно полу-



чить модулирующий управляющий сигнал  $u(t)$ , который может быть преобразован в принятое сообщение. Принятое сообщение предоставляется получателю.

Детектирование или демодуляцию легче реализовать, если амплитуда детектируемого радиосигнала достаточно велика, например десятки или сотни милливольт. На выходе приемной антенны, как правило, принятый радиосигнал имеет значительно меньшую амплитуду. Чтобы

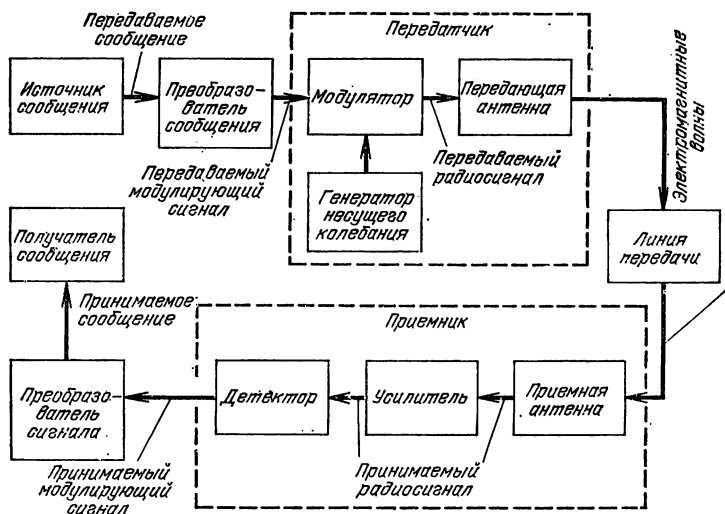


Рис. 1.3. Структурная схема системы передачи информации

увеличить уровень подаваемого на вход демодулятора радиосигнала, принятый радиосигнал предварительно усиливается в специальном устройстве — *усилителе*.

Перечисленные выше условия, при которых возможна передача информации с помощью электромагнитных волн, фактически определяют обязательные радиотехнические процессы: преобразование сообщений в электрические модулирующие сигналы; генерирование радиочастотных колебаний и их модуляция; излучение и прием электромагнитных волн; усиление и детектирование радиосигналов. Совокупность радиотехнических устройств, осуществляющих эти процессы, т.е. передачу информации от источника информации к получателю, называется *системой передачи информации* (рис. 1.3). Здесь полезно подчеркнуть, что генератор несущего колебания, мо-

дулятор и передающая антенна являются основными элементами *передатчика*, а приемная антенна, усилитель и детектор — *приемника*. *Линией передачи* называется среда, в которой электромагнитные волны распространяются от передатчика к приемнику. Такая система может обеспечить передачу информации при значительных расстояниях между источником и получателем.

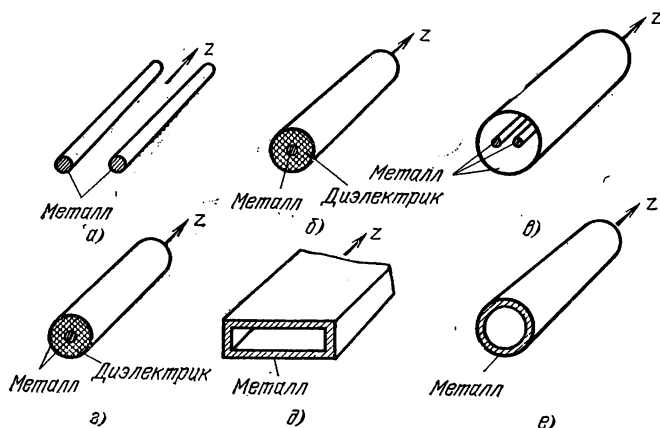


Рис. 1.4. Направляющие системы:

*a* — двухпроводная линия; *б* — однопроводная линия; *в* — экранированная двухпроводная линия; *г* — коаксиальная линия; *д* — прямоугольный волновод; *е* — круглый волновод

В последующих главах будет показано, что электромагнитные волны хорошо распространяются не только в свободном пространстве, но и вдоль так называемых *направляющих систем*. К таким системам относятся линии с одиночным проводом, двухпроводные линии, коаксиальные и оптические кабели, волноводы и другие системы, образованные какими-либо направляющими элементами: металлическими, диэлектрическими и полупроводниковыми поверхностями, трубками, стержнями, стеклянными волокнами и т. д. (рис. 1.4). Ось  $z$  всех систем рис. 1.4 определяет направление распространения электромагнитной волны. Направляющие системы также называют линиями передачи. Все линии передачи разделяют на два класса: открытого (рис. 1.4, *a, б*) и закрытого (рис. 1.4, *в—е*) типов. Хотя в линиях открытого типа электромагнитное поле распределено во всем окружающем линию пространстве, их выполняют таким образом, чтобы

большая часть энергии сосредоточивалась в непосредственной близости от них. В линиях передачи закрытого типа вся энергия сосредоточена внутри металлической оболочки той или иной формы. Структурная схема системы передачи информации с использованием направляющих систем любого типа в основном совпадает со схемой, изображенной на рис. 1.3.

Использование в качестве переносчика сообщения электромагнитных волн, что является основным свойством рассмотренной радиотехнической системы передачи информации, обуславливает широкие возможности для обеспечения хорошего соответствия между переданным и принятым сообщениями и обширную область применения таких систем в практической деятельности человека.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 1.1. Почему передача информации является важной народнохозяйственной задачей? Уменьшится ли значимость этой проблемы в будущем?
- 1.2. Дайте определения терминам: информация, источник информации, получатель информации. Приведите пример источника информации; что охватывает термин «информация» в этом примере?
- 1.3. Что такое сообщение? Приведите пример сообщения. Какова взаимосвязь двух терминов: информация и сообщение?
- 1.4. В чем состоит основная задача радиотехники? Дайте определение термину «радиотехника».
- 1.5. Что является переносчиком сообщения в радиотехнике? Что такое радиоволны?
- 1.6. Перечислите названия диапазонов радиоволн. Почему эти диапазоны выделены?
- 1.7. Вычислите длину волны гармонической электромагнитной волны в вакууме, если частота соответствующего ей радиочастотного колебания равна 50 МГц.
- 1.8. Что такое электрический сигнал? Зачем необходимо подлежащее передаче сообщение преобразовывать в электрический сигнал?
- 1.9. Дайте определения терминам: модулирующий сигнал, несущее радиочастотное колебание, амплитудно-модулированный радиосигнал. Приведите примеры графиков функций, описывающих эти колебания.
- 1.10. Перечислите основные радиотехнические процессы, характерные для передачи информации с помощью электромагнитных волн.
- 1.11. Что представляют собой процессы модуляции и детектирования? Объяснение проиллюстрируйте на примере амплитудной модуляции.
- 1.12. Дайте определение понятию: система передачи информации. Перечислите радиотехнические устройства, которые обязательно входят в систему передачи информации.
- 1.13. Нарисуйте структурную схему системы передачи информации с помощью электромагнитных волн. Поясните с ее помощью вза-

имосвязь основных радиотехнических процессов, имеющих место при передаче.

- 1.14. Что такое направляющая система? Приведите примеры направляющих систем открытого и закрытого типов.

## ГЛАВА 2

# МОДУЛИРУЮЩИЕ СИГНАЛЫ И РАДИОСИГНАЛЫ

При передаче сообщений с помощью электромагнитных волн любое сообщение сначала преобразуется в электрический сигнал, который затем используется для модуляции несущего колебания.

Обсудим более подробно процесс модуляции, не рассматривая пока технические устройства, с помощью которых осуществляется этот процесс и которые частично будут рассмотрены в последующих главах данной книги и более подробно в других специальных курсах. Обсуждение будет базироваться на важном для всего последующего изложения понятии *математической модели сигнала*, которая позволяет не только более наглядно представлять рассматриваемые сигналы и процессы, но и получать необходимые количественные соотношения при любых преобразованиях сигналов.

Наиболее важным является следующее:

1. *Что представляет собой математическая модель электрического сигнала? Как ее выбрать? Каково взаимоотношение между реальным сигналом и его математической моделью?*

2. *Что такое спектр сигнала и почему он является столь важной для радиотехники характеристикой сигнала?*

3. *Какие способы модуляции несущих колебаний в настоящее время наиболее широко используются в радиотехнике?*

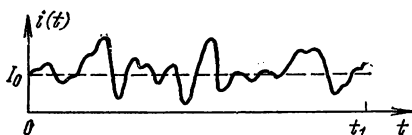
4. *Зависит ли спектр модулированного несущего колебания от вида модуляции?*

## 2.1. Сигналы и их детерминированные модели

Любой электрический сигнал можно рассматривать как меняющуюся во времени электрическую величину (напряжение, ток). Например, на рис. 2.1 приведен график, иллюстрирующий изменение электрического тока  $i$ . Такой ток  $i$  можно назвать функцией времени  $t$ , а изображение ее на рис. 2.1 — графиком этой функции или

временной диаграммой. Переменная  $t$  называется аргументом функции  $i(t)$ . В данном примере функция  $i(t)$  представлена графиком на интервале времени от момента  $t=0$  до  $t=t_1$ ; однако для дальнейшего изложения важно иметь не только график функции  $i(t)$ , который дает наглядное представление о форме этой функции, но и математическое выражение, по которому можно было

Рис. 2.1. Временная диаграмма электрического тока



бы построить (восстановить) ее график. Такое математическое выражение позволяет вычислить значение функции для любого задаваемого значения аргумента. Аналогичные понятия можно ввести при рассмотрении и напряжения, меняющегося во времени, которое в дальнейшем будем обозначать символом  $u(t)$  и называть электрическим сигналом.

Математическое выражение, по которому для любого задаваемого момента времени  $t$  можно вычислить значение электрического сигнала  $u(t)$ , будем называть *математической детерминированной*<sup>1</sup> моделью этого сигнала. Выбор наиболее подходящего для каждого конкретного сигнала математического выражения есть выбор математической модели этого сигнала. Наиболее часто такой выбор осуществляется на основе анализа временной диаграммы электрического сигнала.

Рассмотрим, например, математические модели сигналов, графики которых представлены на рис. 1.2. Очевидно, можно записать

$$u(t) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ U_0 + U_{mu} \sin \Omega(t - t_0), & t_0 \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

где  $\Omega$  — частота модулирующего гармонического сигнала.

Аналогично на основании анализа временной диаграммы рис. 1.2, б гармоническое несущее колебание

$$s(t) = U_m \sin \omega t, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

<sup>1</sup> *Детерминированный* — вполне определенный, точно известный. В радиотехнике широко используются также и *недетерминированные* модели сигналов; их описание будет дано в гл. 13.



где  $\omega$  — несущая частота.

Изображенный на рис. 1.2, в сигнал

$$s_{AM}(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega t, & 0 \leq t \leq t_0, \\ [U_m + U_{mu} \sin \Omega(t - t_0)] \sin \omega t, & t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Другие наиболее часто используемые простые математические модели сигналов будут приведены в последующих разделах. Отметим, что выбирать математическую модель для реального электрического сигнала не всегда просто. Для примера рассмотрим электрический ток, временная диаграмма которого изображена на рис. 2.1. Такая диаграмма является типичной для тока в телефонной линии, связывающей двух абонентов. Даже визуальный анализ ее приводит к заключению, что довольно трудно подобрать функцию времени, которую можно было бы считать математической моделью тока  $i(t)$  на указанном интервале времени от момента  $t=0$  до  $t=t_1$ . Можно сказать, что этот электрический сигнал имеет *сложную форму*, поскольку для его описания придется применять сложное математическое выражение.

Следует подчеркнуть, что большая часть сигналов, рассматривающихся в радиотехнике, имеет сложную форму. Поэтому важно научиться описывать их с помощью относительно простых математических моделей. Покажем, что одним из наиболее подходящих способов описания электрических сигналов сложной формы является их представление рядом Фурье. Сущность этого представления состоит в следующем: любой электрический сигнал  $u(t)$  на произвольно заданном интервале времени от момента  $t=t_0$  до  $t=t_1$  можно рассматривать как сумму простых гармонических колебаний  $u_k(t) = U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$  с амплитудами  $U_{mk}$ , частотами  $k\omega_1$  и начальными фазами  $\psi_k$ . Здесь  $\omega_1 = 2\pi/(t_1 - t_0)$  — основная угловая часть ряда, а индекс  $k$  может принимать значения 0, 1, 2, ... Итак, для любого электрического сигнала можно записать

$$\begin{aligned} u(t) = & U_0 + U_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + U_{m2} \sin(2\omega_1 t + \psi_2) + \\ & + \dots + U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) + \\ & + \dots = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_k), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Слагаемое  $U_0$  в (2.1) называется *постоянной составляющей сигнала  $u(t)$*  на интервале времени от  $t_0$  до  $t_1$ . Сла-

гаемые, входящие под знак суммы, называются *гармониками*. Гармоническое колебание основной частоты  $\omega_1$  называется первой гармоникой, колебание с частотой  $2\omega_1$  — второй и т. д.

Таким образом, из (2.1) следует, что электрический сигнал сложной формы можно задать путем указания значений его постоянной составляющей  $U_0$ , амплитуд  $U_{mk}$  и фаз  $\psi_k$  всех его гармоник.

Ряд (2.1) можно записать в несколько иной форме, если воспользоваться равенством

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y. \quad (2.2)$$

Применяя (2.2) к  $\sin(k\omega_1 t + \psi_k)$  и подставляя результат в (2.1), получаем

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_{mk} \sin \psi_k \cos k\omega_1 t + U_{mk} \cos \psi_k \sin k\omega_1 t);$$

введя обозначения  $a_k = U_{mk} \sin \psi_k$ ,  $b_k = U_{mk} \cos \psi_k$  получаем окончательно

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (2.3)$$

В курсе математики показывается, что для определения значений  $U_0$ ,  $U_{mk}$  и  $\psi_k$  конкретного сигнала  $u(t)$  необходимо поступить следующим образом. Сначала вычисляются коэффициенты

$$a_k = \frac{2}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} u(t) \cos k\omega_1 t dt, \quad b_k = \frac{2}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} u(t) \sin k\omega_1 t dt; \quad (2.4)$$

после чего амплитуды и фазы гармоник сигнала находятся по формулам соответственно

$$U_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \psi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Постоянная составляющая

$$U_0 = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt \quad (2.6)$$

и представляет собой среднее на интервале времени от  $t_0$  до  $t_1$  значение сигнала  $u(t)$ .

В качестве примера приведем представление с помощью ряда Фурье сигнала, временная диаграмма которого изображена на рис.

1.2, в. При этом будем рассматривать интервал времени от момента  $t_0$  до  $t_1$ . Для этого сигнала можно записать

$$s_{AM}(t) = [U_m + U_{mu} \sin \Omega(t - t_0)] \sin \omega t, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (2.7)$$

Основная частота ряда Фурье такого сигнала  $\omega_1 = 2\pi/(t_1 - t_0)$ . Поскольку в соответствии с рис. 1.2, в на интервале времени от  $t_0$  до  $t_1$  укладывается ровно 6 периодов частоты  $f_1 = \omega_1/2\pi$ , имеем  $\omega = 6\omega_1$ ; аналогично  $\Omega = \omega_1$ . Для представления сигнала (2.7) в виде суммы гармонических колебаний с кратными частотами теперь достаточно переписать (2.7), введя тригонометрические функции суммы и разности углов:

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= U_m \sin \omega t + U_{mu} \sin \Omega(t - t_0) \sin \omega t = U_m \sin \omega t + \\ &+ 0,5 U_{mu} \cos [\omega t - \Omega(t - t_0)] - 0,5 U_{mu} \cos [\omega t + \Omega(t - t_0)] = \\ &= U_m \sin \omega t + 0,5 U_{mu} \cos [(\omega - \Omega)t + \Omega t_0] - \\ &- 0,5 U_{mu} \cos [(\omega + \Omega)t - \Omega t_0] = U_m \sin 6\omega_1 t + \\ &+ 0,5 U_{mu} \cos (5\omega_1 t + \omega_1 t_0) - 0,5 U_{mu} \cos (7\omega_1 t - \omega_1 t_0) = \\ &= 0,5 U_{mu} \sin (5\omega_1 t + \omega_1 t_0 - \pi/2) + U_m \sin 6\omega_1 t + \\ &+ 0,5 U_{mu} \sin (7\omega_1 t - \omega_1 t_0 + \pi/2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, для сигнала  $s_{AM}(t)$  имеем:  $U_0 = 0$ ,  $U_{m1} = U_{m2} = U_{m3} = U_{m4} = 0$ ,  $U_{m5} = 0,5 U_{mu}$ ,  $\psi_5 = +\omega_1 t_0 - \pi/2$ ,  $U_{m6} = U_m$ ,  $\psi_6 = 0$ ,  $U_{m7} = 0,5 U_{mu}$ ,  $\psi_7 = -\omega_1 t_0 + \pi/2$ ,  $U_{m8} = U_{m9} = \dots = 0$ , т. е. рассматриваемый сигнал на интервале времени от  $t_0$  до  $t_1$  представляется суммой всего трех гармонических колебаний с частотами  $5\omega_1$ ,  $6\omega_1$  и  $7\omega_1$ . Амплитуды всех остальных гармоник оказались равными нулю.

Если найти представление на интервале времени от  $t = 0$  до  $t_1$  в виде ряда Фурье сигнала, временная диаграмма которого представлена на рис. 2.1, то отличными от нуля окажутся  $I_0$ ,  $I_{mk}$ ,  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , вообще говоря, при любом значении индекса  $k$ . Это означает, что ряд Фурье для тока  $i(t)$  будет содержать бесконечное число гармоник.

Сигналы, которые описываются детерминированными функциями времени, называют также *детерминированными*. Для дальнейшего рассмотрения все детерминированные сигналы удобно разделить на два класса — периодические и непериодические [4].

## 2.2. Периодические сигналы и их спектры

Сигнал  $u(t)$  называется периодическим с периодом  $T$ , если его значение в произвольный момент времени  $t'$  совпадает со значениями в моменты  $t' + kT$ , где  $k$  — может быть любым целым числом, т. е. для периодического сигнала справедливо  $u(t' + kT) = u(t')$  при  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  Из этого определения следует, что периодические

сигналы определены на всей оси времени, т. е. на бесконечном интервале  $-\infty < t < +\infty$ . Однако для полного описания периодического сигнала достаточно задать его значения лишь на любом конечном интервале времени, длительность которого совпадает с периодом  $T$ . Примеры графиков периодических сигналов приведены на рис. 2.2, а, г, ж. Для гармонического сигнала  $u_1(t)$  период равен  $T_1$ . Гармонический сигнал  $u_2(t)$  имеет период  $T_2$ ,

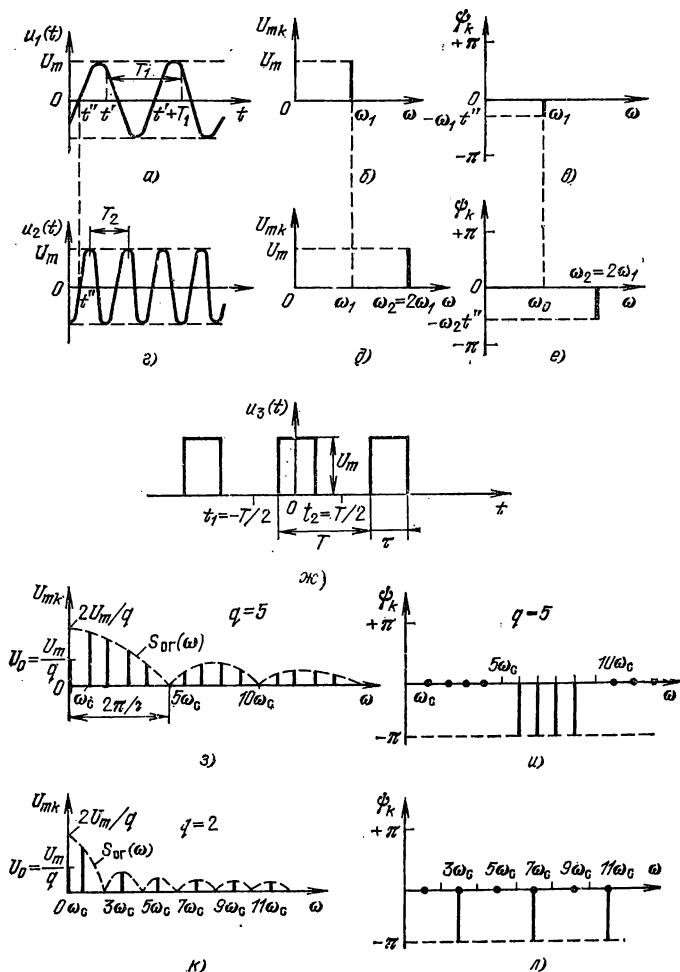


Рис. 2.2. Примеры периодических сигналов и их спектров амплитуд и фаз

причем  $T_2$  в 2 раза меньше  $T_1$ . Периодический сигнал  $u_3(t)$  представляет собой последовательность прямоугольных импульсов с периодом  $T$  длительностью  $\tau$  и амплитудой импульсов  $U_m$ . Период  $T$  называют *периодом следования*, а величину  $f_c = 1/T$  — *частотой следования* импульсов.

Каждый периодический сигнал  $u(t)$  может быть представлен на своем периоде  $T$  рядом Фурье (2.1), если принять, что  $t_1 = t_0 + T$ . В этом случае правая часть (2.1) содержит лишь гармонические колебания с частотами, кратными основной частоте  $\omega_1 = 2\pi/T$ . Все такие слагаемые являются периодическими функциями. Следовательно, и их сумма представляет собой периодическую функцию времени с периодом  $T$ , совпадающую с функцией  $u(t)$  на интервале от момента времени  $t_0$  до  $t_0 + T$ . Таким образом, если периодическая функция представлена рядом Фурье на интервале времени, равном ее периоду, то этот ряд Фурье представляет данную функцию на всей оси времени, т. е.

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_k), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (2.9)$$

Здесь постоянная составляющая  $U_0$ , амплитуды  $U_{mk}$  и фазы  $\psi_k$  гармоник вычисляются по значениям сигнала  $u(t)$  на любом интервале времени длиной  $T$ . Совокупность амплитуд  $U_{mk}$  называется *спектром амплитуд*, а совокупность  $\psi_k$  — *спектром фаз* периодического сигнала  $u(t)$ . В дальнейшем чаще будет использоваться спектр амплитуд, поэтому для краткости будем его называть просто *спектром*. Эти спектры можно наглядно представить графически, откладывая по оси абсцисс значения угловой частоты  $\omega$ ; а по оси ординат значения амплитуд  $U_{mk}$  гармоник или их фаз  $\psi_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ .

Найдем спектры трех периодических сигналов, графики которых приведены на рис. 2.2, *а*, *г*, *ж*. Для этого достаточно каждый из них представить рядом Фурье на интервале времени, совпадающем с их периодом. Сигнал  $u_1(t)$  имеет период  $T_1$  и является гармоническим колебанием с частотой  $\omega_1$ . Поэтому на интервале от  $t=0$  до  $t=T_1$

$$u_1(t) = U_m \sin(\omega_1 t + \psi_1), \quad 0 \leq t \leq T_1, \quad \psi_1 = -\omega_1 t''.$$

Сравнивая это выражение с (2.1), приходим к заключению, что для данного сигнала можно положить:  $U_0=0$ ,

$U_{m1}=U_m$ ,  $\psi_1=-\omega_1 t''$ ; амплитуды всех остальных гармоник равны нулю. Амплитудный и фазовый спектры сигнала  $u_1(t)$  изображены на рис. 2.2, б и в соответственно.

Аналогично можно получить спектр амплитуд и спектр фаз для сигнала  $u_2(t)$ , который является гармоническим колебанием с частотой  $\omega_2=2\pi/T_2$ :

$$u_2(t) = U_m \sin(\omega_2 t + \psi_2), \quad 0 \leq t \leq T_2, \quad \psi_2 = -\omega_2 t''.$$

Амплитудный и фазовый спектры сигнала  $u_2(t)$  изображены на рис. 2.2, д, е.

Подчеркнем, что в обоих случаях спектры изображаются одиночными *спектральными линиями*, высота которых равна амплитуде  $U_m$  рассматриваемых гармонических колебаний. Положение же спектральных линий на оси абсцисс определяется частотой колебаний; для сигнала  $u_1(t)$  частота равна  $\omega_1$ , а для сигнала  $u_2(t)$  частота в 2 раза больше, т. е.  $\omega_2=2\omega_1$ . Соответственно спектральная линия сигнала  $u_2(t)$  сдвинута на  $\omega_1$  по отношению к спектральной линии сигнала  $u_1(t)$ . Отметим также, что поскольку оба рассмотренных сигнала являются гармоническими функциями времени, то при построении ряда Фурье для них нет необходимости выполнять вычисления по (2.4), (2.5) и (2.6). Действительно, ряд (2.9) содержит только синусы с кратными частотами; поэтому, чтобы получить правильное представление о спектрах амплитуд и фаз гармонических колебаний  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , их достаточно записать в виде синусов от соответствующих аргументов. Амплитудный спектр гармонического колебания, определенного на всей оси времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ , всегда содержит одну спектральную линию: частота, на которой располагается эта линия, равна частоте гармонического колебания, а ее высота совпадает с амплитудой колебания.

Вычислим теперь спектр сигнала  $u_3(t)$  (см. рис. 2.2, ж), который не является гармоническим колебанием. Период этого сигнала равен  $T$ . Для построения ряда Фурье выберем интервал времени от  $t_1=-T/2$  до  $t_2=+T/2$ . На этом интервале времени

$$u_3(t) = \begin{cases} U_m, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & \text{если } -T/2 \leq t < -\tau/2, \text{ или } \tau/2 < t \leq T/2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Постоянная составляющая этого сигнала  $U_0=U_m\tau/T=U_m/q$ , где отношение  $T/\tau=q$  называется *скважностью* периодической последовательности прямоугольных им-

пульсов. Вычисления по (2.4) и (2.5) приводят к

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_m \cos k\omega_c t dt = \frac{2U_m}{q} \frac{\sin(k\pi/q)}{k\pi/q}, \quad (2.11)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_m \sin k\omega_c t dt = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots,$$

где  $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi/T$ .

Поэтому амплитуды гармоник ряда Фурье для этого сигнала и их фазы соответственно

$$U_{mk} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |a_k|, \quad \psi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k} = \begin{cases} 0, & a_k = 0, \\ -\pi, & a_k < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Таким образом, на интервале от  $t_1 = -T/2$  до  $t_2 = T/2$  ряд Фурье для сигнала

$$u_3(t) = \frac{U_m}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin(k\pi/q)}{k\pi/q} \right| \cos(k\omega_c t + \omega_k). \quad (2.13)$$

На рис. 2.2, 3, и изображены спектры амплитуд и фаз соответственно при скважности  $q=5$ . Здесь  $\omega_c = 2\pi/T$  — угловая частота следования импульсов. Основная особенность полученных спектров состоит в том, что они содержат большое число спектральных линий. Интервал между любыми соседними спектральными линиями определяется только частотой следования импульсов и равен  $\omega_c$ .

Для амплитудного спектра сигнала  $u_3(t)$  можно указать огибающую, изображенную на рис. 2.2, 3 штриховой кривой. На этой огибающей располагаются концы спектральных линий, высоты которых равны амплитудам гармоник. Математическое выражение для огибающей можно получить из (2.11) и (2.12):

$$S_{or}(\omega) = \frac{2U_m \tau}{T} \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|, \quad 0 \leq \omega < +\infty. \quad (2.14)$$

Действительно, при  $\omega = k\omega_c = k2\pi/T$  имеем

$$S_{or}(k\omega_c) = \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin(k\pi/q)}{k\pi/q} \right| = U_{mk}, \quad k = 1, 2, \dots$$

С использованием обозначения (2.14) ряд (2.13) можно записать иначе:

$$u_3(t) = \frac{U_m}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} S_{ог}(k\omega_c) \cos(k\omega_c t + \psi_k),$$

$$-T/2 \leq t \leq T/2. \quad (2.15)$$

Огибающая  $S_{ог}(\omega)$  имеет много лепестков, первый из них занимает интервал частот от 0 до  $\omega = 2\pi/\tau$ , второй — от  $\omega = 2\pi/\tau$  до  $\omega = 2(2\pi/\tau)$  и т. д. Ширина каждого лепестка  $2\pi/\tau$ , т. е. определяется только длительностью импульса. Если ширину лепестка разделить на интервал  $\omega_c$  между соседними спектральными линиями, то получим  $(2\pi/\tau)/\omega_c = (2\pi/\tau)/(2\pi/T) = T/\tau = q$ ; т. е. можно говорить, что каждый лепесток спектра содержит  $q$  спектральных линий.

Как уже отмечалось выше, спектр фаз последовательности прямоугольных импульсов также содержит большое число спектральных линий. Характерная особенность этого спектра состоит в том, что все гармоники, находящиеся в одном лепестке огибающей  $S_{ог}(\omega)$ , имеют одинаковые фазы, равные либо 0, либо  $-180^\circ$ .

Следует подчеркнуть, что вид спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов существенно зависит от скважности  $q = T/\tau$ . Так, при  $q = 5$  (рис. 2.2, з) в спектре отсутствуют гармоники, частоты которых  $5\omega_c$ ,  $10\omega_c$ ,  $15\omega_c$  и т. д., т. е. кратные  $q\omega_c$ . На рис. 2.2, к, л, приведены спектры амплитуд и фаз последовательности прямоугольных импульсов при  $q = 2$ . В спектре этой последовательности отсутствуют все гармоники, частоты которых кратны  $2\omega_c$ ; на основании (2.11), (2.12) соответствующий ряд Фурье

$$u_3(t) = \frac{U_m}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2U_m}{k\pi} \sin(k\pi/2) \cos k\omega_c t =$$

$$= U_m/2 + \frac{2U_m}{\pi} \left\{ \cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_c t + \dots \right\}.$$

На рис. 2.3, а приведена временная диаграмма сигнала  $u_3(t)$  при  $q = 2$ . Графики постоянной составляющей  $U_0$  и первой гармоники ( $k = 1$ ) и их суммы  $u'_3(t)$ .



(сплошная кривая) изображены на рис. 2.3, б. На рис. 2.3, в эта сумма дополнена третьей гармоникой ( $k=3$ ), а на рис. 2.3, г — пятой гармоникой. Можно сказать, что сигнал  $u_3''(t)$  получается из  $u_3(t)$  путем отбрасывания всех гармоник, выше третьей. Чем больше число гармоник ряда Фурье суммируется, тем лучше их сумма аппроксимирует исходный сигнал  $u_3(t)$ .

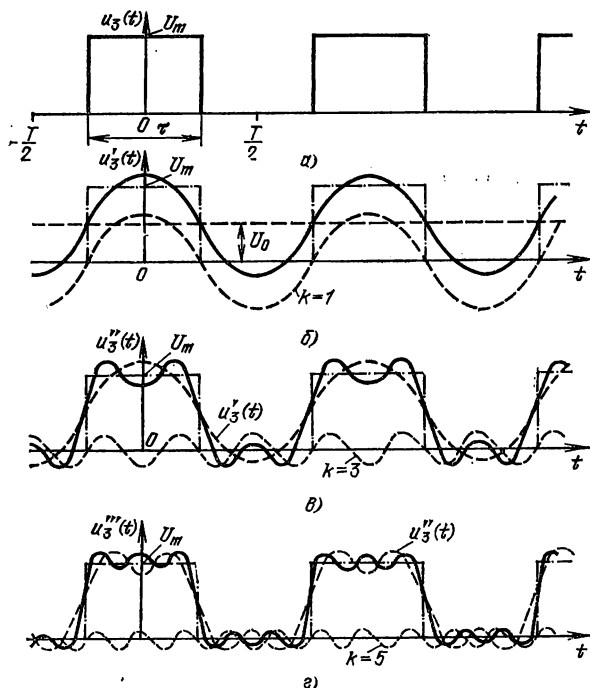


Рис. 2.3. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов и графики сумм соответствующих ей первых слагаемых ряда Фурье

Аналогично могут быть вычислены и построены спектры любых периодических сигналов. Их особенность состоит в том, что все они представляются на рисунках набором спектральных линий. Такие спектры называются *линейчатыми* или *дискретными*. Расстояние по оси частот между любыми соседними спектральными линиями  $2\pi/T$ , т. е. определяется только периодом периодического сигнала. Чем больше период  $T$ , тем теснее располагаются спектральные линии в спектре.

## 2.3. Непериодические сигналы и их спектры

Сигналы, не являющиеся периодическими, называются непериодическими. Таковыми оказываются многие реальные электрические сигналы. Для таких сигналов нельзя указать период, через который значения сигнала повторяются. Поэтому непериодические сигналы необхо-

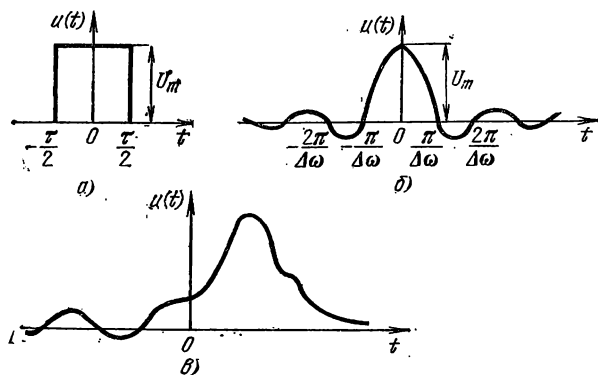


Рис. 2.4. Примеры непериодических сигналов:

*a* — одиночный прямоугольный импульс; *б* — одиночный импульс, описываемый функцией (2.17); *в* — импульс сложной формы

димо описывать с помощью математических выражений (функций времени) на всей оси времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Рассмотрим одиночный прямоугольный импульс длительностью  $\tau$  (рис. 2.4, *a*), имеющий амплитуду  $U_m$ . Такой импульс описывается функцией времени

$$u(t) = \begin{cases} U_m, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & -\infty < t < -\tau/2, \tau/2 < t < +\infty. \end{cases} \quad (2.16)$$

Функция времени одиночного импульса более сложной формы (рис. 2.4, *б*)

$$u(t) = U_m \frac{\sin t \Delta\omega}{t \Delta\omega}, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (2.17)$$

Временная диаграмма сигнала еще более сложной формы приведена на рис. 2.4, *в*.

При решении различных задач, связанных с передачей сообщений с помощью электромагнитных волн, часто полезно иметь возможность представлять непериодические сигналы суммой гармонических колебаний. Рассмотрим непериодические сигналы и обобщим понятия

спектров амплитуд и фаз для таких сигналов, для чего воспользуемся § 2.1.

Все необходимые рассуждения проведем сначала на частном примере, когда непериодический сигнал является одиночным прямоугольным импульсом. Из сравнения графиков, приведенных на рис. 2.3, а и 2.4, а, следует, что непериодический сигнал в виде одиночного прямоугольного импульса можно получить с помощью предельного перехода из периодической последовательности таких же импульсов при неограниченном увеличении периода  $T$ . Действительно, (2.16) можно получить из (2.10), устремляя  $T$  к  $\infty$ . Рассмотрим, каким образом изменяется спектр периодического сигнала (2.10) при увеличении периода  $T$ . Изменения спектра фаз здесь рассматривать не будем.

Увеличение периода  $T$  приводит к уменьшению частоты следования  $\omega_c$  импульсов и к увеличению скважности  $q$ . Спектр периодической последовательности импульсов при  $q=5$  изображен на рис. 2.2, з; огибающая этого спектра (штриховая кривая) определяется (2.14). Если теперь при постоянной длительности  $\tau$  импульса увеличивать период  $T$  их следования (что эквивалентно увеличению  $q$ ), то спектральные линии будут сближаться, а их длины, равные амплитудам гармоник, — уменьшаться, приближаясь к нулю. Ширина лепестков огибающей  $S_{ог}(\omega)$  при этом изменяться не будет, поскольку она определяется лишь длительностью  $\tau$  импульсов. В пределе при  $T \rightarrow \infty$  амплитуды гармоник и частота следования импульсов становятся бесконечно малыми, следовательно, и интервал между частотами соседних гармоник в спектре также становится бесконечно малым. Записать математическое выражение для соответствующего спектра амплитуд, а тем более изобразить его графически уже не удастся.

Для преодоления указанной трудности поступим следующим образом. Примем в качестве исходной запись ряда Фурье для функции  $u_3(t)$  в виде (2.15). Умножим и разделим каждое слагаемое под знаком суммы на  $2\pi/T$ ; значения слагаемых при этом не изменятся:

$$U(t) = U_m/q + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} TS_{ог}(k\omega_c) \times \\ \times \cos(k\omega_c t + \psi_k) \frac{2\pi}{T}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}. \quad (2.18)$$

Введем обозначение  $S(k\omega_c) = TS_{\text{ор}}(k\omega_c)$ . Если теперь учесть (2.14), то вновь введенная функция

$$S(\omega) = S_{\text{ор}}(\omega)T = 2U_m\tau \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|, \quad 0 \leq \omega < \infty; \quad (2.19)$$

ряд (2.18) при этом можно переписать:

$$u(t) = U_m/q + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} S(k\omega_c) \cos(k\omega_c t + \psi_k) \omega_c, \\ -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad (2.20)$$

поскольку  $2\pi/T = \omega_c$ .

Отметим, что нормированная функция  $S(\omega)$  не зависит от длины периода  $T$ . Будем теперь неограниченно увеличивать период  $T$  с тем, чтобы получить представление одиночного импульса на всей оси времени в виде суммы гармонических колебаний. При  $T \rightarrow \infty$  постоянная составляющая  $U_0 = U_m/q$  сигнал  $u_3(t)$  уменьшается до нуля. Поскольку  $\omega_c = 2\pi/T$ , то с ростом  $T$  множитель  $\omega_c$  в (2.20) становится бесконечно малым; поэтому  $\omega_c$  заменяем символом  $d\omega$ , вместо  $k\omega_c$  подставляем текущую частоту  $\omega$ , а сумму заменяем интегралом. Таким образом, в пределе при  $T \rightarrow \infty$  вместо (2.20) получаем

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t + \psi(\omega)] d\omega, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (2.21)$$

Функция  $S(\omega)$  называется *спектральной плотностью* непериодического сигнала  $u(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ . Для одиночного прямоугольного импульса она определяется (2.19).

Формула (2.20) представляет периодическую последовательность прямоугольных импульсов в виде суммы гармонических колебаний. Аналогично (2.21) представляет одиночный прямоугольный импульс на всей оси времени в виде суммы гармонических колебаний, частоты которых заполняют непрерывно всю ось частот. Из сравнения этих формул следует, что при увеличении периода следования импульсов спектральные линии дискретного спектра сближаются и в пределе при  $T \rightarrow \infty$  спектр одиночного импульса оказывается сплошным. В соответствии с (2.19) спектральная плотность  $S(\omega)$

одиночного прямоугольного импульса с точностью до постоянного множителя  $T$  совпадает с огибающей  $S_{ог}(\omega)$  периодической последовательности таких импульсов с периодом  $T$  (рис. 2.5, а).

Формула (2.21) является аналогом ряда Фурье (2.15) для периодической последовательности одиночных импульсов [см. также (2.1)]. Ее можно записать и в не-

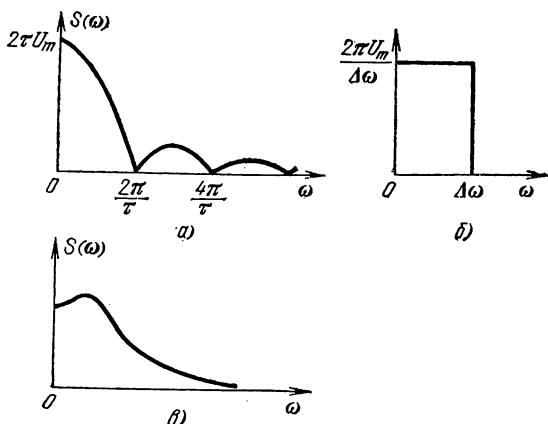


Рис. 2.5. Спектральная плотность одиночного импульса: а — прямоугольного с длительностью  $\tau$ ; б — описываемого функцией (2.17); в — сложной формы (см. рис. 2.4, в)

сколько иной форме, воспользовавшись представлением, аналогичным (2.2), для  $\cos [\omega t + \psi(\omega)]$ :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (2.22)$$

$$-\infty < t < +\infty,$$

где  $a(\omega) = S(\omega) \cos \psi(\omega)$ ,  $b(\omega) = S(\omega) \sin \psi(\omega)$ .

Полученное выражение является аналогом ряда Фурье вида (2.3).

Формулы, аналогичные (2.21) и (2.22), могут быть получены и для других непериодических сигналов. Их основной смысл состоит в том, что непериодические сигналы, так же как и периодические, можно рассматривать как сумму гармонических колебаний. Однако амплитуды этих колебаний и интервал между их частотами для непериодических сигналов становятся бесконечно малыми.

Поэтому спектр таких сигналов оказывается сплошным. Функция  $S(\omega)$  фактически характеризует плотность бесконечно малых амплитуд на оси частот, а  $\psi(\omega)$  — фазу соответствующего гармонического колебания с частотой  $\omega$ .

Важно иметь возможность для каждого заданного непериодического сигнала  $u(t)$  находить спектральную плотность  $S(\omega)$  и функцию  $\psi(\omega)$ . Они вычисляются следующим образом. Сначала находятся функции

$$a(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t dt, \quad b(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin \omega t dt; \quad (2.23)$$

после этого функции

$$S(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad \psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b(\omega)}{a(\omega)},$$

$$0 \leq \omega < +\infty. \quad (2.24)$$

Здесь берется положительное значение квадратного корня. В частности, для прямоугольного импульса (2.16) из (2.23) получаем

$$a(\omega) = 2U_m \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}, \quad b(\omega) \equiv 0, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

Для сигнала (2.17) вычисления по этим формулам дают следующие результаты:

$$a(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi U_m}{\Delta\omega}, & 0 \leq \omega \leq \Delta\omega, \\ 0, & \omega > \Delta\omega, \end{cases} \quad b(\omega) \equiv 0, \quad 0 \leq \omega < +\infty. \quad (2.25)$$

Так что спектральная плотность этого сигнала

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{2\pi U_m}{\Delta\omega}, & 0 \leq \omega \leq \Delta\omega, \\ 0, & \omega > \Delta\omega. \end{cases} \quad (2.26)$$

График функции (2.26) изображен на рис. 2.5, б. Спектральная плотность одиночного импульса, график которого приведен на рис. 2.4, в, изображена на рис. 2.5, в.

Подчеркнем в заключение, что все рассмотренные в данном параграфе непериодические сигналы являются детерминированными, т. е. их математическими моделями служат детерминированные (вполне определенные, известные) функции времени. Реальные электрические сигналы, отображающие такие сообщения, как речь, музы-

ка, изображение и т. д., также являются непериодическими; но большинство из них нельзя описать с помощью детерминированных функций времени. Такие сигналы являются недетерминированными. Используемый в настоящее время в радиотехнике подход к их описанию будет изложен в гл. 13.

## 2.4. Ширина спектра сигнала. Сигналы с ограниченным спектром

В § 2.2 и 2.3 были введены важные для всего последующего изложения понятия спектра периодического сигнала и спектральной плотности непериодического сигнала, которые характеризуют распределение энергии сигнала по различным частотам. Как будет показано в дальнейшем, полезной характеристикой любого сигнала является также *ширина его спектра* — интервал на шкале частот, в котором располагаются все спектральные линии периодического сигнала или на котором отлична от нуля спектральная плотность непериодического сигнала. Если этот интервал частот конечен, то говорят, что сигнал имеет *ограниченный спектр*. В противном случае спектр называют неограниченным.

В примерах, рассмотренных в § 2.2 и 2.3, ограниченные спектры имеют периодические сигналы  $u_1(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$  (см. рис. 2.2, а, б),  $u_2(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$  (см. рис. 2.2, г, д), которые являются гармоническими колебаниями. Ограниченным спектром обладает также периодический сигнал  $u_3''(t)$  (рис. 2.3, в); наивысшая частота  $\omega_b$  в спектре сигнала  $u_3''(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , равна частоте третьей гармоники и называется *верхней граничной частотой спектра*.

Из непериодических сигналов (см. рис. 2.4) ограниченным спектром обладает только один; этот сигнал описывается функцией (2.17). Спектральная плотность этого сигнала (2.26) и ее график (см. рис. 2.5, б) оказываются отличными от нуля только в ограниченной полосе частот от 0 до  $\Delta\omega$ . Так что верхняя граничная частота для данного сигнала  $\omega_b = \Delta\omega$ .

Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов является неограниченным. Это обусловлено тем, что для этого сигнала нельзя указать наивысшую частоту — амплитуды всех его гармоник в общем случае отличны от нуля. Это же относится и к спект-

ральной плотности одиночного прямоугольного импульса (см. рис. 2.5, а). Тем не менее желательно иметь возможность и для таких спектров определять их ширину. Обычно здесь рассуждают следующим образом.

Практически для всех реальных периодических сигналов амплитуды гармоник с ростом частоты этих гармоник уменьшаются, стремясь к нулю. Поэтому всегда можно указать такую частоту  $\omega_v$ , выше которой амплитуды последующих гармоник будут практически равны нулю и, следовательно, их можно отбросить. Это приведет соответственно к изменению формы сигнала и уменьшению его энергии. Однако часто эти изменения будут незначительными (несущественными), если будет незначительным уменьшение энергии сигнала. Поэтому за *ширину спектра* принимается такой интервал частот, для которого суммарная энергия гармоник сигнала равна заданному проценту от всей энергии сигнала. Например, для периодической последовательности прямоугольных импульсов энергия гармоник, частоты которых попадают в интервале от 0 до  $2(2\pi/\tau)$ , составляет 95 % энергии этого сигнала на одном периоде (см. рис. 2.2, з). Этот интервал частот равен ширине двух первых лепестков огибающей  $S_{ог}(\omega)$ . Лишь 5 % энергии такого сигнала приходится на частоты от  $2(2\pi/\tau)$  до  $\infty$ . Таким образом, если за ширину спектра принять интервал частот, содержащий 95 % энергии сигнала, то ширина спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

$$\Delta\omega = 2(2\pi/\tau), \quad (2.27)$$

где  $\tau$  — длительность импульса<sup>1</sup>.

Аналогичные рассуждения можно применить при определении ширины спектра и непериодического сигнала. Например, (2.27) можно использовать при вычислении ширины спектра одиночного прямоугольного импульса. Из (2.27) также следует, что чем меньше длительность импульса  $\tau$ , тем шире спектр соответствующего сигнала. Такая взаимосвязь между длительностью импульса и шириной его спектра остается справедливой при любой форме импульса.

Важно подчеркнуть, что только введенное определение ширины спектра содержит условие: в выделяемый

---

<sup>1</sup> Вместо (2.27) часто используют и другое соотношение:  $\Delta f = 1/\tau$ ; здесь  $\Delta f$  — ширина спектра в герцах.



интервал частот должно попадать 95 % энергии. Ясно, что если это число изменить, то изменится ширина спектра. Поэтому при практическом использовании понятия «ширина спектра» применительно к сигналам с неограниченным спектром всегда необходимо указывать это число.

## 2.5. Непрерывные и дискретные сигналы. Теорема Котельникова

Сигналы, которые описываются непрерывными функциями времени, называются *непрерывными*. Мгновенные значения таких сигналов изменяются во времени плавно, без резких скачков (разрывов). Примеры временных диаграмм непрерывных сигналов приведены на рис. 2.1, 2.2, а, г, 2.4, б, в. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. 2.2, ж) и одиночный прямоугольный импульс (см. рис. 2.4, а) не являются непрерывными сигналами, поскольку их мгновенные значения в некоторые моменты времени изменяются скачками.

Многие реальные сигналы являются непрерывными. К таковым можно отнести, например, электрические сигналы при передаче музыки, речи, многих изображений. Некоторые из непрерывных сигналов имеют ограниченный спектр. Для таких сигналов справедлива следующая *теорема Котельникова*: непрерывный сигнал с ограниченным спектром полностью определяется своими значениями в дискретные моменты времени, отстоящими друг от друга на время  $2\pi/2\omega_b$ , где  $\omega_b$  — верхняя граничная частота спектра этого сигнала<sup>1</sup>.

Смысл теоремы Котельникова поясним с помощью графика, изображенного на рис. 2.6, а. Пусть это будет график некоторого сигнала  $u(t)$  с ограниченным спектром; обозначим его верхнюю граничную частоту символом  $\omega_b$ . Будем считать, что можно осуществить измерения мгновенных значений  $u(t)$  в моменты времени  $\Delta t = \pi/\omega_b, 2\Delta t, 3\Delta t$  и т. д.;  $\Delta t$  называется *интервалом дискретизации* по времени. В теореме утверждается, что если значения  $u(\Delta t), u(2\Delta t), u(3\Delta t), \dots$ , отмеченные на рис. 2.6, а точками, точно известны, то по ним можно однозначно восстановить значения сигнала  $u(t)$  для любого

<sup>1</sup> Интервал между рассматриваемыми моментами времени часто определяют так же, как отношение  $1/2f_b$ , где  $f_b$  — верхняя граничная частота спектра в герцах.

заданного момента времени  $t$ . Этот факт объясняется тем, что в спектре сигнала  $u(t)$  нет гармоник с частотами, большими  $\omega_B$ , и, следовательно, быстрые изменения функции между соседними дискретными моментами времени невозможны.

На основе теоремы Котельникова непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть передан путем передачи его мгновенных значений, отсчитываемых в дискретные моменты времени — дискретных отсчетов, т.е. фактически задача сводится к передаче последовательности чисел.

В простейшем случае такой сигнал можно передавать путем передачи последовательности прямоугольных импульсов длительностью  $\tau$  с периодом следования  $\Delta t$  и амплитудами, совпадающими со значениями передаваемого непрерывного сигнала в соответствующие моменты времени, как это показано на рис. 2.6, б. Переход от непрерывного сигнала  $u(t)$  к последовательности импульсов  $v(t)$  называется *дискретизацией по времени*. Сигнал  $v(t)$  при этом часто называется импульсным или *дискретным по времени*.

Таким образом, теорема Котельникова лежит в основе импульсной передачи непрерывных сигналов; эта теорема указывает следующие условия, при которых передача непрерывных сигналов может быть сведена к пере-

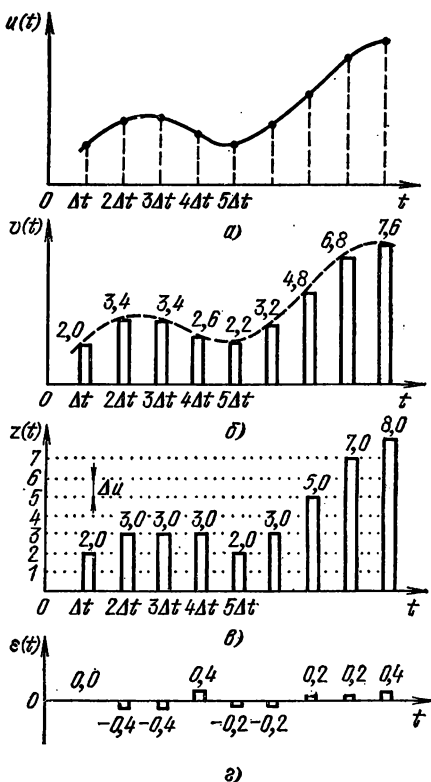


Рис. 2.6. Дискретизация и квантование непрерывного сигнала:

$a$  — непрерывный сигнал;  $б$  — импульсный сигнал;  $в$  — дискретный сигнал;  $г$  — ошибка квантования

даче отдельных импульсов: а) спектр передаваемого сигнала должен быть ограничен верхней граничной частотой  $\omega_B$ ; б) частота следования импульсов — отсчетов, или *тактовая частота*<sup>1</sup>

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi/\Delta t = \frac{2\pi}{\pi} \omega_B = 2\omega_B. \quad (2.28)$$

Реальные непрерывные сигналы, подлежащие передаче, как правило, имеют спектры, хотя и довольно быстро стремящиеся к нулю с ростом частоты, но все же неограниченные. Такие сигналы могут быть восстановлены по своим дискретным отсчетам лишь приближенно. Однако выбирая шаг дискретизации  $\Delta t$  достаточно малым, можно обеспечить пренебрежимо малое значение ошибки восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам в дискретные моменты времени. Например, при телефонной связи часто принимают, что верхняя граничная частота  $f_B = 3,4$  кГц. В этом случае получаем, что тактовая частота должна быть равна 6,8 кГц, т. е. в одну секунду должно передаваться 6,8 тысяч импульсов. Качество передачи речи при этом оказывается вполне удовлетворительным.

При импульсной передаче непрерывных сигналов передаются мгновенные значения сигнала, отсчитываемые в дискретные моменты времени. Поскольку исходный сигнал  $u(t)$  непрерывный, то и амплитуды импульсов соответствующего импульсного сигнала  $v(t)$  могут принимать любые значения, т. е. могут быть любыми числами. Говорят, что они заполняют *непрерывно* некоторый интервал; поэтому амплитуды импульсов последовательности  $v(t)$  иногда называют *непрерывными величинами*. Как будет показано в дальнейшем, при импульсной передаче сигналов обычно применяют специальное преобразование, состоящее в следующем. Предположим, что каждый передаваемый импульс может иметь амплитуду лишь с *разрешенным значением*. Число разрешенных значений амплитуд импульсов конечно и задано. Если истинное мгновенное значение сигнала  $u(t)$ , подлежащее передаче, попадает между разрешенными значениями, то амплитуда передаваемого импульса принимается равной разрешенному значению, являющемуся ближайшим

---

<sup>1</sup> Вместо (2.28) в расчетах удобно также использовать равенство  $f_c = 2f_B$ .

к истинному. Такое преобразование называется *квантованием*<sup>1</sup>, совокупность разрешенных значений амплитуд передаваемых импульсов — *шкалой квантования*, а интервал между соседними разрешенными значениями — *шагом квантования*. Эти понятия иллюстрируются с помощью рис. 2.6, в. Здесь  $\Delta u$  — шаг квантования; разрешенные значения  $0, \Delta u, 2\Delta u, 3\Delta u, \dots$  образуют равномерную шкалу квантования, которая может быть продолжена и на область отрицательных значений сигнала  $u(t)$ . Последовательность  $z(t)$  импульсов имеет только разрешенные дискретные значения амплитуд. Любые импульсные сигналы, амплитуды импульсов которых принимают только дискретные значения, называются дискретными.

Квантование приводит к *ошибке квантования*  $\varepsilon(t) = z(t) - v(t)$ . На рис. 2.6, г приведен пример графика функции  $\varepsilon(t)$ . Передача дискретного сигнала  $z(t)$  вместо  $v(t)$  фактически эквивалентна передаче импульсного сигнала  $v(t)$  с предварительно наложенной на него функцией  $\varepsilon(t)$ , которая в этом случае может рассматриваться как помеха. Поэтому  $\varepsilon(t)$  часто называют *помехой квантования* или *шумом квантования* [4].

Квантование при передаче сигналов, во-первых, позволяет применить импульсно-кодovou модуляцию и, следовательно, использовать все преимущества, обеспечиваемые ею, во-вторых, представляет собой мощное средство борьбы со случайными помехами (об этом более подробно см. в гл. 14).

## 2.6. Способы модуляции несущего колебания

В § 1.3 отмечалось, что при передаче сообщений от источника к получателю с помощью электромагнитных волн необходимо передаваемое сообщение или соответствующий ему электрический сигнал «ввести» в излучаемую электромагнитную волну. Этот процесс осуществляется путем модуляции несущего радиочастотного колебания модулирующим электрическим сигналом. Модулированное радиочастотное колебание, которое называется радиосигналом, подводится к передающей антенне и излучается в виде электромагнитной волны. Рассмотрим наиболее важные способы модуляции и свойства радиосигналов.

<sup>1</sup> Иногда называют «квантованием по уровню».

**Амплитудно-модулированные радиосигналы.** Рассмотрим математическую модель и спектр АМ радиосигнала.

Математическая модель АМ сигнала. Получим сначала математическое выражение, описывающее амплитудно-модулированный (АМ) радиосигнал в том случае, когда модулирующий сигнал  $u(t)$  является гармоническим колебанием с угловой частотой  $\Omega$ , амплитудой  $U_{mu}$  и начальной фазой, равной нулю:

$$u(t) = U_{mu} \sin \Omega t. \quad (2.29)$$

В качестве несущего радиочастотного колебания обычно выбирается также гармоническое колебание с амплитудой  $U_m$ , начальной фазой  $\psi$  и довольно высокой частотой  $\omega_0$ :

$$s(t) = U_m \sin (\omega_0 t + \psi). \quad (2.30)$$

При амплитудной модуляции амплитуда несущего колебания (2.30) должна изменяться пропорционально изменению мгновенного значения модулирующего сигнала  $u(t)$ . При этом говорят, что модуляция осуществляется без искажений передаваемого сообщения, если приращение амплитуды  $\Delta U_m$  пропорционально приращению мгновенного значения модулирующего сигнала  $\Delta u$ . Это означает, что мгновенное значение амплитуды модулированного радиосигнала

$$U_m(t) = U_m + a_{AM} U_{mu} \sin \Omega t \quad (2.31)$$

для любого момента времени  $t$ ; здесь  $a_{AM}$  — коэффициент пропорциональности.

Подставляя (2.31) вместо  $U_m$  в (2.30), получаем выражение

$$s_{AM}(t) = (U_m + a_{AM} U_{mu} \sin \Omega t) \sin (\omega_0 t + \psi), \quad (2.32)$$

описывающее амплитудно-модулированный радиосигнал (АМ сигнал) на любом конечном или бесконечном интервале времени. На рис. 2.7,  $a-b$  приведены соответственно графики функций (2.30), (2.29) и (2.32) при  $a_{AM} = 1$ .

Функцию (2.31), входящую также в (2.32), называют *огibaющей АМ сигнала*; график этой функции изображен на рис. 2.7, в штриховой линией. График АМ сигнала  $s_{AM}(t)$  лишь касается этой *огibaющей*, нигде не превышая ее значений. Ясно, что *огibaющая АМ сигнала* не может принимать отрицательных значений, т. е.

должно выполняться неравенство  $U_m(t) \geq 0$  для любого момента времени. Но тогда из (2.31) следует, что должно выполняться также и неравенство

$$U_m \geq -a_{AM} U_{mu} \sin \Omega t \quad (2.33)$$

при любом  $t$ .

Поскольку функция  $\sin \Omega t$  принимает и положительные и отрицательные значения из интервала от  $-1$  до

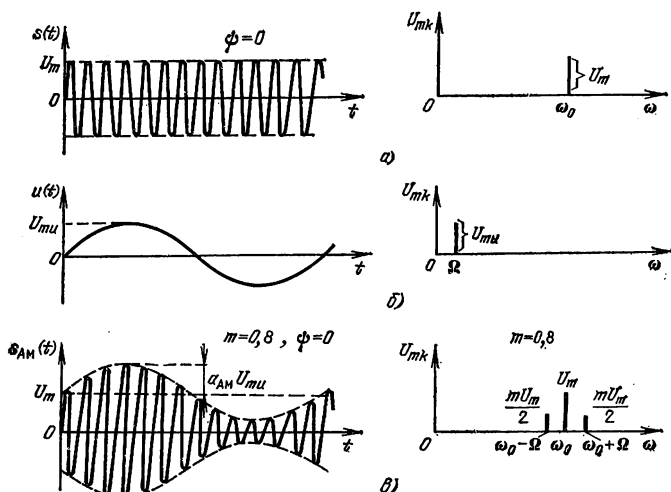


Рис. 2.7. Сигналы и их спектры при амплитудной модуляции гармоническим сигналом:

$a$  — несущее гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $U_m$ ;  $b$  — модулирующий гармонический сигнал с частотой  $\Omega$ ;  $v$  — АМ сигнал

$+1$ , то правая часть (2.33) имеет наибольшее значение, равное  $a_{AM} U_{mu}$ . Следовательно, амплитудная модуляция будет осуществляться без искажений, если

$$a_{AM} U_{mu} \leq U_m. \quad (2.34)$$

Величина  $a_{AM} U_{mu}$  представляет собой максимальное значение приращения огибающей радиосигнала при амплитудной модуляции. В соответствии с (2.34) это приращение не должно превышать амплитуды модулируемого радиочастотного колебания  $s(t)$ .

В дальнейшем ради упрощения записи в (2.32) будем иногда считать, что  $a_{AM} = 1$  и  $\psi = 0$ ; так что (2.32) для

АМ сигнала при модулирующем сигнале (2.29) принимает вид

$$s_{\text{АМ}}(t) = (U_m + U_{mu} \sin \Omega t) \sin \omega_0 t \quad (2.35)$$

для любого момента времени.

Важным параметром АМ сигналов является *коэффициент модуляции*, равный отношению максимального значения приращения огибающей к амплитуде немодулированного радиосигнала, т. е. в соответствии с (2.35)

$$m = U_{mu}/U_m. \quad (2.36)$$

С использованием этого обозначения (2.35) можно записать иначе:

$$s_{\text{АМ}}(t) = U_m (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t. \quad (2.37)$$

Если модуляции нет, то  $m=0$ , и амплитуда радиосигнала не меняется во времени. Если же  $m=1$ , то огибающая радиосигнала меняется во времени от минимального значения, равного нулю, до максимального  $2U_m$ . Если  $m>1$ , то нарушается условие (2.34) и возникают искажения, называемые *перемодуляцией*.

Выражение (2.32) описывает АМ сигнал лишь в том случае, когда модулирующий сигнал  $u(t)$  представляет собой периодическое колебание (2.29). Если же  $u(t)$  является более сложной функцией времени, то АМ сигнал

$$s_{\text{АМ}}(t) = (U_m + a_{\text{АМ}} u(t)) \sin(\omega_0 t + \psi). \quad (2.38)$$

Это выражение описывает АМ сигнал при произвольном модулирующем сигнале на любом конечном или бесконечном интервале времени.

**Спектр АМ сигнала.** В § 2.1 — 2.5 отмечалось, что важные сведения о свойствах сигналов содержатся в их спектрах. Это утверждение справедливо и для АМ сигналов. Покажем, как вычисляются спектры таких сигналов.

Рассмотрение начнем с простейшего примера АМ сигнала, когда амплитудная модуляция осуществляется модулирующим гармоническим сигналом с амплитудой  $U_{mu}$  и частотой  $\Omega$ . Соответствующее выражение, описывающее АМ сигнал в этом случае как функцию времени, приведено выше [см. (2.37)]. Вычисление спектра любого сигнала фактически сводится к задаче представления этого сигнала либо в виде ряда Фурье (для периодических сигналов), либо в виде интеграла Фурье (для непериодических сигналов). В обоих случаях анализируемый

сигнал представляется суммой гармонических слагаемых, называемых *гармониками*. Амплитуды этих гармоник и определяют спектр представляемого сигнала.

Сигнал (2.37) можно и не представлять в виде ряда или интеграла Фурье, поскольку его нетрудно сразу записать в виде суммы гармонических слагаемых:

$$s_{AM}(t) = U \sin \omega_0 t + mU_m \sin \Omega t \sin \omega_0 t. \quad (2.39)$$

Так как  $\sin \Omega t \sin \omega_0 t = \frac{1}{2} [\cos (\omega_0 - \Omega) t - \cos (\omega_0 + \Omega) t]$ , то вместо (2.39) можно записать

$$s_{AM}(t) = U_m \sin \omega_0 t + \frac{mU_m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t - \frac{mU_m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t. \quad (2.40)$$

Таким образом, если гармоническое колебание с амплитудой  $U_m$  и угловой частотой  $\omega_0$  модулировано по амплитуде гармоническим модулирующим сигналом с амплитудой  $U_m$  и угловой частотой  $\Omega$ , то в результате получаем негармоническое колебание  $s_{AM}(t)$ , которое можно рассматривать как сумму следующих трех гармонических колебаний:  $s(t)$  с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $U_m$ , с частотой  $\omega_0 - \Omega$  и амплитудой  $mU_m/2$  и, наконец, с частотой  $\omega_0 + \Omega$  и амплитудой  $mU_m/2$ . Примеры графиков несущего колебания  $s(t)$ , модулирующего сигнала  $u(t)$  и АМ сигнала (2.40) и их спектров приведены на рис. 2.7.

Для дальнейшего удобны следующие названия слагаемых в (2.40):  $mU_m/2 \cos (\omega_0 + \Omega) t$  — гармоническое колебание с амплитудой  $mU_m/2$  и *верхней боковой частотой*  $\omega_0 + \Omega$ ,  $mU_m/2 \cos (\omega_0 - \Omega) t$  — гармоническое колебание с амплитудой  $mU_m/2$  и *нижней боковой частотой*  $\omega_0 - \Omega$ ;  $U_m \sin \omega_0 t$  — несущее колебание. Термин «*боковая частота*» подчеркивает, что соответствующие частоты  $\omega_0 - \Omega$  и  $\omega_0 + \Omega$  находятся по обе стороны от частоты  $\omega_0$  несущего колебания. Спектральные линии длиной  $mU_m/2$  на боковых частотах называются соответственно *нижней и верхней боковыми спектральными линиями*. Если амплитудная модуляция отсутствует, т. е. коэффициент модуляции  $m=0$ , то боковые спектральные линии отсутствуют и спектр АМ сигнала переходит в спектр несущего колебания.

Подчеркнем здесь также, что все частоты спектра АМ сигнала располагаются в окрестности частоты несущего



колебания. Поэтому можно сказать, что при амплитудной модуляции спектр низкочастотного управляющего сигнала *переносится* в область высокой частоты. Таким образом, АМ сигнал содержит гармонические слагаемые только с высокими частотами; именно поэтому такой сигнал можно эффективно излучать с помощью передающих антенн, создавая тем самым электромагнитные волны, распространяющиеся от передатчика к приемнику системы передачи.

Рассмотрим теперь кратко способ вычисления спектра АМ сигнала для случая, когда модулирующий сигнал  $u(t)$  не является гармоническим колебанием, а имеет более сложную форму. Пусть модулирующий сигнал  $u(t)$  является периодической функцией времени с периодом повторения  $T$ . В соответствии с изложенным в § 2.2 такой сигнал может быть представлен рядом Фурье на всей оси времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е.

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\Omega t + \psi_k), \quad (2.41)$$

где  $U_0$  — постоянная составляющая;  $\Omega = 2\pi/T$  — основная частота;  $U_{mk}$  и  $\psi_k$  — амплитуда и фаза  $k$ -й гармоники сигнала  $u(t)$ .

Для большинства реальных модулирующих сигналов постоянная составляющая равна нулю, т. е.  $U_0 = 0$ . Коэффициенты  $U_{mk}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяют амплитудный спектр сигнала  $u(t)$ . Графики периодического модулирующего сигнала и его спектра приведены на рис. 2.8, а.

Поскольку (2.38) справедлива для представления АМ сигнала при модулирующем сигнале любой формы, то в (2.38) можно вместо сигнала  $u(t)$  подставить его представление в виде ряда Фурье (2.41). В результате получим

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= \left[ U_m + a_{AM} \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\Omega t + \psi_k) \right] \sin(\omega_0 t + \psi) = \\ &= U_m \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \sin(k\Omega t + \psi_k) \right] \sin(\omega_0 t + \psi) = \\ &= U_m \sin(\omega_0 t + \psi) + \sum_{k=1}^{\infty} m_k U_m \sin(k\Omega t + \psi_k) \sin(\omega_0 t + \psi). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Формула (2.42) напоминает (2.39) и отличается от нее лишь тем, что число слагаемых, содержащих произведения синусов с разными частотами, теперь значительно больше. Вновь используя формулу представления каждого произведения синусов через полуразность ко-

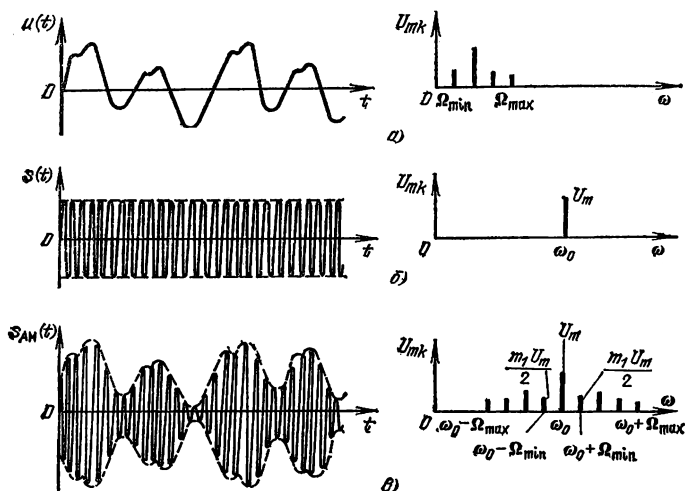


Рис. 2.8. Сигналы и их спектры при амплитудной модуляции периодическим сигналом с ограниченным спектром:

*a* — модулирующий периодический сигнал; *б* — несущее колебание; *в* — АМ сигнал

синусов разности и суммы их аргументов, вместо (2.42) получаем

$$\begin{aligned}
 s_{AM}(t) = & U_m \sin(\omega_0 t + \psi) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k U_m}{2} \cos[(\omega_0 - k\Omega)t + \psi - \psi_k] - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k U_m}{2} \cos[(\omega_0 + k\Omega)t + \psi + \psi_k]. \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

Формула (2.43) представляет АМ сигнал как функцию времени на всей оси времени от  $-\infty$  до  $+\infty$  в виде суммы гармонических сигналов с разными амплитудами, частотами и фазами. Следовательно, для сигнала (2.43) нетрудно изобразить амплитудный спектр, пример кото-

рого приведен на рис. 2.8, в вместе с графиком сигнала  $s_{AM}(t)$ .

Так же как и в предыдущем случае, спектр сигнала  $s_{AM}(t)$  содержит кроме спектральной линии на частоте  $\omega_0$  верхние боковые спектральные линии с частотами  $\omega_0 + k\Omega$ ,  $k=1, 2, \dots$ , и нижние спектральные линии с частотами  $\omega_0 - k\Omega$ ,  $k=1, 2, \dots$ . Однако теперь их может быть много. Для дальнейшего удобно все верхние боковые частоты называть *верхней боковой полосой*, а все нижние боковые частоты — *нижней боковой полосой* спектра АМ сигнала  $s_{AM}(t)$ .

Подчеркнем в заключение, что и в случае амплитудной модуляции периодическим сигналом сложной формы можно говорить о переносе спектра модулирующего сигнала в область высоких частот. Более того, поскольку в (2.43)  $m_k = \sigma_{AM} U_{mk}/U_m$  и, следовательно, амплитуды гармоник  $m_k U_m/2 = a_{AM} U_{mk}/2$ ,  $k=1, 2, \dots$ , то форма огибающей спектральных линий модулирующего сигнала при переносе спектра в область высоких частот сохраняется. Например, это иллюстрируется на рис. 2.8, а и в, а также на рис. 2.9, а и в, построенных при модуляции

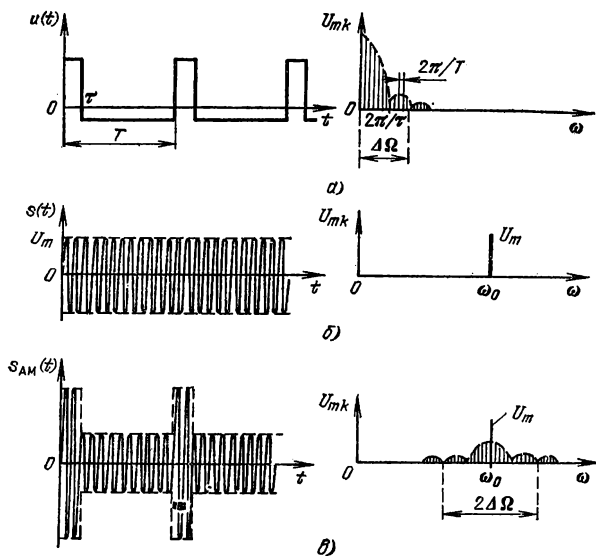


Рис. 2.9. Сигналы и их спектры при амплитудной модуляции периодическим сигналом с неограниченным спектром:

а — модулирующий сигнал — периодическая последовательность прямоугольных импульсов; б — несущее колебание; в — АМ сигнал

несущего колебания периодической последовательностью прямоугольных импульсов с нулевой постоянной составляющей.

**Ширина спектра АМ сигнала.** Очень важной для практических приложений характеристикой АМ сигнала является ширина его спектра — полоса частот, в которой сосредоточена основная часть энергии АМ сигнала. Для спектра АМ сигнала, изображенного на рис. 2.8, в, указать такую полосу относительно просто. Действительно, все спектральные линии здесь располагаются в интервале от  $\omega_0 - \Omega_{\max}$  до  $\omega_0 + \Omega_{\max}$ , так что ширина спектра такого АМ сигнала  $\Delta\omega_{\text{АМ}} = (\omega_0 + \Omega_{\max}) - (\omega_0 - \Omega_{\max}) = 2\Omega_{\max}$ , т. е. равна удвоенному значению ширины спектра модулирующего сигнала. Для спектра, приведенного на рис. 2.9, в, ширина определяется не так просто, поскольку здесь нельзя указать наивысшую частоту в спектре управляющего сигнала. Если в качестве ширины спектра модулирующего сигнала  $\Delta\Omega$  выбрать интервал частот, в котором располагаются два первых лепестка огибающей спектра, то для ширины спектра АМ сигнала также следует выбрать интервал частот от

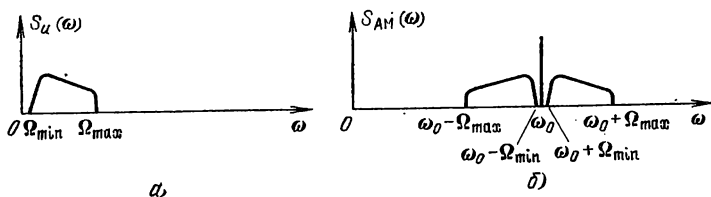


Рис. 2.10. Спектральная плотность:

а — модулирующего непериодического сигнала; б — соответствующего ему АМ сигнала

$\omega_0 - \Delta\Omega$  до  $\omega_0 + \Delta\Omega$ , т. е. вновь ширина спектра АМ сигнала равна удвоенному значению ширины спектра модулирующего сигнала.

Можно показать, что подобные соотношения между спектрами модулирующего сигнала и соответствующего ему АМ сигнала сохраняются и в том случае, когда модулирующий сигнал является непериодическим (рис. 2.10). Оба спектра при этом являются непрерывными и их следует называть спектральными плотностями.

Отметим в заключение, что при амплитудной модуляции полезное сообщение содержится в боковых полосах спектра АМ сигнала, которые полностью повторяют

спектр модулирующего сигнала. Эти полосы одинаковы (см. рис. 2.10) и располагаются симметрично относительно несущей частоты. Поэтому для передачи сообщения в принципе достаточно передавать (излучать в виде электромагнитной волны) лишь одну боковую полосу частот спектра АМ сигнала. Модуляция, в результате которой получаются колебания одной боковой полосы, называется *однополосной*. При однополосной модуляции ширина спектра модулированного колебания вдвое меньше, чем при АМ.

**Частотно-модулированные радиосигналы.** Рассмотрим математическую модель и спектр ЧМ сигнала.

**Математическая модель ЧМ сигнала.** Как и для АМ сигналов, рассмотрим сначала случай, когда несущее колебание (2.30) модулируется по частоте гармоническим модулирующим сигналом (2.29) с угловой частотой  $\Omega$  и амплитудой  $U_{mu}$ . При частотной модуляции изменяемым параметром несущего колебания является частота  $\omega_0$ : при этом отклонение значения этой частоты в момент времени  $t$   $\Delta\omega(t)$  от значения  $\omega_0$  должно быть пропорционально мгновенному значению модулирующего сигнала  $u(t)$  в этот же момент времени. Это означает, что

$$\Delta\omega(t) = a_{\text{ЧМ}} U_{mu} \sin \Omega t, \quad (2.44)$$

а частота радиосигнала в момент времени  $t$

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + a_{\text{ЧМ}} U_{mu} \sin \Omega t. \quad (2.45)$$

Таким образом, частота частотно-модулированного радиосигнала (ЧМ сигнала) меняется во времени пропорционально изменениям мгновенного значения модулирующего сигнала.

Поскольку  $\sin \Omega t$  при изменении  $t$  принимает значения из интервала от  $-1$  до  $+1$ , то частота модулированного по частоте радиосигнала изменяется в интервале от  $\omega_0 - a_{\text{ЧМ}} U_{mu}$  до  $\omega_0 + a_{\text{ЧМ}} U_{mu}$ . Наибольшее отклонение частоты  $\omega$  от  $\omega_0$ , равное  $\Delta\omega_m = a_{\text{ЧМ}} U_{mu}$ , называется *девиацией частоты*<sup>1</sup>. Поэтому вместо (2.45) можно записать

$$\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + \Delta\omega_m \sin \Omega t. \quad (2.46)$$

Выражение (2.46) нельзя непосредственно подставлять в (2.30) вместо  $\omega_0$ , поскольку аргумент  $\omega_0 t + \psi = \psi(t)$

<sup>1</sup> Так как  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f_m$ , то  $\Delta f_m$  — наибольшее отклонение частоты в герцах также часто называют девиацией частоты.

косинуса в (2.30) определяет фазу  $\psi(t)$  несущего колебания  $s(t)$  в момент времени  $t$ . Фаза гармонического колебания (2.30) линейно увеличивается во времени. При этом  $d\psi(t)/dt = \omega_0$ . Поэтому для колебания (2.30)  $\psi(t) = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + \psi$ , где  $\psi$  можно интерпретировать как постоянную интегрирования при вычислении неопределенного интеграла. Таким образом, частоту несущего колебания  $s(t)$  можно найти путем дифференцирования его фазы  $\psi(t)$  и, наоборот, фазу  $\psi(t)$  этого колебания можно определить путем интегрирования по времени его частоты. Это утверждение остается справедливым и в том случае, когда частота несущего колебания изменяется во времени. Используем этот результат для получения выражения ЧМ сигнала, частота которого изменяется во времени в соответствии с (2.46).

Фазу радиосигнала с частотой (2.46) в момент времени  $t$  находим путем интегрирования, т. е.

$$\psi_{\text{ЧМ}}(t) = \int [\omega_0 + \Delta\omega_m \sin \Omega t] dt = \omega_0 t - \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \cos \Omega t + \psi. \quad (2.47)$$

В результате ЧМ сигнал при модулирующем сигнале (2.29) можно описать следующей функцией времени:

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \sin \psi_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \sin \left[ \omega_0 t - \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \cos \Omega t + \psi \right]. \quad (2.48)$$

Отношение  $\Delta\omega_m/\Omega$  называется *индексом частотной модуляции*<sup>1</sup>:

$$M = \Delta\omega_m/\Omega = a_{\text{ЧМ}} U_{mi}/\Omega, \quad (2.49)$$

который прямо пропорционален амплитуде  $U_{mi}$  гармонического модулирующего сигнала и обратно пропорционален его частоте  $\Omega$ .

Рассмотрим теперь более общий случай, когда модулирующий сигнал  $u(t)$  является произвольной функцией времени  $t$ . В соответствии с (2.44) отклонение частоты от значения  $\omega_0 \Delta\omega(t) = a_{\text{ЧМ}} u(t)$ , так что частота радиосигнала в момент времени  $t$   $\omega_{\text{ЧМ}}(t) = \omega_0 + a_{\text{ЧМ}} u(t)$ . Как и в

<sup>1</sup> Индекс частотной модуляции часто определяют как отношение  $\Delta f_m/F$ , где  $\Delta f_m$  — девиация частоты, а  $F$  — частота модулирующего сигнала, измеряемые в герцах.

(2.47), фазу ЧМ сигнала в момент времени  $t$  находим путем интегрирования

$$\psi_{\text{ЧМ}}(t) = \int [\omega_0 + a_{\text{ЧМ}} u(t)] dt = \omega_0 t + a_{\text{ЧМ}} \int u(t) dt + \psi.$$

В результате при произвольном модулирующем сигнале ЧМ сигнал

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \sin \psi_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \sin [\omega_0 t + a_{\text{ЧМ}} \int u(t) dt + \psi]. \quad (2.50)$$

На рис. 2.11 приведены графики функций, описывающих ЧМ сигнал.

Спектр ЧМ сигнала. Перейдем теперь к нахождению спектров ЧМ сигналов. Начнем с наиболее

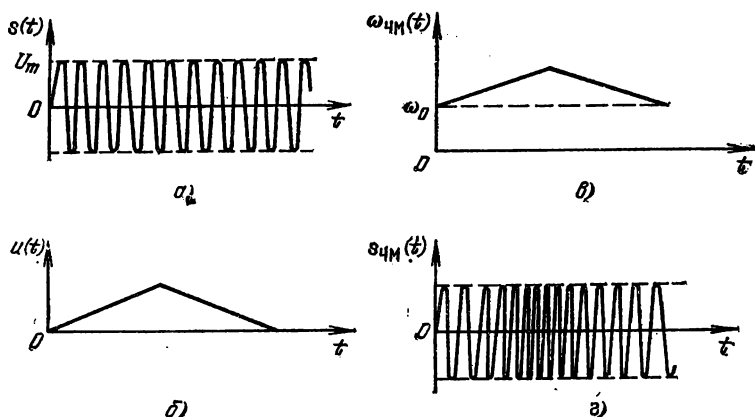


Рис. 2.11. Частотно-модулированный сигнал:

$a$  — несущее колебание;  $б$  — модулирующий сигнал;  $в$  — изменение частоты ЧМ сигнала;  $г$  — ЧМ сигнал

простого случая, когда модулирующий сигнал — гармоническое колебание с амплитудой  $U_{mi}$  и частотой  $\Omega$ . Если в (2.48) ввести обозначение (2.49) для индекса модуляции, то для ЧМ сигнала получим

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \sin [\omega_0 t - M \cos \Omega t + \psi]. \quad (2.51)$$

Используя (2.2) для синуса разности углов вместо (2.51), можно записать

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = U_m [\sin (\omega_0 t + \psi) \cos (M \cos \Omega t) - \cos (\omega_0 t + \psi) \sin (M \cos \Omega t)]. \quad (2.52)$$

В (2.52) тригонометрическая функция  $M \cos \Omega t$  входит в аргументы других тригонометрических функций  $\cos x$  и  $\sin x$ . Для таких функций известны следующие разложения:

$$\cos(M \cos \Omega t) = J_0(M) - 2J_2(M) \cos 2\Omega t + 2J_4(M) \cos 4\Omega t - \\ - 2J_6(M) \cos 6\Omega t + \dots,$$

$$\sin(M \cos \Omega t) = 2J_1(M) \cos \Omega t - 2J_3(M) \cos 3\Omega t + \\ + 2J_5(M) \cos 5\Omega t - 2J_7(M) \cos 7\Omega t + \dots,$$

где  $J_k(M)$  — функция Бесселя порядка  $k$ . Подставив эти выражения в (2.52), получим следующее представление ЧМ сигнала в виде суммы гармонических составляющих:

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \psi) [J_0(M) - 2J_2(M) \cos 2\Omega t + \\ + 2J_4(M) \cos 4\Omega t - \dots] - U_m \cos(\omega_0 t + \psi) [2J_1(M) \cos \Omega t - \\ - 2J_3(M) \cos 3\Omega t + 2J_5(M) \cos 5\Omega t - \dots] = \\ = U_m J_0(M) \sin(\omega_0 t + \psi) - 2U_m J_1(M) \cos(\omega_0 t + \\ + \psi) \cos \Omega t - 2U_m J_2(M) \sin(\omega_0 t + \psi) \cos 2\Omega t + \\ + 2U_m J_3(M) \cos(\omega_0 t + \psi) \cos 3\Omega t + 2U_m J_4(M) \sin(\omega_0 t + \\ + \psi) \cos 4\Omega t - \dots = U_m J_0(M) \sin(\omega_0 t + \psi) - \\ - U_m J_1(M) \{\cos[(\omega_0 - \Omega)t + \psi] + \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \psi]\} - \\ - U_m J_2(M) \{\sin[(\omega_0 - 2\Omega)t + \psi] + \sin[(\omega_0 + 2\Omega)t + \psi]\} + \\ + U_m J_3(M) \{\cos[(\omega_0 - 3\Omega)t + \psi] + \cos[(\omega_0 + 3\Omega)t + \\ + \psi]\} + \dots \quad (2.53)$$

Из (2.53) следует, что частоты гармонических составляющих равны  $\omega_0$ ,  $\omega_0 - \Omega$ ,  $\omega_0 + \Omega$ ,  $\omega_0 - 2\Omega$ ,  $\omega_0 + 2\Omega$  и т. д. А амплитуды соответственно  $J_0(M) U_m$ ,  $J_1(M) U_m$ ,  $J_1(M) U_m$ ,  $J_2(M) U_m$ ,  $J_2(M) U_m$  и т. д. Таким образом, при модуляции одним гармоническим сигналом  $u(t) = U_m \sin \Omega t$  ЧМ сигнал  $s_{\text{ЧМ}}(t)$  имеет неограниченный дискретный спектр. Для вычисления амплитуд отдельных гармонических составляющих необходимо пользоваться таблицами значений функций Бесселя  $J_k(M)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ . На рис. 2.12 приведены графики функций Бесселя до шестого порядка для разных значений индекса модуляции.

Например, при  $M=1$  в соответствии с графиками, представленными на рис. 2.12, имеем  $J_0(1)=0,78$ ,  $J_1(1)=0,38$ ,  $J_2(1)=0,13$ ,  $J_3(1)=0,03$ ,  $J_k(1)=0$  при  $k \geq 4$ . Тогда в (2.53) все слагаемые с частотами  $\omega_0 + k\Omega$  и  $\omega_0 - k\Omega$



при  $k \geq 4$  будут иметь очень малые амплитуды и ими можно пренебречь. Соответствующий спектр ЧМ сигнала изображен на рис. 2.13, а. Здесь использовано обозначение  $U_{mk}$  для амплитуд гармонических составляющих ЧМ сигнала с частотами  $\omega_0 - k\Omega$ ,  $\omega_0 + k\Omega$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ . С ростом значения индекса модуляции  $M$  спектр ЧМ сигнала существенно усложняется (рис. 2.13, б).

Ширина спектра ЧМ сигнала. Поскольку спектр ЧМ сигнала не ограничен, то при определении ширины спек-

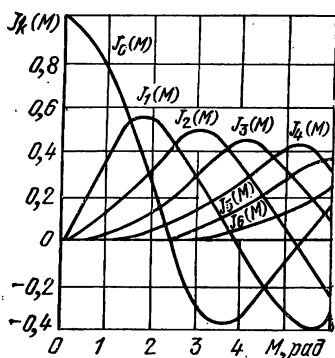


Рис. 2.12. Функции Бесселя

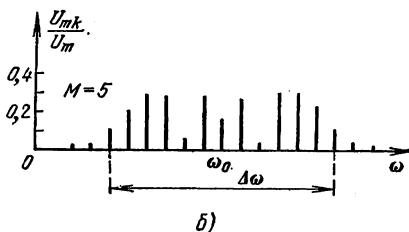
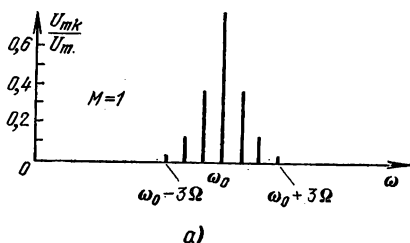


Рис. 2.13. Спектры ЧМ сигналов при гармоническом модулирующем сигнале и разных значениях индекса модуляции

ра часто не учитывают гармонические составляющие, амплитуда которых не превышает значения 0,1 от амплитуды  $U_m$  несущего колебания. Так, в соответствии с рис. 2.13, а ширина спектра ЧМ сигнала при  $M=1$  равна  $2\cdot 2\Omega$ , где  $2\Omega$  — ширина одной боковой полосы, в которую попадают частоты  $\omega_0 + \Omega$ ,  $\omega_0 + 2\Omega$  или частоты  $\omega_0 - \Omega$ ,  $\omega_0 - 2\Omega$ . Аналогично из рис. 2.13, б получаем, что при  $M=5$  ширина спектра  $\Delta\omega = 2\cdot 6\Omega$ . В общем случае можно показать, что при таком определении ширины спектра ЧМ сигнала при гармоническом управляющем сигнале и произвольном индексе модуляции  $M$  получаем<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ширина спектра  $\Delta f$  в герцах этого сигнала определяется из равенства  $\Delta f = 2(M+1) F$ .

$$\Delta\omega = 2(M + 1)\Omega. \quad (2.54)$$

Из (2.54) и (2.49) можно сделать следующие важные выводы:

1) при частотной модуляции ширина спектра модулированного сигнала зависит как от частоты, так и от амплитуды управляющего сигнала;

2) при  $M \ll 1$  из (2.54) получаем  $\Delta\omega \approx 2\Omega$ , что совпадает с шириной спектра АМ сигнала;

3) при  $M \gg 1$  вместо (2.54) можно записать  $\Delta\omega \approx 2M\Omega$ ; так как  $M = \Delta\omega_m / \Omega$ , то  $\Delta\omega \approx 2\Delta\omega_m$ , т. е. при больших индексах модуляции ширина спектра ЧМ сигнала примерно равна удвоенному значению девиации частоты и практически не зависит от частоты модулирующего гармонического сигнала  $\Omega$ .

**Фазо-модулированные радиосигналы.** Рассмотрим математическую модель и спектр ФМ сигнала.

Математическая модель ФМ сигнала. В качестве несущего радиочастотного колебания вновь выберем гармоническое колебание (2.30). В момент времени  $t$  фаза этого колебания

$$\psi(t) = \omega_0 t + \psi \quad (2.55)$$

и линейно нарастает при увеличении  $t$ .

При фазовой модуляции отклонение фазы  $\Delta\psi(t)$  от  $\psi(t)$  немодулированного несущего колебания должно быть пропорционально изменению мгновенного значения модулирующего сигнала  $u(t)$ , т. е.

$$\Delta\psi(t) = a_{\text{ФМ}} u(t) \quad (2.56)$$

для любого текущего момента времени  $t$ .

Таким образом, фаза ФМ сигнала

$$\psi_{\text{ФМ}}(t) = \psi(t) + \Delta\psi(t) = \omega_0 t + \psi + a_{\text{ФМ}} u(t). \quad (2.57)$$

В результате ФМ сигнал

$$s_{\text{ФМ}}(t) = U_m \sin(\omega_0 t + a_{\text{ФМ}} u(t) + \psi) \quad (2.58)$$

для любого текущего момента времени  $t$ .

Производная  $\psi_{\text{ФМ}}(t)$  ФМ сигнала определяет частоту этого сигнала  $d\psi_{\text{ФМ}}(t)/dt = \omega_0 + a_{\text{ФМ}} du(t)/dt$ , т. е. частота ФМ сигнала меняется во времени, причем ее отклонение в момент времени  $t$  от частоты  $\omega_0$  немодулированного несущего колебания пропорционально значению

производной модулирующего сигнала в этот же момент времени. Поэтому ФМ сигналы обладают многими свойствами, типичными также и для частотно-модулированных сигналов.

На рис. 2.14 приведены графики функций, описывающих ФМ радиосигнал<sup>1</sup>.

Спектр ФМ сигнала. Спектры ФМ сигналов вычисляются так же, как и спектры ЧМ сигналов. Действи-

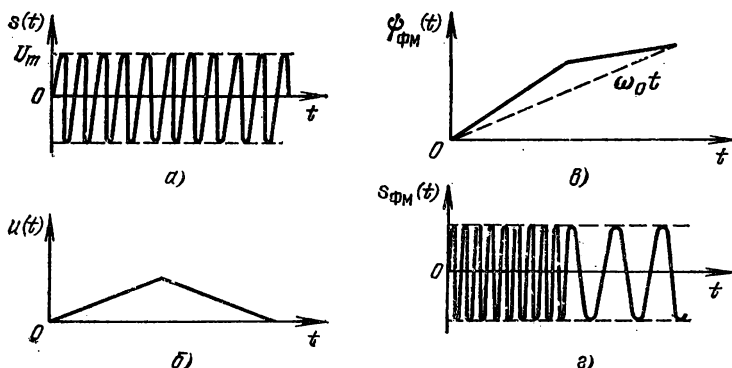


Рис. 2.14. Фазовая модуляция сигнала:

*a* — несущее колебание; *б* — модулирующий сигнал; *в* — фаза ФМ сигнала; *г* — ФМ сигнал

тельно, из сравнения выражений (2.58), описывающего ФМ сигнал, и (2.50), описывающего ЧМ сигнал, следует, что различие между этими сигналами состоит лишь в том, что в ФМ сигнал входит модулирующий сигнал  $u(t)$ , а в ЧМ сигнал — интеграл от него. Если, например,  $u(t) = -U_{mu} \cos \Omega t$ , то в соответствии с (2.58) для ФМ сигнала получаем

$$\begin{aligned} s_{\text{ФМ}}(t) &= U_m \sin(\omega_0 t + \psi - a_{\text{ФМ}} U_{mu} \cos \Omega t) = \\ &= U_m \sin(\omega_0 t + \psi - \Delta\psi_m \cos \Omega t). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Это выражение отличается от (2.51), описывающего ЧМ сигнал при модулирующем сигнале в виде гармонического колебания с частотой  $\Omega$ , только тем, что индекс частотной модуляции  $M = \Delta\omega_m / \Omega$  заменен *индексом фазовой*

<sup>1</sup> Полезно сравнить графики, представленные на рис. 2.11 и 2.14.

модуляции  $\Delta\psi_m$ , который представляет собой максимальное значение отклонения фазы ФМ сигнала от фазы несущего немодулированного колебания. Поэтому способ вычисления спектра ФМ сигнала точно такой же, как и для ЧМ сигнала.

В частности, при модуляции гармоническим управляющим сигналом ширина спектра ФМ сигнала

$$\Delta\omega = 2(\Delta\psi_m + 1)\Omega. \quad (2.60)$$

Подчеркнем, что индекс  $\Delta\psi_m = a_{\text{ФМ}} U_{mi}$  зависит только от амплитуды модулирующего сигнала  $U_{mi}$  и не зависит от его частоты  $\Omega$ . Поэтому при любом значении индекса  $\Delta\psi_m$  ширина спектра ФМ сигнала прямо пропорциональна частоте модулирующего сигнала  $\Omega$ .

### Контрольные вопросы и упражнения

- 2.1. Что называется математической моделью электрического сигнала? Приведите пример электрического сигнала и укажите его модель.
- 2.2. Какие сигналы называются периодическими? Приведите два примера периодических сигналов; запишите выражения функций времени, описывающих эти сигналы, и нарисуйте их графики.
- 2.3. Дайте определение спектра амплитуд и спектра фаз периодического сигнала.
- 2.4. Постройте графики спектра амплитуд и спектра фаз периодического сигнала  $u(t) = U_m \sin(\omega_1 t + \psi)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ . Как изменятся графики спектров, если начальная фаза сигнала увеличится на  $90^\circ$ ?
- 2.5. Приведите определение ширины спектра периодического сигнала. Проиллюстрируйте это определение рисунком на примере спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов. Зависит ли ширина спектра этого сигнала от длительности импульса?
- 2.6. Какие сигналы обладают дискретным спектром? Чем определяется расстояние по оси частот между двумя соседними спектральными линиями дискретного спектра?
- 2.7. Приведите два примера непериодических сигналов. Нарисуйте графики функций времени, описывающих эти сигналы. В чем состоит основное отличие этих сигналов от периодических?
- 2.8. Нарисуйте график спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса с амплитудой  $U_m$  и длительностью  $\tau$ . В чем сходство и отличие этого графика от графика спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов?
- 2.9. Поясните сущность теоремы Котельникова о дискретизации сигналов с ограниченным спектром.
- 2.10. Что представляет собой дискретный сигнал? Поясните причину возникновения шума квантования.

- 2.11. Назовите основные способы модуляции несущего гармонического колебания, используемые в радиотехнике. Поясните их сущность и назначение.
- 2.12. Поясните причину возникновения при амплитудной модуляции искажения, называемого перемодуляцией. Проиллюстрируйте рассуждения графиками.
- 2.13. Нарисуйте график спектров АМ сигналов при модуляции периодическим и непериодическим сигналами. Укажите на них ширину спектров, верхние и нижние боковые полосы.
- 2.14. Рассчитайте и постройте график спектра АМ сигнала, если модулирующий сигнал  $u(t) = 2a_1 \cos \Omega_1 t + a_1 \sin \Omega_2 t$ ; вычислите ширину спектра этого АМ сигнала.
- 2.15. Нарисуйте график функции времени, описывающей ЧМ сигнал, если модулирующий сигнал представляется линейной функцией на интервале времени от  $t_0$  до  $t_0 + T$ .
- 2.16. Рассчитайте и постройте график спектра ЧМ сигнала при модуляции гармоническим управляющим сигналом с частотой  $\Omega$  и при индексе частотной модуляции  $M=2$ . Вычислите ширину спектра этого ЧМ сигнала.
- 2.17. Каково основное назначение радиосигналов? Чем отличаются радиосигналы от модулирующих сигналов?

## Часть II

# ЛИНЕЙНЫЕ, НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

---

### ГЛАВА 3

## КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Для передачи информации с помощью электромагнитных волн необходимы специальные технические устройства, с помощью которых происходит генерирование электрических колебаний, их модуляция, усиление и детектирование. Каждое такое устройство состоит из совокупности разнообразных *электрических цепей*. Несмотря на относительную сложность этих цепей, они содержат ограниченное число сравнительно простых элементов.

Электрические цепи и их элементы характеризуются рядом общих свойств независимо от того, в каких конкретных технических устройствах они используются. Рассмотрим некоторые из этих свойств. Основное внимание уделим следующим вопросам:

1. *Какие величины характеризуют элементы электрических цепей — двухполюсники?*
2. *Чем отличаются друг от друга линейные, нелинейные и параметрические цепи?*
3. *Что такое четырехполюсники, каковы их основные характеристики?*

### 3.1. Элементы электрических цепей и их свойства

**Классификация.** Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока. Отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи, выполняющее в ней определенную функцию, называется *элементом электрической цепи*.

*Электрические цепи* предназначены для передачи электромагнитной энергии от *источника* (генератора) в *приемник* (нагрузку). Источники и приемники электромагнитной энергии являются элементами электрической цепи. Элементы цепи, содержащие источники энергии,

принято называть *активными*, а не содержащие таких источников — *пассивными*.

Каждый источник и приемник энергии имеют два зажима, с помощью которых осуществляется электрическая связь между ними. Часть электрической цепи с двумя выделенными зажимами, именуемыми полюсами, называется *двухполюсником*. Следовательно, источники и приемники энергии являются двухполюсниками, причем

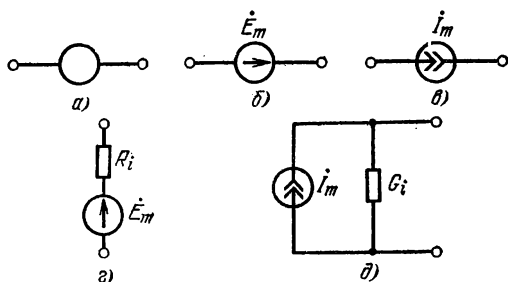


Рис. 3.1. Условные изображения активных двухполюсников на электрических схемах

источник — это активный двухполюсник, а приемник — пассивный.

К *активным двухполюсникам* (рис. 3.1, а) относятся электрические батареи и аккумуляторы, источники модулирующих сигналов в радиопередатчиках (например, микрофоны), антенны радиоприемных устройств и т. д. Активные двухполюсники подразделяются на источники ЭДС (или напряжения) и источники тока.

*Идеальным источником ЭДС* (рис. 3.1, б) называется источник постоянной или переменной ЭДС  $E$ , внутреннее электрическое сопротивление которого равно нулю. Напряжение на зажимах такого источника равно ЭДС и не зависит от сопротивления нагрузки.

*Идеальным источником тока* (рис. 3.1, в) называется источник постоянного или переменного тока  $I$ , имеющий бесконечно большое внутреннее сопротивление. Ток в нагрузке, подключенной к такому источнику, не зависит от ее сопротивления.

Любой *реальный источник ЭДС* или тока имеет конечное внутреннее сопротивление, которое часто необходимо учитывать при расчете электрических цепей. В этом случае реальный источник изображается на схемах как идеальный источник ЭДС с последовательно включен-

ным сопротивлением  $R_i$  (рис. 3.1, *г*) или как идеальный источник тока с параллельно включенной проводимостью  $G_i$  (рис. 3.1, *д*). Свойства реальных источников ЭДС и тока тем ближе к свойствам идеальных источников, чем соответственно меньше их внутреннее сопротивление или проводимость по сравнению с сопротивлением или проводимостью нагрузки.

К *пассивным двухполюсникам* относят резисторы, конденсаторы и индуктивные катушки. На рис. 3.2 показаны условные изображения: *а* — резистора, *б* — конденсатора, *в* — индуктивной катушки. Изображение пассивного двухполюсника такое же, как резистора.

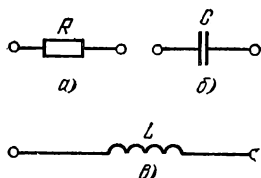


Рис. 3.2. Условные изображения пассивных двухполюсников на электрических схемах

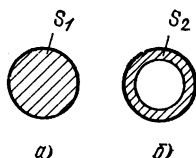


Рис. 3.3. Поперечные сечения проводника при прохождении через него постоянного (*а*) и переменного (*б*) токов

**Идеальные двухполюсники.** Пассивные двухполюсники отличаются друг от друга способом преобразования энергии источника. В резисторах эта энергия преобразуется в тепло, в конденсаторах и катушках — соответственно в энергию электрического или магнитного поля.

Напомним известные из электротехники [7] основные величины, характеризующие пассивные двухполюсники, а также соотношения для двухполюсников, работающих в цепях переменного синусоидального тока.

**Резистор** — элемент электрической цепи, предназначенный для использования его электрического сопротивления. Основным свойством резистора является способность препятствовать прохождению тока. При этом резистор необратимо преобразовывает электромагнитную энергию в тепло. Резистор представляет собой специально изготовленный проводник, имеющий вполне определенное электрическое сопротивление  $R$ . Токопроводящим материалом для получения нужного сопротивления может быть углерод (углеродистые резисторы), специальные сплавы (металлизированные ре-



зисторы), проволока с высоким удельным сопротивлением (проволочные резисторы) и т. д. Сопротивление резистора зависит от материала токопроводящего слоя, его геометрических размеров и температуры, а также от частоты проходящего через него тока.

Температурной зависимостью сопротивления резисторов для реальных условий их эксплуатации в большинстве случаев можно пренебречь. Частотной зависимостью пренебрегать нельзя в основном из-за поверхностного эффекта, в результате которого сопротивление одного и того же резистора для переменного тока оказывается больше, чем для постоянного, причем увеличение частоты тока приводит к возрастанию сопротивления резистора. Явление поверхностного эффекта объясняется различным характером распределения плотности постоянного и переменного токов по сечению проводника (под плотностью тока понимается значение тока в проводнике, проходящего на единицу площади его поперечного сечения). Постоянный ток проходит через все сечение  $S_1$  проводника, поэтому плотность постоянного тока в любой точке сечения одинаковая (рис. 3.3, а). Плотность переменного тока у поверхности проводника больше, чем в его центральной части. При относительно высоких частотах ток проходит только по тонкому кольцевому слою площадью  $S_2$ , примыкающему к поверхности проводника (рис. 3.3, б). Так как сопротивление проводника обратно пропорционально площади его поперечного сечения, используемого для прохождения тока, можно заключить, что при переменном токе это сопротивление во столько раз больше, чем при постоянном, во сколько площадь  $S_2$  кольца меньше полной площади  $S_1$  сечения проводника.

Из-за поверхностного эффекта увеличение сопротивления проводника переменному току по сравнению с постоянным может быть значительным.

Например, сопротивление круглого медного провода на частоте 1 МГц примерно в 4 раза больше, а на частоте 10 МГц — в 12 раз больше сопротивления этого же провода постоянному току. Поэтому сопротивление проводника постоянному току принято называть *электрическим*, а переменному — *активным*.

Сопротивление резисторов в системе СИ измеряется в омах. Часто применяют более крупные единицы — килоомы и мегаомы (мегоммы), причем  $1 \text{ МОм} = 10^3 \text{ кОм} = 10^6 \text{ Ом}$ . При синусоидальном напряжении  $u_R = U_m \sin \omega t$ , подведенном к резистору, ток определяется

по закону Ома:  $i_R = u_R/R = I_m \sin \omega t$ , где  $I_m = U_m/R$ . Из выражений для  $u_R$  и  $i_R$  видно, что ток и напряжение совпадают по фазе. Соответствующие этому случаю временные и векторные диаграммы показаны на рис. 3.4, а.

Средняя за период мощность, т. е. средняя скорость преобразования резистором электромагнитной энергии в тепло,

$$P_R = U_m I_m / 2 = UI = U^2/R = I^2 R, \quad (3.1)$$

где  $U$  и  $I$  — действующие значения напряжения и тока.

Эта мощность называется *активной*. Она характеризует постоянство направления движения электромагнитной энергии от генератора к нагрузке.

Индуктивная катушка — элемент электрической цепи, предназначенный для использования его индуктивности. Основным свойством катушки является способность преобразовывать энергию электрического тока в энергию магнитного поля. Индуктивная катушка представляет собой ряд витков провода с малым активным сопротивлением, размещенных на диэлектрическом каркасе (существуют и бескаркасные катушки). Внутри каркаса может быть сердечник из магнитного или немагнитного материала. Для того чтобы ослабить взаимодействие магнитного поля катушки с внешними полями, ее помещают в экран. Индуктивность  $L$  катушки зависит в основном от ее конструкции: раз-

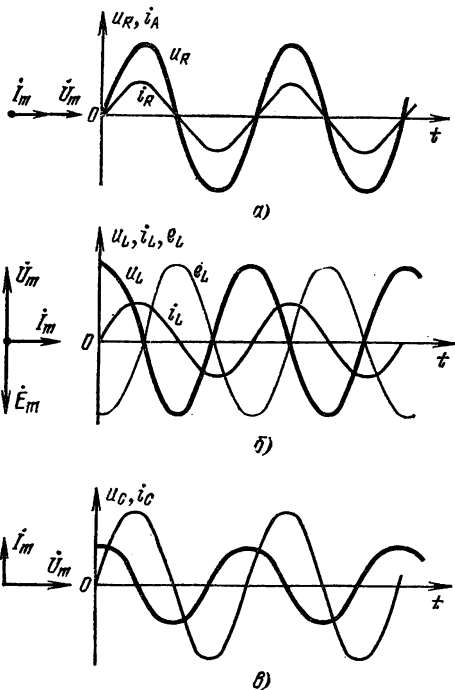


Рис. 3.4. Диаграммы напряжений, токов и ЭДС в цепях с пассивными двухполюсниками

каркаса может быть сердечник из магнитного или немагнитного материала. Для того чтобы ослабить взаимодействие магнитного поля катушки с внешними полями, ее помещают в экран. Индуктивность  $L$  катушки зависит в основном от ее конструкции: раз-

меров и формы каркаса, диаметра намоточного провода, числа и способа намотки витков, материала сердечника, наличия экрана и т. д.

Единицей измерения индуктивности в системе СИ является генри. Часто пользуются дольными единицами: миллигенри и микрогенри, причем  $1 \text{ Гн} = 10^3 \text{ мГн} = 10^6 \text{ мкГн}$ . Если через индуктивную катушку проходит синусоидальный ток  $i_L = I_m \sin \omega t$ , в ней возникает ЭДС самоиндукции  $e_L = -L di_L/dt$ , которая пропорциональна скорости изменения тока и противодействует этому изменению. В соответствии со вторым законом Кирхгофа можно записать  $e_L + u_L = 0$ , где  $u_L$  — напряжение на зажимах катушки. Отсюда следует, что в любой момент времени  $u_L = -e_L = L di_L/dt$ . Дифференцируя выражение для тока  $i_L$ , получаем

$$\begin{aligned} u_L &= L d(I_m \sin \omega t)/dt = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + \\ &\quad + 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ); \\ e_L &= -\omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t - 90^\circ) = \\ &= E_m \sin(\omega t - 90^\circ), \end{aligned}$$

где  $U_m = E_m = \omega L I_m$  — амплитуды напряжения и ЭДС.

Из сравнения выражений для  $i_L$ ,  $u_L$ ,  $e_L$  следует, что напряжение на катушке опережает по фазе ток, а ЭДС самоиндукции отстает по фазе от тока на  $90^\circ$  или на четверть периода. Временные и векторные диаграммы для рассмотренного случая показаны на рис. 3.4, б.

Перепишем соотношение, выражающее связь между амплитудами напряжения и тока:  $U_m = X_L I_m$ , где  $X_L = \omega L$ . Величина  $X_L$  имеет размерность сопротивления и представляет собой *индуктивное сопротивление* катушки. Часто сопротивление  $X_L$  называют *реактивным*. Этим хотят подчеркнуть, что реактивное сопротивление уменьшает амплитуду тока в цепи из-за влияния ЭДС самоиндукции, препятствующей изменению тока, а не из-за преобразования энергии в тепло. Таким образом, индуктивным называется реактивное сопротивление, обусловленное индуктивностью цепи и равное произведению индуктивности на угловую частоту. Отметим, что действующие значения напряжения  $U$  и тока  $I$  в цепи с индуктивной катушкой, как и амплитудные, связаны соотношением  $U = X_L I$ . Индуктивное сопротивление зависит от частоты тока, проходящего через катушку. Эта зависимость изображена на рис. 3.5, а.

Средняя (активная) мощность в катушке за период

изменения тока равна нулю. Это значит, что в течение части периода энергия генератора преобразуется в магнитное поле катушки и накапливается в нем, а в течение следующей части полностью возвращается генератору. Такой режим работы цепи называют режимом *реактивной мощности*. Обмен энергиями между генератором и катушкой происходит по гармоническому закону с частотой

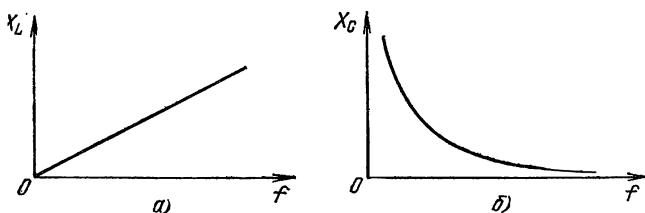


Рис. 3.5. Частотные зависимости реактивных сопротивлений двух-полюсников

той в 2 раза большей, чем частота тока. При этом мгновенное значение  $\omega_L$  и амплитуда  $W_{mL}$  энергии, накапливаемой в магнитном поле катушки, соответственно

$$\omega_L = Li_L^2/2; \quad W_{mL} = LI_m^2/2. \quad (3.2)$$

**Конденсатор** — элемент электрической цепи, предназначенный для использования его емкости. Основным свойством конденсатора является способность преобразовывать энергию электрического тока в электрическое поле и накапливать ее.

Конденсатор состоит из двух электродов, называемых *обкладками* или *пластинами*, разделенных слоем диэлектрика (изолятора). В зависимости от вида диэлектрика различают керамические конденсаторы, бумажные, слюдяные, пленочные, воздушные и т. д. Емкость  $C$  конденсатора зависит в основном от геометрических размеров и формы обкладок, расстояния между ними, свойств диэлектрика и т. д. Единицей измерения емкости в системе СИ является фарад. На практике используются дольные единицы: микрофарад, нанофарад, пикофарад, причем  $1 \text{ Ф} = 10^6 \text{ мкФ} = 10^9 \text{ нФ} = 10^{12} \text{ пФ}$ .

При синусоидальном напряжении  $u_C = U_m \sin \omega t$  на конденсаторе ток в цепи пропорционален скорости изменения напряжения, т. е.  $i_C = C du_C/dt$ . Тогда  $i_C = C d(U_m \sin \omega t)/dt = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ , где  $I_m = \omega C U_m$  — амплитуда тока.

Обозначив  $X_C = 1/\omega C$ , окончательно получим:  $I_m = U_m/X_C$  или для действующих значений  $I = U/X_C$ .

Сравнивая выражения для  $i_C$  и  $i_L$ , отмечаем, что в цепи с конденсатором ток опережает по фазе напряжение на  $90^\circ$ , или на четверть периода (см. рис. 3.4, в).

Величина  $X_C$  имеет размерность сопротивления и представляет собой емкостное сопротивление конденсатора. Емкостным называется абсолютное значение реактивного сопротивления, обусловленного емкостью цепи, равное обратному значению произведения этой емкости и угловой частоты. Реактивный характер емкостного сопротивления проявляется подобно индуктивному, в том, что при заряде между обкладками конденсатора возникает напряжение, которое противодействует дальнейшему его заряду, что уменьшает амплитуду тока в цепи. Зависимость емкостного сопротивления конденсатора от частоты проходящего через него тока показана на рис. 3.5, б.

Среднее значение мощности в конденсаторе за период изменения тока равно нулю. Цепь с конденсатором, как и цепь с катушкой, характеризуется реактивной мощностью. Преобразование энергии генератора в электрическое поле конденсатора и обратно происходит с частотой вдвое большей, чем частота тока. При этом мгновенное и амплитудное значения энергии, накапливаемой в электрическом поле конденсатора, соответственно

$$\omega_C = Cu_C^2/2; \quad W_{mC} = CU_m^2/2. \quad (3.3)$$

**Реальные двухполюсники.** При рассмотрении пассивных двухполюсников предполагалось, что каждый из них имеет только одно физическое свойство (параметр): резистор — активное сопротивление, индуктивная катушка — индуктивность, конденсатор — емкость. На самом деле любой реальный двухполюсник характеризуется совокупностью этих свойств. Например, резистор кроме активного сопротивления имеет собственную индуктивность токопроводящего слоя и емкость между проводниками, с помощью которых он включается в электрическую цепь.

Во многих практических случаях допускается идеализация пассивных двухполюсников. Она заключается в том, что в двухполюснике учитывается только одно характеризующее его основное свойство: активное сопротивление, индуктивность или емкость. Учет остальных свойств производится, если возникают заметные погреш-

ности при анализе работы цепи. Например, стандартный углеродистый резистор можно считать идеальным, т. е. не содержащим индуктивности и емкости, при частотах проходящего через него тока до 50...100 МГц. На более высоких частотах такая идеализация приводит к значительным ошибкам при расчете цепи и поэтому недопустима.

При исследовании электрических цепей, содержащих реальные конденсаторы и индуктивные катушки, необходимо учитывать, что часть энергии генератора необратимо преобразуется в них в другие виды энергии, например в тепло, энергию электромагнитного излучения и т. д. Этот процесс условно называют потерей энергии или просто *потерями*. Средняя скорость необратимого преобразования энергии характеризуется *мощностью потерь*. Основными причинами потерь в катушках является ак-

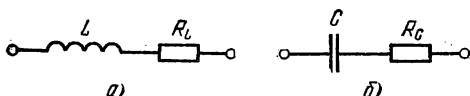


Рис. 3.6. Схемы замещения двухполюсников с потерями

тивное сопротивление провода обмотки и наличие экрана, а в конденсаторах — несовершенство диэлектрика между обкладками. С увеличением частоты тока потери в элементах цепи возрастают.

Для учета потерь в элементах электрических цепей используются *схемы замещения* — схема электрической цепи, отображающая свойства цепи при определенных условиях. Такие схемы могут быть последовательными или параллельными. В дальнейшем будем пользоваться последовательной схемой.

На рис. 3.6, а показана последовательная схема замещения реальной индуктивной катушки. Потери энергии учтены таким активным сопротивлением  $R_L$ , чтобы в нем выделялась активная мощность, равная мощности потерь в цепи. Величиной, характеризующей потери в реальной катушке, является добротность  $Q_L = X_L/R_L = \omega L/R_L$  катушки. В радиотехнических устройствах применяются катушки с добротностью от нескольких десятков до нескольких сотен.

Последовательная схема замещения реального конденсатора показана на рис. 3.6, б. В этой схеме потери учтены активным сопротивлением  $R_C$ . Величиной, харак-

теризующей потери, служит добротность конденсатора  $Q_C = X_C/R_C = 1/\omega CR_C$ . Применяемые на практике конденсаторы имеют добротность до нескольких тысяч, что значительно больше, чем у индуктивных катушек.

### 3.2. Разновидности электрических цепей

В зависимости от реакции двухполюсников и состоящих из них электрических цепей на величину и направление тока или напряжения различают линейные, нелинейные и параметрические цепи.

Электрическая цепь, электрические сопротивления, индуктивности и электрические емкости участков которой не зависят от значений и направлений токов и напряжений в цепи, называется линейной. В таких цепях и составляющих их элементах существует линейная зависимость между подведенным к цепи напряжением и проходящим через цепь током. График этой зависимости, называемой *вольт-амперной характеристикой*, представляет собой прямую линию.

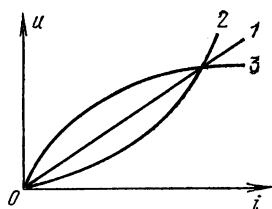


Рис. 3.7. Вольт-амперные характеристики линейных и нелинейных двухполюсников

Существует большой класс двухполюсников и электрических цепей, параметры которых зависят от величины и направления проходящего через них тока или подведенного к ним напряжения. Такие двухполюсники и цепи называются *нелинейными*. График вольт-амперной характеристики нелинейного двухполюсника изображается кривой линией.

На рис. 3.7 показаны графики вольт-амперных характеристик двухполюсников: 1 — линейного (например, идеального резистора), 2 — нелинейного, сопротивление которого увеличивается с ростом тока (например, стабилизатора тока), 3 — нелинейного, сопротивление которого уменьшается с ростом тока (например, стабилизатора напряжения).

В радиотехнических устройствах широко применяются двухполюсники, параметры которых изменяются во времени по заданному закону с помощью внешних воздействий, непосредственно не связанных с токами и напряжениями в цепи. Такие двухполюсники и составлен-

ные из них электрические цепи называются *параметрическими*. Примером параметрического двухполюсника может служить угольный микрофон, сопротивление которого изменяется в зависимости от давления, оказываемого на слой угля. Более подробно свойства нелинейных и параметрических цепей рассматриваются в гл. 9.

Необходимо особо подчеркнуть, что для линейных электрических цепей справедлив закон или *принцип суперпозиции* (нелинейные цепи закону суперпозиции не подчиняются).

Принцип суперпозиции в общем виде формулируется так: если составляющие сложного процесса воздействия взаимно не влияют друг на друга, результирующий эффект будет представлять собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности. Применительно к электрическим цепям это значит, что если в цепи действует несколько источников энергии, то результирующий ток (напряжение) равен алгебраической сумме токов (напряжений), вызванных действием каждого источника в отдельности. Принцип суперпозиции лежит в основе всех методов расчета линейных цепей.

Выше предполагалось, что в идеальных электрических цепях активное сопротивление сосредоточено в резисторе, индуктивность — в индуктивной катушке, емкость — в конденсаторе. Параметры соединительных проводников при этом не учитывались. Электрическая цепь, в которой электрические сопротивления, индуктивности и электрические емкости считаются сосредоточенными на отдельных участках, называется *цепью с сосредоточенными параметрами*. Допущение о том, что параметры цепи являются сосредоточенными, возможно лишь при условии, что геометрические размеры, которыми характеризуется каждый физический элемент цепи (длина, ширина, высота), значительно меньше длины волны действующего в цепи тока. Это же условие относится к проводам, соединяющим элементы цепи.

Если размеры физического элемента цепи или длина соединительных проводов соизмеримы с длиной волны, характер процессов в цепях существенно изменяется. Такие цепи называются электрическими *цепями с распределенными параметрами*, и методы их расчета отличаются от тех, которые разработаны для цепей с сосредоточенными параметрами.

Таким образом, один и тот же проводник в зависимости от частоты проходящего через него тока может рас-



смаиваться как цепь с сосредоточенными либо с распределенными параметрами.

Пусть, например, геометрическая длина проводника  $l=10$  см, и через него проходит ток с частотой  $f=300$  МГц (длина волны  $\lambda=100$  см). Поскольку  $l \ll \lambda$ , можно считать параметры проводника сосредоточенными в одной точке, например, в его середине.

Теперь предположим, что частота тока через этот же проводник стала  $f=3000$  МГц ( $\lambda=10$  см). В этом случае  $l=\lambda$  и проводник должен рассматриваться как система с распределенными параметрами.

Более подробно свойства цепей с распределенными параметрами рассматриваются в гл. 11.

### 3.3. Четырехполюсники и их основные характеристики

Для передачи электромагнитной энергии от генератора к нагрузке необходимо промежуточное устройство, снабженное двумя парами зажимов (рис. 3.8). Через одну пару 1—1 энергия поступает от генератора в систему

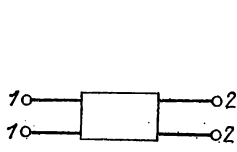


Рис. 3.8. Условное изображение четырехполюсника

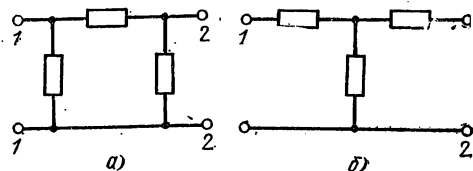


Рис. 3.9. Симметричные четырехполюсники

передачи, а через другую 2—2 передается приемнику. Такое устройство называется *четыреполюсником*. Четыреполюсниками являются трансформаторы, усилители, каскады радиопередатчиков или радиоприемников, телефонные линии и т. д.

Как и двухполюсники, четырехполюсники бывают *активными* и *пассивными*. Активные содержат, а пассивные не содержат в своем составе источники энергии. Примером активного четырехполюсника может быть каскад радиопередатчика или радиоприемника, а пассивного — проводная линия связи.

Различают линейные и нелинейные четырехполюсники. *Линейный четырехполюсник* отличается тем, что напряжение и ток на его выходных зажимах линейно зависят от напряжения и тока на входных зажимах. Примером линейного четырехполюсника является фильтр, а нелинейного — трансформатор со стальным сердечником.

В дальнейшем будем рассматривать только линейные пассивные четырехполюсники.

Четырехполюсники могут быть *симметричными* и *несимметричными*. В симметричных четырехполюсниках перемена мест генератора и нагрузки свойств четырехполюсника не изменяет. Схемы наиболее простых симметричных четырехполюсников показаны на рис. 3.9: П-образная схема (рис. 3.9, а) и Т-образная схема (рис. 3.9, б).

Четырехполюсники характеризуются рядом величин, основными из которых являются комплексное *входное сопротивление*  $\underline{Z}_{вх}$  и комплексный *коэффициент передачи по напряжению*  $\underline{K}$ . Комплексное входное сопротивление

$$\underline{Z}_{вх} = \dot{U}_{m1} / \dot{I}_{m1} = Z_{вх} e^{i\varphi}, \quad (3.4)$$

где  $Z_{вх}$  — модуль входного сопротивления;  $\varphi$  — его аргумент, равный разности начальных фаз напряжения и тока (здесь и далее обозначения электрических величин даются в соответствии с ГОСТ 1494—77);  $\dot{U}_{m1}$  и  $\dot{I}_{m1}$  — комплексные амплитуды напряжения и тока, действующие на входе четырехполюсника.

Комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$\underline{K} = \dot{U}_{m2} / \dot{U}_{m1} = K e^{i\psi}, \quad (3.5)$$

где  $\dot{U}_{m2}$  и  $\dot{U}_{m1}$  — комплексные амплитуды напряжений, действующих соответственно на выходе и входе четырехполюсника;  $K$  — модуль коэффициента передачи напряжения, называемый *коэффициентом передачи*, который показывает, во сколько раз изменяется амплитуда напряжения гармонического колебания на выходе четырехполюсника по сравнению с амплитудой напряжения на его входе;  $\psi$  — аргумент коэффициента передачи напряжения, называемый *коэффициентом фазы* четырехполюсника, который равен разности начальных фаз выходного и входного напряжений и показывает, на какую величину изменяется фаза напряжения гармонического колебания за время задержки  $t_3 = \psi / \omega = \psi / 2\pi f$  в четырехполюснике.

Коэффициенты передачи и фазы четырехполюсника зависят от частоты. Частотная зависимость коэффициента передачи при постоянной амплитуде входного напряжения называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ) четырехполюсника. Частотная зависимость коэффициента фазы при неизменной начальной фазе

входного напряжения называется *фазочастотной характеристикой* (ФЧХ). По форме АЧХ и ФЧХ можно судить о степени *искажений сигналов*, проходящих через четырехполосник, т. е. об изменении их спектра.

Различают линейные и нелинейные искажения. Если в спектре выходного сигнала появляются гармонические спектральные составляющие, которых не было в спектре входного сигнала, искажения считаются *нелинейными*. Такие искажения отсутствуют, если четырехполосник не содержит нелинейных и параметрических элементов. Когда в составе спектра выходного сигнала нет новых составляющих, искажения называют линейными. Причиной линейных искажений является изменение амплитуд гармонических составляющих сигнала (*амплитудно-частотные искажения*) или их начальных фаз (*фазочастотные искажения*).

Для иллюстрации причин возникновения линейных искажений обратимся к рис. 3.10. На рис. 3.10, а сплошной линией изображена временная диаграмма напряжения сигнала на входе четырехполосника, а штриховой линией — диаграммы напряжения его первой и второй гармоник с периодом соответственно  $T$  и  $T/2$ . Пусть амплитуда напряжения второй гармоники сигнала на выходе четырехполосника уменьшилась вдвое. Тогда, как это следует из рис. 3.10 б, форма выходного сигнала изменится и не будет соответствовать форме входного сигнала, что свидетельствует о возникновении искажений, которые в данном случае являются амплитудно-частотными. Теперь предположим, что изменилась начальная фаза второй гармоники сигнала. И в этом случае (рис. 3.10, в) форма выходного сигнала отличается от формы входного, т. е. появляются фазочастотные искажения.

В общем случае линейные искажения обусловлены одновременным изменением соотношения между амплитудами и начальными фазами гармонических составляющих сигнала.

Для того чтобы амплитудно-частотные и фазочастотные искажения полностью отсутствовали, графики АЧХ и ФЧХ четырехполосника должны иметь вполне определенную форму. На рис. 3.11 эти графики изображены сплошной линией. Отсутствие амплитудно-частотных искажений обусловлено постоянством коэффициента передачи для всех спектральных составляющих сигнала (рис. 3.11, а), а фазочастотных — постоянством времени задержки этих составляющих в четырехполоснике (рис. 3.11, б). В результате в спектре выходного сигнала четырехполосника, имеющего идеальные АЧХ и ФЧХ, сохраняются такие же соотношения амплитуд напряжения гармонических составляющих и их начальных фаз, какие были в спектре входного сигнала. Характеристики

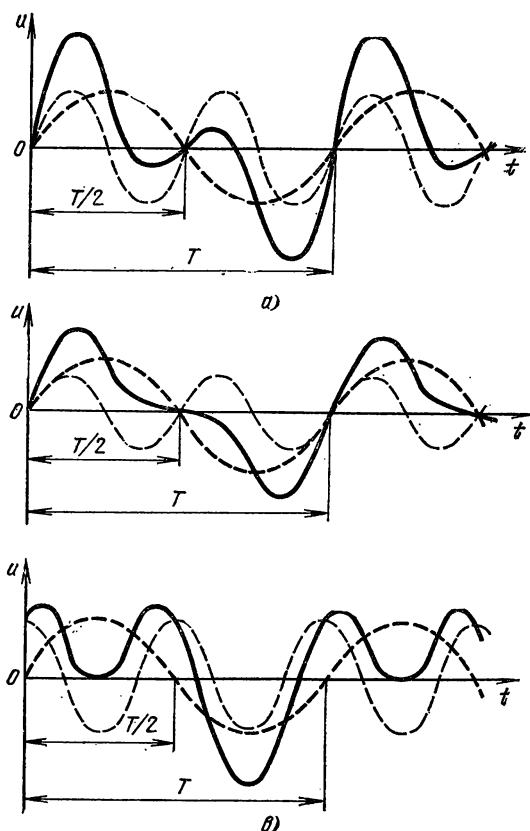


Рис. 3.10. Возникновение амплитудно-частотных и фазочастотных искажений сигнала

реальных четырехполосников отличаются от идеальных. Графики реальных характеристик изображены пунктирными линиями на рис. 3.11. Основной причиной различной формы идеальных и реальных характеристик является зависимость реактивных сопротивлений четырехполосника от частоты.

График АЧХ реального четырехполосника, изображенный на рис. 3.11, а, показывает, что с увеличением частоты его коэффициент передачи уменьшается. Это значит, что для второй гармоники (с частотой  $2f_1$ ) сигнала, а также для гармоник с более высокими номерами коэффициент передачи меньше, чем для первой гармо-

пики с частотой  $f_1$  (точки 2 и 1 на рис. 3.11, а). В результате появляются амплитудно-частотные искажения сигнала, которые тем больше, чем сильнее отличается форма реальной АЧХ от прямолинейной.

График ФЧХ реального четырехполосника приведен на рис. 3.11, б. Из этого рисунка видно, что коэффици-

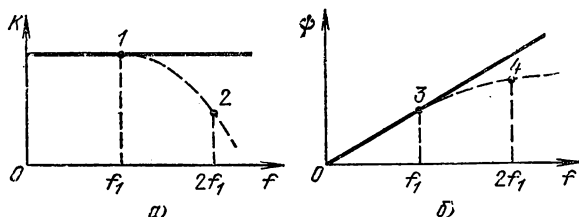


Рис. 3.11. Идеальные и реальные характеристики четырехполосника: а — АЧХ; б — ФЧХ

ент фазы четырехполосника нелинейно зависит от частоты. Это значит, что для различных гармонических составляющих сигнала время задержки в четырехполоснике разное. В частности, как видно из рис. 3.11, б (точки 3 и 4), для второй гармоники сигнала время задержки меньше, чем для первой гармоники. Следовательно, на выходе четырехполосника с нелинейной ФЧХ нарушаются фазовые соотношения между гармоническими составляющими, что приводит к фазо-частотным искажениям.

Форма АЧХ и ФЧХ должна соответствовать назначению четырехполосника. Изображенные сплошными линиями на рис. 3.11 характеристики идеальны для усилителей управляющих сигналов или проводных линий связи. Иную форму должны иметь характеристики, например, электрических фильтров. Требования к форме АЧХ и ФЧХ различных четырехполосников будут рассматриваться в следующих главах.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 3.1. Что называется электрической цепью и элементом электрической цепи?
- 3.2. Приведите примеры активных и пассивных двухполосников.
- 3.3. Что называется идеальным генератором напряжения и тока?
- 3.4. Чем отличаются реальные генераторы напряжения и тока от идеальных?
- 3.5. В чем заключается явление поверхностного эффекта в проводниках?

- 3.6. Объясните понятия «электрическое сопротивление» и «активное сопротивление».
- 3.7. Сопротивление резистора  $R=120$  кОм. Выразите это сопротивление в омах и мегомах.
- 3.8. Изобразите временную и векторную диаграммы для токов и напряжений в электрических цепях с индуктивностью и емкостью.
- 3.9. Поясните смысл индуктивного и емкостного сопротивлений.
- 3.10. Индуктивность катушки  $L=1,2$  мГн. Выразите эту индуктивность в микрогенри и генри.
- 3.11. Емкость конденсатора  $C=1,5$  нФ. Выразите эту емкость в пикофарадах, микрофарадах и фарадах.
- 3.12. Как учитываются потери энергии в катушках и конденсаторах?
- 3.13. Перечислите виды электрических цепей. Чем они отличаются друг от друга?
- 3.14. Сформулируйте принцип суперпозиции. Для каких цепей этот принцип справедлив?
- 3.15. Можно ли проводник длиной 100 м считать с распределенными параметрами, если по нему проходит ток с частотой 300 кГц?
- 3.16. По каким признакам классифицируются четырехполюсники?
- 3.17. Что называется коэффициентами передачи и фазы четырехполюсника?
- 3.18. Что называется линейными и нелинейными искажениями сигналов?
- 3.19. Что такое АЧХ и ФЧХ четырехполюсника?
- 3.20. При каких условиях отсутствуют линейные искажения сигналов в четырехполюснике?

## ГЛАВА 4

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ

Электромагнитные колебания создаются с помощью электрических колебательных систем. Простейшей колебательной системой является колебательный контур.

Колебательные контуры широко используются в радиопередатчиках и радиоприемных устройствах. С их помощью в радиопередатчиках создаются электромагнитные колебания с требуемой частотой, которые модулируются управляющими электрическими сигналами. В радиоприемниках колебательные контуры осуществляют частотную избирательность, т. е. выделение ЭДС принимаемого сигнала из множества ЭДС, наводимых в приемной антенне посторонними радиоизлучениями.

В данной главе рассматриваются *свободные* или *собственные* колебания, которые возникают в контуре из-за некоторого первоначального запаса энергии, полученной от постороннего источника.

Основное внимание уделяется следующим вопросам:

1. *Как протекает процесс свободных колебаний в идеальном контуре?*

2. Какие особенности имеют свободные колебания в реальном контуре?

3. Какими величинами характеризуются свободные колебания?

#### 4.1. Свободные колебания в идеальном контуре

Замкнутая электрическая цепь, состоящая из идеальных двухполюсников — индуктивной катушки и конденсатора, называется *идеальным колебательным контуром* (рис. 4.1). В таком контуре отсутствуют элементы, в которых энергия преобразуется в тепло.

Рассмотрим процессы, протекающие в контуре, при подключении к катушке  $L$  конденсатора  $C$ , который был предварительно заряжен от постороннего источника до напряжения  $U_m$  с полярностью, указанной на рис. 4.2, а. Энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора, равна в соответствии с (3.3)  $W_{mc} = CU_m^2/2$ .

В момент времени  $t=0$  (рис. 4.2, а) начинается разряд конденсатора и в контуре возникает ток  $i$ . Источником этого тока является заряженный конденсатор, поэтому его можно считать генератором. Роль нагрузки в этом случае выполняет индуктивная катушка.

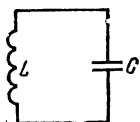


Рис. 4.1. Идеальный колебательный контур

Одновременно с появлением тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции  $e_L$ . Она направлена против тока и препятствует его увеличению, поэтому ток в контуре нарастает постепенно.

По мере разряда конденсатора напряжение на нем  $u_c$  уменьшается. Становится меньше и энергия электрического поля. Энергия магнитного поля катушки, наоборот, возрастает. Это значит, что происходит преобразование энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки.

В момент времени  $t=t_1$  конденсатор полностью разряжается и напряжение на нем уменьшается до нуля. Энергия электрического поля конденсатора полностью преобразуется в энергию магнитного поля катушки. Ток в цепи достигает наибольшего значения. В магнитном поле катушки запасается максимальная энергия, равная в соответствии с (3.2)  $W_{mL} = LI_m^2/2$ .

Ввиду полного разряда конденсатора ток в цепи в момент времени  $t=t_1$  начинает уменьшаться (рис. 4.2, б),

но не прекращается, так как ЭДС самоиндукции катушки меняет знак и поддерживает ток. Роль источника энергии переходит к катушке, а конденсатор становится нагрузкой.

Ток, проходя через разряженный конденсатор, начинает его заряжать. Поскольку направление тока осталось прежним, полярность напряжения на конденсаторе меняется. По мере заряда конденсатора напряжение на нем возрастает, а ток в цепи убывает. Энергия магнитного поля катушки уменьшается, так как происходит ее преобразование в энергию электрического поля конденсатора.

К моменту времени  $t=t_2$  энергия магнитного поля и ток в цепи становятся равными нулю. Заряд конденса-

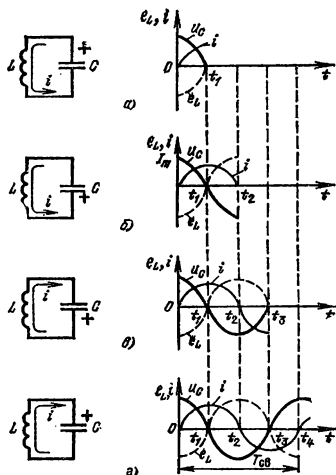


Рис. 4.2. Временные диаграммы, поясняющие процесс свободных колебаний

тора прекращается. В электрическом поле конденсатора запасается максимальная энергия и амплитуда напряжения на нем достигает  $U_m$ .

Снова начинается разряд конденсатора, но направление разрядного тока изменяется на противоположное. В остальном процессы изменения тока, напряжения, ЭДС и т. д. (рис. 4.2, в, г) не отличаются от описанных выше. К моменту времени  $t=t_4$  восстанавливается исходное состояние контура. Затем весь цикл повторяется и продолжается неограниченно долго.

Таким образом, в контуре происходят периодические (с периодом  $T_{св}$ ) изменения тока и напряжения, называемые *электрическими колебаниями*. Эти колебания изменяются по гармоническому (синусоидальному) закону, причем ток и напряжение имеют сдвиг фаз, равный  $90^\circ$ . Уравнения тока и напряжения соответственно  $i = I_m \sin \omega_{св} t$ ;  $u_C = U_m \cos \omega_{св} t = U_m \sin (\omega_{св} t + 90^\circ)$ , где  $\omega_{св}$  — *угловая частота свободных колебаний*.

Найдем частоту  $\omega_{св}$ , исходя из условия равенства мак-



симальных энергий электрического и магнитного полей, поочередно запасаемых конденсатором и катушкой в процессе колебаний, т. е.

$$W_{mC} = W_{mL} = CU_m^2/2 = LI_m^2/2 = CU_m^2 = LI_m^2. \quad (4.1)$$

По закону Ома  $I_m = U_m/X_L = U_m/X_C = U_m/\omega_{св}L = U_m\omega_{св}C$ . Тогда, подставив выражение для  $I_m$  в формулу (4.1), получим  $CU_m^2 = LU_m^2/\omega_{св}^2L^2$ , откуда

$$C = 1/\omega_{св}^2L \text{ или } \omega_{св} = 1/\sqrt{LC}. \quad (4.2)$$

Учитывая, что  $\omega_{св} = 2\pi f_{св}$ , находим

$$f_{св} = 1/2\pi \sqrt{LC}. \quad (4.3)$$

$$\text{Тогда } T_{св} = 1/f_{св} = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (4.4)$$

Из (4.2)...(4.4) следует, что частота и период свободных колебаний зависят только от величин  $L$  и  $C$  контура. Это согласуется с физическим смыслом протекающих в контуре процессов. Действительно, чем больше индуктивность катушки, тем больше возникающая в ней ЭДС самоиндукции и тем сильнее она препятствует изменениям тока в цепи. С другой стороны, чем больше емкость конденсатора, тем большее время требуется

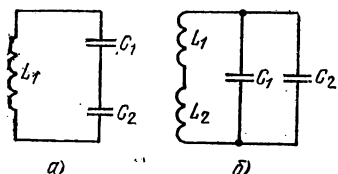


Рис. 4.3. Схемы сложных колебательных контуров

для его заряда. Отсюда можно заключить, что при увеличении  $L$  и  $C$  контура период свободных колебаний увеличивается, а их частота уменьшается.

Необходимо помнить, что в (4.3) и (4.4) частота получается в герцах, а период в секундах, если индуктивность выражена в генри, а емкость в фарадах.

Если известна частота свободных колебаний и индуктивность (или емкость) контура, то

$$C = 1/4\pi^2 f_{св}^2 L; \quad L = 1/4\pi^2 f_{св}^2 C. \quad (4.5)$$

При расчетах часто пользуются (4.5) в другой записи:

$$C \approx 2,53 \cdot 10^{10}/f_{св}^2 L; \quad L \approx 2,53 \cdot 10^{10}/f_{св}^2 C. \quad (4.6)$$

В этих формулах емкость выражена в пикофарадах, индуктивность в микрогенри, а частота в килогерцах.

Отметим, что в (4.2)...(4.4) нужно учитывать полные (общие) индуктивность и емкость контура, который может содержать несколько катушек и конденсаторов. На-

пример, для схемы, изображенной на рис. 4.3, а,  $f_{св} = 1/2\pi\sqrt{L_1 C_1 C_2 / (C_1 + C_2)}$ . Для схемы на рис. 4.3, б  $f_{св} = 1/2\pi\sqrt{(L_1 + L_2) / (C_1 + C_2)}$ .

Найдем теперь соотношение между амплитудами напряжения и тока свободных колебаний в контуре. Из (4.1) следует, что  $I_m = U_m / \sqrt{L/C} = U_m / Z_{\text{в}}$ . Величина, стоящая в знаменателе, имеет размерность сопротивления и называется *волновым сопротивлением контура*

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{L/C}. \quad (4.7)$$

Чтобы выяснить смысл волнового сопротивления, запишем выражение для индуктивного сопротивления катушки на частоте свободных колебаний:  $X_L = \omega_{св} L$ . Подставляя сюда значение  $\omega_{св}$  из (4.2), получаем  $X_L = L / \sqrt{LC} = \sqrt{L/C} = Z_{\text{в}}$ . Аналогично для емкостного сопротивления конденсатора имеем  $X_C = 1 / \omega_{св} C = \sqrt{LC/C} = \sqrt{L/C} = Z_{\text{в}}$ . Таким образом, волновое сопротивление контура равно реактивному сопротивлению катушки или конденсатора на частоте свободных колебаний, т. е.

$$X_L = X_C = Z_{\text{в}}. \quad (4.8)$$

При вычислении волнового сопротивления в (4.7) подставляется общая индуктивность и емкость контура.

## 4.2. Свободные колебания в реальном контуре

Реальный колебательный контур состоит из двухполюсников, в которых часть электромагнитной энергии необратимо преобразуется в тепло и другие виды энергии. Такое преобразование происходит в диэлектрике конденсатора, в проводниках, соединяющих элементы контура, в проводе обмотки катушки и т. д.

Необратимое преобразование энергии можно учесть, если ввести в контур активное сопротивление  $R_{\text{п}} = R_L + R_C$ , называемое *сопротивлением потерь*. Это сопротивление выбирается таким, чтобы в нем выделялась активная мощность, равная суммарной мощности потерь в элементах контура. Схема замещения реального колебательного контура приведена на рис. 4.4.

Свободные колебания в реальном контуре происходят так же, как в идеальном [8]. Принципиальная разница заключается в том, что в процессе колебаний не вся энергия электрического поля преобразуется в маг-

нитное, а магнитного — в электрическое. Часть энергии необратимо преобразуется в тепло в сопротивлении потерь, поэтому амплитуда тока в контуре постепенно уменьшается (рис. 4.5). Колебания с уменьшающейся во времени амплитудой называются *затухающими* в отличие от *незатухающих*, имеющих постоянную амплитуду.

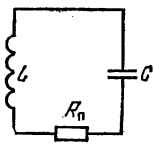


Рис. 4.4. Реальный колебательный контур

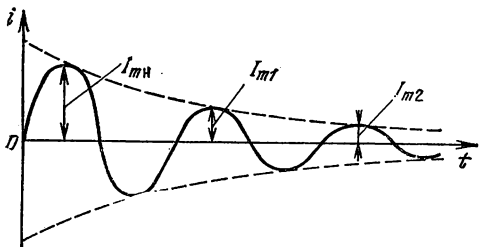


Рис. 4.5. Изменение тока в контуре при колебательном разряде конденсатора

Затухание амплитуды тока в реальном контуре происходит по экспоненциальному закону,

Мгновенное значение тока в контуре  $i = I_{m1} e^{-\delta t} \sin \omega_{св} t$ , где  $I_{m1}$  — начальная амплитуда тока;  $e \approx 2,718$  — основание натуральных логарифмов;  $\delta = R_n / 2L$  — коэффициент затухания колебаний;  $\omega_{св}$  — угловая частота свободных колебаний. Величина  $\tau = 1/\delta = 2L/R_n$ , обратная коэффициенту затухания колебаний, называется *постоянной времени контура*. Численно она равна времени, в течение которого амплитуда тока в контуре уменьшается в  $e$  раз, или на 63 % своего начального значения. С учетом постоянной времени ток свободных колебаний  $i = I_{m1} e^{-t/\tau} \sin \omega_{св} t$ .

Теоретически процесс затухания колебаний в контуре продолжается неограниченно долго. Условно считают, что колебания прекращаются через промежуток времени (3...5)  $\tau$ , когда амплитуда тока в цепи уменьшается до 0,05...0,01 от своего начального значения.

Угловая частота свободных колебаний (или их частота  $f_{св}$ ) в реальном контуре, строго говоря, зависит не только от индуктивности и емкости его элементов, но и от сопротивления потерь:

$$\omega_{св}' = \sqrt{1/LC - \delta^2} = \sqrt{1/LC - (R_n/4L)^2}. \quad (4.9)$$

Как видно из сравнения (4.2) и (4.9), при одинаковых

значениях  $L$  и  $C$  контура  $\omega'_{св} < \omega_{св}$ . Однако в большинстве практических случаев расхождение в частотах настолько незначительное, что им пренебрегают, считая  $\omega'_{св} \approx \omega_{св}$ ;  $f'_{св} \approx f_{св}$ . Воспользовавшись (4.9), определим условие возникновения колебаний в реальном контуре. Будем исходить из того, что частота колебаний как характеристика физического процесса должна определяться действительным числом. Следовательно, подкоренное выражение в (4.9) не может быть отрицательным или равным нулю, что возможно при выполнении неравенства  $1/LC > R_{\pi}^2/4L^2$ . Отсюда  $R_{\pi} < 2\sqrt{L/C} = 2Z_{\text{в}}$ .

Таким образом, колебательный процесс в контуре возникает только в том случае, если сопротивление потерь не превышает определенного значения. При  $R_{\pi} \geq 2Z_{\text{в}}$  колебания возникнуть не могут, так как за время

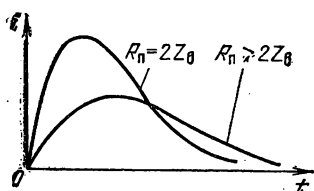


Рис. 4.6. Временная диаграмма тока свободных колебаний в реальном контуре

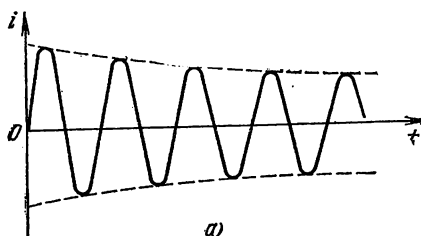
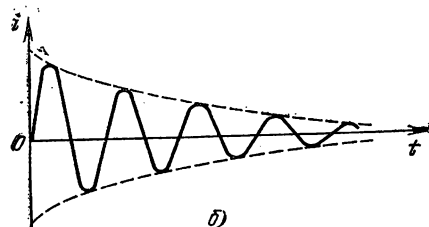


Рис. 4.7. Затухающие колебания для контуров с разным сопротивлением потерь



$t \leq T/2$  энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора, полностью преобразуется в тепло. На рис. 4.6 приведены графики, иллюстрирующие процесс изменения тока в контуре при  $R_{\pi} \geq 2Z_{\text{в}}$ . Такой процесс называется *апериодическим*, причем условие  $R_{\pi} = 2Z_{\text{в}}$  является граничным и соответствует переходу от апериодического разряда конденсатора к колебательному. Апериодический процесс разряда конденсатора в колебательном контуре практического применения в радиотехнике не имеет.

Перейдем к рассмотрению величин, которые характеризуют скорость затухания колебаний в контуре. К ним, кроме коэффициента затухания колебаний и постоянной времени, относятся: логарифмический декремент колебаний, затухание и добротность контура.

Чем больше сопротивление потерь в контуре, тем больше активная мощность, выделяющаяся в этом сопротивлении, и меньше реактивная мощность, обуславливающая электрические колебания. Следовательно, увеличение сопротивления потерь приводит к ускорению процесса затухания.

Для примера на рис. 4.7 приведены графики изменения тока в двух контурах, имеющих одинаковую индуктивность и емкость, но разное сопротивление потерь. В первом контуре (рис. 4.7, а) это сопротивление меньше, чем во втором, т. е.  $R_{п1} < R_{п2}$ . Поэтому  $\delta_1 < \delta_2$ ,  $\tau_1 > \tau_2$ , и скорость затухания колебаний в первом контуре меньше, чем во втором (рис. 4.7, б).

Удобным параметром, характеризующим затухание колебаний, является *логарифмический декремент* колебаний, который показывает, какая часть энергии, имеющейся в контуре в данный момент времени, преобразуется тепло в течение ближайшей половины периода колебаний. Логарифмический декремент равен натуральному логарифму отношения двух следующих друг за другом максимальных значений тока  $I_{m1}$  и  $I_{m2}$  одного знака (см. обозначения на рис. 4.5). В соответствии с определением логарифмический декремент  $\theta = \ln(I_{m1}/I_{m2})$ . Преобразуем это выражение, выразив  $I_{m1}$  и  $I_{m2}$  через  $I_{mn}$ . Из формулы для тока свободных колебаний имеем:  $I_{m1} = I_{mn} e^{-\delta t_1}$ ;  $I_{m2} = I_{mn} e^{-\delta t_2}$ . По определению логарифмического декремента  $t_2 = t_1 + T_{св}$ , поэтому  $\theta = \ln(I_{mn} e^{-\delta t_1} / I_{mn} e^{-\delta t_2} e^{-\delta T_{св}}) = \ln(1/e^{-\delta T_{св}}) = \delta T_{св}$ . Подставляя сюда значения  $\delta$  и  $T_{св}$ , получаем  $\theta = 2\pi R_{п} \sqrt{LC} / 2L = \pi R_{п} \sqrt{C/L} = \pi R_{п} / Z_{в}$ .

Для большинства практически используемых контуров  $0 < \theta < 1$ . Если, например,  $\theta = 0,1$ , это значит, что за период свободных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшается на 10 %. Для графиков, приведенных на рис. 4.7, можно приблизительно указать, что в первом контуре  $\theta_1 \approx 0,1$ , а во втором  $\theta_2 \approx 0,5$ . Зная значение  $\theta$ , можно приближенно определить длительность процесса свободных колебаний  $t_{св} \approx 4,6T/\theta$  и количество периодов этих колебаний  $N_{св} \approx 4,6\theta$ .

Сходным по смыслу с логарифмическим декрементом колебаний является параметр, называемый *затуханием* контура  $d$ , который меньше  $\theta$  в  $\pi$  раз, т.е.  $d=R_{\pi}/Z_{\text{в}}$ . Величина, обратная  $d$ , называется *добротностью* контура и является одной из важнейших его характеристик:

$$Q = Z_{\text{в}}/R_{\pi}. \quad (4.10)$$

Физический смысл добротности и затухания поясняется в гл. 5 и 6.

Пользуясь понятием добротности, перепишем выражение для логарифмического декремента колебаний  $\theta = \pi/Q$ , из которого видно, что чем больше добротность, тем больше длительность колебательного процесса в контуре. Добротность контура определяется добротностями его элементов  $Q_L$  и  $Q_C$ . Учитывая (4.10), а также равенство  $R_{\pi}=R_L+R_C$ , получаем  $Q=Z_{\text{в}}/(R_L+R_C)$ . Из соотношений для  $Q_L$  и  $Q_C$  (см. гл. 3) имеем  $R_L=X_L/Q_L$  и  $R=X_C/Q_C$ , поэтому в соответствии с (4.8) можно записать:  $R_L=Z_{\text{в}}/Q_L$  и  $R_C=Z_{\text{в}}/Q_C$ . Тогда

$$Q = Z_{\text{в}}/(Z_{\text{в}}/Q_L + Z_{\text{в}}/Q_C) = Q_L Q_C/(Q_L + Q_C). \quad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что, если  $Q_L \ll Q_C$  (такое соотношение обычно соблюдается в практически используемых контурах),  $Q \approx Q_L$ , т.е. добротность контура определяется в основном добротностью индуктивной катушки.

Рассмотренные в настоящей главе свободные колебания обычно получают, используя режим ударного возбуждения контура. Для этого на контур воздействуют кратковременными импульсами тока, который заряжает контурный конденсатор, и в цепи возникают свободные затухающие колебания. В дальнейшем эти колебания могут быть использованы, например, для осуществления телеграфной радиосвязи. Впервые такая связь была применена для практических целей А. С. Поповым в 1900 г.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 4.1. Поясните, как происходят свободные колебания в идеальном контуре?
- 4.2. Запишите выражения для мгновенных значений напряжения и тока в идеальном контуре.
- 4.3. Подсчитайте частоту и период свободных колебаний для идеального контура, схема которого приведена на рис. 4.3, а, если  $C_1=C_2=200$  пФ,  $L_1=100$  мкГн.
- 4.4. Объясните смысл понятия «волновое сопротивление контура».

- 4.5. Поясните, почему в реальном контуре колебания имеют затухающий характер?
- 4.6. Определите коэффициент затухания колебаний и постоянную времени для контура, имеющего индуктивность  $L=500$  мкГн и сопротивление потерь  $R_{\pi}=25$  Ом.
- 4.7. Докажите, что в контуре, состоящем из  $L=400$  мкГн,  $C=400$  пФ,  $R_{\pi}=2$  кОм, свободные колебания возникнуть не могут.
- 4.8. Поясните физический смысл логарифмического декремента колебаний.
- 4.9. Определите длительность колебательного процесса в контуре, состоящем из  $L=300$  мкГн,  $C=300$  пФ,  $R_{\pi}=30$  Ом.
- 4.10. Запишите формулы для добротности и затухания контура, выразив их через элементы  $L$ ,  $C$ ,  $R_{\pi}$ .

## ГЛАВА 5

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Наиболее широкое применение в радиотехнических устройствах имеют незатухающие колебания. Для получения таких колебаний необходимо периодически передавать в контур определенное количество энергии, которая компенсировала бы потери в его активном сопротивлении. С этой целью к контуру подключается источник энергии — обычно генератор синусоидальной ЭДС. Если этот генератор и элементы контура образуют последовательную электрическую цепь, контур называют *последовательным*; если параллельную — *то параллельным*.

В данной главе рассматривается последовательный колебательный контур. Главное внимание уделяется следующим вопросам:

1. *Какие процессы протекают в контуре при подключении к нему генератора синусоидальной ЭДС?*
2. *Что такое резонанс и почему в последовательном контуре он называется резонансом напряжений?*
3. *Какую форму имеет АЧХ последовательного контура и от чего она зависит?*
4. *Как строятся векторные диаграммы последовательного контура и какие выводы можно сделать из их рассмотрения?*

#### 5.1. Переходные процессы

Предположим, что к последовательному контуру (рис. 5.1) в момент времени  $t=0$  подключается идеальный источник синусоидальной ЭДС  $e=E_m \sin \omega t$ , частота  $f=$

$=\omega/2\pi$  которой равна частоте свободных колебаний в контуре. Начиная с этого момента, в индуктивности и емкости контура накапливается энергия, и в цепи возникает ток. Амплитуда этого тока увеличивается посте-

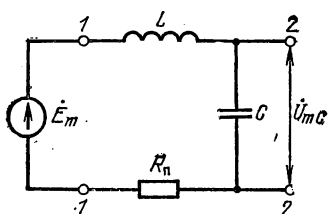
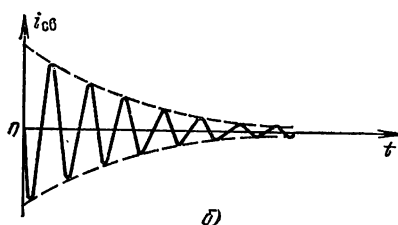
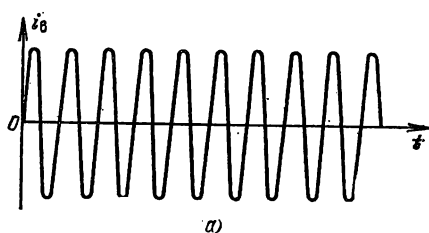
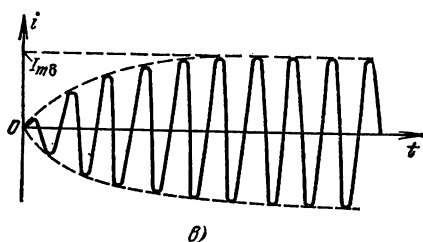


Рис. 5.1. Последовательный контур

Рис. 5.2. Переходный процесс в контуре при включении синусоидальной ЭДС, имеющей  $f=f_{св}$



пенно, так как в цепи, содержащей реактивные элементы, мгновенные изменения тока через катушку и напряжения на конденсаторе невозможны. Рост амплитуды тока и накопление энергии прекращаются, когда энергия



источника, поступающая в цепь, компенсирует потери в активном сопротивлении контура.

Как показано в [8], можно считать, что в момент времени  $t=0$  в контуре одновременно возникают два колебательных процесса: *вынужденные колебания* тока  $i_{в}=I_{мв} \sin \omega t$  (рис. 5.2, а) с постоянной амплитудой  $I_{мв}$  и частотой, равной частоте ЭДС, и затухающие свободные колебания  $i_{св}=-I_{мн} e^{-t/\tau} \sin \omega t$  (рис. 5.2, б). Начальные амплитуды этих колебаний равны по величине, а начальные фазы противоположны, поэтому в выражениях для  $i_{в}$  и  $i_{св}$  принято  $I_{мв}=-I_{мн}$ . Согласно принципу суперпозиции результирующий ток  $i$  в контуре равен



алгебраической сумме токов  $i_b$  и  $i_{св}$ . Амплитуда результирующего тока увеличивается по экспоненциальному закону (рис. 5.2, в), стремясь к установившемуся значению  $I_{mb}$ . Такой процесс нарастания амплитуды тока называется *переходным*. Переходный процесс теоретически продолжается бесконечно долго, однако практически его считают закончившимся за время  $(3...5) \tau$ , когда амплитуда тока достигает  $(0,95...0,99) I_{mb}$ .

Длительность переходного процесса в контуре, а также амплитуда установившегося тока зависят (при по-

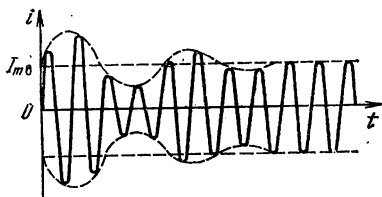
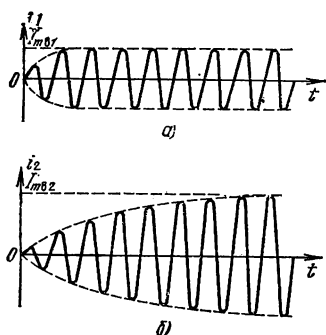


Рис. 5.4. Переходный процесс в контуре при  $f \neq f_{св}$

← Рис. 5.3. Переходный процесс в контурах с различным сопротивлением потерь

стоянном сопротивлении  $Z_b$ ) от сопротивления потерь. Для примера рассмотрим два контура, у которых одинаковые индуктивности и одинаковые емкости, но сопротивление потерь в первом контуре больше, чем во втором, т. е.  $L_1 = L_2$ ;  $C_1 = C_2$ ;  $R_{п1} > R_{п2}$ . Учитывая, что  $\tau = 2L/R_{п}$ , получаем  $\tau_1 < \tau_2$ . Следовательно, в первом контуре переходный процесс заканчивается быстрее (рис. 5.3, а), чем во втором (рис. 5.3, б). При этом в элементах первого контура по сравнению со вторым запасается меньше энергии, поэтому  $I_{mb1} < I_{mb2}$ .

Процесс нарастания тока в контуре имеет более сложный характер при неравенстве частоты ЭДС частоте свободных колебаний (рис. 5.4). Однако и в этом случае амплитуда результирующего тока в цепи принимает установившееся значение через промежуток времени  $(3...5) \tau$ .

Если источник ЭДС выключить, ток в контуре сразу не прекратится. Благодаря энергии, запасенной в катушке и конденсаторе, колебания продолжаются, хотя имеют затухающий характер. Примером графиков таких колебаний при условии, что выключение источника

происходит в момент времени  $t=0$ , могут служить кривые, изображенные на рис. 4.7.

В дальнейшем анализ работы последовательного контура будем проводить, считая, что колебания в нем имеют *установившийся* характер, а амплитуда тока достигла  $I_{тв}$ . Отметим, что в этом случае частота колебаний определяется только источником ЭДС (генератором) и не зависит от элементов контура  $L$  и  $C$ .

## 5.2. Резонанс напряжений

Воспользовавшись схемой, изображенной на рис. 5.1, на которой последовательный контур представлен как четырехполюсник, запишем выражение для его комплексного входного сопротивления

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{вх} &= R_{п} + i\omega L + 1/i\omega C = R_{п} + i\omega L - i/\omega C = \\ &= R_{п} + i(X_L - X_C) = R_{вх} + iX_{вх}, \end{aligned}$$

где  $X_{вх} = X_L - X_C$  — реактивная, а  $R_{вх} = R_{п}$  — активная составляющие.

Модуль входного сопротивления, называемый полным сопротивлением контура,

$$\begin{aligned} Z_{вх} &= \sqrt{R_{вх}^2 + X_{вх}^2} = \sqrt{R_{п}^2 + (X_L - X_C)^2} = \\ &= \sqrt{R_{п}^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

На рис. 5.5 изображены графики частотных зависимостей сопротивлений  $X_L$ ,  $X_C$ ,  $|X_{вх}|$ ,  $Z_{вх}$ . Активную составляющую полного сопротивления контура можно считать постоянной, однако такое допущение справедливо только для относительно небольшого интервала частот. Из рис. 5.5 видно, что на некоторой частоте  $f_0$  реактивная составляющая входного сопротивления обращается в нуль и полное сопротивление контура становится минимальным. Из (5.1) следует, что при  $X_{вх}=0$  сопротивление  $Z_{вх0}=R_{п}$ . При отклонении частоты генератора от  $f_0$  полное сопротивление контура увеличивается.

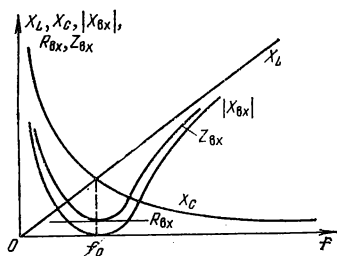


Рис. 5.5. Частотные зависимости сопротивлений в последовательном контуре

Если  $f < f_0$ , реактивная составляющая этого сопротивления имеет емкостный характер; если  $f > f_0$  — индуктивный.

Определим частоту  $f_0$ , воспользовавшись условием  $X_{вх0} = X_{L0} - X_{C0} = 0$ , откуда  $X_{L0} = X_{C0} = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$ . Из последнего выражения получаем  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Тогда

$$\omega_0 = 1/LC \text{ или } f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC}. \quad (5.2)$$

Сравнивая (5.2), (4.2) и (4.3), убеждаемся, что они идентичны. Отсюда следует, что, если частота генератора совпадает с частотой свободных колебаний в контуре, т. е.  $f_0 = f_{св}$  или  $\omega_0 = \omega_{св}$ , реактивная составляющая полного сопротивления обращается в нуль, полное сопротивление контура становится минимальным, активным и равным сопротивлению потерь, вследствие чего ток на входе цепи и ЭДС генератора совпадают по фазе. Такое явление в электрической цепи называют *резонансом*, а частоту  $f_0$  — *резонансной частотой*. В реальном контуре резонансная частота несколько отличается от частоты свободных колебаний, что видно из сравнения (5.2) и (4.9). Однако расхождение между этими частотами настолько мало, что в большинстве случаев им пренебрегают.

Сущность энергетических процессов при резонансе состоит в том, что сумма энергий электрического и магнитного полей  $W_m = W_{mL} + W_{mC}$  с течением времени не изменяется. Уменьшение энергии магнитного поля сопровождается увеличением энергии электрического поля и наоборот, т. е. происходит непрерывный переход энергии из электрического поля в магнитное и обратно. Энергия, поступающая в цепь от генератора, необратимо рассеивается, компенсируя потери в активном сопротивлении контура, благодаря чему в цепи поддерживаются незатухающие колебания.

Найдем амплитуды тока в контуре  $I_{m0}$  и напряжения на его элементах при резонансе  $U_{mC0}$  и  $U_{mL0}$ . В соответствии с законом Ома амплитуда тока в контуре на любой частоте

$$I_m = E_m / Z_{вх} = E_m / \sqrt{R_n^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (5.3)$$

При резонансе  $Z_{вх0} = R_n$ , поэтому амплитуда тока в контуре максимальная

$$I_{m0} = E_m / R_n. \quad (5.4)$$

Сопротивление  $Z_{вх0}$  называется *резонансным* и обозначается  $Z_0$ . Таким образом,

$$Z_0 = R_0 = R_{\Pi}. \quad (5.5)$$

Чтобы определить амплитуды напряжений  $U_{mC0}$  и  $U_{mL0}$ , воспользуемся формулами  $U_{mC0} = X_{C0} I_{m0}$ ;  $U_{mL0} = X_{L0} I_{m0}$ . Сначала найдем  $X_{C0} = 1/\omega_0 C = \sqrt{LC/C} = \sqrt{L/C} = Z_{в}$ . Аналогично получаем  $X_{L0} = \omega_0 L = L/\sqrt{LC} = \sqrt{L/C} = Z_{в}$ . Таким образом,

$$X_{C0} = X_{L0} = Z_{в}. \quad (5.6)$$

Теперь можно записать  $U_{mC0} = I_{m0} Z_{в}$  и  $U_{mL0} = I_{m0} Z_{в}$  или, учитывая (5.4),  $U_{mC0} = U_{mL0} = E_m Z_{в}/R_{\Pi}$ . Окончательно, с учетом (4.10), имеем  $U_{mC0} = U_{mL0} = E_m Q$ , откуда

$$U_{mC0}/E_m = U_{mL0}/E_m = Q. \quad (5.7)$$

Выражение (5.7) показывает, что при резонансе в последовательном контуре амплитуды напряжений на конденсаторе и катушке равны между собой и в  $Q$  раз больше амплитуды ЭДС генератора. Поэтому резонанс в последовательном контуре называется *резонансом напряжений*.

Из (5.7) ясен физический смысл добротности: она показывает, во сколько раз при резонансе амплитуда напряжения на каждом из реактивных элементов контура больше ЭДС генератора, подключенного к контуру.

До сих пор предполагалось, что генератор ЭДС, питающий контур, идеальный, т. е. его внутреннее сопротивление  $R_i = 0$ . Реальный генератор имеет  $R_i > 0$ , поэтому во все формулы, в которые входит  $R_{\Pi}$ , необходимо подставлять  $R_{\Pi} + R_i$ . Влияние внутреннего сопротивления генератора состоит в том, что чем оно больше, тем меньше добротность контура, больше резонансное сопротивление, меньше ток при резонансе и напряжения на реактивных элементах контура — другими словами, увеличение  $R_i$  приводит к ухудшению резонансных свойств контура. Поэтому для сохранения хороших резонансных свойств последовательного контура необходимо, чтобы внутреннее сопротивление генератора, питающего контур, было, по крайней мере, в несколько раз меньше чем сопротивление потерь в цепи.

### 5.3. Амплитудно-частотные характеристики

**Резонансная кривая тока.** Изменение частоты генератора, подключенного к контуру, влияет на полное сопротивление контура, вследствие чего изменяется ток в

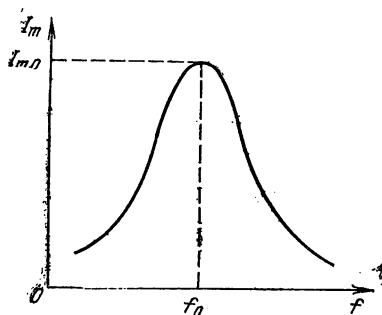


Рис. 5.6. Резонансная кривая тока в последовательном контуре

цепи. График частотной зависимости амплитуды тока в контуре, построенный по (5.3), приведен на рис. 5.6. Такой график обычно называют резонансной кривой тока. Из рис. 5.6 видно, что максимальная амплитуда тока в контуре получается на резонансной частоте. Чем больше отклонение частоты генератора от  $f_0$ , называемое *абсолютной расстройкой*

$\Delta f = f - f_0$ , тем меньше амплитуда тока в цепи. Такая форма резонансной кривой

показывает, что контур обладает *избирательными* свойствами, т. е. способностью «выделять» ток определенной частоты.

**Уравнения АЧХ и избирательность контура.** Выходным напряжением последовательного контура обычно служит напряжение на конденсаторе, т. е. напряжение между точками 2—2 (см. рис. 5.1). Можно показать [2], что для относительно небольших расстройек амплитуда этого напряжения  $U_{mc} = E_m Z_B / \sqrt{R_n^2 (1 + a^2)}$ . В этом выражении *обобщенная расстройка*

$$a = 2Q\Delta f/f_0, \quad (5.8)$$

где  $\Delta f/f_0$  — *относительная расстройка*.

Разделив  $U_{mc}$  на  $E_m$ , получим модуль коэффициента передачи последовательного контура

$$K = U_{mc}/E_m = Q/\sqrt{1 + a^2} = Q/\sqrt{1 + (2Q\Delta f/f_0)^2}. \quad (5.9)$$

На резонансной частоте  $\Delta f = 0$ , поэтому

$$K_0 = Q, \quad (5.10)$$

где  $K_0$  — модуль резонансного коэффициента передачи.

Соотношение (5.9) представляет собой уравнение АЧХ последовательного контура. Пользуясь этим уравнением, можно построить график АЧХ контуров, имею-

ших любые значения параметров  $L$ ,  $C$ ,  $R_n$ . Для определения влияния указанных параметров на форму АЧХ рассмотрим три контура: первый из них состоит из  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $R_{n1}$ , второй — из  $L_2=L_1$ ,  $C_2=C_1$ ,  $R_{n2}>R_{n1}$ , а третий — из  $L_3=nL_1$ ,  $C_3=C_1/n$ ,  $R_{n3}=R_{n1}$ , где  $n>1$  — любое число. Эти условия означают, что резонансные частоты контуров одинаковые, но добротности различные, причем  $Q_2<Q_1$  (вследствие большего сопротивления потерь), а  $Q_3>Q_1$  (из-за большего волнового сопротивления). Графики АЧХ контуров приведены на рис. 5.7 и обозначены соответственно 1, 2 и 3.

Как видно из рис. 5.7, характеристики имеют такую же форму, как резонансная кривая тока (см. рис. 5.6): максимальный коэффициент передачи соответствует резонансной частоте, а отклонение частоты от резонансной приводит к непрерывному

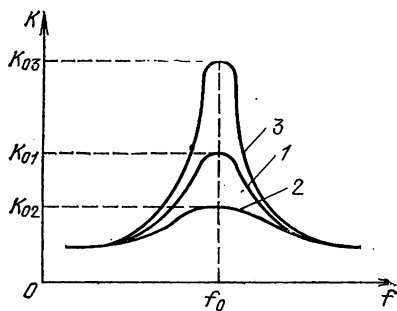


Рис. 5.7. АЧХ последовательных контуров

уменьшению коэффициента передачи. Сравнение характеристик, изображенных на рис. 5.7, показывает, что их максимумы получаются различными ( $K_{03}>K_{02}>K_{01}$ ), так как в соответствии с (5.10) модуль резонансного коэффициента передачи равен добротности контура. Кроме этого, чем больше добротность контура, тем острее вершина его АЧХ. Это можно объяснить, воспользовавшись (5.9), откуда следует, что при одной и той же абсолютной расстройке модуль резонансного коэффициента передачи уменьшается тем быстрее, чем больше добротность контура.

Так, например, в контуре, состоящем из элементов  $L=400$  мкГн,  $C=400$  пФ,  $R_n=10$  Ом и имеющем добротность  $Q=100$  при расстройке  $\Delta f=4$  кГц, модуль резонансного коэффициента передачи уменьшается примерно в 2,2 раза. В том же контуре, но при  $R_n=20$  Ом, т. е. добротности  $Q=50$ , расстройка  $\Delta f=4$  кГц уменьшает  $K_0$  лишь в 1,4 раза.

Необходимо отметить, что, строго говоря, максимум АЧХ контура не совпадает с резонансной частотой, а несколько смещен по оси частот влево. Чем меньше добротность контура, тем это смещение больше. Однако если  $Q>10$ , смещение максимума АЧХ крайне незначи-

тельно. Поэтому в контурах, применяемых в радиотехнических устройствах, этим смещением обычно пренебрегают.

Определим теперь относительный коэффициент передачи последовательного контура

$$K/K_0 = 1/\sqrt{1+a^2}. \quad (5.11)$$

Выражение (5.11) часто называют *уравнением избирательности* контура. Построенная по этому уравнению

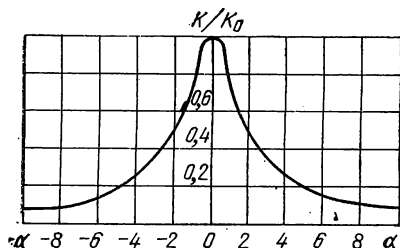


Рис. 5.8. Обобщенная АЧХ последовательного контура

АЧХ (рис. 5.8) называется *обобщенной* или *нормированной*. Эта характеристика применима к последовательному контуру с любыми значениями  $L$ ,  $C$ ,  $R_{\text{п}}$ . Максимум характеристики при резонансе ( $a=0$ ) всегда равен 1.

Формулы (5.9) и (5.11) можно использовать только в тех случаях, когда  $a < 10$ , что

соответствует значениям относительной расстройки  $\Delta f/f_0$ , составляющим несколько процентов от резонансной частоты.

### Полоса пропускания и коэффициент прямоугольности.

Важным параметром контура, который можно определить с помощью АЧХ, является полоса пропускания. Полосой пропускания называется область частот вблизи резонансной частоты, в пределах которой ток, напряжение или модуль коэффициента передачи контура уменьшается в определенное, заранее заданное число раз. Чаще всего это число берется равным  $\sqrt{2}$ . Тогда полоса пропускания

$$2\Delta f = f_0/Q = df_0. \quad (5.12)$$

Полосу пропускания контура легко определить по графику АЧХ (рис. 5.9). Для этого через точку  $1/\sqrt{2} \approx 0,707$  проводится горизонтальная прямая. По точкам пересечения прямой с АЧХ определяются расстройки  $\Delta f_1$  и  $-\Delta f_1$ . Полоса пропускания вычисляется как разность расстроек, т. е.  $\Delta f_1 - (-\Delta f_1) = 2\Delta f_1$ .

С помощью понятия полосы пропускания можно оценить частотные искажения сигналов, проходящих через

контур, а также избирательные свойства контура. Для примера предположим, что к контуру подключен генератор ЭДС, спектр которой состоит из одинаковых по амплитуде гармонических составляющих, разделенных одинаковыми частотными интервалами (рис. 5.10, а). Из этого спектра необходимо выделить составляющие в области частот  $f_1 \dots f_2$ , поэтому полоса пропускания контура должна быть  $f_2 - f_1$ . Для того чтобы определить спектр выходного напряжения, необходимо перемножить амплитуду каждой спектральной составляющей и модуль

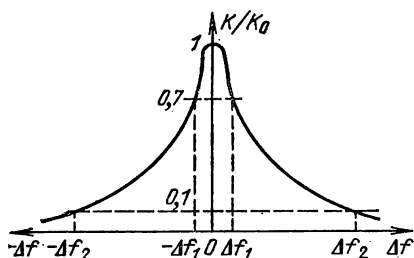


Рис. 5.9. Графическое определение полосы пропускания контура

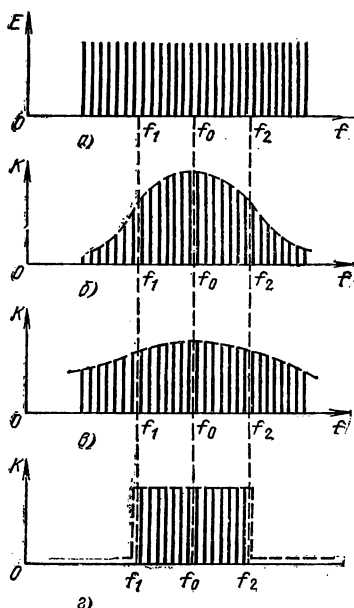


Рис. 5.10 Прохождение сигнала с равномерным спектром через контур

коэффициента передачи контура на соответствующих частотах. В результате получим, что огибающая спектра амплитуд выходного напряжения повторяет форму АЧХ контура (рис. 5.10, б). Из сравнения рис. 5.10, а, б следует, что в пределах  $f_1 \dots f_2$  входной и выходной спектры имеют разное соотношение между амплитудами гармонических составляющих. Это свидетельствует о наличии в цепи частотных искажений. Кроме того, гармонические составляющие, частоты которых находятся вне полосы пропускания, подавляются контуром неполностью. Их амплитуды уменьшаются постепенно по мере увеличения расстройки.



Чтобы уменьшить частотные искажения, необходимо расширить полосу пропускания (рис. 5.10, в), но тогда подавление спектральных составляющих вне полосы станет менее эффективным, т. е. ухудшится *избирательность контура*. Таким образом, между требованиями, предъявляемыми к величине частотных искажений в полосе пропускания и к избирательности, имеется противоречие, которое объясняется отличием формы реальной АЧХ от идеальной, имеющей вид прямоугольника (рис. 5.10, з).

Для того чтобы оценить отличие формы реальной АЧХ от идеальной, пользуются понятием *коэффициента прямоугольности*  $K_{\Pi}$ . Этот коэффициент равен отношению двух полос пропускания, одна из которых отсчитывается при ослаблении коэффициента передачи в  $\sqrt{2}$  раз, а другая — в 10, 100 или 1000 раз. Последнюю часто называют полосой мешания.

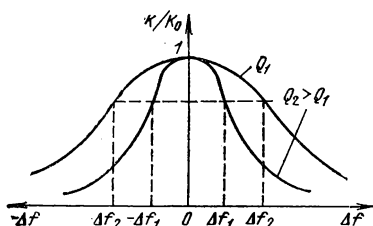


Рис. 5.11. АЧХ контуров с разной добротностью

На рис. 5.9 полоса мешания, отсчитанная при ослаблении в 10 раз, определяется как  $\Delta f_2 - (-\Delta f_2) = 2\Delta f_2$ . Тогда  $K_{\Pi} = 2\Delta f_2 / \Delta f_1 = \Delta f_2 / \Delta f_1$ . Чем больше  $K_{\Pi}$ , тем сильнее отличается форма реальной АЧХ от идеальной. Для идеальной АЧХ  $K_{\Pi} = 1$ , для АЧХ одиночного контура  $K_{\Pi} \gg 1$ . Это является одной из причин, по которой оди-

ночные контуры в радиотехнических устройствах применяются сравнительно редко.

Из всего сказанного выше можно сделать вывод о том, что основным фактором, влияющим на форму АЧХ, является добротность контура: увеличение добротности приводит к уменьшению коэффициента прямоугольности, т. е. к повышению крутизны склонов АЧХ и улучшению избирательности контура, а также к уменьшению полосы пропускания. На рис. 5.11 приведены графики АЧХ двух контуров с различной добротностью и одинаковой резонансной частотой. Для удобства сравнения характеристик по вертикальной оси координат отложен относительный коэффициент передачи.

Для последовательного контура АЧХ зависит не только от добротности контура, но и от частоты собственных колебаний, что особенно важно учитывать в пе-

рестраиваемых или *диапазонных контурах*. Такие контуры широко используют в радиопередатчиках, радиоприемниках и т. д.

Рассмотрим для примера, как изменяется АЧХ контура, включенного во входную цепь радиоприемника, если контур перестраивается изменением емкости. Пусть рабочий диапазон радиоприемника ограничен частотами  $f_1 \dots f_2$ . Диапазон изменения частоты свободных колебаний должен быть таким же, т. е.  $f_{св1} = f_1$ ,  $f_{св2} = f_2$  для того, чтобы на любой из частот  $f_1 \dots f_2$  сигнала при соответствующей настройке в контуре мог возникнуть резонанс. На минимальной частоте  $f_1$  диапазона емкость  $C_2$  контура максимальная, а на максимальной частоте  $f_2$  — минимальная. Следовательно, можно заключить, что с ростом частоты настройки контура его волновое сопро-

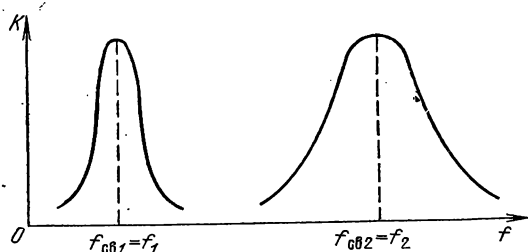


Рис. 5.12. АЧХ контура при его перестройке изменением емкости

тивление увеличивается. Если бы сопротивление потерь в контуре не изменялось, добротность также увеличивалась бы при увеличении частоты. Однако из-за явления поверхностного эффекта, излучения электромагнитной энергии, потерь в диэлектрике конденсатора и т. д. сопротивление потерь становится тем больше, чем больше частота. Из-за этого добротность контура в диапазоне частот  $f_1 \dots f_2$  остается примерно постоянной (при условии, что частоты  $f_1$  и  $f_2$  отличаются друг от друга не более чем в 2... 3 раза.) Тогда на основании (5.12) получаем, что по мере роста частоты настройки контура его полоса пропускания увеличивается, а модуль коэффициента передачи остается приблизительно постоянным. В этом случае примерный вид АЧХ последовательного контура будет таким, как показано на рис. 5.12.

#### 5.4. Векторные диаграммы

Как было установлено в § 5.2, изменение частоты генератора приводит к изменению входного комплексного сопротивления контура. При этом меняется как модуль входного сопротивления, так и его аргумент, характеризующий фазовый сдвиг между ЭДС генератора и входным током, одновременно являющимся током в цепи. Для получения наглядного представления о сдвиге фаз

между током, напряжениями на элементах и подводенной ЭДС в контуре построим векторные диаграммы.

Построение векторных диаграмм. Вначале рассмотрим случай резонанса (рис. 5.13, а). Построение диаграммы начнем с вектора тока в контуре  $I_m$ . Пусть этот вектор направлен вертикально вверх и имеет произвольную длину. Ток  $I_m$ , проходя по контуру, создает на его элементах напряжения  $U_{mL}$ ,  $U_{mC}$  и  $U_{mRn}$ . Нап-

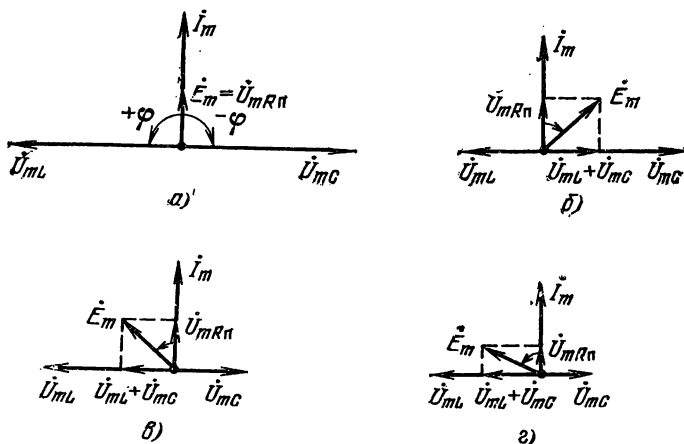


Рис. 5.13. Векторные диаграммы последовательного контура

ряжение на зажимах катушки опережает по фазе ток в ней на  $90^\circ$ , поэтому вектор  $U_{mL}$  направлен по отношению к  $I_m$  под углом  $\omega = +90^\circ$ . Напряжение на конденсаторе, наоборот, отстает от тока на  $90^\circ$ , следовательно, вектор  $U_{mC}$  повернут относительно вектора  $I_m$  на угол  $\varphi = -90^\circ$ . Таким образом, угол между векторами  $U_{mL}$  и  $U_{mC}$  равен  $180^\circ$ . Так как при резонансе реактивные сопротивления конденсатора и катушки равны, будут равны и амплитуды напряжения на них, следовательно, длины векторов  $U_{mL}$  и  $U_{mC}$  одинаковые. Это значит, что сумма мгновенных значений напряжений на емкости и индуктивности равна нулю в любой момент времени. Амплитуды этих напряжений могут быть достаточно большими и могут превышать амплитуду ЭДС генератора в десятки и сотни раз, поскольку они определяются энергией, накопленной в течение переходного процесса электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки.

Сдвиг фаз между напряжением на активном сопротивлении и током в контуре равен нулю, поэтому векторы  $U_{mRp}$  и  $I_m$  совпадают по направлению. Чтобы определить величину и направление вектора ЭДС  $E_m$ , надо найти сумму векторов  $E_m = U_{mL} + U_{mc} + U_{mRp}$ . Так как  $U_{mL} = -U_{mc}$ , получаем  $E_m = U_{mRp}$ . Равенство амплитуд ЭДС и напряжения на сопротивлении потерь означает, что энергия генератора полностью рассеивается в сопротивлении потерь. Одинаковое направление векторов  $E_m$  и  $I_m$  показывает, что сдвиг фаз между  $E_m$  и  $I_m$  равен нулю, т. е. полное сопротивление контура активное.

Теперь построим векторную диаграмму последовательного контура для условия  $f < f_0$ . В этом случае  $X_C > X_L$ , поэтому  $\dot{U}_{mc} > \dot{U}_{mL}$  (рис. 5.13, б). В результате построения необходимых векторов получаем, что направление векторов  $I_m$  и  $E_m$  различное. Угол между этими векторами отрицательный и по абсолютному значению меньше  $90^\circ$ , следовательно, реактивная составляющая полного сопротивления контура имеет емкостный характер. Векторная диаграмма контура на частоте  $f > f_0$  ( $X_C < X_L$ ,  $\dot{U}_{mc} < \dot{U}_{mL}$ ) изображена на рис. 5.13, в. Из диаграммы видно, что угол между векторами  $I_m$  и  $E_m$  положительный и меньше  $90^\circ$ , что свидетельствует об индуктивном характере реактивной составляющей полного сопротивления. Все сказанное вполне согласуется с теми положениями, которые были рассмотрены в § 5.2.

Заметим, что угол  $\varphi$  между векторами  $E_m$  и  $I_m$  зависит от частоты. Чтобы убедиться в этом, сравним векторные диаграммы, изображенные на рис. 5.13, в, г. Первая из них соответствует условию  $f > f_0$ , а вторая —  $f \gg f_0$ . Сравнение показывает, что чем больше отличаются частоты  $f$  и  $f_0$ , тем больше угол между векторами  $E_m$  и  $I_m$ . При неограниченном возрастании частоты угол  $\varphi \rightarrow +90^\circ$ . Этот угол можно найти из формулы

$$\operatorname{tg} \varphi = X_{вх} / R_n = (X_L - X_C) / R_n. \quad (5.13)$$

Выражение (5.13) показывает, что угол  $\varphi$ , являющийся аргументом комплексного входного сопротивления последовательного контура, зависит от сопротивления потерь, а следовательно, от добротности контура. Частотная зависимость этого угла для двух значений добротности приведена на рис. 5.14. Из этого рисунка следует, что чем больше добротность, тем круче характеристика, но вместе с тем больше ее неравномерность в диапазоне частот.

Особенности применения последовательного контура. Рассмотренный в настоящей главе последовательный контур имеет применение в ряде радиотехнических устройств, например, во входных цепях радиоприемников, в некоторых измерительных

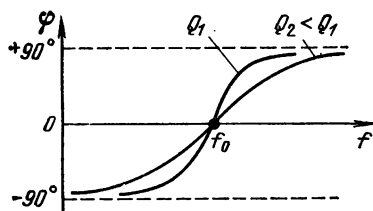


Рис. 5.14. Частотная зависимость угла  $\varphi$  в последовательном контуре

приборах (измерителях добротности, резонансных волномеров) и т. д. Однако более широкому распространению последовательных контуров препятствует необходимость использования для них источников энергии с очень малым внутренним сопротивлением. Применяемые в большинстве случаев источники энергии — электронные лампы и транзисторы — имеют большое внутреннее сопротивление и без специальных мер они не могут использоваться для совместной работы с последовательными контурами.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 5.1. Почему при подключении к контуру источника синусоидальной ЭДС амплитуда тока в контуре нарастает постепенно?
- 5.2. От каких параметров контура зависит длительность переходного процесса?
- 5.3. Как изменяется полное сопротивление последовательного контура в зависимости от частоты?
- 5.4. В чем заключается сущность энергетических процессов при резонансе?
- 5.5. Почему резонанс в последовательном контуре называют резонансом напряжений?
- 5.6. Определите амплитуду тока в контуре при резонансе, если сопротивление потерь в нем  $R_n = 10$  Ом, а амплитуда ЭДС  $E_m = 1$  В для двух значений внутреннего сопротивления генератора  $R_{i1} = 0$ ,  $R_{i2} = 5$  Ом.
- 5.7. Для условия предыдущей задачи найдите амплитуду напряжения на конденсаторе контура, если его емкость  $C = 200$  пФ, а резонансная частота  $f_0 = 200$  кГц.
- 5.8. Почему генератор ЭДС, питающий последовательный контур, должен иметь малое внутреннее сопротивление?
- 5.9. Что называется абсолютной, относительной и обобщенной расстройками? Приведите формулы.
- 5.10. Объясните, как влияет добротность контура на форму его АЧХ?
- 5.11. Что называется полосой пропускания контура, как ее определить аналитически и графически?

- 5.12. Что такое коэффициент прямоугольности? Какое свойство контура он характеризует и как его определить?
- 5.13. Объясните, как и почему меняется форма АЧХ контура, работающего в диапазоне частот?
- 5.14. Найдите полосу пропускания контура по следующим данным:  $L=300$  мкГн,  $C=300$  пФ,  $R_{\pi}=20$  Ом,  $R_i=10$  Ом.
- 5.15. Постройте векторные диаграммы последовательного контура при резонансе и расстройке. Сделайте выводы.
- 5.16. Докажите с помощью векторных диаграмм, что изменение частоты приводит к изменению угла сдвига фаз между током в контуре и ЭДС генератора.

## ГЛАВА 6

### ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Как указывалось в гл. 5, последовательный колебательный контур относительно редко применяется в радиотехнических устройствах из-за необходимости питать его от источника энергии с малым внутренним сопротивлением.

Значительно чаще используется параллельный колебательный контур, в котором источник ЭДС, индуктивная катушка и конденсатор соединены параллельно. Особенно широко параллельный контур применяется в устройствах, содержащих электронные лампы, транзисторы и другие элементы, имеющие сравнительно большое внутреннее сопротивление.

В данной главе рассматриваются основные свойства и характеристики параллельных контуров, причем основное внимание уделяется следующим вопросам:

1. *Почему резонанс в параллельном контуре называется резонансом токов?*

2. *Что такое эквивалентная добротность и как она влияет на форму АЧХ параллельного контура?*

3. *Какими способами можно расширить полосу пропускания параллельного контура?*

4. *Какой вид имеют векторные диаграммы параллельного контура при резонансе и расстройке?*

5. *Какие свойства имеют параллельные контуры второго и третьего вида?*

#### 6.1. Резонанс токов

Электрическая схема параллельного контура приведена на рис. 6.1, а. Контур питается от источника ЭДС с амплитудой  $E_m$ , внутреннее сопротивление которого

$R_i$ . Сразу отметим, что это сопротивление не должно быть близким к нулю, так как в этом случае контур окажется замкнутым. В дальнейшем будем считать, что  $0 \ll R_i < \infty$ . Поскольку активные потери имеются в ветвях как с индуктивностью, так и с емкостью, они учтены двумя сопротивлениями  $R_L$  и  $R_C$ .

В подавляющем большинстве практически используемых контуров  $R_L \gg R_C$ . Поэтому можно пренебречь

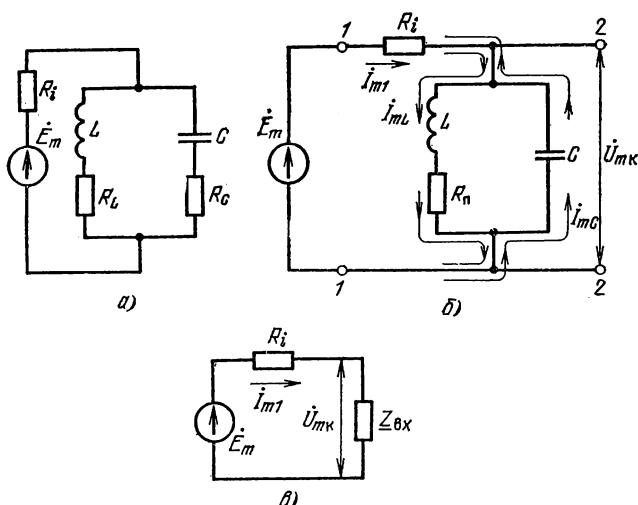


Рис. 6.1. Схемы параллельного контура:  
а, б — замещения; в — эквивалентная

$R_C$  по сравнению с  $R_L$  и считать, что активные потери  $R_{\Pi} = R_L$  сосредоточены только в ветви с индуктивностью. При этом значительно упрощаются расчеты характеристик контура, а отклонение получаемых результатов от истинных весьма незначительно. В дальнейшем, анализируя процессы в параллельном контуре, будем пользоваться схемой, показанной на рис. 6.1, б.

Определим вначале комплексное входное сопротивление контура  $\underline{Z}_{вх} = \dot{U}_{мк} / \dot{I}_{m1} = (\dot{E}_m - \dot{I}_{m1} R_i) / \dot{I}_{m1}$ . Для нахождения этого сопротивления учтем, что контур состоит из двух ветвей, комплексные сопротивления которых  $\underline{Z}_1 = R_{\Pi} + i\omega L$  и  $\underline{Z}_2 = -i/\omega C$ . Поскольку ветви соединены параллельно, имеем  $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ . Подставляя в это выражение значения  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  и выполняя несложные

математические преобразования, получаем [2]  $\underline{Z}_{вх} = R_{вх} + iX_{вх}$ , где

$$R_{вх} = LR_{п}/C(R_{п}^2 + X^2) = Z_{в}Q/(1 + a^2), \quad (6.1)$$

$$X_{вх} = -LX/C(R_{п}^2 + X^2) = -Z_{в}Qa/(1 + a^2). \quad (6.2)$$

В (6.1) и (6.2)  $X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C$  — реактивное сопротивление контура при последовательном обходе его элементов. Полное сопротивление параллельного контура (т. е. модуль его входного сопротивления)

$$Z_{вх} = \sqrt{R_{вх}^2 + X_{вх}^2} = Z_{в}Q/\sqrt{1 + a^2}. \quad (6.3)$$

На основании (6.1) ... (6.3) на рис. 6.2 построим графики зависимостей  $Z_{вх}$ ,  $X_{вх}$ ,  $R_{вх}$  от обобщенной расстройки. Из рис. 6.2 следует, что в параллельном контуре активная и реактивная составляющие полного сопротивления зависят от расстройки (т. е. от частоты генератора), в то время как в последовательном контуре от частоты зависит только реактивная составляющая сопротивления. Как и в последовательном контуре, на некоторой частоте, т. е. при  $a=0$ , реактивная составляющая полного сопротивления обращается в нуль, что, как уже указывалось, является условием резонанса. Резонансная частота может быть определена из (6.2) при  $X_{вх0}=0$ , что соответствует  $X_0 = \omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0$ . Отсюда получаем  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC}$ ,  $\omega_0 L = 1/\omega_0 C = Z_{в}$ . Эти выражения совпадают с (5.2) и (5.6) для последовательного контура.

Резонансное сопротивление параллельного контура найдем из соотношения (6.3) при  $a=0$ :

$$Z_{вх0} = R_0 = Z_{в}Q = Z_{в}^2/R_{п} = L/R_{п}C. \quad (6.4)$$

Сопротивление  $R_0$  активное, поэтому угол сдвига фаз между напряжением на контуре  $\dot{U}_{тк}$  и током в неразветвленной части цепи  $\dot{I}_{м1}$  равен нулю. Резонансное

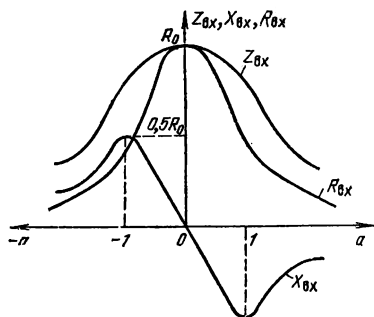


Рис. 6.2. Частотные зависимости сопротивлений в параллельном контуре



сопротивление параллельного контура значительно больше, чем последовательного, поскольку обычно  $Q \gg 1$  и  $Z_b \gg R_{\Pi}$ . Если в последовательном контуре  $R_0$  составляет единицы и десятки ом, то в параллельном десятки и сотни тысяч ом.

Из рис. 6.2 следует также, что при увеличении расстройки полное сопротивление параллельного контура уменьшается. Если  $f < f_0$  ( $a < 0$ ), реактивная составляющая полного сопротивления имеет индуктивный характер, если  $f > f_0$  ( $a > 0$ ), — емкостный. Сопоставляя рис. 6.2 и 5.5, замечаем, что частотные зависимости полных сопротивлений параллельного и последовательного контуров противоположны.

Перейдем к рассмотрению токов в цепи. Под действием ЭДС генератора в ветвях контура проходят токи  $I_{mL}$  в ветви с индуктивностью и  $I_{mC}$  в ветви с емкостью. Амплитуды этих токов определяются амплитудой напряжения на контуре  $U_{mK}$  и полными сопротивлениями его ветвей. При резонансе  $X_{C0} = X_{L0}$ , поэтому  $I_{mC0} \approx I_{mL0}$ . В сопротивлении потерь контура выделяется активная мощность  $P_K = I_{mL0}^2 R_{\Pi} / 2$ . Эта мощность подводится от генератора  $P_{\text{ген}}$ . Ее можно определить с помощью эквивалентной схемы параллельного контура (рис. 6.1, в), в которой при резонансе можно заменить  $Z_{bK}$  на  $R_0$ . Тогда получаем  $P_{\text{ген}} = I_{m10}^2 R_0 / 2$ . Приравнявая мощности  $P_K$  и  $P_{\text{ген}}$  и сокращая на  $1/2$ , имеем  $I_{mL0}^2 R_{\Pi} = I_{m10}^2 R_0$ . Отсюда находим отношение  $I_{mL0}^2 / I_{m10}^2 = Z_b Q / R_{\Pi} = Q^2$ . Извлекая квадратный корень, окончательно получаем

$$I_{mL0} / I_{m10} = Q. \quad (6.5)$$

Равенство (6.5) перепишем в виде  $I_{mL0} = I_{m10} Q$ . Отсюда следует, что при резонансе в параллельном контуре амплитуда тока в ветви с индуктивностью (или в ветви с емкостью) в  $Q$  раз больше амплитуды тока в неразветвленной части цепи. Поэтому резонанс в параллельном контуре называют *резонансом токов*. Равенство (6.5) позволяет сформулировать физический смысл добротности: добротность в параллельном контуре показывает, во сколько раз при резонансе амплитуда токов в ветвях контура больше амплитуды тока в неразветвленной части цепи.

Если добротность параллельного контура достаточно велика, энергетические процессы при резонансе токов можно считать такими же, как при резонансе напряже-

ний: конденсатор и катушка периодически обмениваются энергиями, а генератор компенсирует потери в активном сопротивлении контура, поддерживая в цепи незатухающие колебания. Реактивная энергия, накопленная в конденсаторе и катушке, в  $Q$  раз больше активной энергии, поступающей от генератора, поэтому токи в ветвях контура больше тока в неразветвленной части цепи.

Необходимо отметить, что резонансная частота параллельного контура зависит от сопротивления потерь, что не учитывается в формуле  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , а также в других соотношениях, в которые входит величина  $\omega_0$ . Точная формула частоты, учитывающая потери  $R_C$  в ветви с емкостью и  $R_L$  в ветви с индуктивностью (см. рис. 6.1, а), имеет следующий вид [7]:

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} \sqrt{(Z_B^2 - R_L^2)/(Z_B^2 - R_C^2)}. \quad (6.6)$$

Сравнивая (6.6) и (5.2), замечаем, что в зависимости от соотношения между сопротивлениями  $R_L$  и  $R_C$  резонансная частота параллельного контура может быть больше или меньше, чем последовательного. Однако при малых потерях расхождение между резонансными частотами настолько мало, что им обычно пренебрегают.

## 6.2. Амплитудно-частотные характеристики

В зависимости от частоты генератора ЭДС, питающего контур, входное сопротивление, а также токи и напряжения в нем имеют различные значения. Амплитуду тока в неразветвленной части цепи можно найти по формуле  $I_{m1} = E_m / (R_t + Z_{вх})$ , где  $Z_{вх}$  — полное сопротивление контура, определяемое (6.3). График зависимости тока  $I_{m1}$  от частоты при некотором постоянном значении внутреннего сопротивления генератора (резонансная кривая тока) показан на рис. 6.3. Как видно из рис. 6.3, амплитуда тока на резонансной частоте минимальная. При отклонении частоты от резонансной ток увеличивается и характер изменения  $I_{m1}$  противоположен изменению тока в последовательном контуре (см. рис. 5.6).

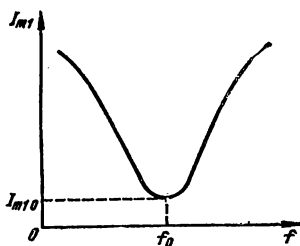


Рис. 6.3. Резонансная кривая тока в неразветвленной части цепи параллельного контура

Выходным напряжением контура как четырехполюсника для схемы, изображенной на рис. 6.1, б, является амплитуда напряжения  $\dot{U}_{mk}$ . Это же напряжение одновременно является входным:

$$\dot{U}_{mk} = \dot{E}_m - \dot{I}_{m1} R_i = \dot{E}_m Z_{\text{вх}} / (R_i + Z_{\text{вх}}). \quad (6.7)$$

Комплексный коэффициент передачи параллельного контура  $K = \dot{U}_{mk} / \dot{E}_m = Z_{\text{вх}} / (R_i + Z_{\text{вх}})$ . Учитывая, что вывод выражения для модуля комплексного коэффициента передачи довольно громоздкий, воспользуемся окончательной формулой, заимствованной из [8]:

$$K = Z_{\text{в}} Q_3 / R_i \sqrt{1 + a_3^2}, \quad (6.8)$$

где  $a_3 = 2Q_3 \Delta f / f_0$ ;

$$Q_3 = Q / (1 + R_0 / R_i) \quad (6.9)$$

— эквивалентная добротность;  $Q = Z_{\text{в}} / R_{\text{п}}$  — собственная добротность контура, вычисленная без учета влияния внутреннего сопротивления генератора.

Как видно из (6.9),  $Q_3 < Q$ , причем чем больше  $R_i$ , тем ближе  $Q_3$  к  $Q$ . Уменьшение эквивалентной добротности по сравнению с собственной объясняется тем, что внутреннее сопротивление источника ЭДС шунтирует контур (см. рис. 6.1, б). Шунтирующее действие сопротивления  $R_i$  тем слабее, чем оно больше по сравнению с  $R_0$ . Поэтому для сохранения высокой добротности параллельный контур нужно питать от генератора, имеющего большое (сотни килоом) внутреннее сопротивление.

С учетом (6.8) на рис. 6.4, а построены АЧХ параллельного контура при различных значениях сопротивления  $R_i$ : 1 соответствует значению  $R_{i1} = 0$ , 2 —  $R_{i2} > 0$ ; 3 —  $R_{i3} \gg 0$ . Как видно из рис. 6.4, а,  $R_{i1} = 0$ ,  $K_1 = 1$  при любой расстройке. Чтобы убедиться в этом, перепишем (6.8) в следующем виде:

$$K = R_0 / (R_i + R_0) \sqrt{1 + a_3^2}. \quad (6.10)$$

Подставляя в (6.10)  $R_i = 0$ , получаем  $a_3 = 0$ ,  $K_1 = R_0 / R_0 = 1$ . Физический смысл последнего выражения заключается в том, что если  $R_{i1} = 0$  (контур замкнут накоротко), то амплитуда ЭДС источника равна амплитуде напряжения на контуре.

При увеличении внутреннего сопротивления генератора модуль резонансного коэффициента передачи  $K_0 =$

$= Z_в Q_3 / R_i$  уменьшается. Физически уменьшение  $K_0$  можно объяснить, воспользовавшись эквивалентной схемой контура (см. рис. 6.1, в). Из схемы видно, что чем больше внутреннее сопротивление, тем больше амплитуда напряжения на нем, меньше амплитуда напряжения на контуре и меньше  $K_0$ . Из рис. 6.4, а и (6.9) следует так-

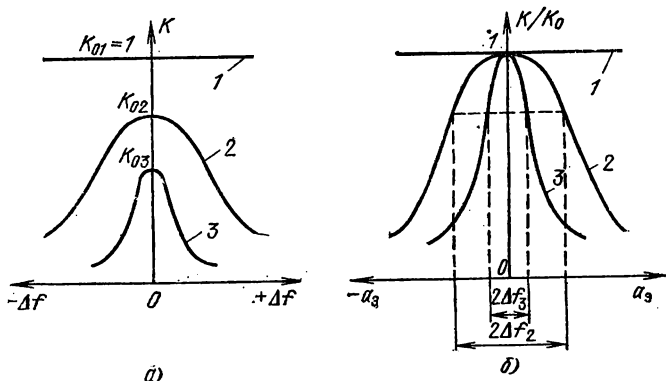


Рис. 6.4. АЧХ параллельного контура

же, что чем больше  $R_i$ , тем больше эквивалентная добротность и острее вершина АЧХ.

Для получения уравнения избирательности параллельного контура разделим (6.8) на  $K_0$ . Тогда

$$K/K_0 = 1/\sqrt{1 + a_3^2} = 1/\sqrt{1 + (2Q_3 \Delta f/f_0)^2}. \quad (6.11)$$

Построенные с учетом (6.11) характеристики избирательности приведены на рис. 6.4, б (нумерация характеристик такая же, как на рис. 6.4, а). Из характеристик видно, что внутреннее сопротивление генератора оказывает существенное влияние на полосу пропускания контура

$$2\Delta f = f_0/Q_3. \quad (6.12)$$

При  $R_i = 0$  добротность  $Q_3 = 0$ , поэтому полоса пропускания  $2\Delta f \rightarrow \infty$ . Чем больше  $R_i$ , тем больше  $Q_3$  и меньше полоса пропускания. Наоборот, при  $R_i \rightarrow \infty$  эквивалентная добротность  $Q_3 \rightarrow Q$ , а полоса пропускания — к наименьшему значению  $2\Delta f$ , определяемому по (5.12). При  $R_i = R_0$  эквивалентная добротность  $Q_3$  уменьшается в 2 раза по сравнению со значением  $Q$ , а полоса пропускания расширяется вдвое по сравнению с  $2\Delta f$ .

### 6.3. Расширение полосы пропускания

В ряде случаев требуется искусственно расширить полосу пропускания контура, не изменяя его резонансной частоты. С этой целью необходимо уменьшить добротность контура, что достигается увеличением сопротивления потерь или уменьшением волнового сопротивления контура.

Понижение добротности за счет уменьшения волнового сопротивления применяется редко, поскольку для сохранения постоянства резонансной частоты требуется одновременное изменение как индуктивности, так и емкости контура.

Пусть, например, в контуре, состоящем из элементов  $L$  и  $C$  и имеющем резонансную частоту  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , необходимо вдвое уменьшить волновое сопротивление  $Z_n$ . Это можно сделать, если в 4 раза уменьшить индуктивность катушки или в 4 раза увеличить емкость конденсатора, однако при этом соответственно вдвое увеличится или уменьшится резонансная частота. Чтобы резонансная частота осталась неизменной, нужно одновременно с уменьшением в 2 раза индуктивности катушки во столько же раз увеличить емкость конденсатора. Тогда резонансная частота останется без изменения, так как  $\omega_{01} = 1/\sqrt{0,5L2C} = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ , а волновое сопротивление уменьшится вдвое, поскольку  $Z_{n1} = \sqrt{0,5L/2C} = 0,5\sqrt{L/C} = 0,5 Z_n$ .

Уменьшить добротность за счет увеличения активного сопротивления контура можно двумя путями: введением в контур добавочного резистора  $R_d$  или шунтированием контура резистором  $R_{ш}$ . Схема контура с дополнительным резистором показана на рис. 6.5, а. Сопротивление добавочного резистора  $R_d = (2\Delta f_T Z_n / f_0) - R_n$ , где  $2\Delta f_T$  — требуемая полоса пропускания.

Для примера вычислим  $R_d$  для контура, имеющего  $Z_n = 1000$  Ом,  $f_0 = 400$  кГц,  $R_n = 10$  Ом, при котором его полоса пропускания  $2\Delta f_T = 12$  кГц. Подставляя исходные данные в формулу для  $R_d$ , получаем  $R_d = 12 \cdot 1000/400 - 10 = 20$  Ом.

На рис. 6.5, б изображена схема контура, к которому подключен шунтирующий резистор  $R_{ш}$ . За счет тока  $I_{mш}$ , проходящего через резистор  $R$ , возрастает амплитуда тока  $I_{m1}$  в неразветвленной части цепи. Это значит, что происходит увеличение активной мощности, отдаваемой генератором ЭДС в цепь, состоящую из контура и шунтирующего резистора, на значение  $P_{ш} = I_{mш}^2 R_{ш} / 2$ . Такое же приращение активной мощности  $P_d = I_{mL}^2 R_d / 2$  генератора можно получить, если предположить, что при отсутствии  $R_{ш}$  на  $R_d$  возросло активное сопротивление контура.

Приравняем мощности  $P_{\text{ш}} = P_{\text{д}} = I_{\text{мш}}^2 R_{\text{ш}} / 2 = I_{\text{мЛ}}^2 R_{\text{д}} / 2$ . Сокращая на  $1/2$ , имеем  $I_{\text{мш}}^2 R_{\text{ш}} = I_{\text{мЛ}}^2 R_{\text{д}}$ , откуда  $R_{\text{ш}} = I_{\text{мЛ}}^2 R_{\text{д}} / I_{\text{мш}}^2$ . Выразим амплитуды токов  $I_{\text{мЛ}}$  и  $I_{\text{мш}}$  через амплитуду напряжения на контуре  $U_{\text{мк}}$ . Получаем  $I_{\text{мш}} = U_{\text{мк}} / R_{\text{ш}}$ ,  $I_{\text{мЛ}} = U_{\text{мк}} / Z_1$ , где  $Z_1 = \sqrt{(R_{\text{п}} + R_{\text{д}})^2 + X_L^2}$  — полное сопротивление ветви с индуктивностью (рис. 6.5, а).

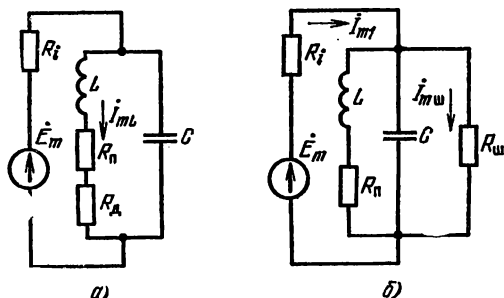


Рис. 6.5. Способы расширения полосы пропускания параллельного контура

Вблизи резонансной частоты  $X_L \approx Z_{\text{в}} \gg (R_{\text{п}} + R_{\text{д}})$ , поэтому  $Z_1 = \sqrt{Z_{\text{в}}^2} = Z_{\text{в}}$ , следовательно,  $I_{\text{мЛ}} = U_{\text{мк}} / Z_{\text{в}}$ . Используя полученные соотношения, перепишем  $R_{\text{ш}} = U_{\text{мк}}^2 R_{\text{д}} R_{\text{ш}}^2 / Z_{\text{в}}^2 U_{\text{мк}}^2$ , откуда после сокращения получаем  $1 = R_{\text{д}} R_{\text{ш}} / Z_{\text{в}}^2$  или

$$R_{\text{ш}} = Z_{\text{в}}^2 / R_{\text{д}}, \quad R_{\text{д}} = Z_{\text{в}}^2 / R_{\text{ш}}. \quad (6.13)$$

Из (6.13) следует, что подключение к контуру шунтирующего резистора эквивалентно включению последовательно с элементами контура добавочного резистора с вполне определенным сопротивлением. Выражения (6.13) иногда называют *формулами пересчета последовательного сопротивления в параллельное или параллельного в последовательное*. Пользуясь этими формулами, найдем для предыдущего примера требуемое сопротивление шунта:  $R_{\text{ш}} = Z_{\text{в}}^2 / R_{\text{д}} = 1000 \cdot 1000 / 20 = 50\,000 \text{ Ом} = 50 \text{ кОм}$ .

Шунтирование параллельного контура активным сопротивлением является удобным способом расширения полосы пропускания и широко используется на практике.

В заключение отметим, что при вычислении полосы

пропускания параллельного контура, являющегося составной частью какого-либо радиотехнического устройства, необходимо учитывать шунтирование контура не только внутренним сопротивлением генератора, но и сопротивлением нагрузки  $R_n$ . Наиболее просто шунтирование можно учесть, пересчитав сопротивления  $R_i$  и  $R_n$  в последовательные сопротивления  $R_{дi} = Z_B^2/R_i$ ,  $R_{дн} = Z_B^2/R_n$ .

#### 6.4. Векторные диаграммы

Векторные диаграммы параллельного контура приведены на рис. 6.6.

Сначала рассмотрим диаграмму для идеального контура при резонансе (рис. 6.6, а). За исходный примем

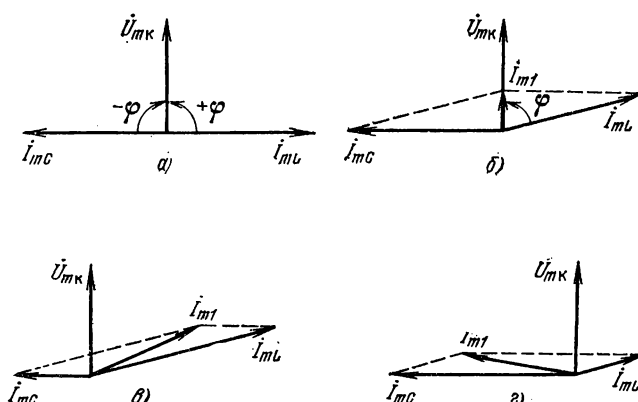


Рис. 6.6. Векторные диаграммы параллельного контура

вектор напряжения  $U_{mk}$  на контуре. Так как при резонансе сопротивления  $X_L$  и  $X_C$  равны, одинаковыми будут амплитуды токов  $I_{mC}$  и  $I_{mL}$ . Ток в индуктивности отстает по фазе от напряжения на контуре на угол  $\varphi = 90^\circ$ , а ток в емкости опережает это напряжение на такой же угол, поэтому между векторами  $U_{mk}$  и  $I_{mL}$  угол  $\varphi = +90^\circ$ , а между  $U_{mk}$  и  $I_{mC}$  угол  $\varphi = -90^\circ$ . В результате получаем, что векторы токов  $I_{mL}$  и  $I_{mC}$  направлены в противоположные стороны. Их сумма равна нулю, что означает отсутствие тока в неразветвленной части цепи.

При резонансе в реальном контуре расположение векторов на диаграмме несколько иное (рис. 6.6, б). Из-за

сопротивления потерь угол  $\varphi$  между векторами  $U_{mk}$  и  $I_{mL}$  оказывается меньше  $90^\circ$ , поэтому сумма векторов  $I_{mC}$  и  $I_{mL}$  дает вектор  $I_{m1}$ , соответствующий некоторому току  $I_{m1}$  в неразветвленной части цепи. Поскольку рассматривается режим резонанса, векторы  $U_{mk}$  и  $I_{m1}$  совпадают по направлению, что свидетельствует об активном характере входного сопротивления цепи. Амплитуды токов  $I_{mC} \approx I_{mL}$  и в  $Q$  раз больше амплитуды тока  $I_{m1}$ . Благодаря току  $I_{m1}$  в контур от генератора поступает энергия, которая рассеивается на сопротивлении потерь, поддерживая тем самым постоянство амплитуды колебаний.

Теперь предположим, что контур расстроен, т. е.  $f < f_0$ . При этом  $X_L < X_C$ , а  $I_{mL} > I_{mC}$ . Векторная диаграмма для этого случая приведена на рис. 6.6, в. Как видно из диаграммы, угол между векторами  $U_{mk}$  и  $I_{m1}$  положительный и меньше  $90^\circ$ . Это означает, что ток  $I_{m1}$  отстает по фазе от напряжения на контуре, поэтому реактивная составляющая полного сопротивления контура имеет индуктивный характер. Длина вектора  $I_{m1}$  в рассматриваемом случае больше, чем при резонансе. Это значит, что амплитуда тока в неразветвленной части цепи при расстройке больше, чем при резонансе. Причина увеличения амплитуды тока заключается в том, что при расстройке контура одновременно с процессом обмена энергиями между электрическим полем конденсатора и магнитным полем катушки происходит обмен энергиями между генератором и реактивными элементами контура. Чем больше расстройка, тем большее количество энергии участвует в процессе обмена между генератором и элементами контура и, следовательно, тем больше амплитуда тока в неразветвленной части цепи. С увеличением расстройки угол сдвига фаз между напряжением  $U_{mk}$  и током  $I_{m1}$  также увеличивается, стремясь к  $90^\circ$ .

Векторная диаграмма параллельного контура при  $f > f_0$  приведена на рис. 6.6, г. В этом случае  $X_L > X_C$ ,

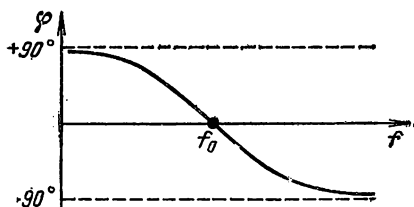


Рис. 6.7. Частотная зависимость угла  $\varphi$  в параллельном контуре



а  $\dot{I}_{mL} < \dot{I}_{mC}$ . Угол между векторами  $\dot{U}_{mK}$  и  $\dot{I}_{m1}$  отрицательный и по абсолютной величине меньше  $90^\circ$ . Следовательно, реактивная составляющая полного сопротивления контура имеет емкостный характер. Амплитуда тока  $\dot{I}_{m1}$  больше, чем при резонансе, и увеличивается при увеличении расстройки. Одновременно увеличивается по абсолютной величине угол сдвига фаз между напряжением  $\dot{U}_{mK}$  и током  $\dot{I}_{m1}$ , стремясь к значению  $-90^\circ$ . Этот угол  $\varphi$  можно найти из уравнения  $\operatorname{tg} \varphi = -a$ . График зависимости угла  $\varphi$  от частоты показан на рис. 6.7.

Векторные диаграммы подтверждают вывод о том, что реактивная составляющая полного сопротивления параллельного контура имеет индуктивный характер при отрицательных расстройках ( $f < f_0$ ) и емкостный — при положительных расстройках ( $f > f_0$ ).

## 6.5. Параллельные контуры с неполным включением

Во многих радиотехнических устройствах применяют параллельные колебательные контуры, содержащие в одной из ветвей емкость и индуктивность. Разновидности схем таких контуров приведены на рис. 6.8. Схему, изоб-

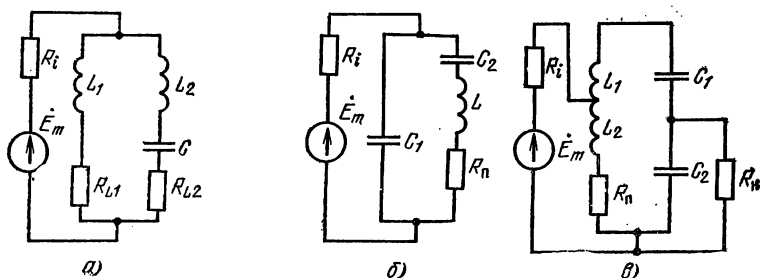


Рис. 6.8. Параллельные контуры с неполным включением

раженную на рис. 6.8, а, часто называют *параллельным контуром второго вида*, а схему, показанную на рис. 6.8, б, — *параллельным контуром третьего вида*. Обычный параллельный контур (рис. 6.1, б) по аналогии называют *контуром первого вида*.

Сравнение свойств контуров первого—третьего видов [8] показывает, что при одинаковых значениях их полной индуктивности, емкости и сопротивления потерь ре-

резонансное сопротивление контуров второго и третьего видов меньше, чем контура первого вида. Так, резонансное сопротивление контура второго вида

$$R_{02} = p_L^2 R_{01}, \quad (6.14)$$

где  $p_L = L_1 / (L_1 + L_2)$  — коэффициент включения индуктивности;  $R_{01}$  — резонансное сопротивление контура первого вида, определяемое с помощью (6.4).

Резонансное сопротивление контура третьего вида

$$R_{03} = p_C^2 R_{01}, \quad (6.15)$$

где  $p_C = C_2 / (C_1 + C_2)$  — коэффициент включения емкости.

Формулы (6.14) и (6.15) справедливы при условии, что  $L_1 + L_2 = L$ ,  $C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = C$ , где  $L$  и  $C$  — индуктивность и емкость контура первого вида. Коэффициенты включения  $p_L$  и  $p_C$  в контурах второго и третьего видов меньше единицы, поэтому принято считать, что такие контуры имеют *неполное включение* (если  $p_L = p_C = 1$ , получаем параллельный контур первого вида, имеющий полное включение).

Резонансное сопротивление контуров второго и третьего видов можно неограниченно уменьшать по сравнению со значением  $R_{01}$  соответствующей регулировкой коэффициентов включения  $p_L$  или  $p_C$ . В контурах второго вида такая регулировка осуществляется относительно просто, например переключением отводов от обмотки индуктивной катушки или с помощью контакта, скользящего по ее виткам. В контурах третьего вида коэффициент включения регулируется изменением соотношения между емкостями конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ . Такой способ менее удобен, поскольку для сохранения постоянства резонансной частоты требуется так подбирать емкости конденсаторов, чтобы общая емкость контура оставалась неизменной. Поэтому контур третьего вида применяется реже, чем контур второго вида.

Резонансные частоты контуров второго и третьего видов и эквивалентные добротности соответственно:

$$f_{02} = 1/2\pi \sqrt{(L_1 + L_2) C}; \quad f_{03} = 1/2\pi \sqrt{L C_1 C_2 / (C_1 + C_2)};$$

$$Q_{\Sigma 2} = Q / (1 + p_L^2 R_{01} / R_i); \quad Q_{\Sigma 3} = Q / (1 + p_C^2 R_{01} / R_i).$$

Из выражений для эквивалентных добротностей видно, что чем меньше  $p_L$  или  $p_C$ , тем ближе  $Q_{\Sigma 2}$  и  $Q_{\Sigma 3}$  к величине  $Q = Z_B / R_{\Sigma}$ .

Неполное включение контуров применяется для ослабления шунтирующего действия на контур внутреннего сопротивления генератора или сопротивления нагрузки, приводящего к расширению полосы пропускания. Подбором коэффициентов включения можно добиться такого значения эквивалентной добротности, при котором полоса пропускания контура не будет превышать некоторого, заранее определенного значения.

Рассмотрим для примера случай, когда при подключении генератора с внутренним сопротивлением  $R_i=10$  кОм к контуру, имеющему  $R_{01}=100$  кОм и  $Q=100$ , необходимо, чтобы полоса пропускания расширилась не более чем в 2 раза, или, что то же самое, эквивалентная добротность стала  $Q_0=0,5 Q$ . Допустим, что используется контур первого вида. Тогда на основании (6.9) получаем  $Q_{01}=100/(1+100/10)=9$ . Следовательно, полоса пропускания расширилась в  $Q/Q_{01}=100/9=11$  раз. Применим контур второго или третьего вида, подобрав коэффициенты включения так, чтобы  $Q_0=0,5 Q$ . Тогда получим  $Q_{02}=Q_{03}=0,5 Q=Q/(1+p_L^2 R_{01}/R_i)=Q/(1+p_C^2 R_{01}/R_i)$ , откуда  $p_L=p_C=\sqrt{R_i/R_{01}}=\sqrt{10/100}\approx 0,3$ . Таким образом, полоса пропускания увеличится вдвое, если применить его неполное включение с коэффициентами  $p_L=p_C\approx 0,3$ . Аналогичный результат можно получить, если предположить, что к данному контуру вместо генератора, имеющего  $R_i=10$  кОм, подключается нагрузочный резистор с сопротивлением  $R_H=10$  кОм.

В тех случаях, когда необходимо ослабить шунтирующее влияние на контур нескольких сопротивлений, например внутреннего сопротивления генератора и сопротивления нагрузки, применяют схемы параллельных контуров с двойным неполным включением. Один из вариантов таких схем показан на рис. 6.8, в.

Колебательные контуры второго и третьего видов часто применяют для согласования с генератором или нагрузкой — режима, при котором от генератора в контур или от контура в нагрузку передается максимальная активная мощность. Согласование обеспечивается при равенстве внутреннего сопротивления источника энергии сопротивлению нагрузки, т. е.  $R_i=R_0$  или  $R_0=R_H$ . В режиме согласования добротность контура уменьшается в 2 раза, а полоса пропускания расширяется вдвое. При согласовании коэффициенты включения контуров  $p_L=p_C=\sqrt{R_i/R_{01}}=\sqrt{R_H/R_{01}}$ . Рассмотренный выше числовой пример служит иллюстрацией расчета коэффициентов включения для случая согласования контура с генератором.

В ряде случаев параллельные контуры второго и третьего видов применяются для фильтрации токов с не-

желательными частотами, которые могут создаваться источником несинусоидальной ЭДС и попадать в нагрузку. Из рассмотрения схем, изображенных на рис. 6.8, *а, б*, видно, что одна из ветвей контура содержит емкость и индуктивность, соединенные последовательно. На некоторой частоте  $f_{01}$  в этой ветви возникает резонанс напряжений, полное сопротивление ветви становится минимальным и шунтирует нагрузку. В результате ток на частоте  $f_{01}$  через нагрузку практически не проходит. Подбирая коэффициенты включения, можно менять частоту, на которой происходит резонанс напряжений. При этом необходимо помнить, что в контуре второго вида частота  $f_{01} > f_0$ , в контуре третьего вида  $f_{01} < f_0$ .

В заключение отметим, что основным недостатком контуров второго и третьего видов является меньший коэффициент передачи по сравнению с контуром первого вида, имеющим такие же параметры  $L, C, R_{\text{п}}$ .

### Контрольные вопросы и упражнения

- 6.1. Какой вид имеет график частотной зависимости полного сопротивления параллельного контура? Сравните эти зависимости для параллельного и последовательного контуров.
- 6.2. Запишите формулы для вычисления резонансного сопротивления параллельного контура. Почему в параллельном контуре это сопротивление значительно больше, чем в последовательном?
- 6.3. Докажите, что токи в ветвях параллельного контура при резонансе в  $Q$  раз больше тока в неразветвленной части цепи.
- 6.4. Поясните физический смысл добротности в параллельном контуре.
- 6.5. Контур состоит из следующих элементов:  $L=400$  мкГн,  $C=1600$  пФ,  $R_{\text{п}}=30$  Ом. Пренебрегая внутренним сопротивлением генератора, определите резонансное сопротивление при последовательном и параллельном соединении элементов контура.
- 6.6. Запишите выражение для эквивалентной добротности. Поясните, как влияет внутреннее сопротивление источника ЭДС на эквивалентную добротность.
- 6.7. Поясните, почему модуль коэффициента передачи параллельного контура уменьшается при увеличении  $R_i$ ?
- 6.8. Объясните, как влияет внутреннее сопротивление генератора на полосу пропускания контура. Почему для питания параллельного контура нужно использовать генератор с большим внутренним сопротивлением?
- 6.9. Какими способами можно расширить полосу пропускания контура?
- 6.10. Параллельный контур состоит из  $L=200$  мкГн,  $C=200$  пФ,  $R_{\text{п}}=20$  Ом. Пренебрегая внутренним сопротивлением генератора, определите полосу пропускания контура для двух значений сопротивления шунта:  $R_{\text{ш1}}=500$  кОм,  $R_{\text{ш2}}=100$  кОм.
- 6.11. Для предыдущего примера найдите полосу пропускания, приняв  $R_{\text{ш}}=100$  кОм,  $R_i=200$  кОм.

- 6.12. Начертите векторные диаграммы идеального и реального параллельных контуров при резонансе. Сделайте выводы.
- 6.13. Сравните векторные диаграммы параллельного и последовательного контуров при различных расстройках. Сделайте выводы.
- 6.14. Какие свойства отличают параллельные контуры второго и третьего видов от контура первого вида?
- 6.15. Укажите область применения контуров второго и третьего видов.

## ГЛАВА 7.

### СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

В гл. 5 и 6 рассматривались свойства одиночных колебательных контуров, форма АЧХ которых значительно отличается от идеальной. Одиночные контуры имеют невысокие избирательные свойства.

Связанные колебательные контуры позволяют получить лучшие избирательные свойства. Их АЧХ имеют более прямоугольную по сравнению с одиночным контуром форму. Это такие системы из одиночных контуров, электрические процессы в которых влияют друг на друга посредством общего магнитного или общего электрического поля. Наиболее часто в радиотехнических устройствах применяются системы из двух контуров, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только двухконтурные цепи. Колебательный контур, подключенный к генератору, будем называть первичным, а контур, в который энергия передается из первичного, — вторичным.

В настоящей главе рассмотрим следующие вопросы:

1. *Какие схемы связи между контурами имеют практическое применение?*

2. *Что называется вносимыми сопротивлениями и какой смысл имеют эти понятия?*

3. *Какие виды резонансов наблюдаются в связанных контурах?*

4. *Какова форма АЧХ связанных контуров, от чего она зависит?*

#### 7.1. Виды связи между контурами. Коэффициент связи

Наибольшее распространение имеют индуктивная (автотрансформаторная, трансформаторная) и емкостная (внутриемкостная, внешнеемкостная) связи между контурами. Соответствующие схемы изображены на рис. 7.1. Кратко рассмотрим особенности этих схем.

При *автотрансформаторной связи* (рис. 7.1, а) энергия из первичного контура, состоящего из элементов  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $R_{n1}$ , передается во вторичный с помощью индуктивности связи  $L_{св}$ , являющейся общей для первичного и вторичного контуров. Обычно катушка связи представляет собой часть индуктивной катушки  $L_1$  первичного контура. Вторичный контур состоит из элементов:  $L_{св}$ ,  $C_2$ ,  $L_2$ ,  $R_{n2}$ . Ток  $\dot{I}_{m2}$  во вторичном контуре создается ЭДС самоиндукции в катушке  $L_{св}$ , возникающей при прохождении через катушку тока  $\dot{I}_{m1}$ . Чем больше  $L_{св}$ , тем

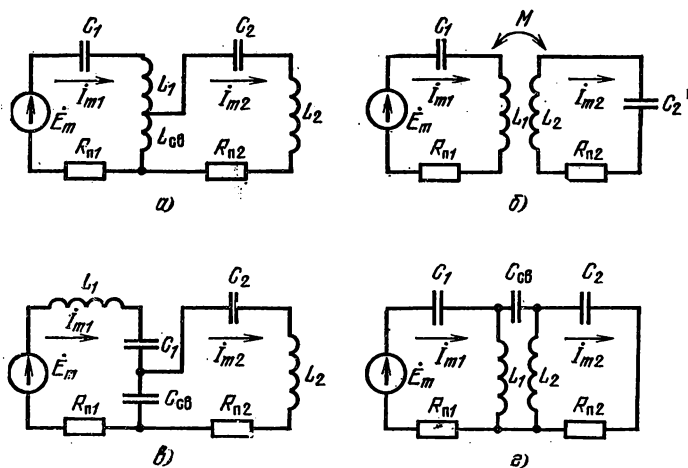


Рис. 7.1. Схемы связанных контуров

больше (при том же токе) ЭДС самоиндукции, следовательно, больше ток  $\dot{I}_{m2}$  и сильнее связь между контурами. Ток  $\dot{I}_{m2}$ , проходя через катушку  $L_{св}$ , в свою очередь возбуждает в ней ЭДС самоиндукции, которая действует в первичном контуре и определенным образом изменяет режим его работы. Такое явление наблюдается в любых связанных контурах.

Основным недостатком рассматриваемой схемы, ограничивающим ее применение, является трудность плавной регулировки связи между контурами. От этого недостатка свободна схема *трансформаторной связи* (рис. 7.1, б). Передача энергии во вторичный контур осуществляется с помощью магнитного потока, создаваемого током  $\dot{I}_{m1}$  в катушке первичного контура  $L_1$ . Магнитный поток

взаимодействует с витками катушки  $L_2$ , наводя с ней ЭДС взаимной индукции. Эта ЭДС является источником тока  $\dot{I}_{m2}$  во вторичном контуре. Ток  $\dot{I}_{m2}$ , проходя по катушке  $L_2$ , создает собственный магнитный поток, который взаимодействует с витками катушки  $L_1$  и создает в ней ЭДС взаимной индукции. Как и при автотрансформаторной связи, эта ЭДС приводит к изменению режима работы первичного контура. Связь определяется (при прочих равных условиях) *взаимной индуктивностью*  $M$ : чем меньше расстояние между катушками  $L_1$  и  $L_2$ , тем больше  $M$  и сильнее связь. Взаимная индуктивность зависит не только от расстояния между катушками, но и от их взаимного расположения. Так, если катушки параллельны друг другу, она максимальная, если перпендикулярны — минимальная. Таким образом, связь между контурами можно плавно менять, регулируя расстояние между катушками  $L_1$  и  $L_2$  или поворачивая одну из них относительно другой. Благодаря возможности плавно регулировать связь, контуры с рассматриваемой схемой связи получили широкое распространение.

На рис. 7.1, *в, г* показаны два варианта схем емкостной связи между контурами: *внутриемкостной* (рис. 7.1, *в*) и *внешнеемкостной* (рис. 7.1, *г*). При *внутриемкостной* связи ток  $\dot{I}_{m2}$  определяется напряжением на конденсаторе  $C_{св}$ , возникающим от тока  $\dot{I}_{m1}$ . Это напряжение, а следовательно, связь тем больше, чем меньше  $C_{св}$  по сравнению с  $C_1$ . Регулировка связи в контурах, собранных по этой схеме, неудобна, поэтому такой способ связи применяется относительно редко.

*Внешнеемкостная* связь осуществляется с помощью конденсатора  $C_{св}$ , включенного между первичным и вторичным контурами. Чем больше емкость этого конденсатора, тем больше ток, проходящий через него во вторичный контур, и, следовательно, тем больше связь. Для того чтобы устранить индуктивную связь между катушками  $L_1$  и  $L_2$ , они помещаются в экраны (на рис. 7.1, *г* экраны не показаны). Несмотря на усложнение конструкции катушек из-за необходимости их экранирования, схема внешнеемкостной связи между контурами применяется часто, поскольку она позволяет плавно изменять связь с помощью регулировки конденсатора  $C_{св}$ .

Кроме рассмотренных существуют другие виды связи между контурами, в том числе *комбинированная* (рис. 7.1, *з*). При условии, что экраны у катушек  $L_1$  и  $L_2$  от-

существуют, связь регулируется одновременно изменением емкости конденсатора  $C_{св}$  и взаимной индуктивности между катушками.

Для количественной оценки связи между контурами вводится коэффициент связи:  $k = X_{св} / \sqrt{X_1 X_2}$ , где  $X_{св}$  — реактивное сопротивление элемента связи, общего для обоих контуров;  $X_1$  и  $X_2$  — реактивные сопротивления соответственно первичного и вторичного контуров, имеющие такой же характер, как и  $X_{св}$ : при автотрансформаторной связи  $X_{св} = \omega L_{св}$ , трансформаторной —  $X_{св} = \omega M$ , внутриемкостной и внешнеемкостной —  $X_{св} = 1/\omega C_{св}$ . Пользуясь соотношением для  $k$ , можно получить следующие формулы для определения коэффициента связи: при автотрансформаторной связи между контурами  $k = L_{св} / \sqrt{L_1(L_2 + L_{св})}$ , трансформаторной —  $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$ , внутриемкостной —  $k \approx \sqrt{C_1 C_2} / C_{св}$ , внешнеемкостной —  $k \approx C_{св} / \sqrt{C_1 C_2}$ .

Наиболее удобна для анализа схема с трансформаторной связью между контурами, которая будет рассмотрена далее.

## 7.2. Входное сопротивление. Вносимые сопротивления

В схеме замещения (рис. 7.2) связанные контуры показаны как четырехполюсник, причем внутреннее сопротивление источника ЭДС принято равным нулю или входящим в сопротивление потерь  $R_{п1}$ . Выходное напряжение  $\dot{U}_{твых}$  снимается с конденсатора  $C_2$  вторичного контура.

Анализ связанных контуров показывает, что их входное сопротивление имеет комплексный характер, т. е.  $Z_{вх} = R_{вх} + iX_{вх}$ , откуда полное сопротивление  $Z_{вх} = \sqrt{R_{вх}^2 + X_{вх}^2}$ , где

$$R_{вх} = R_{п1} + \omega^2 M^2 R_{п2} / Z_2^2, \quad (7.1)$$

$$X_{вх} = X_1 - \omega^2 M^2 X_2 / Z_2^2. \quad (7.2)$$

В (7.1) и (7.2)  $Z_2 = \sqrt{R_{п2}^2 + X_2^2}$  — полное сопротивление вторичного контура;  $X_1 = \omega L_1 - 1/\omega C_1$  и  $X_2 = \omega L_2 - 1/\omega C_2$  — реактивные составляющие полных сопротивлений соответственно первичного и вторичного контуров.

Вторые слагаемые в (7.1) и (7.2) обусловлены влиянием вторичного контура и называются соответственно



вносимыми активным и реактивным сопротивлениями:

$$R_{вн} = \omega^2 M^2 R_{п2} / Z_2^2, \quad (7.3)$$

$$X_{вн} = -\omega^2 M^2 X_2 / Z_2^2. \quad (7.4)$$

Знак «минус» в (7.4) показывает, что характер реактивного вносимого сопротивления противоположен характеру реактивной составляющей полного сопротивления вторичного контура.

Таким образом, имеем  $R_{вх} = R_{п1} + R_{вн}$ ;  $X_{вх} = X_1 + X_{вн}$ . Эти соотношения дают возможность заменить двухконтурную цепь одним эквивалентным контуром, в котором

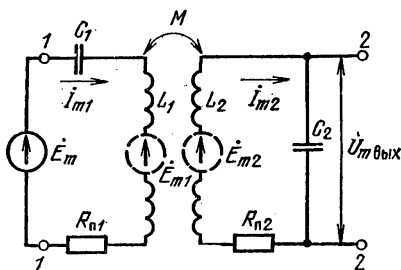


Рис. 7.2. Схема замещения двухконтурной цепи с трансформаторной связью

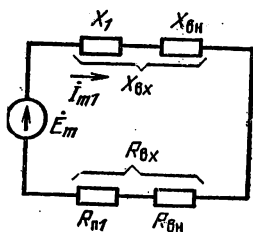


Рис. 7.3. Эквивалентная схема двухконтурной цепи

вторичный контур учтен вносимыми сопротивлениями  $R_{вн}$  и  $X_{вн}$  (рис. 7.3).

**Активное вносимое сопротивление.** Для выяснения смысла понятий о вносимых сопротивлениях построим векторные диаграммы токов и напряжений для связанных контуров (рис. 7.4). Начнем с резонанса в обоих контурах. За исходный выберем вектор тока  $I_{m10}$  в первичном контуре. При резонансе вектор ЭДС  $E_m$  генератора совпадает по направлению с  $I_{m10}$ . Ток  $I_{m10}$ , проходя по катушке контура  $L_1$ , создает магнитный поток, в результате чего в витках  $L_2$  возбуждается ЭДС взаимной индукции  $\dot{E}_{m20} = I_{m10} \omega_0 M$ . Эта ЭДС отстает по фазе от вызвавшего ее тока  $I_{m10}$  на угол  $\phi_1 = -90^\circ$ , поэтому векторы  $I_{m10}$  и  $E_{m20}$  перпендикулярны друг другу. Ток  $\dot{I}_{m20} = \dot{E}_{m20} / R_{п2} = I_{m10} \omega_0 M / R_{п2}$  совпадает по фазе с ЭДС  $\dot{E}_{m20}$ , поэтому векторы  $I_{m20}$  и  $E_{m20}$  имеют одинаковое направление.

Ток  $\dot{I}_{m20}$ , проходя через катушку  $L_2$ , создает собственный магнитный поток, который возбуждает в витках катушки  $L_1$  ЭДС взаимной индукции  $\dot{E}_{m10} = \dot{I}_{m20} \omega_0 M = = \dot{I}_{m10} \omega_0^2 M^2 / R_{\Pi 2}$ . Эта ЭДС отстает по фазе от создавшего ее тока  $\dot{I}_{m20}$  на угол  $\varphi_2 = -90^\circ$ , поэтому векторы  $\dot{I}_{m20}$  и  $\dot{E}_{m10}$  перпендикулярны друг другу.

Из рис. 7.3 видно, что векторы  $\dot{E}_m$  и  $\dot{E}_{m10}$  противоположны, поэтому амплитуда результирующей ЭДС, действующей в первичном контуре, уменьшается на значение  $E_{m10}$ . Это приводит к соответствующему уменьшению амплитуды тока  $I_{m10} = (E_m - E_{m10}) / R_{\Pi 1}$ . Последнее

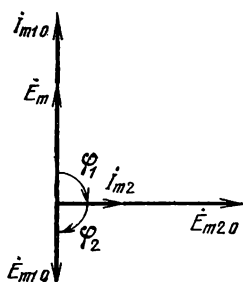


Рис. 7.4. Векторная диаграмма связанных контуров, поясняющая смысл активного вносимого сопротивления

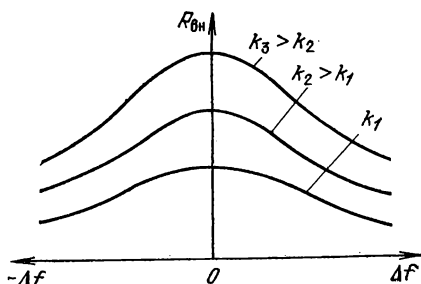


Рис. 7.5. Частотные зависимости  $R_{вн}$  при различных коэффициентах связи

соотношение показывает физическую причину уменьшения тока: противодействие этому току ЭДС, наведенной в катушке первичного контура.

Можно считать, что амплитуда тока в первичном контуре уменьшается из-за увеличения активного сопротивления цепи на значение  $R_{вн}$  при неизменной амплитуде ЭДС  $E_m$ , т. е. тот же ток можно определить как  $I_{m10} = E_m / (R_{\Pi 1} + R_{вн})$ . Это соотношение не отражает физического смысла протекающих в связанных контурах процессов, однако является удобным для расчетов.

Из (7.3) следует, что активное вносимое сопротивление зависит как от частоты, так и от взаимной индуктивности  $M$ , т. е. от коэффициента связи между контурами (рис. 7.5). Из рис. 7.5 видно, что максимальное сопро-

тивление  $R_{вн0}$  получается при резонансе, т. е. при  $\Delta f = 0$ . Его можно определить по (7.3), заменив  $\omega$  на  $\omega_0$  и  $Z_2$  на  $R_{п2}$ :

$$R_{вн0} = \omega_0^2 M^2 / R_{п2}. \quad (7.5)$$

Чем больше взаимная индуктивность  $M$ , тем больше коэффициент связи между контурами, ток во вторичном контуре и, следовательно, ЭДС в первичном контуре, наведенная этим током. Результирующая ЭДС и ток в первичном контуре становятся меньше, что эквивалентно увеличению активного вносимого сопротивления. Расстройка с любым знаком приводит к уменьшению  $R_{вн}$ .

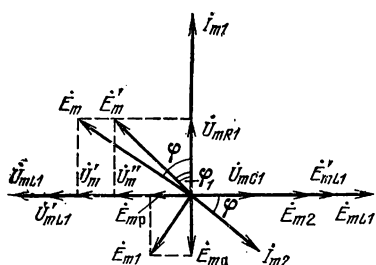


Рис. 7.6. Векторная диаграмма связанных контуров, поясняющая смысл реактивного вносимого сопротивления

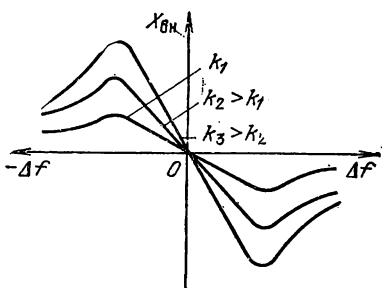


Рис. 7.7. Частотные зависимости  $X_{вн}$  при различных коэффициентах связи

**Реактивное вносимое сопротивление.** Теперь построим векторную диаграмму связанных контуров для случая, когда частота генератора  $f$  не совпадает с резонансной частотой контуров  $f_0$ . Пусть, например,  $f > f_0$ , что соответствует индуктивному характеру реактивной составляющей полных сопротивлений обоих контуров. Как и в предыдущем случае, построение диаграммы начнем с вектора тока  $I_{m1}$  в первичном контуре (рис. 7.6). Для принятого соотношения между частотами  $f$  и  $f_0$  имеем  $X_{L1} > X_{C1}$ , поэтому  $\dot{U}_{mL1} > \dot{U}_{mC1}$ . Сумма векторов:  $\dot{U}_{mL1} + \dot{U}_{mC1} = \dot{U}_m$ . Складывая напряжение  $\dot{U}_m$  с  $\dot{U}_{mR1}$  (на активном сопротивлении первичного контура), получаем ЭДС генератора  $\dot{E}_m$ , которая опережает по фазе ток  $\dot{I}_{m1}$  на угол  $\varphi < 90^\circ$ . Наведенная током  $\dot{I}_{m1}$  в катушке вторичного контура ЭДС  $\dot{E}_{m2}$  отстает по фазе от

этого тока на угол  $90^\circ$ . Из-за расстройки вторичного контура ток  $\dot{I}_{m2}$  в нем отстает по фазе от ЭДС  $\dot{E}_{m2}$  на угол  $\varphi < 90^\circ$ , равный углу между векторами  $\dot{I}_{m1}$  и  $\dot{E}_m$ . Наведенная ток  $\dot{I}_{m2}$  в катушке первичного контура ЭДС  $\dot{E}_{m1}$ , отстает по фазе от тока  $\dot{I}_{m2}$  на угол  $90^\circ$ , поэтому векторы  $\dot{I}_{m2}$  и  $\dot{E}_{m1}$  перпендикулярны друг другу.

Для удобства дальнейшего анализа разложим вектор  $\dot{E}_{m1}$  по двум направлениям: одно из них возьмем противоположным вектору  $\dot{I}_{m1}$ , а другое — перпендикулярным ему. Тогда получим векторы  $\dot{E}_{ma}$  и  $\dot{E}_{mp}$ , изображающие соответственно активную и реактивную составляющие ЭДС  $\dot{E}_{m1}$ .

Вектор активной составляющей ЭДС  $\dot{E}_{ma}$  направлен против вектора тока  $\dot{I}_{m1}$ , поэтому амплитуда этого тока уменьшается. Как уже указывалось, уменьшение тока в первичном контуре можно учесть с помощью активного вносимого сопротивления  $R_{вн}$ .

Вектор реактивной составляющей ЭДС  $\dot{E}_{mp}$  направлен против вектора ЭДС, самоиндукции  $\dot{E}_{mL1}$ , возникающей в катушке первичного контура из-за тока  $\dot{I}_{m1}$ , вследствие чего амплитуда ЭДС  $\dot{E}_{mL1}$  уменьшается до значения  $\dot{E}'_{mL1}$ . Одновременно на такое же значение уменьшается напряжение на зажимах катушки  $L_1$  (вектор  $\dot{U}'_{mL1}$ ) так как в соответствии со вторым законом Кирхгофа амплитуда напряжения на зажимах индуктивной катушки равна и противоположна амплитуде ЭДС самоиндукции в этой катушке. Сумма векторов:  $\dot{U}_{mC1} + \dot{U}'_{mL1} = \dot{U}_m$ . Складывая  $\dot{U}_m$  и  $\dot{U}_{mR1}$ , находим вектор ЭДС генератора  $\dot{E}_m$ . Сравнивая углы между векторами  $\dot{I}_{m1}$ ,  $\dot{E}_m$  и  $\dot{I}_{m1}$ ,  $\dot{E}'_m$ , убеждаемся, что  $\varphi_1 < \varphi$ . Это означает, что изменилась расстройка первичного контура по сравнению с первоначальной.

Такое же изменение расстройки можно получить, если предположить, что из-за влияния ЭДС  $\dot{E}_{mp}$  изменилось на значение  $X_{вн}$  реактивное сопротивление первичного контура: уменьшилось индуктивное сопротивление, или, что то же самое, возросло емкостное сопротивление. Использование понятия о реактивном вносимом сопротивлении так же, как и об активном, упрощает расчет режима работы связанных контуров.

Реактивное вносимое сопротивление зависит от взаимной индуктивности  $M$ , т. е. от коэффициента связи между контурами и от частоты. Соответствующие графики,

построенные с учетом (7.4), приведены на рис. 7.7. Как видно из этого рисунка, при резонансе ( $\Delta f=0$ )  $X_{вн}=0$ . Если расстройка отрицательная, реактивное вносимое сопротивление имеет индуктивный характер, если положительная — емкостный.

Векторная диаграмма, показанная на рис. 7.5, позволяет сделать вывод о том, что при расстроенных контурах сопротивление, вносимое в первичный контур из вторичного, является комплексной величиной, т. е.  $Z_{вн} = R_{вн} + iX_{вн}$ . Активная составляющая этого сопротивления уменьшает амплитуду тока в первичном контуре, а реактивная — изменяет расстройку контура.

### 7.3. Резонансы в связанных контурах

Для получения максимального коэффициента передачи  $K = \dot{U}_{вых} / \dot{E}_m$  связанных контуров необходимо, чтобы

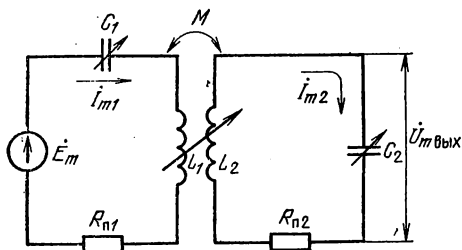


Рис. 7.8. Перестраиваемые связанные контуры

амплитуда тока  $I_{m2}$  во вторичном контуре была также максимальной. Это достигается настройкой контуров в резонанс с частотой генератора и подбором связи между ними.

На рис. 7.8 изображена схема связанных контуров с соответствующими регулировками: первичный и вторичный контуры перестраиваются с помощью конденсаторов переменной емкости соответственно  $C_1$  и  $C_2$ , а связь подбирается изменением взаимной индуктивности.

**Первый частный резонанс.** Допустим, что вторичный контур расстроен, а первичный настраивается на частоту генератора  $f$  изменением емкости конденсатора  $C_1$ . При этом будет меняться частота свободных колебаний  $f_{св1}$  в первичном контуре и реактивная составляющая его полного сопротивления  $X_{вх} = X_1 + X_{вн}$ . На некоторой частоте  $f'_{св1}$  сопротивление  $X_{вх}$  обращается в нуль и ток  $I_{m1}$  достигает максимального значения. Одновременно становятся максимальными ЭДС  $\dot{E}_{m2}$  и ток  $I_{m2}$  (рис. 7.9, а). В цепи возникает первый частный резо-

нанс, условием которого является равенство  $X_1 + X_{\text{вн}} = 0$ .

Второй частный резонанс. Теперь предположим, что расстроен первичный контур, а вторичный настраивается на частоту генератора с помощью конденсатора  $C_2$ . Во вторичный контур вносится из первичного реактивное сопротивление  $X'_{\text{вн}} = -\omega^2 M^2 X_1 / Z_1^2$ , где  $Z_1 = \sqrt{R_{\text{п1}}^2 + X_1^2}$  — полное сопротивление первичного контура. Сопротивлением  $X'_{\text{вн}}$  учитывается изменение тока  $\dot{I}_{m2}$  за счет тока  $\dot{I}_{m1}$ , если генератор включен во вторичный контур вместо первичного. Изменение емкости кон-

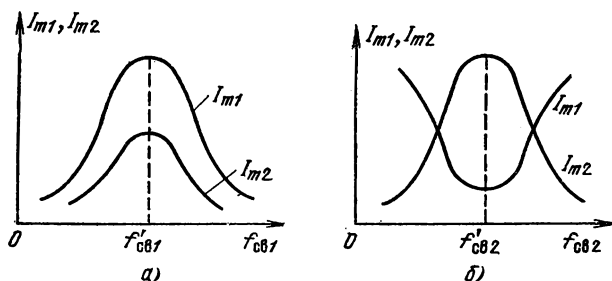


Рис. 7.9. Частотные зависимости токов в связанных контурах, иллюстрирующие частные резонансы

денсатора  $C_2$  приводит к изменению частоты свободных колебаний во вторичном контуре  $f_{\text{св2}}$  и реактивной составляющей его полного сопротивления  $X_2 + X'_{\text{вн}}$ . На некоторой частоте  $f'_{\text{св2}}$  сопротивление  $X_2$  становится равным и противоположным по знаку вносимому сопротивлению  $X'_{\text{вн}}$ , поэтому ток  $\dot{I}_{m2}$  становится максимальным. Наводимая этим током в катушке первичного контура ЭДС  $\dot{E}_{m1}$  и, следовательно, активное сопротивление, вносимое из вторичного контура в первичный, также максимально, поэтому ток  $\dot{I}_{m1}$  минимальный (рис. 7.9, б). Рассмотренное состояние цепи называется *вторым частным резонансом*. Его условие  $X_2 + X'_{\text{вн}} = 0$ .

Хотя в режимах частных резонансов получаются максимальные значения тока  $\dot{I}_{m2}$ , они не достигают предельно возможного значения. Наибольшего тока во вторичном контуре можно добиться в режимах *полного и сложного резонансов*.

**Полный резонанс.** Для получения максималь-

ного тока во вторичном контуре в режиме полного резонанса поступают следующим образом: сначала устанавливают очень слабую связь между контурами, при которой вносимые сопротивления малы и ими можно пренебречь; затем настраивают отдельно каждый контур в резонанс с частотой генератора и увеличивают связь до значения, при котором амплитуда тока  $I_{m2}$  становится наибольшей. Поскольку при резонансе в обоих контурах выполняются условия  $X_{вн0}=0$ ,  $X_{10}=0$ ,  $X_{20}=0$ , получаем, что  $X_{вх0}=0$ , поэтому полное сопротивление  $Z_{вх0}=R_{вх0}=R_{п1}+R_{вн0}$  минимально (рис. 7.10).

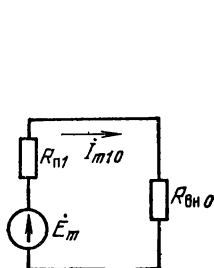


Рис. 7.10. Эквивалентная схема двухконтурной цепи при полном резонансе

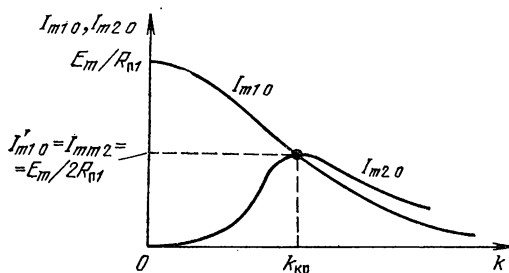


Рис. 7.11. Зависимости токов в настроенных связанных контурах от коэффициента связи

Амплитуды токов в первичном и вторичном контурах соответственно:

$$I_{m10} = E_m / R_{вх} = E_m / [R_{п1} + (\omega_0^2 M^2 / R_{п2})];$$

$$I_{m20} = E_{m2} / R_{п2} = I_{m10} \omega_0 M / R_{п2}.$$

Анализ соотношений показывает, что увеличение взаимной индуктивности  $M$ , т. е. увеличение коэффициента связи между контурами, приводит к уменьшению амплитуды тока  $I_{m10}$  в первичном контуре. Амплитуда тока  $I_{m20}$  во вторичном контуре при увеличении  $M$  сначала возрастает, достигая максимального значения, а потом начинает убывать (рис. 7.11). Наибольшее значение тока  $I_{m20}$ , называемое «максимум — максимум», наблюдается при некотором критическом значении взаимной индуктивности  $M_{кр}$ , определяемом из условия  $\omega_0 M_{кр} / \sqrt{R_{п1} R_{п2}} = 1$ , откуда  $M_{кр} = \sqrt{R_{п1} R_{п2}} / \omega_0$ . Подставляя

значение  $M_{кр}$  в (7.5), получаем

$$R_{вн0} = \omega_0^2 M_{кр}^2 / R_{п2} = \omega_0^2 R_{п1} R_{п2} / \omega_0^2 R_{п2} = R_{п1}. \quad (7.6)$$

Коэффициент связи между контурами, при котором соблюдается (7.6), называют *критическим* и обозначают  $k_{кр}$ . Если  $R_{вн} < R_{вн0} = R_{п1}$  или  $k < k_{кр}$ , связь называют *слабой*, если  $R_{вн} > R_{вн0} = R_{п1}$  или  $k > k_{кр}$  — *сильной*.

Определим амплитуды токов в первичном и вторичном контурах при критической связи. Подставляя в выражения для  $I_{m10}$  и  $I_{m20}$  значение  $M_{кр}$ , получаем

$$I'_{m10} = E_m / [R_{п1} + (\omega_0^2 M_{кр}^2 / R_{п2})] = E_m / 2R_{п1}, \quad (7.7)$$

$$I_{m20} = E_m \omega_0 M_{кр} / 2R_{п1} R_{п2} = E_m / 2\sqrt{R_{п1} R_{п2}}. \quad (7.8)$$

При одинаковых контурах  $R_{п1} = R_{п2}$  и тогда из (7.7) и (7.8) следует, что  $I'_{m10} = I_{m20} = E_m / 2R_{п1}$  (отметим, что кривые, изображенные на рис. 7.11, относятся к контурам с одинаковыми параметрами  $L$ ,  $C$ ,  $R_{п}$ ).

Найдем коэффициент критической связи, для чего подставим в выражение для  $k$  (см. § 7.1) значение  $M_{кр}$ :  $k_{кр} = M_{кр} / \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{R_{п1} R_{п2}} / \omega_0 \sqrt{L_1 L_2}$ . Преобразуя полученное соотношение, введя угловую частоту в знаменателе под знак радикала, получаем  $k_{кр} = \sqrt{R_{п1} R_{п2}} / \sqrt{\omega_0^2 L_1 L_2} = \sqrt{R_{п1} R_{п2} / \omega_0^2 L_1 L_2}$ . Учитывая, что  $\omega_0 L_1 = Z_{в1}$ ,  $\omega_0 L_2 = Z_{в2}$  и  $R_{п1} / Z_{в1} = d_1 = 1/Q_1$ ,  $R_{п2} / Z_{в2} = d_2 = 1/Q_2$ , получаем

$$k_{кр} = \sqrt{1/Q_1 Q_2} = \sqrt{d_1 d_2}. \quad (7.9)$$

При одинаковых параметрах контуров (7.9) приводится к виду:  $k_{кр} = 1/Q_1 = d_1$ .

Обобщая сказанное, можно сделать вывод о том, что полный резонанс в связанных контурах наступает при выполнении следующих условий:  $X_{20} = 0$ ;  $X_{вх0} = 0$ ;  $k_{кр} = \sqrt{d_1 d_2}$ .

Энергетические соотношения при полном резонансе. Перейдем к рассмотрению энергетических соотношений в связанных контурах при резонансе. Сначала запишем выражение для активной мощности, подводимой к контурам от генератора  $P = P_1 + P_2 = (I_{m10}^2 R_{п1} / 2) + (I_{m20}^2 R_{п2} / 2)$ , где  $P_1$  и  $P_2$  — активные мощности в сопротивлениях потерь соответственно первичного и вторичного контуров.



На основании эквивалентной схемы (см. рис. 7.10) можно записать  $P = (I_{m10}^2 R_{п1}/2) + (I_{m10}^2 R_{вн0}/2)$ . Из сравнения двух последних соотношений видно, что первые слагаемые в них одинаковые, а вторые — отличаются. Докажем, что  $I_{m20}^2 R_{п2}/2 = I_{m10}^2 R_{вн0}/2$ . Для этого сначала выразим амплитуду  $I_{m20}$  через ток в первичном контуре  $I_{m10}$ :  $I_{m10} : I_{m20} = I_{m10} \omega_0 M / R_{п2}$ . Теперь перепишем выражение для мощности:  $P_2$ :

$$P_2 = I_{m20}^2 R_{п2}/2 = I_{m10}^2 \omega_0^2 M^2 R_{п2}/2R_{п2}^2 = I_{m10}^2 \omega_0^2 M^2/2R_{п2}.$$

С учетом (7.5) окончательно имеем  $P_2 = I_{m10}^2 R_{вн0}/2$ . Таким образом,  $P = (I_{m10}^2 R_{вн0}/2) + (I_{m10}^2 R_{п1}/2) = I_{m10}^2 (R_{п1} + R_{вн0})/2$ .

При изменении коэффициента связи между контурами меняются токи в контурах и активное вносимое сопротивление, поэтому меняются

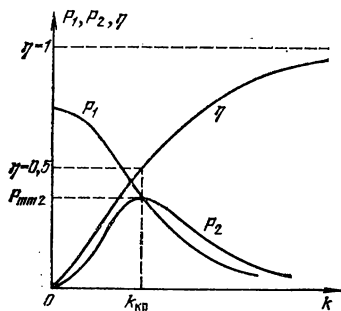


Рис. 7.12. Энергетические соотношения в двухконтурной цепи

сопротивление, поэтому меняются мощности  $P_1$  и  $P_2$ . Соответствующие зависимости изображены на рис. 7.12 (предполагается, что параметры контуров одинаковые). Увеличение  $k$  приводит к уменьшению мощности  $P_1$ ; мощность  $P_2$  сначала увеличивается, достигает максимума при критической связи, а потом начинает уменьшаться. Такой характер изменения мощности можно объяснить с помощью эквивалентной схемы связанных контуров (см. рис. 7.10), на которой вто-

ричный контур учтен активным вносимым сопротивлением  $R_{вн0}$ . Источником энергии в этой схеме служит генератор с внутренним сопротивлением  $R_{п1}$ , а нагрузкой — сопротивление  $R_{вн0}$ . Из электротехники известно, что при постоянной амплитуде ЭДС генератора в нагрузку передается максимальная мощность, если внутреннее сопротивление генератора равно сопротивлению нагрузки. Применяя это условие к рассматриваемому случаю, получаем, что максимум мощности  $P_{m2}$  в сопротивлении  $R_{вн0}$  будет при  $R_{п1} = R_{вн0}$ , что является условием критической связи.

Эффективность передачи энергии из первичного контура во вторичный оценивается с помощью коэффициен-

та полезного действия (КПД)  $\eta$  двухконтурной цепи, равного отношению активной мощности  $P_2$ , передаваемой во вторичный контур, к активной мощности  $P$  генератора, подводимой к входу цепи:  $\eta = P_2/P$ . Подставляя значения  $P_2$  и  $P$ , получаем

$$\eta = I_{m10}^2 R_{вн0} / I_{m10}^2 (R_{п1} + R_{вн0}) = R_{вн0} / (R_{п1} + R_{вн0}). \quad (7.10)$$

Таким образом, КПД связанных контуров показывает, какую часть активное вносимое сопротивление составляет от общего активного сопротивления первичного контура. Из (7.10) видно, что при увеличении  $R_{вн0}$ , т.е. при увеличении коэффициента связи, КПД растет. В режиме полного резонанса  $R_{п1} = R_{вн0}$  и  $\eta = 0,5$ . Зависимость КПД от  $k$  изображена на рис. 7.12. Из этого рисунка, а также из (7.10) следует вывод: для увеличения КПД необходимо увеличивать коэффициент связи между контурами, однако при этом мощность, передаваемая во вторичный контур, уменьшается.

Сложный резонанс. В режиме сложного резонанса, который получается регулировкой коэффициента связи при расстроенных первичном и вторичном контурах, также можно добиться предельного максимума амплитуды тока  $I_{mm2}$  во вторичном контуре, однако коэффициент связи между контурами должен быть больше критического. Сложный резонанс получается в том случае, если реактивное сопротивление первичного контура становится равным и противоположным по знаку реактивному сопротивлению, вносимому из вторичного контура в первичный. Таким образом, сложный резонанс возникает при выполнении следующих условий:  $X_1 + X_{вп} = 0$ ,  $X_{вх} = 0$ ,  $k > k_{кр}$ .

#### 7.4. Амплитудно-частотные характеристики и полоса пропускания

Форма АЧХ связанных контуров определяется не только добротностью, как в одиночном контуре, но и коэффициентом связи. Уравнение АЧХ двух одинаковых связанных контуров при малых расстройках имеет следующий вид:

$$K = Q\eta_{св} / \sqrt{(1 + \eta_{св}^2 - a^2)^2 + 4a^2}, \quad (7.11)$$

где  $\eta_{св} = k/k_{кр}$  — параметр, называемый фактором связи.

Из рис. 7.13, где изображены АЧХ двухконтурной це-

пи для различных значений фактора связи, видно: при слабой связи ( $\eta_{св} < 1$ ) характеристика имеет один максимум  $K_{01}$ , который меньше предельно возможного значения  $K_{mm}$ . Этот максимум можно найти, подставив в (7.11) значение обобщенной расстройки  $a=0$ :  $K_{01} = Q\eta_{св}/(1+\eta_{св}^2)$ , откуда следует, что при  $\eta_{св} < 1$   $K_{01} < 0,5Q$ . Предельный максимум модуля коэффициента передачи получается при критической связи ( $\eta_{св} = 1$ ), т. е. при полном резонансе. Подставляя в (7.11) значения

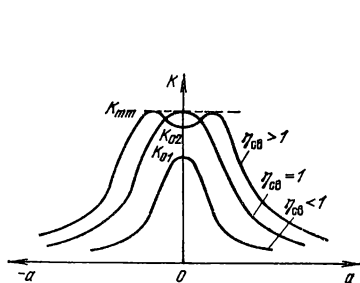


Рис. 7.13. Влияние фактора связи между контурами на форму АЧХ

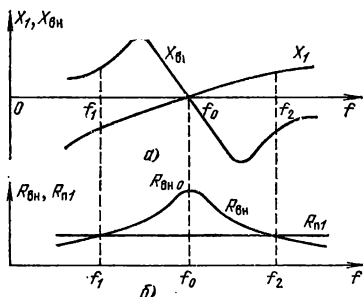


Рис. 7.14. Возникновение двух максимумов АЧХ связанных контуров

$a=0$  и  $\eta_{св}=1$ , получаем  $K_{mm}=Q/2$  (напомним, что максимальный коэффициент передачи одиночного последовательного контура  $K_0=Q$ , т. е. больше  $K_{mm}$ ). Если связь сильная ( $\eta_{св} > 1$ ), то  $K_{02}=Q\eta_{св}/(1+\eta_{св}^2)$ , и резонансный коэффициент передачи получается меньше  $Q/2$ , но на характеристике появляются два максимума (сложный резонанс), соответствующих предельно возможному коэффициенту передачи  $K_{mm}=Q/2$ .

Рассмотрим более подробно причины появления двух максимумов АЧХ связанных контуров для случая сильной связи. Обратимся к рис. 7.14, на котором изображены частотные зависимости собственного реактивного сопротивления первичного контура  $X_1$ , вносимого реактивного сопротивления  $X_{вп}$  (рис. 7.14, а) и активного вносимого сопротивления  $R_{вн}$  (рис. 7.14, б). Собственное активное сопротивление первичного контура  $R_{п1}$  предполагается не зависящим от частоты.

На всех частотах, меньших  $f_0$ , собственное реактивное сопротивление первичного контура имеет емкостный

характер, а вносимое — индуктивный. На некоторой частоте  $f_1$  эти сопротивления становятся одинаковыми, но так как знаки их противоположны, они компенсируют друг друга. Поэтому реактивное сопротивление первичного контура обращается в нуль, что соответствует условию резонанса. Вносимое активное сопротивление оказывается равным сопротивлению потерь  $R_{\text{п1}}$  первичного контура, благодаря чему во вторичный контур поступает максимальная мощность, и в нем проходит предельно возможный ток  $I_{\text{мм2}}$ . Такие же условия выполняются на частоте  $f_2$ , но здесь сопротивление  $X_1$  имеет индуктивный характер, а  $X_{\text{вн}}$  — емкостный. На частоте  $f_0$  реактивные сопротивления  $X_1=0$  и  $X_{\text{вн}}=0$ , но  $R_{\text{вн0}}=R_{\text{п1}}$ , поэтому условие передачи максимальной мощности не выполняется, и ток во вторичном контуре не достигает максимума.

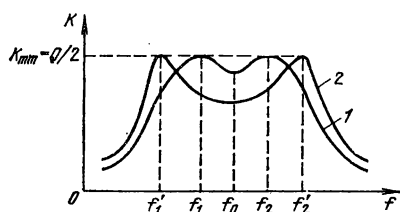


Рис. 7.15. Зависимость формы АЧХ двухконтурной цепи от коэффициента связи  $k$  при сильной связи между контурами

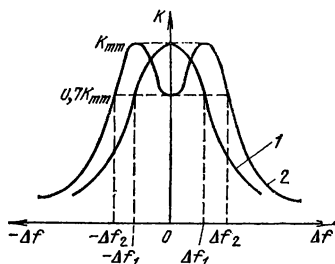


Рис. 7.16. Графическое определение полосы пропускания связанных контуров

Таким образом, на трех частотах  $f_1$ ,  $f_0$  и  $f_2$  реактивное сопротивление первичного контура равно нулю, при этом ток во вторичном контуре, выходное напряжение и коэффициент передачи максимальные на частотах  $f_1$  и  $f_2$  и имеют меньшее значение на частоте  $f_0$ . Соответствующая этому случаю АЧХ показана на рис. 7.15 (кривая 1). Максимумы характеристики соответствуют частотам, называемым частотами связи  $f_1=f_0/\sqrt{1+k}$ ;  $f_2=f_0/\sqrt{1-k}$ . Чем больше связь между контурами, тем меньше коэффициент передачи на частоте  $f_0$  (рис. 7.15, кривая 2). Это объясняется возрастанием активного вносимого сопротивления, приводящим к уменьшению тока в первичном контуре, ЭДС, наведенной в катушке вторичного контура, тока в нем и, следовательно, коэффициента пе-

редачи. Кроме этого, как видно из рис. 7.15 и формул для  $f_1$  и  $f_2$ , увеличение связи вызывает смещение частот, на которых располагаются максимумы АЧХ: нижняя частота уменьшается ( $f'_1 < f_1$ ), а верхняя — увеличивается ( $f'_2 > f_2$ ).

Полоса пропускания связанных контуров определяется так же, как для одиночного контура, т. е. при уменьшении коэффициента передачи в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению с его максимальным возможным значением (рис. 7.16). Однако если в одиночном контуре полоса пропускания определяется только частотой  $f_0$  и добротностью  $Q$ , то в связанных контурах она зависит также от коэффициента связи. Более подробный анализ показывает, что, если  $k < 0,68 k_{кр}$ , полоса пропускания связанных контуров  $2\Delta f$  меньше, чем полоса пропускания одиночного контура  $2\Delta f'$  с такой же добротностью. Увеличение коэффициента связи приводит к расширению полосы пропускания, и при  $k = 0,68 k_{кр}$  получаем  $2\Delta f = 2\Delta f'$ . При критической связи (рис. 7.16, кривая 1) полоса пропускания связанных контуров в 1,41 раза больше, чем одиночного, т. е.  $2\Delta f_1 = 1,41 (2\Delta f')$ . При связи выше критической полоса пропускания становится еще шире и достигает максимума  $2\Delta f_2$ , когда коэффициент передачи на частоте  $f_0$  становится равным  $0,7 K_{mт}$  (рис. 7.16, кривая 2). При этом  $k = 2,41 k_{кр}$  и  $2\Delta f_2 = 3,1 (2\Delta f')$ , т. е. максимально возможная полоса пропускания связанных контуров в 3,1 раза больше, чем одиночного контура с такой же добротностью.

Возможность изменения ширины полосы пропускания плавной или дискретной регулировкой связи является важным преимуществом связанных контуров перед одиночным. Другое преимущество состоит в том, что можно получить такую же полосу пропускания, как в одиночном контуре, но при более высокой (примерно в 3 раза) добротности. Чем больше добротность, тем круче склоны АЧХ и, следовательно, коэффициент прямоугольности ближе к единице. Поэтому связанные контуры имеют лучшие избирательные свойства по сравнению с одиночным контуром.

## Контрольные вопросы и упражнения

- 7.1. Начертите различные схемы связанных контуров и объясните их работу. Какие схемы применяются наиболее часто и почему?

- 7.2. На примере схемы трансформаторной связи поясните, почему вторичный контур влияет на первичный.
- 7.3. Два одинаковых связанных контура состоят из следующих элементов:  $L_1=L_2=200$  мкГн,  $C_1=C_2=300$  пФ. Определите емкость связи, если  $k=1\%$  для двух случаев: внешнеемкостной и внутриемкостной связи между контурами.
- 7.4. Постройте векторную диаграмму связанных контуров при резонансе в обоих контурах и объясните с ее помощью смысл активного вносимого сопротивления.
- 7.5. Объясните, как зависит активное вносимое сопротивление от частоты и коэффициента связи.
- 7.6. Два одинаковых контура, связанных трансформаторной связью, состоят из следующих элементов:  $L_1=L_2=100$  мкГн,  $C_1=C_2=400$  пФ,  $R_{\pi 1}=R_{\pi 2}=15$  Ом. Определите активное вносимое сопротивление, если  $k=1\%$ .
- 7.7. Начертите векторную диаграмму связанных контуров при расстройке и объясните с ее помощью смысл реактивного вносимого сопротивления.
- 7.8. Объясните, как зависит реактивное вносимое сопротивление от частоты и коэффициента связи.
- 7.9. Перечислите виды резонансов в связанных контурах. Приведите условие первого частного резонанса.
- 7.10. Объясните частотные зависимости токов в связанных контурах в режимах частных резонансов.
- 7.11. В каком порядке производится настройка контуров в режим полного резонанса? Чем отличается полный резонанс от частных резонансов?
- 7.12. Для контуров, параметры которых указаны в п. 7.6, найдите коэффициент критической связи.
- 7.13. Объясните, почему активная мощность во вторичном контуре максимальна при критической связи.
- 7.14. Что такое КПД связанных контуров? Как зависит КПД от коэффициента связи?
- 7.15. Чем отличаются друг от друга полный и сложный резонансы?
- 7.16. Как меняется форма АЧХ связанных контуров при изменении связи?
- 7.17. Поясните причины образования двух максимумов АЧХ связанных контуров.
- 7.18. Как зависит ширина полосы пропускания связанных контуров от степени связи? Чем ограничивается максимальная полоса пропускания?
- 7.19. Какие преимущества имеют связанные контуры перед одиночным?

## ГЛАВА 8.

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ И ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛОВ

В гл. 5, 6 и 7 рассматривались свойства одиночных и связанных колебательных контуров. Было показано, что полоса пропускания таких цепей существенно зависит от их добротности: увеличение добротности приводит к

уменьшению полосы пропускания, т. е. к улучшению частотной избирательности (напомним, что избирательность характеризует способность контуров пропускать или задерживать электрические колебания в относительно узком частотном интервале).

На практике часто встречаются с необходимостью пропускать или задерживать колебания в значительно более широком диапазоне частот. Эта задача решается с помощью электрических частотных фильтров, представляющих собой четырехполюсники, пропускающие без заметного ослабления колебания определенных частот, образующих полосу пропускания, и подавляющих колебания остальных частот, образующих полосу задерживания.

Рассмотрим основные типы электрических фильтров, имеющих наиболее широкое распространение в радиотехнической аппаратуре. Основное внимание уделим следующим вопросам:

1. По каким признакам классифицируются электрические фильтры, каковы параметры фильтров?

2. Что называется условием пропускания фильтра и как с его помощью определяются полосы пропускания и задерживания?

3. Какие свойства имеют реактивные фильтры нижних частот, верхних частот, полосовые и режекторные?

4. Чем отличаются друг от друга фильтры типа «к» и фильтры типа «т»?

5. Каковы свойства фильтров, не содержащих индуктивных катушек?

6. Какие характеристики имеют кварцевые и магнетострикционные фильтры?

7. Что такое цифровой фильтр?

8. Как с помощью электрических фильтров осуществляется временная задержка сигналов?

### **8.1. Классификация и основные параметры электрических фильтров**

Электрические фильтры могут быть классифицированы по различным признакам: пропускаемым частотам, схемам звеньев, типам элементов и характеристикам.

В зависимости от спектра пропускаемых частот различают фильтры нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовые (ПФ) и режекторные или заграждающие (РФ). Характеристики перечисленных фильтров,

имеющие идеальную прямоугольную форму, изображены на рис. 8.1, а—г. Соответственно, как видно из рис. 8.1, а, полоса пропускания ФНЧ ограничена частотами:  $f=0$  (постоянный ток) и  $f_c$  — частотой среза, разделяющей полосы пропускания и задерживания. Полоса задерживания ФНЧ находится в пределах от  $f_c$  до  $\infty$ . Для ФВЧ (рис. 8.1, б) полоса пропускания  $f_c \dots \infty$ , а задерживания  $0 \dots f_c$ . Полосовой фильтр имеет одну полосу пропускания

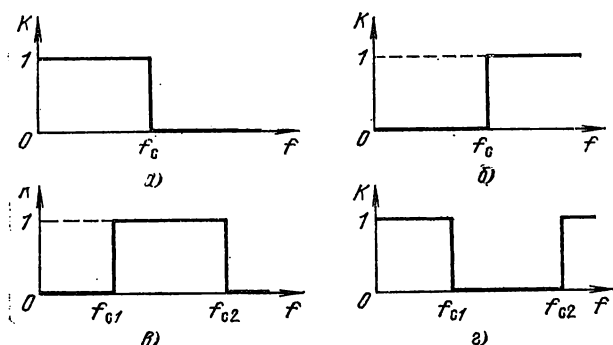


Рис. 8.1. Идеальные АЧХ фильтров

$f_{c1} \dots f_{c2}$  и две полосы задерживания:  $0 \dots f_{c1}$  и  $f_{c2} \dots \infty$  (рис. 8.1, в), а загораживающий — наоборот, две полосы пропускания:  $0 \dots f_{c1}$  и  $f_{c2} \dots \infty$  и одну полосу задерживания  $f_{c1} \dots f_{c2}$  (рис. 8.1, г).

В зависимости от схемы фильтры могут состоять из Г-образных звеньев (рис. 8.2, а), Т-образных (рис. 8.2, б) и П-образных (рис. 8.2, в). По числу звеньев различают фильтры *однозвенные* и *многозвенные*. Звенья содержат последовательные и параллельные ветви с сопротивлениями  $Z_1$  и  $Z_2$ . Простейшим является Г-образное звено, которое содержит два сопротивления. Особенностью Г-образного звена является несимметрия его сопротивлений: входные сопротивления со стороны зажимов 1—1 и 2—2 неодинаковые. Чаще применяют *симметричные* Т-образные и П-образные звенья. Эти звенья создают последовательным соединением двух Г-образных. Так, Т-образное звено получается из двух Г-образных, соединенных зажимами 2—2, а П-образное — соединением двух Г-образных зажимами 1—1.

В зависимости от вида используемых элементов раз-



личают фильтры, содержащие индуктивности и емкости (*реактивные фильтры*), емкости и активные сопротивления (*безындуктивные фильтры*), состоящие из кварцевых резонаторов (*пьезоэлектрические фильтры*), и др.

В простейших реактивных фильтрах сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  подбираются так, чтобы их произведение на любой частоте было постоянным. Этого можно добиться, если ветви фильтра содержат реактивные сопротивления, имеющие разные знаки, например  $\underline{Z}_1 = i\omega L$ ,  $\underline{Z}_2 = 1/i\omega C$ . Такие схемы называют *фильтрами типа «к»*. Суще-

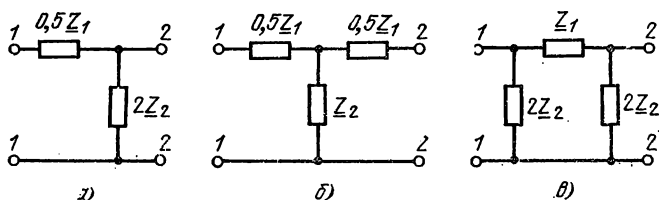


Рис. 8.2. Схемы простейших звеньев фильтров

ствуют более сложные *фильтры типа «т»* (смысл коэффициента  $t$  поясняется дальше). Характеристики фильтров типа «к» и «т» значительно отличаются друг от друга.

**Параметры фильтров.** Электрический фильтр, как всякий четырехполюсник, характеризуется комплексными входным сопротивлением  $\underline{Z}_{вх}$  и коэффициентом передачи напряжения  $\underline{K}$ , которые уже встречались при рассмотрении колебательных контуров. Кроме этих параметров, для анализа электрических фильтров вводятся понятия о характеристическом (волновом) сопротивлении  $\underline{Z}_c$  и *постоянной передачи*  $\underline{\Gamma} = A + iB$ , где  $A$  — *постоянная ослабления*,  $B$  — *постоянная фазы*.

Рассмотрим смысл указанных понятий. Предположим, что к симметричному Т-образному или П-образному звену фильтра подключена нагрузка с комплексным сопротивлением  $\underline{Z}_н$ . Это сопротивление можно подобрать равным входному сопротивлению фильтра, тогда фильтр будет *согласованным*. Входное сопротивление согласованного фильтра называют *характеристическим*, и для такого фильтра справедливо равенство  $\underline{Z}_c = \underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_н$ , называемое *условием согласования*. Сопротивления  $\underline{Z}_c$ ,  $\underline{Z}_{вх}$

и  $Z_{\Pi}$  — комплексные и, следовательно, зависят от частоты. Реальное нагрузочное сопротивление должно быть активным для того, чтобы энергия передавалась через фильтр только в одном направлении: от генератора к нагрузке. Поэтому условие согласования может быть выполнено только на одной частоте (в сложных фильтрах — на нескольких частотах). Ухудшение характеристик фильтров, связанное с их рассогласованием, будет рассмотрено дальше.

Постоянная передачи  $\Gamma$  фильтра позволяет судить об изменении амплитуд и начальных фаз колебаний, проходящих через фильтр. Постоянная ослабления  $A = -20 \lg(U_{\text{вх}}/U_{\text{нх}})$ , где  $U_{\text{вх}}$ ,  $U_{\text{нх}}$  — соответственно амплитуды напряжения на входе и на нагрузке согласованного фильтра, определяет степень уменьшения амплитуды выходного напряжения (или тока) по сравнению с входным. Постоянная фазы  $B = \psi_{\text{вх}} - \psi_{\text{нх}}$  учитывает изменение начальной фазы напряжения на нагрузке фильтра  $\psi_{\text{нх}}$  по отношению к начальной фазе напряжения на его входе  $\psi_{\text{вх}}$ .

Постоянная ослабления, называемая также *затуханием фильтра*, измеряется в децибелах. Зависимость постоянной ослабления от частоты входного напряжения при его постоянной амплитуде называется *частотной характеристикой затухания фильтра*. Для примера на рис. 8.3 показана идеальная частотная характеристика затухания ФНЧ (кривая 1). В полосе пропускания  $0 \dots f_c$  затухание фильтра равно нулю, а в полосе задерживания — бесконечности. Для получения такой характеристики элементы фильтра должны быть идеальными, т. е. не содержать активных потерь; сопротивление последовательной ветви должно быть бесконечно большим во всей полосе задерживания, а параллельной — бесконечно малым; наконец, фильтр должен быть согласованным на всех частотах. В связи с невозможностью выполнения указанных условий характеристика реального фильтра отличается от идеальной. Даже при согласовании фильтра на всех частотах затухание в полосе задерживания увеличивается плавно (рис. 8.3, кривая 2). При учете активных потерь в элементах фильтра и его рассогласовании характеристика затухания еще больше будет отличаться от идеальной (рис. 8.3, кривая 3): в полосе пропускания затухание больше нуля, переход от полосы пропускания к полосе задерживания происходит плавно, за-

тухание в полосе задерживания увеличивается медленнее, чем при отсутствии потерь и согласовании фильтра на всех частотах. Плавный переход от полосы пропускания к полосе задерживания не позволяет указать точное значение частоты среза на характеристике затухания фильтра. Поэтому при проектировании электрических фильтров задаются полосами эффективно пропускаемых и эффективно задерживаемых частот. В полосе эффективно пропускаемых частот  $0 \dots f_1$  (см. рис. 8.3) затухание не должно быть больше некоторого значения  $A_1$ . Обычно  $A_1$  выбирают в пределах от 3 до 6 дБ. В полосе эффективно задерживаемых частот  $f_2 \dots \infty$  затухание фильтра должно быть больше значения  $A_2$ , которое зависит от конкретных требований к фильтру. Область частот  $f_1 \dots f_2$  называют *полосой перехода*. Чем

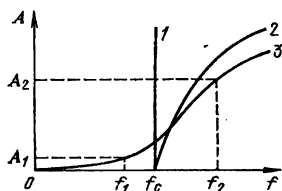


Рис. 8.3. Частотные характеристики затухания ФНЧ

быстрее изменяется затухание вблизи частоты среза, тем меньше ширина полосы перехода и эффективнее разделение фильтром полос пропускания и задерживания.

## 8.2. Условие пропускания реактивного фильтра

Полосы пропускания и задерживания идеального реактивного фильтра могут быть определены с помощью условия пропускания [6]

$$-1 \geq |Z_1/4Z_2| \geq 0; \quad 1 \geq Z_1/(-4Z_2) \geq 0. \quad (8.1)$$

Частоты, для которых выполняется это неравенство, составляют полосу пропускания фильтра, для которых не выполняется — полосу задерживания. Частоты, соответствующие границам полосы пропускания, отвечают условиям

$$\underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2; \quad \underline{Z}_1 = 0. \quad (8.2)$$

Эти частоты находятся с помощью (8.2) аналитически или графически. Рассмотрим графический способ определения частот среза.

Обратимся к схеме фильтра рис. 8.4, а. Последовательная ветвь содержит индуктивность, а параллельная — емкость, поэтому  $\underline{Z}_1 = i\omega L$ ,  $\underline{Z}_2 = -i\omega C$ . Построим графики зависимостей сопротивлений  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $-4\underline{Z}_2$  от

частоты (рис. 8.5, а). Как видно из этого рисунка, графики функций  $\underline{Z}_1$  и  $-4\underline{Z}_2$  пересекаются в точке, соответствующей частоте  $f = \underline{f}_c$ , следовательно, на этой частоте удовлетворяется одно из уравнений (8.2). Второе уравнение удовлетворяется при  $f = 0$ .

Возьмем произвольную частоту  $f_1 < \underline{f}_c$ . На этой частоте  $\underline{Z}_1 < (-4\underline{Z}_2)$ , поэтому условие пропускания выполняется. Значит, колебания с частотой  $f_1$  фильтр пропускает. Та-

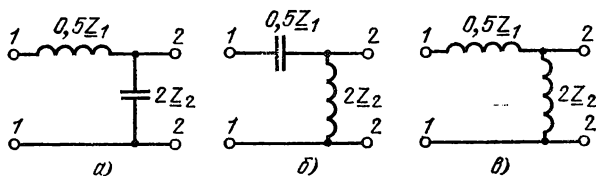


Рис. 8.4. Г-образные звенья четырехполюсников, состоящие из реактивных элементов

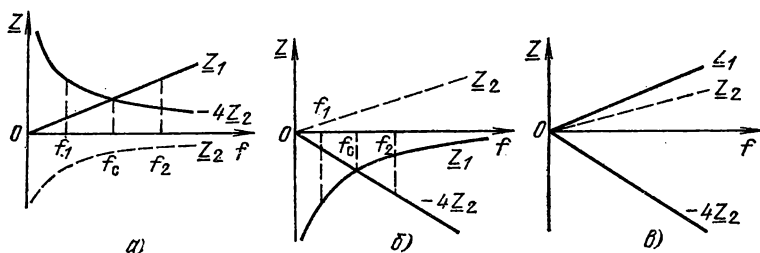


Рис. 8.5. Применение условия пропускания для графического анализа схем четырехполюсников

кое же соотношение между сопротивлениями сохраняется на любой частоте  $f < \underline{f}_c$ , поэтому область частот  $0 \dots \underline{f}_c$  является полосой пропускания.

Теперь рассмотрим соотношение функций  $\underline{Z}_1$  и  $-4\underline{Z}_2$  на частоте  $f_2 > \underline{f}_c$ . Из рис. 8.5, а следует, что на этой и вообще на любой частоте, удовлетворяющей условию  $f > \underline{f}_c$ , имеем  $\underline{Z}_1 > (-4\underline{Z}_2)$ . Значит, условие пропускания не выполняется, колебания с частотами  $f_2 > \underline{f}_c$  фильтр не пропускает, и эти частоты образуют полосу задерживания. Таким образом, данная схема — это схема ФНЧ, поскольку колебания в полосе от 0 до  $\underline{f}_c$  пропускаются, а на остальных частотах задерживаются.

Проанализируем схему фильтра, изображенную на рис. 8.4, б. Графики функций, входящих в (8.1), изображены на рис. 8.55, б. Рассуждая так же, как в предыдущем случае, получаем, что, поскольку при  $f < f_c$  соблюдается условие  $\underline{Z}_1 > (-4\underline{Z}_2)$ , в полосе от 0 до  $f_c$  колебания через фильтр не проходят и эти частоты образуют полосу задерживания. Если  $f > f_c$ , то  $\underline{Z}_1 < (-4\underline{Z}_2)$ , условие прозрачности выполняется и фильтр пропускает колебания. Следовательно, схема, изображенная на рис. 8.4, б — схема ФВЧ. Частота среза соответствует точке пересечения графиков функций  $\underline{Z}_1 = -i/\omega C$  и  $\underline{Z}_2 = -4i\omega L$ .

Для схемы, показанной на рис. 8.4, в, графики частотных зависимостей функций  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  и  $-4\underline{Z}_2$  представлены на рис. 8.5, в. Из рисунка следует, что на всех частотах, кроме  $f=0$ , соблюдается неравенство  $\underline{Z}_1 < (-4\underline{Z}_2)$ . Это означает, что схема позволяет пропускать колебания всех частот, кроме  $f=0$  и  $f=\infty$ , и, следовательно, не является схемой фильтра. В таких четырехполюсниках частота среза  $f_c=0$ .

Определение частот среза фильтров, состоящих из колебательных контуров, производится таким же способом, который был описан выше. Рассмотрим, например, как находятся эти частоты для схемы, изображенной на рис. 8.6, а. Последовательная ветвь этой схемы содержит комплексное сопротивление  $\underline{Z}_1$ , представляющее собой реактивное сопротивление последовательного контура, а параллельная ветвь — комплексное сопротивление  $\underline{Z}_2$ , являющееся реактивным сопротивлением параллельного контура.

Графики частотных зависимостей сопротивлений  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $-4\underline{Z}_2$ , для случая настройки контуров на одну и ту же частоту  $f_0$  приведены на рис. 8.6, б. Из этого рисунка видно, что графики функций  $\underline{Z}_1$  и  $-4\underline{Z}_2$  пересекаются в двух точках. Следовательно, уравнение  $\underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2$  удовлетворяется на двух частотах:  $f_{c1}$  и  $f_{c2}$ , а уравнение  $\underline{Z}_1 = 0$  — на частоте  $f_0$ . Таким образом, можно считать, что фильтр имеет три частоты среза  $f_{c1}$ ,  $f_0$ ,  $f_{c2}$ , образующие две примыкающие друг к другу полосы пропускания  $f_{c1} \dots f_0$ ,  $f_0 \dots f_{c2}$ . Общая полоса пропускания фильтра ограничена частотами  $f_{c1}$  и  $f_{c2}$ . Полосы задерживания лежат в пределах  $0 \dots f_{c1}$  и  $f_{c2} \dots \infty$ .

Чтобы убедиться в таком расположении полос задерживания и пропускания, сравним сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $-4\underline{Z}_2$  на произвольных частотах  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_4$ , причем выберем эти частоты так, чтобы удовлетворялись неравенства  $f_1 < f_{c1}$ ;  $f_1 < f_2 < f_0$ ;  $f_{c2} > f_3 > f_0$ ;  $f_4 > f_{c2}$ . Из рис. 8.6, б видно, что на частотах  $f_1$  и  $f_4$  сопротивление  $\underline{Z}_1 > (-4\underline{Z}_2)$ , следовательно, условие пропускания (8.1) не выполняется.

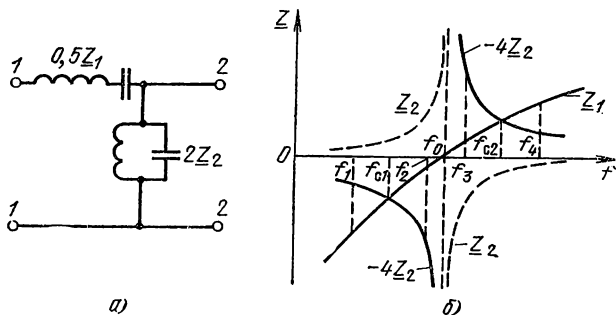


Рис. 8.6. Г-образное звено четырехполюсника с колебательными контурами и его графический анализ

ся и колебания с частотами  $f < f_{c1}$  и  $f > f_{c2}$  фильтр не пропускает. На частотах  $f_2$  и  $f_3$ , наоборот,  $\underline{Z}_1 < (-4\underline{Z}_2)$ , поэтому условие пропускания выполняется, и колебания с частотами от  $f_{c1}$  до  $f_{c2}$  фильтр пропускает. Отсюда можно сделать вывод о том, что четырехполюсник, схема которого приведена на рис. 8.6, а, представляет собой полосовой фильтр.

### 8.3. Реактивные фильтры типа «к»

**Фильтры нижних частот.** Рассмотрим свойства реактивных ФНЧ, пренебрегая активными потерями в их элементах. Варианты схем ФНЧ представлены на рис. 8.7, а. Главное внимание уделим симметричным Т-образным и П-образным звеньям фильтров.

Вначале определим, как зависит от частоты характеристическое сопротивление Т-образного ФНЧ:

$$\underline{Z}_{сТ} = \sqrt{L_1 [1 - (f^2/f_c^2)] / C_2}. \quad (8.3)$$

В полосе пропускания, т. е. при  $f < f_c$ , подкоренное выражение в (8.3) положительно, поэтому характеристиче-

ское сопротивление фильтра имеет активный характер. При  $f=0$  получаем  $\underline{Z}_{сТ} = \underline{Z}_{с0} = \sqrt{L_1/C_2}$ . Величина  $Z_{с0}$  называется *номинальным характеристическим сопротивлением*. По мере увеличения частоты отношение  $f^2/f_c^2$  увеличивается, что приводит к уменьшению характеристического сопротивления, которое обращается в нуль на частоте среза.

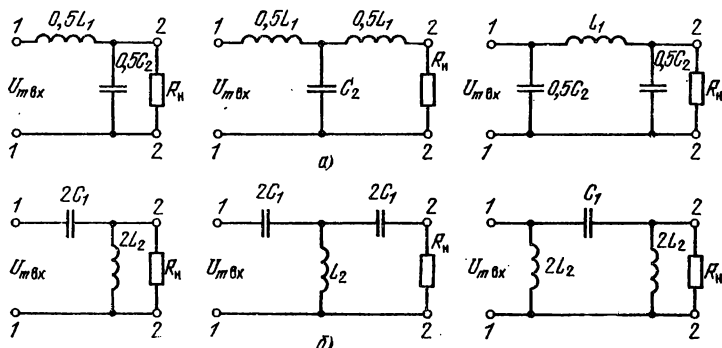


Рис. 8.7. Схемы ФНЧ и ФВЧ типа «к»

В полосе задерживания ( $f > f_c$ ) отношение  $f^2/f_c^2$  становится больше единицы, поэтому подкоренное выражение в (8.3) получается отрицательным. Можно показать, что в этом случае сопротивление  $\underline{Z}_{сТ}$  индуктивное и увеличивается при увеличении частоты (рис. 8.8, а).

Характеристическое сопротивление П-образного ФНЧ

$$\underline{Z}_{сП} = \sqrt{L_1/C_2 [1 - (f^2/f_c^2)]}. \quad (8.4)$$

Анализ (8.4) показывает, что в полосе пропускания сопротивление  $\underline{Z}_{сП}$  активное и увеличивается по мере приближения частоты входного напряжения к частоте среза фильтра, причем значению частоты  $f=0$  соответствует  $Z_{с0} = \sqrt{L_1/C_2}$ , а значению  $f=f_c$  — сопротивление  $Z_{сП} = \infty$ . В полосе задерживания характеристическое сопротивление имеет емкостный характер и уменьшается с ростом частоты (рис. 8.8, б).

Таким образом, подтверждается сделанный в § 8.1 вывод о том, что характеристическое сопротивление фильтра зависит от частоты и, следовательно, невозможно подобрать сопротивление  $R_N$  нагрузки, при котором

обеспечивается согласование фильтра на всех частотах. Для практических расчетов в простейшем случае условно принимают характеристическое сопротивление в полосе пропускания постоянным и равным номинальному значению  $Z_{c0}$ . В этом случае условие согласования фильтра

$$R_n = Z_{c0} = \sqrt{L_1/C_2}. \quad (8.5)$$

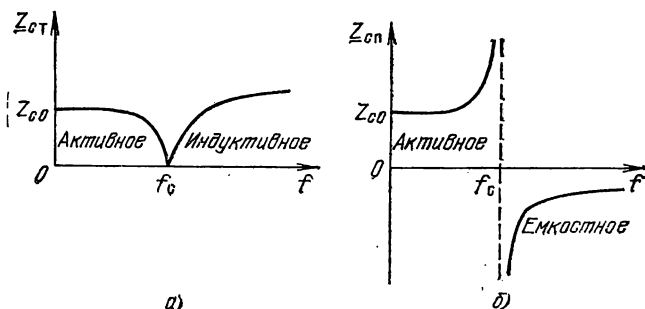


Рис. 8.8. Зависимости характеристических сопротивлений ФНЧ типа «к» от частоты

Необходимо отметить, что фильтр должен быть согласован не только с сопротивлением нагрузки, но и с внутренним сопротивлением  $R_i$  источника ЭДС, поэтому, кроме (8.5), должно выполняться равенство  $R_i = Z_{c0}$ .

Предположим, что к согласованному ФНЧ подведено синусоидальное напряжение с амплитудой  $U_{m\text{вх}}$ . Рассмотрим работу фильтра, воспользовавшись Т-образной схемой (рис. 8.7, а).

Как видно из схемы фильтра, последовательная ветвь содержит сопротивление  $Z_1 = i\omega L_1$ , а параллельная —  $Z_2 = 1/i\omega C_2$ . При постоянном токе  $Z_1 = 0$ , а  $Z_2 = \infty$ , поэтому амплитуда напряжения на нагрузке  $U_{mн}$  равна амплитуде входного напряжения, следовательно, затухание фильтра равно нулю.

Проследим, как будет меняться затухание, если частота  $f$  генератора, питающего фильтр, увеличивается. При  $f \ll f_c$  сопротивление последовательной ветви фильтра значительно меньше, чем параллельной, поэтому практически весь ток генератора проходит через нагрузку, не ответвляясь в  $Z_2$ . Амплитуды напряжения на нагрузке и на входе фильтра примерно равны друг другу,



и затухание близко к нулю. С ростом частоты  $Z_1$  увеличивается, что приводит к увеличению падения напряжения на нем и соответствующему уменьшению напряжения на нагрузке. Одновременно с увеличением  $Z_1$  происходит уменьшение  $Z_2$ , вследствие чего ток, проходящий через  $Z_2$ , возрастает, а ток в нагрузке уменьшается. В результате получаем, что возрастание частоты входного напряжения приводит к увеличению затухания фильтра. В полосе пропускания рост затухания происходит относительно медленно, так как реактивное сопротивление последовательной ветви меньше, чем параллельной.

В полосе задерживания соотношение между  $Z_1$  и  $Z_2$  изменяется: сопротивление параллельной ветви фильтра становится меньше, чем последовательной. Вследствие этого затухание фильтра относительно быстро возрастает, что можно объяснить увеличением шунтирующего действия  $Z_2$ , через которое проходит большая часть тока генератора, а также перераспределением напряжения между сопротивлениями  $Z_1$  и  $R_n$ , приводящим к уменьшению  $U_{mн}$  за счет увеличения падения напряжения на  $Z_1$ . При неограниченном возрастании частоты  $Z_1 \rightarrow \infty$ ,  $Z_2 \rightarrow 0$ , поэтому затухание фильтра непрерывно увеличивается. Частотная характеристика затухания ФНЧ, работа которого описана выше, приведена на рис. 8.3 (кривая 3).

При рассмотрении работы фильтра предполагалось, что он согласован, т. е. сопротивление его нагрузки выбрано в соответствии с условием (8.5). Из (8.5) следует, что сопротивление нагрузки нельзя выбирать произвольным, так как оно определяется элементами, из которых

состоит фильтр. Отклонение сопротивления нагрузки от значения  $Z_{с0}$  приводит к ухудшению формы АЧХ и частотной характеристики затухания фильтра.

Влияние сопротивления  $R_n$  на форму АЧХ фильтра наиболее просто можно показать для Г-образного звена ФНЧ (см. рис. 8.7, а). Как видно из

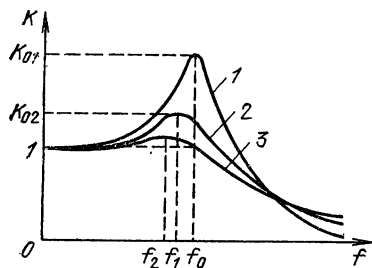


Рис. 8.9. Влияние сопротивления нагрузки на форму АЧХ ФНЧ

этой схемы, Г-образный фильтр представляет собой последовательный колебательный контур, состоящий из элементов  $0,5L_1$  и  $0,5C_2$ , в котором выходное напряжение снимается с конденсатора  $0,5C_2$  (см. рис. 8.7, а, точки 2—2). Амплитудно-частотная характеристика этого контура при  $R_n = \infty$  показана на рис. 8.9 (кривая 1). Из рисунка видно, что характеристика имеет максимум на резонансной частоте  $f_0 = 1/2\pi \sqrt{0,25L_1C_2} = 1/\pi \sqrt{L_1C_2}$ , который определяется добротностью контура (строго говоря, это справедливо лишь при малых потерях в контуре).

При подключении к зажимам 2—2 нагрузки с конечным сопротивлением максимум АЧХ несколько смещается в область более низких частот и как бы сглаживается, а максимальный коэффициент передачи становится меньше (рис. 8.9, кривая 2). Такое изменение формы АЧХ объясняется шунтирующим действием сопротивления нагрузки, уменьшающим эквивалентную добротность контура. Можно показать, что чем меньше сопротивление нагрузки, тем слабее выражены резонансные свойства контура, приводящие к появлению максимума АЧХ. Если  $R_n = \sqrt{L_1/C_2}$ , эквивалентная добротность контура становится равной единице. В этом случае форма АЧХ контура близка к требуемой характеристике ФНЧ (рис. 8.9, кривая 3).

Для расчета ФНЧ могут быть использованы следующие соотношения:

$$f_c = 1/\pi \sqrt{L_1 C_2}; \quad R_n = \sqrt{L_1/C_2}; \quad L_1 = R_n/\pi f_c; \\ C_2 = 1/\pi f_c R_n. \quad (8.6)$$

Формулы (8.6) справедливы для Г-, Т- и П-образных звеньев.

Примером практического применения ФНЧ может служить П-образный контур, используемый в радиопередатчиках. Этот контур представляет собой П-образное звено ФНЧ. Он обычно включается между выходным каскадом передатчика и антенной и служит для подавления гармонических составляющих колебаний несущей частоты. Для более точной настройки индуктивность последовательной ветви делается регулируемой.

**Фильтры верхних частот** (см. рис. 8.7, б). Характеристические сопротивления Т- и П-образного звеньев соответственно

$$Z_{с\Gamma} = \sqrt{L_2/C_1 [1 - (f_c^2/f^2)]};$$

$$\underline{Z}_{сг} = \sqrt{L_2/C_1 [1 - (f_c^2/f^2)]}. \quad (8.7)$$

Анализ этих формул показывает, что в полосе задерживания сопротивление  $\underline{Z}_{сг}$  имеет емкостный характер и уменьшается при увеличении частоты (рис. 8.10, а). При  $f=f_c$  это сопротивление равно нулю. В полосе пропускания сопротивление  $\underline{Z}_{сг}$  становится активным и возрастает

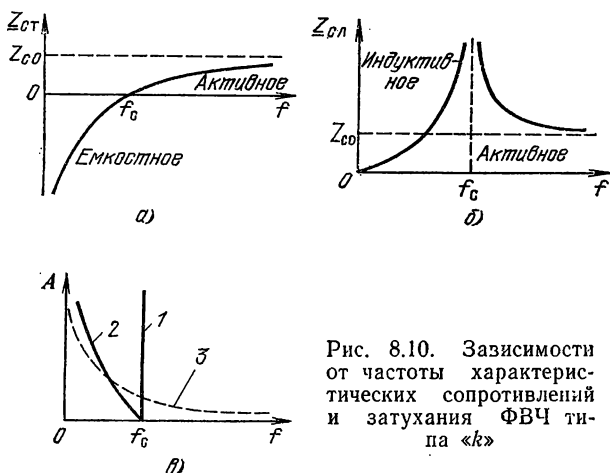


Рис. 8.10. Зависимости от частоты характеристических сопротивлений и затухания ФВЧ типа «к»

тает с увеличением частоты, стремясь к значению  $Z_{c0} = \sqrt{L_2/C_1}$ . Характеристическое сопротивление П-образного звена в полосе задерживания индуктивное и с ростом частоты увеличивается (рис. 8.10, б). При  $f=f_c$  оно становится равным бесконечности. В полосе пропускания  $f>f_c$  сопротивление  $\underline{Z}_{сП}$ , уменьшаясь, стремится к значению  $Z_{c0}$ .

Условие согласования фильтра остается таким же, как для ФНЧ, т. е.  $R_n = \sqrt{L_2/C_1}$ . Идеальная частотная характеристика затухания ФВЧ приведена на рис. 8.10, в (кривая 1). На этом же рисунке показаны частотные зависимости затухания фильтра без потерь, согласованного на всех частотах (кривая 2), и фильтра с реальным нагрузочным сопротивлением (кривая 3).

Рассмотрим работу ФВЧ, воспользовавшись схемой Т-образного звена, приведенной на рис. 8.7, б. Как видно из рисунка, последовательная ветвь фильтра содержит смкости, образующие сопротивление  $\underline{Z}_1 = 1/i\omega C_1$ , а парал-

лельная — индуктивность, образующую сопротивление  $Z_2 = i\omega L_2$ . Так как на частоте  $f=0$   $Z_1 = \infty$ , а  $Z_2 = 0$ , постоянный ток фильтр не пропускает. В полосе задерживания сопротивление последовательной ветви фильтра больше, чем параллельной, поэтому амплитуда напряжения на нагрузке меньше амплитуды напряжения на входе и затухание фильтра больше нуля. С ростом

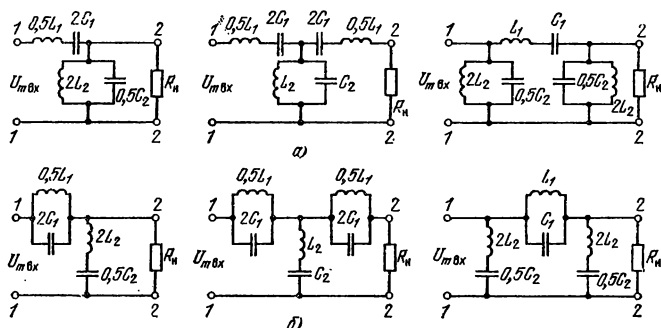


Рис. 8.11. Схемы ПФ и РФ типа «к»

частоты затухание уменьшается, поскольку ослабевает шунтирующее действие сопротивления  $Z_2$  и уменьшается падение напряжения на сопротивлении  $Z_1$ . В полосе пропускания затухание фильтра становится относительно небольшим, так как при  $f > f_c$  сопротивление параллельной ветви становится больше, чем последовательной, вследствие чего напряжение на нагрузке фильтра увеличивается, стремясь к значению напряжения на его входе. Чем больше частота входного напряжения, тем ближе  $U_{mн}$  к  $U_{mвх}$  и тем меньше затухание фильтра.

Для расчета ФВЧ используют формулы:

$$f_c = 1/4\pi \sqrt{L_2 C_1}; \quad R_n = \sqrt{L_2/C_1}; \quad L_2 = R_n/4\pi f_c; \\ C_1 = 1/4\pi f_c R_n. \quad (8.8)$$

**Полосовые фильтры.** Из схем звеньев реактивных полосовых (рис. 8.11, а) и режекторных (рис. 8.11, б) фильтров типа «к» видно, что последовательная и параллельная ветви содержат колебательные контуры. Обычно эти контуры настраиваются на одну и ту же частоту  $f_0$ , называемую средней частотой полосы пропуска-

ния или задерживания. Характеристические сопротивления полосовых и режекторных фильтров так же, как ФНЧ и ФВЧ, являются функциями частоты: в полосах задерживания сопротивления имеют реактивный характер, а в полосах пропускания — активный. Номинальные характеристические сопротивления фильтров  $Z_{c0} = \sqrt{L_1/C_2} = \sqrt{L_2/C_1}$ . Условие согласования полосовых и режекторных фильтров  $R_n = Z_{c0} = \sqrt{L_1/C_2} = \sqrt{L_2/C_1}$ .

Рассмотрим работу полосового фильтра, воспользовавшись схемой Т-образного звена. Сопротивление последовательной ветви  $\underline{Z}_1 = i2\pi f_0 L_1 [(f/f_0) - (f_0/f)]$  образовано двумя последовательными контурами, каждый из которых состоит из элементов  $0,5L_1$  и  $2C_1$ . В параллельную ветвь фильтра включен параллельный контур  $L_2, C_2$ , поэтому  $\underline{Z}_2 = 1/i2\pi f_0 C_2 [(f/f_0) - (f_0/f)]$ .

Из схемы фильтра видно, что постоянный ток в нагрузку не проходит, так как этому препятствует наличие емкости последовательной ветви. На очень низких частотах  $\underline{Z}_1$  имеет емкостный характер и значительно больше  $\underline{Z}_2$ , имеющего индуктивный характер. Вследствие этого большая часть напряжения генератора оказывается приложенной к  $\underline{Z}_1$ , а большая часть входного тока замыкается через  $\underline{Z}_2$ , минуя нагрузку. Напряжение и ток в нагрузке близки нулю, а затухание фильтра больше нуля. С ростом частоты напряжение на нагрузке увеличивается, а затухание фильтра уменьшается, так как уменьшается  $\underline{Z}_1$  и падение напряжения на нем; кроме того, из-за увеличения  $\underline{Z}_2$  ослабевает его шунтирующее действие, что приводит к уменьшению тока через это сопротивление. На частоте, на которой выполняется условие  $\underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2$ , затухание фильтра становится минимальным. Таким образом, в области частот  $0 \dots f_{c1}$  полосовой фильтр имеет такие же характеристики, как некоторый эквивалентный ФВЧ.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в области частот  $f_{c2} \dots \infty$  полосовой фильтр эквивалентен ФНЧ. На частотах  $f > f_0$  сопротивление  $\underline{Z}_1$  становится индуктивным, а  $\underline{Z}_2$  — емкостным. С ростом частоты  $\underline{Z}_1$  увеличивается, а  $\underline{Z}_2$  — уменьшается, поэтому затухание фильтра возрастает.

На частоте  $f_0$  сопротивление  $\underline{Z}_1$  обращается в нуль, а  $\underline{Z}_2$  — в бесконечность. На этой частоте затухание равно

нулю (в реальном фильтре оно больше нуля). Полоса пропускания фильтра определяется разностью частот среза  $f_{c2} - f_{c1}$ .

Частотные характеристики затухания полосового фильтра изображены на рис. 8.12, а: 1—идеальная, 2—характеристика фильтра без потерь, согласованного на всех частотах, 3—характеристика фильтра, нагруженного активным сопротивлением  $R_H = Z_{c0}$ .

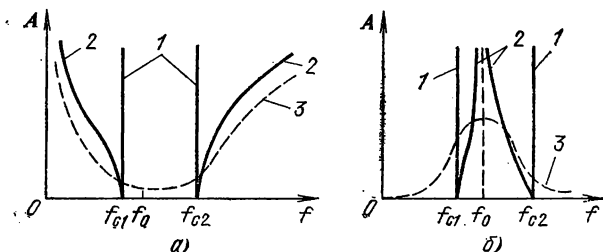


Рис. 8.12. Зависимости от частоты затухания ПФ и РФ типа «к»

Полосовые фильтры рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} f_{c1} &= [\sqrt{(1/L_1 C_2) + (1/L_1 C_1)} - \sqrt{1/L_1 C_2}]/2\pi; \\ f_0 &= \sqrt{f_{c1} f_{c2}}; \\ f_{c2} &= [\sqrt{(1/L_1 C_2) + (1/L_1 C_1)} + \sqrt{1/L_1 C_2}]/2\pi; \\ R_H &= \sqrt{L_1/C_2} = \sqrt{L_2/C_1}; \\ L_1 &= R_H/\pi(f_{c2} - f_{c1}); \quad C_1 = (f_{c2} - f_{c1})/4\pi R_H f_{c1} f_{c2}; \\ L_2 &= R_H(f_{c2} - f_{c1})/4\pi f_{c1} f_{c2}; \quad C_2 = 1/\pi R_H(f_{c2} - f_{c1}). \end{aligned} \quad (8.9)$$

**Режекторные фильтры** по назначению и схемам звеньев обратны полосовым. Режекторный фильтр, как и полосовой, можно представить состоящим из ФНЧ с частотой среза  $f_{c1}$  и ФВЧ с  $f_{c2}$ , причем  $f_{c2} > f_{c1}$ . Частотные характеристики затухания РФ приведены на рис. 8.12, б (нумерация характеристик такая же, как на рис. 8.12, а). Полоса задерживания фильтра определяется разностью частот  $f_{c2} - f_{c1}$ . Полосы пропускания ограничены частотами  $0 \dots f_{c1}$  и  $f_{c2} \dots \infty$ . Работу фильтра читателю предлагается разобрать самостоятельно.

Для расчета заграждающих фильтров пользуются формулами:

$$f_{c1} = (\sqrt{L_1 C_2 + 16 L_1 C_1} - \sqrt{L_1 C_2})/8\pi L_1 C_1;$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= \sqrt{f_{c1} f_{c2}}; \\
f_{c2} &= (\sqrt{L_1 C_2 + 16 L_1 C_1} + \sqrt{L_1 C_2}) / 8 \pi L_1 C_1; \\
R_H &= \sqrt{L_1 / C_2} = \sqrt{L_2 / C_1}; \\
L_1 &= R_H (f_{c2} - f_{c1}) / \pi f_{c1} f_{c2}; \quad C_1 = 1 / 4 \pi R_H (f_{c2} - f_{c1}); \\
L_2 &= R_H / 4 \pi (f_{c2} - f_{c1}); \quad C_2 = (f_{c2} - f_{c1}) / \pi R_H f_{c1} f_{c2}.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

**Достоинство и недостатки фильтров типа «к».** Основное достоинство фильтров типа «к» — простота их схемы. Недостатки фильтров заключаются, во-первых, в том, что их характеристика затухания имеет малую крутизну в полосе перехода, и во-вторых, — в сильной зависимости характеристического сопротивления от частоты, из-за чего не обеспечивается условие согласования, особенно в широкой полосе частот.

Увеличить крутизну характеристики затухания и затухание в полосе задерживания можно последовательным соединением нескольких звеньев фильтра. Однако при этом увеличивается затухание в полосе прозрачности, что приводит к уменьшению полосы эффективно пропускаемых частот. Кроме этого, при большом числе звеньев увеличиваются размеры и масса фильтра. Поэтому на практике применяют фильтры, число звеньев которых не превышает трех — пяти.

Другим способом устранения недостатков, присущих простым фильтрам, является усложнение их схемы с помощью перераспределения реактивных сопротивлений между последовательной и параллельной ветвью каждого звена. Такие фильтры называют фильтрами типа «т».

#### 8.4. Реактивные фильтры типа «т»

Рассмотрим для примера преобразование схемы Т-образного ФНЧ типа «к» в фильтр типа «т». Обратимся к рис. 8.13. На рис. 8.13, а показана исходная схема ФНЧ. Перенесем часть индуктивности из последовательной ветви в параллельную. Тогда получим схему фильтра типа «т», называемую *последовательно-производной* (рис. 8.13, б). Параметр  $t$  показывает, какую часть составляет индуктивность последовательной ветви фильтра типа «т» от индуктивности фильтра типа «к».

Преобразование схемы можно выполнить по-другому. Для этого часть емкости переносится из параллельной ветви в последовательную (рис. 8.13, в). В этом слу-

чае число  $m$  показывает, какую часть составляет емкость параллельной ветви от общей емкости фильтра типа « $k$ ». Преобразованная схема называется *параллельно-производной*. Значения индуктивностей и емкостей фильтров типа « $m$ » должны быть такими, как указано на рис. 8.13, б, в.

Характеристическое сопротивление  $\underline{Z}_{cm}$  и затухание фильтров типа « $m$ » зависят от частоты заметно иначе, чем у фильтров типа « $k$ »:

$$\underline{Z}_{cm} = \underline{Z}_{cT} / [1 + (1 - m^2 \underline{Z}_1) / (-4 \underline{Z}_2)]. \quad (8.11)$$

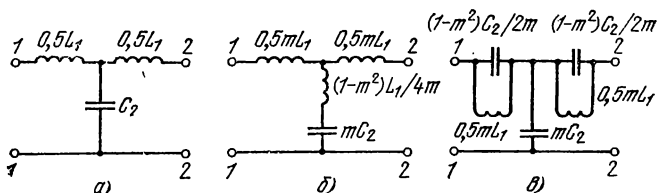


Рис. 8.13. Переход от схемы ФНЧ типа « $k$ » к схеме фильтра типа « $m$ »

Из (8.11) видно, что  $\underline{Z}_{cm}$  зависит не только от частоты, но и от параметра  $m$ . Примерный вид частотной зависимости  $\underline{Z}_{cm}$  в полосе пропускания при различных значениях  $m$  показан на рис. 8.14: при малых значениях  $m$  наблюдается значительная неравномерность изменения характеристического сопротивления. Наиболее постоянно при  $m \approx 0,6$ .

Рассмотрим, как будет меняться затухание последовательно-производного ФНЧ при изменении частоты. Как видно из рис. 8.13, б, в параллельной ветви этого фильтра включен колебательный контур, частота настройки которого  $f_1$  больше частоты среза, поскольку в этот контур входит только часть общей индуктивности фильтра. На частоте

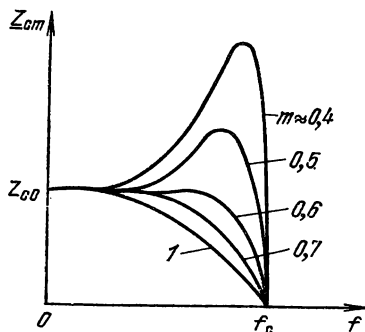


Рис. 8.14. Влияние параметра  $m$  на частотную зависимость характеристического сопротивления ФНЧ



тах  $f < f_1$ , входное сопротивление контура имеет емкостный характер, поэтому фильтр работает как фильтр типа « $k$ ». По мере приближения частоты генератора к значению  $f_1$  сопротивление контура уменьшается и при резонансе становится равным нулю. В результате этого весь ток генератора замыкается через контур, ток в нагрузке прекращается и затухание фильтра становится равным бесконечности. Частота  $f_1$  называется *полно-*

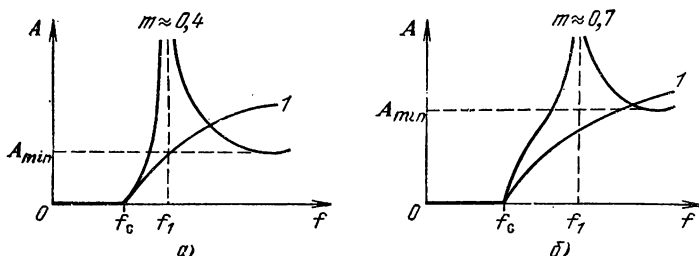


Рис. 8.15. Влияние параметра  $m$  на форму частотной характеристики затухания ФНЧ

сом характеристики затухания фильтра. На частотах  $f > f_1$  сопротивление контура становится индуктивным, увеличивается с ростом частоты и затухание фильтра уменьшается (рис. 8.15, а).

Из рис. 8.15, а следует, что при переходе от полосы пропускания к полосе задерживания крутизна характеристики затухания увеличивается по сравнению с крутизной характеристики затухания фильтра типа « $k$ » (при  $m=1$  фильтр типа « $m$ » преобразуется в фильтр типа « $k$ »). Однако в полосе задерживания затухание уменьшается с ростом частоты, что является недостатком фильтров типа « $m$ » (в фильтрах типа « $k$ » затухание с ростом частоты непрерывно увеличивается).

Форма характеристики затухания фильтра типа « $m$ » существенно зависит от выбора коэффициента  $m$ . Чем меньше  $m$ , тем ближе частоты  $f_1$  и  $f_2$ , круче левый склон характеристики, но меньше минимальное затухание  $A_{min}$  в полосе задерживания. Как это видно из сопоставления рис. 8.15, а и 8.15, б, чем больше  $m$ , тем больше значение  $A_{min}$ , но при переходе от полосы пропускания к полосе задерживания затухание изменяется медленнее.

Для получения характеристик затухания с заданной крутизной в полосе перехода и с достаточным затуханием в полосе задерживания применяют сложные фильтры, состоящие из нескольких звеньев типа « $m$ » и « $k$ » с различными коэффициентами  $m$ . В таких фильтрах удастся обеспечить большое постоянство характеристического сопротивления в полосе пропускания и, следовательно, хорошее согласование с нагрузкой.

## 8.5. Безындуктивные электрические фильтры

**Пассивные фильтры.** Рассмотренные выше реактивные электрические фильтры целесообразно применять, если частоты среза превышают несколько килогерц. Чем меньше частота среза фильтра, тем больше должна быть индуктивность катушек, входящих в его состав. Изготовление катушек с большой индуктивностью и высокой добротностью приводит к увеличению размеров, массы и стоимости фильтров. В связи с этим большое распространение в радиотехнической аппаратуре получили электрические фильтры, которые содержат активные сопротивления и емкости и не содержат индуктивностей. Такие фильтры называют *безындуктивными, или RC-фильтрами*.

На рис. 8.16, *a—г* приведены схемы простейших пассивных безындуктивных фильтров: ФНЧ, ФВЧ, полосо-

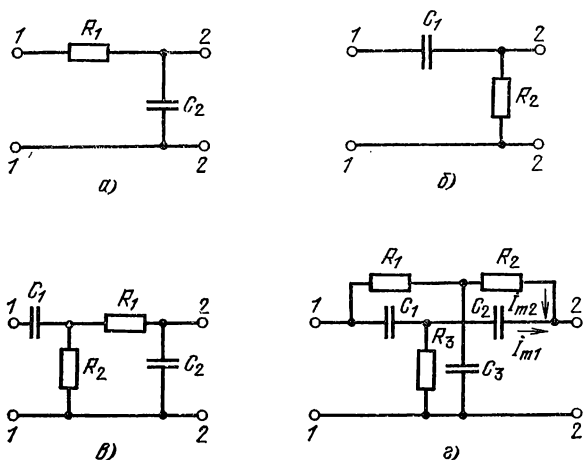


Рис. 8.16. Пассивные  $RC$ -фильтры

вого и режекторного соответственно. Рассмотрим работу этих фильтров, их характеристики затухания и основные расчетные соотношения.

Фильтр нижних частот (см. рис. 8.16, а) состоит из элементов  $R_1$  и  $C_2$ . Выходное напряжение снимается с конденсатора  $C_2$ . Так как последовательно с нагрузкой включен резистор  $R_1$ , фильтр пропускает постоянный ток.

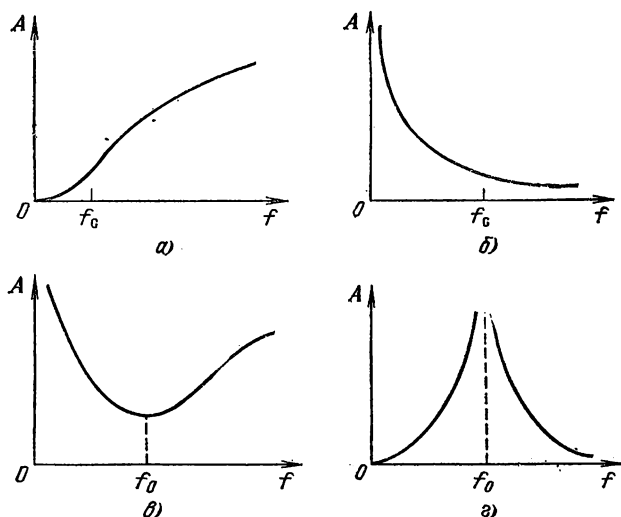


Рис. 8.17. Частотные характеристики затухания пассивных RC-фильтров

Если сопротивление нагрузки  $R_n \gg R_1$ , можно пренебречь падением напряжения на  $R_1$  и считать, что амплитуды напряжений на входе и нагрузке фильтра равны. Затухание в этом случае будет равно нулю. При увеличении частоты реактивное сопротивление конденсатора  $C_2$  уменьшается и он шунтирует нагрузку. Ток в нагрузке уменьшается, а затухание фильтра возрастает (рис. 8.17, а). Частота среза

$$f_c = 1/2\pi R_1 C_2, \quad (8.12)$$

где произведение  $R_1 C_2$  называется *постоянной времени* фильтра.

Фильтр верхних частот (см. рис. 8.16, б) содержит в последовательной ветви емкость  $C_1$ , из-за которой постоянный ток в нагрузку не проходит. Поэтому при  $f=0$

затухание фильтра равно бесконечности. С ростом частоты сопротивление конденсатора  $C_1$  уменьшается, а ток в цепи и напряжение на  $R_2$  увеличиваются. Так как выходное напряжение снимается с  $R_2$ , получаем, что при  $f > 0$  затухание фильтра уменьшается (рис. 8.17, б). Частота среза фильтра

$$f_c = 1/2\pi R_2 C_1. \quad (8.13)$$

Полосовой фильтр представляет собой последовательное соединение звеньев ФВЧ и ФНЧ. Характеристика затухания фильтра показана на рис. 8.17, в. Форма характеристики обусловлена влиянием емкостей  $C_1$  и  $C_2$ , которые ослабляют колебания: первая с частотами  $f < f_0$ , а вторая с  $f > f_0$ . Являющаяся средней частотой полосы пропускания фильтра, частота

$$f_0 \approx 1/(2\pi \sqrt{C_1 R_2 R_1 C_2}). \quad (8.14)$$

Режекторный фильтр (см. рис. 8.16, з) состоит из двух параллельно соединенных Т-образных звеньев:  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . Токи  $\dot{I}_{m1}$  и  $\dot{I}_{m2}$  на выходе каждого звена сдвинуты между собой по фазе, причем угол сдвига фаз зависит от частоты. Подбором элементов можно добиться, чтобы на некоторой частоте  $f_0$  ток  $\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m2}$ , а угол сдвига фаз между ними был  $180^\circ$ . В этом случае ток в нагрузке равен нулю, а затухание фильтра бесконечно (рис. 8.17, з). Средняя частота  $f_0$  полосы задерживания одновременно является полюсом затухания характеристики фильтра. Элементы фильтра выбираются на основании следующих соотношений:

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = R; \quad C_1 = C_2 = C; \quad f_0 = 1/2\pi RC; \\ R_3 = 0,5R; \quad C_3 = 2C; \quad C = 1/\omega_0 R. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Из рассмотрения характеристик пассивных  $RC$ -фильтров видно, что в полосе пропускания затухание довольно большое. Это объясняется наличием активных сопротивлений. Часто  $RC$ -фильтры применяются в сочетании с усилителями сигналов на электронных лампах или транзисторах. Устройство, состоящее из усилителя сигналов и пассивного  $RC$ -фильтра, включенного в цепь отрицательной обратной связи, называют активным фильтром (рис. 8.18, а).

**Активные фильтры.** Принцип работы активного фильтра рассмотрим для случая, когда в цепи обратной связи включен ФНЧ. Допустим, что АЧХ усилителя без

обратной связи равномерна (рис. 8.18, б, кривая 1). При замыкании цепи отрицательной обратной связи коэффициент передачи  $K$  (иначе — коэффициент усиления) усилителя уменьшается тем сильнее, чем больше напряжение обратной связи, передаваемое с выхода усилителя на его вход через  $RC$ -фильтр. Так как напряжение на выходе фильтра максимально вблизи частоты  $f=0$  и с ростом

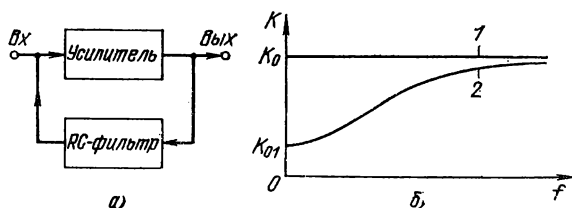


Рис. 8.18. Структурная схема и АЧХ активного ФВЧ

частоты уменьшается, получаем, что коэффициент передачи усилителя должен изменяться по обратному закону: минимальный коэффициент передачи  $K_{01}$  получается при  $f=0$  и с ростом частоты увеличивается, стремясь к максимально возможному значению. Такая зависимость коэффициента передачи характерна для ФВЧ. Таким образом, включение в цепь обратной связи ФНЧ приводит к тому, что усилитель становится активным фильтром верхних частот.

Главной особенностью активных фильтров является наличие усиления колебаний в полосе пропускания, а не ослабления, как в пассивных фильтрах. Благодаря этому в цепь обратной связи можно включать многозвенные  $RC$ -фильтры и тем самым формировать заданную форму АЧХ активного фильтра.

## 8.6. Фильтры сосредоточенной избирательности

Во многих радиотехнических устройствах, в частности в радиоприемниках, некоторых измерительных приборах и т. д., применяются фильтры, предназначенные для выделения заданной полосы частот из спектра входных колебаний. Такие фильтры часто называют фильтрами сосредоточенной избирательности (ФСИ). Примером ФСИ могут служить связанные колебательные контуры, рассмотренные в гл. 7.

ФСИ из связанных контуров. В ряде случаев прямоугльность АЧХ двухконтурных цепей оказывается недостаточной для требуемого подавления колебаний, лежащих вне полосы пропускания. В таких случаях применяют несколько (обычно, не более трех — пяти) связанных контуров. Вид связи между контурами может быть любым, однако чаще применяется внешне-

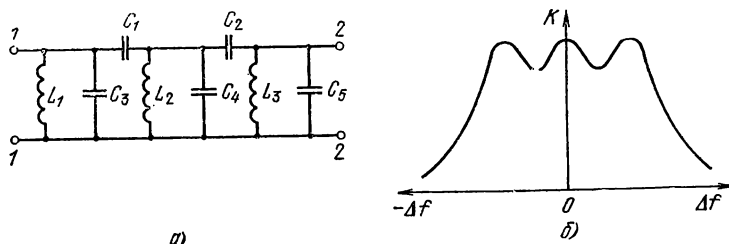


Рис. 8.19. Схема и типовая АЧХ ФСИ со связанными контурами

емкостная. Для примера на рис. 8.19, а показана схема трехконтурного ФСИ, а на рис. 8.19, б — его АЧХ. Чтобы получить такую характеристику, необходимо подобрать параметры фильтра, в том числе добротность контуров, которая должна быть достаточно высокой (100 ... 300). При увеличении числа контуров в фильтре можно добиться большей прямоугльности АЧХ, однако необходимо учитывать, что чем больше контуров, тем меньше коэффициент передачи.

В высококачественных ФСИ используются пьезоэлектрические и магнитострикционные резонаторы. Рассмотрим основные свойства таких фильтров.

**Пьезоэлектрические ФСИ.** Пьезоэлектрический (кварцевый) резонатор представляет собой пластинку, вырезанную определенным образом из кристалла природного или искусственного кварца. На поверхности пластинки нанесены электроды для включения ее в электрическую цепь. Если каким-либо способом деформировать пластинку, на электродах появляются электрические заряды (*прямой пьезоэффект*), если к пластинке подвести переменное напряжение, она будет совершать механические колебания (*обратный пьезоэффект*). Амплитуда этих колебаний становится максимальной, когда частота напряжения совпадает с частотой собственных механических колебаний пластинки. При этом из-за пря-

мого пьезоэффекта ток в цепи, содержащий кварцевую пластинку, будет максимальным.

Эквивалентная схема пьезоэлектрического резонатора изображена на рис. 8.20, а. Параметры  $L_{кв}$ ,  $C_{кв}$ ,  $R_{п.кв}$  учитывают свойства кварцевой пластинки. Эти параметры имеют значения, которые не встречаются в обычных колебательных контурах. Так, эквивалентная

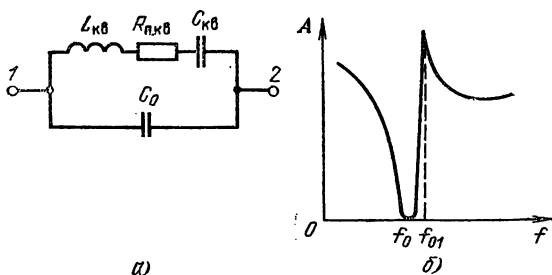


Рис. 8.20. Эквивалентная схема и характеристика затухания однорезонаторного кварцевого фильтра

индуктивность кварцевой пластинки достигает десятка генри, емкость не превышает десятых долей пикофарада, а активное сопротивление измеряется единицами и десятками ом. Вследствие этого эквивалентная добротность контура получается весьма высокой (десятки тысяч), а полоса пропускания — очень узкой (сотые доли процента от резонансной частоты). Параметр  $C_0$  учитывает емкость между электродами, нанесенными на пластинку кварца. Эта емкость обычно составляет несколько единиц или десятков пикофарад. Из-за наличия  $C_0$  кварцевый резонатор имеет две резонансные частоты:  $f_0$ , соответствующую резонансу в последовательном контуре  $L_{кв}C_{кв}R_{п.кв}$ , и  $f_{01}$ , соответствующую резонансу в параллельном контуре  $L_{кв}C_3R_{п.кв}$ , где  $C_3 = C_{кв}C_0/(C_{кв} + C_0)$ . Поскольку  $C_3 < C_{кв}$ , частота  $f_{01} > f_0$ , однако расхождение между частотами  $f_0$  и  $f_{01}$  очень небольшое. Разность частот  $f_{01}$  и  $f_0$  определяет ширину полосы пропускания кварцевого фильтра. Так как частота  $f_{01}$  зависит от емкости  $C_3$ , а следовательно, от  $C_0$ , полосу пропускания фильтра можно регулировать в небольших пределах путем изменения  $C_0$ . Примерный вид частотной характеристики затухания кварцевого фильтра с одним резонатором показан на рис. 8.20, б.

Для фильтров сосредоточенной избирательности часто применяются схемы, содержащие несколько кварцевых резонаторов. При этом удается получить более широкие полосы пропускания (единицы килогерц).

Достоинствами кварцевых фильтров являются: широкий диапазон рабочих частот (до 20 МГц и выше), возможность получения почти прямоугольных характеристик затухания, высокая стабильность этих характеристик. К недостаткам можно отнести невысокую механическую прочность, трудность обработки кварцевых пластинок, относительно высокую стоимость.

Магнитоотрикативные ФСИ (рис. 8.21) состоят из входного  $P_{вх}$  и выходного  $P_{вых}$  электромеханических преобразователей, механических резонаторов  $МР$  и соединяющих их связей  $С$ . Принцип действия фильтра в преобразовании электрических колебаний в механические, фильтрации механических колебаний и обратном преобразовании их в электрические. Преобразование колебаний осуществляется элементами  $P_{вх}$  и  $P_{вых}$ , работа которых основана на эффекте магнитоотрикативности. *Прямой эффект магнитоотрикативности* состоит в том, что, если ферромагнитный стержень поместить в переменное магнитное поле, его длина будет периодически меняться. Если механически воздействовать на этот стержень, будет изменяться его магнитная проницаемость, т. е. проявится *обратный эффект магнитоотрикативности*.

Электромеханический преобразователь состоит из индуктивной катушки, внутри которой находится сердечник из никеля, и постоянных магнитов, создающих начальную намагниченность сердечника. Под действием внешнего магнитного поля, создаваемого входным током, длина сердечника периодически изменится, т. е. в нем возникают механические колебания. Эти колебания передаются механическим резонаторам, представляющим собой цепочку металлических пластинок, дисков

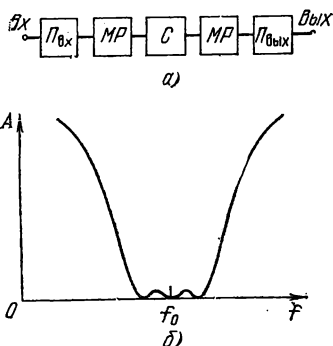


Рис. 8.21. Структурная схема и характеристика затухания магнитоотрикативного фильтра



или шариков, соединенных между собой никелевыми стержнями-связками. Каждый резонатор эквивалентен колебательному контуру, а связка — емкости связи между контурами. Последний резонатор возбуждает колебания в сердечнике катушки выходного электромеханического преобразователя. При этом благодаря обратному эффекту магнитострикции в обмотке катушки индуцируется ЭДС выходного сигнала. Характеристика затухания фильтра изображена на рис. 8.21, б. Прямоугольность характеристики может быть получена очень высокой. Полоса пропускания фильтра обычно несколько килогерц.

Достоинствами магнитострикционных фильтров являются: малые размеры и масса, высокая стабильность характеристик, устойчивость к ударным нагрузкам.

К недостаткам можно отнести сложность изготовления и регулировки, относительно высокую стоимость, ограниченность частотного диапазона несколькими единицами мегагерц.

### 8.7. Понятие о цифровых фильтрах

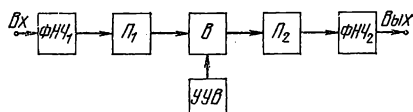
Любой электрический фильтр предназначен для преобразования формы электрических сигналов, поступающих на его вход, для исключения из их спектра (фильтрации) гармонических составляющих с определенными частотами. Если преобразуемые сигналы непрерывно изменяются во времени, их, а также соответствующие электрические фильтры называют *аналоговыми*. Получение заданных значений ряда параметров аналоговых фильтров, например крутизны склонов АЧХ, нередко приводит к значительному усложнению схем или вообще оказывается нереализуемым.

Сравнительно просто эта задача решается с помощью *цифровых фильтров* — устройств, в которых для подавления одних и выделения других частотных составляющих сложного электрического колебания используются вычислительные устройства.

Упрощенная структурная схема цифрового фильтра показана на рис. 8.22. Входной сигнал через  $\Phi НЧ_1$  поступает на аналого-цифровой преобразователь  $П_1$ , в котором непрерывный сигнал преобразуется в цифровой. Через равные промежутки времени (такты), определяемые *генератором тактовых импульсов* (на схеме этот генератор не показан), производится кодирование некото-

рым числом мгновенного значения напряжения входного сигнала. Последовательность этих чисел поступает на вычислитель  $B$ , определяющий спектр сигнала и исключаяющий из него гармонические составляющие, расположенные вне заранее обусловленного частотного интервала. Иначе говоря, вычислитель как бы формирует характеристику того или иного фильтра. Работой вычис-

Рис. 8.22. Структурная схема, поясняющая смысл цифровой фильтрации



лителя управляет узел управления  $УУВ$ , который в общем случае может представлять собой отдельную электронную вычислительную машину (ЭВМ).

Выходные сигналы вычислителя в виде последовательности чисел поступают на цифроаналоговый преобразователь  $П_2$ , формирующий непрерывный сигнал из цифрового. Этот сигнал через фильтр нижних частот  $ФНЧ_2$  подается на выход устройства.

Основными достоинствами цифровых фильтров является возможность быстрого изменения характеристик, например полосы пропускания, высокая стабильность этих характеристик, возможность работы на очень низких частотах и т. д.

Важно отметить, что такие фильтры изготавливаются на цифровых интегральных микросхемах, вследствие чего они могут быть компактными, недорогими и высоконадежными устройствами.

## 8.8. Применение электрических фильтров для задержки сигналов

В радиолокационных, радионавигационных и других радиотехнических устройствах часто необходимо задерживать сигнал во времени без существенного изменения его формы. Это можно сделать с помощью четырехполосника, представляющего собой многозвенный фильтр нижних частот (рис. 8.23,  $a$ ), называемый *искусственной линией задержки*. Благодаря влиянию реактивных элементов амплитуда напряжения на выходе линии достигает максимума через некоторое время после воздейст-

вия напряжения на ее вход. Время задержки  $t_3 \approx n \sqrt{LC}$ , где  $n$  — число Г-образных звеньев в линии.

Для неискаженной передачи сигналов, проходящих через линию задержки, необходимо, чтобы все спектральные составляющие задерживались на одинаковое время. Это возможно, как указывалось в гл. 3, при условии, что фазочастотная характеристика четырехполюсника линейна. Можно показать, что такая характеристика

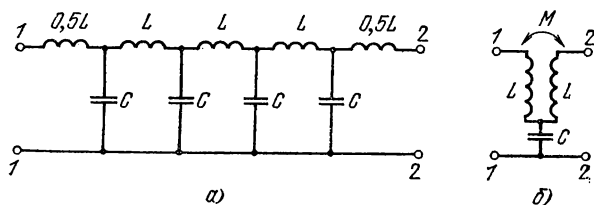


Рис. 8.23. Искусственные линии задержки:

а — со звеньями типа « $k$ »; б — звено линии задержки типа « $m$ »

ФНЧ приблизительно линейна в области частот  $0 \dots 0,5f_c$ , а на частотах  $0,5f_c < f < f_c$  имеет резко выраженную нелинейность. Поэтому для уменьшения искажений сигналов частота среза линии задержки должна быть, по крайней мере, вдвое больше, чем максимальная частота спектра сигнала. С этой целью приходится уменьшать значения  $L$  и  $C$  линии, что приводит к уменьшению времени задержки, как это следует из выражения для  $t_3$ .

Увеличить время задержки искусственной линии можно путем увеличения числа звеньев, однако большое число звеньев приводит к усложнению конструкции и увеличению активных потерь в линии. Другим способом увеличения времени задержки при том же числе звеньев (или уменьшения их числа при том же времени задержки) является некоторое усложнение схемы звеньев (рис. 8.23, б). Катушки каждого звена располагаются так, чтобы между ними возникла индуктивная связь. При определенном коэффициенте связи каждое звено оказывается эквивалентным фильтру типа « $m$ », у которого фазочастотная характеристика линейна в большей области частот, чем у фильтра типа « $k$ ». В линиях задержки с такими звеньями время задержки при прочих равных усло-

виях примерно на 30 % больше, чем в линии со звеньями типа « $k$ ».

В рассмотренных линиях время задержки обычно не превышает 15 ... 20 мкс. Больше время можно получить в *ультразвуковых линиях задержки*. В них подводимые электрические сигналы сначала преобразуются в ультразвуковые колебания с помощью пьезоэлектрических или магнитострикционных преобразователей. Затем эти колебания передаются в звукопровод, в котором они распространяются со скоростью примерно в  $10^5$  раз меньше скорости распространения электрических сигналов, и с помощью выходного преобразователя, аналогичного входному, преобразуются в электрические колебания.

Звукопроводы изготавливают в виде ленты или проволоки из специальных сплавов, а также брусков из плавленого кварца с нанесенными на поверхность бруска электродами. В таких звукопроводах удается получить время задержки до нескольких миллисекунд благодаря значительному увеличению длины пути ультразвуковых волн из-за многократного внутреннего отражения их от стенок бруска.

Ультразвуковые линии задержки применяют на частотах до 20...60 МГц.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 8.1. Проведите классификацию электрических фильтров по пропускаемым частотам.
- 8.2. Преобразуйте два Г-образных звена фильтра в Т-образное и П-образное звенья.
- 8.3. Перечислите основные параметры фильтров и укажите их смысл.
- 8.4. Чем отличаются друг от друга идеальные и реальные характеристики фильтров?
- 8.5. Запишите условие пропускания реактивного фильтра и докажите с его помощью, что четырехполосник, содержащий только емкости, фильтром не является.
- 8.6. Объясните частотную зависимость характеристического сопротивления Т-образного ФНЧ.
- 8.7. Пользуясь схемой Т-образного звена ФНЧ, поясните, как работает фильтр.
- 8.8. Как влияет нагрузочное сопротивление на форму АЧХ ФНЧ?
- 8.9. Определите элементы Г-образного, П-образного и Т-образного звеньев ФНЧ, если  $R_n = 600 \text{ Ом}$ ,  $f_c = 1000 \text{ Гц}$ .
- 8.10. Поясните по схеме работу ФВЧ.
- 8.11. Выполните п. 8.9 для звеньев ФВЧ.
- 8.12. Начертите схему Г-образного ПФ и объясните, как он работает.
- 8.13. Выполните п. 8.12 для звена РФ.

- 8.14. Определите элементы Т-образного полосового фильтра, если  $f_{c1}=10$  кГц,  $f_{c2}=12$  кГц,  $R_n=300$  Ом.
- 8.15. Объясните, как работает последовательно-производный ФНЧ типа « $m$ ».
- 8.16. Как влияет параметр  $m$  на частотные зависимости характеристического сопротивления и затухания ФНЧ?
- 8.17. Начертите схемы и объясните работу RC-фильтров нижних и верхних частот.
- 8.18. Поясните принцип работы активного RC-фильтра.
- 8.19. Объясните устройство и принцип работы пьезоэлектрических и магнитострикционных фильтров. Начертите частотные характеристики затухания этих фильтров.
- 8.20. Поясните принцип работы цифрового фильтра. Укажите достоинства таких фильтров.
- 8.21. От чего зависит время задержки в искусственных LC-линиях задержки?
- 8.22. Объясните устройство и работу ультразвуковых линий задержки.

## ГЛАВА 9.

### НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

В предшествующих главах рассматривались линейные электрические цепи с постоянными во времени параметрами. Как указывалось в гл. 3, особенность таких цепей состоит в том, что для них справедлив принцип суперпозиции.

Однако многие важные радиотехнические преобразования (модуляция, детектирование, преобразование спектра сигнала и т. д.) осуществляются с помощью нелинейных либо линейных цепей с переменными параметрами. Последние обычно называются параметрическими цепями. Примеры таких цепей, способы их математического описания и принципы их применения в радиотехнике являются предметом рассмотрения в данной главе. Основное внимание при этом уделяется следующим вопросам:

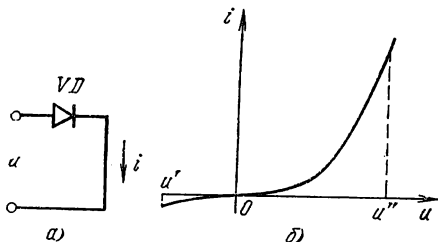
1. Что представляет собой нелинейная цепь и каким образом ее можно и нужно описывать при решении различных задач радиотехники?
2. Какие возможности предоставляют нелинейные цепи при решении основной проблемы радиотехники — передачи информации с помощью электромагнитных волн?
3. Что представляет собой параметрическая цепь?
4. Для каких целей и каким образом могут быть использованы параметрические цепи в радиотехнике?

#### 9.1. Нелинейные электрические цепи

Уже упоминалось, что любая электрическая цепь состоит из линейных и нелинейных элементов. Приведем

примеры нелинейных элементов и рассмотрим некоторые применяемые в настоящее время способы их описания<sup>1</sup>. Уметь математически описывать такие элементы необходимо всякий раз, когда требуется провести анализ воздействия электрического сигнала на нелинейные электрические цепи. Например, если требуется количественно оценить изменение формы электрического сигнала при прохождении через имеющуюся нелинейную цепь или

Рис. 9.1. Нелинейная цепь и вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника  $VD$



определить условия, при которых желаемый эффект в цепи оказывается наибольшим.

При выборе способа описания все нелинейные элементы удобно разделить на два класса: нелинейные двухполюсники и нелинейные четырехполюсники. Примерами нелинейных двухполюсников являются электровакуумные и полупроводниковые диоды, индуктивные катушки с сердечниками, нелинейные резисторы и конденсаторы. Типичными нелинейными четырехполюсниками являются электронные лампы и транзисторы. Рассмотрим способы описания различных нелинейных элементов.

**Нелинейный двухполюсник.** Простейшая нелинейная цепь, содержащая нелинейный двухполюсник, состоит из источника ЭДС и резистора с нелинейным сопротивлением, т. е. элемента, сопротивление которого не является постоянным, а зависит от приложенного напряжения. На рис. 9.1, а приведен пример такой цепи, в которой нелинейным элементом является полупроводниковый диод  $VD$ . Нелинейность диода проявляется в том, что ток  $i$ , проходящий через диод, *нелинейно* зависит от напряжения  $u$  на его электродах. Эта зависимость называется *вольт-амперной характеристикой*

$$i = f(u). \quad (9.1)$$

На рис. 9.1, б приведен пример вольт-амперной характеристики германиевого диода. В интервале значений на-

<sup>1</sup> См. также [3].

пряжения  $u$  от  $u'$  до  $u''$  этот график существенно отличается от прямой линии, представляющей линейную зависимость между величинами  $u$  и  $i$ .

Другим примером нелинейного двухполюсника может служить туннельный диод. Из вольт-амперной характеристики диода (рис. 9.2, а) видно, что форму тока можно описать сложной нелинейной функцией при условии, что напряжение меняется в интервале от 0 до  $u'''$ .

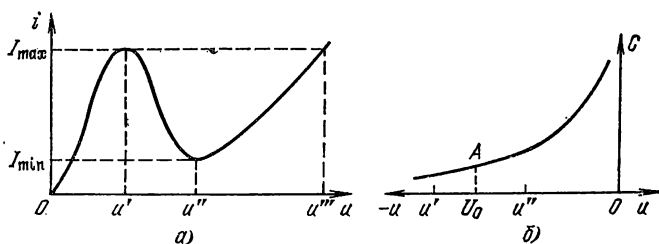


Рис. 9.2. Характеристики нелинейных двухполюсников:

а — вольт-амперная характеристика туннельного диода; б — зависимость емкости варикапа от напряжения

Следует отметить, что в рассматриваемых в данной главе цепях нелинейные элементы не обязательно характеризуются нелинейной зависимостью именно тока от напряжения или наоборот. Такая зависимость может иметь место и между другими параметрами двухполюсника. Например, в полупроводниковых диодах, называемых варикапами, имеется нелинейная зависимость емкости закрытого  $p$ - $n$ -перехода от приложенного к диоду обратного напряжения. Пример графика такой зависимости приведен на рис. 9.2, б. Математически такая зависимость должна записываться следующим образом:  $C_{\text{в}} = f_{\text{в}}(u)$ . Зависимость емкости перехода от приложенного к нему напряжения используется в настоящее время для электронной настройки колебательных контуров. Однако в классе двухполюсников наиболее важной и часто используемой в радиотехнике является нелинейная зависимость (9.1), которая будет подробнее рассмотрена в последующих параграфах данной главы.

**Нелинейный четырехполюсник.** Схема простейшей нелинейной цепи, содержащей нелинейный четырехполюсник, изображена на рис. 9.3, а. Нелинейным элементом здесь является транзистор  $VT$ . Нелинейность проявляется в том, что статические характеристики транзистора

оказываются нелинейными функциями. Так, на рис. 9.3, б приведен график входной статической характеристики транзистора при включении его по схеме с общим эмиттером. Эта характеристика представляет собой зависимость тока базы  $i_b$  от напряжения  $u_{бэ}$  между базой и эмиттером. Из графика видно, что если напряжение  $u_{бэ}$  изменяется в интервале от 0 до 300 мВ, то значения

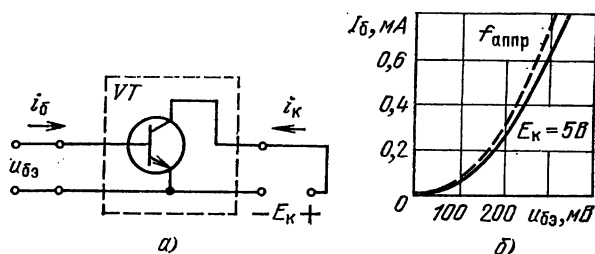


Рис. 9.3. Нелинейная цепь и входная статическая характеристика нелинейного четырехполюсника  $VT$

тока  $i_b$  и напряжения  $u_{бэ}$  связаны нелинейно, т. е.  $i_b = f_b(u_{бэ})$ . При этом функция  $f_b$  нелинейна. Нелинейной является также выходная статическая характеристика, которая математически описывается функцией  $i_к = f_к(E_к)$ . Важной характеристикой рассматриваемой цепи является сквозная статическая характеристика, представляющая собой зависимость выходного тока  $i_к$  от напряжения на входе  $u_{бэ}$ . Эта зависимость также называется нелинейной.

Следует отметить, что и электронные и полупроводниковые приборы необходимо рассматривать как нелинейные элементы лишь в тех случаях, когда напряжение между их электродами изменяется в достаточно широких пределах. Например, из графика, приведенного на рис. 9.3, б, следует, что при изменении напряжения  $u_{бэ}$  в интервале от 0 до 200 мВ, зависимость между напряжением  $u_{бэ}$  и током  $i_b$  приближенно можно считать квадратичной, т. е.  $i_b = au_{бэ}^2$ ; если же  $u_{бэ}$  меняется в интервале от 200 до 250 мВ, то эта зависимость практически линейна.

Заметим, в заключение, что нелинейные цепи в общем случае могут содержать как нелинейные (диоды, транзисторы и т. д.), так и линейные элементы (конденсаторы, резисторы, катушки). В этом случае зависимость между токами и напряжениями в цепи или между дру-



гими ее параметрами также может оказаться нелинейной. Однако описать математически такую зависимость уже намного сложнее.

Важнейшая особенность любой нелинейной цепи состоит в том, что для нее несправедлив принцип суперпозиции. В этом можно убедиться на примере зависимости (9.1), приняв что  $f(u) = au^2$ . Тогда, если к двухполюснику с такой характеристикой подключить последовательно два источника напряжения с ЭДС  $u_1$  и  $u_2$ , то  $u = u_1 + u_2$ . В результате ток через двухполюсник, т. е. отклик цепи на суммарное воздействие  $i = f(u) = au^2 = a(u_1 + u_2)^2 = au_1^2 + 2au_1u_2 + au_2^2$ . В то же время при поочередном подключении источников напряжения  $i_1 = f(u_1^2) = au_1^2$ ,  $i_2 = f(u_2) = au_2^2$ . Теперь очевидно, что сумма этих откликов  $au_1^2 + au_2^2$  не совпадает с откликом на суммарное воздействие  $a(u_1 + u_2)^2$  из-за наличия слагаемого  $2au_1u_2$ , которое появляется только при одновременном подключении обоих источников напряжения.

**Математическое описание нелинейных элементов.** Каждый из рассмотренных нелинейных элементов характеризуется нелинейной зависимостью между некоторыми его параметрами (между напряжением и током, между напряжением и емкостью). Примеры графиков, иллюстрирующих эти зависимости, приведены на рис. 9.1 — 9.3. Однако для получения количественных результатов при расчетах или анализе нелинейных цепей такое графическое описание нелинейных элементов недостаточно. Необходимо уметь их описывать математически. Это означает, что для математического задания, например зависимости (9.1), необходимо указать явное выражение (формулу) для функции  $f(u)$ .

Существуют различные способы подбора таких функций. Один из наиболее часто применяемых состоит в том, чтобы аппроксимировать экспериментально полученную характеристику  $i \leftrightarrow u$  (для каждого устанавливаемого значения напряжения  $u$  измеряется значение тока  $i$ ; формулы для функций  $f(u)$  еще нет) подходящей функцией  $f_{\text{аппр}}(u)$ . Во многих случаях в качестве такой функции используется степенной полином порядка  $n$

$$f_{\text{аппр}}(u) = U_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \dots \\ \dots + a_n(u - U_0)^n, \quad (9.2)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — коэффициенты полинома. Существуют способы определения численных значений этих коэффи-

циентов, величины  $U_0$  и порядка  $n$  по экспериментально полученному графику зависимости  $i=f(u)$ . Например, из графика  $f_{\text{аппр}}(u)=au^2$  (рис. 9.3) следует, что аппроксимирующая функция  $f_{\text{аппр}}(u)$  достаточно точно описывает функцию  $f(u)$ , если  $u$  изменяется в пределах от 0 до 200 мВ.

## 9.2. Преобразование сигналов при прохождении через нелинейные цепи

Определим форму тока  $i(t)$  в цепи, если задана форма воздействующего на нее переменного напряжения

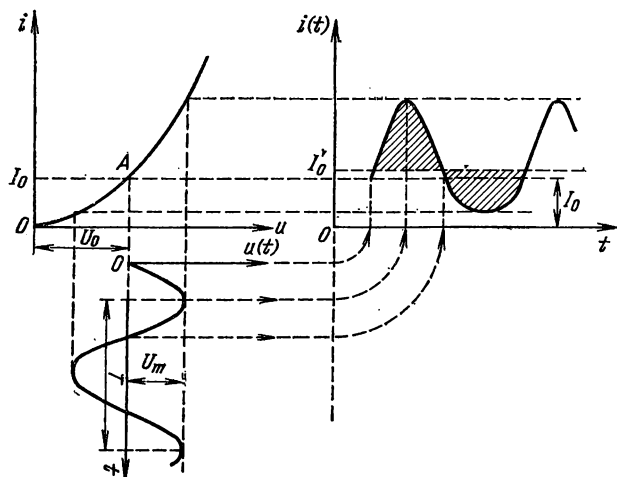


Рис. 9.4. Определение формы тока методом проекций

$u(t)$ . Наиболее широко используются два способа: графический и аналитический.

Графический способ определения формы тока в нелинейной цепи называют также методом проекций (рис. 9.4). Примем, что закон изменения напряжения  $u(t)=U_0+U_m \sin \omega t$ , где  $U_0$  — постоянная составляющая, а  $U_m$  — амплитуда гармонической составляющей воздействующего на нелинейный элемент напряжения. Нелинейный элемент при графическом способе должен быть представлен графиком функции  $i=f(u)$ , которая называется характеристикой элемента. Постоянная составляющая  $U_0$  называется *смещением* и определяет положение

рабочей точки  $A$  на характеристике нелинейного элемента. Под характеристикой изображается *реализация напряжения*, т. е. график функции  $u(t)$ . График  $i(t)$  получается в результате построения, аналогичного построению третьей проекции по двум данным (рис. 9.4, справа). При построении графика  $i(t)$  удобно сначала нанести его характерные точки — максимумы, минимумы, моменты пересечения уровня  $I_0$  — и лишь затем промежуточные точки. Если воздействующее напряжение  $u(t)$  является гармоническим колебанием с частотой  $\omega$ , то ток  $i(t)$  всегда периодическая функция с периодом  $T=2\pi/\omega$ , но иной, т. е. *искаженной формы*. Об искажении формы свидетельствует, в частности, тот факт, что постоянная составляющая  $I'_0$  тока не совпадает со значением  $I_0$ , которое имел бы ток при  $U_m=0$ , т. е. при наличии смещения  $U_0$  и отсутствии гармонической составляющей напряжения  $u(t)$ .

Графическим методом можно найти распределение напряжений в цепи, являющейся последовательным соединением резистора с постоянным сопротивлением  $R$  и нелинейного элемента с переменным сопротивлением  $R'$ , определяемым по вольт-амперной характеристике  $i=f(u)$  этого элемента. Необходимые построения показаны на рис. 9.5. Характеристика нелинейного элемента строится в координатах  $i, u$ . На оси абсцисс отмечается точка  $u=U$ , где  $U$  — напряжение, приложенное ко всей цепи. Из этой точки проводится прямая под углом  $\alpha$  к вертикальной оси. Угол  $\alpha$  определяется из условия  $\operatorname{tg} \alpha = kR$ , где  $k$  — масштабный коэффициент. Эта прямая изображает вольт-амперную характеристику линейного сопротивления  $R$ . Ордината точки пересечения прямой с вольт-

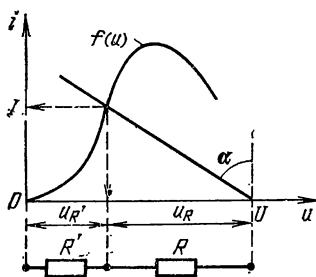


Рис. 9.5. Определение напряжений и тока в нелинейной цепи

амперной характеристикой нелинейного элемента определяет ток  $I$  в цепи, а ее абсцисса — напряжения на нелинейном элементе  $R'$  и резисторе  $R$ .

Аналогичным построением можно определить распределение напряжения на последовательном соединении двух нелинейных элементов с заданными графически вольт-амперными характеристиками.

Аналитический способ определения формы тока в нелинейной цепи основывается на следующих предположениях: нелинейная функция  $f(u)$  представляется в виде степенного полинома (9.2), где  $U_0$  определяет положение рабочей точки на характеристике нелинейного элемента; подводимое к нелинейной цепи напряжение  $u(t)$  является периодической функцией времени, которая представляется в виде тригонометрического ряда Фурье (2.11).

Пусть

$$u(t) = U_0 + U_{m1} \sin \omega_1 t \quad (9.3)$$

при любых значениях  $t$ ; кроме того, будем предполагать, что характеристика  $f(u)$  нелинейного элемента цепи, хорошо аппроксимируется полиномом второй степени в диапазоне значений аргумента  $u$  от  $U_0 - U_{m1}$  до  $U_0 + U_{m1}$ , т. е.

$$i = f(u) \approx f(U_0) + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2. \quad (9.4)$$

Подставляя (9.3) в (9.4), получаем

$$\begin{aligned} i(t) &\approx f(U_0) + a_1 U_{m1} \sin \omega_1 t + a_2 U_{m1}^2 \sin^2 \omega_1 t = \\ &= f(U_0) + a_1 U_{m1} \sin \omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 (1 - \cos 2\omega_1 t) = \\ &= f(U_0) + \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 + a_1 U_{m1} \sin \omega_1 t - \\ &\quad - \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Если опустить в (9.3) постоянное слагаемое  $U_0$ , определяющее положение рабочей точки на характеристике  $f(u)$  (рис. 9.6, а), то спектр напряжения  $u(t)$  (рис. 9.6, б) будет дискретным с одной спектральной линией на частоте  $\omega_1$ . Спектр тока  $i(t)$  (рис. 9.6, в) также дискретный, но содержит несколько спектральных линий на частотах  $\omega = 0$  (постоянная составляющая тока),  $\omega = \omega_1$  и  $\omega = 2\omega_1$ . Слагаемое с частотой  $2\omega_1$  в (9.5) называется второй гармоникой тока.

Если напряжение  $u(t)$  считать входным сигналом, а ток  $i(t)$  — выходным, то из рассмотренного только что примера следует важный вывод: спектр входного сигнала при прохождении через нелинейную цепь всегда изменяется; спектр выходного сигнала, как правило, содержит большее число спектральных линий (гармоник).

Итак, рассмотрен случай, когда нелинейная характе-

ристика представляется многочленом второй степени. При этом наивысшая частота в спектре отклика нелинейной цепи равна удвоенному значению частоты гармонического воздействия. Аналогично можно показать, что если характеристика нелинейного элемента представляется полиномом третьей степени, то наивысшая частота в спектре отклика равна утроенному значению частоты гармонического воздействия. В этом случае говорят, что

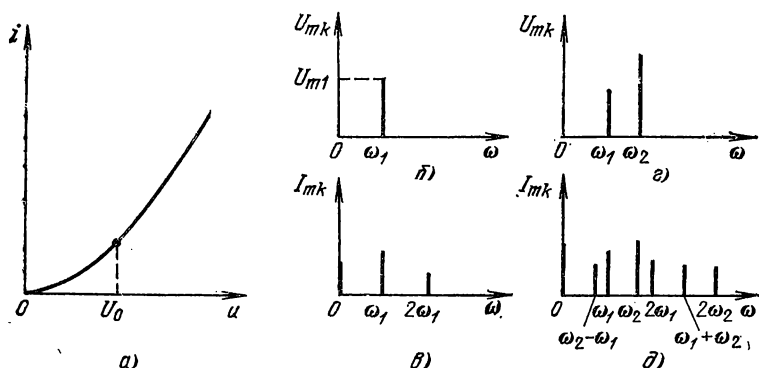


Рис. 9.6. Квадратичная характеристика нелинейной цепи *a* и спектры напряжения *б, в* и тока *г, д*

в спектре отклика нелинейной цепи имеется также и третья гармоника. Если характеристика элемента представляется полиномом степени  $n$ , то ток будет иметь ограниченный спектр, причем номер наивысшей гармоники совпадает со степенью полинома  $n$ . Из сказанного следует, что в общем случае при воздействии гармонического напряжения на нелинейное сопротивление с произвольной характеристикой ток в цепи будет иметь дискретный спектр, содержащий бесконечное число спектральных линий.

Рассмотрим теперь случай, когда воздействие на нелинейную цепь представляет собой сумму двух гармонических колебаний с разными частотами, а нелинейная характеристика представляет собой полином второй степени (9.4). При этом ток

$$i(t) = f(U_0) + a_1 [U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m2} \sin \omega_2 t] + \\ + a_2 [U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m2} \sin \omega_2 t]^2 = f(U_0) + \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 + a_1 U_{m1} \sin \omega_1 t + a_1 U_{m2} \sin \omega_2 t - \\
& \quad - \frac{1}{2} a_2 U_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t - \\
& - \frac{1}{2} a_2 U_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos (\omega_1 - \omega_2) t - \\
& \quad - a_2 U_{m1} U_{m2} \cos (\omega_2 + \omega_1) t.
\end{aligned}$$

Графики спектров воздействия для этого случая и отклика приведены на рис. 9.6, з, д. Из этих графиков следует, что спектр отклика на суммарное воздействие не равен сумме спектров откликов на каждое воздействие в отдельности. Действительно, выше было показано, что спектр отклика на воздействие в виде гармонического колебания с частотой  $\omega_1$  содержит три спектральные линии на частотах  $\omega=0$ ,  $\omega=\omega_1$  и  $\omega=2\omega_1$ . Аналогично спектр отклика на воздействие в виде гармонического колебания с частотой  $\omega_2$  будет содержать спектральные линии на частотах  $\omega=0$ ,  $\omega=\omega_2$ ,  $\omega=2\omega_2$ . При одновременном воздействии обоих колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в спектре тока появляются новые спектральные линии на частотах  $\omega_2 - \omega_1$  и  $\omega_1 + \omega_2$ , которые ранее отсутствовали. Эти частоты называются *комбинационными*; составляющие тока с комбинационными частотами появляются только при совместном воздействии на нелинейный элемент двух гармонических напряжений.

В общем случае, когда нелинейная характеристика представляется полиномом более высокой степени (в том числе и бесконечным рядом), ток в цепи будет содержать гармоники, частоты которых  $n\omega_1 + m\omega_2$  и  $|m\omega_2 - n\omega_1|$ , где  $n$  и  $m$  — целые неотрицательные числа, т. е., в частности, и нуль. Это означает, что в спектре тока могут присутствовать не только спектральные линии любых гармоник воздействующих напряжений, но и любые комбинационные частоты. Такие частоты могут быть как выше, так и ниже исходных  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

В настоящее время нелинейные цепи в радиотехнике широко используются для выполнения многих важных преобразований сигналов, в значительной мере обеспечивающих возможность передачи информации с помощью электромагнитных волн. Рассмотрим теперь примеры применения нелинейных цепей для осуществления лишь некоторых наиболее важных функций, необходимых при практическом построении систем передачи информации.

### 9.3. Применение нелинейных цепей в радиотехнике

**Умножение частоты.** Для умножения частоты необходимо из исходного гармонического колебания с частотой  $\omega_1$  получить также гармоническое колебание, частота которого кратна  $\omega_1$ .

Умножение частоты необходимо осуществлять в тех случаях, когда непосредственно получить гармоническое

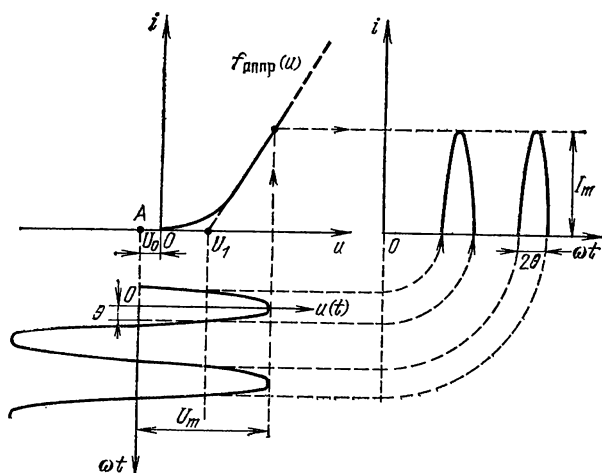


Рис. 9.7. Режим работы нелинейного элемента с отсечкой при умножении частоты

колебание с пужной частотой по каким-либо причинам неудобно.

Для этого исходное гармоническое колебание с частотой  $\omega_1$  подается в цепь, в которой в силу ее нелинейности возникает периодический ток сложной формы. Это и означает, что спектр такого тока содержит большое число гармоник, частоты которых кратны частоте  $\omega_1$ . Теперь остается только выделить гармонику тока с частотой желаемой кратности с помощью соответствующего фильтра.

Для получения необходимых количественных соотношений, рассмотрим нелинейный элемент с характеристикой  $i = f(u)$  (рис. 9.7).

В режиме умножения частоты к нелинейному элементу подводится напряжение со значительной амплитудой,

а положение рабочей точки  $A$  выбирается слева от сгиба характеристики и устанавливается подбором нужного смещения  $U_0$ . При этом характеристика нелинейного элемента оказывается существенно нелинейной, так что форма тока  $i(t)$  будет значительно отличаться от формы напряжения  $u(t)$  и, следовательно, содержать значительное число гармоник.

При большой амплитуде  $U_m$  подводимого к нелинейному элементу напряжения вполне допустимо его нелинейную характеристику  $f(u)$  аппроксимировать линейной ломаной функцией

$$f_{\text{аппр}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq U_1, \\ a(u - U_1) & \text{при } u > U_1; \end{cases}$$

график этой аппроксимирующей функции на рис. 9.7 изображен пунктирной линией. Конечно, такая аппроксимация приведет к появлению неточности при расчете формы тока  $i(t)$ ; однако при рассматриваемых условиях соответствующая погрешность оказывается незначительной, зато сложность вычислений резко уменьшается.

Для построения реализации тока  $i(t)$  можно воспользоваться графическим методом, изложенным в § 9.2. В соответствии с рис. 9.7 имеем

$$i(t) = 0 \quad \text{при } u(t) \leq U_1, \quad (9.6)$$

и

$$i(t) \approx f_{\text{аппр}}[u(t)] = a[u(t) - U_1] \quad \text{при } u(t) > U_1. \quad (9.7)$$

Поскольку  $u(t) = U_0 + U_m \cos \omega_1 t$ , то вместо (9.6) и (9.7) можно записать

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\omega_1 t - 2\pi k| \geq \theta, \\ a[(U_m \cos \omega_1 t + U_0) - U_1] & \text{при } |\omega_1 t - 2\pi k| < \theta, \end{cases}$$

где  $k$  — любое целое число, а  $\theta = \arccos [(U_1 - U_0)/U_m]$ , поскольку из условия  $U_0 + U_m \cos \omega_1 t \leq U_1$  следует  $\cos \omega_1 t \leq (U_1 - U_0)/U_m$ ; так что  $|\omega_1 t - 2\pi k| \geq \arccos [(U_1 - U_0)/U_m]$ . Очевидно, что максимальное значение тока  $I_m = a[U_0 + U_m - U_1] = aU_m[1 - (U_1 - U_0)/U_m] = aU_m(1 - \cos \theta)$ .

Таким образом, при гармоническом воздействии ток  $i(t)$  имеет импульсный характер. Остальная часть гармонического колебания как бы отсекается, поэтому такой режим работы нелинейного элемента называется *режимом с отсечкой*, а параметр  $\theta$  — *углом отсечки*. На оси



$\omega t$  длина интервала, на котором ток  $i > 0$ , равна  $2\theta$ ; так что угол отсечки  $\theta$  можно определить, найдя половину длительности этого интервала.

Поскольку ток  $i(t)$  периодическая функция времени с периодом  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ , то его можно представить в виде ряда Фурье (2.9)

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{mk} \sin(k\omega_1 t - \psi_k), \quad -\infty < t < +\infty.$$

Коэффициенты  $I_{mk}$  этого ряда являются амплитудами гармоник тока и могут быть вычислены по (2.4), (2.5) и (2.6), в которые вместо  $u(t)$  необходимо подставить выражение  $i(t)$ , определяемое (9.8). Опуская промежуточные вычисления, приведем лишь конечные результаты:

$$I_{mk} = \alpha_m(\theta) I_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.9)$$

т. е. амплитуды гармоник тока пропорциональны амплитуде  $I_m$  импульса тока. Коэффициенты пропорциональности  $\alpha_m(\theta)$  зависят от значения угла отсечки  $\theta$ . Графики, иллюстрирующие эту зависимость, приведены на рис. 9.8.

Если угол отсечки  $\theta = 0$ , то нелинейный элемент закрыт на протяжении всего периода  $T_1$  гармонического напряжения  $u(t)$ , так что  $i(t) = 0$ . При  $\theta = 180^\circ$  отсечка отсутствует, и форма тока практически совпадает с формой напряжения. В результате ток  $i(t)$  содержит только постоянную составляющую  $I_0$  и первую гармонику. Амплитуды всех остальных гармоник равны нулю (на рис. 9.8 коэффициенты пропорциональности  $\alpha_m(\theta) \rightarrow 0$  при  $\theta \rightarrow 180^\circ$  для  $m = 2, 3, \dots$ ).

Графики, приведенные на рис. 9.8, позволяют выбирать значение угла отсечки  $\theta$  для получения наибольшей амплитуды нужной гармоники тока. Так, при удвоении частоты желательно обеспечить угол отсечки  $\theta = 60^\circ$ , а при утроении —  $\theta = 40^\circ$ .

Электрическая схема умножения частоты приведена на рис. 9.9. В качестве нелинейного элемента (нелинейного четырехполюсника) здесь используется биполярный транзистор  $VT$ ; нелинейной является сквозная характеристика  $i_k = f(u_{об})$  зависимости тока коллектора  $i_k$  от напряжения между базой и эмиттером  $u_{об}$ . Гармоническое колебание  $u(t)$  с частотой  $\omega_1$ , приложенное к переходу база — эмиттер, управляет током коллектора в выходной цепи. Источник напряжения смещения  $U_0$  обеспечивает требуемое положение рабочей точки на харак-

теристике  $i_k = f(u_{эб})$ . Контур в выходной цепи настроен на частоту нужной гармоники  $n\omega_1$  тока коллектора  $i_k(t)$ .

Если добротность контура достаточно велика, то напряжение  $u_{вых}(t)$  пропорционально току этой гармоники и является гармоническим колебанием с частотой  $n\omega_1$ . Остальные гармоники тока коллектора отфильтровываются, так как сопротивление контура на их частотах практически равно нулю.

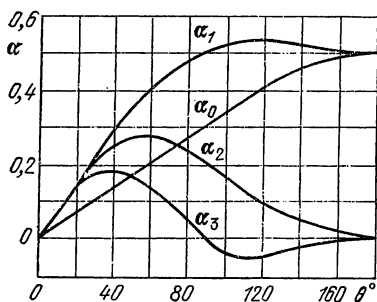


Рис. 9.8. Коэффициенты пропорциональности при разложении импульсов тока в ряд Фурье как функции от угла отсечки

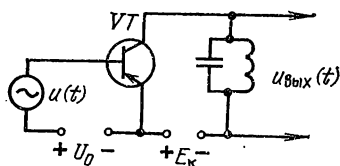


Рис. 9.9. Умножитель частоты на биполярном транзисторе

Следует подчеркнуть, что с увеличением коэффициента кратности  $n$  максимальная амплитуда  $n$ -й гармоники тока уменьшается. Поэтому изображенная на рис. 9.9 схема практически используется для умножения частоты лишь в 2, 3, 4 раза. При необходимости получения больших значений коэффициента кратности подобные умножители включают друг за другом последовательно. Например, для умножения частоты в 8 раз ставят последовательно два умножителя с коэффициентами кратности 4 и 2 или три с одним и тем же коэффициентом кратности, равным 2.

**Амплитудная модуляция.** В гл. 2 было подчеркнуто, что модуляция является важным преобразованием несущего колебания, позволяющим перенести спектр подлежащего передаче низкочастотного электрического сигнала на более высокие частоты. Именно благодаря этому переносу оказывается возможным излучать электромагнитные волны, параметры которых модулированы передаваемым сообщением. При этом было отмечено, что на-

и более часто в настоящее время в радиотехнике используются следующие три вида модуляции: амплитудная (АМ), частотная (ЧМ) и фазовая (ФМ). Проиллюстрируем возможности применения нелинейных электрических цепей для получения модулированных высокочастотных колебаний.

Модуляция колебания высокой частоты состоит в том, что в результате определенного воздействия на это колебание модулирующий сигнал оказывается «запечатленным» в изменениях его амплитуды (при АМ), фазы (при ФМ) или частоты (при ЧМ).

В гл. 1 отмечалось, что модулированный радиосигнал формируется в специальном устройстве, называемом модулятором. Модулятор должен иметь два входа и один выход (рис. 9.10). Рассмотрим кратко принципы построения таких устройств на основе использования нелинейных элементов; ограничимся при этом случаем амплитудной модуляции.

При амплитудной модуляции в соответствии с § 2.6 необходимо обеспечить такое воздействие модулирующего сигнала  $u(t)$  на высокочастотное гармоническое колебание  $s(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \psi)$ , при котором сигнал  $s_{\text{АМ}}(t)$  на выходе модулятора

$$s_{\text{АМ}}(t) = [1 + m u(t)] U_m \sin(\omega_0 t + \psi), \quad (9.10)$$

где  $m = \alpha_{\text{АМ}} / U_m$ .

Из (9.10) следует, что при формировании сигнала  $s_{\text{АМ}}(t)$  необходимо *перемножить* высокочастотное колебание  $s(t)$  на функцию времени  $[1 + m u(t)]$ . Это означает, что модулятор при амплитудной модуляции может быть реализован как перемножающее устройство. К настоящему времени предложено много радиотехнических устройств, в том числе и на интегральных схемах, осуществляющих операцию перемножения двух сигналов (напряжений, напряжения и тока, токов).

Одним из широко используемых в настоящее время является также способ получения АМ сигналов с помощью нелинейных цепей. Его сущность состоит в следующем. Сумму двух перемножаемых напряжений подают на вход цепи, в силу нелинейности которой ток будет иметь форму, отличную от формы действующего напряжения. Это означает, что в составе тока имеются составляющие, которых нет в составе действующего на цепь напряжения. Оказывается, что нелинейную цепь можно

построить таким образом, чтобы среди новых составляющих тока оказалась такая, которая пропорциональна произведению обоих напряжений. Если такая цепь найдена, то для получения АМ колебания нужно из суммы всех составляющих тока в цепи *выделить* (отфильтровать) ту, которая пропорциональна произведению мгновенных значений несущего колебания и модулирующего сигнала  $[1 + m u(t)]$ .

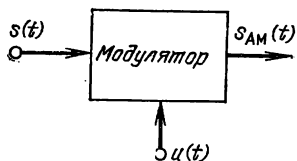


Рис. 9.10. Модулятор:  $s(t)$  — высокочастотное несущее колебание;  $u(t)$  — низкочастотный модулирующий сигнал;  $s_{AM}(t)$  — амплитудно модулированное высокочастотное колебание

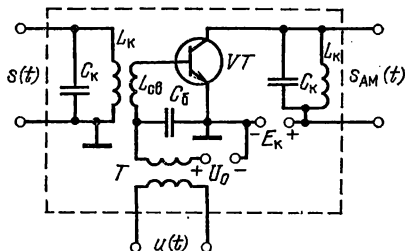


Рис. 9.11. Практическая схема формирования АМ сигнала нелинейным способом

Одна из возможных практических схем формирования АМ сигнала нелинейным способом изображена на рис. 9.11. Контуры на входе и на выходе настроены на частоту несущего колебания  $s(t)$ . Транзистор  $VT$  (четырёхполосник) выполняет роль нелинейного элемента. Его нелинейной характеристикой, используемой в данном модуляторе, является сквозная характеристика  $i_k = f(u_{бэ})$ . Положение рабочей точки  $A$  определяется напряжением смещения  $U_0$ . Это напряжение обеспечивает режим работы транзистора с отсечкой. При такой схеме включения напряжение  $u_{бэ}$  пропорционально сумме напряжений  $s(t)$  и  $u(t)$ . Для определения формы тока  $i_k$  в цепи коллектора транзистора воспользуемся графическим методом, изложенным в § 9.2. Соответствующие построения приведены на рис. 9.12, *а, б, в*. При работе транзистора с отсечкой ток коллектора имеет вид последовательности импульсов. Частота следования  $\omega_c$  импульсов совпадает с частотой  $\omega_0$  высокочастотного сигнала  $s(t)$ . Их амплитуда меняется во времени в такт с изменением мгновенного значения модулирующего напряжения  $u(t)$ . Эти изменения фактически обусловлены изменением по-

ложения рабочей точки на нелинейной характеристике транзистора, которое определяется значением напряжения  $U_0 + u(t)$  и изменяется в соответствии с изменениями значения модулирующего напряжения  $u(t)$ .

Ток  $i_k(t)$  имеет сложную форму. В данном случае среди всех составляющих спектра особый интерес представляет первая гармоника, точнее, не одна гармоника,

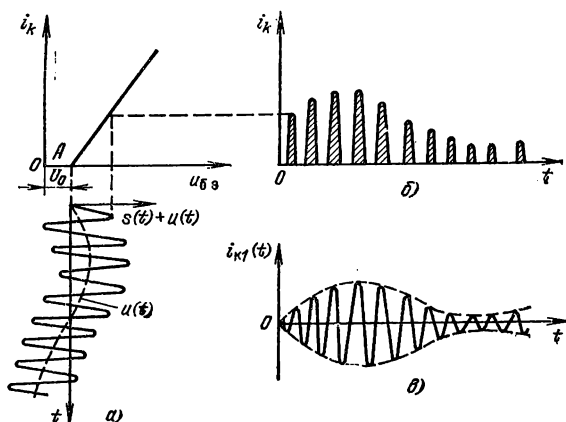


Рис. 9.12. Формирование АМ сигнала нелинейным способом:

$a$  — характеристика нелинейного элемента;  $б$  — ток в нелинейной цепи;  $в$  — составляющая тока в нелинейной цепи (занимает полосу частот около частоты первой гармоники)

а все составляющие спектра, частоты которых находятся в малой окрестности частоты первой гармоники. Если бы модулирующее напряжение было равно нулю, то амплитуда импульсов тока коллектора была бы постоянной, а амплитуда первой гармоники определялась бы (9.9) и была равна  $I_{m1}$ , т. е. пропорциональна амплитуде импульсов  $I_m$ . Выделив эту гармонику с помощью фильтра, включенного в цепи коллектора транзистора, получим на выходе модулятора немодулированное гармоническое колебание с частотой  $\omega_0$ ; но в рассматриваемом случае модулирующее напряжение  $u(t)$  меняется во времени. В результате амплитуды  $I_m$  импульсов тока коллектора меняются во времени, что в соответствии с (9.9) приводит к изменению во времени амплитуды первой гармоники тока коллектора. Причем можно записать, что  $I_{m1}(t) = (I_{m1} + \Delta I_{m1})$ , где  $\Delta I_{m1} = ku(t)$ . На контуре, настроенном

на частоту  $\omega_0$ , амплитуда напряжения, обусловленного первой гармоникой коллекторного тока,

$$\begin{aligned} U_m(t) &= I_{m1}(t) R_0 = (I_{m1} + \Delta I_{m1}) R_0 = \\ &= I_{m1} R_0 + k R_0 u(t) = U_{m1} \left[ 1 + \frac{k R_0}{U_{m1}} u(t) \right], \end{aligned}$$

где  $R_0$  — резонансное сопротивление контура;  $U_{m1} = I_{m1} R_0$  — амплитуда напряжения первой гармоники на контуре при нулевом модулирующем напряжении. На выходе модулятора будем иметь напряжение

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= U_m(t) \sin(\omega_0 t + \psi) = \\ &= U_{m1} \left[ 1 + \frac{k R_0}{U_{m1}} u(t) \right] \sin(\omega_0 t + \psi), \end{aligned}$$

что совпадает с (9.10).

Таким образом, представленная на рис. 9.11 практическая схема действительно позволяет получить амплитудно-модулированный сигнал. В радиотехнике используют и другие схемы модуляторов, реализующие амплитудную модуляцию на основе применения нелинейных электрических цепей.

**Детектирование** — выделение модулирующего сигнала из высокочастотного модулированного колебания. Детектирование обратное модуляции; поэтому вместо термина «детектирование» часто используют термин «демодуляция». На примере АМ сигналов рассмотрим возможности применения нелинейных электрических цепей для детектирования радиосигналов.

Амплитудно-модулированное колебание

$$s_{AM}(t) = U_m [1 + m u(t)] \sin(\omega_0 t + \psi)$$

должно быть подано на вход нелинейной цепи; на выходе же этой цепи должно быть колебание (напряжение, ток), пропорциональное модулирующему сигналу  $u(t)$ . В этом случае говорят, что в данной нелинейной цепи АМ колебание детектируется; такую цепь называют *амплитудным детектором* или демодулятором АМ сигнала. Рассмотрим более подробно одну из наиболее распространенных нелинейных цепей, применяемую для детектирования АМ колебания.

Основным элементом амплитудного детектора является нелинейный двухполюсник, в качестве которого чаще всего используется полупроводниковый диод. Если к входу нелинейной цепи (рис. 9.13) подключить источник

напряжения  $s_{AM}(t)$ , то ток в резисторе  $R$  будет проходить только при положительных полупериодах напряжения  $s_{AM}(t)$  (угол отсечки равен  $90^\circ$ ); следовательно, и напряжение  $u_{вых}(t)$  на резисторе  $R$  будет иметь такую же форму (рис. 9.13, б).

При отсутствии модуляции, что имеет место при  $m=0$ , амплитуды импульсов тока в резисторе  $R$  одинаковы и пропорциональны амплитуде  $U_m$  напряжения на

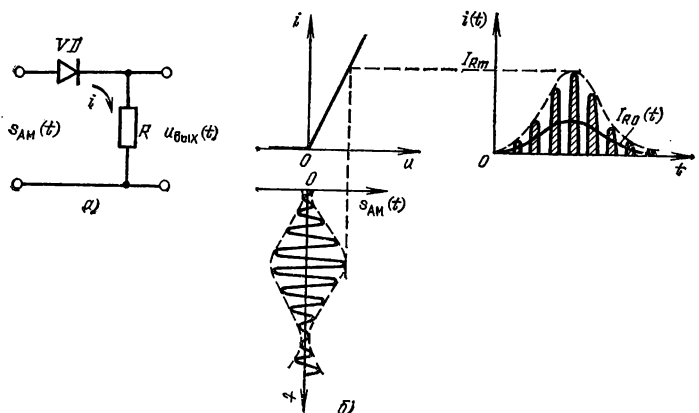


Рис. 9.13. Детектирование АМ колебания:  
а — нелинейная цепь; б — форма тока  $i(t)$  в резисторе  $R$

входе, а именно  $I_{Rm}=U_m/R$ . Среднее значение тока на интервале времени, совпадающем с длительностью периода высокочастотного колебания  $T_0=2\pi/\omega_0$ , при этом определяется (9.9), т. е.  $I_{R0}=\alpha_0(\theta)I_{Rm}=0,34I_{Rm}$  (значение коэффициента  $\alpha_0$  при угле отсечки  $\theta=90^\circ$  можно найти по графику рис. 9.8). Следовательно,  $I_{R0}=\alpha_0I_{Rm}=\alpha_0U_m/R$ , т. е. составляющая  $I_{R0}$  тока  $i(t)$  в резисторе  $R$  пропорциональна амплитуде подводимого к входу цепи напряжения.

Если допустить, что амплитуда подводимого к цепи колебания  $s_{AM}(t)$  меняется во времени, то составляющая  $I_{R0}$  также будет меняться во времени, оставаясь пропорциональной амплитуде подводимого к цепи напряжения, т. е.

$$I_{R0}(t) = \frac{\alpha_0}{R} U_m [1 + m u(t)] = \frac{\alpha_0}{R} U_m + \frac{\alpha_0 m}{R} U_m u(t). \quad (9.11)$$

Второе слагаемое в (9.11) пропорционально модулирующему напряжению  $u(t)$ . Таким образом, детектирование АМ колебания в рассматриваемой нелинейной цепи будет осуществлено, если из тока  $i(t)$  выделить лишь одну его составляющую  $I_{RO}(t)$ , меняющуюся во времени медленно по сравнению с изменениями мгновенных значений тока  $i(t)$  (см. рис. 9.13, б). Для выделения составляющей  $I_{RO}(t)$  обычно используется  $RC$ -фильтр нижних частот, который включается в нелинейную цепь так, как это показано на рис. 9.14, а. Такую  $RC$ -цепь часто называют нагрузкой детектора. Физические процессы, определяющие форму напряжения  $u_{\text{вых}}(t)$  на выходе этой цепи, сначала ради простоты рассмотрим для немодулированного по амплитуде входного колебания.

Пусть  $u_{\text{вых}}(t)$  имеет некоторое фиксированное значение. Очевидно, что до тех пор, пока  $u_{\text{вх}}(t) < u_{\text{вых}}(t)$ , диод  $VD$  закрыт напряжением  $u_d(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t)$  и ток  $i_d(t) = 0$ . В этом случае можно считать, что источник сигнала  $u_{\text{вх}}(t)$  отключен от  $RC$ -цепи и конденсатор  $C$ , на котором имеется напряжение  $u_{\text{вых}}(t)$ , разряжается через резистор  $R$ . Напряжение  $u_{\text{вых}}(t)$  при этом уменьшается (участок  $AB$  графика на рис. 9.14, б), но в момент времени  $t_1$  становится справедливым обратное неравенство  $u_{\text{вх}}(t) > u_{\text{вых}}(t)$ . Диод  $VD$  при этом открывается и возникает ток  $i_d(t)$ . Проходя через конденсатор  $C$ , ток увеличивает его заряд, вследствие чего напряжение  $u_{\text{вых}}(t)$  на конденсаторе вновь увеличивается (отрезок  $BC$  на графике рис. 9.14, б). Постоянная времени заряда  $\tau_z = (R_d + R_i)$  при этом практически (при большом сопротивлении  $R$ ) определяется внутренним сопротивлением  $R_i$  источника входного сигнала, прямым сопротивлением  $R_d$  диода  $VD$  и емкостью конденсатора  $C$ . На интервале времени от  $t_2$  до  $t_3$  вновь выполняется неравенство  $u_{\text{вх}}(t) < u_{\text{вых}}(t)$ , так что диод закрыт, ток  $i_d(t) = 0$ , а конденсатор  $C$  вновь разряжается через сопротивление резистора  $R$  (участок  $CD$  на графике рис. 9.14). Постоянная времени разряда  $\tau_p = RC$  здесь определяется практически лишь сопротивлением резистора  $R$  и значением емкости конденсатора  $C$ . Этот процесс далее полностью повторяется. Следовательно, напряжение  $u_{\text{вых}}(t)$  будет изменяться во времени мало и его значение будет близко к  $U_{0 \text{ вых}}$  (см. рис. 9.14, б). Непосредственно из рис. 9.14, б следует, что в момент  $t_2$

$$U_{0 \text{ вых}} \approx u_{\text{вых}}(t_2) = U_m \cos \theta, \quad (9.12)$$

где  $\theta$  — угол отсечки тока диода.



Равенство (9.12) тем точнее, чем меньше меняется напряжение  $u_{\text{вых}}(t)$ , т. е. чем ближе оно к  $U_{0 \text{ вых.}}$ . Следовательно, напряжение на диоде  $VD$

$$u_{\text{д}}(t) = u_{\text{вх}}(t) - u_{\text{вых}}(t) = U_m \sin \omega_0 t - U_m \cos \theta = U_m (\sin \omega_0 t - \cos \theta).$$

Ток, проходящий через диод,

$$i_{\text{д}}(t) = \frac{u_{\text{д}}(t)}{R_{\text{д}}} = \frac{U_m}{R_{\text{д}}} (\sin \omega_0 t - \cos \theta)$$

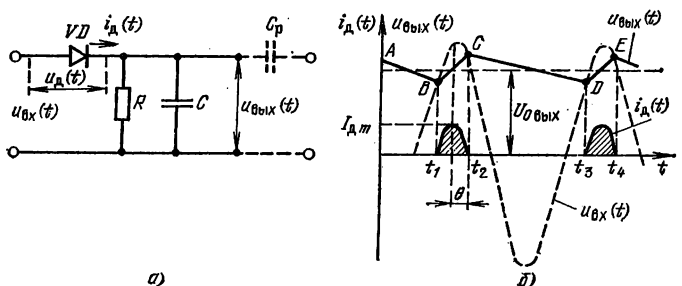


Рис. 9.14. Диодный детектор АМ колебания

достигает наибольшего значения  $I_{\text{дм}}$  в моменты, когда  $\sin \omega_0 t = 1$ , т. е.  $I_{\text{дм}} = (U_m/R_{\text{д}}) (1 - \cos \theta)$ . Поэтому постоянная составляющая тока  $i_{\text{д}}(t)$

$$I_{\text{д0}} = \alpha_0 I_{\text{дм}} = \frac{\alpha_0 U_m}{R_{\text{д}}} [1 - \cos(\theta)]. \quad (9.13)$$

Следовательно, постоянная составляющая напряжения на выходе

$$U_{0 \text{ вых}} = I_{\text{д0}} R = \frac{\alpha_0 U_m R}{R_{\text{д}}} (1 - \cos \theta). \quad (9.14)$$

Поскольку левые части равенств (9.12) и (9.14) равны, то равны и их правые, т. е.

$$\alpha_0 (1 - \cos \theta) / \cos \theta = R_{\text{д}} / R. \quad (9.15)$$

Левая часть (9.15) зависит от угла  $\theta$  отсечки тока, а правая часть постоянная величина. Отсюда следует, что угол отсечки в рассматриваемой нелинейной цепи не зависит от амплитуды  $U_m$  входного напряжения, а полностью определяется внутренним сопротивлением  $R_{\text{д}}$  диода и сопротивлением нагрузки  $R$ .

Таким образом, из (9.12) и (9.14) следует, что напряжение на выходе детектора, изображенного на рис. 9.14, а,  $u_{\text{вых}}(t) \approx U_{0\text{вых}}$  и пропорционально амплитуде  $U_m$  напряжения на входе, т. е. данный амплитудный детектор оказывается *линейным* по отношению к амплитуде  $U_m$ . Напомним, что для мгновенных значений этот детектор является нелинейным, так как содержит нелинейный элемент. Можно сказать, что высокочастотные составляющие тока  $i_d(t)$  здесь отфильтрованы  $RC$ -фильтром нижних частот и  $u_{\text{вых}}(t)$  практически определяется лишь составляющей  $I_{\text{до}}$ .

Рассмотрим теперь случай, когда напряжение  $u_{\text{вх}}(t)$  на входе детектора является колебанием  $s_{\text{АМ}}(t)$ , модулированным по амплитуде. В этом случае в (9.12) и (9.13) вместо неизменной амплитуды  $U_m$  необходимо подставить  $U_m[1 + m u(t)]$ , где  $u(t)$  — медленно меняющийся модулирующий сигнал. Тогда вместо (9.12) получим

$$U_{0\text{вых}}(t) \approx U_m [1 + m u(t)] \cos \theta = U_m \cos \theta + m \cos \theta U_m u(t). \quad (9.16)$$

Первое слагаемое в (9.16) является постоянной составляющей напряжения на выходе амплитудного детектора. Для его устранения сигнал с выхода детектора достаточно подавать через разделительный конденсатор  $C_p$  (см. рис. 9.14, а). Второе слагаемое в (9.16) пропорционально модулирующему сигналу  $u(t)$ . Тем самым доказано, что нелинейная цепь, изображенная на рис. 9.14, а и называемая обычно амплитудным детектором, действительно обеспечивает детектирование АМ колебания.

**Преобразование частоты** — это смещение спектра сигнала по шкале частот в ту или другую сторону, т. е. в область как более низких, так и более высоких частот. При таком смещении или переносе форма спектра не должна изменяться. Примеры преобразования частоты уже были приведены выше. Действительно, при формировании АМ сигнала спектр модулирующего сигнала, содержащего передаваемое сообщение, переносится в область более высоких частот для обеспечения возможности излучения получающегося радиосигнала в виде электромагнитных волн в линию передачи. При детектировании радиосигнала его спектр также переносится, но уже в обратную сторону — в область низких частот, что позволяет вновь выделить модулирующий сигнал, а следовательно, и передаваемое сообщение. При этом конечно

требуется, чтобы при таких преобразованиях форма сигнала, выделяемого при детектировании, совпадала с формой модулирующего сигнала при модуляции. Выполнение этого требования означает, что при передаче отсутствуют искажения. Необходимым условием неискаженной передачи сообщения является сохранение формы спектра управляющего сигнала при его переносе как в область высоких частот (при модуляции), так и при обратном переносе в область низких частот (при детектировании).

Общий принцип, обеспечивающий преобразование частоты, состоит в том, что подлежащий преобразованию сигнал умножается на гармоническое колебание с частотой  $\omega_r$ . Это колебание должно быть получено с помощью специального генератора, называемого *гетеродином*. Если в спектре сигнала содержится гармоника с частотой  $\omega_0$ , то при перемножении этих гармонических колебаний получим  $\sin \omega_0 t \sin \omega_r t = 0,5 [\cos (\omega_0 - \omega_r) t - \cos (\omega_0 + \omega_r) t]$ , т. е. на выходе перемножителя появятся гармонические колебания с суммарной  $\omega_0 + \omega_r$  и разностной  $\omega_0 - \omega_r$  частотами. Поскольку преобразуемый сигнал можно рассматривать как сумму его гармоник, то в устройстве перемножения каждая его гармоника будет умножена на гармоническое колебание с частотой  $\omega_r$ . Следовательно, каждая гармоника сигнала обуславливает появление на выходе перемножителя двух гармонических колебаний с суммарной и разностной частотами. Тем самым осуществляется преобразование всего спектра сигнала; это преобразование иллюстрируется графиками спектров, приведенными на рис. 9.15.

На рис. 9.15, *а* и *б* приведены графики АМ сигнала  $s_{AM}(t)$  и его спектр  $S_{вх}(\omega)$  с несущей частотой  $\omega_0$ , на рис. 9.15, *в* и *г* — графики дополнительного гармонического колебания  $u_r(t)$  с частотой  $\omega_r$  и его спектра. На рис. 9.15, *д* изображен спектр колебания на выходе перемножителя; он состоит из двух спектров, имеющих несущие частоты  $\omega_0 - \omega_r$  и  $\omega_0 + \omega_r$ . Если теперь сигнал с выхода перемножителя подать на вход полосового фильтра, амплитудно-частотная характеристика которого изображена на рис. 9.15, *е* (фильтр разностной или промежуточной частоты — ФПЧ), то на выходе будем иметь спектр  $S_{вых}(\omega)$ . Этот спектр изображен на рис. 9.15, *з*; по форме он совпадает с исходным спектром сигнала  $s_{AM}(t)$ , но сдвинут в область более низких частот на частоту  $\omega_r$ . На рис. 9.15, *ж* приведен график колебания на выходе

фильтра разностной частоты. Важно здесь подчеркнуть, что огибающая этого колебания, изображенная штриховой линией, полностью совпадает по форме с огибающей колебания  $s_{AM}(t)$ , а частота заполнения уменьшена на значение  $\omega_r$ .

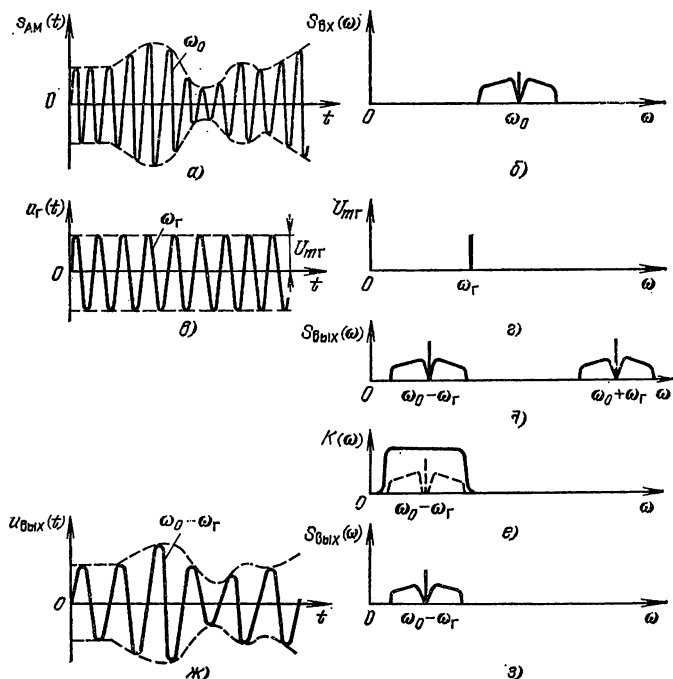


Рис. 9.15. Преобразование спектра АМ сигнала:

$a$  — АМ сигнал;  $b$  — спектр АМ сигнала;  $c$  — сигнал гетеродина;  $d$  — спектр сигнала гетеродина;  $e$  — спектр сигнала на выходе перемножителя;  $f$  — амплитудно-частотная характеристика фильтра разностной частоты;  $g$  — сигнал на выходе фильтра разностной частоты;  $h$  — спектр сигнала на выходе фильтра разностной частоты;  $z$  — спектр сигнала на выходе фильтра разностной частоты

Описанное преобразование спектра сигнала осуществляется в устройстве, называемом *преобразователем частоты* (рис. 9.16). В качестве промежуточной может быть выбрана разностная, либо суммарная частота. Спектры в точках  $b$ ,  $g$ ,  $d$ ,  $z$ ,  $e$  рис. 9.16 изображены соответственно на рис. 9.15.

В практических схемах преобразователей для умножения частоты используют нелинейные элементы (полупро-

водниковые диоды, транзисторы, электронные лампы). Одна из практических схем преобразователя частоты приведена на рис. 9.17. Функции переменного множителя выполняет транзистор, вернее, его входная нелинейная цепь: переход база—эмиттер. Наилучшие условия для преобразования частоты получаются в том случае, если зависимость  $i_b = f(u_{бэ})$  квадратична, т. е.

$$i_b = i_{b0} + a_1 u_{бэ} + a_2 u_{бэ}^2. \quad (9.17)$$

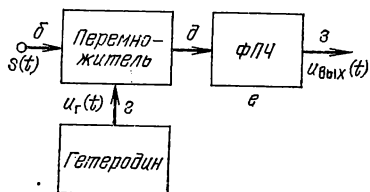


Рис. 9.16. Структурная схема преобразователя частоты

В преобразователе (рис. 9.17) напряжение  $u_{бэ}$  пропорционально сумме напряжений сигнала  $s(t)$  и гетеродина  $u_r(t)$ , т. е. переменная составляющая этого напряжения

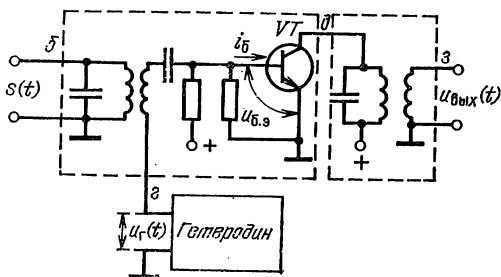


Рис. 9.17. Схема транзисторного преобразователя частоты

$u_{бэ}(t) = s(t) + u_r(t)$ . Подставив это выражение в (9.17), получим

$$i_b(t) = i_{b0} + a_1 s(t) + a_1 u_r(t) + a_2 s^2(t) + 2a_2 \underline{u_r(t) s(t)} + a_2 u_r^2(t). \quad (9.18)$$

Ток коллектора транзистора  $i_k(t)$  пропорционален току базы  $i_b(t)$  и, следовательно, описывается выражением, аналогичным (9.18). Из всех слагаемых в этой формуле интерес представляет только одно — подчеркнутое, содержащее произведение напряжений гетеродина и сигнала.

ла. Если, например,  $s(t)$  описывается функцией (9.10) (амплитудно-модулированный сигнал), а  $u_r(t) = U_{mr} \sin(\omega_r t + \psi_r)$ , то это слагаемое

$$\begin{aligned} 2a_2 u_r(t) s(t) &= 2a_2 U_{mr} \sin(\omega_r t + \psi_r) [1 + m u(t)] \times \\ &\times U_m \sin(\omega_0 t + \psi) = a_2 U_{mr} U_m (1 + m u(t)) \times \\ &\times [\cos[(\omega_0 - \omega_r)t + \psi - \psi_r] - \cos[(\omega_0 + \omega_r)t + \psi + \psi_r]]. \end{aligned}$$

Если контур в цепи коллектора транзистора настроить на промежуточную частоту  $\omega_{np} = \omega_0 - \omega_r$ , то все остальные колебания с частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_r$ ,  $\omega_0 + \omega_r$ ,  $2\omega_0$ ,  $2\omega_r$  будут отфильтрованы. Составляющая тока коллектора разностной частоты  $\omega_0 - \omega_r$  обуславливает появление напряжения на резонансном сопротивлении контура и, следовательно, на выходе преобразователя. Так что можно записать

$$u_{вых}(t) = k a_2 U_{mr} U_m [1 + m u(t)] \cos(\omega_0 - \omega_r)t, \quad (9.19)$$

где начальная фаза  $\psi - \psi_r$  ради простоты записи опущена,  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Из (9.19) следует, что форма огибающей напряжения на выходе преобразователя совпадает с формой огибающей сигнала на входе, а несущая частота уменьшена на  $\omega_r$ .

Подчеркнем в заключение, что желаемый результат преобразования получен благодаря наличию в (9.17) квадратичного члена  $a_2 u_{\phi}^2$ . Чтобы обеспечить справедливость аппроксимации реальной характеристики транзистора  $i_{\phi} = f(u_{\phi})$  полиномом (9.17), необходимо обеспечить изменение напряжения  $u_{\phi}$  в достаточно большом интервале значений. Именно поэтому амплитуда колебания гетеродина  $u_r(t)$  обычно выбирается достаточно большой, поскольку в реальных схемах напряжение сигнала  $s(t)$ , как правило, оказывается малым.

Выше был рассмотрен пример преобразования АМ сигнала. Аналогичные рассуждения можно провести и для сигналов с угловой модуляцией. В качестве перемножителей могут быть использованы параметрические цепи, управляемые сильным сигналом гетеродина.

Более подробные сведения о методах расчета и построения преобразователей частоты излагаются в специальных курсах. Часто как в передающем, так и в приемном устройствах системы передачи используют многократное преобразование частоты.

Возможен также особый случай преобразования частоты, когда частота колебаний гетеродина выбирается равной несущей частоте преобразуемого сигнала. Так как при этом  $\omega_0 - \omega_r = 0$ , то спектр сигнала смещается в область низких частот. Это случай синхронного детектирования.

**Генерирование колебаний.** Устройства, обеспечивающие генерирование гармонических колебаний, называются *генераторами*. Такие устройства, не получая внешнего возбуждения, преобразуют энергию источника постоянного напряжения в энергию колебаний. В радиотехнике они называются генераторами с самовозбуждением или *автогенераторами*; цепи, в которых возникают такие колебания, называют *автоколебательными системами*.

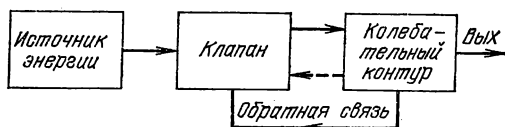
Автогенераторы можно разделить на два больших класса: а) генераторы почти гармонических колебаний, б) генераторы релаксационных (негармонических) колебаний. Существенное различие в форме автоколебаний обусловлено различием в устройстве и в принципах действия этих генераторов. Рассмотрим кратко наиболее важное в построении и работе автогенераторов почти гармонических колебаний. При этом особое внимание уделим роли нелинейных элементов в процессе генерирования таких колебаний.

Обязательным элементом автогенератора гармонических колебаний является колебательный контур. Последний служит тем элементом, на котором формируется выходной сигнал генератора. Однако реальный контур не может обеспечить незатухающие свободные колебания, как это было показано в гл. 4. К тому же часть энергии колебаний в контуре должна передаваться в нагрузку (другие электрические цепи). Следовательно, для получения незатухающих колебаний необходимо все время пополнять запас энергии в контуре. Это означает, что каждый автогенератор должен содержать кроме контура еще и *источник энергии*. В практических схемах автогенераторов обычно используют источник постоянного напряжения (например, батарею или выпрямитель).

Для поддержания незатухающих колебаний энергию в контур необходимо подавать периодически отдельными порциями в такт уже происходящим колебаниям. Это можно обеспечить, если энергию от источника подводить через *клапан*, который в свою очередь управляется колебаниями в контуре. Механизм управления клапаном

со стороны контура называется *обратной связью*, т. е. каждый автогенератор должен содержать замкнутую цепь обратной связи, необходимую для получения автоколебаний (рис. 9.18). Цепь обратной связи в этой схеме является внешней по отношению к клапану и контуру; такие автоколебательные системы называются *автогенераторами с внешней обратной связью*. В некоторых

Рис. 9.18. Структурная схема автогенератора почти гармонических колебаний



генераторах внешняя обратная связь отсутствует, а управление клапаном осуществляется по той же цепи, по какой энергия через клапан поступает в колебательный контур (пунктирная линия на рис. 9.18). Такие автогенераторы называются *генераторами с внутренней обратной связью*.

Практическая схема автогенератора с внешней обратной связью приведена на рис. 9.19. Источником энергии здесь служит источник постоянного напряжения  $E_k$ . В качестве клапана используется транзистор, переход база—эмиттер которого в установившемся режиме закрыт напряжением  $E_{60}—U_{60}$ . При наличии колебаний в контуре благодаря индуктивной связи между катушками  $L_k$  контура и цепи обратной связи  $L_{св}$  в цепь базы транзистора передаются колебания с контура  $L_k C_k$ . В установившемся режиме транзистор работает в режиме с отсечкой, благодаря чему ток коллектора имеет импульсный характер. Эти импульсы подаются в контур  $L_k C_k$  в такт (синхронно) с колебаниями в контуре, восполняя тем самым потери энергии в контуре и обеспечивая наличие в нем незатухающих колебаний.

Процесс возникновения и нарастания колебаний в данной автоколебательной системе состоит в следующем. Запуск автогенератора осуществляется подключением в момент  $t=0$  с помощью ключа  $S$  источника напряжения  $E_k$ . Скачок коллекторного тока  $i_{к0}$  (рис. 9.19, б) возбуждает в контуре  $L_k C_k$  свободное колебание, частота которого определяется параметрами контура. Благодаря наличию индуктивной связи между  $L_k$  и  $L_{св}$  в цепи базы транзистора между базой и эмиттером начинает действовать переменное напряжение, наведенное колебания-



ми тока в контуре. В результате в токе коллектора появляется переменная составляющая. Катушка связи  $L_{св}$  включается таким образом, чтобы эта переменная составляющая изменялась синхронно в такт с колебанием напряжения на контуре; такая обратная связь называется

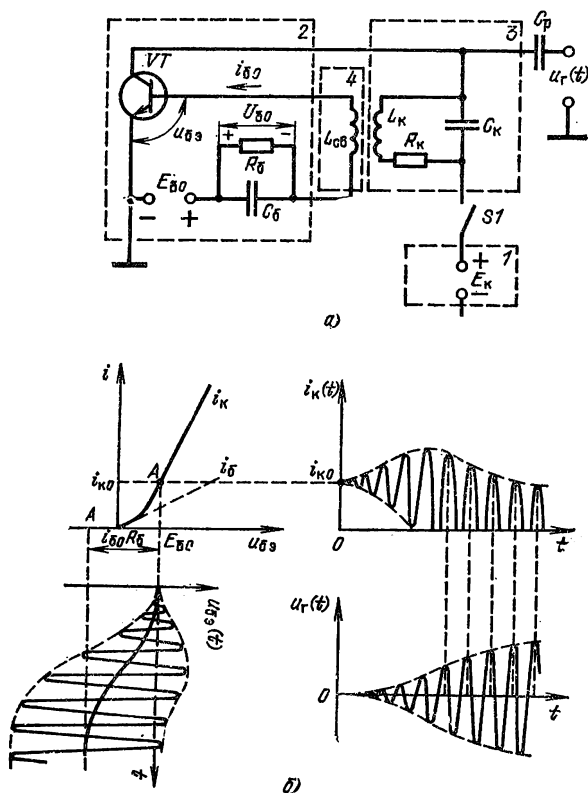


Рис. 9.19. Схема транзисторного автогенератора с внешней обратной связью и процесс установления колебаний на выходе

ся *положительной*. Прохождение переменной составляющей тока коллектора через контур при положительной обратной связи приводит к увеличению амплитуды колебаний, что, в свою очередь, увеличивает амплитуду переменного напряжения между базой и эмиттером и т. д. На начальном этапе запуска рассматриваемая схема является линейной, поскольку действующее между базой

и эмиттером напряжение имеет малую амплитуду. Однако с течением времени амплитуда этого напряжения увеличивается благодаря наличию положительной обратной связи. В результате транзистор переходит в режим работы с отсечкой. Токи базы и коллектора приобретают вид последовательности импульсов (см. рис. 9.19, б). Теперь на контуре  $L_K C_K$  выделяется лишь напряжение, обусловленное первой гармоникой тока коллектора. Постоянная составляющая тока базы увеличивается, в результате чего напряжение смещения  $U_{б0}$  на цепочке  $R_6 C_6$  начинает возрастать, смещая рабочую точку  $A$  вниз по характеристике транзистора в область отрицательных напряжений. Вследствие этого рост амплитуды первой гармоники тока коллектора замедляется. Этот процесс продолжается до тех пор, пока амплитуда первой гармоники тока коллектора не установится равной постоянному значению  $I_{м1}$ , которое называется *установившимся*.

В результате процесс нарастания амплитуд колебаний прекращается и система перейдет в *установившийся* или *стационарный режим работы*.

В стационарном режиме поступающая в контур энергия равна расходуемой энергии, т. е. потери энергии в контуре из-за рассеяния на активном сопротивлении  $R_K$  полностью компенсируются. Этот факт можно интерпретировать следующим образом: положительная внешняя обратная связь вносит в колебательный контур *отрицательное сопротивление*, вследствие чего активное сопротивление становится равным нулю, а контур — идеальным без потерь.

Существуют, однако, электронные приборы, которые позволяют получить отрицательное сопротивление без введения специальных элементов обратной связи. К таким приборам, вольт-амперные характеристики которых имеют падающие участки, относятся, например, туннельные и лавинно-пролетные диоды, диоды Ганна, некоторые электронные лампы при соответствующем подборе напряжений на их электродах. Пример вольт-амперной характеристики туннельного диода приведен на рис. 9.2, а. Диод обладает отрицательным сопротивлением на падающем участке характеристики, когда напряжение  $u$  изменяется от  $u'$  до  $u''$ . При его подключении к колебательной системе, содержащей источник энергии, могут возникнуть автоколебания благодаря компенсации потерь в системе с помощью отрицательного сопротивления прибора. Пример схемы генератора на туннельном

диоду приведен на рис. 9.20. С помощью делителя напряжения  $R1R2$  задается положение рабочей точки на падающем участке вольт-амперной характеристики диода. Конденсатор  $C_{бл}$  необходим для шунтирования резистора  $R2$  по высокой частоте.

Следует обратить внимание, что диод является нелинейным двухполюсником. Поэтому схема автогенератора на туннельном диоде проще, чем на транзисторе. Кроме того, в автогенераторах на диодах нет необходимости во внешней цепи обратной связи, поскольку поддержание незатухающих колебаний в контуре основывается на внесении в него отрицательного сопротивления прибора. Можно говорить, что обратная связь в таких генераторах заложена в самом физическом механизме прибора. Поэтому автогенераторы на диодах и получили название генераторов с внутренней обратной связью.

В настоящее время они используются в основном для получения колебаний с очень высокими частотами диапазон — от 1 до 100 ГГц).

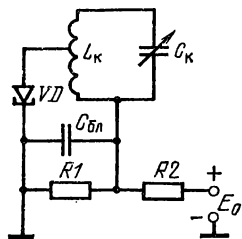


Рис. 9.20. Схема автогенератора на туннельном диоде

#### 9.4. Параметрические цепи

Электрические цепи, один или несколько параметров которых изменяются во времени по детерминированному (заранее заданному) закону, называются *параметрическими*. Будем рассматривать только такие параметрические цепи, изменение параметров которых осуществляется с помощью электрических управляющих сигналов. Параметрами электрических цепей, значения которых меняются во времени, могут служить сопротивление  $R$  резистора, емкость  $C$  конденсатора, индуктивность  $L$  катушки. В параметрических цепях эти параметры являются функциями времени  $R(t)$ ,  $C(t)$ ,  $L(t)$ .

Рассмотрим два примера параметрической цепи и электронный способ изменения параметров.

Пусть имеется полупроводниковый прибор с вольт-амперной характеристикой, изображенной штриховой линией на рис. 9.21. Положение рабочей точки  $A$  выберем в середине квадратичного участка этой характеристики с помощью подачи на прибор нужного напряжения смещения  $U_0$ . Рассмотрим зависимость крутизны вольт-амперной характеристики от напряжения  $S(u) = di(u)/du$ . Эта величина называется также *дифференциальной проводимостью* и обо-

значается часто символом  $Y_d$ ; обратная ей величина  $R_d = 1/Y_d$  называется *дифференциальным сопротивлением*. Если функция  $i(u)$  квадратичная, т. е.  $i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$ , то  $S(u)$  будет линейной функцией (см.  $S$  на рис. 9.21)

$$S(u) = a_1 + 2a_2 u, \quad (9.20)$$

Таким образом, крутизна  $S$  зависит от напряжения  $u$  на приборе. Если это напряжение будет меняться во времени по некоторому закону, то по этому же закону будет меняться во времени и

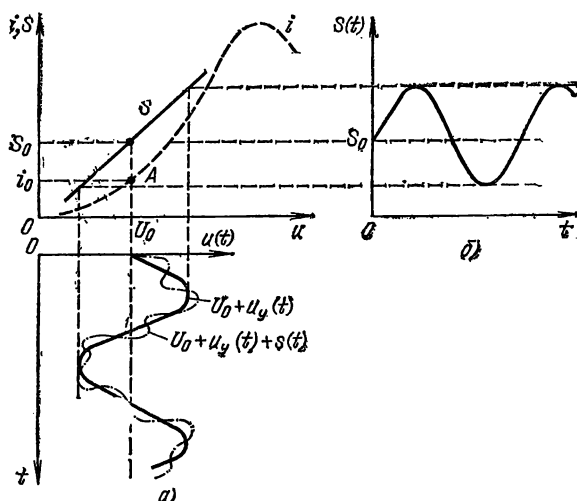


Рис. 9.21. Крутизна вольт-амперной характеристики как управляемой параметр полупроводникового прибора

крутизна вольт-амперной характеристики данного прибора. Например, на рис. 9.21, а показан график управляющего напряжения  $u_y(t)$  в виде отрезка гармонического колебания, которое добавляется к напряжению смещения  $U_0$ , т. е. напряжение на приборе  $u = u_y(t) + U_0$ . На рис. 9.21, б изображен график, иллюстрирующий соответствующее изменение во времени крутизны  $S(t)$ . Действительно, если  $u_y(t) = U_{my} \sin \Omega t$ , то в соответствии с (9.20) получаем

$$S(t) = a_1 + 2a_2 (U_0 + U_{my} \sin \Omega t) = S_0 (1 + m_S \sin \Omega t), \quad (9.21)$$

где  $m_S = 2a_2 U_{my} / (a_1 + 2a_2 U_0)$  — коэффициент, характеризующий «глубину» изменения крутизны  $S$ ,  $aS_0 = a_1 + 2a_2 U_0$  — значение крутизны характеристики в точке  $u = U_0$ .

Соответствующим выбором значений  $U_0$  и  $U_{my}$  всегда можно обеспечить выполнение неравенства  $m_S < 1$ . Отметим в заключение, что для заметного изменения значения параметра  $S$  управляющее напряжение  $u_y(t)$  должно иметь достаточно большой диапазон изменения, в котором уже проявляется нелинейность вольт-амперной характеристики прибора.

Предположим теперь, что кроме напряжений смещения  $U_0$  и управления  $u_y(t)$  на данный прибор действует напряжение сигнала  $s(t)$ . Однако теперь потребуем, чтобы диапазон изменения значений этого сигнала был достаточно мал, так что рассматриваемый прибор по отношению к  $s(t)$  можно рассматривать как линейный. Теперь на прибор будет действовать напряжение  $u = U_0 + u_y(t) + s(t)$ , пример графика которого изображен на рис. 9.21, а штрихпунктирной линией. По отношению к слабому сигналу  $s(t)$  в указанных условиях данный прибор можно рассматривать как линейный с переменным во времени параметром  $S(t)$ , изменяющимся в соответствии с управляющим напряжением  $u_y(t)$ . Любая электрическая цепь, содержащая такой прибор, может быть названа параметрической.

В качестве второго примера рассмотрим управление емкостью. Это может быть, например, емкость  $p$ - $n$ -перехода, значение которой зависит от приложенного к переходу напряжения  $u$  (см. рис. 9, б). В интервале значений напряжения от  $u'$  до  $u''$  эту зависимость приближенно можно считать линейной, так что  $C(u) = b_0 + b_1 u$ . Если рабочую точку  $A$  выбрать в середине этого участка путем подачи нужного напряжения смещения  $U_0$ , то при добавлении управляющего напряжения  $u_y$  будем иметь  $C(U_0 + u_y) = b_0 + b_1(U_0 + u_y) = b_0 + b_1 U_0 + b_1 u_y$ . Если управляющее напряжение — гармоническое колебание  $u_y(t) = U_{my} \sin \Omega t$ , то емкость  $p$ - $n$ -перехода также будет меняться во времени, и для нее можно записать  $C(t) = C_0(1 + m_c \sin \Omega t)$ , где  $C_0 = b_0 + b_1 U_0$  — емкость перехода при отсутствии управляющего напряжения;  $m_c = b_1 U_{my} / (b_0 + b_1 U_0)$  — коэффициент, характеризующий «глубину» изменения параметра  $C$ .

Если теперь к  $p$ - $n$ -переходу приложено напряжение  $u(t) = U_0 + u_y(t) + s(t)$ , то можно говорить о *воздействии лишь одного сигнала  $s(t)$  на конденсатор с изменяющейся во времени емкостью  $C(t)$* . Влияние напряжения смещения  $U_0$  и управляющего напряжения  $u_y(t)$  здесь уже учтено тем, что емкость конденсатора изменяется во времени по заданному закону. Любая цепь, содержащая такой конденсатор, называется параметрической.

Аналогичные выражения можно привести и для индуктивной катушки с сердечником, значение индуктивности которой управляется током. Любая цепь с такой индуктивностью будет называться параметрической.

Отметим в заключение, что элементы с изменяющимися во времени значениями параметров  $R(t)$ ,  $C(t)$ ,  $L(t)$  следует рассматривать как *линейные*. Линейные цепи, в которые вводятся такие элементы, остаются линейными; к ним, в частности, применим принцип суперпозиции.

Цепи с переменными параметрами играют важную роль в радиотехнике. Рассмотрим теперь некоторые примеры применения таких цепей, иллюстрирующие их важность и значимость для успешного решения проблемы передачи информации с помощью электромагнитных волн.

## 9.5. Применение параметрических цепей в радиотехнике

**Параметрическое генерирование колебаний.** Рассмотрим кратко физические причины колебаний, которые могут возникнуть в контуре, если какой-либо его параметр (либо емкость, либо индуктивность) периодически изменяется во времени. До сих пор колебания в контуре, которые изучались в предшествующих параграфах, возникали при воздействии на контур либо электрического тока, либо ЭДС. Здесь будет рассматриваться случай, когда ЭДС отсутствуют и единственная причина возникновения электрических колебаний в контуре — периодическое изменение его параметров. Соответствующая схема контура изображена на рис. 9.22 для случая, когда управляемым параметром контура является емкость  $C(t)$  конденсатора. В качестве такой емкости можно использовать, например, емкость полупроводникового  $p$ — $n$ -перехода, находящегося под периодически изменяющимся напряжением. Конечно и для этой схемы справедливы законы сохранения и превращения энергии: энергия электрических колебаний в контуре обеспечивается введением в контур энергии специального источника, который обычно называется *генератором накачки*. Этот генератор обеспечивает периодическое изменение емкости конденсатора контура.

Рассмотрим упрощенно наиболее важные физические процессы, лежащие в основе преобразования энергии генератора накачки в энергию электрических колебаний в контуре. Для этого достаточно напомнить некоторые соотношения электростатики.

Пусть конденсатор емкостью  $C$  заряжен до напряжения  $U$ . Запасенная в электрическом поле конденсатора энергия  $W_C = U^2 C / 2$ , сила, с которой обкладки притягиваются друг к другу,  $F = W_C / l$ , где  $l$  — расстояние между обкладками. Способ изменения емкости  $C$  конденсатора состоит в том, чтобы изменять расстояние между обкладками конденсатора, сближая или раздвигая их. Если обкладки раздвинуть на расстояние  $\Delta l$  против силы  $F$  (т. е. уменьшить емкость), то будет совершена работа  $\Delta A = F \Delta l = W_C \Delta l / l$ .

Перепишем выражение для энергии в виде  $W_C = Q^2 / 2C$ , где  $Q = UC$  — заряд, остающийся при данных рассуждениях постоянным. Известно, что емкость конденсатора  $C = \varepsilon S / l$ , где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость материала между обкладками, а  $S$  — площадь об-

кладок. В результате энергия  $W_c = Q^2 l / 2\epsilon S$ , но отсюда следует важный вывод: если при неизменном заряде  $Q$  увеличить на  $\Delta l$  расстояние между обкладками, то потенциальная энергия электрического поля конденсатора увеличится на  $\Delta W_c = Q^2 \Delta l / 2\epsilon S = W_c \Delta l / l$ . Это приращение энергии равно работе  $\Delta A$ , совершенной при раздвигании обкладок конденсатора на расстояние  $\Delta l$ . Увеличение энергии в поле конденсатора приведет к увеличению

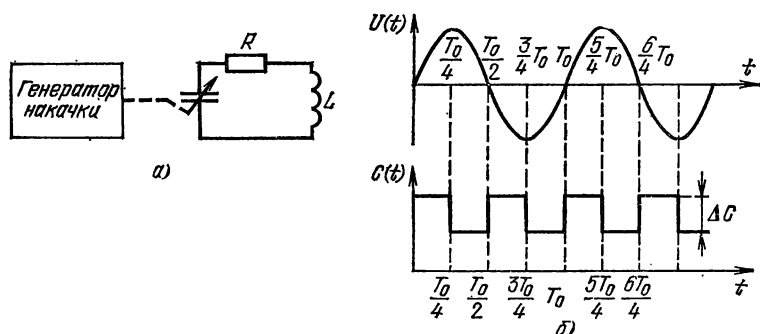


Рис. 9.22. Соотношение фаз напряжения на конденсаторе и сигнала накачки

напряжения на нем на  $\Delta U = U \Delta l / l$ . Тем самым показано, что работа, совершаемая при раздвигании обкладок конденсатора, полностью переходит в потенциальную энергию электрического поля конденсатора, приводя к увеличению напряжения между его обкладками.

Заметим, что прирост  $\Delta U$  напряжения пропорционален напряжению  $U$  на конденсаторе в момент раздвигания обкладок и, следовательно, будет тем больше, чем больше напряжение в этот момент. Поэтому при наличии колебаний в контуре для передачи наибольшей порции энергии в контур от источника накачки раздвигать обкладки необходимо в моменты, когда напряжение на конденсаторе оказывается максимальным. Также очевидно, что если расстояние между обкладками изменять в момент, когда  $U=0$ , то изменения энергии в контуре не будет.

На рис. 9.22, б приведены графики, иллюстрирующие, каким образом наиболее целесообразно изменять емкость конденсатора контура при наличии колебаний в нем: уменьшение емкости должно происходить скачком

всякий раз, когда напряжение на конденсаторе при любой его полярности оказывается максимальным, т. е. при  $t=T_0/4, 3T_0/4, 5T_0/4$  и т. д.; емкость должна увеличиваться в те моменты, когда напряжение на конденсаторе оказывается равным нулю, т. е. при  $t=0, 0,5T_0, T_0$  и т. д. В этом случае от источника накачки в контур будет передаваться наибольшее количество энергии. Частота из-

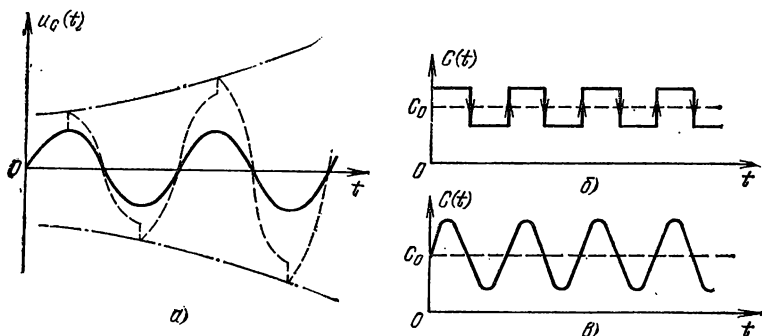


Рис. 9.23. Временные диаграммы напряжения и емкости в параметрическом генераторе

менения емкости (частота накачки)  $\omega_n$  при этом оказывается в 2 раза выше частоты  $\omega_0$  колебаний в контуре. С этим способом ввода энергии в контур связано и название источника накачки, поскольку параметрическое возбуждение колебаний в контуре обеспечивается благодаря «накачке» энергии из источника, управляющего изменением емкости конденсатора, в контур генератора.

Скачкообразное изменение емкости контура на практике не применяется. Значительно легче обеспечить изменение емкости по гармоническому закону. При этом желательно соблюдать следующий основной принцип: уменьшать емкость с наибольшей скоростью необходимо при максимальных значениях напряжения на конденсаторе и увеличивать с максимальной скоростью — при значениях, близких к нулю. Графики, иллюстрирующие желаемые фазовые соотношения, приведены на рис. 9.23, а и в. На рис. 9.23, б приведен идеальный закон изменения емкости конденсатора  $C(t)$ , а на рис. 9.23, а штриховой линией изображен график изменения напряжения на конденсаторе при таком идеальном законе изменения емкости  $C(t)$ .



Выше рассмотрен процесс поддержания колебаний в контуре. Проследим этот процесс с момента включения генератора накачки. К моменту включения генератора накачки в контуре существуют беспорядочные шумовые колебания, обусловленные тепловым движением заряженных частиц. Спектр этих колебаний обычно очень широк и, как правило, сплошной, т. е. в нем присутствуют составляющие с любыми частотами. Следует отметить, что и фаза каждой составляющей такого спектра может принимать любое значение от 0 до  $360^\circ$ . Таким образом, в спектре шума всегда присутствует составляющая с частотой  $\omega_n/2$ . При включении генератора накачки с частотой  $\omega_n$  эта составляющая и будет служить исходным начальным колебанием, амплитуда которого при определенных условиях будет быстро нарастать за счет поступления энергии от генератора накачки. Рассмотрим теперь кратко, в чем состоят эти условия.

Полная энергия в колебательном контуре  $W = W_C + W_L$ , где  $W_C$  — энергия, запасенная в электрическом поле конденсатора, а  $W_L$  — в магнитном поле индуктивной катушки ( $W_L$ ). При отсутствии потерь в контуре этот запас энергии остается постоянным (не расходуется) и в контуре существуют незатухающие свободные колебания. Однако любой реальный контур имеет конечное активное сопротивление  $R$ , на котором энергия колебаний контура будет рассеиваться; в результате в реальном контуре запас энергии убывает, а свободные колебания затухают.

Рассеиваемая на активном сопротивлении контура в течение периода колебания средняя мощность

$$P_- = 0,5 I_m^2 R = U_{Cm}^2 R / 2 X_C^2,$$

где  $I_m$  и  $U_{Cm}$  — амплитуды тока в контуре и напряжения на конденсаторе соответственно;  $X_C = 1/\omega_0 C_0$  — емкостное сопротивление конденсатора с емкостью  $C_0$  на частоте  $\omega_0$  собственных колебаний.

Так как  $I_m = \omega_0 C_0 U_{Cm}$ , то

$$P_- = 0,5 \omega_0^2 C_0^2 R U_{Cm}^2 = \omega_0^2 R C_0 W = \omega_0 dW, \quad (9.22)$$

где  $d = R/X_C$  — затухание контура.

Найдем теперь мощность, накачиваемую в контур при изменении емкости конденсатора по гармоническому закону:

$$C(t) = C_0 + C_m \sin 2\omega_0 t = C_0 (1 + m_c \sin 2\omega_0 t), \quad (9.23)$$

где  $C_0$  — исходная емкость конденсатора контура при

отсутствии сигнала накачки;  $C_m$  — амплитуда изменения емкости;  $m_C = C_m/C_0$  — коэффициент вариации емкости; как правило,  $m_C \ll 1$ .

Запасенная в электрическом поле конденсатора в момент  $t$ , когда напряжение на конденсаторе равно  $u_C(t)$ , энергия

$$W_C(t) = 0,5u_C^2(t) C(t).$$

Если на интервале времени от  $t$  до  $t+dt$  емкость  $C(t)$  получает приращение  $dC(t)$ , то энергия в поле конденсатора на этом интервале времени изменится на

$$dW_C(t) = -0,5u_C^2(t) dC(t).$$

Если приращение  $dC(t)$  положительно, то прирост энергии оказывается отрицательным, т. е. энергия отбирается из контура; при  $dC(t) < 0$  энергия вводится в контур. Если теперь этот прирост энергии разделить на длительность  $dt$  интервала, то получим среднюю на таком бесконечно малом интервале мощность, поступающую в контур (или отбираемую от него),

$$P_+(t) = -0,5u_C^2(t) dC(t)/dt. \quad (9.24)$$

Из (9.24) следует, что при отсутствии накачки, когда емкость конденсатора контура постоянна и равна  $C_0$ , мощность  $P_+(t) = 0$ , так как  $dC(t)/dt = 0$ . Кроме того, из этой формулы следует, что в разные моменты в контур поступает или отбирается из него разная мощность. Чтобы найти среднюю мощность, поступающую в течение одного периода колебания в контуре, функцию  $P_+(t)$  необходимо усреднить по времени. Математически эта операция записывается следующим образом:

$$P_+ = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} P_+(t) dt, \quad (9.25)$$

где  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

Таким образом, чтобы найти среднюю мощность, поступающую в контур от генератора накачки, необходимо провести вычисления в соответствии с (9.24) и (9.25). В соответствии с (9.23)

$$\frac{dC(t)}{dt} = +C_0 m_C \cos 2\omega_0 t \cdot 2\omega_0 = +\frac{2m_C}{X_C} \cos 2\omega_0 t. \quad (9.26)$$

При наличии колебаний в контуре напряжение на конденсаторе  $u_C(t) = U_{cm} \sin \omega_0 t$ . Для этой функции выполняются желаемые фазовые соотношения с законом (9.23) изменения емкости конденсатора контура. Под-

ставляя выражение для  $u_c(t)$  и (9.26) в (9.24), получаем мощность, поступающую в контур от генератора накачки,

$$\begin{aligned} P_+(t) &= -\frac{1}{2} U_{cm}^2 \sin^2 \omega_0 t \frac{2m_c}{X_C} \cos 2\omega_0 t = \\ &= -\frac{1}{2X_C} m_c U_{cm}^2 (1 - \cos 2\omega_0 t) \cos 2\omega_0 t = \\ &= -\frac{1}{2X_C} m_c U_{cm}^2 \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{4X_C} m_c U_{cm}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{4X_C} m_c U_{cm}^2 \cos 4\omega_0 t. \end{aligned}$$

Усреднение по времени полученного выражения подстановкой его в (9.25) приводит к  $P_+ = (1/4X_C) m_c U_{cm}^2$ . Чтобы в контуре имели место незатухающие колебания, мощность, вносимая в контур генератором накачки  $P_+$ , должна быть *не менее* мощности, рассеиваемой на активном сопротивлении  $P_-$  и определяемой (9.22). Таким образом, приходим к следующему условию самовозбуждения параметрического генератора:  $P_+ \geq P_-$  или

$$m_c \geq 2R/X_C = 2d, \quad (9.27)$$

т. е. коэффициент вариации емкости контура  $m_c$  должен быть по крайней мере в 2 раза больше затухания контура. При выполнении (9.27) приток энергии в контур от генератора накачки превышает потери в нем. Если не принять дополнительных мер, то при  $P_+ > P_-$  имеет место непрерывный рост амплитуды колебаний в контуре вплоть до разрушения его элементов. Для предотвращения этого необходимо ввести в контур элемент (например, нелинейную индуктивность), который обеспечил бы ограничение максимальной амплитуды тока.

Следует отметить, что (9.27) получено при условии, что  $\omega_n = 2\omega_0$ , которое следует рассматривать как второе условие самовозбуждения параметрического генератора. Однако это второе условие не единственно возможное; в принципе возбуждение колебаний может иметь место и при других частотах вариации емкости, а именно для отношения  $\omega_n/\omega_0$  допустимы значения 2, 1, 2/3, 1/2, ..., т. е.  $2/k = 1, 2, 3, \dots$  При  $\omega_n = 2\omega_0$  колебания возбуждаются наиболее легко, т. е. при наименьшем значении коэффициента вариации  $m_c$ .

**Параметрическое усиление колебаний.** В четырехполоснике имеет место усиление сигнала по мощности, ес-

ли мощность сигнала, получаемая на выходе, больше мощности сигнала, подаваемой на его вход, при условии, что форма сигнала на входе и выходе одинакова. Процесс параметрического усиления колебаний является одним из важнейших физических процессов, широко используемых в радиотехнике. В этом случае на контур, содержащий конденсатор с управляемой емкостью, воздействует напряжение слабого гармонического сигнала с частотой  $\omega_0$ , а емкость управляется генератором накачки гармонического колебания с частотой  $\omega_n$ . В таком контуре будут происходить физические процессы, которые были рассмотрены выше и благодаря которым мощность подведенного слабого колебания будет увеличена.

При использовании параметрической цепи важно, чтобы цепь оставалась *устойчивой*, т.е. условие самовозбуждения не должно выполняться. Это означает, что в режиме усиления коэффициент вариации  $m_c$  емкости контура должен быть меньше, чем  $2d$ . Усиление, как и генерирование, происходит благодаря расходованию энергии источника накачки.

Параметрические усилители являются одним из основных типов малошумящих входных устройств приемников, используемых в радиолокации, радиоастрономии, космической радиосвязи.

**Параметрическое умножение и деление частоты.** Как показано в § 9.3, для умножения (и деления) частоты часто используют нелинейные элементы (транзисторы, электронные лампы). Однако эти элементы успешно работают лишь в диапазоне частот от нескольких килогерц до десятков мегагерц. В этом диапазоне благодаря усилительным свойствам активных элементов удается получить мощность на выходе умножителя или делителя, превышающую мощность на входе.

На более высоких частотах в качестве нелинейных элементов применяются полупроводниковые диоды. При этом диод в этом случае используется как нелинейный *реактивный* элемент, задаваемый нелинейной функцией  $C(u)$  зависимости емкости его перехода от приложенного напряжения.

Принцип действия подобных устройств остается тем же, каким он был при умножении частоты с помощью нелинейных резистивных элементов: при воздействии входного гармонического сигнала с частотой  $\omega_0$  напряжение на диоде и протекающий через него ток оказываются искаженными; их спектр является линейчатым и

содержит гармоники частоты  $\omega_0$ ; выходной контур настраивается на нужную гармонику и служит для ее выделения.

При прочих равных условиях параметрические умножители часто могут обеспечить заметно бóльшую выходную мощность колебаний по сравнению с умножителями на нелинейных резистивных элементах.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 9.1. Приведите примеры нелинейного двухполюсника и нелинейного четырехполюсника. Почему они называются нелинейными?
- 9.2. Поясните смысл термина «нелинейная электрическая цепь». Приведите пример нелинейной цепи. Выполняется ли принцип суперпозиции для нелинейных цепей?
- 9.3. Что называется характеристикой нелинейного элемента? Поясните понятие «рабочая точка».
- 9.4. Поясните графический способ определения формы тока в нелинейной цепи при подаче на ее вход напряжения в форме гармонического колебания.
- 9.5. Почему характеристику нелинейного элемента полезно и удобно аппроксимировать степенным полиномом? Поясните сущность такой аппроксимации.
- 9.6. Перечислите основные области применения нелинейных электрических цепей в радиотехнике.
- 9.7. Поясните цель процесса умножения частоты и объясните принципы, лежащие в основе построения практических схем умножителей частоты.
- 9.8. Что такое угол отсечки? Как следует выбрать угол отсечки при умножении частоты в 2 раза?
- 9.9. Поясните сущность нелинейного способа формирования АМ сигнала.
- 9.10. В чем состоит основная задача детектирования? В качестве примера рассмотрите детектирование АМ сигнала.
- 9.11. Каково основное назначение процесса преобразования частоты? Какой характеристикой должен обладать нелинейный элемент, чтобы его можно было использовать в преобразователе частоты?
- 9.12. Поясните принцип работы преобразователя частоты, схема которого приведена на рис. 9.17.
- 9.13. Какие элементы обязательно должны входить в автогенератор гармонического колебания с внешней обратной связью? Каким образом проявляется закон сохранения и превращения энергии при работе автогенератора?
- 9.14. Какова роль нелинейных элементов в автогенераторе гармонических колебаний? Поясните процесс установления амплитуды колебаний.
- 9.15. Дайте определение параметрической цепи. Выполняется ли для параметрических цепей принцип суперпозиции?
- 9.16. Перечислите основные области применения параметрических цепей в радиотехнике.
- 9.17. Поясните причину возникновения колебаний в контуре параметрического генератора. Укажите условия возбуждения колебаний.
- 9.18. В чем состоит сущность параметрического усиления колебаний?

# Часть III.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

---

### ГЛАВА 10

#### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Электромагнитные волны представляют собой переменное электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве со скоростью света и характеризующееся наличием магнитного и электрического полей, связанных непрерывным взаимным превращением. Таким образом, электрическое и магнитное поля являются различными проявлениями единого электромагнитного поля.

Электромагнитное поле представляет собой форму существования материи. Как и вещество, оно обладает массой, энергией и имеет ряд особенностей, например может существовать в свободном пространстве, не содержащем заряженных тел или проводников с током.

В данной главе рассматриваются основные свойства электромагнитного поля и электромагнитных волн. Главное внимание уделяется следующим вопросам:

1. *Какими основными свойствами характеризуются электрическое, магнитное и электромагнитное поля?*
2. *Какие свойства имеют электромагнитные волны?*

#### 10.1. Основные законы электромагнитного поля

**Электрическое поле.** Источниками электрического поля являются электрические заряды  $Q$ . Это поле воздействует на помещенные в него заряженные тела с определенной силой. Вектор  $E$ , характеризующий электрическое поле и определяющий силу, действующую на заряженную частицу (единичный положительный заряд) со стороны электрического поля, называется *напряженностью электрического поля*. Графически поле принято изображать с помощью условных линий напряженности, которые проводятся так, чтобы касательные к ним совпали с направлением вектора  $E$ , а их плотность, т. е. количество, приходящееся на единицу площади, была пропор-

циональна длине этого вектора (рис. 10.1, а). Если напряженность во всех точках пространства имеет одну и ту же величину и направление, поле называется однородным или *равномерным* (рис. 10.1, б).

Электрическое поле удобно характеризовать с помощью понятия о *потоке вектора напряженности*  $N$  через некоторую поверхность, имеющую площадь  $S$ . Смысл

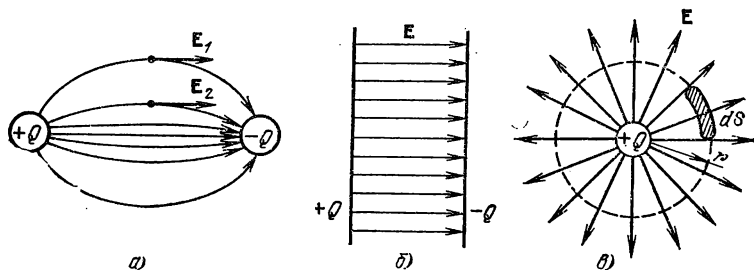


Рис. 10.1. Линии напряженности постоянных во времени электрических полей:

а — неоднородного; б — однородного; в — точечного заряда

этого понятия иллюстрируется рис. 10.1, в, на котором изображены линии напряженности электрического поля точечного положительного заряда  $Q$ . Опишем вокруг этого заряда сферу с произвольным радиусом  $r$  и выделим на ее поверхности элементарный участок площадью  $dS$  (*элемент поверхности*), перпендикулярный вектору  $E$ . Произведение  $dN = E dS$  назовем *поток вектора  $E$  через элемент поверхности  $dS$* . Этот поток можно условно представить числом линий напряженности поля, пронизывающих поверхность  $dS$ . Чтобы найти полный поток этого вектора через поверхность сферы, определим интеграл  $N = \oint S E dS$ , воспользовавшись *законом Гаусса* для электрического поля: поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность  $S$  в среде с абсолютной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_a$  прямо пропорционален алгебраической сумме зарядов  $Q_\Sigma$ , находящихся внутри этой поверхности, т. е.

$$N = Q_\Sigma / \epsilon_a. \quad (10.1)$$

В рассматриваемом случае (10.1) преобразуется:  $N = Q / \epsilon_a$ , а если заряд находится в вакууме, то  $N = Q / \epsilon_0$ , где  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — *электрическая постоянная*.

Если в электрическое поле поместить проводник, свободные заряженные частицы в нем (электроны, ионы), совершающие беспорядочное тепловое движение, приобретают составляющие скорости вдоль линий напряженности поля, образуя электрический ток *проводимости*  $i_{\text{пр}}$ . Этот ток определяется общим зарядом частиц  $Q$ , проходящих через поперечное сечение проводника  $S$ , в единицу времени  $t$ , т. е.  $i_{\text{пр}} = Q/t$ . Отношение  $J_{\text{пр}} = i_{\text{пр}}/S$  называется *плотностью тока проводимости*. Можно показать, что в соответствии с законом Ома плотность тока  $J_{\text{пр}}$  прямо пропорциональна напряженности электрического поля  $E$ , в котором находится проводник.

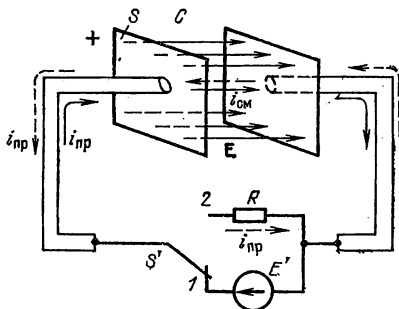


Рис. 10.2. Токи проводимости и смещения в цепи с конденсатором

Рассмотрим ток проводимости в электрической цепи, содержащей конденсатор. Обратимся к рис. 10,2, на котором изображена электрическая цепь, состоящая из источника постоянной ЭДС  $E'$ , конденсатора  $C$ , между пластинами которого находится диэлектрик, имеющий диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_a$ , переключателя  $S'$  и резистора  $R$ .

Установим переключатель в положение 1, тогда конденсатор  $C$  начнет заряжаться. В промежутке времени  $dt$  заряд на пластине конденсатора изменяется на значение  $dQ = i_{\text{пр}} dt$ , которое изменяет напряженность электрического поля на  $dE$  и, следовательно, изменяет поток вектора напряженности через пластину конденсатора  $dN = S dE$ , где  $S$  — площадь пластины. Тогда в соответствии с законом Гаусса  $S dE = dQ/\epsilon_a = i_{\text{пр}} dt/\epsilon_a$ , откуда

$$i_{\text{пр}}/S = \epsilon_a (dE)/dt. \quad (10.2)$$

Левая часть (10.2) представляет собой плотность тока проводимости  $J_{\text{пр}} = di_{\text{пр}}/S$ , пропорциональную, как уже указывалось, напряженности поля  $E$ . В правой части уравнения записана величина, названная Максвеллом плотностью *тока смещения*,  $J_{\text{см}} = \epsilon_a (dE)/dt = i_{\text{см}}/S$ , которая пропорциональна скорости изменения напряженности поля во времени. Таким образом,  $J_{\text{пр}} = J_{\text{см}}$  или  $i_{\text{пр}} =$



$=i_{\text{см}}$ . Последние равенства выражают *свойство непрерывности электрического тока*, которое применительно к рассматриваемой цепи означает, что ток проводимости в пластине конденсатора переходит в равный ему ток смещения в диэлектрике, разделяющем пластины конденсатора.

По мере заряда конденсатора напряженность поля между пластинами увеличивается, поэтому производная  $dE/dt$ , а следовательно, ток смещения больше нуля. Направление токов проводимости и смещения для рассматриваемого случая показано сплошными линиями. Когда конденсатор зарядится, электрическое поле в нем станет постоянным, поэтому ток смещения прекратится. В соответствии со свойством непрерывности ток проводимости также прекращается, поскольку электрическое поле, создаваемое источником ЭДС, компенсируется противоположно направленным полем в конденсаторе.

Переведем переключатель  $S'$  в положение 2. Конденсатор начинает разряжаться. Направление тока проводимости изменяется на противоположное (штриховые линии на рис. 10.2). Так как напряженность поля между пластинами конденсатора уменьшается, производная  $dE/dt$  становится отрицательной и ток смещения, как ток проводимости, меняет направление на обратное.

**Магнитное поле** возникает в пространстве, окружающем движущиеся электрические заряды, и оказывает силовое воздействие на движущиеся в поле заряженные частицы. Вектор  $\mathbf{B}$ , характеризующий магнитное поле и определяющий силу, действующую на движущуюся заряженную частицу (единичный заряд, движущийся с единичной скоростью) со стороны магнитного поля, называется *магнитной индукцией*. Часто магнитное поле характеризуют вектором *напряженности магнитного поля*  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_a$ , где  $\mu_a$  — абсолютная магнитная проницаемость среды. В вакууме  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — *магнитная постоянная*.

Графически магнитное поле принято изображать с помощью условных *линий магнитной индукции*, которые проводятся так, чтобы касательная к ним определяла направление векторов, а плотность линий была пропорциональна длине этих векторов (рис. 10.3). Линии магнитной индукции всегда замкнуты, поэтому магнитное поле называют *вихревым*. (отметим для сравнения, что линии напряженности постоянного во времени электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчи-

ваются на отрицательных, что свидетельствует о безвихревом характере такого поля).

Число линий магнитной индукции, пересекающих некоторую поверхность  $S$ , характеризуется потоком вектора  $\mathbf{B}$  через эту поверхность  $\Phi$ , или *магнитным потоком*. Согласно закону Гаусса для магнитного поля полный магнитный поток через замкнутую поверхность

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \mu_a \int_S \mathbf{H} d\mathbf{S} = 0. \quad (10.3)$$

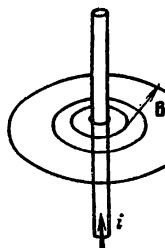


Рис. 10.3. Линии магнитной индукции вокруг проводника с постоянным током

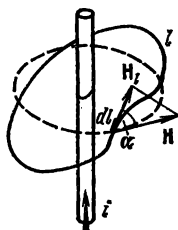


Рис. 10.4. К объяснению закона полного тока

Для магнитного поля справедлив *закон полного тока*, который устанавливает связь между напряженностью магнитного поля и током, вызвавшим это поле. На рис. 10.4 сплошной линией показан произвольный контур длиной  $l$ , который пронизывается током  $i$ . Выделим на контуре элемент длины  $dl$  и спроецируем на направление этого элемента вектор  $\mathbf{H}$  (штриховой линией показана линия магнитной индукции, пересекающая элемент длины). Проекция вектора  $H_1 = H \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между касательной к линии магнитной индукции и касательной к элементу  $dl$ . Просуммировав произведения  $H_1 dl$  по всему контуру и перейдя к интегралу, получим *циркуляцию вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру*  $\oint H_1 dl$ . Тогда закон полного тока

$$\oint H_1 dl = i_{\Sigma}, \quad (10.4)$$

где  $i_{\Sigma}$  — полный ток, пронизывающий контур  $l$ .

**Взаимосвязь между переменным электрическим и магнитным полями.** Перейдем теперь к анализу электромагнитного поля, свойства которого описываются четырь-

ма уравнениями Максвелла, обобщающими основные законы электродинамики — теории, изучающей электромагнитные процессы в различных средах и в вакууме.

*Первое уравнение Максвелла* для идеального диэлектрика, в котором отсутствует ток проводимости, записывается в следующем виде:

$$\oint H_l dl = \int_S \epsilon_a (dE/dt) dS. \quad (10.5)$$

Это уравнение является математической записью *обобщенного закона полного тока*. Левая часть (10.5) пред-

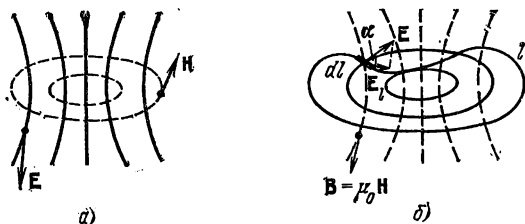


Рис. 10.5. Взаимосвязь электрического и магнитного полей

ставляет собой циркуляцию вектора напряженности магнитного поля, а правая — ток смещения, пропорциональный производной  $dE/dt$ . Это означает, что всякое изменение во времени напряженности электрического поля приводит к появлению магнитного поля (рис. 10.5, а).

*Второе уравнение Максвелла*

$$\oint E_l dl = - d \left( \int B dS \right) / dt. \quad (10.6)$$

В левой части (10.6) записано выражение для циркуляции вектора напряженности электрического поля по замкнутому контуру  $l$ , определяющее ЭДС в этом контуре. Понятие о циркуляции поясним с помощью рис. 10.5, б. На этом рисунке показан проводящий контур длиной  $l$ , помещенный в переменное магнитное поле с напряженностью  $H$ . Выделим на контуре элементарный участок длиной  $dl$ , пересекаемый линией магнитной индукции. Проекция вектора  $E$  на направление  $dl$  есть  $E_l = E \cos \alpha$ , где  $\alpha$  угол между вектором  $E$  и касательной к элементу  $dl$ . Просуммируем произведение  $E_l dl$  по длине контура и перейдем к интегралу. Тогда получим циркуляцию  $\oint E_l dl$ .

Выражение, стоящее в правой части (10.6), представляет собой изменяющийся во времени магнитный поток. Следовательно, второе уравнение Максвелла является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея, согласно которому в проводящем контуре, помещенном в переменное магнитное поле, индуцируется ЭДС, прямо пропорциональная скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур. По теории Максвелла ЭДС, т. е. электрическое поле, будет индуцироваться не только в проводящем контуре, ограничивающем некоторую поверхность, но и в любом условном контуре, не содержащем проводников и находящемся в любой среде, в том числе в вакууме. Поэтому можно сделать следующий важный вывод: *всякое изменение во времени магнитного поля вызывает появление электрического поля.*

Формулы (10.5) и (10.6) являются главными в системе уравнений Максвелла. Из *третьего и четвертого уравнений* этой системы, основой которых являются законы Гаусса для электрического и магнитного полей, следует, что в свободном пространстве электрическое поле, полученное в результате изменения магнитного, имеет вихревой характер, в то время как магнитное поле всегда вихревое. Это означает, что линии напряженности переменного электрического поля замкнуты и охватывают линии индукции вызвавшего его переменного магнитного поля. В пространстве с проводниками линии напряженности электрического поля могут быть незамкнутыми; они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных.

Уравнения Максвелла позволяют установить условия возникновения и существования переменного электромагнитного поля. Пусть в некоторой области пространства имеется излучающий проводник, по которому проходит переменный ток  $i$ . Согласно первому уравнению Максвелла вблизи проводника появляется переменное магнитное поле с замкнутыми линиями магнитной индукции. Согласно второму уравнению изменение магнитного поля приводит к появлению переменного электрического поля с замкнутыми линиями напряженности. В непосредственной близости от проводника эти поля являются связанными и исчезают при прекращении тока в нем. Поскольку ток в проводнике переменный, электромагнитное поле также изменяется во времени; его магнитная составляющая вызывает переменное электричес-

кое поле не только вблизи проводника, но и в соседних областях пространства. Электрическое поле создает ток смещения, который согласно первому уравнению Максвелла вызывает новые вихри магнитного поля (рис. 10.6).

Образованные поля уже не связаны с проводником, а являются *свободными*. Они непрерывно изменяются во

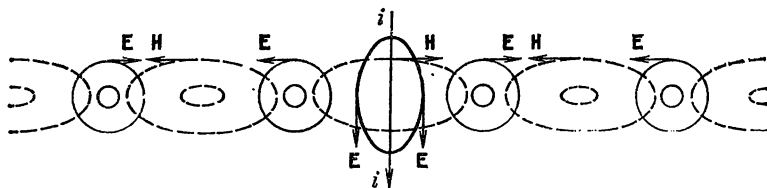


Рис. 10.6. Образование электромагнитных волн

времени и благодаря этому распространяются в пространстве со скоростью света, образуя *электромагнитные волны*.

## 10.2. Электромагнитные волны и их свойства

**Сферические и плоские волны.** Исследуем распространение электромагнитных волн в свободном пространстве. Напряженности электрического и магнитного полей волны будем считать изменяющимися по гармоническому закону. Предположим, что в некоторой точке пространства  $O$  находится излучатель, от которого по всем направлениям с одинаковой скоростью распространяются электромагнитные волны. В этом случае одинаковая фаза волн будет наблюдаться во всех точках сферы с центром в точке  $O$  (рис. 10.7, а). Радиус этой сферы зависит от скорости движения волн и времени, прошедшего с момента начала излучения. Поскольку волны удаляются от источника, радиус сферы все время увеличивается (на рис. 10.7 штриховыми линиями показаны проекции сферы на плоскость чертежа в различные моменты времени  $t_1 \dots t_5$ ). Поверхность, во всех точках которой фаза волн одна и та же, называется *фронтом волны*. В рассматриваемом случае фронт имеет сферическую форму, поэтому волну называют *сферической*. Для сферических волн характерно, что амплитуда напряженности их электрического (магнитного) поля обратно пропорциональна расстоянию от излучателя.

На достаточно больших (в сравнении с длиной волны) расстояниях от излучателя небольшие участки сферы можно считать плоскостями. Волны, имеющие плоский фронт, называют *плоскими*. Для плоских волн характерным является то, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг другу, лежат в плоскости фронта, а линия, вдоль

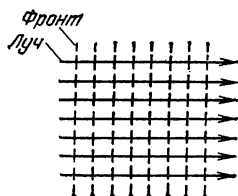
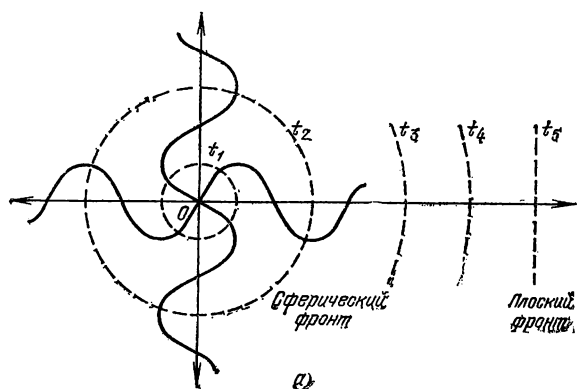


Рис. 10.7. Фронт волны:  
а — сферический; б — плоский

б)

которой распространяется волна (*луч волны*), перпендикулярна фронту. Лучи плоских волн параллельны друг другу (рис. 10.7, б), поэтому энергия электромагнитных волн в процессе распространения не рассеивается и, следовательно, амплитуда напряженности электрического (магнитного) поля плоской волны от расстояния не зависит. Хотя в природе плоских волн не существует, допущение о том, что реальные волны можно считать плоскими, во многих случаях упрощает расчет и анализ электрических цепей, в которых они используются.

Распределение полей плоской электромагнитной волны в некоторый произвольный момент времени  $t_1$  пока-

зано на рис. 10.8. Плоскость фронта волны совпадает с плоскостью  $xoy$ . При заданной координате  $z$  все проекции векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на плоскость  $xoy$  равны, что означает отсутствие рассеяния энергии волны в пространстве. С течением времени картина поля, зафиксированного

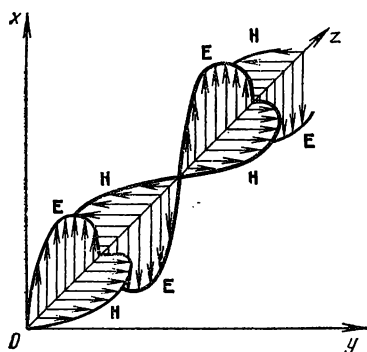


Рис. 10.8. Распределение в пространстве полей плоской волны

на рис. 10.8, смещается вдоль оси  $z$  с некоторой скоростью.

**Скорость распространения и длина волны.** Скорость перемещения в пространстве фазы волны называется фазовой скоростью  $v_\phi$ , а скорость передачи энергии электромагнитной волны — ее *групповой скоростью*  $v_{гр}$ . Фазовая скорость в свободном пространстве

$$v_\phi = 1/\sqrt{\epsilon_j \mu_0}. \quad (10.7)$$

Подставляя сюда значения  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ , получаем, что  $v_\phi = c_0 = 3 \cdot 10^8$  м/с, где  $c_0$  — скорость света в вакууме. При распространении плоских волн фазовая и групповая скорости равны друг другу:  $v_\phi = v_{гр} = c_0$ .

Расстояние, проходимое фронтом волны (движущимся с фазовой скоростью) за период колебания  $T$ , называется *длиной волны*  $\lambda$ . Следовательно, в свободном пространстве

$$\lambda_0 = v_\phi T = c_0 T. \quad (10.8)$$

Связь между амплитудами напряженности магнитного  $H_m$  и электрического  $E_m$  полей плоской электромагнитной волны устанавливается с помощью соотношения

$$H_m = E_m/Z_{в0}, \quad (10.9)$$

где  $Z_{в0}$  — волновое сопротивление среды распространения.

Физический смысл сопротивления состоит в том, что оно определяет для данной среды отношение амплитуд напряженности электрического и магнитного полей волны. Волновое сопротивление имеет активный характер

и для свободного пространства  $Z_{\text{в0}} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120 \pi \approx 377 \text{ Ом}$ .

**Вектор Пойнтинга.** Одной из основных особенностей электромагнитных волн является способность переносить энергию без переноса вещества. Количество энергии, переносимой электромагнитной волной, и направление переноса характеризуется *вектором Пойнтинга*  $\mathbf{P}$ . Направ-

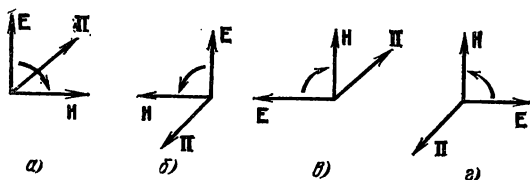


Рис. 10.9. Определение направления вектора Пойнтинга

ление вектора  $\mathbf{P}$  совпадает с направлением перемещения энергии. Модуль этого вектора равен мощности, переносимой волной через единичную площадку, перпендикулярную вектору  $\mathbf{P}$ . Математический анализ показывает, что вектор Пойнтинга определяется как *векторное произведение* напряженности полей электромагнитной волны, т. е.

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (10.10)$$

Модуль этого вектора  $P = EH \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Чтобы найти направление вектора  $\mathbf{P}$ , пользуются следующим правилом: мысленно совмещают по кратчайшему пути векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ; направление перемещения оси воображаемого буравчика покажет направление вектора  $\mathbf{P}$ . На рис. 10.9 показаны примеры применения этого правила. Сравнивая рис. 10.9, а, б или 10.9, в, г, замечаем, что направление вектора  $\mathbf{P}$  изменяется на противоположное, если изменяется направление одного из векторов  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ . Из сравнения рис. 10.9, а, в или 10.9, б, г видно, что направление вектора Пойнтинга не изменяется, если векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  одновременно меняют свое направление на обратное. Определяя направление вектора  $\mathbf{P}$  для волны, распределение полей которой изображено на рис. 10.8, убеждаемся, что эта волна переносит энергию вдоль оси z.

**Поляризация электромагнитных волн.** Важной характеристикой электромагнитных волн является их поля-



ризация. Поляризация волны определяется законом изменения направления и величины вектора  $E$  в данной точке пространства за период колебания. Поляризацию удобно определять раздельно по двум признакам: по изменению положения конца вектора  $E$  в течение периода колебаний и по положению вектора  $E$  относительно выбранной системы пространственных координат (часто эту систему связывают с Землей).

Если конец вектора  $E$  в течение периода колебаний в данной точке пространства остается на одной прямой, поляризацию называют *линейной* (такую поляризацию имеет волна, изображенная на рис. 10.8). Если конец вектора  $E$  описывает в пространстве эллипс или окружность, поляризация называется соответственно *эллиптической* или *круговой*.

По положению вектора  $E$  относительно земной поверхности различают *вертикально поляризованную волну*, если этот вектор лежит в плоскости, перпендикулярной поверхности Земли, и *горизонтально поляризованную*, если вектор  $E$  расположен в плоскости, параллельной Земле.

Используемые в радиотехнике электромагнитные волны (радиоволны) распространяются не в свободном пространстве, а в реальных средах (за исключением космоса, наиболее близкого по своим свойствам к свободному пространству). В таких средах из-за их конечной проводимости часть энергии радиоволн необратимо преобразуется в тепло, поэтому амплитуды напряженности электрического и магнитного полей по мере распространения волны постепенно уменьшаются (затухают). Затухание тем сильнее, чем больше проводимость среды и выше частота радиоволны.

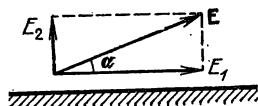
Так как радиоволны подобно свету являются электромагнитными колебаниями, для них справедливы общие законы оптики, в соответствии с которыми в однородной среде волны распространяются прямолинейно. На границе раздела двух сред происходит *отражение* или *преломление* радиоволн. При отражении от идеально гладкой поверхности волна возвращается в ту среду, из которой приходит, а при преломлении — переходит в другую среду, причем направление ее распространения изменяется.

Направление векторов напряженности электрического и магнитного полей на границе раздела сред в общем случае произвольное. Для определения поля на поверх-

ности раздела эти векторы удобно разложить на две составляющие (рис. 10.10), одна из которых направлена по касательной к поверхности (тангенциальная составляющая), а другая перпендикулярна поверхности (нормальная составляющая).

**Граничные условия** определяют электромагнитное поле на границе раздела реальной и идеально проводя-

Рис. 10.10. Разложение вектора  $E$  на тангенциальную и нормальную составляющие



щей среды: у поверхности идеального проводника электрическое поле не имеет тангенциальной составляющей, а магнитное — нормальной составляющей. Это значит, что линии напряженности электрического поля всегда перпендикулярны, а линии магнитной индукции всегда параллельны поверхности идеального проводника. Отсюда следует, что электромагнитное поле не проникает внутрь идеального проводника. По мере уменьшения проводимости среды, на которую падают радиоволны, линии напряженности электрического поля все больше отклоняются от перпендикуляра к поверхности раздела, в электрическом поле появляется тангенциальная составляющая напряженности, волны глубже проникают в среду и потери в среде возрастают.

Кроме отражения и преломления радиоволн они способны к интерференции, дифракции и рефракции.

*Интерференцией* называют сложение электромагнитных волн в пространстве, приводящее к образованию результирующей волны. Интенсивность этой волны, т. е. напряженность  $E$  или  $H$ , определяется сдвигом фаз между взаимодействующими волнами. Если, например, этот сдвиг равен нулю, интенсивность результирующей волны увеличивается прямо пропорционально количеству взаимодействующих волн.

*Дифракция* — это способность радиоволн «огibtать» различные препятствия, находящиеся на пути их прямолинейного распространения. Явление дифракции проявляется тем заметнее, чем больше длина волны по сравнению с размерами поверхности, на которую они падают.

*Рефракция* — явление «искривления» лучей радиоволн. Она сходна с преломлением волн, но проявляется в средах, в которых параметры  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  изменяются постепенно, а не скачкообразно.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 10.1. Что такое напряженность электрического и магнитного полей, как графически изображаются эти поля?
- 10.2. Поясните смысл понятия «поток вектора напряженности поля через поверхность  $S$ ».
- 10.3. Объясните, что происходит с током проводимости в электрической цепи, содержащей конденсатор.
- 10.4. Поясните смысл понятия «циркуляция вектора напряженности поля по замкнутому контуру».
- 10.5. Перечислите основные законы, которые справедливы для электрического и магнитного полей.
- 10.6. Сформулируйте выводы, следующие из уравнений Максвелла.
- 10.7. Объясните, как возникают электромагнитные волны.
- 10.8. Какие характеристики отличают сферические электромагнитные волны от плоских волн?
- 10.9. Что называется длиной радиоволны?
- 10.10. Поясните смысл вектора Пойнтинга.
- 10.11. Что такое поляризация радиоволны? Какие бывают виды поляризации?
- 10.12. Сформулируйте граничные условия на границе идеально проводящей среды.
- 10.13. Перечислите оптические свойства радиоволн и дайте краткую характеристику этих свойств.

## ГЛАВА 11.

### ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

В предыдущей главе были рассмотрены свободные электромагнитные волны, распространяющиеся в пространстве между передающей и приемной антеннами. Кроме свободных существуют направляемые волны, распространяющиеся вдоль искусственно сооружаемых направляющих систем, к которым, в первую очередь, можно отнести длинные линии.

Простейшая длинная линия, называемая двухпроводной, состоит из двух параллельных проводов одинакового диаметра, разделенных диэлектриком (см. рис. 1.4, *a*). Часто применяются коаксиальные линии, в которых один провод расположен внутри другого, а пространство между проводами обычно заполнено твердым диэлектриком (см. рис. 1.4, *г*).

Длинная линия относится к электрическим цепям с распределенными параметрами. В гл. 3 указывалось, что если один из геометрических размеров цепи (в данном случае — длина  $l$ ) равен или больше длины волны действующего колебания, такая цепь должна рассматриваться как система с распределенными по длине индуктивностью, емкостью, активным сопротивлением и активной проводимостью. Практически распределенный характер параметров линии учитывают, если  $l \geq \lambda/4$ .

В данной главе рассматриваются основные свойства и применение длинных линий. Главное внимание уделяется следующим вопросам:

1. *Какими основными параметрами характеризуется длинная линия, какова ее схема замещения?*

2. *Как протекает процесс распространения энергии вдоль линии?*

3. *Каковы особенности режимов бегущих, стоячих и смешанных волн в линиях?*

4. *Чем определяется входное сопротивление линии?*

5. *Какими коэффициентами характеризуется отражение волн в линиях?*

6. *В каких устройствах применяются длинные линии?*

### 11.1. Схема замещения и основные параметры длинных линий

**Основные параметры.** Электрическая схема линии длиной  $l$  показана на рис. 11.1, а. К точкам 1—1 подключен генератор, ЭДС  $\dot{E}$  которого изменяется по синусоидальному закону. Внутреннее сопротивление  $\underline{Z}_i$  генератора в общем случае комплексное. Сопротивление  $\underline{Z}_n$  нагрузки подключается к точкам 2—2.

Схема замещения длинной линии (рис. 11.1, б) представляет собой последовательное соединение множества элементарных участков (*ячеек*) длиной  $dx$ , каждый из которых имеет некоторую индуктивность  $L_1 dx$ , емкость  $C_1 dx$ , активное сопротивление  $R_1 dx$  и активную проводимость  $G_1 dx$ , где  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $R_1$ ,  $G_1$  — параметры, приходящиеся на единицу длины линии и называемые *первичными* (или погонными). Если эти параметры имеют одинаковое значение в любом сечении линии, линию называют *однородной*.

Для линий, используемых в радиотехнических устройствах, обычно справедливы неравенства:  $\omega L_1 \gg R_1$ ,

$\omega C_1 \gg G_1$ , где  $\omega$  — угловая частота генератора. Такие линии называют *линиями без потерь*. Схема замещения линии без потерь изображена на рис. 11.1, в. Как видим, эта схема представляет собой последовательное соединение  $n$  звеньев электрических фильтров нижних частот при  $n \rightarrow \infty$ .

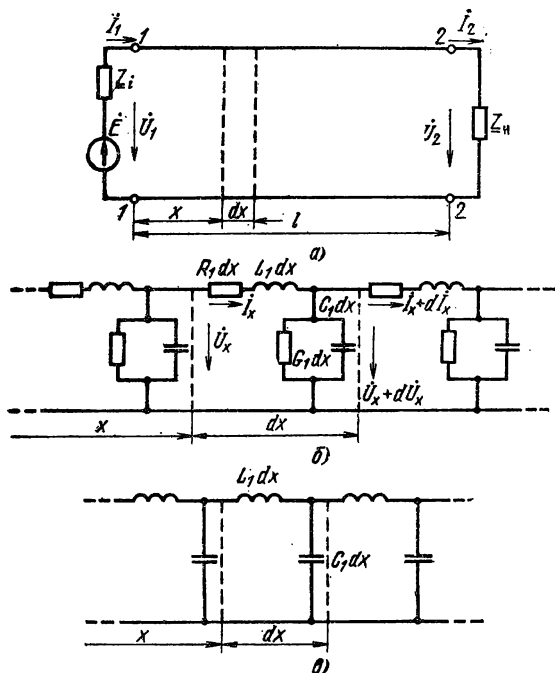


Рис. 11.1. Длинная линия и схемы ее замещения

Первичные параметры зависят от конструкции линии и от свойств диэлектрика между проводами. В двухпроводной линии с воздушным диэлектриком погонные индуктивность, мкГн/м, и емкость, пФ/м:

$$L_1 \approx 0,92 \lg(a/r), \quad C_1 \approx 12,1/\lg(a/r), \quad (11.1)$$

где  $a$  — расстояние между центрами проводов линии,  $r$  — радиус провода (рис. 11.2, а).

В коаксиальной линии

$$L_1 \approx 0,46 \lg(D/d), \quad C_1 \approx 24,1 \epsilon_r / \lg(D/d), \quad (11.2)$$

где  $\epsilon_r = \epsilon_a/\epsilon_0$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между прово-

дами линии;  $D$  и  $d$  — диаметры проводов (рис. 11.2, б).

С помощью схемы замещения однородной линии (см. рис. 11.1, б) можно составить уравнения для тока и напряжения в любом сечении линии  $x$ , действующих в любой момент времени  $t$ . Выделим на линии элементарный участок  $dx$ , расположенный на расстоянии  $x$  от ее нача-

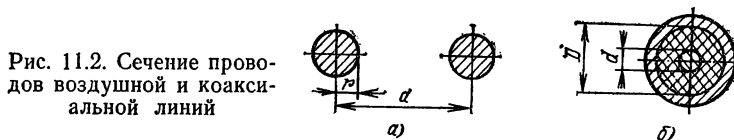


Рис. 11.2. Сечение проводов воздушной и коаксиальной линий

ла, и определим разность напряжений и токов в начале и конце этого участка:

$$\dot{U}_x - (\dot{U}_x + d\dot{U}_x) = -d\dot{U}_x = \dot{I}_x R_1 dx + \dot{I}_x j \omega L_1 dx,$$

$$\dot{I}_x - (\dot{I}_x + d\dot{I}_x) = -d\dot{I}_x = \dot{U}_x G_1 dx + \dot{U}_x j \omega C_1 dx.$$

Из этих выражений получаются линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, называемые *телеграфными уравнениями*:

$$d^2 \dot{U}_x / dx^2 = \underline{Z}_1 \underline{Y}_1 \dot{U}_x; \quad d^2 \dot{I}_x / dx^2 = \underline{Z}_1 \underline{Y}_1 \dot{I}_x, \quad (11.3)$$

где  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$  — комплексное сопротивление последовательной ветви участка  $dx$ ;  $\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1$  — комплексная проводимость параллельной ветви этого участка.

Уравнения (11.3) дают возможность исследовать различные режимы работы длинных линий.

Решением (11.3) в частном случае, когда рассматривается линия без потерь, являются следующие выражения:

$$\dot{U}_x = \dot{U}_1 \cos \beta x + j \dot{I}_1 Z_c \sin \beta x, \quad (11.4)$$

$$\dot{I}_x = \dot{I}_1 \cos \beta x - (j \dot{U}_1 \sin \beta x) / Z_c,$$

где  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  — напряжение и ток в начале линии;  $x$  — координата расстояния, отсчитываемая от начала линии.

Во многих случаях известны значения напряжения  $\dot{U}_2$  и тока  $\dot{I}_2$  в конце линии. Тогда (11.4) принимают следующий вид (при условии, что координата  $y = l - x$  отсчитывается от конца линии):

$$\dot{U}_y = \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{I}_2 Z_c \sin \beta y,$$

$$\dot{I}_y = \dot{I}_2 \cos \beta y + (j \dot{U}_2 \sin \beta y) / Z_c. \quad (11.5)$$

В уравнения (11.4) и (11.5) входят величины  $\beta$  и  $Z_c$ , называемые соответственно *коэффициентом фазы* (волновым числом) и *волновым сопротивлением линии*. Эти величины можно выразить через первичные параметры  $L_1$  и  $C_1$ :

$$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}; \quad Z_c = \sqrt{L_1 / C_1}. \quad (11.6)$$

**Вторичные параметры.** Коэффициент фазы и волновое сопротивление называют вторичными параметрами линии. Как будет показано дальше, коэффициент  $\beta$  характеризует изменение фазы напряжения или тока, приходящееся на единицу длины линии.

Волновое сопротивление линии имеет такой же смысл, как характеристическое сопротивление электрического фильтра, что следует из аналогии схемы замещения элементарного участка  $dx$  линии схеме ФНЧ (сравни рис. 11.1, *в* и 8.7, *а*). Однако в линии без потерь, в отличие от фильтра, это сопротивление не зависит от частоты, следовательно, если нагрузкой линии является активное сопротивление  $R_n = Z_c$ , она будет согласована на всех частотах.

Найдем волновые сопротивления воздушной двухпроводной и коаксиальной линий, подставив в формулу для  $Z_c$  значения  $L_1$  и  $C_1$  из (11.1) и (11.2). После вычислений получаем: для воздушной линии  $Z_c \approx 276 \lg(a/r)$ , Ом; для коаксиальной линии с твердым диэлектриком  $Z_c \approx [138 \lg(D/d)] / \sqrt{\epsilon_r}$ , Ом.

Кроме коэффициента фазы и волнового сопротивления к вторичным параметрам линий относится *скорость распространения энергии и коэффициент ослабления*. Смысл этих параметров поясняется в § 11.2.

## 11.2. Распространение энергии в линии без потерь. Бегущие волны

**Образование бегущих волн.** Предположим, что к однородной линии без потерь, имеющей бесконечную длину, подключен генератор постоянного напряжения  $U_-$  (рис. 11.3, *а*). В момент подключения начинается заряд емкости  $C'_1$  элементарного участка  $l$  через индуктивность  $L'_1$ . Напряжение на емкости увеличивается постепенно, так как из-за влияния ЭДС самоиндукции, возникающей в  $L'_1$ , ток заряда нарастает плавно. К моменту времени  $t_1$  емкость  $C'_1$  заряжается до напряжения  $u = U_-$ .

Одновременно с процессом заряда емкости  $C'_1$  происходит ее разряд через индуктивность  $L'_2$  и емкость  $C'_2$  второго элементарного участка. Емкость  $C'_2$  постепенно заряжается, а связанное с этим уменьшение напряжения на емкости  $C'_1$  компенсируется источником  $U_-$ . Через емкость  $C'_1$  проходят равные, но противоположно направ-

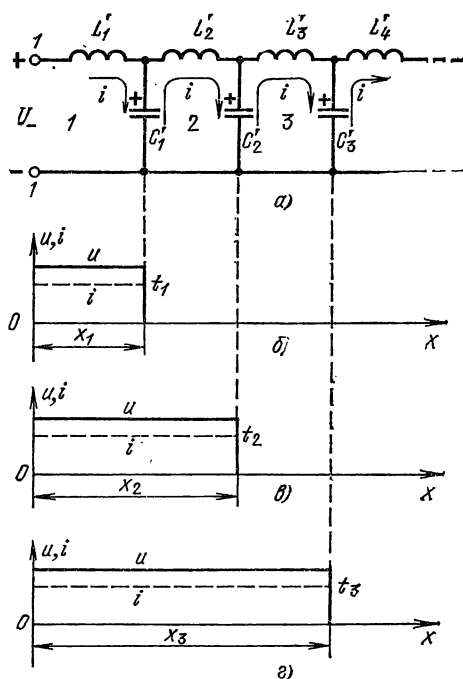


Рис. 11.3. Распространение постоянного напряжения вдоль линии

ленные токи, поэтому результирующий ток в емкости  $C'_1 = 0$ . Следовательно, можно считать, что ток генератора заряжает емкость  $C'_2$  через индуктивности  $L'_1$  и  $L'_2$ . Заряд емкости  $C'_2$  заканчивается к моменту времени  $t_2$ . Одновременно происходит заряд емкости  $C'_3$  через индуктивности  $L'_1$ ,  $L'_2$ ,  $L'_3$  и т. д.

В результате такого процесса заряда емкостей элементарных участков в линии создается волна тока и на-



пряжения, называемая *бегущей*. По мере ее распространения в линии устанавливается постоянный ток и напряжение. Описанный процесс иллюстрируется рис. 11.3, б, в, г.

Ток в любом сечении линии один и тот же и определяется отношением напряжения  $U_-$  к волновому сопротивлению  $Z_c$  линии. Поэтому, если линию нагрузить сопротивлением  $R_n = Z_c$ , через него будет проходить ток, равный току в линии. Отсюда следует, что в согласованной линии вся подводимая активная мощность поглощается нагрузкой. Этого не происходит, если  $R_n \neq Z_c$ .

Пусть, например,  $R_n = 100$  Ом,  $Z_c = 50$  Ом,  $U_- = 50$  В. Тогда ток в линии  $i = 50/50 = 1$  А, а ток в нагрузке  $i_n = 50/100 = 0,5$  А. Оставшиеся 0,5 А создают в линии бегущую волну, мощность которой равна разности между мощностью поступающей от генератора, и мощностью, поглощенной нагрузкой. Эта волна распространяется от нагрузки к генератору и поэтому называется *отраженной* в отличие от *падающей волны*, распространяющейся от генератора к нагрузке. Отраженную волну можно рассматривать как процесс поочередного заряда емкостей элементарных участков линии, происходящий в направлении от конца линии к ее началу.

Рассмотрим, как будут изменяться напряжение и ток в согласованной линии длиной  $l = \lambda/2$ , если напряжение генератора изменяется по синусоидальному закону  $u = U_m \sin \omega t$  (рис. 11.4, а). По такому же закону будет меняться ток в начале линии  $i = u/Z_c = (U_m \sin \omega t)/Z_c = I_m \sin \omega t$ .

В момент включения генератора напряжение и ток в линии равны нулю. В течение промежутка времени  $\Delta t_1 = T/8$  напряжение на входе линии увеличится от 0 до  $0,7 U_m$ , а ток — от 0 до  $0,7 I_m$  (действительно,  $i = I_m \sin \omega t = I_m \sin(2\pi t/T) = I_m \sin(2\pi T/8T) = I_m \sin(2\pi/8) = I_m \sin 45^\circ = I_m \sqrt{2}/2 \approx 0,7 I_m$ ). При этом в линии возникнет бегущая волна тока, распространяющаяся со скоростью  $v$ . За время  $\Delta t_1$  волна достигнет сечения линии  $x_1 = vT/8 = \lambda/8$ , где  $vT = \lambda$ . В момент времени  $t_1$  ток в линии распределится следующим образом: на входе линии  $i \approx 0,7 I_m$ , в сечениях  $x \gg x_1$ , ток  $i = 0$  (рис. 11.4, б, кривая 1).

Через промежуток времени  $\Delta t_2 = 2\Delta t_1 = T/4$ , когда напряжение на входе линии станет равным  $U_m$ , волна тока достигнет сечения  $x_2 = \lambda/4$ ; ток на входе линии при этом  $i = I_m$  (рис. 11.4, б, кривая 2).

Аналогичными рассуждениями можно показать, что в момент времени  $t_3$  ток на входе линии уменьшится до  $0,7 I_m$  и волна тока распространится до сечения  $x_3$ . К мо-

менту времени  $t_4$  волна тока достигает конца линии, а ток на ее входе станет равным нулю (рис. 11.4, б, кривые 3, 4). Одновременно с волной тока вдоль линии распространяется волна напряжения, причем эти волны сов-

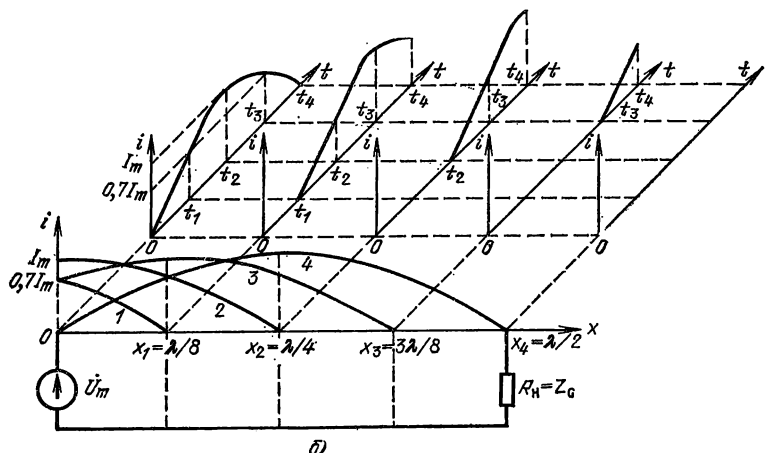


Рис. 11.4. Диаграммы, поясняющие распространение волны тока в линии

падают по фазе (на рис. 11.4 графики волны напряжения не показаны).

Обратим внимание на неравномерное распределение тока вдоль линии, которое объясняется запаздыванием по времени бегущей волны, которое тем больше, чем дальше отстоит от начала линии рассматриваемое сечение. Сравним для этого графики изменения тока во времени в сечениях линии  $x = 0, x_1, x_2, x_3, x_4$  (рис. 11.4, б). Сравнение показывает, что если в сечении линии  $x=0$  изменения тока во времени начинаются при  $t=0$ , то в сечении  $x=x_1=\lambda/8$  при

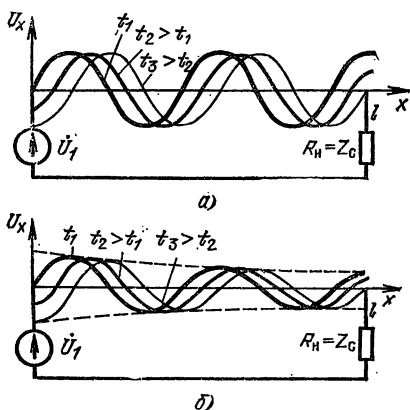


Рис. 11.5. Бегущие волны в идеальной и реальной линиях

$t=t_1=T/8$ , в сечении  $x=x_2=\lambda/4$  при  $t=t_2=T/4$  и т. д.

**Уравнения бегущих волн напряжения и тока в линии без потерь.** Пусть мгновенное значение напряжения генератора  $u_1=U_{m1}\sin\omega t$ . Тогда в произвольном сечении линии, находящемся на расстоянии  $x$  от ее начала, напряжение  $u_x$  будет запаздывать на время  $t_x=x/v$ , поэтому можно записать  $u_x=U_{mx}\sin\omega(t-t_x)=U_{mx}\sin(\omega t-\omega t_x)=U_{mx}\sin[\omega t-(\omega x/v)]$ .

Рассмотрим отношение  $\omega/v$ . Угловая частота  $\omega$  показывает, на сколько радиан или градусов в секунду изменяется фаза колебания в сечении  $x$  линии, а скорость  $v$  — на какое расстояние перемещается волна за это время. Поэтому, разделив  $\omega$  на  $v$ , получим число, показывающее изменение фазы волны, приходящееся на единицу длины линии, т. е. коэффициент фазы  $\beta$ . Учитывая, что  $\omega=2\pi f$ , а  $v=\lambda t$ , получаем коэффициент фазы, рад/с

$$\beta = \omega/v = 2\pi f/\lambda f = 2\pi/\lambda. \quad (11.7)$$

Поскольку рассматривается линия без потерь, амплитуды напряжения и тока во всех сечениях одинаковые, следовательно, можно записать

$$u_x = U_{m1}\sin[\omega t - (\omega x)/v] = U_{m1}\sin(\omega t - \beta x). \quad (11.8)$$

Аналогичное выражение получается для тока:

$$i_x = [U_{m1}\sin(\omega t - \beta x)]/Z_c. \quad (11.9)$$

Соотношения (11.8), (11.9) являются уравнениями бегущих волн в линии без потерь. Как видно из этих уравнений, ток и напряжение являются функциями двух переменных: времени и координаты расстояния, что в известной степени усложняет анализ работы цепей с распределенными параметрами по сравнению с цепями с сосредоточенными параметрами.

Пользуясь уравнениями бегущих волн, можно построить распределения тока и напряжения вдоль линии для различных моментов времени (рис. 11.5, а). Из рисунка видно, что волна как бы перемещается по линии с определенной скоростью. Из (11.6) с учетом (11.7) скорость

$$v = 1/\sqrt{L_1 C_1}. \quad (11.10)$$

Подставив в (11.10) значения  $L_1$  и  $C_1$  из (11.1) воздушной двухпроводной линии и проводя вычисления, получим, что  $v \approx 3 \cdot 10^8$  м/с, т. е. скорость распространения бегущей волн близка к скорости  $c_0$  света в вакууме.

Подстановка в (11.10) значений  $L_1$  и  $C_1$  (11.2) коаксиальной линии с твердым диэлектриком дает:  $v_1 \approx \approx v / \sqrt{\epsilon_r} = c_0 / \sqrt{\epsilon_r}$ . Так как  $\epsilon_r > 1$ , получаем, что скорость распространения бегущих волн в такой линии меньше  $c_0$ , поэтому длина волны колебаний оказывается меньше  $\lambda_0$ . Этот вывод справедлив для любой линии, провода которой расположены в реальной среде.

**Уравнения бегущих волн для линии с потерями.** В линии с потерями часть энергии бегущих волн необратимо преобразуется в проводах в другие виды: тепловую, энергию излучения и т. д. Поэтому амплитуда напряжения и тока волны постепенно уменьшается (затухает) по мере распространения волны. Можно показать, что затухание происходит по экспоненциальному закону (рис. 11.5, б). Для линии с потерями уравнения бегущих волн

$$\begin{aligned} u_x &= U_{m1} e^{-\alpha x} (\sin \omega t - \beta x), \\ i_x &= [U_{m1} e^{-\alpha x} (\sin \omega t - \beta x)] / Z_c, \end{aligned} \quad (11.11)$$

где  $\alpha$  — коэффициент ослабления, характеризующий уменьшение амплитуд напряжения или тока, приходящееся на единицу длины линии.

При учете первичных параметров линии коэффициент ослабления, дБ/м

$$\alpha \approx 8,7 R_1' \sqrt{L_1 / C_1}, \quad (11.12)$$

где  $R_1' = R_1 / 2 \approx 0,04 \sqrt{f} / r$  — активное сопротивление, Ом, одного метра медного провода радиусом  $r$ , мм, на частоте  $f$ , МГц.

Таким образом, коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , входящие в уравнения (11.11), характеризуют изменение амплитуды и фазы бегущих волн, распространяющихся вдоль линии. Эти коэффициенты являются составляющими комплексной величины, называемой *коэффициентом распространения*  $\gamma = \alpha + j\beta$ .

**Входное сопротивление линии без потерь.** Перейдем к рассмотрению одной из важных характеристик линии — входного сопротивления, под которым понимается отношение  $Z_{вх} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ . В линии без потерь, нагруженной сопротивлением  $R_H = Z_c$ , входное сопротивление активно и равно сопротивлению нагрузки, т. е.

$$Z_{вх} = R_{вх} = Z_c = R_H. \quad (11.13)$$

Активный характер входного сопротивления означает, что мгновенные значения напряжения и тока на входе

линии любой длины совпадают по фазе, что видно из сопоставления (11.8) и (11.9). При этом вся активная мощность, подводимая к входу линии, поглощается нагрузкой, что означает отсутствие в линии отраженных волн.

**Применение теории электромагнитного поля к анализу процесса распространения энергии по линии.** Пусть имеется идеальная двухпроводная линия длиной  $l = \lambda$ ,

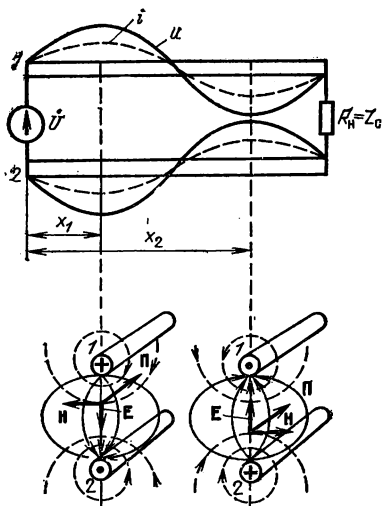


Рис. 11.6. Электромагнитное поле бегущих волн

причем диэлектрик, разделяющий провода, также идеальный. Линия согласована, поэтому в ней распространяются бегущие волны напряжения и тока. Для некоторого произвольного времени  $t_1$  волны распределены в линии так, как показано на рис. 11.6.

Поскольку между проводами линии имеется переменное напряжение, связанное с электрическим полем, а по проводам проходит переменный ток, связанный с магнитным полем, можно считать, что вдоль линии распространяется бегущая электромагнитная волна. Выделим в линии сечения  $x_1$

и  $x_2$ , соответствующие амплитудам напряжения и тока, и определим направление вектора Пойнтинга в этих сечениях (за положительное направление тока примем направление от генератора к нагрузке на участке линии с положительными амплитудами напряжения и тока).

Как следует из рис. 11.6, в выбранных сечениях вектор  $\Pi$  имеет одно и то же направление (к нагрузке), несмотря на то, что токи в этих сечениях одинаковы и направлены навстречу друг другу. Следовательно, бегущая электромагнитная волна переносит энергию от генератора к нагрузке; провода линии образуют как бы канал, направляющий поток энергии.

### 11.3. Стоячие волны в линии без потерь

**Образование стоячих волн.** Если вся энергия падающей волны отражается от конца линии и полностью возвращается генератору, возникают две бегущие волны с одинаковой амплитудой, распространяющиеся по линии навстречу друг другу с одинаковой скоростью.

В результате сложения (интерференции) этих волн образуются *стоячие волны*.

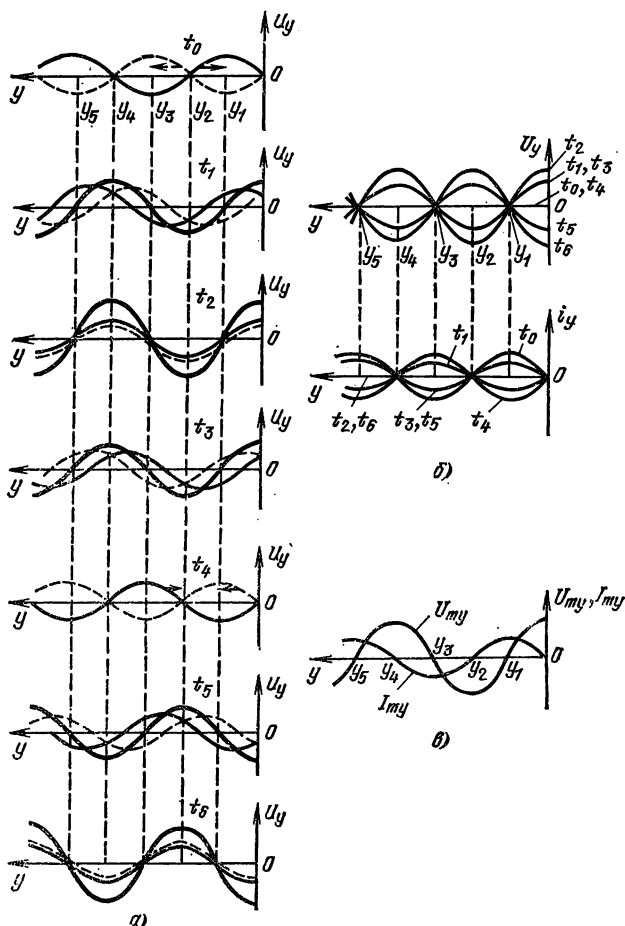


Рис. 11.7. Стоячие волны в разомкнутой линии

Стоячие волны возникают при холостом ходе ( $Z_n = \infty$ ), коротком замыкании ( $Z_n = 0$ ) или при нагрузке линии реактивным сопротивлением, т.е. в тех случаях, когда в нагрузке не происходит необратимого преобразования энергии.

**Стоячие волны при холостом ходе.** Рассмотрим холостой ход линии. Так как сопротивление нагрузки  $Z_n = \infty$ , ток в конце линии равен нулю, что возможно, если в сечении  $x=l$  (или  $y=0$ ) токи падающей и отраженной волн одинаковы, но сдвинуты по фазе на угол  $180^\circ$ . Равенство нулю тока означает, что в конце линии энергия магнитного поля падающей электромагнитной волны преобразуется в энергию ее электрического поля, в результате чего напряженность электрического поля и напряжения удваиваются. Отсюда можно сделать вывод: напряжения падающей и отраженной волн в конце линии имеют одинаковую фазу. Таким образом, напряжение отражается от конца разомкнутой линии без изменения фазы, а ток при отражении меняет фазу на противоположную.

На рис. 11.7, а приведены диаграммы, на которых показаны распределения мгновенных значений напряжения падающих (непрерывная линия), отраженных (штриховая линия) и стоячих (утолщенная линия) волн в линии в моменты времени  $t_0 \dots t_6$ , разделенные промежутками  $T/8$ . Направления движения волн указаны стрелками. Начало координат диаграмм совмещено с концом линии, так как именно в этом сечении в любой момент времени известно, что напряжения падающей и отраженной волн имеют одинаковую фазу.

Из рассмотрения диаграмм следует, что колебание, полученное в результате сложения напряжений бегущих падающей и отраженной волн, вдоль линии не перемещается. Это и есть *стоячая волна напряжения*. Аналогично можно показать образование *стоячей волны тока*. Необходимо только помнить, что фазы токов падающей и отраженной волн в конце линии противоположны. Распределение напряжения и тока стоячих волн вдоль линии для фиксированных моментов времени  $t_0 \dots t_6$ , следующих через  $T/8$ , изображено на рис. 11.7, б.

Уравнения стоячих волн. Эти уравнения можно получить из (11.5) после подстановки  $\dot{I}_2 = 0$  и ряда преобразований

$$\begin{aligned} u_y &= 2U_{\text{пад}} \cos \beta y \sin \omega t, \\ i_y &= [2U_{\text{пад}} \sin \beta y \sin (\omega t + 90^\circ)]/Z_c, \end{aligned} \quad (11.14)$$

где  $U_{\text{тпад}}$  — амплитуда напряжения падающей волны в конце линии.

В (11.14) выражения  $2U_{\text{тпад}}\cos\beta y$  и  $(2U_{\text{тпад}}\sin\beta y)/Z_0$  представляют собой соответственно амплитуды напряжения  $U_{\text{мс}}$  и тока  $I_{\text{мс}}$  стоячих волн. Распределение амплитуд вдоль линии показано на рис. 11.7, в.

Свойства стоячих волн. Из (11.14), а также из рассмотрения диаграмм, изображенных на рис. 11.7, а, б, в, следует:

1. В любом сечении линии напряжение и ток изменяются во времени по синусоидальному закону, причем угол сдвига фаз между ними  $90^\circ$ . В моменты времени  $t_2, t_6$ , соответствующие максимальному напряжению, ток в линии равен нулю, при максимальном токе в моменты времени  $t_0, t_4$  напряжение в линии равно нулю (рис. 11.7, б). Можно показать, что в моменты времени  $t_2, t_6$  средняя энергия электрического поля на каждом четвертьволновом отрезке линии максимальная, а энергия магнитного поля равна нулю. В моменты времени  $t_0, t_4$ , наоборот, наблюдается максимум средней энергии магнитного поля; энергия электрического поля равна нулю. В интервалах между указанными моментами времени происходит взаимное преобразование энергий электрического и магнитного полей, причем сумма этих энергий остается постоянной (исключение составляет конец линии, где вся энергия сосредоточена в электрическом поле). Напомним, что аналогичные энергетические процессы протекают при резонансе в идеальном колебательном контуре.

2. В сечениях линии  $y=0, y_2=\lambda/2, y_4=\lambda$ , т. е. на расстояниях от конца линии, кратных  $\lambda/2$ , амплитуда напряжения максимальная, а ток равен нулю. Такие сечения называются *пучностями напряжения и узлами тока*. В сечениях  $y_1=\lambda/4, y_3=3\lambda/4, y_5=5\lambda/4$ , т. е. на расстояниях от конца линии, кратных нечетному числу  $\lambda/4$ , наоборот, напряжение равно нулю, а ток максимальный. Эти сечения называют *узлами напряжения и пучностями тока*.

3. Фаза напряжения во всех сечениях линии одна и та же, поэтому максимальные или нулевые значения напряжения получаются в одни и те же моменты времени. Однако максимумы напряжения в разных сечениях различные из-за изменения амплитуды напряжения вдоль линии. Такой же вывод справедлив для тока в линии.

4. Волновое сопротивление линии равно отношению



амплитуд напряжения  $U_{мп}$  и тока  $I_{мп}$  в пучностях. Чтобы убедиться в этом, подставим в выражения для амплитуд  $U_{мс}$  и  $I_{мс}$  значения  $\cos my=1$  и  $\sin my=1$ . Получим  $U_{мп}=2U_{мпад}$ ,  $I_{мп}=2U_{мпад}/Z_c$ , откуда  $Z_c=U_{мп}/I_{мп}$ .

Входное сопротивление линии. Разомкнутая линия без потерь имеет реактивное входное сопротивление

$$X_{вх.х} = -Z_c \operatorname{ctg} \beta y. \quad (11.15)$$

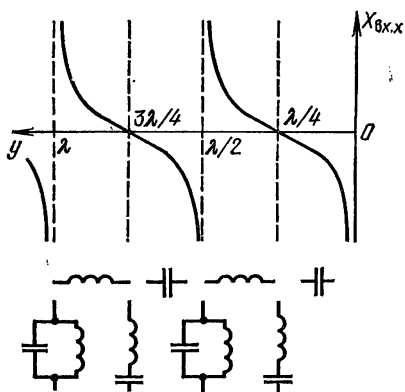


Рис. 11.8. Зависимость входного сопротивления от длины линии

Зависимость входного сопротивления от координаты  $y$  (или, иначе говоря, от длины линии) иллюстрируется с помощью рис. 11.8. Из рассмотрения этого рисунка видно, что при изменении длины входное сопротивление линии может быть емкостным или индуктивным и изменяться в пределах от 0 до  $\infty$ . Если длина линии равна нечетному числу  $\lambda/4$ , ее входное сопротивление нулевое, если четному — то бесконечное.

Рассмотрим, как будет меняться входное сопротивление линии длиной  $l=\lambda/4$  при изменении частоты генератора  $f$ . Пусть частота уменьшилась  $f_1 < f$ . Это значит, что длина волны колебаний генератора возросла до значения  $\lambda_1 > \lambda$ , следовательно, можно записать  $\lambda_1/4 > \lambda/4$  или  $l < \lambda_1/4$ . Таким образом, на меньшей частоте генератора нарушается соотношение между  $l$  и  $\lambda/4$ , поэтому, как видно из рис. 11.8, входное сопротивление линии становится емкостным. Аналогично можно показать, что если  $f_2 > f$ , то  $\lambda_2 < \lambda$  и  $l > \lambda/4$ . В этом случае входное сопротивление индуктивное. Как видим, характер зависимости входного сопротивления от частоты такой же, как у последовательного контура.

Заметим, что на фиксированной частоте генератора входное сопротивление определяется длиной линии. Так, при уменьшении длины  $y < \lambda/4$  входное сопротивление становится емкостным, а при увеличении  $\lambda/2 > y > \lambda/4$  — индуктивным.

Зависимость от частоты входного сопротивления разомкнутой линии длиной  $\lambda/2$  такая же, как у параллельного контура: при  $f_1 < f$  оно индуктивное, при  $f_2 > f$  — емкостное.

Если учесть, что характер энергетических процессов в четвертьволновых отрезках линии такой же, как в колебательном контуре, можно сделать вывод: участки разомкнутой линии, длина которых кратна  $\lambda/4$ , эквивалентны идеальному последовательному или параллельному контуру, настроенному в резонанс. В связи с этим линию, имеющую длину, кратную  $\lambda/4$ , называют *резонансной*.

Входное сопротивление линии с потерями содержит, кроме реактивной, активную составляющую, которая зависит от частоты и длины линии. Поэтому резонансные отрезки реальных разомкнутых линий эквивалентны реальным колебательным контурам, имеющим активные потери.

**Стоячие волны в короткозамкнутой линии.** Поскольку в такой линии  $Z_n = 0$ , напряжение  $U_2 = 0$  и энергия полностью отражается от конца, образуя отраженные волны тока и напряжения. При этом фаза падающей волны тока совпадает с фазой отраженной, а фазы падающих и отраженных волн напряжения противоположны. В результате сложения падающих и отраженных волн образуются стоячие волны.

Уравнения стоячих волн при коротком замыкании линии:

$$\begin{aligned} u_y &= 2I_{\text{тпад}} Z_c \sin \beta y \sin (\omega t + 90^\circ); \\ i_y &= 2I_{\text{тпад}} \cos \beta y \sin \omega t, \end{aligned} \quad (11.16)$$

где  $I_{\text{тпад}}$  — амплитуда тока падающей волны в конце линии;  $2I_{\text{тпад}} Z_c \sin \beta y$  — амплитуда напряжения стоячей волны;  $2I_{\text{тпад}} \cos \beta y$  — амплитуда тока стоячей волны.

Анализ (11.16) показывает, что в конце короткозамкнутой линии располагается пучность тока и узел напряжения (рис. 11.9, а). Из сравнения рис. 11.9, а и 11.7, в видно, что кривые изменения амплитуд напряжения и тока вдоль разомкнутой и короткозамкнутой линий смещены на  $\lambda/4$ .

Входное сопротивление короткозамкнутой линии

$$X_{\text{вх.к}} = Z_c \operatorname{tg} \beta y \quad (11.17)$$

имеет реактивный характер и зависит от длины линии и частоты (рис. 11.9, б). Резонансные отрезки линии длиной, кратной нечетному числу  $\lambda/4$ , имеют бесконечно

большое входное сопротивление и эквивалентны идеальному параллельному контуру; при длине линии, кратной четному числу  $\lambda/4$ , входное сопротивление равно нулю и линия эквивалентна идеальному последовательному контуру.

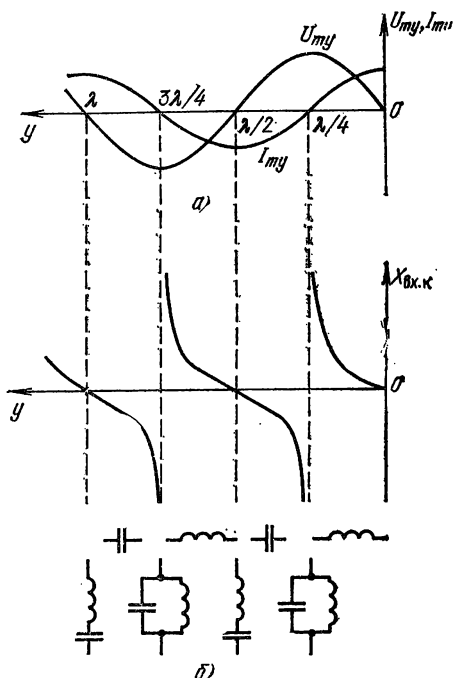


Рис. 11.9. Распределение амплитуд стоячих волн и зависимость от длины ее входного сопротивления

**Стоячие волны в линии, нагруженной реактивным сопротивлением.** В такой линии вся энергия, поступающая в нагрузку, полностью отражается от нее и возвращается генератору, в результате чего возникают стоячие волны.

Амплитуды напряжения и тока стоячих волн распределены вдоль линии по синусоидальному (косинусоидальному) закону, однако пучности и узлы напряжения (тока) сдвинуты на расстояние  $l'$  относительно сечений, отстоящих от конца линии на  $n \lambda/4$ , где  $n$  — целое число.

Этот сдвиг зависит от величины и характера реактивного сопротивления нагрузки.

Для примера на рис. 11.10 показано распределение амплитуд напряжения и тока в линии, нагруженной идеальным конденсатором. Как видно из этого рисунка, из-за сдвига узлов и пучностей стоячих волн амплитуды на-

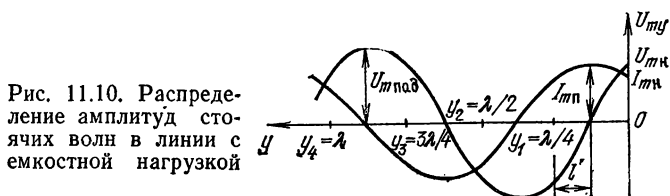


Рис. 11.10. Распределение амплитуд стоячих волн в линии с емкостной нагрузкой

пряжения и тока в нагрузке уменьшились по сравнению с их значениями в пучностях; кроме того, на  $l'$  уменьшилась длина резонансных отрезков линии.

#### 11.4. Смешанные волны в линии без потерь

**Коэффициенты, характеризующие отражение волн.** Как известно, электромагнитная энергия, переносимая падающей волной, может полностью необратимо преобразоваться в нагрузке, если ее сопротивление активное и равно волновому сопротивлению линии. При неравенстве этих сопротивлений только часть энергии преобразуется в нагрузке; оставшаяся часть возвращается генератору, образуя отраженные волны, амплитуда которых меньше амплитуды падающих волн. При сложении падающих и отраженных волн в линии возникают смешанные волны, которые можно рассматривать как сумму бегущих и стоячих волн.

Для удобства анализа работы линии в режиме смешанных волн вводятся понятия о коэффициентах бегущей и стоячей волны, а также о коэффициенте отражения.

*Коэффициентом бегущей волны  $k_b$*  называется меньшее из отношения  $R_n/Z_c$  или  $Z_c/R_n$ , а коэффициентом стоячей волны  $k_c$  — большее. Поэтому  $k_b = 1/k_c$ , причем  $k_b \leq 1$ ,  $k_c \geq 1$ .

*Коэффициентом отражения* называется отношение комплексных амплитуд напряжений отраженной  $\dot{U}_{отр}$  и падающей  $\dot{U}_{пад}$  волн, т. е.  $\rho = \dot{U}_{отр}/\dot{U}_{пад} = \rho e^{j\psi}$ .

Модуль коэффициента отражения  $\rho$  показывает, какую часть составляет амплитуда отраженной волны от амплитуды падающей, а аргумент  $\psi$  — угол сдвига фаз между напряжениями этих волн. Коэффициент отражения через отношение токов  $\rho = -I_{\text{отр}}/I_{\text{пад}}$ . Знак «минус» показывает, что сдвиг фаз между токами падающей и отраженной волн равен по величине и противоположен по знаку углу  $\psi$ .

Можно показать, что коэффициент отражения связан с сопротивлением нагрузки и волновым сопротивлением линии:

$$\underline{\rho} = \rho e^{j\psi} = (\underline{Z}_H - Z_c) / (\underline{Z}_H + Z_c). \quad (11.18)$$

Подставляя в (11.18)  $\underline{Z}_H = Z_c$ , что соответствует режиму бегущих волн, получаем:  $\rho e^{j\psi} = 0$ , откуда  $\rho = 0$ ,  $\psi = 0$ . Следовательно, в этом режиме отраженные волны отсутствуют.

В случае разомкнутой линии ( $\underline{Z}_H = \infty$ ) получаем  $\rho = 1$ ,  $\psi = 0$ , т. е. волна напряжения без изменения фазы полностью отражается от конца линии.

Для короткозамкнутой линии ( $\underline{Z}_H = 0$ )  $\rho = -1$ ,  $\psi = 180^\circ$ . Это значит, что волна напряжения отражается от конца линии полностью и меняет при этом фазу на  $180^\circ$ .

**Режим работы линии при  $R_H < Z_c$ .** Подставляя  $R_H$  в (11.18), получаем, что коэффициент отражения отрицательный и по абсолютному значению больше нуля. Следовательно, напряжение (ток) частично отражается от нагрузки, причем фаза отраженной волны напряжения противоположна фазе падающей (ток отражается без изменения фазы). В результате сложения падающих и отраженных волн образуются *смешанные волны*.

Для графической иллюстрации рассматриваемого режима удобно воспользоваться распределением действующих значений напряжения и тока (рис. 11.11, а).

Математический анализ [8] показывает, что в конце линии наблюдается максимум тока и минимум напряжения, равный действующему значению напряжения бегущей волны. При этом  $I_{y\max} = I_{m2}/\sqrt{2}$ , а  $U_{y\min} = I_{m2}Z_c k_6/\sqrt{2}$ , где  $I_{m2}$  — амплитуда тока в конце линии;  $k_6 = R_H/Z_c$ . В сечении  $y_1 = \lambda/4$  напряжение  $U_{y\max} = I_{m2}Z_c/\sqrt{2}$  становится максимальным, а ток  $I_6 = I_{y\min} = I_{m2}k_6/\sqrt{2}$  — минимальным и равным действующему

значению тока бегущей волны. Сопоставляя выражения для максимальных и минимальных значений напряжения и тока, получаем

$$U_{y\min}/U_{y\max} = I_{y\min}/I_{y\max} = k_6. \quad (11.19)$$

Во всех сечениях линии, расположенных на расстоянии, кратном  $\lambda/4$  от ее конца, напряжение и ток совпадают по фазе, поэтому эти сечения являются резонанс-

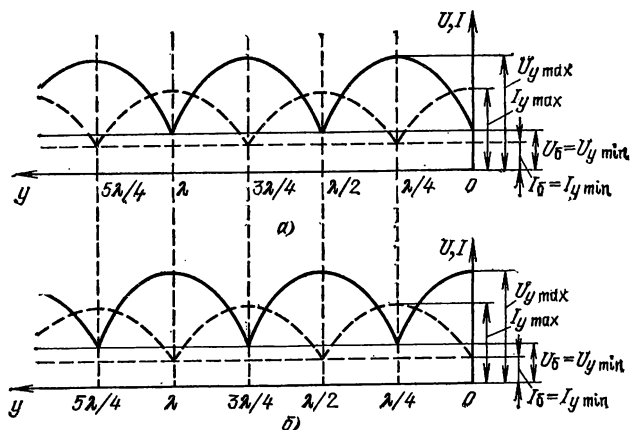


Рис. 11.11. Распределение действующих значений напряжения и тока в линии со смешанными волнами

ными. Последовательный резонанс наблюдается в сечениях, соответствующих четному числу  $\lambda/4$ , а параллельный — нечетному.

Модуль коэффициента отражения связан с коэффициентами бегущей и стоячей волн зависимостью

$$\rho = (1 - k_6)/(1 + k_6) = (k_c - 1)/(1 + k_c). \quad (11.20)$$

**Режим работы линии при  $R_n > Z_c$ .** В этом случае коэффициент отражения положительный, поэтому фаза падающей и отраженной волн напряжения одна и та же, а фазы волн тока противоположные. Образующиеся в линии смешанные волны характеризуются наличием максимума напряжения на нагрузке и минимума тока в ней (рис. 11.11, б). На расстоянии  $\lambda/4$  от конца линии напряжение минимальное, а ток максимальный. Соотношения (11.19) и (11.20) остаются справедливыми, однако  $k_6 = Z_c/R_n$ ,  $k_c = R_n/Z_c$ .

**Режим работы линии, нагруженной комплексным сопротивлением.** Смешанные волны возникают в линии, если она нагружена комплексным сопротивлением произвольной величины. Модуль коэффициента отражения может принимать любые значения в пределах от  $-1$  до  $+1$ , а аргумент — от  $0$  до  $360^\circ$  в зависимости от соотношения между активной и реактивной составляющими сопротивления нагрузки. Поэтому напряжение и ток в нагрузке имеют некоторые промежуточные значения, а резонансные сечения линии смещены относительно сечений, отстоящих от конца линии на расстояние, кратное  $\lambda/4$ .

В линии со смешанными волнами входное сопротивление комплексное, причем его активная и реактивная составляющие зависят как от длины линии, так и от частоты.

В резонансных сечениях входное сопротивление активное: при последовательном резонансе  $R_{\text{вх}} = Z_c/k_c$ , а при параллельном  $R_{\text{вх}} = Z_c k_c$ . Если линия нагружена активным сопротивлением и имеет длину, кратную нечетному числу  $\lambda/4$ , то

$$R_{\text{вх}} = Z_c^2/R_n. \quad (11.21)$$

### 11.5. Применение длинных линий

Длинные линии используются в различных радиотехнических устройствах в качестве фидеров, трансформаторов сопротивления, колебательных контуров, фильтров и т. д.

**Фидеры.** Линия, служащая для передачи электромагнитной энергии от радиопередатчика к антенне или от антенны к радиоприемнику, называется фидером. Широко распространены воздушные двухпроводные и четырехпроводные фидеры, а также гибкие коаксиальные фидеры (коаксиальные кабели).

Для эффективной передачи энергии фидер должен иметь малые собственные потери, равномерное распределение параметров по длине и должен быть согласованным как с нагрузкой, так и с внутренним сопротивлением источника энергии. При рассогласовании в фидере возникают отраженные волны, уменьшающие его КПД, под которым понимается отношение активных мощностей в нагрузке и на входе линии.

При наличии отраженных волн КПД фидера

$$\eta_{\text{ф}} = 1/[1 + \alpha l_{\text{ф}}(k_{\text{б}} + k_{\text{с}})], \quad (11.22)$$

где  $l_{\text{ф}}$  — его длина.

Наибольшее значение  $\eta_{\text{ф}}$  получается в режиме бегущих волн  $k_{\text{б}} = k_{\text{с}} = 1$ , т. е.  $\eta_{\text{фmax}} = 1/(1 + 2\alpha l_{\text{ф}}) \approx 1 - 2\alpha l_{\text{ф}}$ . Обычно в фидерах  $\alpha l_{\text{ф}} \approx 0,1$ , тогда  $\eta_{\text{фmax}} \approx 0,8$ .

Из (11.22) следует, что уменьшение  $k_{\text{б}}$  (увеличение  $k_{\text{с}}$ ) приводит к уменьшению  $\eta_{\text{ф}}$  по сравнению с  $\eta_{\text{фmax}}$ . Предположим, что  $k_{\text{б}} = 0,8$ . Тогда  $k_{\text{с}} = 1/0,8 = 1,25$  и  $\eta_{\text{ф}} = 1/(1 + 2,05 \alpha l_{\text{ф}}) \approx 0,99$   $\eta_{\text{фmax}} \approx 0,79$ . Если  $k_{\text{б}} = 0,2$ , то  $k_{\text{с}} = 5$ , а  $\eta_{\text{ф}} = 0,79$   $\eta_{\text{фmax}} \approx 0,64$ .

**Трансформаторы сопротивления.** Во многих случаях волновое сопротивление фидера отличается от сопротивления нагрузки. Для согласования фидера, т.е. устранения отраженных волн, которые уменьшают КПД, его нагрузка включается через переходное устройство, называемое трансформатором сопротивления. Таким устройством обычно является отрезок линии длиной  $\lambda/4$ , имеющей в соответствии с (11.21)  $R_{\text{вх}} \neq R_{\text{н}}$ .

Допустим, что в двухпроводном воздушном фидере  $R_{\text{н}} > Z_{\text{с}}$ . Чтобы согласовать фидер, подключим к нему нагрузку через повышающий трансформатор с входным сопротивлением  $R_{\text{вх}} = Z_{\text{стр}}^2 / R_{\text{н}} = Z_0$ , где  $Z_{\text{стр}}$  — волновое сопротивление трансформатора. Из последнего равенства определяем, что  $Z_{\text{стр}} = \sqrt{R_{\text{н}} Z_{\text{с}}}$ , откуда с учетом условия  $R_{\text{н}} > Z_{\text{с}}$  следует  $R_{\text{н}} > Z_{\text{стр}} > Z_{\text{с}}$ . Обычно трансформатор изготавливается из проводов того же диаметра, что и фидер. Для выполнения неравенства  $Z_{\text{стр}} > Z_{\text{с}}$  расстояние между проводами трансформатора необходимо увеличить (рис. 11.12, а), так как при этом, как видно из (11.1), увеличивается погонная индуктивность и уменьшается погонная емкость линии, в результате ее волновое сопротивление возрастает.

Трансформатор сопротивления позволяет согласовать фидер с нагрузкой, если ее сопротивление не содержит реактивной составляющей. При наличии такой составляющей ее можно компенсировать подключением к нагрузке отрезка короткозамкнутой линии, называемого *шлейфом*. Компенсация осуществляется при определенной длине шлейфа, которая соответствует его входному сопротивлению, равному и противоположному по знаку реактивной составляющей сопротивления нагрузки.

Необходимо отметить, что трансформаторы сопротивления и шлейфы обеспечивают согласование фидера только на одной частоте.



Металлические изоляторы. Короткозамкнутые отрезки линии длиной  $\lambda/4$  имеют очень большое входное сопротивление (в идеальной линии оно равно бесконечности), благодаря чему их можно использовать в качестве изоляторов, поддерживающих провода фидера (рис. 11.12, б). Наличие в точках *а*, *б* узла тока и пучности напряжения означает, что энергия, передаваемая

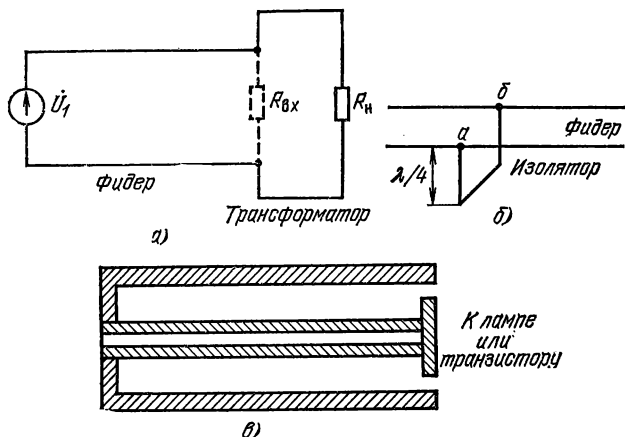


Рис. 11.12 Примеры применения длинных линий

мая по фидеру, в изолятор практически не ответвляется.

Колебательные контуры. На частотах выше 300...500 МГц колебательные контуры с сосредоточенными параметрами имеют настолько малую добротность, что их применение становится нецелесообразным. На этих и более высоких частотах в качестве колебательных контуров применяют отрезки разомкнутых или короткозамкнутых линий. Активное сопротивление таких линий незначительное, что дает возможность получить эквивалентную добротность контура около 1000 и больше.

На рис. 11.12, в приведен упрощенный эскиз конструкции колебательного контура, выполненного из отрезка короткозамкнутой коаксиальной линии. Длина линии составляет около  $\lambda/8$ , поэтому ее входное сопротивление имеет индуктивный характер. Вместе с подключенной к ней емкостью электронной лампы или транзистора и дополнительным подстроечным конденсатором, с помощью которого осуществляется изменение частоты настройки,

такая линия образует параллельный колебательный контур.

*Коаксиальные колебательные контуры* широко применяются в приемниках и передатчиках дециметрового диапазона волн.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 11.1. Изобразите схему замещения элементарного участка длинной линии с потерями и без потерь.
- 11.2. Перечислите первичные и вторичные параметры линий, объясните их смысл.
- 11.3. Определите погонную индуктивность и емкость, а также скорость распространения волн в коаксиальной линии, если  $D=10$  мм,  $d=3$  мм,  $\epsilon_r=3$ .
- 11.4. Определите волновое сопротивление воздушной двухпроводной линии, имеющей  $a=30$  см,  $r=3$  мм.
- 11.5. Поясните процесс распространения постоянного напряжения вдоль линии. Каким должно быть сопротивление нагрузки?
- 11.6. Поясните, как распространяются по линии бегущие волны при синусоидальном напряжении генератора.
- 11.7. Запишите уравнения бегущих волн в линии без потерь и проанализируйте их.
- 11.8. Какое значение и характер имеет входное сопротивление линии в режиме бегущих волн?
- 11.9. Объясните образование стоячих волн напряжения в разомкнутой линии.
- 11.10. Перечислите свойства стоячих волн в разомкнутой линии.
- 11.11. В чем сходство и различие режимов холостого хода, короткого замыкания и нагрузки линии реактивным сопротивлением?
- 11.12. Определите входное сопротивление разомкнутой и короткозамкнутой линии длиной  $y=\lambda/8$ , если  $Z_c=600$  Ом.
- 11.13. Проанализируйте зависимость входного сопротивления разомкнутой и короткозамкнутой линий от их длины и частоты генератора.
- 11.14. Что называется резонансной линией?
- 11.15. В каких случаях в линии возникают смешанные волны?
- 11.16. Какие коэффициенты характеризуют отражение волн в линиях?
- 11.17. Объясните сходство и различие режимов работы линии при  $R_n > Z_c$  и  $R_n < Z_c$ .
- 11.18. Определите, чему равны коэффициенты  $k_b$  и  $k_c$ , если  $\rho=0,5$ .
- 11.19. Приведите примеры применения длинных линий.
- 11.20. Что такое КПД фидера, от чего зависит КПД?
- 11.21. Как осуществляется согласование фидера с помощью трансформатора сопротивления?

## ВОЛНОВОДЫ И ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

По мере увеличения частоты электромагнитной энергии, передаваемой по длинным линиям, тепловые потери в них и потери на излучение возрастают. Поэтому в диапазоне дециметровых волн двухпроводные воздушные линии заменяются коаксиальными, в которых излучение энергии отсутствует.

Для передачи электромагнитной энергии в сантиметровом и более коротковолновом диапазоне применяются волноводы, представляющие собой полые металлические трубы или диэлектрические стержни (последние используются реже). Обычно металлические волноводы имеют прямоугольное или круглое сечение (см. рис. 1.4, *д, е*). Внутренние стенки волновода тщательно шлифуются и покрываются слоем серебра, что позволяет увеличить их проводимость и уменьшить потери.

Волноводы имеют ряд преимуществ перед коаксиальными линиями. Из-за отсутствия в волноводах внутреннего провода и поддерживающих его изоляторов потери в них меньше. Кроме этого, при одинаковых размерах поперечного сечения по волноводу можно передавать большую энергию, чем по коаксиальной линии. Одним из недостатков волноводов, как будет показано дальше, является невозможность передачи по ним энергии волн любой длины.

Необходимо отметить, что волноводы служат не только для передачи электромагнитной энергии. На их основе строится ряд элементов электрических схем, например колебательные системы, называемые объемными резонаторами, фильтры и т. д.

При изучении волноводов основное внимание уделим следующим вопросам:

1. *Какими параметрами характеризуется волновод и как передается электромагнитная энергия по волноводам?*
2. *Какие разновидности волноводов имеют практическое применение?*
3. *Что такое объемный резонатор, каково его устройство и работа?*

### 12.1. Передача электромагнитной энергии по волноводу

**Возможность передачи энергии по волноводу.** Предположим, что имеется согласованная двухпроводная ли-

ния, питающаяся от генератора синусоидального напряжения. В такой линии возникают бегущие волны, переносящие электромагнитную энергию. Если подключить параллельно линии четвертьволновые короткозамкнутые отрезки так, как показано на рис. 12.1, а, режим бегущих волн не изменится, поскольку входное сопротивление этих отрезков (металлических изоляторов) в точках

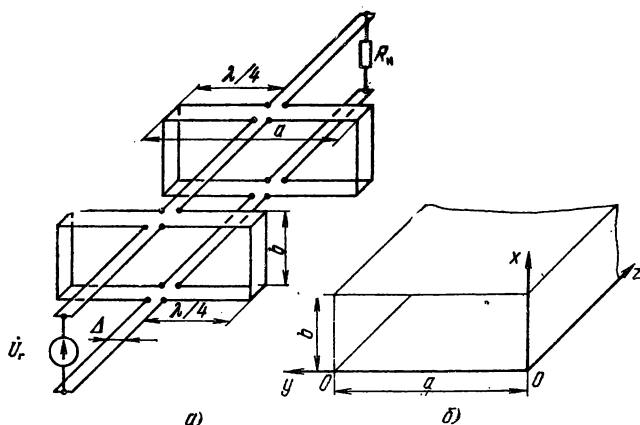


Рис. 12.1. Преобразование двухпроводной линии в прямоугольный волновод

их подключения к линии бесконечно большое. Очевидно, что таких изоляторов можно подключить к линии с обеих сторон сколько угодно. В конечном счете они сливаются друг с другом, образуя трубу прямоугольного сечения, т. е. волновод (рис. 12.1, б), в котором распространяется *бегущая электромагнитная волна*.

**Критическая длина волны.** Из рис. 12.1, а видно, что размер  $a$  широкой стенки волновода должен быть больше или, по крайней мере, равен удвоенной длине четвертьволнового отрезка линии, т. е.  $a \geq 2\lambda/4 = \lambda/2$ . Если частота генератора такова, что  $a < \lambda/2$ , длина короткозамкнутых отрезков, образующих стенки волновода, станет меньше  $\lambda/4$ . Входное сопротивление этих отрезков уменьшится и зашунтирует линию, в результате чего электромагнитная энергия, ответвляясь в них, практически не будет распространяться по волноводу.

Если  $a > \lambda/2$ , энергия по волноводу распространяется, поскольку можно считать, что он образован отрезками

линии длиной  $\lambda/4$ , подключенными к линии, провода которой имеют некоторую толщину  $\Delta = a - \lambda/2$ .

Таким образом, длина электромагнитной волны, распространяющейся по волноводу, связана с размером его широкой стенки соотношением  $\lambda \leq 2a$ . *Критическая длина волны*

$$\lambda_{кр} = 2a. \quad (12.1)$$

Энергия с длиной волны  $\lambda > \lambda_{кр}$  по волноводу распространяться не может. Волны, имеющие  $\lambda \leq \lambda_{кр}$ , по волноводу распространяются.

Формула (12.1) позволяет установить, что при длине волны  $\lambda > (10...15)$  см волноводы применять нецелесообразно, так как размеры его поперечного сечения будут чрезмерно большими.

Отметим, что размер поперечного сечения  $b$  влияет в основном на величину энергии, которую можно передавать по волноводу. Наименьший размер  $b$  должен быть таким, чтобы при максимальной передаваемой энергии не было электрического пробоя диэлектрического слоя между широкими стенками волновода. Обычно выбирают  $b \approx 0,5a$ .

**Электрические и магнитные поля в волноводах.** Исходя из представления волновода двухпроводной линией с подключенными к ней металлическими изоляторами, можно заключить, что в его поперечном сечении образуются стоячие волны электромагнитного поля. При этом в середине широкой стенки волновода создается пучность напряжения, соответствующая максимуму составляющей напряженности электрического поля  $E_{mx}$  вдоль оси  $x$ . На краях широкой стенки, т. е. при  $y_1 = 0$  и  $y_2 = a$ , электрическое поле равно нулю, что соответствует узлам напряжения (рис. 12.2). Математическая запись такого распределения поля  $E_x = E_{mx} \sin(\pi y/a)$ , где  $E_x$  — амплитуда составляющей напряженности электрического поля вдоль оси  $x$ .

В направлении оси  $z$  электромагнитная энергия распространяется в виде бегущей волны, поэтому для составляющей  $E_x$  можно записать выражение аналогичное (11.8):  $E'_x = [E_{mx} \sin(\pi y/a)] \sin(\omega t - \beta_z z)$ , где  $\beta_z = 2\pi/\lambda_z$  — коэффициент фазы для волновода;  $\lambda_z$  — длина волны в волноводe;  $E'_x$  — мгновенное значение напряженности поля.

Магнитное поле в волноводe создается токами смещения между широкими стенками. Линии напряженно-

сти магнитного поля охватывают эти токи замкнутыми петлями и лежат в плоскости параллельной  $xoy$  (на рис. 12.2 эти линии показаны штриховой линией; линии напряженности электрического поля, направленные к читателю, обозначены точкой, от него — крестиком). В любой точке волновода векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны.

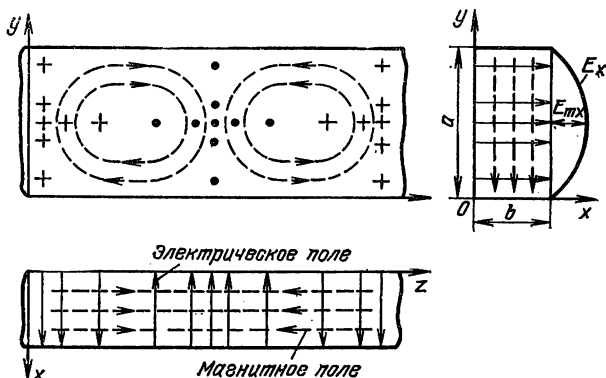


Рис. 12.2. Распределение полей в прямоугольном волноводе

Как видно из рис. 12.2, магнитное поле содержит две составляющие:  $H_y$ , параллельную оси  $y$ , и  $H_z$ , параллельную оси  $z$ . Составляющая поля  $H_y$  имеет максимальное значение  $H_{my}$  в середине стороны  $a$  поперечного сечения волновода и равна нулю на его краях. Амплитуда составляющей  $H_y$  изменяется по закону  $H_y = H_{my} \sin(\pi y/a)$ . Вдоль оси  $z$  распространяется бегущая волна, поэтому для мгновенного значения можно записать:  $H'_y = [H_{my} \sin(\pi y/a)] \sin(\omega t - \beta_b z)$ . Мгновенное значение продольной составляющей напряженности магнитного поля

$$H'_z = [H_{mz} \cos(\pi y/a)] \sin(\omega t - \beta_b z - 90^\circ),$$

где  $H_{mz}$  — максимальная амплитуда составляющей поля  $H_z$ .

Аналогично распределяются поля в круглых волноводах (рис. 12.3): электрическое поле расположено в плоскости поперечного сечения, линии напряженности магнитного поля охватывают токи смещения, в любой точке волновода векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг другу.

Рассмотренное распределение полей в волноводах согласуется с граничными условиями на идеально проводящей поверхности (см. гл. 10). Поэтому линии напряженности электрического поля перпендикулярны внутренней поверхности волновода, а линии напряженности магнитного поля параллельны ей.

**Типы волн в волноводах.** Прежде всего отметим, что в волноводе невозможно существование плоских элек-

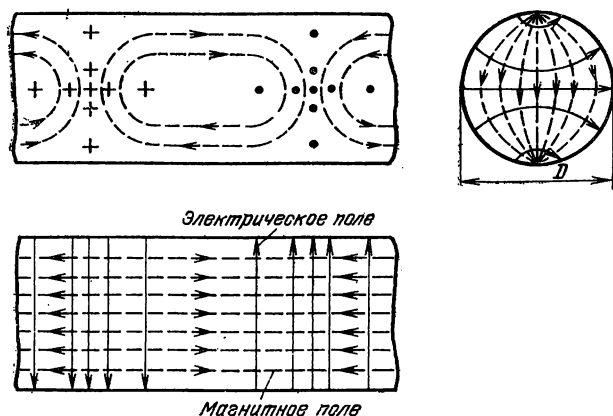


Рис. 12.3. Распределение полей в круглом волноводе

ромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси  $z$ , так как для таких волн не выполняются граничные условия: линии напряженности электрического поля сливаются со стенками волновода, а магнитного — перпендикулярны им.

В волноводах могут распространяться электромагнитные волны с определенной структурой полей, для которых выполняются граничные условия. Такие волны называются *магнитными  $H$*  или *электрическими  $E$* . Магнитные волны имеют составляющую напряженности магнитного поля вдоль оси  $z$ , а их электрическое поле сосредоточено в поперечной плоскости. Магнитное поле электрических волн находится в поперечной плоскости, а электрическое — имеет продольную составляющую напряженности вдоль оси  $z$ .

К условным обозначениям магнитных и электрических волн добавляются индексы  $m$  и  $n$ , которые для пря-

моугольных волноводов показывают число максимумов поля соответственно вдоль размеров  $a$  и  $b$  поперечного сечения. В круглых (цилиндрических) волноводах эти индексы означают число максимумов поля вдоль половины окружности и радиуса сечения. Учитывая эти обозначения, приходим к выводу, что на рис. 12.2 показано поле магнитной волны  $H_{10}$ , а на рис. 12.3 — магнитной волны  $H_{11}$ .

Электромагнитным волнам с различной конфигурацией полей (разными индексами  $m$  и  $n$ ) соответствуют в волноводе свои критические длины волн:

$$\lambda_{\text{кр}} = 2/\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}. \quad (12.2)$$

Из (12.2) следует, что при заданных размерах  $a$  и  $b$  сечения волновода критическая длина волны уменьшается при увеличении  $m$  и  $n$ .

В круглых волноводах  $\lambda_{\text{кр}}$  растет прямо пропорционально внутреннему радиусу  $r$  его поперечного сечения и довольно сложно зависит от индексов  $m$  и  $n$ . Для волны  $H_{01}$   $\lambda_{\text{кр}} = 1,64r$ , а для  $E_{01}$   $\lambda_{\text{кр}} = 2,62r$ .

Наибольшую критическую длину в прямоугольном волноводе имеет волна  $H_{10}$ , для которой  $\lambda_{\text{кр}} = 2a$ . В круглом волноводе такой волной является магнитная волна  $H_{11}$ , имеющая  $\lambda_{\text{кр}} = 3,42r$ . Эти волны используют в большинстве практических случаев.

При выборе размеров сечения прямоугольного волновода стремятся, чтобы электромагнитные волны, распространяющиеся в нем, имели возможно меньшее затухание из-за необратимого преобразования энергии волн в тепло. Можно показать, что затухание минимально при длине волны  $\lambda_1 = \lambda_{\text{кр}}/\sqrt{3}$ . Размеры сечения прямоугольного волновода обычно выбирают

$$a \approx 0,7\lambda_1; \quad b \approx a/2. \quad (12.3)$$

Круглые волноводы применяются в тех случаях, когда электромагнитную энергию необходимо передавать через вращающиеся сочленения. В этом случае удобно использовать волну  $E_{01}$ , поле которой имеет осевую симметрию (рис. 12.4, а).

В миллиметровом диапазоне волн электромагнитная энергия наиболее эффективно передается по круглым волноводам, в которых возбуждается магнитная волна  $H_{01}$  (рис. 12.4, б). Особенностью таких волн является уменьшение затухания с увеличением частоты.



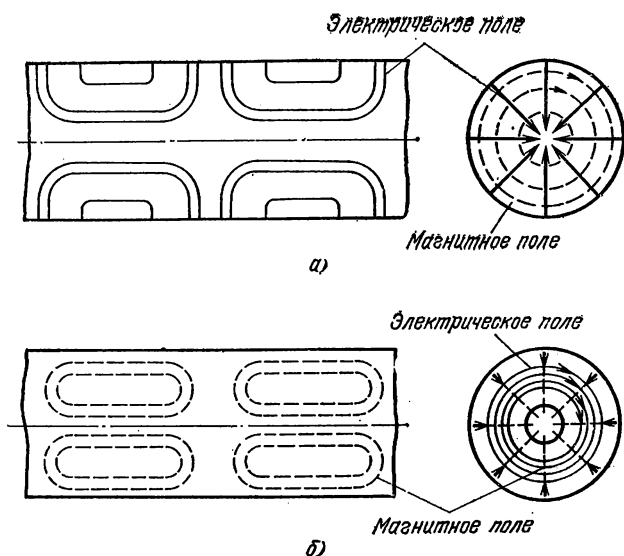


Рис. 12.4. Распределение полей волн  $E_{01}$  и  $H_{01}$  в круглом волноводе

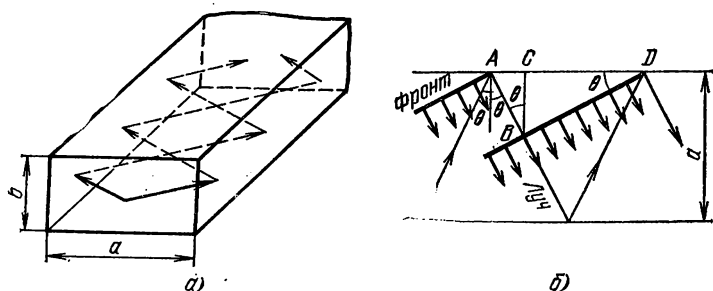


Рис. 12.5. Распространение волн в прямоугольном волноводе

**Скорость распространения электромагнитных волн в волноводе.** Магнитные и электрические электромагнитные волны можно представить как результат взаимодействия плоских волн, распространяющихся со скоростью света  $c$  под некоторым углом к оси волновода из-за отражения от его противоположных узких стенок (рис. 12.5, а).

На рис. 12.5, б тонкими линиями показаны лучи плоских волн, а утолщенными с короткими стрелками — фронты этих волн (напомним, что фронт перпендикуля-

рен лучу). За один и тот же промежуток времени плоская волна проходит расстояние  $AB$  в направлении луча, а ее фронт — расстояние  $AD$  вдоль волновода, следовательно, длина отрезка  $AB$  пропорциональна скорости  $c$ , а отрезка  $AD$  — фазовой скорости, т. е.  $AB/AD = c/v_\phi$ . Из треугольника  $ADB$  находим:  $AD/AB = \sin \theta$ , следовательно,

$$v_\phi = c/\sin \theta = c/\sqrt{1 - \cos^2 \theta}. \quad (12.4)$$

Можно показать, что для волны  $H_{10}$

$$\cos \theta = \lambda/2a. \quad (12.5)$$

Это значит, что угол падения (отражения)  $\theta$  плоских волн вполне определен для каждой длины волны и уменьшается с увеличением  $\lambda$ . При  $\lambda = \lambda_{кр} = 2a$  получаем  $\theta = 0$ , т. е. вдоль волновода электромагнитные волны не перемещаются. Из (12.4) и (12.5) получаем

$$v_\phi = c/\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}, \quad (12.6)$$

где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве.

Поскольку под длиной волны понимается расстояние, на которое распространяется фаза волны за один период колебаний, получаем, что длина волны в волноводе

$$\lambda_v = v_\phi T = v_\phi \lambda/c = \lambda/\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}. \quad (12.7)$$

Из (12.4) и (12.7) следует, что  $v_\phi > c$  и  $\lambda_v > \lambda$ .

Скорость, с которой электромагнитная энергия распространяется вдоль волновода, называется *групповой*. Эта скорость пропорциональна длине отрезка  $AC$  (см. рис. 12.5, б), который определяется из прямоугольного треугольника  $ACB$ . Так как  $AC = AB \sin \theta$ , то

$$v_{гр} = c \sin \theta = c \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}, \quad (12.8)$$

откуда следует, что  $v_{гр} < c$ . Сравнивая (12.6) и (12.8), получаем  $v_{гр} v_{кр} = c^2$ .

Тот факт, что фазовая скорость в волноводе больше скорости света, не противоречит теории относительности Эйнштейна, согласно которой материальные тела не могут двигаться со скоростью больше  $c$ . Неравенство  $v_\phi > c$  означает, что длина волны в волноводе больше, чем волны, имеющей ту же частоту колебаний, но распространяющейся в свободном пространстве. Энергия вдоль волновода переносится со скоростью  $v_{гр}$ , которая меньше скорости света.

**Волновое сопротивление волновода.** На основе аналогии двухпроводной линии и волновода к последнему можно применить такие понятия, как волновое сопротивление, коэффициенты бегущей и стоячей волн, коэффициент отражения и т. д.

Волновое сопротивление волновода  $Z_{в.в}$  определяется отношением поперечных составляющих, напряженностей электрического и магнитного полей. Оно зависит от длины волны (частоты) и типа волны. В частности, для волны  $H_{10}$

$$Z_{в.в} = 377 \pi b / 2a \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}. \quad (12.9)$$

При несогласованной нагрузке  $Z_{в.в} \neq R_n$  волны отражаются от нее. Как и в длинных линиях, это приводит к возникновению в волноводе стоячих волн.

**Возбуждение волновода. Связь волновода с нагрузкой.** Для возбуждения электромагнитных волн в волноводе энергия от источника подводится к нему через небольшой отрезок коаксиальной линии. Ее наружный провод соединяется со стенкой волновода, а внутренний в виде штыря вводится в волновод через отверстие в стенке. Переменное электрическое поле, возникающее вблизи штыря, вызывает переменное магнитное поле, т. е. в волноводе возбуждается электромагнитная волна. Штырь должен располагаться так, чтобы создаваемые им электрические и магнитные поля совпадали по конфигурации с соответствующими полями, характерными для данного типа волны. Так, для возбуждения в прямоугольном волноводе волны  $H_{10}$  штырь должен быть установлен в середине широкой стенки сечения на расстоянии  $\lambda/4$  от закрытого торца волновода (рис. 12.6, а).

Волновод можно возбудить с помощью *петли* (рис. 12.6, б). Для этого внутренний провод коаксиальной линии сворачивается в виток и соединяется с волноводом. Ток, проходящий через петлю, возбуждает вокруг нее переменное магнитное поле, и в волноводе возникают электромагнитные волны. Плоскость петли должна быть перпендикулярна линиям напряженности магнитного поля.

Связь волновода с нагрузкой осуществляется с помощью таких же устройств, и в этом случае элементы связи надо располагать в соответствии с конфигурацией электромагнитного поля: штырь — вдоль линий напряженности электрического поля, петлю — перпендикулярно линиям напряженности магнитного поля.

Связь волновода с генератором и нагрузкой подбирают, изменяя положение элемента связи внутри волновода. Например, если плоскость петли расположена параллельно линиям напряженности магнитного поля, связь минимальная, если перпендикулярно — максимальная.

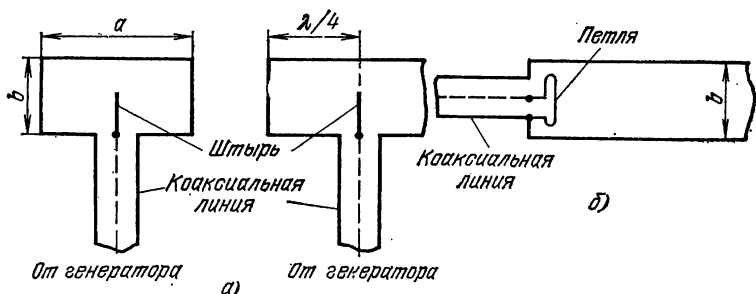


Рис. 12.6. Расположение элементов возбуждения в прямоугольном волноводе

## 12.2. Разновидности волноводов

**Полосковые волноводы.** Металлические трубы прямоугольного, круглого, эллиптического или какой-либо другой формы поперечного сечения не являются единственным видом волноводных фидеров, используемых в диапазоне сантиметровых и более коротких волн. Примером других типов фидеров служат полосковые волноводы, состоящие из двух или трех металлических полосок, разделенных диэлектриком. Поперечное сечение простейшего полоскового волновода показано на рис. 12.7, а. Одна из полосок играет роль экрана.

В полосковом волноводе распространяется волна, близкая по типу к плоской. Основная часть ее энергии сосредоточена в слое диэлектрика толщиной несколько миллиметров, благодаря чему потери на излучение в полосковой волноводной линии значительно меньше, чем в обычной двухпроводной.

Достоинствами полосковых волноводов являются простота их изготовления, допускающего применение технологии печатного монтажа, малые габариты, возможность работы на частотах до 10 ГГц, что позволяет использовать их в миниатюрной радиоэлектронной аппаратуре.

К недостаткам можно отнести сравнительно небольшую электрическую прочность таких волноводов, что ограничивает величину энергии передаваемых по ним электромагнитных волн, а также заметные потери в диэлектрике.

**Однопроводная линия.** На миллиметровых волнах применяют волноводы, представляющие собой одиноч-

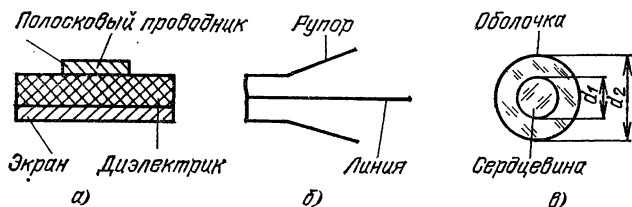


Рис. 12.7. Некоторые разновидности волноводов

ный провод, который возбуждается с помощью *рупора*, излучающего электромагнитную энергию (рис. 12.7, б). Эта энергия концентрируется в основном вокруг провода линии. Концентрация энергии тем заметнее, чем меньше проводимость линии, однако уменьшение проводимости приводит к росту затухания электромагнитных волн. Увеличения концентрации поля вблизи провода линии можно добиться, покрыв этот провод тонким слоем диэлектрика или создав на его поверхности ребристую структуру.

Достоинствами однопроводных линий являются относительная простота их конструкции и широкая полоса пропускемых частот. К недостаткам можно отнести слабую защищенность от воздействия внешних электромагнитных полей (помех), а также изменение затухания под воздействием близко расположенных проводников соседних электрических цепей.

**Световоды.** В последние годы все более широкое распространение получают световодные волноводы, называемые световодами. К наиболее перспективным можно отнести стеклянный световод, представляющий собой тонкую нить, состоящую из сердцевины диаметром  $d_1$ , окруженной оболочкой диаметром  $d_2$ . Принцип работы световода состоит в том, что при прохождении света по нити (волокну) лучи испытывают полное внутреннее отражение на поверхности раздела сердцевины и оболочки и распространяются только по сердцевине, хотя и она, и

оболочка изготовлены из оптически прозрачного материала. В зависимости от назначения световода диаметр  $d_1$  сердцевины может составлять единицы и десятки микрометров, а диаметр оболочки — десятки и сотни микрометров. Чтобы придать световоду заданные свойства, сердцевина и оболочка изготавливаются из разных сортов стекла.

Световоды используются в системах передачи информации с помощью электромагнитных колебаний оптического диапазона волн ( $10^{13} \dots 10^{15}$  Гц), которые характеризуются возможностью передачи по ним значительно большего объема информации, чем в системах с использованием радиочастот.

### 12.3. Объемные резонаторы

**Волноводные резонаторы.** Простейшие объемные резонаторы представляют собой металлические коробки цилиндрической или прямоугольной формы (рис. 12.8, а). Такие резонаторы можно получить из соответствующих отрезков волноводов, если закрыть их с торцов металлическими пластинами.

Возьмем прямоугольный объемный резонатор длиной  $l = \lambda_v/2$  и подведем к нему с помощью штыря электромагнитную энергию в точку с координатами  $z_1 = l/2 = \lambda_v/4$  и  $y_1 = a/2$ . При таком расстоянии между штырем и торцевыми стенками резонатора в отраженных от них волнах напряженность электрического поля будет иметь одинаковую фазу с напряженностью поля в точке, где расположен штырь. В результате вблизи штыря получается пучность электрического и узел магнитного полей, причем амплитуда колебаний результирующего (стоячего) электромагнитного поля будет максимальной.

Из рассмотренного примера следует, что *резонансная длина волны* объемного резонатора  $\lambda_{o.p}$  связана с его геометрическими размерами. Распределение поля в поперечном сечении  $хоу$  прямоугольного объемного резонатора такое же, как в прямоугольном волноводе, а вдоль оси  $z$  оно характеризуется дополнительным индексом  $p$ , входящим в условное обозначение волны. Таким образом, тип волны в резонаторе обозначается  $H_{mnp}$  или  $E_{mnp}$ , где  $p$  — количество максимумов поля вдоль размера  $l$  (в цилиндрическом резонаторе — вдоль оси цилиндра). Для примера на рис. 12.8, б показано распределение

поля волны  $H_{101}$  в прямоугольном волноводе, а на рис. 12.8, в — волны  $H_{011}$  в цилиндрическом волноводе.

Резонансная длина волны определенного типа колебаний, характеризующихся индексами  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , связана с

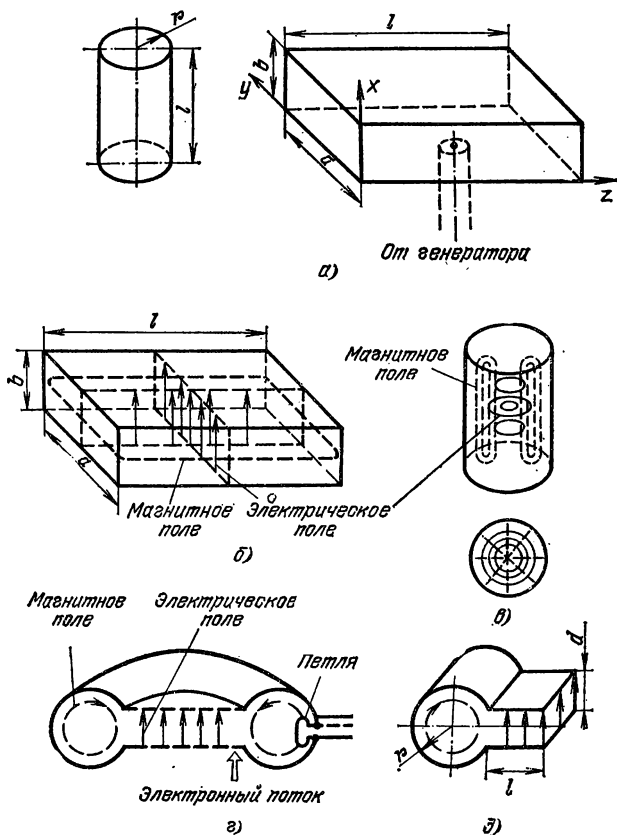


Рис. 12.8. Объемные резонаторы

размерами  $a$ ,  $b$ ,  $l$  резонатора прямоугольной формы следующей зависимостью:

$$\lambda_{0,p} = 2\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}. \quad (12.10)$$

**Тороидальные резонаторы.** Широкое распространение получили объемные резонаторы тороидальной формы (рис. 12.8, е). В таких резонаторах удается достигнуть почти полного разделения электрического и магнитного

полей, что в определенной степени приближает резонатор к системе с сосредоточенными параметрами и увеличивает максимальную длину резонансной волны по сравнению с геометрическими размерами резонатора.

Тороидальный резонатор часто является составной частью генераторов электрических колебаний сверхвысоких частот, например, клистронов. В этом случае резонатор возбуждается электронным потоком, проходящим в той его части, где имеется максимум электрического поля. Для возможности такого возбуждения в суженной части резонатора (емкостном зазоре) делается отверстие, через которое проходит поток электронов. Петля, показанная на рис. 12.8, г, служит для связи резонатора с нагрузкой.

Наибольшая резонансная длина волны в тороидальном резонаторе при его воздушном заполнении определяется по формуле

$$\lambda_{o.p} = 2\pi r \sqrt{\pi l/d}, \quad (12.11)$$

где  $r$ ,  $l$ ,  $d$  — размеры, указанные на рис. 12.8, д.

Перестройка объемных резонаторов в небольших пределах производится введением в его полость настроечных винтов, лопаток и т. д. При изменении длины или положения подстроечного элемента изменяются эквивалентные емкость и индуктивность резонатора, следовательно, резонансная длина волны. Для перестройки в широких пределах необходимо менять геометрические размеры резонаторов.

К достоинствам объемных резонаторов относится высокая стабильность их резонансных длин волн (частот), обусловленная механической прочностью резонатора, а также их большая эквивалентная добротность ( $10^3$  и выше).

Основным недостатком является наличие множества резонансных частот.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 12.1. Объясните, как осуществляется переход от двухпроводной линии к прямоугольному волноводу.
- 12.2. Что такое критическая длина волны в волноводе?
- 12.3. Какое распределение имеют электрическое и магнитное поля в прямоугольном волноводе?
- 12.4. Как классифицируются типы волн в волноводах?
- 12.5. Определите размеры поперечного сечения прямоугольного волновода, предназначенного для пропускания колебаний с частотой 6 ГГц.



- 12.6. Укажите, с какими частотами может распространяться в прямоугольном волноводе электромагнитная волна  $H_{10}$ , если  $a=4$  см?
- 12.7. Какие типы волн наиболее часто применяются в прямоугольных и круглых волноводах?
- 12.8. Поясните смысл понятий о фазовой и групповой скоростях в волноводе.
- 12.9. Чем отличаются волновые сопротивления волновода и длинной линии без потерь?
- 12.10. Как возбуждается волновод?
- 12.11. Перечислите основные разновидности волноводов, укажите их достоинства и недостатки.
- 12.12. Какими индексами характеризуются электромагнитные поля в объемных резонаторах?
- 12.13. Поясните особенности устройства тороидального объемного резонатора.
- 12.14. Укажите достоинства и недостатки объемных резонаторов.

## Часть IV.

# ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКИ

---

### ГЛАВА 13.

## СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

В гл. 2 рассматривались модулирующие электрические и радиосигналы. Там же было введено понятие детерминированной математической модели для таких сигналов, которое позволило получить четкое представление о многих важных характеристиках и свойствах сигналов, используемых в радиотехнике.

Так, знание детерминированной модели позволяет вычислить спектр периодического сигнала, спектральную плотность непериодического сигнала, ширину спектра, указать динамический диапазон изменения его мгновенных значений и т. д. Все эти характеристики сигналов необходимо знать на этапе проектирования любой системы передачи информации. Перечисленные в гл. 2 модели сигналов оказались достаточными для описания большинства радиотехнических процессов, имеющих место при передаче сообщений с помощью электромагнитных волн. Эти модели оказались приемлемыми и при описании принципов действия типичных радиотехнических устройств, каковыми являются линейные, параметрические и нелинейные цепи, линии передачи электромагнитной энергии, волноводы и объемные резонаторы.

Однако многие важные задачи радиотехники, связанные главным образом с вопросами приема радиосигналов в реальных системах передачи, детерминированные модели не позволяют решать. Основная трудность здесь в том, что практически все реальные модулирующие сигналы и принимаемые радиосигналы *недетерминированные*. Такие сигналы нельзя описать с помощью только одной какой-либо функции времени, требуется указывать и некоторые «дополнительные сведения». Для многих реальных модулирующих электрических сигналов, отображающих речь, телевизионное изображение,

музыку и т. д., все описание содержится только в этих «дополнительных сведениях».

В данной главе приводятся некоторые элементы *вероятностного описания* модулирующих сигналов и радиосигналов [4]; только такой способ описания позволяет ввести для реальных сигналов и успешно использовать наиболее важные их характеристики: спектр, его ширину, диапазон мгновенных значений и т. д. Только статистический подход позволяет найти эффективные средства борьбы с помехами, возникающими в линиях передачи и в радиотехнических устройствах.

При изучении материала данной главы особое внимание необходимо уделить следующим вопросам:

1. *Что представляет собой вероятностная модель сигнала? Почему в радиотехнике кроме детерминированных моделей приходится использовать и недетерминированные вероятностные?*

2. *Какие вероятностные модели модулирующих и радиосигналов наиболее часто используются в радиотехнике?*

3. *Что такое помеха? Каковы причины возникновения помех в системах передачи информации. Почему необходимо учитывать наличие помех при проектировании систем передачи информации?*

### 13.1. Реальные сигналы и их вероятностные модели

**Модели детерминированных и недетерминированных сигналов.** В гл. 2 уже обсуждался вопрос о том, каким образом и зачем необходимо иметь возможность математически описывать сигналы. Здесь лишь напомним, что такое описание важно иметь как для модулирующих, так и для радиосигналов. Особенно следует подчеркнуть, что при описании всех радиотехнических процессов, которые приходится рассматривать при передаче информации с помощью электромагнитных волн, до сих пор применялись только детерминированные модели сигналов. Согласно этим моделям любой сигнал представляется единственной функцией времени. Так, наиболее часто использовались следующие функции: гармоническое колебание с заданными значениями амплитуды, частоты и начальной фазы; периодическая последовательность импульсов известной формы, для которой предполагались известными значения амплитуды и длительности импульса, а также период их следования; одиночный им-

пульс заданной формы с известными значениями амплитуды и длительности и т. д.

Наиболее важное и характерное свойство любой детерминированной модели состоит в том, что, задав произвольный момент времени  $t'$ , на ее основе можно точно предсказать значение сигнала, которое он будет иметь в указанный момент  $t'$ , т. е. *детерминированные модели позволяют прогнозировать (рассчитывать) мгновенные значения сигналов в любые заданные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  или на любом интервале времени от  $t_0$  до  $t_1$ , где  $t_1 - t_0$  — длительность интервала.*

Однако многие реальные сигналы невозможно описать одной функцией времени. Таковыми являются, например, телефонные сигналы, сигналы радиовещания, телевизионные и т. д. Действительно, разговаривая по телефону с абонентом, практически невозможно предсказать, какую фразу он произнесет через одну минуту, т. е. невозможно предсказать мгновенные значения телефонного сигнала, отображающего речевое сообщение абонента. Представляется также очевидным, что если бы можно было предсказать значения телефонного сигнала абонента, то отпала бы необходимость в самой телефонной связи, поскольку заранее было бы известно, что скажет абонент. Аналогичным свойством обладают и другие реальные сигналы, используемые для передачи сообщений. Общее характерное для них свойство состоит в том, что их значение меняется во времени *случайным образом*, вследствие чего точное предсказание оказывается невозможным.

Таким образом, *приходится признать, что все модулирующие сигналы, которые содержат передаваемое сообщение, являются недетерминированными.* Это же замечание относится и к радиосигналам, излучаемым в виде электромагнитных волн и поступающим с приемной антенны на вход приемного устройства любой системы передачи информации. Невозможность использования детерминированных моделей для излучаемых сигналов обусловлена в первую очередь тем, что модуляция в них осуществляется сигналами, для которых детерминированное описание непригодно. Следовательно, *и радиосигналы, поступающие на вход приемника, не могут быть описаны детерминированными моделями.*

Вместе с тем необходимость математического описания таких недетерминированных (непредсказуемых) сигналов по-прежнему остается. Надо уметь рассчиты-

вать спектр соответствующих модулирующих сигналов при передаче тех или иных сообщений, ширину спектра этих сигналов, ширину спектра радиосигналов, модулированных недетерминированными управляющими сигналами. Математические модели таких сигналов необходимы для того, чтобы иметь возможность решать задачи их преобразования в различных электрических цепях (нелинейных, линейных, параметрических), т. е. модели по-прежнему нужны, чтобы правильно и наилучшим образом проектировать и строить системы передачи информации.

Как следует подходить к проблеме математического описания недетерминированных сигналов, что следует взять в качестве математической модели таких сигналов, какими методами необходимо пользоваться при описании основных радиотехнических процессов? Ответы на эти вопросы специалисты по радиотехнике нашли в теории вероятностей. Только воспользовавшись идеями и методами этой теории, удалось четко сформулировать понятие математической модели недетерминированного сигнала и указать методы решения основных задач радиотехники при таких сигналах. Разработка методов описания недетерминированных сигналов и методов решения задач радиотехники при таких сигналах и составляет *предмет статистической радиотехники*.

**Статистический подход к описанию реальных сигналов.** Сущность перехода к новым методам математического описания сигналов и новым методам решения задач радиотехники при недетерминированных сигналах состоит в том, что в его основу положен статистический подход ко всем рассматриваемым проблемам. Например, необходимость применения этого подхода возникает в первую очередь при рассмотрении вопроса о математическом описании реальных сигналов, содержащих передаваемые сообщения. Согласно этому подходу *в качестве модели любого недетерминированного сигнала предлагается использовать случайный процесс с подходящими вероятностными характеристиками*.

Введем обозначение  $X(t)$  для случайного процесса, который будем использовать в качестве математической модели некоторого недетерминированного сигнала. Если этот сигнал должен рассматриваться на интервале времени от 0 до  $T_n$ , то и процесс  $X(t)$  будем описывать на таком же интервале. Этот интервал обычно называют интервалом наблюдения,  $T_n$  — длительность интервала

наблюдения. В частном случае  $T_n$  может быть неограниченно большим. Выделим те вероятностные характеристики процесса, которые оказываются наиболее существенными при решении основной задачи радиотехники — передачи информации с помощью электромагнитных волн.

Ансамбль реализаций является важным понятием, характеризующим случайный процесс. Содержа-

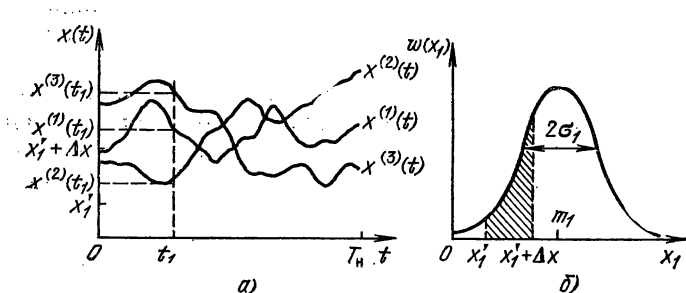


Рис. 13.1. Реализации случайного процесса  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_n$  (а) и его плотность распределения вероятностей  $b$  для момента времени  $t=t_f$

ние этого понятия поясним следующим образом. Будем говорить, что проводится одно испытание, если наблюдается процесс  $X(t)$  на интервале времени от  $t=0$  до  $t=T_n$  с регистрацией появляющихся мгновенных значений этого процесса. В результате благодаря регистрации будет получен график функции времени на интервале  $t=0$  до  $t=T_n$ , который называется *реализацией* случайного процесса  $X(t)$ . Обозначим этот график символом  $x^{(1)}(t)$ , где верхний индекс в круглых скобках указывает, что эта реализация была получена при первом испытании. Пример графика реализации  $x^{(1)}(t)$  некоторого процесса приведен на рис. 13.1. Для каждого момента времени  $t$  из интервала наблюдения  $[0, T_n]$  эта реализация имеет вполне определенное значение, т. е. является детерминированной функцией времени.

Если провести второе испытание, наблюдая процесс  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_n$ , и регистрируя его значения на интервале наблюдения, то получим вторую реализацию этого процесса  $x^{(2)}(t)$ . При  $k$ -м испытании будет получена  $k$ -я реализация  $x^{(k)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_n$ , и т. д. На рис. 13.1 изображены графики реализаций процесса, полученные при проведении трех испытаний. Вообще считается, что любой

процесс можно наблюдать (а значит, и регистрировать его реализации) большое число раз. При проведении таких испытаний, как правило, появляются разные реализации. Совокупность всех разных реализаций, которые могут появиться при проведении испытаний, называется *ансамблем реализаций случайного процесса*. Каждая реализация процесса является детерминированной функцией времени. Случайность любого процесса  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_n$ , проявляется в том, что до проведения испытания (наблюдения) нельзя предсказать, какая именно реализация из ансамбля появится в данном испытании.

Плотность распределения вероятностей мгновенных значений является следующей важной характеристикой любого процесса. Чтобы пояснить смысл этого понятия, вновь обратимся к рис. 13.1. По оси ординат на этом рисунке откладываются мгновенные значения реализаций процесса  $x(t)$ . Предположим, что в конкретной радиотехнической задаче интерес представляют лишь значения процесса  $X(t)$  в некоторый заданный момент  $t_1$  интервала наблюдения. Ясно, что разные реализации процесса в этот момент принимают, вообще говоря, разные значения, как это имеет место для реализаций  $x^{(1)}(t)$ ,  $x^{(2)}(t)$ ,  $x^{(3)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_n$ . Поэтому до проведения наблюдения нельзя предсказать, какое значение примет реализация процесса в момент времени  $t_1$ . Однако после проведения испытания это значение, которое представляется одним числом, будет известно точно. Именно поэтому значение процесса  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_n$ , в момент времени  $t_1$  является *случайной величиной* и обозначается символом  $X(t_1)$ , или символом  $X_1$ . В теории вероятностей любая случайная величина описывается *плотностью распределения вероятностей*. Для случайной величины  $X_1$  плотность распределения вероятностей будем обозначать символом  $w(x_1)$ ; на рис. 13.1, б приведен пример графика плотности распределения вероятностей случайной величины  $X(t_1)$ .

Плотность распределения вероятностей характеризует частоту появления разных значений случайной величины  $X_1$  в длинной последовательности наблюдений (испытаний). Чем большее значение имеет функция  $w(x_1)$ , тем чаще появляются значения величины  $X_1$ , равные  $x_1$ . Так, в соответствии с рис. 13.1, б случайная величина  $X_1$  наиболее часто принимает значения вблизи точки  $x_1 = m_1$ . Более точный смысл этого утверждения состоит в том, что функция  $w(x_1)$  определяет вероятности попадания

значения случайной величины  $X_1$  в любые интервалы. Например, вероятность того, что при однократном наблюдении значение случайной величины  $X_1$  попадет в интервал  $[x'_1, x'_1 + \Delta x]$ , численно равна площади фигуры, заштрихованной на рис. 13.1, б. Математически эта вероятность

$$P \{x'_1 \leq X_1 \leq x'_1 + \Delta x\} = \int_{x'_1}^{x'_1 + \Delta x} w(x_1) dx_1.$$

Факт выполнения неравенства  $x'_1 \leq X_1 \leq x'_1 + \Delta x$  называется случайным событием, связанным со случайной величиной  $X_1$ . Аналогично по плотности распределения вероятностей  $w(x_1)$  можно вычислять вероятности любых событий, связанных с этой случайной величиной. Поэтому функцию  $w(x_1)$  называют *вероятностной моделью величины  $X_1$* .

Довольно часто при решении различных задач радиотехники приходится иметь дело с *гауссовскими случайными величинами*, плотность распределения вероятностей которых имеет вид<sup>1</sup>

$$w(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad -\infty < x_1 < +\infty, \quad (13.1)$$

где  $m_1$  и  $\sigma_1^2$  — параметры плотности.

График этой функции приведен на рис. 13.1, б.

Математическое ожидание и дисперсия. Важными параметрами любой случайной величины являются ее *математическое ожидание  $m$*  и дисперсия  $\sigma^2$ . Определения этих параметров были приведены в курсе математики. Напомним, что численные значения этих параметров для случайной величины  $X$  могут быть найдены по формулам для математического ожидания

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x) dx \quad (13.2)$$

---

<sup>1</sup> Плотность распределения вероятностей (13.1) обычно называется гауссовской плотностью. Это название связано с именем немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1875 г), который вывел этот закон, анализируя случайные ошибки при измерениях в астрономии и геодезии.



и дисперсии

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 w(x) dx. \quad (13.3)$$

В частности, если (13.1) подставить в (13.2) и (13.3), то для рассматриваемой выше гауссовской случайной величины  $X_1$  получим  $m = m_1$  и  $\sigma^2 = \sigma_1^2$ , так что в (13.1) параметры  $m_1$  и  $\sigma_1^2$  имеют смысл математического ожидания и дисперсии гауссовской случайной величины. На рис. 13.1, б отмечена точка  $x_1 = m_1$  и указан интервал длиной  $2\sigma_1$ . Из этого рисунка следует, что математическое ожидание  $m_1$  является тем числом, около которого группируются все появляющиеся значения случайной величины (именно поэтому оно иногда называется средним значением); дисперсия  $\sigma_1^2$  определяет длину  $2\sigma_1$  интервала, характеризующего «ширину» плотности распределения вероятностей  $w(x_1)$ . Чем больше дисперсия  $\sigma_1^2$ , тем сильнее рассеиваются значения случайной величины  $X_1$ ; величина  $\sigma_1$  поэтому называется средним квадратическим отклонением случайной величины от ее математического ожидания.

Если случайная величина  $X$  является дискретной, т. е. принимает лишь разрешенные дискретные значения  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  с вероятностями  $p_1 = P\{X = x_1\}$ ,  $p_2 = P\{X = x_2\}$ , ...,  $p_i = P\{X = x_i\}$ , ..., то интегралы в (13.2), (13.3) должны быть заменены суммами. В результате математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины равны соответственно:

$$m = \sum_i p_i x_i, \quad \sigma^2 = \sum_i p_i (x_i - m)^2. \quad (13.4)$$

Суммирование здесь выполняется по всем возможным значениям индекса  $i$ .

При решении задач радиотехники приходится часто рассматривать значения процессов не в один момент времени  $t_1$ , а в нескольких, например,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . В этом случае значение каждой реализации процесса  $X(t)$  приходится фиксировать для всех указанных моментов времени, что приводит к необходимости рассматривать совокупность случайных величин  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  или, более коротко,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Вероятностное описание такой совокупности более сложное; так аналогом плотности распределения вероятностей одной случайной

величины здесь служит *совместная плотность распределения вероятностей* совокупности случайных величин. Именно по совместной плотности вероятностей можно вычислить вероятности любых событий, связанных с совокупностью случайных величин. Как правило, приходится ограничиваться совокупностью совместно гауссовских величин.

Еще сложнее математическое описание реального недетерминированного процесса в тех задачах радиотехники, где необходимо рассматривать значения некоторого реального процесса на непрерывном временном интервале. Здесь также можно ввести понятие события, связанного с процессом, а для вычисления вероятностей таких событий необходимо для процесса задавать целую последовательность совместных плотностей распределения вероятностей, которая называется *семейством конечномерных распределений*. Из всех процессов, рассматриваемых в теории вероятностей, в качестве моделей недетерминированных сигналов наиболее часто используются *гауссовские случайные процессы*. Плотность распределения вероятностей значений таких процессов для каждого фиксированного момента времени имеет вид (13.1).

Спектральная плотность является наиболее широко применяемой в радиотехнике характеристикой случайного процесса. Сущность этого понятия поясним более детально.

Рассмотрим случайный процесс  $X(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , реализации которого можно наблюдать (регистрировать) на сколько угодно большом интервале наблюдения от  $-T_n$  до  $T_n$ . Возьмем одну его реализацию  $x^{(k)}(t)$ ,  $-T_n \leq t \leq T_n$ . Поскольку эта реализация является детерминированной непериодической функцией времени, то для нее можно вычислить спектральную плотность  $S_{T_n}^{(k)}(\omega)$  по (2.23) и (2.24), заменив  $u(t)$  на  $x^{(k)}(t)$  и положив эту реализацию равной нулю вне интервала времени от  $-T_n$  до  $T_n$ . Средняя на интервале времени от  $-T_n$  до  $T_n$  мощность этой реализации, сосредоточенная около частоты  $\omega$ , может быть найдена как отношение квадрата спектральной плотности к длительности интервала наблюдения  $|S_{T_n}^{(k)}(\omega)|^2/2T_n$ . Разные реализации процесса имеют, вообще говоря, разные значения мощности около частоты  $\omega$ . Если вычислить среднее значение этой мощности по всем реализациям процесса  $X(t)$ ,

а затем устремить  $T_n$  к бесконечности<sup>1</sup>, то в пределе получим число  $S$ , характеризующее среднее значение мощности процесса, попадающей в окрестность частоты  $\omega$ . Эта средняя мощность зависит от частоты  $\omega$  и, следовательно, является функцией  $S(\omega)$ , которая и называется спектральной плотностью или спектром процесса. Таким образом, *спектральная плотность  $S(\omega)$  случайного про-*

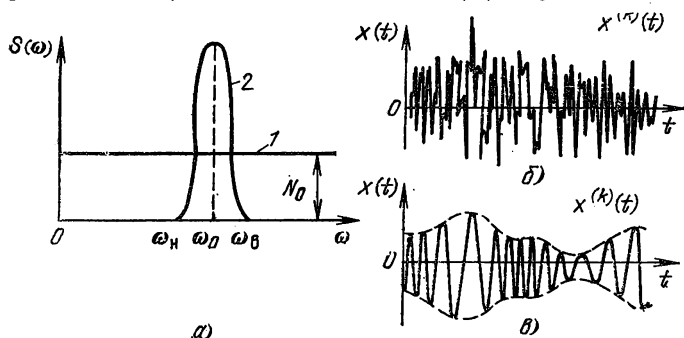


Рис. 13.2. Спектральные плотности и реализации случайных процессов:

*а* — спектральная плотность белого шума 1 и узкополосного процесса 2; *б* — реализация белого шума; *в* — реализация узкополосного процесса

цесса определяет распределение средней мощности процесса по оси частот и в этом смысле может рассматриваться как аналог обычного спектра детерминированного сигнала.

На рис. 13.2, *а* приведены примеры графиков спектров случайных процессов, которые наиболее часто используются в радиотехнике в качестве математических (вероятностных) моделей реальных недетерминированных сигналов. Спектр 1 равномерен — имеет постоянное значение  $N_0$  на всех частотах. По аналогии с белым светом, имеющим в своем спектре все спектральные составляющие, процесс с равномерным спектром называется *белым шумом*. Спектр 2, наоборот, свидетельствует о том, что средняя мощность процесса сосредоточена в узкой полосе частот от  $\omega_n$  до  $\omega_b$ . Если ширина  $\omega_b - \omega_n$  этого спектра намного меньше центральной частоты  $\omega_0$ ,

<sup>1</sup> При практическом вычислении энергетического спектра процесса по его реализациям обычно ограничиваются достаточно большим конечным интервалом наблюдения.

то случайный процесс с таким спектром называется *узкополосным*.

На рис. 13.2, б и в приведены также графики типичных реализаций этих процессов. Для белого шума характерны очень быстрые изменения мгновенных значений (этот шум имеет очень широкий спектр); график реализации узкополосного процесса напоминает график радиосигнала с центральной частотой  $\omega_0$ , модулированного по амплитуде и по фазе одновременно.

Примеры реальных колебаний, которые могут рассматриваться как случайные процессы типа белого шума и узкополосного процесса, будут приведены в последующих параграфах данной главы. Здесь лишь отметим, что белый шум обычно используется как вероятностная модель помех различного происхождения, в то время как узкополосный процесс чаще применяется для описания радиосигналов при любых видах модуляции.

### 13.2. Вероятностные модели модулирующих сигналов

**Модулирующий сигнал как случайный процесс.** В качестве примеров модулирующих электрических сигналов, которые передаются с помощью электромагнитных волн, можно назвать телефонные сигналы (телефонная радиосвязь, радиовещание, звуковое сопровождение в телевидении), сигналы музыкальных передач (радио и телевидение), телеграфные сигналы при кодировании сообщений (телеграфная радиосвязь), сигналы факсимильной связи (передача неподвижных изображений) и т. д.

Типичным для всех подобных управляющих сигналов является следующее их свойство: эти сигналы нельзя описать с помощью каких-либо детерминированных функций времени. Главная причина здесь состоит в том, что нельзя точно предсказать будущие значения этих сигналов, если даже все их значения в прошлом вплоть до текущего момента времени известны. Именно эта непредсказуемость служит основной причиной необходимости использовать статистический подход при выборе способа математического описания модулирующих сигналов. Как уже отмечалось в начале данной главы, сущность использования этого подхода в данной задаче в том, что приходится отказываться от использования детерминированных моделей (в том числе и от описания модулирующих сигналов как гармонических колебаний)

и *переходить к вероятностным моделям*, которыми служат случайные процессы.

Непредсказуемость модулирующего сигнала. Каждый случайный процесс задается с помощью набора его характеристик, наиболее важные из которых для задач радиотехники перечислены в предыдущем параграфе. Однако здесь следует подчеркнуть, что на основе этих характеристик нельзя точно предсказать значения реализаций процесса в будущем, даже если они зарегистрированы в прошлом вплоть до настоящего момента времени. Это обусловлено следующим свойством случайного процесса. Как уже отмечалось в § 13.1, каждый процесс имеет ансамбль реализаций; разные реализации являются разными функциями времени. Однако на некоторых интервалах времени они могут совпадать, не совпадая на остальных. Поэтому полученная до настоящего момента времени реализация, как правило, является общей частью сразу многих реализаций, которые в будущем примут разные значения. Таким образом, случайный процесс обладает тем же свойством непредсказуемости, что и реальные модулирующие сигналы. Это первая особенность случайных процессов, наличие которой у реальных модулирующих сигналов позволяет рассматривать последние как случайные процессы.

Есть и вторая особенность описания случайных процессов, которая фактически определяет сущность термина «вероятностная модель» применительно к модулирующему сигналу. Дело в том, что, располагая всеми характеристиками процесса, можно вычислить *лишь вероятности любых представляющих интерес событий*, связанных с этим процессом. Например, вероятность того, что при регистрации процесса мгновенное значение реализации на интервале регистрации не превысит заданный уровень. Но на основе этих характеристик *нельзя точно* предсказать, какое именно значение процесс будет иметь в некоторой фиксированный момент времени в будущем. Таким образом, вероятностная модель реального модулирующего сигнала позволяет рассчитывать лишь вероятности появления отдельных значений сигнала, но не сами значения; именно в этом состоит основное различие между вероятностной и детерминированной моделями.

Выбор вероятностной модели для того или иного модулирующего сигнала состоит в следующем. С самого начала сигнал рассматривается как случайный

процесс. Однако характеристики этого процесса неизвестны. Выбор вероятностной модели в этом случае фактически означает выбор необходимых вероятностных характеристик: спектральной плотности, вида плотности распределения вероятностей мгновенных значений, численных значений математического ожидания и дисперсии.

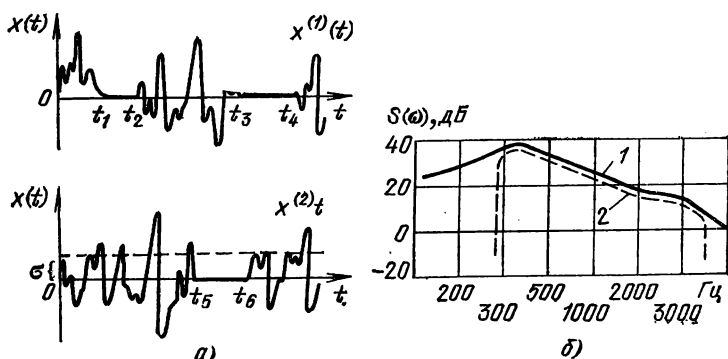


Рис. 13.3. Речевой сигнал:

$a$  — реализации,  $b$  — спектральные плотности (1 — речевого сигнала; 2 — телефонного сигнала)

Существуют различные способы получения сведений о нужных вероятностных характеристиках реальных сигналов. Один из наиболее часто применяемых заключается в измерении этих характеристик по реализациям модулирующих сигналов. Необходимые для этого методы измерения разрабатываются математической статистикой.

Приведем здесь примеры характеристик некоторых реальных модулирующих сигналов.

**Телефонный сигнал.** Электрический сигнал, полученный путем преобразования устной речи, будем называть *речевым сигналом*. На рис. 13.3,  $a$  приведены примеры графиков реализаций речевого сигнала.

Речевой сигнал и его свойства. Характерным для устной речи является наличие пауз при разговоре. На реализациях сигнала это проявляется отсутствием колебаний тока или напряжения, как это изображено на рис. 13.3,  $a$  отрезками  $t_1, t_2; t_3, t_4; t_5, t_6$  на оси времени. Наличие этих «нулевых вставок» служит одной из причин, из-за которых речевой сигнал нельзя считать

гауссовским случайным процессом, поскольку плотность распределения вероятностей его значений для любого фиксированного момента времени отлична от гауссовской, представляемой функцией (13.1).

Как правило, можно считать, что речевой сигнал имеет математическое ожидание  $m$ , равное нулю. Следует отметить, что отсутствие постоянной составляющей является характерным для большинства модулирующих сигналов. Это обусловлено не только специальными свойствами физических явлений, используемых для получения модулирующих сигналов в виде электрических сигналов, но и наличием специфических преобразований, которым подвергаются эти сигналы до переноса их спектра в область высоких частот. Например, постоянная составляющая сигнала устраняется при прохождении его через цепь, содержащую разделительный конденсатор или трансформатор.

Для средней мощности или дисперсии процесса ранее было введено обозначение  $\sigma^2$ . Значение  $\sigma$ , называемое средним квадратическим значением отклонений процесса от его математического ожидания, характеризует уровень флуктуаций процесса (см. рис. 13.3, а). Например, чем громче говорит абонент, тем больше дисперсия, т. е. средняя мощность  $\sigma^2$  соответствующего речевого сигнала.

Спектральная плотность речевого сигнала в значительной мере зависит от свойств голоса абонента. Она различна для женского и мужского голосов. На рис. 13.3, б приведен пример графика спектральной плотности звукового давления, создаваемого голосом говорящего человека и измеренного на расстоянии 1 м от него (сплошная кривая). Из этого графика следует, что мощность речевого сигнала распределяется в полосе частот от 10 Гц до 6 кГц. Специальные исследования показали, что с точки зрения разборчивости речи наиболее важные спектральные составляющие речевого сигнала располагаются в диапазоне от 300 до 3400 Гц. Поэтому если речевой сигнал проходит через полосовой фильтр, нижняя граничная частота которого 300 Гц, а верхняя 3400 Гц, то качество сигнала на выходе фильтра с точки зрения его восприятия человеком остается вполне удовлетворительным, в то время как ширина спектра заметно сужается: вместо 5...6 кГц верхняя граничная частота спектра оказывается 3400 Гц. На рис. 13.3, б штриховой линией изображен график спектра электрического сигнала, получаемого из речевого сигнала с помощью специ-

ального формирующего фильтра. Этот сигнал называют часто *телефонным*, а формирующий его фильтр — *канальным*. Заметим в заключение, что при прохождении отдельных реализаций речевого сигнала через формирующий фильтр их форма как функция времени несколько изменяется, поскольку из их спектра удаляются некоторые спектральные составляющие (в области низких и верхних частот).

Сокращение ширины спектра речевого сигнала без существенного ухудшения качества передаваемой речи вводится с целью увеличения числа одновременно используемых рабочих частот, что обеспечивает увеличение емкости диапазонов применяемых в радиотехнике радиоволн.

**Телеграфный сигнал.** Важное место в Единой автоматизированной сети связи (ЕАСС) нашей страны занимает телеграфная сеть, обеспечивающая телеграфную связь. Телеграфная связь — это вид документальной электросвязи для передачи телеграфных сообщений — буквенно-цифровых текстов. Значительная доля телеграфных сообщений передается с помощью электромагнитных волн.

**Свойства телеграфного сигнала.** Модулирующие электрические сигналы при телеграфной связи также приходится рассматривать как случайные процессы, поскольку нельзя точно предсказать, какие буквы или цифры появятся на выходе источника телеграфных сообщений в будущие моменты времени.

Обычно телеграфным называют модулирующий электрический сигнал со следующими специфическими свойствами: 1) этот сигнал может принимать лишь два значения, например  $+h$  и  $-h$ ; 2) значение сигнала на каждом интервале времени длительностью  $\tau$  постоянно;  $\tau$  называется длительностью *элементарной телеграфной посылки*; 3) изменения значений сигнала могут происходить случайным образом лишь в заранее определенные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , причем  $t_{i+1} - t_i = \tau$ . На рис. 13.4, а приведены графики двух возможных реализаций этого сигнала. Можно сказать, что телеграфный сигнал представляет собой последовательность прямоугольных импульсов; однако эта последовательность не является периодической или детерминированной, поскольку как интервалы между импульсами, так и длительности импульсов оказываются случайными.



Очевидно, что для каждого фиксированного момента времени телеграфный сигнал может принимать лишь два дискретных значения:  $+h$  и  $-h$ . Поэтому плотность вероятности его мгновенных значений существенно отличается от гауссовской, представляемой (13.1). Как правило, возможные значения телеграфный сигнал принимает с равными вероятностями; поскольку таких значений все-

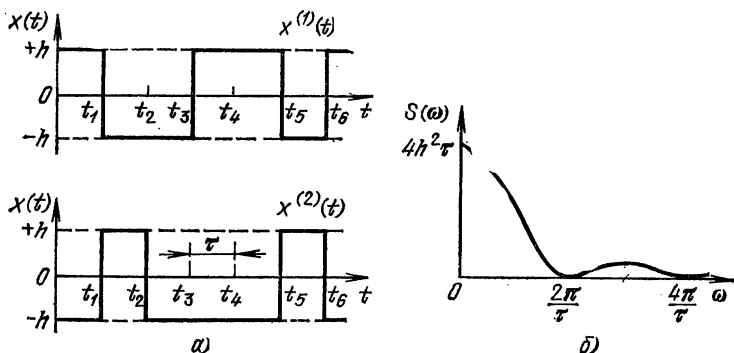


Рис. 13.4. Телеграфный сигнал:  
а — реализации, б — спектральная плотность

го два, то, следовательно, вероятность их появления 0,5. Это можно записать следующим образом:

$$P\{X(t) = h\} = 0,5, \quad P\{X(t) = -h\} = 0,5,$$

где  $t$  — любой рассматриваемый момент времени.

Теперь можно воспользоваться (13.4) для вычисления среднего значения и дисперсии телеграфного сигнала:  $m = 0,5(+h) + 0,5(-h) = 0$ ,  $\sigma^2 = 0,5(+h^2) + 0,5(-h)^2 = h^2$ .

Спектральная плотность такого телеграфного сигнала<sup>1</sup>

$$S(\omega) = 4h^2 \tau \frac{1 - \cos \omega \tau}{(\omega \tau)^2}, \quad 0 \leq \omega < +\infty. \quad (13.5)$$

График спектра (13.5) приведен на рис. 13.4, б. Из этого рисунка видно, что ширина спектра телеграфного сигнала  $\Delta\omega$  существенно зависит от длительности элементар-

<sup>1</sup> Формула (13.5) справедлива при условии, что разные телеграфные посылки принимают значения  $+h$  или  $-h$  независимо друг от друга.

ной телеграфной посылки  $\tau$ ; можно показать, что при любом определении ширины спектра величины  $\Delta\omega$  и  $\tau$  связаны обратно пропорциональной зависимостью: *чем короче длительность  $\tau$  телеграфной посылки, тем больше ширина спектра телеграфного сигнала  $\Delta\omega$* . Например, можно принять, что

$$\Delta\omega = 2\pi/\tau; \quad (13.6)$$

при этом верхняя граничная частота спектра  $\omega_v = 2\pi/\tau$  и совпадает с частотой, на которой спектральная плотность первый раз принимает нулевое значение.

Отметим в заключение, что аналогичные (13.6) соотношения между шириной спектра и длительностью сигнала были получены в гл. 2 для периодической последовательности прямоугольных импульсов и для одиночного прямоугольного импульса длительностью  $\tau$ . Однако следует обратить внимание и на имеющееся отличие спектра телеграфного сигнала от спектров этих детерминированных сигналов. Во-первых, периодическая последовательность прямоугольных импульсов имеет линейчатый (дискретный) спектр (сравните графики на рис. 2.2, з и рис. 13.4, б). Во-вторых, значение спектра телеграфного сигнала на каждой частоте пропорционально квадрату «амплитуды спектральной составляющей» соответствующей частоты, в то время как значение спектральной плотности одиночного импульса пропорционально амплитуде «спектральной составляющей» этой частоты; поэтому формы спектра одиночного импульса и спектра телеграфного сигнала также отличны друг от друга (сравните графики на рис. 2.5, а и рис. 13.4, б).

**Телевизионный сигнал.** При телевизионных передачах исходным сообщением является изображение. Так, при передаче телевизионного фильма таковым является негативное изображение каждого кадра на киноплёнке; при передаче из студии или из концертного зала — это плоское изображение, формируемое специальной оптической системой.

**Свойства телевизионного сигнала.** Плоское двумерное изображение, подлежащее передаче, преобразуется в электрический модулирующий сигнал. Для этого изображение обычно разбивается на строки, располагающиеся достаточно близко друг к другу. Затем изображение вдоль каждой строки поочередно преобразуется в электрический сигнал, который называется *телевизионным сигналом изображения*. Сигнал изобраа-

жения содержит в себе информацию о передаваемом изображении и используется для модуляции несущего гармонического колебания с достаточно высокой частотой. Для каждого фиксированного изображения (фотографии) сигнал изображения можно считать детерминированной функцией времени. Разным изображениям соответствует разная форма сигнала.

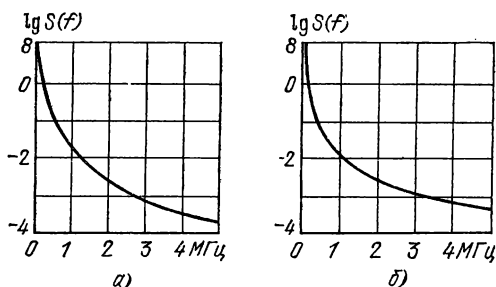


Рис. 13.5. Спектральная плотность телевизионного сигнала:  
а — изображения одиночного портрета; б — изображения пейзажа

Обычно система передачи телевизионных изображений должна проектироваться так, чтобы она обеспечивала передачу самых разнообразных сюжетов: одиночные и групповые портреты, пейзажи, архитектурные сюжеты, сюжеты с движущимися элементами и т. д. Очевидно, что каждому новому сюжету соответствует новое изображение и, следовательно, новый сигнал. Появление того или иного сюжета (изображения) в процессе передачи, как правило, предсказать заранее невозможно; но это означает, что появление той или иной функции времени, описывающей сигнал изображения отдельного сюжета, также невозможно предсказать. Из этих рассуждений можно сделать следующий важный вывод: *сигнал изображения нельзя описать с помощью одной детерминированной функции времени*; этот сигнал представляется набором таких функций, каждая из которых соответствует вполне определенному изображению и может быть названа реализацией сигнала изображения, а набор — ансамблем реализаций; появление той или иной реализации сигнала изображения в процессе телевизионной передачи *предсказать невозможно*. Таким образом, для сигнала изображения нельзя указать детерми-

нированной модели, так что его *приходится* рассматривать и описывать как случайный процесс.

**Спектральная плотность.** Если сигнал изображения рассматривать как случайный процесс, то важнейшей его вероятностной характеристикой является спектр. На рис. 13.5 приведены примеры спектров сигналов изображения, соответствующих различным сюжетам. На рис. 13.5, *а* изображен график спектра сигнала при передаче портрета, на рис. 13.5, *б* — пейзажа.

Первая особенность приведенных спектров сигналов изображений состоит в том, что они занимают значительную полосу частот, простирающуюся до 5...6 МГц. Это свойство является типичным для сигналов от любых сюжетов. Вторая особенность этих спектров — их значительная неравномерность по частоте: мощность спектральных составляющих с повышением их частоты быстро уменьшается. На рис. 13.5, *а, б* по оси ординат выбран логарифмический масштаб, при котором динамический диапазон значений сильно уменьшается. Однако и при таком масштабе на приведенных рисунках значения графиков в области низких и высоких частот существенно отличаются.

### 13.3. Вероятностные модели радиосигналов

**Радиосигнал как случайный процесс.** Радиосигналы в радиотехнике являются, как правило, переносчиками информации о мгновенных значениях модулирующих сигналов и представляют собой большей частью гармонические колебания, модулированные по амплитуде, фазе или частоте. Как это уже отмечалось в § 13.1 и 13.2, реальные модулирующие сигналы не могут быть описаны с помощью детерминированных функций и должны рассматриваться как случайные процессы. Вследствие этого и радиосигналы в силу их модуляции случайными процессами приходится рассматривать как случайные процессы. Именно поэтому реальные радиосигналы следует описывать и задавать путем указания их вероятностных характеристик; важнейшими из этих характеристик являются математическое ожидание и дисперсия радиосигнала, распределения его случайных параметров, спектральная плотность. Рассмотрим основные особенности таких радиосигналов на примере АМ сигналов.

В § 2.6 было приведено выражение (2.38), описывающее АМ сигнал при произвольном модулирующем сиг-

нале  $u(t)$ . Однако все рассуждения проведены для случая, когда модулирующий сигнал был задан как детерминированная функция времени. Реальные модулирующие сигналы не являются детерминированными функциями времени; поэтому все определения, введенные для АМ сигналов в гл. 2, необходимо распространить на случай, когда амплитудная модуляция осуществляется случайным процессом.

Итак, теперь модулирующий сигнал будем рассматривать как случайный процесс. Введем для него специальное обозначение  $U(t)$ . Отдельные реализации этого сигнала будем обозначать малой буквой, снабдив ее верхним индексом в круглых скобках, значение которого указывает номер реализации в ансамбле всех возможных реализаций модулирующего сигнала. Так, для  $k$ -й реализации процесса  $U(t)$  вводится обозначение  $u^{(k)}(t)$ .

Поскольку модулирующий сигнал теперь является случайным процессом, то и АМ сигнал также будет случайным процессом; так что вместо (2.38) для АМ сигнала при модуляции случайным процессом необходимо писать

$$s_{AM}(t) = [U_m + a_{AM}U(t)] \sin(\omega_0 t + \psi) \quad (13.7)$$

на любом интервале времени;  $k$ -я реализация процесса (13.7) получается путем подстановки в (2.38)  $k$ -й реализации  $u^{(k)}(t)$  модулирующего процесса  $U(t)$ , т. е.

$$s_{AM}^{(k)}(t) = [U_m + a_{AM}u^{(k)}(t)] \sin(\omega_0 t + \psi). \quad (13.8)$$

Чтобы задать вероятностную модель АМ сигнала при модуляции случайным процессом, необходимо указать: 1) выражение (13.7) (т. е. задать численные значения параметров  $U_m$ ,  $\omega_0$  и  $\psi$ , задав тем самым амплитуду, частоту и начальную фазу несущего гармонического колебания, а также  $a_{AM}$ ); 2) вероятностную модель модулирующего сигнала  $U(t)$ . *Вероятностная модель АМ сигнала при этом будет полностью задана, если задана полностью вероятностная модель модулирующего сигнала.*

Пусть, например, модулирующий сигнал является телефонным. Одна из возможных реализаций этого сигнала и его спектр изображены на рис. 13.6,  $a$  и  $b$  соответственно. При амплитудной модуляции в соответствии с мгновенным значением реализации модулирующего сигнала изменяется значение огибающей несущего гармонического колебания. Типичный график реализации

(13.8) АМ колебания при такой модуляции изображен на рис. 13.6, в (этот график соответствует реализации модулирующего сигнала, изображенной на рис. 13.6, а). Из (13.7) следует, что огибающая гармонического колебания меняется во времени и ее значения в будущем предсказать невозможно, т. е. ее необходимо рассматривать как некоторый случайный процесс. Именно в этом

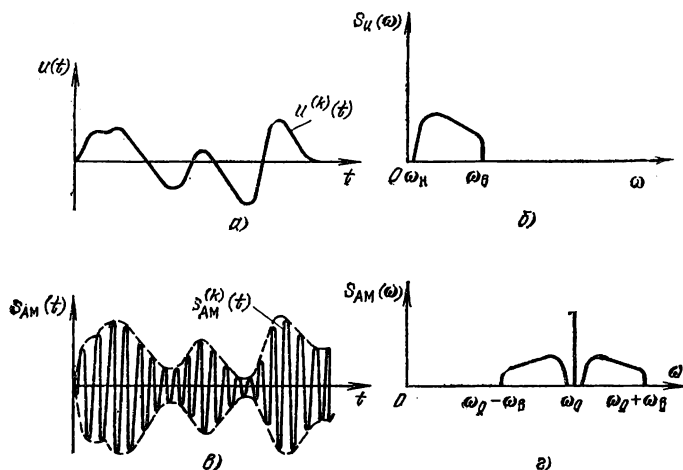


Рис. 13.6. Гармоническое колебание, модулированное по амплитуде телефонным сигналом:

а — реализация телефонного сигнала; б — спектральная плотность телефонного сигнала; в — реализация АМ радиосигнала (соответствует реализации  $u^{(k)}(t)$ ); г — спектральная плотность гармонического колебания, модулированного по амплитуде телефонным сигналом

состоит основное отличие АМ сигнала при модуляции случайным процессом от АМ сигнала при модуляции детерминированным сигналом произвольной формы.

**Спектральная плотность радиосигнала.** Важнейшей для статистической радиотехники вероятностной характеристикой АМ сигнала (13.7) является его спектр. Поскольку такой АМ сигнал является случайным процессом, его спектр определяется так, как это было описано в § 13.1. Например, пусть спектр телефонного сигнала  $S_U(\omega)$  имеет вид, приведенный на рис. 13.6, б. Тогда можно показать, что при амплитудной модуляции им гармонического колебания с частотой  $\omega_0$  спектральная плотность АМ колебания  $S_{AM}(\omega)$  будет иметь вид, изображенный на рис. 13.6, г. Вновь можно считать, что *спектр*

АМ колебания при модуляции случайным модулирующим сигналом содержит две боковые полосы, расположенные симметрично относительно дискретной компоненты на частоте  $\omega_0$ . Верхняя боковая полоса спектра АМ сигнала получается в результате уменьшения в 2 раза спектра модулирующего сигнала и переноса его в область высокой частоты на частоту  $\omega_0$ . Нижняя боковая полоса симметрична верхней относительно точки  $\omega = \omega_0$ .

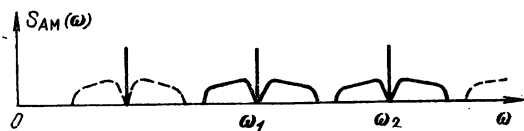


Рис. 13.7. Спектры АМ сигналов нескольких одновременно работающих передатчиков

Выбирая различные значения частот несущего колебания, можно спектральную плотность АМ сигнала помещать в различные диапазоны радиочастот. Этот факт служит основой организации одновременной работы нескольких передатчиков, каждый из которых обеспечивает передачу сообщений от одного источника к одному получателю информации без взаимных помех. Для этого частоты несущих гармонических колебаний выбираются так, чтобы спектры АМ сигналов разных передатчиков не перекрывались. Например, этому требованию удовлетворяют значения частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несущих колебаний АМ сигналов, спектры которых изображены на рис. 13.7 (верхняя боковая полоса АМ сигнала с несущей частотой  $\omega_1$  не накладывается на нижнюю боковую полосу АМ сигнала с несущей частотой  $\omega_2$ ).

Формулы (2.50) и (2.58) описывают соответственно ЧМ и ФМ сигналы как функции времени при произвольном, но детерминированном модулирующем сигнале  $u(t)$ . Если теперь модулирующий сигнал является случайным процессом, то соответствующий ему ЧМ или ФМ сигнал также будет случайным процессом. В этом случае (2.50) и (2.58) следует рассматривать как соотношения, справедливые для отдельных реализаций ЧМ и ФМ сигналов.

### 13.4. Помехи радиоприему

**Помехи в системе передачи информации.** Помехой радиоприему называют стороннее возмущение (электромагнитное, электрическое и т. д.), препятствующее правильному приему радиосигнала. Большой частью помеха создается непреднамеренно в процессе развития различных физических явлений, никак не связанных с процессом передачи информации с помощью электромагнитных волн. Примерами здесь могут служить как явления, обусловленные активной деятельностью человека, так и физические явления, происходящие в окружающей человека природе.

В процессе передачи информации радиотехническими средствами (см. рис. 1.3) помеха может воздействовать на сигнал практически в любой части системы передачи, начиная с преобразования сообщения в электрический сигнал и кончая обратным преобразованием принятого электрического сигнала в сообщение, которое предоставляется получателю. Однако при проектировании передатчика системы всегда можно принять дополнительные меры, устраняющие сторонние возмущения. Аналогичные меры можно принять и в тех частях системы, где осуществляется преобразование принятого электрического сигнала в сообщение. И совсем иначе обстоят дела, если перейти к рассмотрению методов борьбы со сторонними возмущениями в линии передачи или в приемнике, осуществляющем усиление и демодуляцию принятых слабых радиосигналов.

**Виды помех и причины их возникновения.** В линии передачи сторонние возмущения могут иметь вид электромагнитных волн, излучаемых внешними по отношению к рассматриваемой системе передачи источниками.

Такие помехи называют *внешними*. Источниками внешних помех являются, например, передатчики других систем передачи, промышленные и бытовые установки, в процессе работы которых имеет место или возможно излучение радиоволн при искрообразовании (электрифицированный транспорт, коллекторные электрические двигатели, бытовые электроприборы, системы зажигания автомобильных двигателей, медицинские электроустановки, сварочные аппараты и т. д.). Помехи, обусловленные перечисленными источниками, объединяются под общим названием *промышленные помехи*. Сущность этих помех состоит в том, что при нормальной работе



перечисленных устройств создается побочное электромагнитное излучение в окружающее пространство, которое не является необходимым для нормального функционирования этих устройств. Обычно такое излучение имеет место при ударном возбуждении затухающих электрических колебаний; для некоторых промышленных установок нормальный режим работы предусматривает генерирование (но не излучение!) незатухающих высокочастотных колебаний (как, например, в высокочастотных установках).

Имеются и естественные источники внешних помех. Среди них можно назвать следующие: процессы, происходящие в атмосфере и обуславливающие возникновение *атмосферных помех*, излучения внеземных радиоисточников (Солнца — ядра нашей галактики, радиоизлучения других галактик), называемых *космическими помехами*.

Среди атмосферных помех наиболее изученными являются электромагнитные излучения при грозовых разрядах. Во время грозы при вспышке молнии в радиоприемнике (особенно на длинных волнах) слышен сильный треск, значительно ухудшающий качество приема радиовещательных передач. Сильная помеха создается также при оседании ионей на приемную антенну, так как многие оседающие частицы могут нести в себе сравнительно заметный электрический заряд. Аналогичные процессы «тихого разряда» могут происходить при пылевых бурях; когда с приемной антенной соприкасаются наэлектризованные частицы пыли. Каждая такая частица обуславливает ударное возбуждение электрических колебаний во входных цепях радиоприемника. В процессе распространения радиоволн в атмосфере часть энергии волны поглощается. Однако доля поглощенной атмосферой энергии волны в значительной мере зависит от состояния атмосферы на трассе распространения и поэтому также является непредсказуемой; вследствие этого мощность сигнала на входе приемника системы передачи также оказывается зависящей от состояния атмосферы.

Самым мощным источником космических помех даже в годы минимума солнечной активности является солнце. При повышенной солнечной активности (появление вспышек, пятен и т. д.) интенсивность радиоизлучения Солнца резко возрастает. Радиоизлучения звезд, межзвездного пространства галактики и внегалактических скоплений заметно слабее.

Помехи могут возникать и в различных звеньях сис-

темы передачи. Такие помехи называют *внутренними*. Они неизбежно имеют место и обусловлены физическими процессами, происходящими на молекулярном уровне в элементах радиоаппаратуры. В первую очередь к внутренним помехам следует отнести *флуктуации* электрического тока и напряжения, являющиеся следствием дискретного строения вещества и статистической природы большинства используемых в радиотехнике физических явлений. Например, непредсказуемые отклонения значения тока в электрической цепи от его среднего значения даже на макроскопическом уровне могут обуславливаться только его дискретной природой: электрический ток есть движение дискретных носителей зарядов — электронов. Например, при токе 1 мА через проводник в одну секунду проходит в среднем  $6,3 \cdot 10^{15}$  электронов (заряд электрона равен  $1,592 \cdot 10^{-19}$  кулона). При меньшем значении тока среднее число электронов уменьшится. Истинное число электронов за этот промежуток времени может быть и больше и меньше указанного среднего значения, т. е. значение тока будет *флуктуировать*. При среднем значении тока  $10^{-20}$  А через проводник за одну секунду будет проходить в среднем меньше одного электрона (иногда будет проходить один электрон, а иногда — ни одного). Ток в этом случае представляет собой перемещение отдельных дискретных зарядов.

Большое значение для радиотехники имеют тепловые флуктуации. Так обычно считают, что любой резистор имеет постоянное сопротивление и является пассивным элементом, но в действительности на выводах резистора всегда имеется меняющаяся непредсказуемым образом ЭДС, обусловленная тепловым движением свободных электронов в веществе резистора. Это означает, что всякий резистор можно рассматривать как генератор шума.

Все перечисленные флуктуации принципиально *неустранимы*. Их объединяет единая первопричина возникновения — непредсказуемые колебания тех или иных величин около их средних значений. Обусловленные подобными флуктуациями помехи называются *флуктуационными*.

Подчеркнем в заключение, что истинные значения возмущений (отклонений значений электрического тока или напряжения), обусловленные воздействием практически любой из перечисленных выше помех, не могут быть точно предсказаны, т. е. помехи не могут быть опи-

саны с помощью детерминированных функций времени. Поэтому в радиотехнике для описания помех, как правило, используются вероятностные модели. Это означает, что любая помеха рассматривается как случайный процесс. Проблема выбора или задания модели некоторой реальной помехи фактически является проблемой выбора или определения вероятностных характеристик этой помехи.

### 13.5. Вероятностные модели помех

**Помехи как случайные процессы.** В § 13.4 отмечалось, что помехи невозможно описывать с помощью детерминированных функций времени, и поэтому приходится обращаться к вероятностным моделям. Любая вероятностная модель некоторого процесса — это набор вероятностных характеристик этого процесса, таких как математическое ожидание, дисперсия, спектральная плотность и т. д. Более полно свойства процесса описываются распределениями его мгновенных значений. Разные помехи радиоприемѹ, если их рассматривать как случайные процессы, имеют, вообще говоря, разные вероятностные характеристики. Опишем здесь кратко некоторые вероятностные характеристики помех, с которыми в радиотехнике приходится сталкиваться наиболее часто.

**Собственные шумы элементов радиотехнических устройств** относятся к классу внутренних помех, возникающих в устройствах систем передачи информации и называемых флуктуационными помехами. Флуктуационную помеху подобного типа можно представить как беспорядочную последовательность очень малых и очень коротких импульсов, следующих друг за другом через случайные промежутки времени. Импульсы могут накладываться друг на друга. Математически такая последовательность импульсов описывается как случайный процесс, для задания которого необходимо найти математическое ожидание, дисперсию, спектральную плотность и другие вероятностные характеристики, если они необходимы. Поскольку собственные шумы порождаются явлениями молекулярного масштаба, то длительности отдельных импульсов и интервалы между ними чрезвычайно малы. Поэтому спектр таких импульсов очень широк (в соответствии с изложенным в гл. 2 ширина спектра одиночного импульса обратно пропорциональна его длительности).

Экспериментальные исследования показали, что *спектральная плотность собственных шумов многих радиотехнических элементов имеет постоянное значение, отличное от нуля, вплоть до очень высоких частот—порядка  $10^{12}...10^{13}$  Гц (частота  $10^{12}$  Гц соответствует длине волны 0,3 мм). Именно поэтому собственные шумы элементов обычно рассматривают как случайные процессы типа белого шума, которые уже упоминались в § 13.1.*

В соответствии с определением спектр любого случайного процесса  $S(\omega)$  характеризует распределение средней мощности процесса по частотам. Поэтому приходящаяся на полосу частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  средняя мощность собственного шума

$$\sigma_{12}^2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega. \quad (13.9)$$

Если в некоторой полосе частот спектр имеет постоянное значение  $N_0$ , то вместо (13.9) получаем  $\sigma_{12}^2 = N_0(\omega_2 - \omega_1)$ .

Итак, спектр собственных шумов радиотехнических элементов постоянен вплоть до частот оптического диапазона, т. е. эта помеха перекрывает весь диапазон частот, применяемых для передачи информации с помощью электромагнитных волн. Из этого следует, что освободиться от такой помехи выбором частоты несущего колебания невозможно. Поэтому собственные шумы элементов радиотехнических устройств оказывают столь большое влияние на современную технику передачи информации, а способам борьбы с такими помехами уделяется так много внимания. Наиболее эффективные из этих способов основываются на методах *оптимального приема сигналов на фоне флуктуационных помех*. Элементарные сведения об этих методах изложены в следующей главе.

Рассмотрим в качестве примера собственных шумов тепловые флуктуации ЭДС на резисторе. Эти флуктуации обусловлены хаотическим тепловым движением носителей тока в проводящем слое. Среднее значение ЭДС на резисторе равно нулю, но есть флуктуирующая составляющая, которую необходимо рассматривать как случайный процесс типа белого шума. Мощность этой флуктуирующей составляющей, приходящаяся на полосу частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ , определяется формулой Найквиста

$$\sigma_{12}^2 = \frac{4k}{2\pi} TR(\omega_2 - \omega_1). \quad (13.10)$$

Здесь  $T$  — абсолютная температура резистора в градусах Кельвина;  $R$  — сопротивление, Ом;  $(\omega_2 - \omega_1)/2\pi$  — полоса частот, Гц;  $k = 1,37 \times$

$\times 10^{-23} \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{град}}$  — постоянная Больцмана. Так, если  $R=10^4$  Ом,  $T=300$  К

( $\omega_2 - \omega_1$ )/ $2\pi = 5 \cdot 10^3$  Гц, то *эффективное напряжение* собственного шума на резисторе  $\sigma_{12} \approx 0,9$  мкВ. Таким образом, если этот резистор подключить к входу усилителя с полосой пропускания  $5 \cdot 10^3$  Гц и любой центральной частотой, то на его выходе можно наблюдать реализации значительного по мощности шума. Если к выходу этого усилителя подключить громкоговоритель, то последний будет издавать шипящий звук. Отсюда и название «шум». По аналогии шумом называют любые флуктуационные электрические токи и напряжения.

Формула (13.10) остается справедливой для любого комплексного сопротивления; в этом случае под  $R$  следует понимать вещественную часть этого сопротивления.

Аналогичные характеристики (математическое ожидание, дисперсию, спектральную плотность) можно найти и для собственного шума активных элементов, обусловленного *дробовым эффектом*. Основная причина возникновения этого эффекта состоит в следующем. В электронной лампе вылет электронов из катода происходит в непредсказуемые моменты времени; поэтому число электронов, вылетевших за единицу времени, оказывается случайным и меняется во времени. Вследствие этого значение тока через лампу меняется случайным образом — флуктуирует. Эти флуктуации называют *дробовым шумом*. То же самое происходит в транзисторе или полупроводниковом диоде, так как пролет носителей зарядов через потенциальные барьеры осуществляется в случайные моменты времени. Прямое сравнение названных характеристик дробового шума с соответствующими характеристиками теплового шума приводит к заключению, что тепловой шум в обычных условиях является более мощной помехой, чем шум дробового эффекта.

Следует также отметить, что подобные процессы возникновения собственных шумов присущи всем современным приборам усиления и преобразования сигналов.

**Внешние помехи**, источники которых были перечислены в § 13.4, также не могут быть описаны с помощью детерминированных функций и их следует рассматривать как случайные процессы. Однако в отличие от собственных шумов радиотехнических элементов вероятностные характеристики внешних помех могут быть чрезвычайно разнообразными. Мощность этих помех, попадающая на любой заданный диапазон частот, может значительно изменяться от одного типа помехи к другому и существенно зависит от рассматриваемых частот. Это свидетельствует о неравномерности спектра многих

внешних помех. Опишем кратко некоторые свойства таких помех, являющиеся наиболее характерными для систем передачи информации.

Атмосферные помехи, обусловленные электромагнитным излучением при грозовых разрядах, можно описать как последовательность импульсов довольно сложной формы со случайными интервалами между ними. Спектральная плотность такой помехи оказывается монотонно падающей функцией частоты. Это означает, что мощность данной помехи, приходящаяся на полосу частот  $\Delta\omega$  с центральной частотой  $\omega_0$ , уменьшается с ростом  $\omega_0$ . Таким образом, мощность грозовых разрядов сосредоточена главным образом в области низких радиочастот. Поэтому такие внешние помехи обязательно приходится учитывать при проектировании систем передачи информации, работающих в диапазоне дециметровых и километровых волн. В диапазонах дециметровых и более коротких волн мощность этих помех незначительна и ими можно пренебречь.

Промышленные помехи также имеют спектральную плотность, являющуюся убывающей функцией частоты, но простирающуюся до 10...20 МГц. Их воздействие на приемник системы передачи информации во многом сходно с действием атмосферных помех. Наиболее эффективные методы борьбы с такими помехами сводятся по существу к любым способам снижения излучений в месте их возникновения (экранирование, искрогашение, фильтрация и т.д.).

Помехи от соседних (по частоте) передатчиков обусловлены тем, что реальные передатчики излучают сигналы, спектр которых шире полосы частот, отведенных для передачи. В результате часть мощности, излучаемой таким передатчиком, попадает в соседнюю полосу частот, которая может использоваться для передачи других сообщений. Такие излучения называются внеполосными. Для приемника, осуществляющего прием сигналов в соседней полосе, внеполосные излучения являются помехой, обуславливающей сторонние возмущения во входных цепях.

Проблема борьбы с внеполосными излучениями в последнее время приобретает все большее значение в связи с растущими потребностями человечества в числе одновременно действующих систем передачи информации. Особенно важно решение этой проблемы для диапазонов дециметровых и метровых волн. В настоящее время

применяются различные методы борьбы с помехами от соседних передатчиков. Подавляющая их часть основывается на статистическом подходе к этой проблеме, когда помехи данного типа рассматриваются как случайные узкополосные процессы. Большая часть этих способов основывается на использовании в приемных устройствах оптимальных методов приема при наличии помех.

Космические помехи являются помехами флуктуационного типа и имеют широкий спектр. Большая доля мощности этих помех приходится на диапазоны дециметровых и сантиметровых волн, где они являются преобладающими. Наиболее эффективные методы борьбы с такими помехами могут быть реализованы в приемных устройствах использованием оптимальных методов приема при флуктуационных помехах.

Шумы, обусловленные поглощением волн в земной атмосфере, оказываются существенными на частотах выше 0,5...1 ГГц. Эти шумы обусловлены поглощением энергии радиоволн парами воды и кислорода, содержащимися в атмосфере. Особенно интенсивно резонансное поглощение на длинах волн 1,3 см, 5 мм и 1,7 мм. При поглощении энергия радиоволн преобразуется в тепловую, в результате чего атмосфера становится источником тепловых шумов. Эти шумы можно рассматривать как помеху флуктуационного типа, применяя те же методы борьбы с нею. Именно эти шумы являются преобладающими на частотах выше 10 ГГц.

### 13.6. Воздействие помех на сигналы

Ранее были рассмотрены помехи, которые обуславливают появление ненужных сторонних электрических возмущений во входных цепях радиоприемников. Эти сторонние возмущения имеют вид либо случайных импульсных последовательностей, либо случайных флуктуационных колебаний. Характерная особенность всех таких возмущений состоит в том, что их приходится рассматривать как некоторые сторонние случайные процессы, не несущие полезную информацию.

При одновременном воздействии сигнала и помехи на входные цепи приемника возмущения, обусловленные ими, накладываются друг на друга. Математически такое взаимодействие сигнала и помехи можно записать следующим образом:

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (13.11)$$

где  $s(t)$  — функция времени, описывающая возмущение, вызванное воздействием на приемную антенну электромагнитной волны сигнала;  $n(t)$  — возмущение, обусловленное воздействием помехи;  $x(t)$  — отклик на одновременное воздействие сигнала и помехи.

Обычно для краткости  $s(t)$  называют *принятым сигналом*,  $n(t)$  — *помехой*, а  $x(t)$  — *принятым колебанием*. Колебание  $x(t)$  называют также *смесью сигнала и помехи*. В соответствии с (13.11) значение принятого колебания в любой заданный момент времени равно *сумме* мгновенных значений сигнала и помехи. Такая смесь сигнала и помехи, а также сама помеха называются *аддитивными*. Все перечисленные в предшествующих параграфах внешние и внутренние помехи являются аддитивными.

Если помеха  $n(t)$  или сигнал  $s(t)$  рассматривается как случайный процесс, то и принимаемое колебание  $x(t)$  необходимо рассматривать как случайный процесс. Например, если и сигнал и помеха являются случайными процессами, то

$$X(t) = S(t) + N(t), \quad (12.13)$$

где прописные буквы указывают, что все рассматриваемые колебания являются случайными процессами.

Существует и другой вид помехи, при которой мощность сигнала на входе приемника случайным образом меняется во времени. Обычно эти изменения происходят намного медленнее по сравнению со скоростью изменения мгновенных значений сигнала. Воздействие такой помехи на сигнал проявляется в том, что уровень сигнала может стать сколь угодно малым, например меньше уровня собственных шумов радиоприемника. Вследствие этого выделение полезного сообщения из столь слабого сигнала может оказаться невозможным. Математически при такой помехе принимаемое колебание

$$X(t) = N(t) S(t). \quad (13.13)$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в (13.12), но предполагается, что  $N(t)$  — случайный процесс, реализации которого не могут принимать отрицательных значений. Таким образом, в данном случае имеем *произведение* сигнала на некоторый случайный процесс, который принято называть *мультипликативной помехой*.

В реальных линиях передачи распространяющиеся электромагнитные волны подвергаются и более сложным



преобразованиям; так что указанные соотношения (13.12) и (13.13) не охватывают всех возможных способов воздействия помех на сигналы.

В заключение отметим, что следует различать искажения сигналов, обусловленные помехами, и искажения, возникающие при прохождении сигналов через различные радиотехнические устройства; последние являются детерминированными и их, как правило, можно предсказать, рассчитать и, если это необходимо, принять меры к их полному устранению. Совсем иные методы борьбы должны применяться для уменьшения влияния помех.

### Контрольные вопросы и упражнения

- 13.1. В чем состоит сущность статистического подхода к проблеме передачи информации с помощью электромагнитных волн? Почему нельзя при решении этой проблемы ограничиться детерминированными моделями сигналов?
- 13.2. Что представляет собой вероятностная модель сигнала?
- 13.3. Почему реальные модулирующие сигналы нельзя описать с помощью детерминированных функций времени? В качестве примера рассмотрите телефонный сигнал.
- 13.4. Назовите важнейшие вероятностные характеристики случайного процесса.
- 13.5. Поясните смысл терминов: дисперсия случайного процесса, средняя мощность случайного процесса.
- 13.6. Что характеризует спектральная плотность случайного процесса? Приведите график спектральной плотности узкополосного процесса.
- 13.7. Нарисуйте график спектральной плотности телефонного сигнала. Чему равна ширина спектра этого сигнала?
- 13.8. Чему равна ширина спектра телевизионного сигнала?
- 13.9. Каким образом ширина спектра телеграфного сигнала связана с длительностью элементарной телеграфной посылки?
- 13.10. Поясните смысл термина «помеха радиоприему».
- 13.11. Назовите причины, обуславливающие наличие помех радиоприему.
- 13.12. Приведите примеры источников помех в декаметровом диапазоне радиоволн. Назовите способы борьбы с такими помехами.
- 13.13. Чем обуславливается наличие помех в диапазоне метровых волн? Поясните физическую сущность процессов возникновения этих помех.
- 13.14. Почему большинство помех не удается описать с помощью детерминированных функций времени? Приведите пример помехи; укажите возможный способ ее математического описания.
- 13.15. Поясните механизм воздействия аддитивной помехи на сигнал.

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ И ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

В первой главе радиотехника была определена как область науки и техники, в которой рассматриваются вопросы передачи информации с помощью электромагнитных волн. До сих пор рассматривались лишь основные принципы организации такой передачи и наиболее важные для их реализации технические устройства. Для получения более полного представления о возможностях этого способа передачи информации необходимо познаться еще с некоторыми фундаментальными результатами, которые были получены в теории потенциальной помехоустойчивости и теории информации. В данной главе приводятся лишь некоторые необходимые для этого понятия и обсуждаются выводы, имеющие принципиальное значение для правильной оценки предельно достижимых возможностей радиотехники с точки зрения качества передачи сообщений. Ключевыми здесь являются следующие вопросы:

1. *Какова сущность понятия потенциальной помехоустойчивости? Почему это понятие является одним из самых важных в радиотехнике?*

2. *Какие существуют способы достижения потенциальной помехоустойчивости при передаче информации с помощью электромагнитных волн?*

3. *Как можно охарактеризовать качество передачи информации?*

### 14.1. Понятие о потенциальной помехоустойчивости

**Особенности передачи сообщений при наличии помех.** Наличие помех в системах передачи информации приводит к тому, что при демодуляции принимаемых колебаний выделяется не точная копия реализации модулирующего электрического сигнала  $u^{(h)}(t)$ , а искаженная, которую в дальнейшем будем обозначать  $\hat{u}^{(h)}(t)$ . Сигнал  $u^{(h)}(t)$  обычно называют переданным, а  $\hat{u}^{(h)}(t)$  — принятым (см. рис. 1.3). Если бы помех не было, то способ передачи сообщений с помощью электромагнитных волн позволял бы обеспечить точное соответствие между пере-

даваемым и принимаемым сигналами. При наличии помех принятый сигнал  $\hat{u}^{(h)}(t)$  отличается от переданного  $u^{(h)}(t)$ ; это отличие возрастает с увеличением мощности помехи. При большой мощности помехи это отличие может стать столь значительным, что по принятому сигналу  $\hat{u}^{(h)}(t)$  нельзя будет получить ясное представление о переданном сигнале  $u^{(h)}(t)$ . Поскольку в этом случае переданное сообщение в пункте приема восстановить невозможно, то говорят, что передача информации становится невозможной.

Как уже отмечалось в гл. 2, для передачи одних и тех же сообщений можно использовать различные типы модуляции — АМ, ЧМ, ФМ и т. д. При построении передатчика и приемника системы передачи информации для выполнения одних и тех же радиотехнических преобразований — преобразования частоты, детектирования или демодуляции, усиления и т. д. — можно использовать различные физические процессы. Таким образом, можно сказать, что для передачи одних и тех же сообщений можно использовать *разные системы передачи*. Последствия воздействия одной и той же помехи на сигнал в разных системах передачи оказываются различными. Всегда желательно систему передачи строить так, чтобы мешающее действие помехи проявлялось по возможности меньше. Для этого необходимо иметь возможность сравнивать работу двух любых систем передачи информации при наличии помех и выбирать лучшую из них. Такое сравнение наиболее часто основывается на важном понятии помехоустойчивости.

Способность системы передачи информации выполнять свои функции при наличии помех, т. е. противостоять мешающему действию помех, называется *помехоустойчивостью*. Однако для практического применения этого понятия при сравнении различных систем передачи необходимо иметь возможность количественно оценивать помехоустойчивость каждой рассматриваемой системы передачи. Чтобы обеспечить такую возможность, необходимо уточнить содержание таких важных понятий, как сообщение и источник сообщений.

**Дискретные и непрерывные сообщения.** Напомним, что в гл. 1 сообщение было введено как форма представления информации для ее передачи. Теперь конкретизируем это определение.

*Сообщением* будем называть набор символов (знаков), содержащих ту или иную информацию. Разные сообщения представляются разными наборами символов. Совокупность всех возможных разных наборов символов, которые могут появиться на выходе источника сообщений, называется *ансамблем сообщений*. Источник сообщений при этом можно рассматривать как устройство, осуществляющее выбор сообщений из этого ансамбля.

Для дальнейших рассуждений удобно для всех разных сообщений источника ввести единое обозначение, например переменную  $u$ . Каждое конкретное сообщение в этом случае можно принять в качестве частного значения этой переменной. Если  $u$  принимает только вполне определенные дискретные значения, например,  $u_1, u_2, \dots$ , то соответствующий источник сообщений называется *дискретным*, а  $u$  — *дискретным сообщением*. В противном случае источник будем называть *непрерывным*, а  $u$  — *непрерывным сообщением*. Оказывается, что возможности введения количественной меры помехоустойчивости в значительной степени зависят от того, являются ли подлежащие передаче сообщения дискретными или непрерывными. Рассмотрим оба эти случая.

**Помехоустойчивость передачи дискретных сообщений.** Итак, пусть сообщение  $u$  является дискретным. Это означает, что оно может принимать лишь дискретные значения  $u_1, u_2, \dots, u_N$ , где  $N$  — число возможных значений этого сообщения. Совокупность  $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$  является здесь ансамблем возможных значений дискретного сообщения  $u$ . Примером такого ансамбля может служить совокупность чисел  $\{0, 1\}$ , содержащая всего два символа 0 и 1. Сообщение в этом случае принимает лишь два значения:  $u_1=0, u_2=1, N=2$ . Соответствующий источник сообщений будем называть *бинарным*.

В гл. 1 также отмечалось, что для передачи сообщений с помощью электромагнитных волн необходимо передаваемое сообщение преобразовать в электрический модулирующий сигнал  $u(t)$ . В частности, если источник сообщений является бинарным, то в качестве модулирующего сигнала можно выбрать телеграфный сигнал. При этом достаточно условиться, что символу 1 соответствует импульс длительностью  $\tau$  с амплитудой  $U_1$  (символ 1 преобразуется в импульс), а символу 0 — отсутствие импульса на интервале времени длительностью  $\tau$  (символ 0 преобразуется в импульс длительностью  $\tau$  с амплитудой, равной нулю). Можно сказать, что модулирующий

сигнал здесь принимает лишь два дискретных значения  $U_1$  и 0.

В более общем случае модулирующий сигнал будет принимать  $N$  дискретных значений. При осуществлении модуляции несущего колебания  $s(t)$  модулирующим сигналом  $u(t)$  с дискретными значениями изменяемый параметр этого колебания (амплитуда, фаза или частота) также будет принимать дискретные значения.

В пункте приема ансамбль возможных значений  $u_1, u_2, \dots, u_N$  передаваемого сообщения  $u$  обычно считается известным; неизвестно лишь, какое именно из этих значений передается в данный момент времени или в данном интервале времени. В приемнике осуществляется демодуляция принятого колебания, являющегося смесью сигнала и помехи, и формируется оценка  $\hat{u}$  переданного значения  $u$ . Оценка  $\hat{u}$  должна указывать, какое из возможных значений  $u_1, u_2, \dots, u_N$  было преобразовано в модулирующий сигнал для осуществления модуляции несущего колебания, содержащегося в принятой смеси. Для этого можно, например, условиться, что оценка  $\hat{u}$  должна принимать значения из того же ансамбля значений  $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ ; тогда, например, если оценка  $\hat{u}$  принимает значение  $u_2$ , то говорят, что принято следующее решение — сообщение  $u$  в принятой смеси сигнала и помехи имеет значение  $u_2$ . Именно поэтому устройство, в котором формируется оценка  $\hat{u}$ , часто называется решающим устройством.

Бинарный источник сообщений. Проиллюстрируем теперь введенные выше понятия на примере системы передачи, в которой используется амплитудная модуляция, а подлежащие передаче сообщения формируются бинарным источником. На выходе такого источника будем иметь последовательность цифр — нулей и единиц. В качестве управляющего сигнала выберем телеграфный сигнал, принимающий значение либо  $U_1$ , либо 0 на интервале времени длительностью  $\tau$ . На рис. 14.1, а, б изображены реализация последовательности символов 1, 0, 1, подлежащих передаче, и соответствующая ей реализация телеграфного сигнала  $u(t)$ . Соответствующая реализация АМ сигнала изображена на рис. 14.1, в. Если в системе передачи помех нет, то принятый радиосигнал на входе приемника является копией переданного и, следовательно, имеет такой же вид. Будем считать, что демодуляция АМ сигнала осуществляется амплитудным детектором, пример построения которого был рассмотрен в § 9.3. Амплитудный детектор из сигнала  $s_{\text{АМ}}(t)$  выделяет принятый модулирующий сигнал, для которого в данном параграфе введено

обозначение  $\hat{u}(t)$ . Типичная реализация этого принятого модулирующего сигнала изображена на рис. 14.1, г.

На основе полученной реализации  $\hat{u}(t)$  модулирующего сигнала решающее устройство формирует принятую последовательность символов единиц и нулей. В существующих в настоящее время системах передачи информации это осуществляется часто следующим образом: принимается, что на интервале времени от 0 до  $\tau$  значение  $\hat{u}$  равно 1, если принятый модулирующий сигнал  $\hat{u}(t)$  в середине

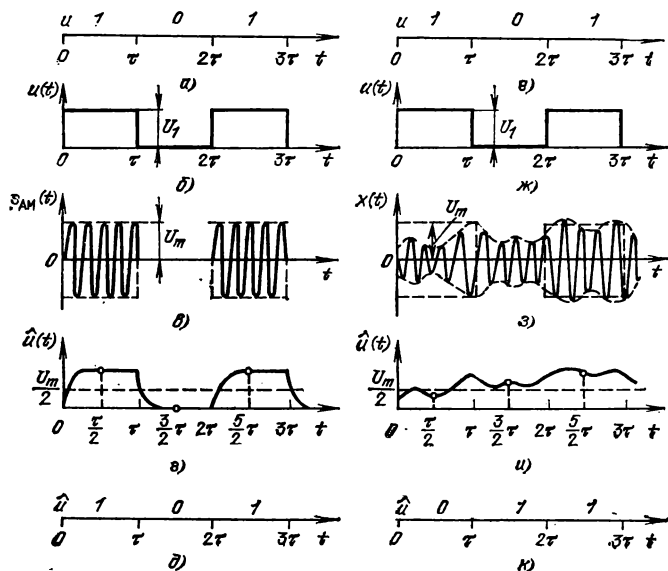


Рис. 14.1. Правильные и ошибочные решения при передаче дискретных сообщений

этого интервала имеет значение, большее  $U_m/2$ ; в противном случае принимается, что  $u=0$ . Аналогично формируется решение о значении сообщения  $u$  на интервале времени от  $\tau$  до  $2\tau$ , от  $2\tau$  до  $3\tau$  и т. д.

На рис. 14.1, д изображена последовательность значений  $\hat{u}$ , сформированная таким образом. Сравнивая последовательность передаваемых значений сообщения  $u$  (см. рис. 14.1, а) с последовательностью  $\hat{u}$  принятых значений, видим, что при отсутствии помех они совпадают друг с другом. В этом случае говорят, что прием осуществляется верно (без ошибок).

Иначе обстоит дело при наличии помех в системе передачи информации. Этот случай иллюстрируется с помощью рис. 14.1, е, ж, з, и, к. Основное отличие здесь состоит в том, что принятый радио-

сигнал  $x(t)$  теперь не является копией переданного АМ сигнала  $s_{\text{АМ}}(t)$ , поскольку  $x(t)$  является смесью сигнала  $s_{\text{АМ}}(t)$  и помехи  $n(t)$ . На рис. 14.1, з изображена возможная реализация принятого колебания  $x(t)$ . Если для выделения переданного сообщения в приемнике используются те же амплитудный детектор и решающее устройство, то на выходе решающего устройства будет сформирована

последовательность значений  $\hat{u}$ , указанная на рис. 14.1, к. Сравнивая эту последовательность с последовательностью переданных значений  $u$ , видим, что они не совпадают. А именно первый передаваемый сим-

вол  $u$  имел значение 1, а значение первого принятого символа  $\hat{u}$  равно 0. В этом случае говорят, что символ принят *неверно* (с *ошибкой* — вместо переданной единицы принят нуль). Согласно рис. 14.1, е, к второй символ также принят неверно (вместо переданного нуля принята единица); третий символ принят верно. В рассматриваемом примере ошибка при приеме первого символа 1 возникла вследствие того, что принятое колебание  $x(t)$  являющееся смесью сигнала и помехи, имело огибающую, значение которой в момент времени  $\tau/2$  оказалось меньше  $U_m/2$ . При приеме второго символа 0 ошибка возникла из-за того, что огибающая смеси сигнала и помехи в момент времени  $\tau + \tau/2$  превысила значение  $U_m/2$ . Поскольку значение огибающей смеси сигнала и помехи в любой фиксированный момент времени является случайной величиной, то появление ошибки при приеме одного символа следует считать случайным событием.

В общем случае, когда число  $N > 2$ , прием осуществляется верно, если при передаче значения  $u_k$  оценка  $\hat{u}$  также оказывается равной  $u_k$ ; если же  $\hat{u} = u_l$  и  $l \neq k$ , то говорят, что сообщение принято неверно (произошла ошибка при приеме сообщения).

Вероятность ошибки — количественная мера помехоустойчивости передачи дискретных сообщений. Для получателя сообщений важно, чтобы среди всех принятых значений сообщений доля неверно принятых символов была бы возможно меньшей. Эту долю можно определить как отношение неверно принятых значений к общему числу принятых значений сообщения. Поскольку при приеме каждого значения сообщения ошибка возникает случайно, определенная так доля ошибок окажется близкой к вероятности появления ошибки при приеме одного значения сообщения. Следовательно, *вероятность ошибки при приеме может служить количественной мерой помехоустойчивости системы передачи дискретных сообщений*. Чем меньше вероятность ошибки при прочих равных условиях, тем выше помехоустойчивость. *Минимально возможная вероятность ошибки при заданных условиях приема* (т. е. при заданных вероятностных моделях радиосигнала, управ-

ляющего сигнала и помехи) *определяет потенциальную помехоустойчивость приема дискретных сообщений* при этих условиях. Следует подчеркнуть, что потенциальная помехоустойчивость не является характеристикой какой-либо конкретной системы передачи информации, а зависит лишь от условий передачи и приема сигналов (вида несущего колебания и вида модуляции, свойств помехи и способа ее воздействия на сигнал).

Конечно, значение вероятности ошибки можно вычислить для конкретной системы передачи дискретных сообщений. Эта вероятность будет характеризовать *помехоустойчивость данной системы*. Как правило, она оказывается больше предельно достижимой минимальной вероятности ошибки. Разница между помехоустойчивостью системы и потенциальной помехоустойчивостью системы характеризует существующие возможности повышения качества передачи информации. Некоторые используемые в настоящее время способы повышения помехоустойчивости обсуждаются в последующих параграфах данной главы; из них в первую очередь необходимо назвать следующие: *оптимальный прием* дискретных сигналов при наличии помех, *выбор помехоустойчивых видов модуляции*, *применение корректирующих кодов*.

**Помехоустойчивость передачи непрерывных сообщений.** Рассмотрим теперь возможный способ введения количественной меры помехоустойчивости при передаче непрерывных сообщений. Примерами таких сообщений могут служить речь, музыка. Непрерывное сообщение преобразуется в модулирующий сигнал, который, как правило, оказывается непрерывным. Каждая реализация такого сигнала  $u(t)$  является непрерывной функцией времени. Поэтому при демодуляции в приемнике должна формироваться *оценка*  $\hat{u}(t)$ , также являющаяся непрерывной функцией времени. Поскольку оценка  $\hat{u}(t)$  должна формироваться для каждого момента времени, т. е. непрерывно во времени, задача приема сигнала  $u(t)$  в этом случае часто называется в статистической радиотехнике задачей *фильтрации* или задачей выделения этого сигнала из смеси с помехой.

При отсутствии помех принятый сигнал  $\hat{u}(t)$  может быть точной копией переданного сигнала  $u(t)$ . Однако при наличии помех эти сигналы будут несколько отличаться друг от друга. Для получателя сообщений желательно, чтобы эти отличия были возможно меньше.



В статистической радиотехнике применяют разные количественные меры различия между сигналами  $u(t)$  и  $\hat{u}(t)$ . Наиболее часто используется мера, которая называется средней квадратической ошибкой. Эта мера вводится следующим образом. Квадрат разности  $[\hat{u}(t) - u(t)]^2$  представляет собой квадрат ошибки восстановления сигнала  $u(t)$  в пункте приема в момент времени  $t$ . Однако эта величина является случайной, поскольку реальные сигналы, т. е.  $u(t)$  и  $\hat{u}(t)$ , являются случайными процессами. Следовательно, она не может служить мерой качества передачи непрерывного сигнала. Поэтому используют среднее значение квадрата ошибки  $\langle [\hat{u}(t) - u(t)]^2 \rangle = \sigma_{\text{ош}}^2(t)$ , где угловыми скобками обозначена операция усреднения по ансамблю всех возможных реализаций управляющего сигнала и помехи. Величина  $\sigma_{\text{ош}}(t)$  называется *средней квадратической ошибкой фильтрации непрерывного сигнала*. Во многих случаях эта величина не зависит от времени, имея постоянное значение  $\sigma_{\text{ош}}$ .

Если, например,  $u(t)$  является речевым сигналом, а  $\hat{u}(t)$  — оценка этого сигнала, сформированная в приемнике, то чем меньше  $\sigma_{\text{ош}}$ , тем лучше разборчивость воспроизводимой в пункте приема речи, тем яснее проявляются индивидуальные особенности голоса говорящего человека. Аналогично, если  $u(t)$  — электрический сигнал при передаче музыкального произведения, а  $\hat{u}(t)$  — принятый сигнал, воспроизводимый в пункте приема, то с уменьшением средней квадратической ошибки  $\sigma_{\text{ош}}$  улучшается качество воспроизведения музыкального произведения.

Таким образом, средняя квадратическая ошибка фильтрации (выделения) непрерывного сигнала может служить количественной мерой помехоустойчивости системы передачи непрерывных сообщений. Чем меньше эта ошибка при прочих равных условиях, тем выше помехоустойчивость, тем выше точность фильтрации. Минимально возможное значение средней квадратической ошибки при заданных условиях приема (т. е. при заданных вероятностных моделях управляющего сигнала, радиосигнала, помехи и способа воздействия помехи на сигнал) определяет потенциальную помехоустойчивость приема непрерывных сообщений при этих условиях или потенциальную точность фильтрации.

Вновь здесь подчеркнем, что предельно достижимая точность фильтрации не является характеристикой ка-

кой-либо конкретной системы передачи, а определяет лишь предельно возможную точность восстановления переданного сообщения при заданных условиях передачи и приема.

Для каждой конкретной системы передачи непрерывных сообщений можно вычислить фактическое значение средней квадратической ошибки восстановления передаваемых сигналов. Эта ошибка будет характеризовать точность фильтрации. Методы повышения точности передачи непрерывных сигналов вновь сводятся к применению оптимальных методов фильтрации непрерывных сигналов при наличии помех и выбору наиболее помехоустойчивых видов модуляции.

## 14.2. Оптимальный прием сигналов

**Оптимальный алгоритм приема сигнала.** Применение оптимальных методов приема сигналов при заданных условиях передачи сообщений является одним из важных способов достижения потенциальной помехоустойчивости передачи информации. Условия, при которых должен осуществляться прием, обычно формулируются следующим образом: задана вероятностная модель модулирующего сигнала, задан вид несущего колебания и способ его модуляции, задана вероятностная модель помехи и способ ее воздействия на сигнал. Сущность оптимального приема при этом состоит в том, чтобы для выделения модулирующего сигнала использовать такие преобразования принимаемой смеси высокочастотного сигнала и помехи, при которых обеспечивается наибольшая помехоустойчивость. Совокупность таких преобразований называется *оптимальным алгоритмом приема данного радиосигнала на фоне данных помех*.

**Прием дискретных сигналов.** Оптимальный прием дискретных сигналов проиллюстрируем на примере выделения телеграфного модулирующего сигнала, вероятностная модель которого была описана в § 13.2. Такой сигнал на каждом интервале времени длительностью  $\tau$  может принимать лишь два значения:  $+h$  и  $-h$ , вследствие чего его следует относить к дискретным сигналам.

Пусть далее задано, что несущее колебание является гармоническим с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $U_m$ , т. е.  $s(t) = U_m \sin \omega_0 t$ . Рассмотрим случай, когда модуляция этого колебания осуществляется путем умножения его

значений на значения реализации модулирующего сигнала  $U(t)$ <sup>1</sup>, т. е. можно записать

$$s(t; U(t)) = U_m U(t) \sin \omega_0 t. \quad (14.1)$$

Такая операция соответствует фактически фазовой модуляции несущего колебания, когда при изменении значения управляющего сигнала с  $+h$  на  $-h$  или наоборот фаза несущего колебания изменяется скачком на  $180^\circ$ . Сигнал (14.1) называется телеграфным радиосигналом;

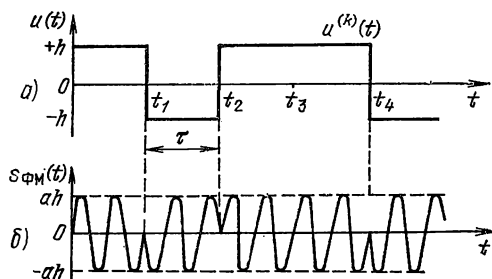


Рис. 14.2. Телеграфный и соответствующий ему ФМ сигнал

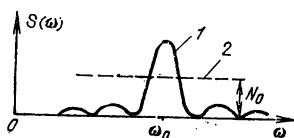


Рис. 14.3 Спектральные плотности сигнала 1 и помехи 2

если  $\tau$  — длительность элементарной телеграфной посылки, то  $\Omega = 2\pi/\tau$  называют *частотой манипуляции*. Примеры графиков реализаций сигналов  $U(t)$  и  $s(t; U(t))$  приведены на рис. 14.2, а и б соответственно.

Пусть, наконец, задано, что в линии передачи на сигнал  $s(t; U(t))$  воздействует аддитивная помеха  $N(t)$ , которая может быть описана как гауссовский процесс с равномерной спектральной плотностью, равной  $N_0$  в той полосе частот, где спектр сигнала (14.1) заметно отличен от нуля (рис. 14.3). Именно такая вероятностная модель помехи хорошо описывает собственные флуктуационные шумы элементов приемного устройства и некоторые внешние помехи, рассмотренные в гл. 13. В результате

<sup>1</sup> Напомним, что сигналы, которые описываются как случайные процессы, обозначаются прописными буквами.

принимаемое колебание  $X(t)$  (смесь сигнала и помехи) при таких предположениях можно записать в виде  $X(t) = s(t; U(t)) + N(t)$  для любого момента времени  $t$ .

Оптимальный алгоритм приема. При построении наилучшего алгоритма приема сигнала, конечно, необходимо использовать все доступные сведения о свойствах передаваемого сигнала  $U(t)$  и помехи  $N(t)$ . В частности, в данном случае известно, что сигнал  $U(t)$  принимает постоянные значения  $+h$  или  $-h$  на интервалах длительностью  $\tau$  и случайным образом меняет свое значение в известные моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ , интервал между которыми равен  $\tau$ . Такие сведения о выделяемом сигнале позволяют предложить, например, следующий порядок действий, обеспечивающий выделение модулирующего сигнала из принимаемой смеси  $X(t)$ . Принимаемая реализация сигнала  $U(t)$  в приемнике может быть восстановлена на любом интервале времени, длительность которого кратна  $\tau$ , если на каждом интервале времени от момента  $t_k$  до  $t_{k+1}$ , совпадающем с длительностью телеграфной посылки, удастся решить, какое значение из двух возможных  $+h$  и  $-h$  имеет эта реализация на данном интервале. Это решение должно быть принято на основе реализации смеси  $X(t)$  радиосигнала и помехи на интервале времени от  $t_k$  до  $t_{k+1}$ . Фактически при таком способе приема решения принимаются о значении каждой телеграфной посылки отдельно, независимо от того, какие решения были приняты до этого или будут приняты в будущем. Поэтому такой способ получил название *поэлементного приема*. Этот способ приема иногда не является наилучшим, но в настоящее время широко используется на практике, поскольку приводит к сравнительно простому алгоритму выделения телеграфного модулирующего сигнала.

Теперь остается дать ответ на последний вопрос: как найти наилучший алгоритм принятия решения о значении телеграфной посылки на интервале времени от момента  $t_k$  до  $t_{k+1}$  при условии, что решение должно выноситься на основе анализа реализации смеси  $X(t)$  сигнала и помехи на этом интервале. Методы построения таких алгоритмов развиты в теории потенциальной помехоустойчивости. Применяя эти методы, можно найти, например, оптимальный алгоритм принятия решения о значении телеграфной посылки, который обеспечивает в рассматриваемых условиях минимально возможное значение вероятности ошибки (т. е. принятия неправильного

решения). Этот алгоритм для рассматриваемых здесь условий записывается следующим образом: если

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) s(t; +h) dt - \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) s(t; -h) dt \geqslant \\ \geqslant (W_{s(+h)} - W_{s(-h)})/2 + \frac{N_0}{2} \ln \frac{p_{(-h)}}{p_{(+h)}}, \quad (14.2)$$

то принимается решение, что управляющий сигнал на интервале времени от  $t_k$  до  $t_{k+1}$  имел значение  $+h$ . Здесь приняты следующие обозначения:  $s(t; +h) = U_m h \sin \omega_0 t$ ,  $s(t; -h) = -U_m h \sin \omega_0 t$ ;  $W_{s(+h)}$  и  $W_{s(-h)}$  — энергия сигнала  $s(t; U(t))$  на интервале времени от  $t_k$  до  $t_{k+1}$  при условии, что управляющий сигнал  $U(t)$  принял значение  $+h$  или  $-h$  соответственно;  $p_{(+h)}$ ,  $p_{(-h)}$  — вероятности того, что сигнал  $U(t)$  на интервале от  $t_k$  до  $t_{k+1}$  примет значения  $+h$  или  $-h$  соответственно. При практическом использовании алгоритма (14.2) вместо  $x(t)$  под знак интеграла необходимо подставить реализацию смеси  $X(t)$ , полученную на интервале от  $t_k$  до  $t_{k+1}$ .

В рассматриваемом здесь примере  $W_{s(+h)} = W_{s(-h)}$ ,  $p_{(+h)} = p_{(-h)}$ ,  $s(t; -h) = -s(t; +h)$ ; в результате алгоритм принимает более простой вид:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) s(t; +h) dt \geqslant 0. \quad (14.3)$$

Таким образом, задача построения оптимального алгоритма поэлементного приема телеграфного сигнала полностью решена. Этот алгоритм в соответствии с (14.3) предусматривает следующие преобразования реализаций принимаемой смеси  $X(t)$  сигнала и помехи: полученную на каждом интервале времени от  $t_k$  до  $t_{k+1}$  реализацию  $x(t)$  процесса  $X(t)$  необходимо умножить на опорный сигнал  $s(t; +h) = U_m h \sin \omega_0 t$ , являющийся копией излучаемого радиосигнала на этом интервале времени, а произведение проинтегрировать по времени; полученный результат интегрирования (число) сравнить с пороговым значением, равным нулю.

Реализация оптимального алгоритма с использованием согласованного фильтра. Для того чтобы можно было данный алгоритм применить в реальном радиоприемном устройстве, его необходимо реализовать с помощью радиотехнических

устройств. Один из возможных способов реализации преобразований, предусматриваемых алгоритмом (14.3), заключается в том, чтобы использовать специально построенный для этого фильтр. Действительно, если взять произвольный фильтр с импульсной характеристикой  $h(t)$  и подать с момента  $t_k$  на его вход колебание  $x(t)$ , то в момент  $t'$  значение отклика фильтра

$$y(t') = \int_{t_k}^{t'} x(t) h(t' - t) dt. \quad (14.4)$$

Эта формула носит название *интеграла Дюамеля*. Из сравнения (14.3) и (14.4) становится очевидным, что значение интеграла в левой части неравенства (14.3) можно получить как мгновенное значение колебания  $y(t')$  на выходе фильтра в момент  $t' = t_{k+1}$ , если только импульсная характеристика фильтра будет иметь вид  $h(t' - t) = s(t; +h)$ ,  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ , или, что эквивалентно,

$$h(t) = s(\tau - t; +h), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (14.5)$$

Действительно, в этом случае имеем

$$y(t_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) h(t_{k+1} - t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) s(t; +h) dt.$$

Соотношение (14.5) представляет собой один из важных и замечательных результатов теории потенциальной помехоустойчивости. Оно определяет импульсную характеристику *фильтра, согласованного с сигналом  $s(t; +h)$* ,  $0 \leq t \leq \tau$ . В соответствии с (14.5) импульсная характеристика согласованного с сигналом фильтра совпадает с зеркальным изображением этого сигнала, сдвинутым в положительном направлении по оси времени на длительность сигнала  $\tau$ . На рис. 14.4, а приведены графики произвольного сигнала  $s(t)$  и импульсной характеристики согласованного с ним фильтра  $h_{сф}(t)$ . На рис. 14.4, б изображены графики сигнала, рассматриваемого в данном параграфе и импульсной характеристики  $h_{сф}(t)$  согласованного с ним фильтра.

Таким образом, алгоритм (14.3) принятия решения о значении телеграфной посылки может быть реализован с применением согласованного фильтра. Структурная схема соответствующего устройства изображена на рис. 14.5. Устройство, которое называется решающим, состоит из согласованного с сигналом  $s(t; +h)$  фильтра,

имеющего импульсную характеристику  $h_{\text{сф}}(t)$ , ключа  $S$ , который замыкается на короткое время в момент  $t=t_{k+1}$ , и порогового устройства ПУ; в последнем хранится значение порога  $c=0$ . На вход решающего устройства подается реализация  $x(t)$  смеси  $X(t)$  сигнала и помехи, полученная на интервале времени от  $t_k$  до  $t_{k+1}$ . Мгновенное значение отклика фильтра в момент времени  $t=t_{k+1}$ , т. е.

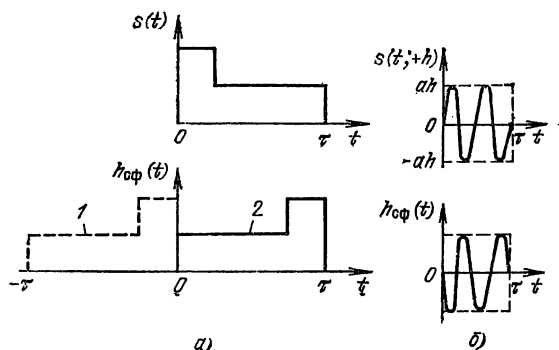


Рис. 14.4. Сигналы и импульсные характеристики согласованных с ними фильтров:

1 — зеркальное изображение сигнала  $s(t)$ ; 2 — импульсная характеристика фильтра, согласованного с сигналом  $s(t)$

в момент окончания посылки, считывается с помощью ключа  $S$ . Это мгновенное значение отклика в пороговом устройстве сравнивается с порогом  $c$ ; в зависимости от результата сравнения в пороговом устройстве формируется выходной сигнал  $\gamma(t)$ , имеющий значение  $+h$  либо  $-h$  на интервале от  $t_{k+1}$  до  $t_{k+2}$ . Эти же преобразования затем выполняются над реализацией смеси  $X(t)$  на интервале времени от  $t_{k+1}$  до  $t_{k+2}$  и т. д.

Свойства согласованного фильтра. Следует отметить, что форма сигнала на выходе согласованного фильтра существенно отличается от формы сигнала на входе. Для иллюстрации этого факта на рис. 14.6 приведены графики, изображающие форму сигналов на входе и на выходе, фильтра согласованного с сигналом, рассматриваемым в данном параграфе. Вторая и, пожалуй, самая главная особенность согласованного фильтра состоит в том, что он обеспечивает *максимально возможное мгновенное значение сигнала на выходе* точно в момент отсчета, совпадающий с моментом

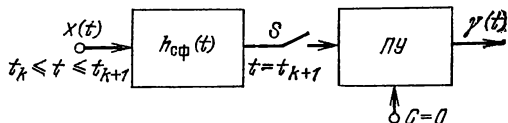
окончания посылки сигнала. Не существует другого фильтра, который при данном сигнале на входе смог бы обеспечить большее значение сигнала на выходе.

Если обозначить символом  $\sigma_{\text{вых.п}}^2$  мощность помехи на выходе согласованного фильтра, то отношение

$$[s_{\text{вых}}^2(t_{k+1})]/\sigma_{\text{вых.п}}^2 = C/\Pi \quad (14.6)$$

называется отношением сигнал-помеха на выходе фильтра. Из только что сказанного выше следует, что при за-

Рис. 14.5. Решающее устройство при поэлементном приеме телеграфного сигнала



данном сигнале на входе нельзя указать другой фильтр, который обеспечил бы большее значение отношения сигнал-помеха, чем фильтр, согласованный с этим сигналом.

Таким образом, важное свойство согласованного

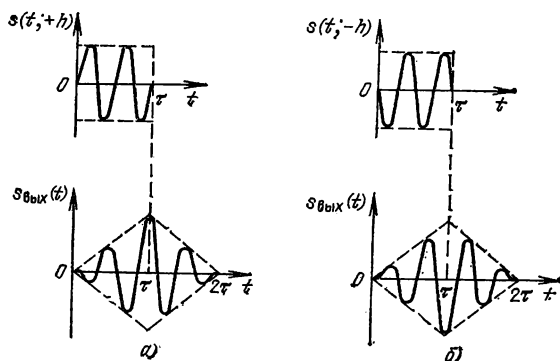


Рис. 14.6. Форма сигнала на входе и выходе согласованного фильтра:

а — при сигнале  $s(t; +h)$  на входе; б — при сигнале  $s(t; -h)$  на входе

фильтра состоит в том, что он обеспечивает такие преобразования над смесью сигнала и помехи, при которых достигается максимально возможное значение отношения сигнал-помеха на выходе фильтра в момент окончания сигнала. Именно благодаря этому свойству согласованного фильтра решающее устройство, структурная схема которого изображена на рис. 14.5, обеспечивает



наименьшую вероятность ошибки при приеме телеграфного сигнала, т. е. оно обладает в рассмотренных условиях потенциальной помехоустойчивостью.

Можно показать, что увеличение длительности  $\tau$  сигнала будет приводить к увеличению мгновенного значения сигнала  $s_{\text{вых}}(t)$  при  $t=t_{k+1}$ , т. е. к увеличению отношения сигнал-помеха и, следовательно, к снижению вероятности ошибки. Отсюда следует важный вывод: для уменьшения вероятности ошибки при приеме дискретных сигналов можно увеличивать длительность сигналов.

**Прием непрерывных сигналов.** Прием непрерывных сигналов существенно отличается от приема дискретных сигналов. Справедливость этого утверждения следует хотя бы из того, что при приеме дискретных сигналов форма сигнала в процессе обработки может существенно искажаться, как это имеет место в согласованном фильтре. И это вполне допустимо, так как важна не форма переданного сигнала, а факт передачи одного из его известных значений. При приеме непрерывных сигналов важно восстановить значения передаваемого сигнала  $u(t)$  в течение всего времени передачи; именно так и должна формулироваться задача приема радиовещательных и телевизионных сигналов при наличии помех. Для того чтобы подчеркнуть эту особенность приема непрерывных сигналов, используют и специальный термин — фильтрация сигналов.

При фильтрации сигналов главная цель состоит в том, чтобы как можно больше подавить помеху, внося по возможности меньшие искажения формы выделяемого сигнала. Это означает, что при фильтрации сигналов также увеличивается отношение средней мощности сигнала к средней мощности помехи, или, отношение сигнал-помеха.

Для подавления помехи можно использовать различие в спектральных плотностях сигнала и помехи. Если, например, спектры сигнала и помехи не перекрываются, то достаточно поставить фильтр, пропускающий лишь спектральные составляющие сигнала. В этом случае помеха на выходе фильтра будет практически отсутствовать, а форма сигнала не изменится, так что увеличение отношения сигнал-помеха за счет фильтрации будет значительным. Графики, иллюстрирующие этот случай, приведены на рис. 14.7, а.

Именно на таком принципе фильтрации, который часто называют *частотной селекцией*, основывается работа всех радиовещательных и телевизионных приемников.

Нужная программа здесь выбирается настройкой полосовых фильтров приемников на частоту несущего колебания соответствующей программы. Для того чтобы принимаемые сигналы не искажались в полосовых фильтрах приемников, необходимо, чтобы полоса пропускания  $\Pi$  этих фильтров была не меньше ширины  $\Delta\omega$  спектра принимаемого сигнала.

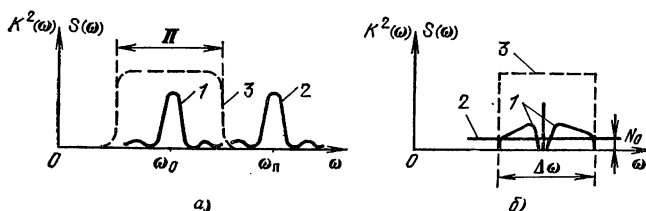


Рис. 14.7. Фильтрация сигнала из смеси с помехой:

*а* — при неперекрывающихся, *б* — перекрывающихся спектрах сигнала и помехи (1 — спектральная плотность радиосигнала; 2 — спектральная плотность помехи; 3 — амплитудно-частотная характеристика полосового фильтра приемника)

К сожалению, существуют помехи, спектральные плотности которых занимают весь используемый диапазон радиоволн. К таким помехам относится, например, собственный шум радиоприемных устройств; более подробно об этом говорилось в § 13.5. Однако и в этом случае применение фильтрации может заметно увеличить отношение сигнал-помеха.

Рассмотрим фильтрацию АМ сигнала  $s_{\text{АМ}}(t)$ , когда модуляция несущего гармонического колебания осуществляется телефонным сигналом (см. § 13.2). Спектр такого телефонного радиосигнала изображен на рис. 13.6, *г*; ширина этого спектра  $\Delta\omega = 2\omega_{\text{в}}$ , где  $\omega_{\text{в}}$  — верхняя граничная частота в спектре телефонного сигнала; пусть помехой при приеме сигнала  $s_{\text{АМ}}(t)$  является собственный флуктуационный шум приемника, имеющий в полосе частот от  $\omega_0 - \omega_{\text{в}}$  до  $\omega_0 + \omega_{\text{в}}$  спектральную плотность с постоянным значением  $N_0$ . Используем принцип частотной селекции для выделения сигнала  $s_{\text{АМ}}(t)$  из смеси с этим шумом. Подчеркнем, что здесь речь идет о фильтрации высокочастотного колебания, а не модулирующего сигнала. Для этого применим полосовой фильтр с центральной частотой, совпадающей с частотой

$\omega_0$  несущего колебания, и прямоугольной АЧХ. Как следует выбрать полосу  $\Pi$  пропускания этого фильтра?

В соответствии с изложенным в § 14.1 желательно минимизировать значение средней квадратической ошибки  $\langle [\hat{s}_{AM}(t) - s_{AM}(t)]^2 \rangle$  фильтрации сигнала  $s_{AM}(t)$ . Эта ошибка будет тем меньше, чем меньше мощность шума на выходе фильтра, при условии, что форма сигнала  $s_{AM}(t)$  при прохождении через этот фильтр не искажается. Мощность шума  $\sigma_{ш}^2$  на выходе фильтра определяется (13.9) и для рассматриваемых здесь условий оказывается равной  $\sigma_{ш}^2 = \Pi N_0$ ; из этого равенства следует, что мощность шума будет тем меньше, чем меньше полоса пропускания фильтра  $\Pi$ . Однако если принять  $\Pi$  меньше ширины  $\Delta\omega$  спектра сигнала  $s_{AM}(t)$ , то возникнут искажения формы этого сигнала при прохождении через фильтр; это повлечет за собой увеличение средней квадратической ошибки фильтрации. Поэтому обычно принимают, что  $\Pi = \Delta\omega$ . Этот случай иллюстрируется графиками на рис. 14.7, б. Мощность шума на выходе фильтра при этом будет равна  $\sigma_{ш}^2 = N_0 \Pi = N_0 \Delta\omega = 2N_0\omega_b$ . Если обозначить символом  $\sigma_c^2$  среднюю мощность сигнала  $s_{AM}(t)$  на выходе фильтра, то на выходе этого фильтра отношение сигнал-шум  $c/\omega = \sigma_c^2/\sigma_{ш}^2 = \sigma_c^2/2N_0\omega_b$ . Из этого равенства следует, что при заданных мощности сигнала  $\sigma_c^2$  и спектральной плотности мощности  $N_0$  шума отношение сигнал-шум на выходе фильтра тем больше, чем меньше верхняя граничная частота  $\omega_b$  в спектре телефонного сигнала. Уменьшение ширины спектра сигнала  $s_{AM}(t)$  позволяет сузить полосу пропускания  $\Pi$  фильтра и тем самым уменьшить мощность шума на выходе фильтра при той же мощности сигнала.

### 14.3. Зависимость помехоустойчивости от вида модуляции

Покажем, что помехоустойчивость приема сигналов зависит от вида используемой модуляции. Для этого вычислим приближенно при одних и тех же условиях приема отношение сигнал-помеха на выходе *идеальных детекторов* при амплитудной и частотной модуляции несущего колебания. Под идеальным детектором здесь будем понимать устройство, выделяющее модулирующий сигнал из радиосигнала. Так, если на вход идеального

амплитудного детектора воздействует АМ сигнал  $s_{\text{АМ}}(t) = U_m[1 + mU(t)] \sin \omega_0 t$ , то на его выходе получаем модулирующий сигнал  $u(t)$ ; аналогичным свойством обладает и идеальный частотный детектор.

Будем рассматривать простейший случай, когда и несущее колебание и модулирующий сигнал являются гармоническими, т. е.  $s(t) = U_m \sin \omega_0 t$ ,  $u(t) = U_m u \sin \Omega t$ . Помеха пусть также будет гармоническим колебанием, но с другой частотой  $\omega_n$  и малой амплитудой, т. е.  $n(t) = U_{mn} \sin \omega_n t$ ,  $U_{mn} \ll U_m$ .

Найдем сначала среднюю мощность сигнала на выходе идеальных амплитудного и частотного детекторов при отсутствии помехи. В случае амплитудной модуляции наибольшее значение коэффициента модуляции  $m = U_{mu}/U_m = 1$ . Поэтому максимально возможная амплитуда сигнала на выходе амплитудного детектора  $U_{m\text{АД}} = U_m$ . Отсюда следует, что при гармоническом управляющем сигнале мощность сигнала на выходе амплитудного детектора <sup>1</sup>

$$P_{\text{с АМ}} = \frac{1}{T} \int_0^T U_{m\text{АД}}^2 \sin^2 \Omega t \, dt = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\Omega/2\pi} U_m^2 \sin^2 \Omega t \, dt = U_m^2/2, \quad (14.7)$$

где  $T = 2\pi/\Omega$  — период гармонического колебания с частотой  $\Omega$ .

Рассмотрим теперь случай частотной модуляции: ЧМ сигнал описывается следующей функцией времени

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \sin \left( \omega_0 t - \frac{\Delta\omega}{\Omega} \cos \Omega t \right),$$

т. е. приращение фазы гармонического колебания с частотой  $\omega_0$  при ЧМ, обусловленное модулирующим сигналом, определяется соотношением  $\delta_c \varphi_{\text{ЧМ}}(t) = -(\Delta\omega/\Omega) \cos \Omega t$ . Среднее значение квадрата этого приращения

$$\begin{aligned} \langle [\delta_c \varphi_{\text{ЧМ}}(t)]^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{\Delta\omega}{\Omega} \cos \Omega t \right]^2 dt = \\ &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{\Omega/2\pi} \frac{(\Delta\omega)^2}{\Omega^2} \cos^2 \Omega t \, dt = \frac{(\Delta\omega)^2}{2\Omega^2} = \frac{M^2}{2}, \end{aligned} \quad (14.8)$$

<sup>1</sup> Здесь определяется средняя за период мощность гармонического колебания с частотой  $\Omega$ ; следует также иметь в виду, что вычисляемая по данной формуле мощность выделяется на сопротивлении 1 Ом.

где  $M = \Delta\omega/\Omega$  — индекс частотной модуляции.

Величина (14.8) определяет мощность сигнала на выходе идеального частотного детектора.

Рассмотрим теперь воздействие аддитивной смеси немодулированного несущего колебания и помехи на эти же детекторы и найдем выражения для мощности помехи на выходе амплитудного детектора, а также среднее значение квадрата отклонения фазы несущей. Эти соотношения сравнительно просто можно найти с помощью векторной диаграммы, приведенной на рис. 14.8. На этой диаграмме несущее гармоническое колебание  $s(t)$  представлено вектором с длиной  $U_m$  и фазой  $\omega_0 t$ . Помеха также изображена с помощью вектора, длина которого равна  $U_{mp}$ , а фаза —  $\omega_p t$ . Так как частота сигнала  $\omega_0$  отличается от частоты помехи  $\omega_p$ , то вектор помехи медленно вращается относительно вектора сигнала с частотой  $\omega_p - \omega_0$ . При  $\omega_p > \omega_0$  это вращение происходит против часовой стрелки (вектор помехи вращается быстрее вектора сигнала); в противном случае — в обратном направлении. На диаграмме изображено одно из возможных взаимных положений векторов помехи и сигнала.

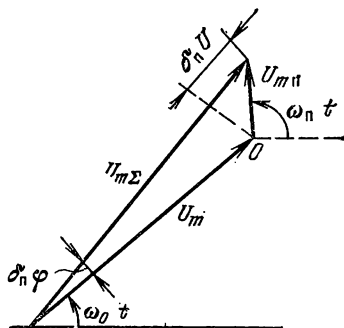


Рис. 14.8. Векторная диаграмма суммы гармонических сигнала и помехи

При вращении вектора помехи относительно точки  $O$  суммарное колебание будет иметь меняющуюся во времени амплитуду  $U_{m\Sigma}$  и фазу, отклоняющуюся на величину  $\delta_n \varphi(t)$  от фазы немодулированного колебания. Это означает, что действие аддитивной гармонической помехи на немодулированное несущее колебание проявляется в том, что возникает дополнительная модуляция как амплитудная, так и угловая. Амплитудную модуляцию выделяет амплитудный детектор, угловую — частотный.

Найдем мощность колебания на выходе амплитудного детектора при действии помехи. Из диаграммы на рис. 14.8 следует, что приращение амплитуды  $\delta_n U(t) \approx U_{mp} \sin(\omega_p - \omega_0)t$ . Эти изменения выделит амплитудный детектор, так что на его выходе мощность помехи

$$P_{\text{пАМ}} = \frac{|\omega_{\text{п}} - \omega_0|}{2\pi} \int_0^{|\omega_{\text{п}} - \omega_0|/2\pi} U_{\text{мп}}^2 \sin^2(\omega_{\text{п}} - \omega_0) t dt = U_{\text{мп}}^2/2. \quad (14.9)$$

Вычислим теперь среднее значение квадрата отклонения фазы, обусловленное воздействием помехи. Вновь в соответствии с диаграммой рис. 14.8 можно записать  $U_{\text{мп}} \sin(\omega_{\text{п}} - \omega_0) t / U_m \approx \sin[\delta_{\text{п}}\varphi(t)] \approx \delta_{\text{п}}\varphi(t)$ , поскольку  $\delta_{\text{п}}\varphi(t)$  — малая величина. Так что

$$\begin{aligned} \langle [\delta_{\text{п}}\varphi(t)]^2 \rangle &= \frac{|\omega_{\text{п}} - \omega_0|}{2\pi} \int_0^{|\omega_{\text{п}} - \omega_0|/2\pi} U_{\text{мп}}^2 \times \\ &\times \sin^2(\omega_{\text{п}} - \omega_0) t \frac{dt}{U_m^2} = \frac{1}{2} (U_{\text{мп}}/U_m)^2. \end{aligned} \quad (14.10)$$

На основе полученных соотношений теперь можно указать выражения для отношения сигнал-помеха при амплитудной и частотной модуляции. Из (14.7) и (14.9) при АМ имеем

$$\frac{P_{\text{сАМ}}}{P_{\text{пАМ}}} = \frac{U_m^2}{2} \cdot \frac{2}{U_{\text{мп}}^2} = \frac{U_m^2}{U_{\text{мп}}^2} = \rho_{\text{АМ}}. \quad (14.11)$$

В соответствии с (14.8) и (14.10) для ЧМ можно записать

$$\frac{\langle [\delta_{\text{с}}\varphi_{\text{ЧМ}}(t)]^2 \rangle}{\langle [\delta_{\text{п}}\varphi(t)]^2 \rangle} = \frac{M^2}{2} \frac{2U_m^2}{U_{\text{мп}}^2} = M^2 \rho_{\text{АМ}}. \quad (14.12)$$

Сравнение (14.11) и (14.12) позволяет сделать следующий вывод: при одних и тех же условиях отношение сигнал-помеха в системе с ЧМ в  $M^2$  раз больше, чем в системе передачи информации с АМ. Здесь  $M = \Delta\omega/\Omega$  — индекс частотной модуляции. На практике в системах передачи с ЧМ применяется, как правило, частотная модуляция с большим индексом модуляции ( $M > 10$ ). В таких системах преимущество ЧМ по сравнению с АМ весьма значительно. Следует, однако, подчеркнуть, что этот вывод получен в предположении, что амплитуда помехи намного меньше амплитуды несущего колебания.

Полезно также сравнить и другие характеристики систем передачи с АМ и ЧМ, например ширину спектра радиосигнала. В гл. 2 было показано, что ширина спектра ЧМ сигнала при больших индексах модуляции и прочих

одинаковых условиях в  $M$  раз больше, чем ширина спектра АМ сигнала. Таким образом, переход от АМ к ЧМ, обеспечивая увеличение отношения сигнал-помеха в  $M^2$  по мощности (и, следовательно в  $M$  раз по напряжению или току), сопровождается расширением в  $M$  раз занимаемой высокочастотным сигналом полосы частот. Происходит как бы обмен — выигрывая в отношении сигнал-помеха, проигрываем в ширине спектра.

Полученные соотношения можно обобщить на случай, когда и помеха и модулирующий сигнал являются случайными процессами. Выводы, касающиеся сравнения этих двух видов модуляции, также остаются справедливыми, так что преимущество ЧМ перед АМ сохраняется всегда при условии *малости помехи*. Частотная модуляция обеспечивает высокочастотному сигналу и другие полезные свойства. Так, ЧМ сигналы имеют постоянную амплитуду, вследствие чего ЧМ передатчики могут обеспечить большую среднюю мощность излучения и имеют больший коэффициент полезного действия по сравнению с АМ передатчиками.

#### 14.4. Коды и импульсно-кодовая модуляция

**Способ передачи дискретных сообщений.** Рассмотрим еще один способ повышения помехоустойчивости передачи сообщений путем применения модуляции. Анализ начнем со случая передачи дискретных сообщений. Модулирующий сигнал  $u(t)$  при этом принимает конечное число значений  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Под возможным значением  $u_k$  здесь можно понимать для простоты  $k$ -й разрешенный уровень при дискретизации по времени и квантовании по уровню непрерывного сигнала (см. рис. 2.6), хотя все приводимые ниже рассуждения остаются справедливыми и при других формах интерпретации возможного значения  $u_k$  дискретного сигнала  $u$ . Будем считать, что передача одного возможного значения  $u_k$  дискретного сигнала должна производиться в течение интервала времени  $\Delta t$  (см. рис. 2.7). Один из широко применяемых способов передачи таких сигналов состоит в следующем.

Поскольку возможные значения  $u_1, u_2, \dots, u_N$  сигнала  $u$  в пункте приема известны, то можно передавать не значение  $u_k$ , которое сигнал принял на интервале времени  $\Delta t$ , а лишь его номер  $k$ . В пункте приема по принятому номеру  $k$  можно восстановить и переданное значение  $u_k$ . В этом случае передаче подлежат фактически по-

следовательности чисел, каждое из которых имеет значение либо 1, либо 2, либо 3, ..., либо  $N$ .

**Двоичная система счисления.** Каждое передаваемое число является десятичным и содержит один или более десятичных разрядов или цифр. Так, число, не превышающее 9, можно записать одной цифрой, т. е. оно содержит один десятичный разряд. Числа от 10 до 99 содержат два разряда. Например, число 81 содержит восемь десятков плюс одну единицу, что можно записать следующим образом:  $81 = 8 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$ . Число 982 содержит три десятичных разряда и его можно записать:  $982 = 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ . Число 1982 можно прочесть так: одна тысяча плюс девять сотен плюс восемь десятков плюс две единицы или записать в виде  $1982 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ . Это число содержит одну единицу в разряде тысяч, девять единиц в разряде сотен, восемь единиц в разряде десятков и две единицы в разряде единиц. Аналогично произвольное десятичное число представляется в следующем виде:  $N = \alpha \cdot 10^0 + \beta \cdot 10^1 + \gamma \cdot 10^2 + \delta \cdot 10^3 + \dots$ , где  $\alpha, \beta, \dots$  — числа от 0 до 9.

Таким образом, любое десятичное число может быть представлено суммой по степеням числа 10, которое называется *основанием десятичной системы счисления*. В качестве основания можно взять любое число  $m$ . Тогда для записи десятичного числа  $N$  в системе счисления с основанием  $m$  будем иметь  $N = a \cdot m^0 + b \cdot m^1 + c \cdot m^2 + d \cdot m^3 + \dots$ , т. е. сумму по степеням  $m$ ; здесь  $a, b, \dots$  — коэффициенты, принимающие значение либо 0, либо 1, ..., либо  $m - 1$ . По аналогии с десятичными числами вместо записи всей суммы для десятичного числа  $N$  в системе счисления с основанием  $m$  можно указать лишь коэффициенты этой суммы. При этом запись начинается с коэффициентов старших разрядов и заканчивается коэффициентом при младшем разряде, т. е. при  $m^0$ . Так, вместо приведенной выше записи числа  $N$  можно использовать запись  $\dots dcba$ , которая называется записью числа  $N$  в  $m$ -ичной системе счисления; для нее иногда вводят специальное обозначение  $N_m$ , так что  $N_m = \dots dcba$ .

Особенно удобной для целей радиотехники является *двоичная система счисления*, для которой основание  $m = 2$ . В этой системе для записи любого числа используются только две цифры: 0 и 1, а не десять, как это имеет место в десятичной системе. В двоичной системе счисления любое десятичное число  $N$  должно быть записано в виде суммы  $N = a \cdot 2^0 + b \cdot 2^1 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2^3 + \dots$ , где коэффи-



коэффициенты  $a, b, c, \dots$  могут принимать лишь одно из двух значений: 0 или 1. Например,  $1 = 1 \cdot 2^0$ ;  $2 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1$ ;  $3 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1$ ;  $4 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$ ;  $5 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$ ;  $6 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$  и т. д. Если же число, записанное в виде суммы в двоичной системе счисления представить только коэффициентами при степенях двойки, то получим

$$1_2 = 1; 2_2 = 10; 3_2 = 11; 4_2 = 100; 5_2 = 101; 6_2 = 110. \quad (14.13)$$

Напомним, что коэффициент при первом младшем разряде пишется последним, при втором разряде — вторым справа, при третьем разряде — третьим справа и т. д. Например, можно проверить, что запись десятичного числа 37 в двоичной системе счисления имеет вид 100101, а для числа 1982 получаем 11110111110.

Удобство двоичной системы счисления для радиотехники обусловлено тем, что любое число в этой системе представляется последовательностью нулей и единиц. Такая последовательность легко может быть зафиксирована в электронном устройстве, содержащем элементы с двумя возможными устойчивыми состояниями, например «включено» и «выключено». Для этого достаточно принять, что состояние «вкл.» соответствует символу 1, а «выкл.» — 0, и уметь эти элементы ставить в нужное состояние.

**Кодирование сообщений и импульсно-кодовая модуляция.** Вернемся теперь снова к вопросу о передаче дискретных сообщений. Итак, вместо передачи возможного значения  $u_k$  модулирующего сигнала  $u(t)$  можно передавать лишь его номер  $k$ ; но десятичное число  $k$  можно представить в двоичной системе счисления последовательностью нулей и единиц, которая называется *кодовым словом*, соответствующим значению  $u_k$ . Число символов  $n$  в кодовом слове (число нулей и единиц) называется *длиной кодового слова*. Разным возможным значениям сигнала  $u$  будут соответствовать разные кодовые слова. Совокупность всех кодовых слов, соответствующих всем возможным значениям передаваемого сигнала  $u$ , называется *кодом* (двоичным кодом). Если длина всех слов кода одинакова, то код называется *равномерным*; в противном случае он называется *неравномерным*. Например, совокупность слов (14.13) образует *неравномерный код*. Если же в первых трех словах этого кода вместо недостающих символов поставить символ 0, то получим *равномерный код* с длиной слова  $n = 3$ .

На рис. 14.9 приведены графики, иллюстрирующие возможность представления непрерывного модулирующего сигнала  $u(t)$  в виде последовательности кодовых слов, следующих во времени друг за другом<sup>1</sup>. На рис. 14.9, а изображен график части реализации передаваемого сигнала, на рис. 14.9 б — результат его дискретизации по времени и квантования по уровню; на рис. 14.9, в изображены соответствующие кодовые слова, в которых символ 0 представлен нулевым значением, а символ 1 — значением  $h$  цифрового модулирующего сигнала  $u_{ц}(t)$ . Такое название сигнала  $u_{ц}(t)$  подчеркивает, что он несет в себе информацию о последовательности чисел, каждое из которых соответствует одному возможному значению передаваемого дискретного

сигнала. Процесс преобразования модулирующего сигнала в последовательность кодовых слов называют *кодированием*. Отметим здесь, что полученный в результате кодирования непрерывный модулирующий сигнал цифровой модулирующий сигнал является телеграфным сигналом, способ описания которого рассматривался в § 13.2.

Цифровой модулирующий сигнал  $u_{ц}(t)$  можно использовать теперь для модуляции несущего колебания

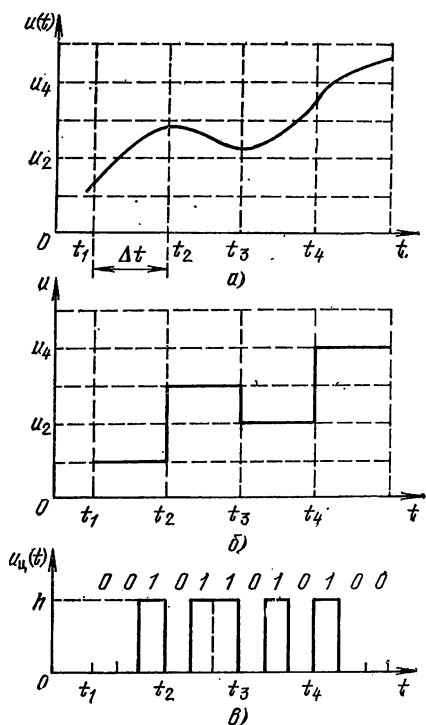


Рис. 14.9. Кодирование непрерывного модулирующего сигнала

<sup>1</sup> Напомним, что такая возможность обеспечивается теоремой Котельникова, которая упоминалась в § 2.5 (см. рис. 2.6).

по любому его параметру, получая в результате различные виды модуляции (АМ, ЧМ, ФМ). Однако такой способ передачи непрерывных сигналов с помощью двоичного кода имеет и собственное название — импульсно-кодовая модуляция (ИКМ). Именно такой способ передачи информации широко используется в настоящее время; в будущем его значимость будет возрастать, а области применений — расширяться.

Аналогично по соглашению может быть установлено соответствие между элементами любого ансамбля сообщений и кодовыми словами. Установление такого соответствия называется *кодированием сообщения*. Например, русский алфавит содержит 32 буквы. Если каждой букве необходимо поставить в соответствие одно слово равномерного двоичного кода, то длина  $n$  кодового слова должна удовлетворять условию  $2^n \geq 32$ , т. е.  $n=5$ . Здесь  $2^n$  — число всех разных слов равномерного кода с длиной слов  $n$  и основанием 2. Можно указать общую формулу определения необходимой длины кодового слова:  $n \geq \log_2 N$ , где  $N$  — число элементов кодируемого ансамбля сообщений, а в качестве  $n$  должно выбираться наименьшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству.

Одним из эффективных методов борьбы с помехами при приеме сигналов импульсно-кодовой модуляции является применение *корректирующих кодов*, которые позволяют обнаружить и исправить ошибки при приеме отдельных символов каждого кодового слова.

## 14.5. Корректирующие коды

**Коды, обнаруживающие ошибки.** Пусть для передачи информации используется ИКМ и применяется равномерный код с длиной кодового слова  $n$ . Такой код называется  $n$ -значным; он содержит  $N=2^n$  разных слов, представляющих собой последовательности из нулей и единиц. Ошибка при приеме одного кодового слова состоит в том, что вследствие действия помехи в решающем устройстве приемника нуль заменяется единицей или, наоборот, единица — нулем. Если в кодовом слове лишь один символ заменяется ошибочным, то такую ошибку называют *одиночной*, если два — *двойной* и т. д.

Если для передачи информации используются все слова кода, то ошибка любой кратности приведет к тому, что переданное кодовое слово в приемнике будет замене-

но некоторым другим кодовым словом. В пункте приема в этом случае нет никаких оснований сомневаться в правильности принятого слова, так как при передаче может появиться любое слово кода. Поскольку при ИКМ разные кодовые слова соответствуют различным сообщениям, то при замене одного слова другим фактически принимается сообщение, отличное от переданного.

**Пример 1.** Пусть передаче подлежат четыре сообщения:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ <sup>1</sup>. Для использования ИКМ в этом случае нужен код, содержащий  $N=4$  слова. Следовательно, значность кода  $n=\log_2 4=2$ . Припишем каждому сообщению одно кодовое слово, например так, как это указано в табл. 2. Предположим теперь, что передано сообщение  $B$ . Это значит, что на вход приемника поступила смесь помехи и сигнала, модулированного цифровым сигналом 01. В решающем устройстве приемника первый символ 0 вследствие воздействия помехи принимается неверно, т. е. он заменяется единицей, а второй символ принимается верно. На выходе решающего устройства в этом случае появляется кодовое слово 11. А это означает, что вместо переданного сообщения  $B$  ошибочно принимается сообщение  $D$ . Аналогично ошибка при приеме второго символа приведет к приему сообщения  $A$ . При двойной ошибке будет принято сообщение  $C$ .

Различие между кодовыми словами определяется числом различающихся символов в этих словах. Так, слова 00 и 01 в табл. 2 отличаются только одним символом; то же имеет место и для пар 00 и 10, 10 и 11, 01 и 11. Слова 00 и 11, а также 01 и 10 отличаются друг от друга двумя символами.

Чтобы обеспечить возможность обнаружения одиночной ошибки при приеме, поступают следующим образом. В процессе проектирования системы передачи информации выбирают длину  $n$  кодового слова так, чтобы число  $N$  всех разных слов кода превышало число возможных дискретных сообщений. При установлении же соответствия между сообщениями и словами кода для использования в системе передачи оставляют только те кодовые слова, которые отличаются друг от друга *не менее чем двумя символами*. Остальные кодовые слова считаются запрещенными и при передаче не используются. В этом случае любая одиночная ошибка при приеме даст кодо-

Таблица 2

Код для передачи четырех сообщений				
Сообщение	$A$	$B$	$C$	$D$
Кодовое слово	00	01	10	11

<sup>1</sup> При передаче русского текста, например, нужно передавать 32 символа-буквы русского алфавита, которые также можно назвать сообщениями.

вое слово, отличное от переданного всего лишь одним символом, но такое кодовое слово является запрещенным: в пункте приема известно, что при передаче оно появиться не может. Следовательно, в приемнике имеется возможность установить факт появления одиночной ошибки в принятом кодовом слове.

Пример 2. Для примера вновь возьмем те же четыре сообщения, которые указаны в табл. 2, и построим для их передачи код, обнаруживающий одиночную ошибку. Поскольку при  $n=2$  для передачи этих сообщений потребуются все слова кода, код с длиной

Таблица 3

Код, обеспечивающий  
возможность обнаружения  
однократной ошибки

Сообщение	A	B	C	D
Кодовое слово	000	011	101	110

слова 2 не может обеспечить обнаружение ошибки какой-либо кратности. Примем  $n=3$ ; в этом случае общее число кодовых слов  $N=2^n=2^3=8$ . Это следующие слова: 000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111. Отберем из этого набора лишь те слова, которые отличаются друг от друга не менее чем двумя символами. Эти слова приведены в табл. 3. Их оказалось четыре, т. е. столько, сколько дискретных сообщений, которые могут встретиться при передаче. Совокупность этих слов на-

зывают *кодом, обнаруживающим однократную ошибку* при передаче указанных сообщений. Кодирование сообщений в данном случае сводится к выбору разрешенных кодовых слов и установлению соответствия между ними и подлежащими передаче сообщениями.

Подчеркнем, что выбранные кодовые слова составляют лишь половину общего числа  $N$  слов кода при  $n=3$ . Оставшиеся слова 001, 010, 100 и 111 считаются запрещенными. Теперь одиночная ошибка при приеме любого символа переводит используемое слово в запрещенное, благодаря чему и удастся установить факт появления ошибки в принятом слове.

На случай появления ошибки в принятом слове могут быть предусмотрены специальные меры для ее устранения или отказа от использования полученного сообщения. Например, можно повторно передать то же самое кодовое слово. Для этого приемник формирует специальную команду, которая передается в обратном направлении к передатчику. В результате получается так называемая *система передачи с обратной связью*.

**Коды, исправляющие ошибки. Декодирование.** Перейдем теперь к более сложному вопросу о построении кода, *исправляющего одиночную ошибку*. Общий принцип построения такого кода по-прежнему остается тем же, что и для кода, обнаруживающего одиночную ошибку: из всех кодовых слов длины  $n$  для использования в системе передачи необходимо отобрать лишь часть, считая

остальные слова запрещенными. Однако для того чтобы исправить одну ошибку, все отобранные слова должны отличаться друг от друга *по крайней мере тремя символами*. В этом случае одиночная ошибка переведет переданное слово в одно из запрещенных и тем самым ошибка будет обнаружена, но полученное запрещенное слово отличается от переданного лишь одним символом, а от остальных разрешенных слов — не менее чем на два символа, т. е. принятое слово «ближе» к действительно переданному и менее похоже на остальные разрешенные слова. Поэтому используется такой способ принятия решения при появлении запрещенного слова: в качестве переданного слова принимается то из разрешенных, которое отличается от принятого наименьшим числом символов. Если при приеме  $n$  символов лишь один символ принимается неверно, то такой способ позволит указать среди разрешенных слов действительно переданное даже в том случае, когда принятое слово содержит одну ошибку. Это эквивалентно *исправлению ошибки*.

Пример 3. В качестве примера в табл. 4 указаны слова, совокупность которых образует код, исправляющий однократную ошибку. Для этого пришлось применить уже слова длиной в пять символов. Предположим, что передано слово 11011, а принято — 01011. Такого слова в кодовой таблице нет. Следовательно, это запрещенное слово, что свидетельствует о наличии ошибки в принятом слове. Сравним принятое слово с каждым разрешением. Принятое слово 01011 отличается от слова 00000 тремя символами  $C$  от слова 01101 — двумя символами, от слова 10110 — четырьмя символами, от слова 11011 — одним символом. Применяя описанный выше способ принятия решения при появлении запрещенного слова, приходим к выводу, что в качестве переданного следует считать слово 11011. Но это слово совпадает с действительно переданным. Следовательно, сообщение будет принято верно, несмотря на искажение помехой одного символа в решающем устройстве приемника.

Таблица 4

Код, обеспечивающий  
возможность обнаружения  
и исправления однократной  
ошибки

Сообщение	A	B	C	D
Кодовое слово	00000	01101	10110	11011

Фактически при применении корректирующих кодов для передачи сообщений в приемнике и выделения переданного сообщения каждое принятое слово должно поочередно сравниваться со всеми разрешенными словами кода. Если принятое слово совпадает с каким-либо разрешенным словом, то оно считается принятым верно и по нему восстанавливается сообщение, которое и счита-

ется переданным. Если же принятое слово не совпадает ни с одним разрешенным, то среди разрешенных слов отыскивается наиболее близкое к принятому; оно принимается в качестве переданного и по нему восстанавливается сообщение. Последовательность действий, обеспечивающая выбор одного из разрешенных сообщений по принятому слову, называется *декодированием*.

При большой длине кодового слова реализация описанного выше способа декодирования радиотехническими средствами приводит к довольно громоздким устройствам. Именно поэтому были разработаны и разрабатываются специальные коды, которые позволяют осуществить декодирование более просто.

Аналогично можно построить коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки любой кратности. Чем выше кратность исправляемых ошибок, тем большая длина кодового слова требуется.

Таким образом, применение корректирующих кодов позволяет уменьшить вероятность ошибки при передаче дискретных сообщений, т. е. повышает помехоустойчивость передачи информации. Однако, как и во всех предшествующих способах, повышение помехоустойчивости применением таких кодов не приобретает даром. Действительно, чтобы воспользоваться корректирующим кодом, приходится увеличивать длину кодового слова — число символов для передачи одного сообщения. Но каждый символ в системе передачи представляет собой элементарную телеграфную посылку. Если при увеличении длины слова оставлять неизменной длительность одной телеграфной посылки, то для передачи одного слова корректирующего кода (т. е. одного сообщения) потребуется больше время, чем при простой ИКМ. При этом фактически увеличивается энергия сигнала для передачи одного сообщения. Если же число передаваемых в единицу времени сообщений должно остаться неизменным, то при переходе к использованию корректирующих кодов придется сократить длительность элементарной телеграфной посылки. Это приведет к расширению полосы частот, занимаемой спектром радиосигнала системы передачи. Применение корректирующих кодов дает еще одну возможность повышения помехоустойчивости передачи дискретных сообщений с помощью изменения других характеристик системы передачи.

## Контрольные вопросы и упражнения

- 14.1. Поясните сущность понятия *помехоустойчивость передачи информации*. Почему это понятие является одним из самых важных в статистической радиотехнике?
- 14.2. Приведите пример количественной меры *помехоустойчивости* при передаче дискретных сообщений. Обоснуйте целесообразность такой меры.
- 14.3. Приведите пример количественной меры *помехоустойчивости* при передаче непрерывных сообщений. Обоснуйте целесообразность такой меры.
- 14.4. Поясните сущность понятия *потенциальная помехоустойчивость*.
- 14.5. Как следует понимать термин *помехоустойчивость* системы передачи информации? Каково взаимоотношение этого понятия с понятием *потенциальной помехоустойчивости*?
- 14.6. Перечислите основные методы повышения *помехоустойчивости* передачи информации с помощью электромагнитных волн.
- 14.7. Как определяется оптимальный алгоритм приема сигналов на фоне помех при передаче дискретных и непрерывных сообщений?
- 14.8. Дайте определение понятию «отношение сигнал-помеха» (по мощности, по напряжению).
- 14.9. Что такое согласованный фильтр? Приведите пример сигнала и укажите импульсную характеристику фильтра, согласованного с этим сигналом.
- 14.10. Изменяется ли форма сигнала при прохождении через согласованный с ним фильтр? Приведите примеры графиков сигналов на входе и на выходе согласованного фильтра.
- 14.11. Каким образом можно подавить помеху в виде немодулированного гармонического колебания, частота которого попадает в полосу частот, занимаемую спектром сигнала? Поясните предлагаемое решение на примере телеграфного радиосигнала.
- 14.12. Какой из двух видов модуляции АМ или ЧМ является более *помехоустойчивым* при малом уровне помехи?
- 14.13. Дайте определения следующим понятиям: *двоичный код*, *кодовое слово*, *равномерный код*. Какую длину кодового слова двоичного кода следует выбрать, чтобы можно было закодировать все буквы русского алфавита?
- 14.14. Что такое *корректирующий код*?

## Список литературы

1. Лосев А. К. Введение в специальность «Радиотехника».—М.: Высшая школа, 1980, 240 с.
2. Белоцерковский Г. Б. Основы радиотехники и антенны. —ч. I М.: Сов. радио, 1978, 368 с.
3. Андреев В. С. Теория нелинейных электрических цепей.—М.: Радио и связь, 1982, 280 с.
4. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы.—М.: Сов. радио, 1977, 608 с.
5. Зюко А. Г., Кловский Д. Д., Назаров М. В., Финк Л. М. Теория передачи сигналов.—М.: Связь, 1980, 288 с.
6. Лосев А. К. Линейные радиотехнические цепи.—М.: Высшая школа, 1971, 560 с.
7. Евдокимов Ф. Е. Теоретические основы электротехники.—М.: Высшая школа, 1981, 488 с.
8. Атабеков Г. И. Линейные электрические цепи. ч. IМ.: Энергия, 1978, ч. II, III, 1979. 592, 432 с.



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вектор** Пойнтинга 215
- Величина** случайная 26
  - гауссовская 263
- Волны** электромагнитные 13, 214, 246
  - бегущие, стоячие 222—238
- Двухполосники** 62
- Декодирование** 318
- Декремент** колебаний логарифмический 84
- Детектирование** 18, 181
- Дискретизация** по времени 41
- Длина** волны в волноводе 13, 249, 254
  - в длинной линии 227
  - в свободном пространстве 214
- Добротность** 85
  - катушки индуктивной 69
  - контура параллельного 104
  - эквивалентная 106, 107
- Закоп** суперпозиции 71
  - Гаусса 206
  - полного тока 209
- Избирательность** контура 95, 96
- Индукция** магнитная 208
- Интеграл** Дюамеля 301, 302
- Информация** 11
- Искажения** сигналов 74—76
  - линейные, нелинейные 74
- Источник** информации 12
  - сообщений бинарный 291
- Катушка** индуктивная 65
- Квантование** 43
- Код** равномерный 312
  - корректирующий 314
- Кодирование** сообщений 313
- Колебания** электрические 79
  - свободные 78, 81, 87
- Колебание** несущее 17
- Конденсатор** 67
- Контур** колебательный 78, 87
  - диапазонный 97
- Коэффициент** бегущих волн 235
  - включения 113
  - затухания колебаний 84
  - отражения 235
  - полезного действия 128
  - прямоугольности АЧХ 96
  - модуляции 46
- Линия** передачи 20
  - задержки 161
  - длинная 219
- Методы** возбуждения волновода 250
- Модель** сигнала 22
  - вероятностная 259, 267
  - детерминированная 23, 259
- Модуляция** амплитудная 44
  - импульсно-кодовая 314
  - фазовая, частотная 52, 57
- Мощность** 65, 69
- Оптические** свойства 217, 218
- Передача** энергии 243
- Плотность** распределения вероятностей 262
  - Поле магнитное 208
  - Полоса пропускания одиночного контура 94
    - связанных контуров 132
    - фильтра 135
  - Получатель информации 11, 12
  - Поляризация 215, 216
  - Помехоустойчивость 290
  - Постоянная времени 82
  - Принцип непрерывности 208
  - Прием сигналов 297
  - Процесс переходный 85
    - случайный 261
  - Резистор 63, 253
  - Резонанс напряжений 89
    - токов 101
  - Ряд Фурье 24
- Связь** критическая 127
  - между контурами 116
  - обратная 191
- Сигнал** непрерывный 40
  - модулирующий 17, 44
  - периодический 26
- Система** направляющая 20
  - передачи информации 19
- Сообщение** 11
- Сопrotивление** 64
  - вносимое активное 64
  - входное контуров 89, 102
  - волновое 81, 214, 250
  - длинной линии 232
  - характеристическое 136
- Спектр** амплитуд 28, 32
- Спектральная** плотность 35, 270, 283
- Ток** проводимости 207
- Теорема** Котельникова 40
- Уравнение** Максвелла 210
- Условие** пропускания фильтра 138
- Фидер** 238
- Фильтр** активный 155, 157
  - безындуктивный 153
  - верхних и нижних частот 145, 147
  - заграждающий (режекторный) 149
  - магнитострикционный 159
- Цепь** электрическая линейная 70
  - нелинейная 165
  - параметрическая 194
- Частота** свободных колебаний 80
  - несущая, рабочая 15, 17
  - резонансная 30
- Четырехполосник** 72
- Ширина** спектра 38, 59
- Эффект** поверхностный 64

