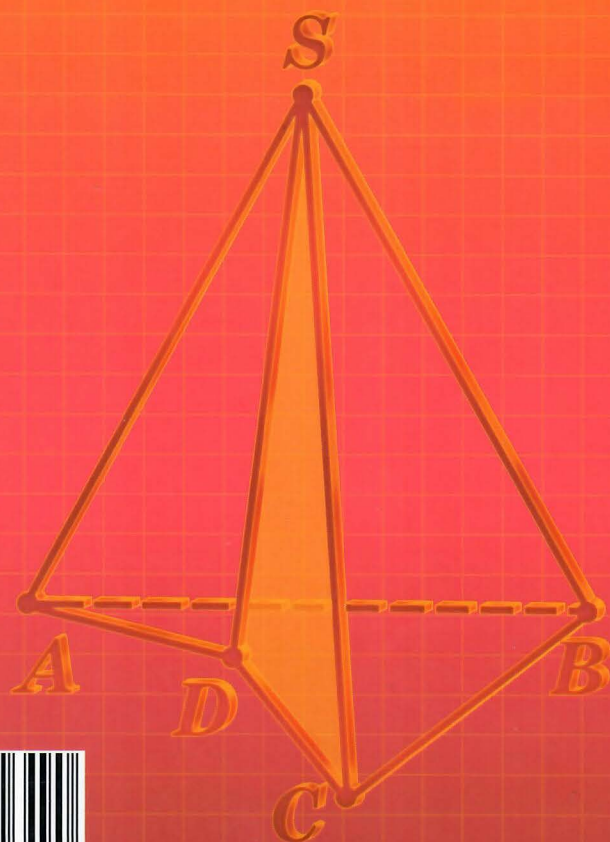


# МАТЕМАТИКА



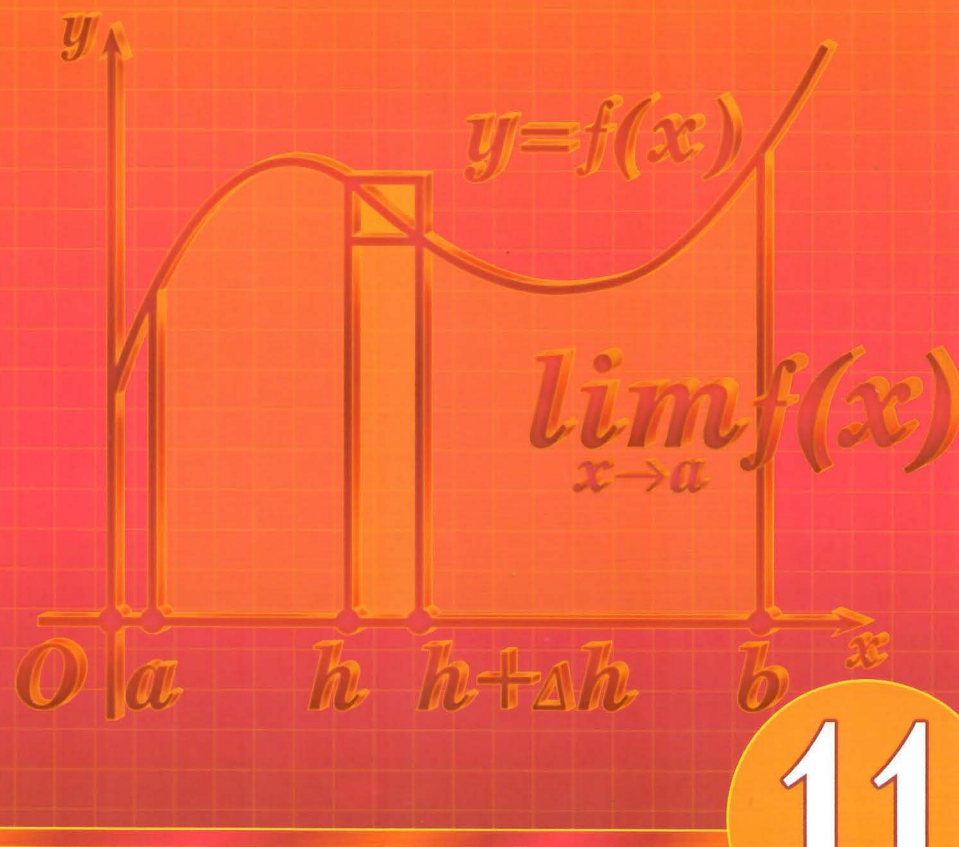
«РУССКОЕ СЛОВО»

МАТЕМАТИКА

11

Многоступенчатое обучение

Базовый и углублённый уровни



«РУССКОЕ СЛОВО»

11  
класс

ФГОС  
ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

**В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов,  
А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин**

# МАТЕМАТИКА

## АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

**Учебник для 11 класса  
общеобразовательных организаций**  
БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

Под редакцией  
академика РАН В.В. Козлова  
и академика РАО А.А. Никитина

*3-е издание*

Рекомендовано  
Министерством просвещения  
Российской Федерации

*Экспертное заключение № 004701 от 19.12.2016 г. (научная экспертиза)  
Экспертное заключение № 004708 от 19.12.2016 г. (педагогическая экспертиза)  
Экспертное заключение № ОЭ/16-0292 от 26.12.2016 г. (общественная экспертиза)*

Соответствует Федеральному  
государственному образовательному стандарту

Москва  
«Русское слово»  
2020



УДК 373.167.1:51\*11(075.3)

ББК 22.1я721

К59

**Авторы:**

*В.В. Козлов* — академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор;

*А.А. Никитин* — академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор;

*В.С. Белоносов* — доктор физико-математических наук, профессор;

*А.А. Мальцев* — кандидат физико-математических наук, доцент;

*А.С. Марковичев* — кандидат физико-математических наук, доцент;

*Ю.В. Михеев* — кандидат педагогических наук;

*М.В. Фокин* — доктор физико-математических наук, профессор

**Козлов В.В., Никитин А.А.**

**К 59** Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 11 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. — 3-е изд. — М.: ООО «Русское слово — учебник», 2020. — 400 с. — (ФГОС. Инновационная школа).

ISBN 978-5-533-01649-0

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования, является частью учебно-методического комплекта «Математика» и входит в систему учебников «Инновационная школа».

Учебник предназначен для общеобразовательных организаций.

УДК 373.167.1:51\*11(075.3)

ББК 22.1я721



ISBN 978-5-533-01649-0

© В.В. Козлов, 2015, 2020

© А.А. Никитин, 2015, 2020

© В.С. Белоносов, 2015, 2020

© А.А. Мальцев, 2015, 2020

© А.С. Марковичев, 2015, 2020

© Ю.В. Михеев, 2015, 2020

© М.В. Фокин, 2015, 2020

© ООО «Русское слово — учебник», 2015, 2020

# Предисловие



Данная книга — седьмая в серии трёхуровневых учебников по математике, созданных коллективом авторов из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одарённости детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета.

Прежде всего авторы отказались от традиционного деления математики на несколько дисциплин: арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, основы анализа и так далее. Все перечисленные предметы предлагается изучать в общем курсе. Это подчёркивает единство математической науки, тесную взаимосвязь развиваемых в ней идей и методов, фундаментальную роль математики как важного элемента общей культуры.

Потребности использования математики в разных областях человеческой деятельности различны, так же как различны и природные склонности и способности учащихся, поэтому не всем им математика нужна в одинаковом объёме. В настоящем учебнике приняты три уровня изложения, отличающиеся не только объёмом, но главным образом глубиной и сложностью изучаемого материала. Первый уровень предполагает овладение знаниями, способствует формированию умений и навыков, которые необходимы каждому культурному человеку. Второй уровень должен обеспечить усвоение и закрепление умений и навыков, которые позволят успешно продолжить обучение сначала в старшей школе, а затем и в вузе. На этом уровне развивается и дополняется материал первого уровня. Третий уровень — специализированный. На этом уровне, в дополнение ко второму, предполагается воспитание профессионального интереса к математике и сознательное овладение логикой рассуждений. Материал первого уровня может изучаться независимо от второго и третьего, а материал второго не зависит от изучаемого на третьем уровне. Разделы, относящиеся ко второму уровню, отмечены в тексте звёздочкой, а материал третьего уровня — двумя звёздочками.



Учебник состоит из 12 глав, разбитых на параграфы, которые делятся на более мелкие разделы — пункты. К каждому параграфу предлагаются контрольные вопросы, задачи, упражнения и тесты, а к каждому пункту — подходящий «открытый вопрос». Наличие открытых вопросов — важная особенность изложения учебного материала. Фактически эти вопросы — специальные темы для размышления и обсуждения. Ответы на них не всегда однозначны. Более того, иногда сознательно предполагается, что существует несколько различных правильных ответов. Многие из них можно найти на страницах учебника, а в некоторых случаях их подсказывает окружающая действительность. Часто именно ответ на открытый вопрос дополняет материал пункта до логического завершения.

Учебник прошёл апробацию в школах нескольких регионов, получил положительные экспертные заключения РАН и РАО, рекомендован Министерством просвещения Российской Федерации.

Авторы выражают искреннюю признательность академику РАО В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровневого обучения. Авторы благодарят докторов физико-математических наук М.П. Вишневого и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе в формировании содержания трёхуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с нами, — доцента В.В. Войтишека, профессора Т.И. Зеленька и профессора Д.М. Смирнова.



В этой главе мы рассмотрим важные понятия предела функции и непрерывности, их основные свойства, и установим непрерывность большинства функций, которые изучаются в школьном курсе математики. Будет показано, как применять свойства монотонности и непрерывности при решении некоторых уравнений и неравенств.

## § 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ■

**1.1. Область определения функции.** Множество всех тех чисел, для которых имеет смысл рассматривать числовую функцию, заданную формулой, иногда называют *естественной областью определения* функции.

Функция может быть определена при всех действительных  $x$ . Например, естественная область определения функции  $f(x) = \sin x$  — это вся числовая прямая.

Функция может быть определена на промежутке числовой прямой. Например, функция  $f(x) = \sqrt{x}$  определена при  $x \geq 0$ , то есть на луче  $[0; \infty)$ .

Функция может быть определена на объединении нескольких промежутков. Например, функция  $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$  определена при  $x \geq 0$  и при  $x \leq -1$ , то есть на множестве  $D = (-\infty; -1] \cup [0; \infty)$ .

Функция может быть определена на объединении бесконечного числа промежутков. Например, функция  $f(x) = \operatorname{tg} x$  определена на интервалах  $\dots \left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right), \dots$ , то есть на всех интервалах вида  $\left(-\frac{\pi}{2} + m\pi; \frac{\pi}{2} + m\pi\right)$ , где  $m$  — любое число.

Естественной областью функции  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$  является множество  $D = (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$ .

Иногда функция может рассматриваться на непустом множестве, которое является лишь частью естественной области определения, что оговаривается специально. Например, можно рассматривать функцию  $f(x) = \sin x$  на промежутке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Вопрос.** Какова естественная область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}?$$



**1.2.\*\* Пример области определения функции.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \lg\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ . В её области определения  $x \neq 0$ . Логарифмы вычисляются только от положительных чисел, поэтому найдём такие  $x$ , для которых  $\sin \frac{1}{x} > 0$ . Решением этого неравенства является множество промежутков  $2\pi k < \frac{1}{x} < \pi + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число. Отсюда при  $k = 0$  имеем  $x > \frac{1}{\pi}$ , при  $k > 0$  имеем  $\frac{1}{2\pi k} > x > \frac{1}{\pi + 2\pi k}$ , при  $k < 0$  также имеем  $\frac{1}{2\pi k} > x > \frac{1}{\pi + 2\pi k}$ .

Это множество и есть естественная область определения функции  $f(x) = \lg\left(\sin \frac{1}{x}\right)$ . Часть этой области изображена на рис. 1.

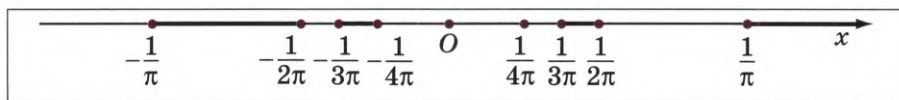


Рис. 1

**Вопрос.** Какова область определения функции  $f(x) = \sqrt{\lg(\sin x)}$ ?

**1.3. Окрестности числа.** Напомним, как для произвольного числа  $a$  и положительного числа  $\varepsilon$  определяется  $\varepsilon$ -окрестность. Пусть, например,  $a = 3$  и  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Тогда  $\varepsilon$ -окрестность числа 3 — это множество всех таких чисел  $x$ , что  $|x - 3| < \frac{1}{2}$ . На числовой прямой эта  $\varepsilon$ -окрестность состоит из всех точек  $x$ , которые удалены от числа 3 на расстояния, меньшие  $\frac{1}{2}$  (рис. 2). Поэтому данная  $\varepsilon$ -окрестность является интервалом с центром в точке 3 и с концами  $3 - \frac{1}{2}$  и  $3 + \frac{1}{2}$ . Эту  $\varepsilon$ -окрестность числа 3 можно записать в виде интервала  $\left(3 - \frac{1}{2}; 3 + \frac{1}{2}\right)$  или в виде неравенств  $3 - \frac{1}{2} < x < 3 + \frac{1}{2}$ .

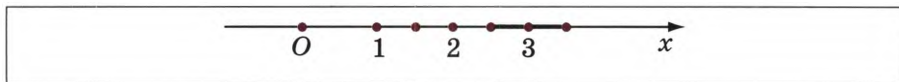


Рис. 2

Если зафиксировать положительное число  $\varepsilon$ , то аналогично определяется  $\varepsilon$ -окрестность числа  $a$  как множество всех таких чисел  $x$ , что  $|x - a| < \varepsilon$ . Эту  $\varepsilon$ -окрестность можно записать в виде интервала  $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$  или в виде неравенств  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ .

Иногда вместо буквы  $\varepsilon$  используют букву  $\delta$ . Если  $\delta > 0$ , то аналогично говорят о  $\delta$ -окрестности числа  $a$ .

**Вопрос.** Почему в любой  $\varepsilon$ -окрестности числа 0 всегда найдётся такое значение  $a$ , что  $\frac{1}{\sin \frac{1}{a}} = 1$ ?

**1.4. Предельные точки числового множества.** При рассмотрении функций используется понятие предельной точки.

Число  $a$  называется предельной точкой множества  $D$ , если каждая  $\delta$ -окрестность числа  $a$  содержит числа из  $D$ , отличные от  $a$ .

**Пример 1.** Для функции  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$ , определённой на множестве  $D = (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$ , каждое число из множества  $P = (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$  является предельной точкой области определения  $D$ , потому что для произвольного числа  $a$  из множества  $P$  каждая  $\varepsilon$ -окрестность числа  $a$  содержит отличные от  $a$  числа из области определения  $D$ . Однако точка  $a = 0$  не является предельной точкой области определения, так как, например, окрестность  $(-0,5; 0,5)$  числа 0 не содержит ни одного отличного от нуля числа из области определения  $D$ .

Отметим, что предельная точка области определения может как принадлежать области определения, так и не принадлежать ей.

**Вопрос.** Как показать, что каждая  $\delta$ -окрестность числа 1 имеет общие точки с областью определения функции  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$ ?

**1.5. Предел функции в предельной точке.** Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $D$ .

**Определение 1.** Число  $L$  называется пределом функции  $f(x)$  в предельной точке  $a$  области  $D$  определения функции, если для всякой последовательности  $(x_n)$  из того, что каждый член  $x_n$  принадлежит  $D$ ,  $x_n \neq a$  и последовательность  $(x_n)$  сходится к  $a$ , следует, что последовательность  $(f(x_n))$  значений функции сходится к  $L$ .

Запись  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  означает, что функция  $f(x)$  имеет в предельной точке  $a$  предел, равный  $L$ .

Заметим, что поскольку  $a$  — предельная точка области определения  $D$ , то каждая  $\delta$ -окрестность числа  $a$  содержит числа из  $D$ , отличные от  $a$ , поэтому существуют последовательности, состоящие из элементов



области определения, не равных числу  $a$ . Так что  $L$  — предел функции  $f(x)$  в предельной точке  $a$ , если для всякой последовательности  $(x_n)$  элементов из области определения  $D$ , отличных от  $a$ , для которой существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , равный  $a$ , обязательно существует предел последовательности значений функции  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ , равный  $L$ .

Определение 1 иногда называют определением предела функции в предельной точке на языке последовательностей.

**Пример 2.** Пусть  $c$  — фиксированное число. Рассмотрим на всей действительной оси постоянную функцию  $f(x) = c$ . Тогда для любого числа  $a$  существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , равный  $c$ .

Пусть  $(x_n)$  — такая произвольная последовательность элементов, отличных от числа  $a$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Для членов этой последовательности имеем  $y_n = f(x_n) = c$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ . Ввиду произвольности выбора последовательности  $(x_n)$  с требуемыми условиями на основании определения 1 получаем, что число  $c$  является пределом функции  $f(x) = c$  в точке  $a$ .

**Пример 3.** Пусть  $f(x) = x$  при всех действительных значениях  $x$ . Докажем, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  при любом  $a$ .

Пусть  $(x_n)$  — такая произвольная последовательность элементов, отличных от числа  $a$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Для членов этой последовательности имеем  $f(x_n) = x_n$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Отсюда на основании определения 1 получаем, что число  $a$  является пределом функции  $f(x) = x$  в точке  $a$ .

**Вопрос.** Как доказать, что  $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8$ ?

**1.6. Определение предела функции в предельной точке на языке « $\epsilon$ - $\delta$ ».** Во многих случаях используется другое определение предела функции в предельной точке, эквивалентное определению 2.

Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $D$ .

**Определение 2.** Число  $L$  называется пределом функции  $f(x)$  в предельной точке  $a$  области  $D$  определения функции, если для всякого положительного числа  $\epsilon$  найдётся такое положительное число  $\delta$ , что для каждого значения  $x$  из области  $D$  из того, что  $x \neq a$  и  $|x - a| < \delta$ , следует неравенство  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Заметим, что поскольку элемент  $a$  — предельная точка области определения  $D$ , то каждая  $\delta$ -окрестность числа  $a$  содержит числа из  $D$ , отлич-

ные от числа  $a$ . Так что  $M$  — предел функции  $f(x)$  в предельной точке  $a$ , если для всякого отличного от  $a$  значения аргумента  $x$  из  $\delta$ -окрестности числа  $a$  значения функции  $f(x)$  содержатся в  $\varepsilon$ -окрестности числа  $M$ .

Определение 2 иногда называют определением предела функции в предельной точке на языке « $\varepsilon$ - $\delta$ » или  $\varepsilon$ - $\delta$ -определением.

Мы здесь не будем доказывать, что определения 1 и 2 предела функции в предельной точке эквивалентны. Иногда предел функции в предельной точке кратко называют пределом функции в точке.

**Пример 4.** Рассмотрим на множестве всех неотрицательных чисел функцию  $f(x) = \sqrt{x}$ . Покажем, что для любого неотрицательного числа  $a$  выполняется равенство  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ .

1. Пусть  $a = 0$ . Тогда для неотрицательных значений  $x$  и числа 0 выполняются соотношения  $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$ . Поэтому если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  в качестве  $\delta$  взять число  $\varepsilon^2$ , то для каждого  $x$ , удовлетворяющего условиям  $x \neq 0$  и  $|x - 0| < \delta$ , получим, что  $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} - 0 < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$ . Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ .

2. Пусть  $a > 0$ . Тогда для неотрицательных значений  $x$  выполняются соотношения  $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}$ . Поэтому если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  в качестве  $\delta$  взять число  $\varepsilon\sqrt{a}$ , то для каждого  $x$ , удовлетворяющего условиям  $x \neq a$  и  $|x - a| < \delta$ , получим, что  $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$ , и поэтому  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ .

Таким образом, равенство  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$  выполняется для любого неотрицательного числа  $a$ .

**Вопрос.** Как, используя определение 3, доказать что  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ .

**1.7. Графическая иллюстрация понятия предела функции.** Предел функции можно наглядно представить на графике. Пусть  $f(x) = \sqrt{x}$  (рис. 3). Для произвольного положительного числа  $\varepsilon$  неравенство  $|f(x) - 0| < \varepsilon$  равносильно неравенствам  $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ . Выполнение этого неравенства означает, что соответствующие точки графика лежат между горизонтальными прямыми  $y = -\varepsilon$  и  $y = \varepsilon$  (рис. 3).

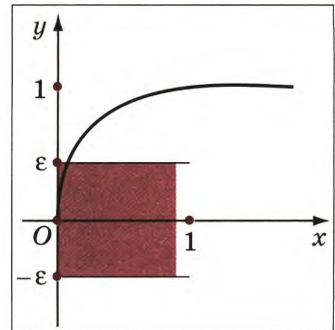


Рис. 3



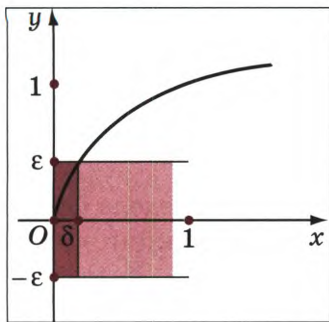


Рис. 4

Выбор числа  $\delta$  по  $\epsilon$  означает, что мы находим такую  $\delta$ -окрестность числа 0, что для всех  $x$  из этой окрестности, принадлежащих области определения и отличных от нуля, соответствующие точки графика попадают в полосу между указанными прямыми (рис. 4).

Возможность выполнить аналогичное построение для произвольного положительного числа  $\epsilon$  и означает, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ .

**Вопрос.** Как с помощью графика проиллюстрировать, что  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ ?

**1.8. Свойства пределов функций.** Для пределов функций в точке выполняются свойства, которые аналогичны свойствам пределов последовательностей. В частности, для пределов функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке справедливы арифметические свойства, позволяющие находить новые пределы функций в точке.

**Теорема 1.** Пусть для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  с общей областью определения  $D$  существуют пределы в предельной точке  $a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Тогда:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ ;
- 3) если  $B \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ .

**Пример 5.** 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 3}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 1} x + 3}{\lim_{x \rightarrow 1} x + 2} = \frac{1 - 5 + 3}{1 + 2} = -\frac{1}{3}.$$

**Вопрос.** Чему равен  $\lim_{x \rightarrow 3} 3x^2$ ?

**1.9. Доказательство утверждения о пределе отношения двух функций.** Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $D_f$ ,  $g(x)$  определена на множестве  $D_g$ ,  $a$  — предельная точка пересечения множеств  $D_f$  и  $D_g$ . Возьмём произвольную последовательность  $(x_n)$  такую, что  $x_n \in D_f$ ,  $x_n \in D_g$ ,  $x_n \neq a$ ,  $g(x_n) \neq 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тогда все члены этой последовательности принадлежат области определения функции  $\frac{f(x)}{g(x)}$ . По условию су-

существуют  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , причём  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ . Поэтому существуют

пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ , и по теореме о пределе частного двух последовательностей выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)}$ .

Отсюда и из произвольности выбора последовательности  $(x_n)$  с заданными условиями следует, что существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  и выполняется равен-

$$\text{ство } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

**Вопрос.** Как доказать утверждение 2) теоремы 1?

### 1.10. Предел промежуточной функции.

**Теорема 2.** Пусть для функций  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$  при всех значениях  $x$  из некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , отличных от  $a$ , выполняются неравенства  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Тогда если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ , то существует предел функции  $g(x)$  в точке  $a$  и выполняется равенство  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .

Мы не будем здесь доказывать эту теорему. С помощью неё можно получить следующее утверждение.

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , и  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ . Тогда в точке  $a$  существует предел функции  $f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

Действительно, из теоремы 1 и равенства  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$  следует, что  $\lim_{x \rightarrow a} (-|f(x)|) = 0$ . Далее, для всех значений  $x$  из области определения функции  $f(x)$  выполняются неравенства  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ , то есть функция  $f(x)$  заключена между двумя функциями, предел каждой из которых в точке  $a$  равен 0. Поэтому, в силу теоремы 2,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

**Вопрос.** Как показать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cos x) = 0$ ?

### 1.11. Переход к пределу в неравенстве.

**Теорема 3.** Пусть для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  при всех значениях  $x$  из некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $a$ , отличных от  $a$ , выполняются неравенства  $f(x) \leq g(x)$ . Тогда если существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то  $A \leq B$ .

**Вопрос.** Как показать, что если функция принимает неотрицательные значения и в некоторой точке имеет предел, то значение предела также неотрицательно?

**1.12. Свойство равенства пределов.** Предел функции в точке имеет следующее свойство.

Пусть области определения функции  $f(x)$  и  $g(x)$  отличаются не более чем на точку  $a$  и при всех значениях  $x$ , не равных  $a$ , значение  $f(x)$  совпадает со значением  $g(x)$ . Тогда если функция  $f(x)$  имеет предел в точке  $a$ , то функция  $g(x)$  также имеет предел в точке  $a$  и эти пределы совпадают, то есть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ . Тогда по определению предела функции  $f(x)$  в предельной точке  $a$  для всякого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое положительное число  $\delta$ , что для каждого значения  $x$  из области определения  $D$  функции  $f(x)$ , удовлетворяющего условиям  $x \neq a$  и  $|x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - M| < \varepsilon$ . Поэтому для всякого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое положительное число  $\delta$ , что для каждого значения  $x$  из области определения функции  $g(x)$ , удовлетворяющего условиям  $x \neq a$  и  $|x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|g(x) - M| < \varepsilon$ . Но это в точности означает, что для функции  $g(x)$  в предельной точке  $a$  существует предел функции, равный  $M$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Пример 6.**  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$  при всех значениях  $x$ , отличных

от 1. Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$ .

**Вопрос.** Чему равен  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ ?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется предел числовой последовательности?
2. Как вы понимаете слова «естественная область определения функции»?
3. Какой промежуток называется  $\varepsilon$ -окрестностью числа  $a$ ?
4. Как вы понимаете выражение «предельная точка области определения»?
5. Всегда ли предельная точка области определения принадлежит этой области?
6. Всегда ли точка области определения является предельной для этой области?
7. Как определяется предел функции в точке:
  - а) с помощью пределов последовательностей;
  - б) на языке « $\varepsilon$ - $\delta$ »?



8. Какой геометрический смысл имеет предел функции в точке в том случае, когда этот предел существует?

9. Сформулируйте арифметические свойства пределов функций в точке.

10. Сформулируйте теорему о пределе промежуточной функции.

11. Сформулируйте теорему о переходе к пределу в неравенстве.

12. Сформулируйте свойство равенства пределов функций в точке.

### Задачи и упражнения ■

1. Вычислите предел последовательности с общим членом:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } a_n = \frac{3n^2 - 4n}{2n^2 + 5}; & \text{б) } a_n = \frac{n\sqrt{n+2}}{n^2 - 3}; & \text{в) } a_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n-5}; \\ \text{г) } a_n = \frac{4^n - 1}{(2^n + 1)^2}; & \text{д) } a_n = \frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+2}}; & \text{е)* } a_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}. \end{array}$$

2. Докажите, что предел последовательности  $(a_n)$  равен нулю, если:

$$\text{а) } a_n = n^{-\frac{1}{3}}; \quad \text{б) } a_n = 2^{-n}; \quad \text{в)* } a_n = \frac{\sin n}{n+1}; \quad \text{г)** } a_n = \frac{2n-3}{3^n}.$$

3. Какие числа входят в  $\varepsilon$ -окрестность числа  $m$ , если:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } m = 3 \text{ и } \varepsilon = 5; & \text{б) } m = -7 \text{ и } \varepsilon = 2; \\ \text{в) } m = -4 \text{ и } \varepsilon = 25; & \text{г) } m = 1 \text{ и } \varepsilon = 0,3; \\ \text{д) } m = 0,1 \text{ и } \varepsilon = 0,25; & \text{е) } m = \sqrt{2} \text{ и } \varepsilon = 2\sqrt{2}? \end{array}$$

4. Найдите область определения функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+4}; & \text{б) } f(x) = \frac{x-3}{3x^2-4x+1}; & \text{в) } f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+1}; \\ \text{г) } f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{2x+3}}; & \text{д) } f(x) = \sqrt{x^2-x-1}; & \text{е) } f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x+4}}. \end{array}$$

5.\* Найдите область определения функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}; & \text{б) } f(x) = \log_3 \sqrt{x-4}; \\ \text{в) } f(x) = \sqrt{\lg \frac{x-1}{x-2}}; & \text{г) } f(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{1-x^2} \right); \\ \text{д) } f(x) = \arcsin \left( \frac{1}{x^2-1} \right); & \text{е) } f(x) = \sqrt{4^x - 2^x - 2}. \end{array}$$

**6.\*\*** Найдите область определения функции:

а)  $f(x) = \sqrt{\arcsin(2\sin x)}$ ;                      б)  $f(x) = \log_{x^2-1} \frac{x^2-2}{x^2-3}$ ;

в)  $f(x) = \lg(\sin(\lg x))$ ;                      г)  $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{2x}{x-1}}$ .

**7.** В каких случаях различны области определения функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , если:

а)  $f(x) = \log_3 \frac{x+1}{x+2}$  и  $g(x) = \log_3(x+1) - \log_3(x+2)$ ;

б)  $f(x) = \lg(x^2 \cdot (x+1)^2)$  и  $g(x) = 2\lg(x \cdot (x+1))$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{x^2 \cdot (x-2)}$  и  $g(x) = |x| \cdot \sqrt{x-2}$ ?

**8.** Пусть  $f(x) = 2x - 1$  при всех  $x$ . Докажите, что:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$ ;                      в)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -5$ .

**9.\*\*** Пусть  $f(x) = x^2$ . Для заданных значений  $b$  и  $\varepsilon$  найдите  $\delta > 0$  такое, что  $|f(x) - b^2| < \varepsilon$  при всех значениях  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 < |x - b| < \delta$ , если:

а)  $b = 2$  и  $\varepsilon = 10^{-1}$ ;

б)  $b = 3$  и  $\varepsilon = 10^{-2}$ ;

в)  $b = 0$  и  $\varepsilon = 10^{-6}$ ;

г)  $b = -1$  и  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-2}$ .

**10.** Докажите, что при любом значении  $a$ :

а)  $\lim_{x \rightarrow a} 5x = 5a$ ;                      б)  $\lim_{x \rightarrow a} (7x - 3) = 7a - 3$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow a} 2x^2 = 2a^2$ ;                      г)  $\lim_{x \rightarrow a} x^4 = a^4$ .

**11.** Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{x+1}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2-3}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$ .

**12.** Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+5x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^3-8}$ .

13.\* Найдите пределы:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^7 + 2^7}{x^9 + 2^9}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{33} + 1}{x^{100} - 1}; \\ \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right); & \text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2}{2x - x^2} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right). \end{array}$$

14.\*\* Докажите теорему о промежуточной функции (теорема 2).

15.\* Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на некотором промежутке с центром в точке  $a$ , имеют в этой точке пределы и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Докажите, что тогда найдётся такое число  $\delta$ , что для всех  $x$  из  $\delta$ -окрестности точки  $a$  выполняется неравенство  $f(x) > g(x)$ .

16.\*\* Докажите теорему о переходе к пределу в неравенстве (теорема 3).

17.\*\* Докажите эквивалентность определений 1 и 2 предела функции в точке.

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 6x + 2}{5x^3 + x^2 + 7}$ ?

1) 2                  2) 0                  3)  $\frac{3}{5}$                   4)  $\frac{2}{7}$

1.2. Чему равен  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ ?

1) 1                  2) 0                  3)  $\frac{1}{2}$                   4) не существует

1.3. Чему равен  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 2n - 1}$ ?

1) -0,5              2) 0,5              3) -1,5              4) 1,5

1.4. Чему равен  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^6 - 1}$ ?

1)  $\frac{1}{6}$                   2)  $\frac{1}{3}$                   3)  $\frac{1}{2}$                   4)  $\frac{2}{3}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Число  $M$  является пределом функции  $f(x)$  в предельной точке  $a$  области определения  $D$  функции  $f(x)$ , если:



1) для всякой последовательности  $(x_n)$  такой, что  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq a$  и  $x_n \rightarrow a$ , последовательность  $(f(x_n))$  сходится к  $M$

2) для любого положительного числа  $\varepsilon$  и всякой последовательности  $(x_n)$  такой, что  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq a$  и  $x_n \rightarrow a$ , найдётся такое положительное число  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $|f(x_n) - M| < \varepsilon$

3) для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такая последовательность  $(x_n)$ , что  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , и выполняется неравенство  $|f(x_n) - M| < \varepsilon$

4) найдётся такая последовательность  $(x_n)$  что  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , для которой выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$

**2.2.** Какие из пределов  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  существуют и равны 0?

$$1) a_n = (0,01)^n \quad 2) a_n = \sqrt[n]{0,01} \quad 3) a_n = \frac{0,01 \cdot n}{n+1} \quad 4) a_n = \frac{\sqrt{n}}{0,01n+1}$$

**2.3.** При каких значениях  $\delta$  неравенство  $|x^2 - 4| < 0,1$  выполняется для всех  $x$  таких, что  $2 < x < 2 + \delta$ ?

$$1) \delta = 0,01 \quad 2) \delta = 0,02 \quad 3) \delta = 0,03 \quad 4) \delta = 0,04$$

**2.4.** Какие из пределов существуют и не равны нулю?

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n) \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})$$

## ■ § 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

**2.1. Пример разрыва функции.** Многие примеры из предыдущего параграфа приводят к мысли, что если число  $a$  принадлежит области определения функции  $f(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Например,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0}$ . Однако так бывает не всегда.

**Пример 1.** Функция  $\operatorname{sgn} x$  (читается как «сигнум  $x$ » или как «знак  $x$ ») определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию  $g(x) = \operatorname{sgn}^2 x$ .

При  $x \neq 0$  функция  $g(x)$  принимает значения 1, поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ . Это значение не равно  $g(0)$ , так как  $g(0) = 0$  (рис. 1), то есть функция  $g(x) = \operatorname{sgn}^2 x$  имеет предел в точке 0, отличный от значения функции в точке 0 и график функции «разрывается».

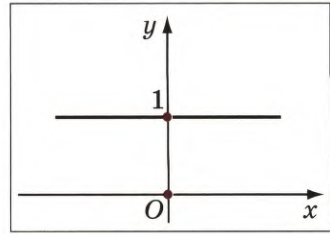


Рис. 1

**Вопрос.** Чем различаются функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ и } h(x) = \operatorname{sgn} x?$$

**2.2. Непрерывность функции в точке.** Одной из характеристик функций является её *непрерывность*.

Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $a$  из области определения  $D$ , если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $\delta$ , что для каждого значения  $x$ , принадлежащего области  $D$ , из того, что  $|x - a| < \delta$ , следует неравенство  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Другими словами, функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности значения  $f(a)$  существует такая  $\delta$ -окрестность аргумента  $a$ , что для любой точки  $x$ , принадлежащей пересечению области определения с этой  $\delta$ -окрестностью, значение  $f(x)$  содержится в  $\varepsilon$ -окрестности значения  $f(a)$ .

**Пример 2.** Для любого фиксированного числа  $c$  постоянная функция  $f(x) = c$ , определённая на всей числовой оси, непрерывна в каждой точке числовой оси.

Действительно, для любого положительного числа  $\varepsilon$  и для любых чисел  $a$  и  $x$  верны соотношения  $|f(a) - f(x)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ . Поэтому, выбирая в качестве  $\delta$  любое положительное число, получаем выполнение всех условий определения непрерывности постоянной функции в каждой точке  $a$  числовой оси.

**Вопрос.** Как показать, что функция  $f(x) = x + 5$  непрерывна в каждой точке числовой оси?

**2.3. Непрерывность функции на множестве.** Введём понятие непрерывности функции на множестве, являющемся подмножеством области определения.

Функция  $f(x)$  называется непрерывной на подмножестве  $M$  её области определения, если  $f(x)$  непрерывна в каждой точке множества  $M$ .



**Пример 3.** Функция  $f(x) = x$ , определённая на всей числовой оси, непрерывна в каждой точке числовой оси.

Если выбрать какое-то число  $a$  и для произвольного положительного числа  $\varepsilon$  взять  $\delta = \varepsilon$ , то, выбирая произвольно число  $x$  из  $\delta$ -окрестности числа  $a$ , получим соотношения  $|f(a) - f(x)| = |a - x| < \delta = \varepsilon$ . Это и означает, что функция  $f(x) = x$  непрерывна в точке  $a$ .

Непрерывность функции можно рассматривать на отрезке, на интервале, а также на множестве, которое устроено сложнее, чем промежуток. В частности, можно говорить о непрерывности функции на её естественной области определения.

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = x^2$  непрерывна на своей естественной области определения?

**2.4. Связь предела и непрерывности функции в точке.** Следующее свойство часто помогает доказывать непрерывность функций в точке.

**Теорема 4.** Если значение предела функции в предельной точке  $a$  из области определения функции совпадает со значением  $f(a)$  функции в точке  $a$ , то функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ .

Если предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  из области определения функции существует и совпадает со значением  $f(a)$  функции в точке  $a$ , то по определению 2 предела в точке  $a$  для каждого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $\delta$ , что для каждого значения  $x$  из области определения  $D$ , удовлетворяющего условиям  $x \neq a$  и  $|a - x| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Далее, если  $x = a$ , то очевидно, что для любых положительных чисел  $\delta$  и  $\varepsilon$  выполняются соотношения  $|a - a| = 0 < \delta$  и  $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ .

Таким образом, полностью выполняется определение 4 непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $a$ .

**Пример 4.** Функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  непрерывна на промежутке  $(0; \infty)$ , так как при каждом  $a > 0$  имеем  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} x} = \frac{1}{a} = f(a)$ .

Используя определение 1 предела функции в точке на языке последовательностей, из теоремы 4 получаем:

если функция  $f(x)$  с областью определения  $D$  непрерывна в предельной точке  $a$ , то для любой последовательности  $(x_n)$ , такой, что  $x_n \in D$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  непрерывна на своей естественной области определения?



**2.5. Непрерывность функции в изолированной точке.** Пусть  $D$  — область определения некоторой функции и  $a$  принадлежит  $D$ . Если существует такая  $\delta$ -окрестность  $V$  точки  $a$ , что  $V$  содержит точку  $a$  и не содержит других точек из множества  $D$ , то  $a$  называется изолированной точкой множества  $D$ .

**Пример 5.** Пусть  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$ . Естественной областью определения этой функции является множество  $D = (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$ . Как было отмечено в п. 1.3, существуют окрестности числа 0, которые содержат только число 0 из области определения  $D$  и не содержат других точек из  $D$ , например для  $\delta = \frac{1}{2}$ . Поэтому предел функции  $f(x)$  в точке 0 не определён. Однако, используя при  $a = 0$  определение непрерывности, получим, что если каждого положительного числа  $\varepsilon$  взять  $\delta = \frac{1}{2}$ , то множество всех  $x$  из  $D$ , удовлетворяющих условию  $|x - 0| < \delta$ , состоит из единственного числа  $x = 0$ , и для этого числа  $x$  неравенство  $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$  очевидно. Таким образом, функция  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$  является непрерывной в «изолированной» точке  $a = 0$  своей области определения.

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  не является непрерывной в точке 0?

**2.6. Арифметические свойства непрерывных функций в точке и на множестве.** Для непрерывных функций в точке и на множестве, так же как и для пределов функций, справедливы арифметические свойства.

**Теорема 5.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  с общей областью определения  $D$  непрерывны в точке  $a$ . Тогда:

- 1) функции  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  непрерывны в точке  $a$ ;
- 2) если  $g(a) \neq 0$ , то функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  непрерывна в точке  $a$ .

**Теорема 6.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на подмножестве  $M$  области определения  $D$ . Тогда:

- 1) функции  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  непрерывны на  $M$ ;
- 2) если  $g(x) \neq 0$  при всех  $x \in M$ , то функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  непрерывна на  $M$ .

**Пример 6.** Используя примеры 2 и 3 и применяя теорему 6, можно доказать непрерывность любого многочлена на всей числовой прямой. Например, функция  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  всюду непрерывна.

Мы не будем доказывать здесь теоремы 5 и 6.

**Вопрос.** Как доказать непрерывность функции  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$  в своей области определения?

**2.7. Непрерывность сложной функции.** Имея две функции  $f(z)$  и  $g(x)$ , можно образовать сложную функцию  $h(x) = f(g(x))$ , определённую по правилу: если число  $a$  входит в область определения функции  $g(x)$ , и число  $b$ , равное  $g(a)$ , входит в область определения функции  $f(z)$ , то  $h(a) = f(b) = f(g(a))$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 7.** Пусть функция  $g(x)$  непрерывна в точке  $a$ , а функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $b = g(a)$ . Тогда сложная функция  $h(x) = f(g(x))$  непрерывна в точке  $a$ .

**Пример 7.** Функция  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$  непрерывна на естественной области определения  $D = (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; \infty)$ .

В силу теорем 5 и 6 функции  $g_1(x) = x^2$ ,  $g_2(x) = x^2 - 1$  и  $g(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$  непрерывны в естественных областях определения. Заметим, что в силу теоремы 4 функция  $f(z) = \sqrt{z}$  непрерывна на множестве  $[0; \infty)$ , так как в силу примера 4 из пункта 1.6 для любого неотрицательного числа  $a$  предел функции  $f(z) = \sqrt{z}$  в точке  $a$  совпадает со значением  $f(a)$  функции  $f(z) = \sqrt{z}$  в этой точке. Отсюда и из теоремы 7 следует, что функция  $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$  непрерывна на  $D$ .

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$  непрерывна в своей области определения?

**2.8.\*\* Доказательство теоремы о непрерывности сложной функции.** Рассмотрим доказательство теоремы 7.

Пусть функция  $g(x)$  определена на множестве  $D_1$  и непрерывна в точке  $a$ , функция  $f(z)$  определена на множестве  $D_2$  и непрерывна в точке  $b = g(a)$ . Возьмём произвольное положительное число  $\varepsilon$ . Для функции  $f(z)$  по определению 2 найдётся такое положительное число  $\delta_1$ , что при всех  $z$ , удовлетворяющих условиям  $z \in D_1$  и  $|z - b| < \delta_1$ , выполняется нера-



венство  $|f(z) - f(b)| < \varepsilon$ . Для функции  $g(x)$  по определению 2 найдётся такое положительное числ  $\delta_2$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D_2$  и  $|x - a| < \delta_2$ , выполняется неравенство  $|g(x) - g(a)| < \delta_1$ .

Рассмотрим теперь произвольное  $x_0$  из области определения функции  $h(x) = f(g(x))$ , удовлетворяющее условию  $|x_0 - a| < \delta_2$ , и обозначим  $z_0 = g(x_0)$ . Тогда  $|x_0 - a| < \delta_2$ , а поэтому  $|g(x_0) - g(a)| = |z_0 - b| < \delta_1$ . Следовательно,

$$|h(x_0) - h(a)| = |f(g(x_0)) - f(g(a))| = |f(z_0) - f(b)| < \varepsilon.$$

Отсюда на основании определения 2 получаем непрерывность функции  $h(x) = f(g(x))$  в точке  $a$ .

**Вопрос.** Может ли функция  $h(x) = f(g(x))$  быть непрерывной в точке  $a$ , если функция  $g(x)$  непрерывна в точке  $a$ , но при этом функция  $f(z)$  не является непрерывной в точке  $b = g(a)$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Как определяется непрерывность функции в точке её области определения?
2. Как определяется непрерывность функции на некотором множестве?
- 3.\*\* При каком определении непрерывности функцию можно считать непрерывной в каждой «изолированной» точке области определения?
4. Сформулируйте теорему о непрерывности в заданной точке суммы и произведения непрерывных функций.
5. Сформулируйте теорему о непрерывности на данном множестве суммы и произведения непрерывных функций.
6. Сформулируйте теорему о непрерывности в данной точке частного непрерывных функций.
7. Докажите теорему о непрерывности на данном множестве частного непрерывных функций.
8. Как определяется сложная функция вида  $h(x) = f(g(x))$ ?
9. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.
- 10.\*\* Докажите теорему о непрерывности сложной функции.

### Задачи и упражнения ■

1. Докажите непрерывность в каждой точке области определения следующей функции:

а)  $f(x) = 3x - 2$ ;

б)  $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ ;

в)  $f(x) = (x + 1)^3$ ;



$$\text{г)} f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}; \quad \text{д)} f(x) = \frac{x^3}{x^2-2}; \quad \text{е)} f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

**2.\*\*** Пусть  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$  и  $f(0) = 0$ . Докажите, что  $f(x)$  непрерывна в нуле.

**3.\*\*** Пусть  $f(x) = 0$ , если  $x$  иррационально, и  $f(x) = \frac{1}{q}$ , если  $x = \frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — взаимно простые целые числа и  $q > 0$ . Докажите, что  $f(x)$  непрерывна в нуле.

**4.\*** Пусть  $f(x) = 3x - 2$  при  $x \leq 1$  и  $f(x) = x^2$  при  $x > 1$ . Докажите, что  $f(x)$  непрерывна на всей числовой прямой.

**5.\*\*** Пусть  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$  при  $x \neq \pm 1$  и  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(1) = 1$ . Докажите, что:

а)  $f(x)$  непрерывна в точке  $-1$ ;

б)  $f(x)$  не является непрерывной в точке  $1$ ;

в)  $f(x)$  непрерывна в каждой точке  $a$ , отличной от точек  $1$  и  $-1$ .

**6.** Какой вид имеет функция  $f(g(x))$ , если:

а)  $f(x) = \sin x$  и  $g(x) = x^2 + 1$ ;

б)  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  и  $g(x) = x^2 + 1$ ;

в)  $f(x) = \log_2 x$  и  $g(x) = \cos x$ ;

г)  $f(x) = \lg x + \sin x$  и  $g(x) = \cos x$ ;

д)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$  и  $g(x) = \operatorname{tg} x$ ;

е)  $f(x) = \operatorname{tg} x$  и  $g(x) = \log_2 x + \log_x 2$ ;

ё)  $f(x) = \sqrt{x}$  и  $g(x) = \frac{(x+5)^2}{\sqrt{x}}$ .

**7.\*\*** Какой вид имеет функция  $f(g(h(x)))$ , если:

а)  $f(x) = x^2 - x$ ,  $g(x) = 2^x$  и  $h(x) = \sin x$ ;

б)  $f(x) = (x+1)^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$  и  $h(x) = 1 + \sin 2x$ ;

в)  $f(x) = \arcsin x$ ,  $g(x) = 2x^2 + 1$  и  $h(x) = \lg x$ ;

г)  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $g(x) = x^2 + x + 1$  и  $h(x) = x^2 + x + 1$ .

**8.\*** Представьте заданную функцию в виде сложной функции  $f(g(x))$ :

а)  $\sin^3 x - 3 \sin x$ ;

б)  $x + 2\sqrt{x} - 1$ ;

в)  $\log_3 \sin x + \sin x$ ;

г)  $\log_3 (\sin x + x)$ ;

д)  $\sqrt{1 + \sin^2 x} - \sin^2 x$ ;

е)  $\arcsin \sqrt{\operatorname{tg} x}$ .

**9.\*\*** Пусть  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$   $g(x) = [x]$  — целая часть  $x$ ,

$h(x) = \{x\}$  — дробная часть  $x$ , где  $[x]$  — наибольшее целое число  $m$ , такое, что  $m \leq x$ ,  $\{x\} = x - [x]$ . Опишите, как устроены функции:

а)  $f(g(x))$ ;

б)  $g(f(x))$ ;

в)  $f(h(x))$ ;

г)  $h(f(x))$ ;

д)  $f(g(h(x)))$ ;

е)  $h(g(f(x)))$ ;

ё)  $g(h(f(x)))$ .

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** При каких  $a$  и  $b$  функция  $f(x) = \begin{cases} -x+a & \text{при } x < -1, \\ x+b & \text{при } x \geq -1 \end{cases}$  непрерывна на всей числовой прямой?

1)  $a = 0, b = 0$                       2)  $a = -1, b = 1$

3)  $a = -4, b = -1$                       4)  $a = 1, b = 4$

**1.2.** При каких  $a$  и  $b$  функция  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + a & \text{при } x \leq 2, \\ x^2 - 4x + b & \text{при } x > 2 \end{cases}$  непрерывна на всей числовой прямой?

1)  $a = b - 4$     2)  $a = b - 2$     3)  $a = b + 2$     4)  $a = b + 4$

**1.3.** Какая из функций  $f(x)$  непрерывна на всей числовой прямой?

1)  $f(x) = \operatorname{tg} x - x$                       2)  $f(x) = x + \sin x$

3)  $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$                       4)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

**1.4.** Пусть  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}, & \text{если } x \geq 0, x \neq 1, \\ a, & \text{если } x = 1. \end{cases}$  При каком значении  $a$  функция  $f(x)$  непрерывна на всей области определения?

1)  $a = 0,25$     2)  $a = 0,5$     3)  $a = 0,75$     4)  $a = 1$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Функция  $f(x)$  называется непрерывной в предельной точке  $a$  области определения  $D$ , если:

1)  $a \in D$ , и для всякой последовательности  $(x_n)$  такой, что  $x_n \in D$  и  $x_n \rightarrow a$ , последовательность  $(f(x_n))$  сходится к  $f(a)$

2)  $a \in D$ , и для любого положительного числа  $\varepsilon$  и всякой последовательности  $(x_n)$  такой, что  $x_n \in D$  и  $x_n \rightarrow a$ , найдётся такое положительное  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

3) для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такая последовательность  $(x_n)$ , что  $x_n \in D$ ,  $a \in D$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , для которой выполняется неравенство  $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

4) найдётся такая последовательность  $(x_n)$ , что  $x_n \in D$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$

**2.2.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на всей числовой прямой, то какие из следующих функций всегда непрерывны на всей числовой прямой?

- 1)  $f(x) + g(x)$       2)  $f(x) \cdot g^2(x)$       3)  $\frac{f(x)}{g^2(x)}$       4)  $f^2(x) - g^2(x)$

**2.3.** Какие их приведённых интервалов являются множеством решений неравенства вида  $|x - 1,3| < a$  при некотором  $a > 0$ ?

- 1)  $(0,9; 1,7)$       2)  $(0,5; 2,1)$       3)  $(-0,3; 2,9)$       4)  $(-0,8; 3,4)$

**2.4.\*\*** Функция  $f(x)$  является непрерывной в точке  $a$ , если  $a$  — предельная точка области определения  $D$ ,  $a \in D$  и:

1) для каждого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$  и  $|x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

2) для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое положительное  $\delta$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$ , и  $-\delta < x - a < \delta$ , выполняются неравенства  $-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon$

3) для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое положительное  $\delta$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$ ,  $x \neq a$  и  $-\delta < x - a < \delta$ , выполняются неравенства  $-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon$

4) для любого положительного числа  $\varepsilon$  и любого положительного числа  $\delta$  при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$  и  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

## ■ § 3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

**3.1. Непрерывность многочленов.** Используя примеры и теоремы, рассмотренные в предыдущих параграфах этой главы, нетрудно доказать, что каждый многочлен  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  является непрерывной функцией на всей числовой прямой.

**Вопрос.** Как доказать непрерывность многочлена  $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$  на множестве  $R$ ?

**3.2. Непрерывность дробно-рациональных функций.** Из теоремы 5 следует, что каждая дробно-рациональная функция, представляющая собой отношение двух многочленов, непрерывна в своей области определения.

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  непрерывна на множестве  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ ?



### 3.3. Неравенства, связывающие значения тригонометрических функций со значением аргумента. Докажем, что для $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

выполняются неравенства

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|. \quad (1)$$

1) Пусть  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Изобразим на единичной окружности дугу  $AB$ , определяющую угол  $AOB$  величины  $x$  радиан. Проведём  $BH \perp OA$  и  $AK \perp OA$  так, как изображено на рисунке 1. Поскольку треугольник  $AOB$  содержится в секторе  $AOB$ , а сектор  $AOB$  содержится в треугольнике  $AOK$ , то

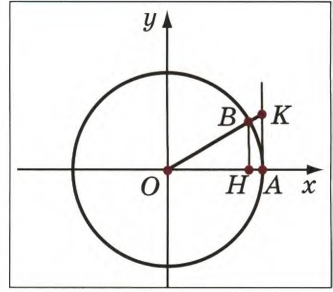


Рис. 1

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сек. } AOB} < S_{\triangle AOK},$$

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot BH < \frac{1}{2} \cdot OA^2 \cdot \angle AOB < \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AK,$$

$$OA \cdot BH < OA^2 \cdot \angle AOB < OA \cdot AK.$$

Поскольку  $OA = 1$ ,  $\angle AOB = x$ ,  $BH = \sin x$ ,  $AK = \operatorname{tg} x$ , то получаем  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ , причём все части этих неравенств положительны, а поэтому неравенство (1) выполняется.

2) Пусть теперь  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . Тогда  $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ . Поэтому из (1) получаем, что

$$\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x). \quad (2)$$

Из нечётности функций  $\sin x$ ,  $x$  и  $\operatorname{tg} x$  следуют равенства  $\sin(-x) = -\sin x$ ,  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ . Поэтому из неравенств (2) получаем неравенства

$$-\sin x < -x < -\operatorname{tg} x. \quad (3)$$

Поскольку  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , то значения  $-\sin x$ ,  $-x$  и  $-\operatorname{tg} x$ , входящие в запись соотношений (3), являются положительными числами, откуда  $\sin(-x) = |-\sin x| = |\sin x|$ ,  $-x = |x|$ ,  $-\operatorname{tg} x = |\operatorname{tg} x|$ , и выполняются неравенства

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Таким образом, неравенства (1) выполняются для всех значений  $x$  из промежутков  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  и  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Пример 1.** Покажем, что если  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ , то  $1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$ .

Из неравенств  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  следует, что  $0 < \frac{|x|}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ . Поэтому в силу (1) выполняются неравенства  $0 < \sin \left| \frac{x}{2} \right| < \left| \frac{x}{2} \right|$ . При возведении в квадрат положительных чисел неравенства сохраняются, поэтому  $\sin^2 \left| \frac{x}{2} \right| = \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) < \left( \frac{x}{2} \right)^2$ . Отсюда и из соотношения  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right)$  следует, что  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}$ .

**Вопрос.** Как доказать, что  $\sin 1^\circ < 0,0175$ ?

**3.4. Непрерывность тригонометрических функций.** Покажем, что функция  $f(x) = \sin x$  непрерывна на множестве  $R$  всех действительных чисел. Пусть  $a \in R$  и  $0 < \left| \frac{x-a}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| < 2 \left| \frac{x-a}{2} \right| \cdot 1 = |x-a|.$$

Следовательно, если взять положительное число  $\delta$ , для которого выполняются неравенства  $\delta < \frac{\pi}{2}$  и  $\delta < \varepsilon$ , то для каждого значения  $x$  из  $\delta$ -окрестности числа  $a$  выполняются неравенства  $|\sin x - \sin a| < |x-a| < \delta < \varepsilon$ . Таким образом, взяв произвольное число  $a$ , мы установили следующее: для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое положительное число  $\delta$ , что для всех значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x-a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$ . Это по определению означает, что функция  $f(x) = \sin x$  непрерывна в точке  $a$ .

Заметим теперь, что для любого значения  $x$  выполняется равенство  $\cos x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ . Поэтому функцию  $h(x) = \cos x$  можно представить как сложную функцию  $f(g(x))$ , где  $f(z) = \sin z$  и  $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$ . Непрерывность функции  $f(z) = \sin z$  только что была доказана, непрерывность функции  $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$  следует из теоремы 6 об арифметических свойствах непрерывных функций. Поэтому в силу теоремы 7 о непрерывности сложной функции функция  $h(x) = \cos x$  непрерывна на множестве всех действительных чисел.

**Вопрос.** Как доказать, что функции  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$  непрерывны в их естественных областях определения?

**3.5. Замечательный тригонометрический предел.** Пусть  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ . Тогда выполняется неравенство (1):

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Из неравенства  $|\sin x| < |x|$  следует, что  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1$ . Из неравенства  $|x| < |\operatorname{tg} x|$  следует, что  $1 < \left| \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} \right|$ . Поэтому  $|\cos x| < \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ .

Отсюда и из положительности функций  $\cos x$  и  $\frac{\sin x}{x}$  при рассматриваемых значениях  $x$  следует, что  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ . Поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , то по теореме 2 о пределе промежуточной функции получим  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Вопрос.** Чему равен  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x}$ ?

**3.6. Обобщение замечательного тригонометрического предела.** Приведём без доказательства следующее утверждение.

Пусть  $\varphi(x) \neq 0$  при  $x \neq a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ . Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)}$ , равный 1.

**Вопрос.** Чему равен предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ ?

**3.7. Непрерывность показательной функции.** При  $a > 0$  и  $a \neq 1$  показательная функция  $a^x$  непрерывна на всей числовой прямой. Доказательство этого свойства сложное, и мы его приводить не будем.

**Вопрос.** Пусть  $a > 0$ . Как доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Какие примеры непрерывных функций вам известны?
2. Для  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  докажите неравенства  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ .
3. Для  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  докажите неравенства  $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ .
4. Докажите непрерывность функции  $y = \sin x$  на всей числовой прямой.
5. Докажите непрерывность функции  $y = \cos x$  на всей числовой прямой.
6. Докажите непрерывность функции  $y = \operatorname{tg} x$  на всей области определения.



7.\* Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

8. Сформулируйте обобщение замечательного тригонометрического предела.

### ■ Задачи и упражнения

1. Докажите непрерывность функций в их естественных областях определения:

а)  $f(x) = (x^2 + 1)^5$ ;

б)  $f(x) = (x - 2)^3 - 3x$ ;

в)  $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ ;

г)  $f(x) = \frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}$ ;

д)  $f(x) = \sin 2x$ ;

е)  $f(x) = \cos x - \sin x$ ;

ё)  $f(x) = \sin(2x + 5)$ ;

ж)  $f(x) = x + \sin x$ ;

з)  $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ ;

и)  $f(x) = \operatorname{tg} \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right)$ ;

й)\*  $f(x) = \frac{\sin 3x - \sin 2x}{x}$ ;

к)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{1 - \cos x}$ .

2. Найдите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{x}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$ .

3.\*\* Найдите предел последовательности:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{1}{n}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \operatorname{tg} \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( 1 - \cos \frac{1}{2n} \right)$ ;

г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^2 + 1}$ .

4. Найдите предел:

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 3^x}{3^x - 4^x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3^x + 1}{3^x - 1}$ ;

в)\*  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 \cdot 2^x - x^2}{x \cdot 2^x + x^2}$ ;

г)\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{4^x - 1}$ ;

д)\*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^x - 3 \cdot 2^x + 2}{4^x - 4}$ ;

е)\*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{3^x - 1}$ ;

$$\text{ё)* } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2^x - 1} - \frac{2}{4^x - 1} \right);$$

$$\text{ж)* } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100^x - 0,01}{(10^x - 0,1)^2}.$$

5.\*\* Докажите, что при всех  $x \neq 0$  выполняется неравенство  $|\sin x| < |x|$ .

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ ?

- 1) 0                      2) 0,25                      3) 0,5                      4) 1

1.2. Значение  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{3x}$  равно:

- 1) 3                      2) 0                      3)  $\frac{1}{3}$                       4) не существует

1.3. Значение  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} 2x}$  равно:

- 1) 2                      2) 0                      3)  $\frac{1}{2}$                       4) не существует

1.4. Чему равняется  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{x^2 - 2x}$ ?

- 1) -1,5                      2) -0,5                      3) 0,5                      4) 1,5

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных функций непрерывны на всей числовой прямой?

1)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

2)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

3)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

4)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 13}$

2.2. Какие из указанных функций имеют предел при  $x \rightarrow 1$ ?

1)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$

2)  $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1}$

3)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

4)  $f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^3 - 1)}{(x - 1)^2}$

2.3.\* Укажите, для каких функций значение  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  равно  $\frac{2}{5}$ :

1)  $\frac{\sin x}{\frac{5}{2}x}$

2)  $\frac{\operatorname{tg} 5x}{2x}$

3)  $\frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

4)  $\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$

**2.4.** Какие из указанных функций имеют предел при  $x \rightarrow 0$ ?

$$1) f(x) = \frac{2^x - 1}{4^x - 1}$$

$$2) f(x) = \frac{4^x - 1}{4^x - 2^{x+1} + 1}$$

$$3) f(x) = \frac{8^x - 2^x}{4^x - 1}$$

$$4) f(x) = \frac{4^x - 2^{x+1} + 1}{8^x - 1}$$

## ■ § 4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОБРАТНЫХ ФУНКЦИЙ

**4.1. Существование обратной функции.** Напомним, что функция  $f(x)$  с областью определения  $D$  и областью значений  $S$  удовлетворяет условию обратимости, если для любых двух различных элементов  $x_1$  и  $x_2$  из  $D$  значения  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$  также различны. В случае, когда функция удовлетворяет условию обратимости, для функции  $f(x)$  можно построить обратную функцию  $g(y)$  по правилу: если для элементов  $x_0$  и  $y_0$  выполняется равенство  $y_0 = f(x_0)$ , то полагаем по определению, что  $g(y_0) = x_0$ . Условие обратимости заведомо выполняется для строгой монотонной функции  $f(x)$ .

**Пример 1.** Функция  $y = \sin x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  строго возрастает. Отсюда следует, что если  $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ , то при  $x_1 < x_2$  будем иметь неравенство  $\sin x_1 < \sin x_2$ . Поэтому функция  $y = \sin x$ , рассматриваемая на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , имеет обратную функцию, которую, как известно из 10 класса, называют арксинусом.

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = \frac{1}{x}$ , определённая при всех  $x \neq 0$ , имеет обратную функцию?

**4.2. О множестве значений непрерывной функции.** Когда функция  $f(x)$  имеет обратную функцию, для нахождения области определения обратной функции нужно знать множество значений функции  $f(x)$ . Для непрерывной функции справедливо следующее утверждение.

**Теорема 8.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ . Тогда для каждого числа  $C$ , заключённого между числами  $A$  и  $B$ , найдётся такое число  $c$  из отрезка  $[a; b]$ , что  $f(c) = C$ .

Эту теорему иногда называют *теоремой о промежуточных значениях* непрерывной функции. Мы не будем здесь доказывать эту теорему. Её можно применять для доказательства существования корней уравнений.



**Пример 2.** Докажем, что уравнение  $x^3 - 3x + 1 = 0$  имеет корень, принадлежащий интервалу  $(-2; -1)$ .

Функция  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  непрерывна на отрезке  $[-2; -1]$ , при этом  $f(-2) = -1$ ,  $f(-1) = 3$ , а число 0 находится между числами  $-1$  и  $3$ . Поэтому по теореме 8 существует такое число  $x_0$  из интервала  $(-2; -1)$ , что  $f(x_0) = 0$ .

Вообще справедливо следующее утверждение.

**Теорема 9.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и принимает в его концах ненулевые значения разных знаков. Тогда найдётся такое число  $c$  из интервала  $(a; b)$ , что  $f(c) = 0$ .

Это утверждение мы тоже не будем доказывать.

**Вопрос.** Как доказать, что уравнение  $x^3 - 3x + 1 = 0$  имеет корень на интервале  $(0; \frac{1}{2})$ ?

**4.3. Непрерывность монотонной функции.** Для доказательства непрерывности функций, которые обратны к непрерывным функциям, будем использовать следующее свойство, которое мы примем без доказательства.

**Теорема 10.** Пусть функция  $f(x)$  определена, монотонна на отрезке  $[a; b]$  и принимает все промежуточные значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ . Тогда функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ .

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = x^2$  принимает все значения из промежутка  $[0; \infty)$ ?

**4.4. Непрерывность функции  $y = \sqrt[n]{x}$ .** Напомним, что при любом натуральном  $n$  функция  $f(x) = x^n$ , рассматриваемая на луче  $[0; \infty)$ , строго возрастает и непрерывна. Теорема 8 из пункта 4.2 позволяет установить, что эта функция принимает все значения из промежутка  $[0; \infty)$ . Поэтому обратная к ней функция  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  определена на луче  $[0; \infty)$ , строго возрастает и принимает все значения из промежутка  $[0; \infty)$ . Тогда по теореме 10 из пункта 4.3 можно сделать вывод, что функция  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  непрерывна в каждой точке своей области определения.

**Вопрос.** Как показать, что функция  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  удовлетворяет условию обратимости на множестве  $R$  всех действительных чисел?

**4.5. Непрерывность логарифмической функции.** Напомним, что при  $a > 1$  функция  $f(x) = a^x$  строго возрастает на всей числовой прямой. Из непрерывности этой функции и теоремы 8 следует, что функция  $f(x) = a^x$  принимает все положительные значения. Значит, функция  $f(x) = a^x$  имеет обратную функцию, которая определена на луче  $(0; \infty)$ , строго возрастает и принимает все действительные значения. Как

известно, эта обратная функция называется *логарифмической функцией*, и для неё используется обозначение  $y = \log_a x$ .

Из теоремы 10 следует, что функция  $g(x) = \log_a x$  непрерывна в каждой точке своей области определения.

Аналогично определяется логарифмическая функция при  $0 < a < 1$  и доказывается её непрерывность.

**Вопрос.** Как доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log_2 \left( n \sin \frac{1}{n} \right) \right) = 0$ ?

**4.6. Непрерывность функции  $y = \arcsin x$ .** Функция  $y = \sin x$ , рассматриваемая на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , строго возрастает, непрерывна и принимает все значения из отрезка  $[-1; 1]$ . Поэтому обратная к ней функция  $y = \arcsin x$  определена на отрезке  $[-1; 1]$ , строго возрастает и принимает все значения из отрезка  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Из теоремы 10 следует непрерывность функции  $\arcsin x$  в каждой точке своей области определения.

Аналогично доказывается непрерывность функций  $y = \arccos x$  и  $y = \arctg x$  на всей области определения.

**Вопрос.** Как доказать непрерывность функции  $f(x) = \arctg x + \operatorname{arccotg} x$  на всей области определения?

**4.7. Непрерывность комбинаций элементарных функций.** В этой главе мы рассмотрели основные функции, задаваемые выражениями вида  $x$ ,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctg x$ ,  $a^x$ ,  $\log_a x$ , и установили их непрерывность. Из них с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложных функций можно получать разнообразные непрерывные функции.

**Вопрос.** Как доказать непрерывность функции  $y = \lg(1 - x^2)$  на интервале  $(-1; 1)$ ?

## ■ Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется строго возрастающей на промежутке?
2. Какая функция называется строго убывающей на промежутке?
3. Сформулируйте теорему о промежуточных значениях непрерывной функции.
4. Сформулируйте теорему о нуле непрерывной функции.
5. Сформулируйте теорему о непрерывности монотонной функции, принимающей все промежуточные значения.



## Задачи и упражнения ■

1. Найдите множество значений функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , если:

- а)  $f(x) = x^2 - 2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ;      б)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = -3$ ,  $b = -1$ ;  
 в)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2$ ;      г)  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $a = 0$ ,  $b = \frac{\pi}{4}$ ;  
 д)  $f(x) = x^2 - 2$ ,  $a = -1$ ,  $b = 2$ .

2. Найдите множество значений функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , если:

- а)  $f(x) = (x - 1)^2$ ,  $a = -1$ ,  $b = 2$ ;  
 б)  $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$ ,  $b = \pi$ ;  
 в)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ ;  
 г)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ ,  $a = -2$ ,  $b = -1$ .

3. Найдите множество значений функции на всей области определения:

- а)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ;      б)  $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ ;  
 в)  $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$ ;      г)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ;  
 д)  $f(x) = \sin x + \cos x$ ;      е)  $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$ .

4.\*\* С точностью до 0,1 найдите:

- а) корень уравнения  $x^2 - 2x - 2 = 0$  из интервала  $(-1; 0)$ ;  
 б) корень уравнения  $x = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

5. Докажите, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если:

- а)  $f(x) = x + 2\sqrt{x}$  и  $a = 4$ ;      б)  $f(x) = \left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}\right)$  и  $a = 0$ ;  
 в)  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$  и  $a = 4$ ;      г)  $f(x) = \frac{x\sqrt{x-2}\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}}$  и  $a = 9$ .

6.\* Найдите предел:

- а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ ;  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ ;      д)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}$ ;      е)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$ .



7. Докажите, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если:

а)  $f(x) = \lg(x^2 - 2x + 7)$  и  $a = 3$ ;      б)  $f(x) = \log_2 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$  и  $a = 4$ ;

в)  $f(x) = \lg(1 + \sin x)$  и  $a = 0$ ;      г)  $f(x) = \log_3 \frac{\sin 3x}{x}$  и  $a = 1$ .

8. Найдите предел:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\log_{x+1}(x+3))$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} (\log_{x^2-1}(x^2 + 2x + 1))$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} (\log_{\frac{x+1}{x-1}}(x^2 - 5))$ .

9. Найдите предел:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\arcsin(2x - 1))$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arccos(3x - 1))$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \arcsin \frac{x}{x+1} \right)$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \arccos \sqrt{\frac{3x-5}{x+2}} \right)$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{x+2} \right)$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (\arcsin(\log_2 x))$ .

10.\* Найдите предел:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \arcsin \frac{\operatorname{tg} x}{2x} \right)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \arccos \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} \right)$ .

11.\*\* Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-\sqrt{x+2}} \right) \right)$ .

12.\* Докажите непрерывность функции  $y = \sqrt{x}$

а) на промежутке  $[0; 100]$ ;

б) на промежутке  $[0; \infty)$ .

13.\*\* Докажите непрерывность функции  $y = \sqrt[3]{x}$

а) на промежутке  $[-1000; 1000]$ ;

б) на всей числовой прямой.

14.\*\* Докажите непрерывность функции  $y = \sqrt[n]{x}$ , где  $n$  — фиксированное натуральное число, на промежутке  $[0; \infty)$ .

15.\*\* Докажите непрерывность функции  $y = \log_a x$ , где  $a$  — такое фиксированное число, что  $a > 0$  и  $a \neq 1$ , на промежутке  $[0; \infty)$ .

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Каково множество значений функции  $f(x) = 1 - x^2$  на отрезке  $[1; 2]$ ?

1)  $[-3; 0]$

2)  $[-3; 1]$

3)  $[0; 1]$

4)  $(-3; 0)$

1.2. Каково множество значений функции  $f(x) = \sin x$  на отрезке  $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ ?

- 1)  $\left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$       2)  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$       3)  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$       4)  $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

1.3. Какая из функций является обратной к функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ , рассматриваемой на промежутке  $(-\infty; 0)$ ?

- 1)  $g(x) = x$  на промежутке  $(-\infty; 0)$   
 2)  $g(x) = -x$  на промежутке  $(0; \infty)$   
 3)  $g(x) = \frac{1}{x}$  на промежутке  $(-\infty; 0)$   
 4)  $g(x) = -\frac{1}{x}$  на промежутке  $(0; \infty)$

1.4. Какая из функций является обратной к функции  $f(x) = x^2 + 1$ , рассматриваемой на промежутке  $(0; \infty)$ ?

- 1)  $g(x) = \sqrt{x+1}$  на промежутке  $(0; \infty)$   
 2)  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  на промежутке  $(1; \infty)$   
 3)  $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  на промежутке  $(0; \infty)$   
 4)  $g(x) = \sqrt{x-1}$  на промежутке  $(1; \infty)$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. На каких промежутках функция  $f(x) = \sin x$  обратима?

- 1)  $[-\pi; 0]$       2)  $[\pi; 2\pi]$       3)  $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$       4)  $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$

2.2. На каких промежутках функция  $f(x) = \cos x$  обратима?

- 1)  $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$       2)  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$       3)  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$       4)  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

2.3.\*\* Какие из приведённых выражений задают функцию, которая является обратной к функции  $\sin x$ , рассматриваемой на промежутке  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ?

- 1)  $\frac{3\pi}{2} - \arcsin x$       2)  $\frac{\pi}{2} + \arccos x$       3)  $\pi - \arcsin x$       4)  $\frac{\pi}{2} + \arcsin x$

2.4.\*\* Какие из приведённых выражений задают функцию, которая является обратной к функции  $\cos x$ , рассматриваемой на промежутке  $[\pi; 2\pi]$ :

- 1)  $\frac{\pi}{2} + \arccos x$       2)  $\pi - \arcsin x$       3)  $2\pi - \arccos x$       4)  $\frac{3\pi}{2} + \arcsin x$

## ■ § 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МОНОТОННОСТИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ

**5.1.\* Доказательство единственности корня с помощью монотонности.** Иногда уравнение составляется таким образом, что один из его корней нетрудно получить путём подбора. Например, легко заметить, что  $x = 1$  является корнем уравнения  $2^{x^2} \cdot 3^{x-1} = 2$ . Однако такое решение нельзя считать полным, потому что указанное уравнение имеет ещё один корень, равный числу  $-\log_2 6$ . Способ решения уравнения методом подбора можно будет считать полноценным решением, если привести доказательство, что найдены все корни. В этом иногда помогает монотонность функций.

**Пример 1.** Докажем, что уравнение  $x \cdot 2^x = 8$  имеет единственный корень  $x = 2$ .

Рассмотрим функцию  $f(x) = x \cdot 2^x$ . При  $x < 0$  значения  $f(x)$  отрицательны, а поэтому уравнение  $x \cdot 2^x = 8$  не может иметь отрицательных корней.

Пусть  $0 \leq x_1 < x_2$ . Функция  $y = 2^x$  строго возрастает, поэтому  $2^{x_1} < 2^{x_2}$ . Почленно перемножив неравенства  $x_1 < x_2$  и  $2^{x_1} < 2^{x_2}$  с неотрицательными частями, получим неравенство  $x_1 \cdot 2^{x_1} < x_2 \cdot 2^{x_2}$ , то есть  $f(x_1) < f(x_2)$ , и функция  $f(x)$  строго возрастает на промежутке  $[0; \infty)$ . Следовательно, каждое её значение может получаться не более, чем в одной точке. В частности, если  $x = 2$ , то  $f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8$ , а при других неотрицательных значениях  $x$  значение  $f(x)$  отлично от 8.

Доказав, что уравнение  $x \cdot 2^x = 8$  не имеет отрицательных корней и имеет единственный неотрицательный корень  $x = 2$ , мы получили полное решение данного уравнения.

**Вопрос.** Как найти все корни уравнения  $2^{x^2} \cdot 3^{x-1} = 2$ ?

**5.2.\* Знакопостоянство непрерывной функции.** Теорема 8 из пункта 4.2 позволяет доказать следующее свойство непрерывных функций.

**Теорема 11.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $D$  и ни в одной точке этого промежутка не обращается в нуль. Тогда на этом промежутке либо все значения функции положительны, либо все значения функции отрицательны.

Предположим, что найдутся такие числа  $x_1 \in D$ ,  $x_2 \in D$ , что  $f(x_1) < 0$ ,  $f(x_2) > 0$ . Тогда на отрезке с концами  $x_1$  и  $x_2$  функция  $f(x)$  также непрерывна и в концах принимает значения разных знаков. По теореме 8 внутри отрезка найдётся число  $c$  такое, что  $f(c) = 0$ . Множество  $D$  является промежутком, поэтому число  $c$  также принадлежит  $D$ .



Но по условию  $f(c) \neq 0$ , и предположение о существовании у функции  $f(x)$  на промежутке  $D$  значений разных знаков приводит к противоречию. Следовательно, предположение неверно, и тем самым теорема доказана.

**Вопрос.** Как доказать, что уравнение  $x = \cos x$  имеет единственный корень?

### 5.3.\* Обобщение метода интервалов в решении неравенств.

Свойство непрерывных функций, доказанное в предыдущем пункте, позволяет обобщить метод интервалов решения неравенств.

Обобщённый метод интервалов можно использовать для решения неравенств вида  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) > 0$ ,  $f(x) \leq 0$ ,  $f(x) < 0$ , где  $f(x)$  — функция, непрерывная в своей естественной области определения. При обобщённом методе интервалов сначала составляют и решают уравнение  $f(x) = 0$ , затем определяют промежутки знакопостоянства функции  $f(x)$ , после чего в ответ отбирают нужные промежутки и точки.

**Пример 2.** Решим неравенство  $(3^x - 9) \cdot \log_{x+4}(x^2 - 1) \geq 0$ .

Обозначим левую часть неравенства через  $f(x)$ . Сначала найдём область определения  $D$  функции  $f(x)$ , которая задаётся условиями:  $x^2 - 1 > 0$ ,  $x + 4 > 0$ ,  $x + 4 \neq 1$ . Учитывая все условия, получаем  $D = (-4; -3) \cup (-3; -1) \cup (1; \infty)$ .

Затем решим уравнение  $(3^x - 9) \cdot \log_{x+4}(x^2 - 1) = 0$ .

I.  $3^x - 9 = 0$ . Отсюда  $x_1 = 2$ . Это число входит в множество  $D$ , а поэтому является корнем уравнения  $f(x) = 0$ .

II.  $\log_{x+4}(x^2 - 1) = 0$ . Отсюда  $x^2 - 1 = 1$ ,  $x_2 = \sqrt{2}$ ,  $x_3 = -\sqrt{2}$ . Оба числа входят в множество  $D$ , а поэтому также являются корнями уравнения  $f(x) = 0$ .

После этого изобразим на числовой прямой числа  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \sqrt{2}$ ,  $x_3 = -\sqrt{2}$  и рассмотрим получившиеся промежутки (рис. 1).

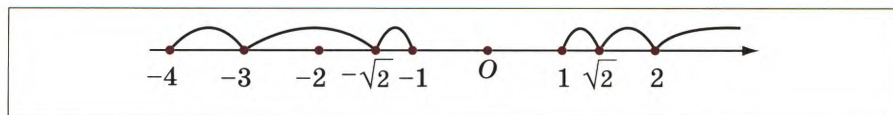


Рис. 1

На интервале  $(-4; -3)$  для числа  $x = -3,5$  имеем  $3^x - 9 < 0$ ,  $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{45}{4} < 0$ . Отсюда  $f(-3,5) > 0$ , а поэтому  $f(x) > 0$  при всех  $x$  из рассматриваемого промежутка.

На интервале  $(-3; -\sqrt{2})$  для числа  $x = -2$  имеем  $3^x - 9 < 0$ ,  $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_2 3 > 0$ . Отсюда  $f(-2) < 0$ , а поэтому  $f(x) < 0$  при всех  $x$  из рассматриваемого промежутка.

На интервале  $(-\sqrt{2}; -1)$  для числа  $x = -1,25$  имеем  $3^x - 9 < 0$ ,  $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{\frac{11}{2}} \frac{9}{16} < 0$ . Отсюда  $f(-1,25) > 0$ , а поэтому  $f(x) > 0$  при всех  $x$  из рассматриваемого промежутка.

На интервале  $(1; \sqrt{2})$  для числа  $x = 1,25$  имеем  $3^x - 9 < 0$ ,  $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{\frac{21}{4}} \frac{9}{16} < 0$ . Отсюда  $f(1,25) > 0$ , а поэтому  $f(x) > 0$  при всех  $x$  из рассматриваемого промежутка.

На интервале  $(\sqrt{2}; 2)$  для числа  $x = 1,5$  имеем  $3^x - 9 < 0$ ,  $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{\frac{45}{2}} \frac{45}{4} < 0$ . Отсюда  $f(1,5) < 0$ , а поэтому  $f(x) < 0$  при всех  $x$  из рассматриваемого промежутка.

На промежутке  $(2; \infty)$  для числа  $x = 3$  имеем  $3^x - 9 > 0$ ,  $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_7 8 > 0$ . Отсюда  $f(3) > 0$ , а поэтому  $f(x) > 0$  при всех  $x$  из рассматриваемого промежутка.

Выбрав все  $x$ , для которых  $f(x) > 0$  или  $f(x) = 0$ , получим ответ (рис. 2).

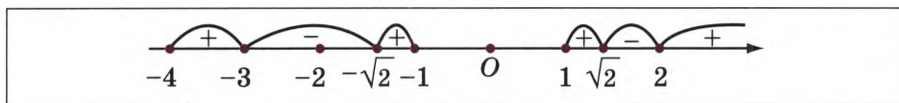


Рис. 2

*Ответ:*  $(-4; -3) \cup [-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}] \cup (2; \infty)$ .

**Вопрос.** Как доказать непрерывность функции  $f(x) = \log_{x+4}(x^2 - 1)$  из примера 2 на всей области определения?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1.\* Пусть функция  $f(x)$  строго монотонна в области определения. Докажите, что при любом значении  $c$  уравнение  $f(x) = c$  не может иметь более одного решения.

2.\* Сформулируйте и докажите свойство знакопостоянства непрерывной функции на промежутках.

3.\* В чём состоит обобщённый метод интервалов решения неравенств?





9.\*\* Решите неравенство:

а)  $\sqrt{5x+6} - \sqrt{x-1} < 4$ ;                      б)  $\frac{1}{x} - 1 \leq \sqrt{13 - \frac{6}{x}}$ ;

в)  $\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 4} < 1$ .

10.\*\* Решите неравенство:

а)  $\frac{2}{\log_2(x-1)} + 1 \leq \frac{\log_2(x^2-x+1)}{\log_2(x-1)}$ ;

б)  $\log_{x^2-1} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \geq 1$ ;

в)  $\log_{x^2+2x-3} \frac{|x+4|-|x|}{x-1} > 0$ ;

г)  $\log_{2x^2-x} (|x+2|-|x|) > \log_{2x^2-x} \sqrt{2-x^2}$ ;

д)  $\log_{x^2+x+1} |x+3| > \log_{x^2+x+1} (\sqrt{x^2-1}-x)$ ;

е)  $\log_{|x|} \frac{|x+3|-|x|}{2-x} > 1$ ;

ё)  $\frac{1}{|\log_2 x| - 1} \geq \frac{1}{|\log_2 2x| - 2}$ .

11.\*\* Решите неравенство  $\frac{x-1}{(x+2) \cdot \log_4(x^2+3x+\frac{5}{2})} \geq 0$ .

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какой из указанных промежутков входит в множество решений неравенства  $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \geq 0$ ?

- 1)  $[1; 2)$                       2)  $(2; 3]$                       3)  $(3; 4]$                       4)  $[4; \infty)$

1.2. Какой из указанных промежутков входит в множество решений неравенства  $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} < 0$ ?

- 1)  $(1; 2)$                       2)  $(2; 3)$                       3)  $(3; 4]$                       4)  $(4; \infty)$

**1.3.** Какое из множеств является множеством всех решений неравенства  $\frac{x}{(x-1)^2} \geq 0$ ?

- 1)  $(-\infty; 0] \cup (1; \infty)$     2)  $[0; 1]$     3)  $[0; 1) \cup (1; \infty)$     4)  $[0; 1) \cup (4; \infty)$

**1.4.** Какое из множеств является множеством всех решений неравенства  $\frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)^2} \leq 0$ ?

- 1)  $[1; 4) \cup (9; \infty)$     2)  $[1; 4) \cup (4; 9]$     3)  $[0; 1] \cup [9; \infty)$     4)  $[0; 1] \cup (2; 9]$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** При каких значениях  $x$  функция  $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x^2-9)(x^2-16)}$  принимает положительное значение?

- 1)  $x = 1, 2$     2)  $x = -2, 7$     3)  $x = 5, 1$     4)  $x = -7, 8$

**2.2.** Объединение каких промежутков из указанных нужно взять, чтобы получить множество решений неравенства  $\frac{x+3}{x^2-4} < 0$ ?

- 1)  $(-\infty; -3)$     2)  $(-3; -2)$     3)  $(-2; 2)$     4)  $(2; \infty)$

**2.3.** Каким из неравенств равносильно неравенство  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ ?

- 1)  $\frac{g(x)}{f(x)} \geq 0$     2)  $f(x) \cdot g(x) \geq 0$     3)  $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} \geq 0$     4)  $\frac{1}{f(x) \cdot g(x)} \geq 0$

**2.4.** Выберите верные утверждения.

1) пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a; b]$  и ни в одной точке этого промежутка не обращается в нуль. Тогда на этом промежутке либо все значения функции положительны, либо все значения функции отрицательны

2) пусть функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $(a; b)$  и ни в одной точке этого промежутка не обращается в нуль. Тогда на этом промежутке либо все значения функции положительны, либо все значения функции отрицательны

3) пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и принимает в концах значения разных знаков. Тогда найдётся такое число  $c$  из промежутка  $(a; b)$ , что  $f(c) = 0$

4) пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и принимает в концах значения одного знака. Тогда на этом промежутке либо все значения функции положительны, либо все значения функции отрицательны

## ■ Мини-исследования к главе 1

## Мини-исследование 1

Предлагается ввести понятие бесконечно малой в точке  $a$  функции  $\alpha(x)$ , то есть функции  $\alpha(x)$ , предел которой в точке  $a$  равен 0, и аналогично тому, как это происходило для последовательностей, доказать несколько основных свойств бесконечно малых в точке функций:

1) если функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые в точке  $a$ , то сумма  $\alpha(x) + \beta(x)$  — бесконечно малая в той же точке;

2) если функция  $\alpha(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$ , функция  $f(x)$  ограничена в некоторой окрестности точки  $a$ , то произведение  $\alpha(x) \cdot f(x)$  — бесконечно малая функция в точке  $a$ ;

3) если функция  $\alpha(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$ , то  $\alpha(x)$  — функция, ограниченная в некоторой окрестности точки  $a$ .

Из свойств 2) и 3) следует, что произведение бесконечно малых в данной точке функций является бесконечно малой в этой точке функцией.

## Мини-исследование 2

Для того чтобы хорошо представлять себе понятие непрерывности функции в точке, полезно разобраться в том, что означают слова «функция  $f(x)$  не является непрерывной в точке  $a$ ». Если функция  $f(x)$  не является непрерывной в точке  $a$ , то её принято называть *разрывной в точке  $a$* , а саму точку  $a$  — *точкой разрыва* функции  $f(x)$ .

В примере с функцией  $y = \operatorname{sgn}^2 x$ , рассмотренном в пункте 2.1, точка 0 является точкой разрыва, однако кажется немного «ненастоящей», так как если переопределить исходную функцию, положив её значение в нуле равным 1, то получим непрерывную в 0 функцию, тождественно равную 1 на всей числовой прямой. Такой разрыв естественно назвать *устранимым*.

Функцию  $y = \operatorname{sgn} x$  можно представлять себе как бы «склеенной» из нескольких функций: для  $x < 0$  — это функция, тождественно равная  $-1$ , предел которой в точке 0 существует и равен  $-1$ ; для  $x > 0$  — это функция, тождественно равная 1, предел которой в точке 0 существует и равен 1; и, наконец, при  $x = 0$  — это нуль.

Такую точку разрыва, как в данных примерах, называют *точкой разрыва первого рода*.

Легко указать принципиально отличные от предыдущих примеры точек разрыва. Рассмотрим хорошо знакомую нам функцию  $f(x) = \frac{1}{x}$ , разрывную в нуле хотя бы потому, что она в нуле не определена. Её тоже



можно представить себе как бы «склеенной» из двух функций: для  $x < 0$  — это функция, равная  $\frac{1}{x}$ , предел которой в точке 0 не существует; для  $x > 0$  — это функция, равная  $\frac{1}{x}$ , предел которой в точке 0 не существует; таким образом, 0 является такой точкой разрыва, что ни при стремлении  $x$  к нулю слева, ни при стремлении  $x$  к нулю справа предела не существует. Рассмотрим теперь функцию  $f(x)$ , определённую формулой  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+|x|}{x^2}$ , которая при  $x < 0$  тождественно равна 0, а при  $x > 0$  равна  $\frac{1}{x}$ . Её предел слева в точке 0 равен 0, а предела справа в нуле не существует. Такую точку разрыва, как в последних примерах, называют *точкой разрыва второго рода*.

1) Дайте определение точек разрыва первого и второго рода, и приведите несколько новых примеров.

2) Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \end{cases}$  разрывна в нуле.

Разрыв какого рода представляет точка  $x = 0$ ?

3) Докажите, что функция  $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$  имеет в нуле устранимый разрыв первого рода.

### Мини-исследование 3

Предлагается вывести замечательный тригонометрический предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , не используя понятие непрерывности функции. Для этого:

1) для всех положительных чисел  $x$  установите неравенства

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x;$$

2) выразите  $1 - \cos x$  через синус половинного аргумента и получите неравенства  $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$ ;

3) воспользовавшись чётностью функций  $y = \frac{\sin x}{x}$  и  $y = \frac{x^2}{2}$ , распространите предыдущие неравенства на все  $x \neq 0$ ;

4) с помощью теоремы о пределе промежуточной функции установите искомый предел.



# Глава 2

## СФЕРА И ШАР

В этой главе мы рассмотрим некоторые свойства сферы и шара, свойства плоскостей и прямых, касающихся сферы.

### ■ § 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СФЕРЫ И ШАРА

**1.1. Сфера и шар.** Одними из самых известных пространственных фигур являются сфера и шар.

Напомним, что сферой с центром  $O$  и радиусом  $R$  называется пространственная фигура, состоящая из всех точек, удалённых от точки  $O$  на расстояние  $R$ .

Сфера ограничивает в пространстве множество точек и является границей шара. Напомним, что шаром с центром  $O$  и радиусом  $R$  называется пространственная фигура, состоящая из всех точек, удалённых от точки  $O$  на расстояние, меньшее либо равное  $R$ .

Точка  $M$  пространства лежит на заданной сфере с центром  $O$  и радиусом  $R$  только в том случае, когда  $OM = R$ . Точка  $M$  пространства содержится внутри шара с центром  $O$  и радиусом  $R$  только в том случае, когда  $OM < R$ .

**Вопрос.** Какие точки шара называются граничными?

**1.2. Общие точки сферы и плоскости.** Сфера и плоскость могут либо не иметь общих точек, либо иметь только одну общую точку, либо пересекаться по окружности. Это зависит от расстояния между центром сферы и плоскостью.

**Теорема.** Пусть центр  $O$  сферы радиуса  $R$  находится на расстоянии  $d$  от плоскости  $\alpha$ . Тогда

при  $d > R$  сфера не имеет общих точек с плоскостью  $\alpha$ ;

при  $d = R$  сфера имеет с плоскостью  $\alpha$  единственную общую точку;

при  $0 < d < R$  сечением сферы плоскостью  $\alpha$  является окружность радиуса  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$  с центром  $O_1$ , причём  $OO_1 \perp \alpha$ ;

при  $d = 0$  сечением сферы плоскостью  $\alpha$  является окружность с центром  $O$  и радиусом  $R$ .

Из точки  $O$  опустим перпендикуляр с основанием  $O_1$  на плоскость  $\alpha$ . Тогда  $OO_1 = d$ . Рассмотрим четыре случая.

I. Пусть  $d > R$ . Тогда точка  $O_1$  плоскости  $\alpha$  не лежит на сфере, так как  $OO_1 > R$ . Для любой точки  $M$  плоскости  $\alpha$  имеем  $OM > OO_1 > R$  (рис. 1).



Отсюда  $OM > R$ , а поэтому точка  $M$  также не лежит на сфере.

II. Пусть  $d = R$ . Тогда точка  $O_1$  плоскости  $\alpha$  лежит на сфере, так как  $OO_1 = R$ . Для любой другой точки  $M$  плоскости  $\alpha$  имеем  $OM > OO_1 = R$ . Значит, точка  $M$  не лежит на сфере, а поэтому при  $d = R$  сфера и плоскость имеют единственную общую точку (рис. 2).

III. Пусть  $0 < d < R$ . Проведём в плоскости  $\alpha$  окружность  $S$  с центром  $O_1$  и радиусом  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$  (рис. 3). Для любой точки  $M$  окружности  $S$  получаем прямоугольный треугольник  $OO_1M$  с прямым углом при вершине  $O_1$ . Поэтому по теореме Пифагора получаем  $OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2 = d^2 + (R^2 - d^2) = R^2$ , откуда  $OM = R$ . Следовательно, точка  $M$  лежит на данной сфере.

Обратно, пусть точка  $K$  — общая точка данной сферы и плоскости  $\alpha$ . Тогда точка  $K$  не совпадает с точкой  $O_1$  и  $O_1K \perp OO_1$ . Для прямоугольного треугольника  $OO_1K$  справедливо равенство  $O_1K^2 = OK^2 - OO_1^2 = R^2 - d^2$ ,  $O_1K = \sqrt{R^2 - d^2}$ . Следовательно, точка  $K$  лежит в плоскости  $\alpha$  на окружности  $S$ .

IV. Пусть  $d = 0$ . Тогда точка  $O_1$  совпадает с точкой  $O$ . Проведём в плоскости  $\alpha$  окружность  $S$  с центром  $O$  и радиусом  $R$ . Все точки окружности  $S$  принадлежат сфере, так как они удалены от точки  $O$  на расстояние  $R$ .

**Вопрос.** Почему в случае IV на плоскости  $\alpha$  нет точек сферы, отличных от точек окружности  $S$ ?

**1.3. Касание сферы и плоскости.** Плоскость  $\alpha$  называется *касательной* к сфере  $S$ , если сфера  $S$  имеет с плоскостью  $\alpha$  единственную общую точку  $K$ . В этом случае точка  $K$  называется *точкой касания сферы  $S$  с плоскостью  $\alpha$* . Про плоскость, касательную к сфере  $S$ , говорят также, что она касается шара, ограниченного сферой  $S$ , в той же точке, в которой касается сферы.

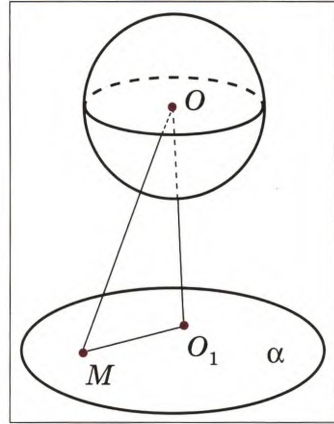


Рис. 1

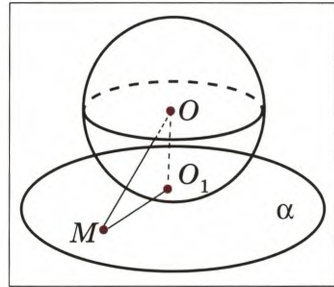


Рис. 2

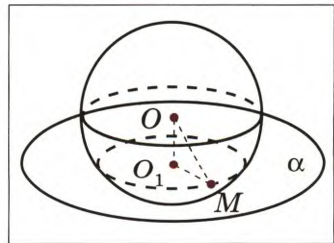


Рис. 3



Следствием теоремы предыдущего пункта является основное свойство касания сферы с плоскостью.

**Плоскость  $\alpha$ , проходящая через точку  $M$  сферы  $S$  радиуса  $R$  с центром  $O$  в том и только том случае касается сферы  $S$ , когда  $OM \perp \alpha$ .**

Для доказательства этого свойства установим справедливость двух утверждений.

I. Если плоскость  $\alpha$  касается сферы радиуса  $R$  с центром  $O$  в точке  $M$ , то  $OM \perp \alpha$ .

II. Если плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $M$  сферы  $S$  радиуса  $R$  с центром  $O$  и  $OM \perp \alpha$ , то плоскость  $\alpha$  касается сферы  $S$ .

Докажем первое из этих утверждений. Предположим, что отрезок  $OM$  не перпендикулярен плоскости  $\alpha$ . Проведём  $OO_1 \perp \alpha$ , где  $O_1$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на плоскость  $\alpha$ , по предположению точка  $O_1$  не совпадает с точкой  $M$ . Но тогда  $d = OO_1 < OM = R$ . Отсюда по теореме из пункта 1.2 получаем, что плоскость  $\alpha$  пересекает сферу по окружности, то есть не касается данной сферы. Сделанное предположение приводит к противоречию, поэтому предположение о том, что отрезок  $OM$  не перпендикулярен плоскости  $\alpha$ , неверно. Но тогда  $OM \perp \alpha$ .

**Вопрос.** Как доказать второе из сформулированных утверждений?

**1.4. Общие точки шара и плоскости.** Из основных свойств пересечения сферы с плоскостью можно вывести свойства пересечения шара с плоскостью.

Если плоскость удалена от центра шара на расстояние, большее радиуса шара, то плоскость не имеет с шаром общих точек.

Если плоскость удалена от центра шара на расстояние, равное радиусу шара, то плоскость касается шара.

Если плоскость удалена от центра шара на расстояние, меньшее радиуса шара, то плоскость пересекает шар по кругу. При этом границей круга является окружность пересечения данной плоскости с границей шара.

**Вопрос.** Какая точка шара находится на наименьшем расстоянии от некоторой данной плоскости?

**1.5. Касание сфер.** Две сферы называются *касающимися*, если они касаются некоторой плоскости в одной и той же точке. Центры касающихся сфер лежат на прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно общей касательной плоскости.

Если центры сфер лежат по разные стороны от этой плоскости, то говорят, что сферы *касаются внешним образом*. В этом случае расстояние между центрами сфер равно сумме их радиусов. Если центры сфер лежат по одну сторону от касательной плоскости, то говорят, что сферы *каса-*

ются *внутренним образом*. В этом случае расстояние между центрами сфер равно модулю разности их радиусов.

Можно доказать, что две сферы с центрами  $O_1, O_2$  и радиусами  $R_1, R_2$  касаются тогда и только тогда, когда либо  $O_1O_2 = R_1 + R_2$ , либо  $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ .

**Вопрос.** Могут ли сферы касаться, если расстояние между их центрами меньше суммы радиусов?

**1.6.\*\* Внутренние точки шара и их свойства.** Пусть задан шар  $U$  радиуса  $R$  с центром  $O$ . Назовём точку  $M$  *внутренней точкой* шара  $U$ , если  $OM < R$ .

Докажем, что для каждой внутренней точки  $M$  шара  $U$  можно указать шар с центром  $M$ , все точки которого будут внутренними точками исходного шара.

Пусть  $d = OM < R$ . Построим шар  $S$  с центром  $M$  и радиусом  $r = \frac{1}{2}(R - d)$  (рис. 4). Возьмём произвольную точку  $P$  шара  $S$ . По неравенству треугольника имеем:

$$OP \leq OM + MP = d + MP \leq d + r = d + \frac{1}{2}(R - d) = \frac{1}{2}(R + d) < R.$$

Точка  $P$  удалена от точки  $O$  на расстояние  $OP < R$ , поэтому  $P$  — внутренняя точка шара  $U$ .

Таким образом, каждая внутренняя точка  $M$  шара  $U$  входит в шар  $U$  вместе с некоторым шаром, центр которого находится в точке  $M$ .

Покажем, что указанное свойство не выполняется для точек сферы, ограничивающей шар. Действительно, пусть  $K$  лежит на сфере радиуса  $R$  с центром  $O$ . Построим с центром  $K$  шар  $V$  радиуса  $0 < r < R$ . Прямая  $OK$  пересекает шар  $V$  по его диаметру  $AB$  (рис. 5). Точка  $A$  лежит вне заданного шара  $U$ , потому что  $OA = OK + KA = R + r > R$ , а точка  $B$  лежит внутри заданного шара  $U$ , потому что  $OB = OK - KB = R - r < R$ . Если  $r$  меньше либо равно  $R$ , то шар  $V$  содержит точки, принадлежащие шару  $U$  и содержит точки, не принадлежащие этому шару  $U$ .

Следовательно, любой шар с центром на границе шара  $U$  содержит как точки, принадлежащие шару  $U$ , так и точки, не принадлежащие ему.

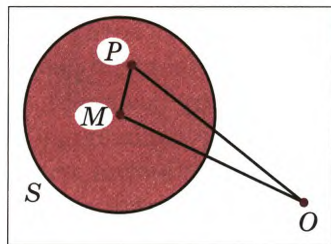


Рис. 4

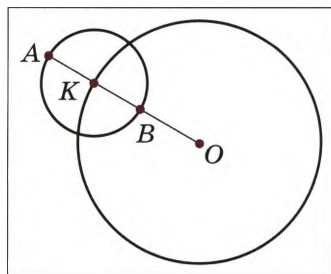


Рис. 5



**Вопрос.** При каком условии один шар целиком находится вне другого шара?

### ■ Контрольные вопросы

1. Какая пространственная фигура называется сферой?
2. Какая пространственная фигура называется шаром?
3. Каким может быть множество всех общих точек сферы и плоскости?
4. Как определяется плоскость, касательная к сфере?
5. В чём состоит основное свойство плоскости, касательной к сфере?
- 6.\*\* Какие точки шара называются внутренними?
- 7.\*\* Каким свойством обладают внутренние точки шара?
8. Как определяется касание двух сфер?

### ■ Задачи и упражнения

1.\* Пусть две сферы имеют более одной общей точки. Докажите, что линия пересечения этих сфер — окружность.

2. Центр сферы радиуса  $R$  лежит на поверхности другой сферы радиуса  $2R$ . Найдите радиус окружности, по которой эти сферы пересекаются.

3.\*\* Точка  $A$  лежит за пределами шара  $S$ . Каково множество всех точек касания шара  $S$  со всевозможными касательными плоскостями, проходящими через точку  $A$ ?

4. Шар касается граней двугранного угла величиной  $60^\circ$ . Расстояние от центра шара до ребра данного угла равно  $a$ . Найдите радиус шара.

5. Радиус сферы равен  $R$ . Через конец одного из радиусов под углом  $30^\circ$  к нему проведена плоскость. Найдите радиус окружности, по которой пересекаются эта плоскость и сфера.

6. Через точку  $A$  на поверхности сферы радиуса  $R$  проведена касательная плоскость  $\alpha$ . Плоскость  $\beta$  проходит через точку  $A$  и составляет угол  $45^\circ$  с плоскостью  $\alpha$ . Каков радиус окружности, по которой сфера пересекается плоскостью  $\beta$ ?

7. На поверхности сферы радиуса  $R$  выбрана точка  $A$ . Найдите радиус окружности, расположенной на этой сфере, все точки которой удалены от точки  $A$  на расстояние  $R$ .

8.\* Две параллельные плоскости пересекают сферу по окружностям радиусов  $r_1, r_2$ . Найдите радиус сферы, если расстояние между плоскостями равно  $h$ .

9. Шар радиуса 5 касается плоскости  $\alpha$ . Точка  $A$  лежит на плоскости  $\alpha$  на расстоянии 12 от точки касания. Найдите:

- а) наименьшее расстояние от  $A$  до точек шара;
- б) наибольшее расстояние от  $A$  до точек шара.



**10.\*\*** Пересечение некоторой пространственной фигуры  $\Phi$  с любой плоскостью есть либо круг, либо точка, либо пустое множество. Докажите, что фигура  $\Phi$  — шар.

**11.\*\*** Шар касается граней двугранного угла. Докажите, что плоскость, проходящая через ребро  $a$  угла и центр шара, делит двугранный угол пополам.

**12.** В сечении шара двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно 1, получаются два круга с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Найдите радиус шара, если

а)  $r_1 = 3, r_2 = 4$ ;    б)  $r_1 = \frac{3}{7}, r_2 = \frac{4}{7}$ .

### Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Сфера радиуса 2 касается двух параллельных плоскостей. Чему равно расстояние между этими плоскостями?

- 1) 2                      2) 3                      3) 4                      4) 5

**1.2.** На расстоянии 99 от центра сферы радиуса 100 проводится плоскость. Какому из промежутков принадлежит значение радиуса окружности, полученной в сечении сферы?

- 1) (5;10)              2) (10;15)              3) (15;20)              4) (20;25)

**1.3.** Чему равен радиус сферы, у которой сечение, проходящее на расстоянии 2 от центра, имеет радиус 5?

- 1)  $\sqrt{21}$               2)  $\sqrt{23}$               3)  $\sqrt{27}$               4)  $\sqrt{29}$

**1.4.** Чему равна площадь сечения сферы радиуса 4 плоскостью, проходящей на расстоянии 1 от центра сферы?

- 1)  $10\pi$               2)  $15\pi$               3)  $20\pi$               4)  $25\pi$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Две сферы радиусов  $R_1 = 8$  и  $R_2 = 12$  касаются одной плоскости. Каким может быть расстояние между центрами этих сфер?

- 1) 2                      2) 4                      3) 20                      4) 200

**2.2.** Сфера радиуса  $R$  пересекается плоскостью. Какие из приведённых значений могут быть радиусом окружности сечения?

- 1)  $R(\sqrt{3} - 1)$               2)  $R(\sqrt{5} - 1)$               3)  $R(\sqrt{43} - \sqrt{37})$               4)  $\frac{R}{3}(\sqrt{3} + 2)$

**2.3.** Даны сфера  $S_1$  с центром  $O_1$  и радиусом  $R_1$  и сфера  $S_2$  с центром  $O_2$  и радиусом  $R_2$ . В каких из перечисленных случаев сферы касаются?

1)  $R_1 = 2, R_2 = 5, O_1O_2 = 3$

2)  $R_1 = 31, R_2 = 47, O_1O_2 = 77$

3)  $R_1 = 12, R_2 = 25, O_1O_2 = 13$

4)  $R_1 = 1,24, R_2 = 2,325, O_1O_2 = 3,565$

**2.4.** При каких значениях расстояния  $d$  от центра сферы радиуса  $R$  до плоскости радиус сечения сферы этой плоскостью будет меньше  $R$ ?

1)  $d = \frac{1}{2}R$

2)  $d = \frac{2}{3}R$

3)  $d = \frac{3}{5}R$

4)  $d = \frac{5}{7}R$

## ■ § 2. ОПИСАННЫЕ СФЕРЫ

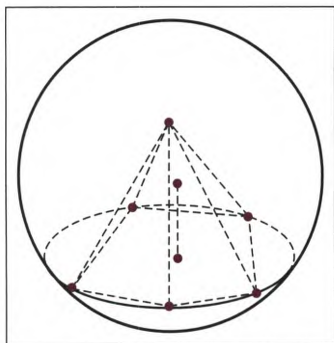


Рис. 1

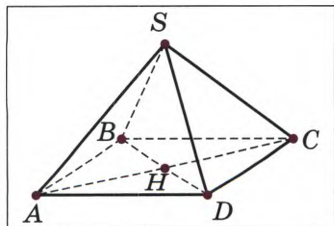


Рис. 2

**2.1. Сферы, описанные около многогранника.** Сфера называется *описанной* около многогранника, если все вершины многогранника лежат на сфере. В таком случае многогранник называется *вписанным* в данную сферу.

Пусть многогранник вписан в сферу  $S$ . Пересекая сферу  $S$  плоскостью, проходящей через грань многогранника, получим окружность, описанную около данной грани (рис. 1). Из теоремы пункта 1.2 следует, что если эта плоскость не проходит через центр сферы, то, соединяя центр окружности сечения с центром сферы, получим отрезок, перпендикулярный соответствующей грани.

**Вопрос.** В каком случае около параллелепипеда можно описать сферу?

**2.2. Сферы, описанные около пирамиды.** Центр сферы, которую можно описать около любой правильной пирамиды, лежит на прямой, проходящей через высоту пирамиды.

**Пример 1.** В основании правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 2, боковые рёбра пирамиды равны 3. Найдём радиус сферы, описанной около пирамиды.

Пусть  $H$  — основание высоты пирамиды (рис. 2). Тогда точка  $H$  равноудалена от вершин основания и совпадает с центром основания  $ABCD$ . Поэтому  $HA = HB = HC = HD = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ . Точка  $H$  является центром окружности, описанной около основания  $ABCD$ . Рассмотрим плоскость  $ASC$  и найдём



на высоте  $SH$  точку  $O$  такую, что  $OS = OA$  (рис. 3). Поскольку  $SH \perp AC$ ,  $AH = \sqrt{2}$  и  $AS = 3$ , то  $SH = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}$ . Пусть  $SO = R$ . Тогда  $OH = |\sqrt{7} - R|$  и  $AO^2 = AH^2 + OH^2 = 2 + (\sqrt{7} - R)^2 = 9 - 2\sqrt{7}R + R^2$ . Из условия  $AO = R$  составляем уравнение:  $9 - 2\sqrt{7}R + R^2 = R^2$ . Отсюда  $R = \frac{9}{2\sqrt{7}} = \frac{9}{14}\sqrt{7}$ . Прямоугольные треугольники  $AHO$ ,  $BHO$ ,  $CHO$ ,  $DHO$  равны, так как имеют соответственно равные катеты. Отсюда  $AO = BO = CO = DO = SO$ . Поэтому сфера с центром  $O$  и радиусом  $R = \frac{9}{14}\sqrt{7}$  содержит все вершины пирамиды.

Ответ:  $\frac{9}{14}\sqrt{7}$ .

**Вопрос.** Может ли центр сферы, описанной около пирамиды, находиться вне пирамиды?

**2.3. Нахождение центра описанной сферы.** Пусть многогранник вписан в сферу. В пункте 2.1 было указано, что если пересечь сферу плоскостью, проходящей через грань многогранника, то в сечении получается окружность, описанная около грани. Это свойство позволяет находить центр описанной сферы следующим способом. Выберем некоторую грань многогранника, найдём центр описанной около неё окружности и проведём через этот центр прямую, перпендикулярную плоскости грани (рис. 4). Если существует описанная сфера, то её центр находится на построенной прямой. Указанное построение можно повторить и выполнить для какой-нибудь другой грани многогранника. Если хотя бы два из построенных перпендикуляров не пересекутся, то описанной около многогранника сферы не существует.

**Пример 2.** В основании призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $AB = 6$ . Призма такова, что около неё можно описать сферу, и высота призмы равна 8. Найдём радиус описанной сферы.

Рассмотрим грань  $ABC$  (рис. 5). Центр окружности, описанной около прямоугольного тре-

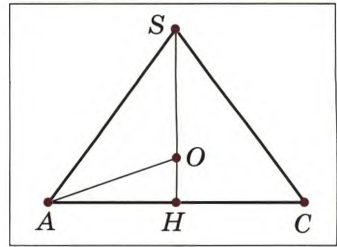


Рис. 3

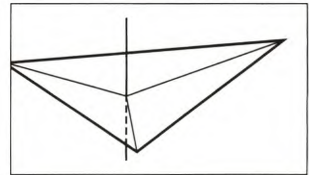


Рис. 4

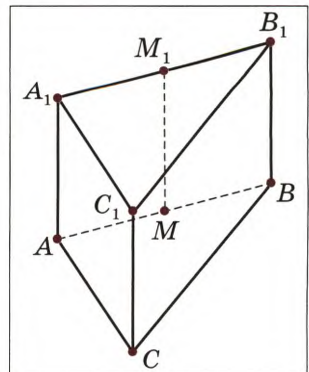


Рис. 5



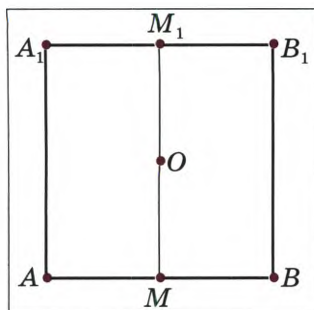


Рис. 6

Отрезок  $MM_1$  проходит через середины соответственных рёбер оснований и перпендикулярен плоскости оснований. Следовательно, отрезок  $MM_1$  равен высоте призмы, то есть  $MM_1 = 8$ . Для вычисления радиуса сферы можно рассмотреть плоскость  $AA_1B_1B$  (рис. 6). Пусть  $O$  — центр сферы. Тогда  $AO = A_1O$ , откуда  $OM = OM_1$ ,  $OM = \frac{1}{2}MM_1 = 4$ ,  $AM = \frac{1}{2}AB = 3$ ,  $AO^2 = AM^2 + MO^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$ ,  $AO = 5$ .

Ответ: 5.

**Вопрос.** Где находится центр сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда?

**2.4.\*\* Нахождение центра описанной сферы с помощью серединных перпендикуляров.** Пусть сфера проходит через две различные точки  $A$  и  $B$ . В этом случае центр  $O$  сферы равноудалён от точек  $A$  и  $B$ . Поэтому точка  $O$  находится во множестве всех точек пространства, равноудалённых от точек  $A$  и  $B$ , то есть находится в плоскости  $\alpha$ , которая проходит через середину отрезка  $AB$  перпендикулярно отрезку  $AB$ . Иногда такую плоскость называют *серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$*  в пространстве.

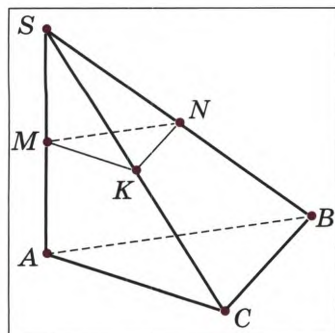


Рис. 7

**Пример 3.** Ребро  $SA$  пирамиды  $SABC$  перпендикулярно основанию  $ABC$ ,  $AB = AC = 3$ ,  $SA = BC = 2$ . Найдём радиус сферы, описанной около пирамиды  $SABC$ .

Поскольку сфера проходит через точки  $S$  и  $A$ , то её центр  $O$  лежит в плоскости  $MNK$ , проходящей через середину  $M$  ребра  $SA$  и перпендикулярной прямой  $SA$ , потому что плоскость  $MNK$  параллельна плоскости  $ABC$  (рис. 7). Если  $F$  — центр окружности, описанной око-

ло треугольника  $ABC$ , то  $OF \perp ABC$ , а поэтому  $OF \parallel AM$  (рис. 8). Из параллельности плоскостей  $ABC$  и  $MNK$  следует, что  $AM = OF$ . Поэтому  $AMOF$  — прямоугольник. Пусть  $H$  — середина  $BC$ . Тогда:

$$AH = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$(2\sqrt{2} - AF)^2 + CH^2 = FC^2, \quad FC = AF,$$

$$8 - 4\sqrt{2} \cdot AF + 1 = 0, \quad AF = \frac{9}{4\sqrt{2}}, \quad OF = AM = 1,$$

$$AO^2 = AF^2 + OF^2 = \frac{81}{32} + 1 = \frac{113}{32}, \quad AO = \frac{\sqrt{226}}{8}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{226}}{8}$ .

**Вопрос.** Как доказать, что около любой треугольной пирамиды можно описать сферу?

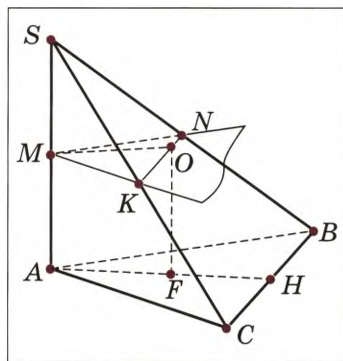


Рис. 8

### Контрольные вопросы ■

1. Какая сфера называется описанной около многогранника?
2. Какой многогранник называется вписанным в сферу?
3. Каким свойством обладает сечение описанной сферы плоскостью грани многогранника?
4. Где расположен центр сферы, описанной около правильной пирамиды?
5. Каким свойством обладает любой параллелепипед, вписанный в сферу?
6. Как найти центр сферы, описанной около параллелепипеда?
7. Каким свойством обладают точки плоскости, перпендикулярной отрезку и проходящей через его середину?

### Задачи и упражнения ■

1. Докажите, что если около призмы можно описать сферу, то эта призма — прямая. Верно ли, что сферу можно описать около любой прямой призмы?
2. Радиус сферы равен  $R$ . Найдите:
  - а) длину ребра вписанного в сферу куба;
  - б) длину ребра вписанного в сферу правильного тетраэдра.

3. Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 9, а высота равна 5. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4. В основании четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 2. Одно из боковых рёбер равно 3 и перпендикулярно к основанию. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

5. Сторона основания правильной треугольной пирамиды в два раза меньше радиуса описанной около неё сферы. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

6. Центр шара радиуса  $R$  лежит в плоскости одной из граней куба, а четыре вершины куба, не принадлежащие этой грани, лежат на поверхности шара. Найдите длину ребра куба.

7.\* В пирамиде  $ABCD$  рёбра  $AB$  и  $CD$  имеют длину 4, остальные рёбра имеют длину  $2\sqrt{11}$ . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды  $ABCD$ .

8.\*\* В основании пирамиды  $SABC$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной 1, ребро  $SA$  перпендикулярно основанию и  $SA = 3$ . Найдите радиус сферы, проходящей через вершины  $A, B, C$  и через середину ребра  $SC$ .

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен радиус сферы, описанной вокруг прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого, выходящие из одной вершины, имеют длины 2, 4 и 6?

- 1)  $\sqrt{13}$       2)  $\sqrt{14}$       3)  $\sqrt{15}$       4) 4

1.2.\* Вокруг правильных треугольных пирамид с ребром основания, равным  $a$ , описываются сферы. Какое наименьшее значение может иметь радиус сферы?

- 1)  $a$       2)  $a\frac{\sqrt{3}}{2}$       3)  $a\frac{\sqrt{3}}{3}$       4)  $a\frac{\sqrt{3}}{6}$

1.3. В основании правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной  $2a$ . Известно, что центр описанной вокруг пирамиды сферы находится на основании пирамиды. Чему равна длина бокового ребра пирамиды?

- 1)  $a\sqrt{2}$       2)  $a\sqrt{3}$       3)  $2a$       4)  $a\sqrt{5}$

1.4. Чему равен радиус сферы, описанной вокруг правильной треугольной призмы, все рёбра которой равны 1?

- 1)  $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$       2)  $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}$       3)  $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$       4)  $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}$



**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.\*** В правильной треугольной пирамиде на высоте  $SH$ , проведённой к основанию, выбрана точка  $F$ . В каком из перечисленных случаев точка  $F$  не может быть центром описанной сферы, если известно, что:

- 1)  $SF : FH = 3 : 1$       2)  $SF : FH = 2 : 1$   
 3)  $SF : FH = 1 : 1$       4)  $SF : FH = 1 : 2$

**2.2.** Каким не может быть основание четырёхугольной пирамиды, вписанной в сферу?

- 1) прямоугольником  
 2) ромбом с углом  $60^\circ$   
 3) трапецией с прямым углом  
 4) четырёхугольником  $ABCD$ , у которого  $\angle A = \angle C = 90^\circ$

**2.3.\*** Вокруг четырёхугольной призмы всегда можно описать сферу, если:

- 1) боковые грани призмы — прямоугольники  
 2) основания призмы — квадраты  
 3) призма прямая  
 4) призма правильная

**2.4.** На сколько частей могут разделить пространство сферы и плоскость?

- 1) на две    2) на три    3) на четыре    4) на пять

### § 3. СФЕРЫ, КАСАЮЩИЕСЯ ПЛОСКОСТЕЙ ■

**3.1. Сфера, вписанная в многогранник.** Сфера называется *вписанной в многогранник*, если сфера касается всех плоскостей граней и каждая точка касания принадлежит соответствующей грани. В этом случае многогранник называют *описанным* около данной сферы. Шар, границей которого является сфера, вписанная в многогранник, также называется *вписанным* в этот многогранник.

Пусть сфера с центром  $O$  вписана в многогранник. Из свойства плоскости, касающейся сферы, следует, что если соединить центр  $O$  с точкой  $M$  касания сферы с гранью, то получим перпендикуляр к плоскости грани. При этом длина отрезка  $OM$  равна радиусу сферы (рис. 1).

**Вопрос.** Где находятся центры сфер, касающихся данной плоскости в данной точке?

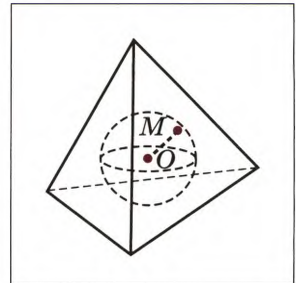


Рис. 1

**3.2. Сфера, вписанная в пирамиду.** В произвольную правильную пирамиду можно вписать сферу. Центр вписанной сферы лежит на высоте такой пирамиды.

**Пример 1.** В основании правильной треугольной пирамиды  $SABC$  лежит равносторонний треугольник со стороной  $2\sqrt{3}$ , высота  $SH$  пирамиды равна 2. Найдём радиус сферы, вписанной в пирамиду.

Поставим на высоте  $SH$  точку  $O$  — центр сферы, вписанной в пирамиду. Проведём перпендикуляр, например к грани  $SBC$ . Для этого построим  $AM \perp BC$  и проведём  $OP \perp SM$  (рис. 2). Плоскость  $AMS$  перпендикулярна плоскости  $SBC$ , поэтому отрезок  $OP$  — перпендикуляр к грани  $SBC$ . Пусть  $OP=r$ . Вычислим  $r$  из условия  $S_{\Delta SOM} + S_{\Delta OMH} = S_{\Delta SMH}$ . В результате получаем

$$\frac{1}{2} \cdot (r \cdot \sqrt{5} + r \cdot 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1, \text{ откуда } r = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Теперь заметим, что если аналогично провести из точки  $O$  перпендикуляры к граням  $SAB$  и  $SAC$ , то вычисления будут в точности такими же, как и при проведении перпендикуляра к грани  $SBC$ . Поэтому сфера с центром  $O$  и радиусом  $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  касается всех граней пирамиды.

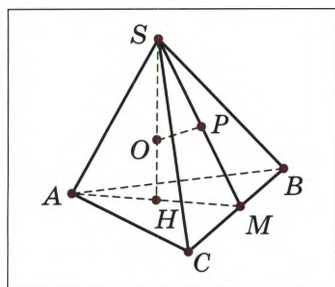


Рис. 2

Ответ:  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

**Вопрос.** Как доказать, что плоскость  $SAM$  перпендикулярна плоскости  $SBC$ ?

**3.3. Центр сферы, касающейся граней двугранного угла.** Пусть сфера с центром  $O$  касается граней  $\alpha$  и  $\beta$  двугранного угла с ребром  $m$  в точках  $M$  и  $K$  (рис. 3). Тогда  $OM \perp \alpha$ ,  $OK \perp \beta$ , откуда следует, что  $OM \perp m$ ,  $OK \perp m$ ,  $OMK \perp m$ . Поэтому плоскость  $OMK$  пересекает грани по лучам  $PK$  и  $PM$ , образующим линейный угол данного двугранного угла. При этом  $OM \perp PM$ ,  $OK \perp PK$ . Поскольку  $OM = OK$ , то точка  $O$  в плоскости  $OPMK$  равноудалена от сторон линейного угла  $MPK$ , и центр  $O$  сферы лежит на биссектрисе линейного угла. Отсюда следует, что центр  $O$  сферы ле-

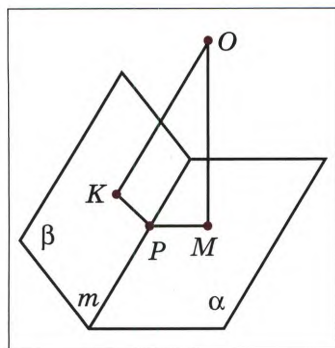


Рис. 3



жит на полуплоскости, которая делит данный двугранный угол на два равных двугранных угла. Иногда эту полуплоскость называют биссектором двугранного угла.

Центр сферы, касающейся граней двугранного угла, лежит на биссекторе этого двугранного угла.

**Вопрос.** Пусть сфера касается граней данного двугранного угла и известна одна из точек касания. Как в этом случае построить центр сферы?

### 3.4.\* Решение задач о касательных сферах с помощью биссекторов.

**Пример 2.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 10 сфера касается граней  $ABCD$ ,  $BC B_1 C_1$ ,  $DC D_1 C_1$  и проходит через точку  $M$  ребра  $A_1 B_1$  такую, что  $A_1 M = 2$ . Найдём радиус этой сферы.

Касаясь указанных граней, сфера касается и граней двугранного угла куба с ребром  $BC$ . Поскольку  $DC \perp BC$  и  $CC_1 \perp BC$ , то угол  $DCC_1$  — линейный угол. Биссектриса угла  $DCC_1$  проходит по диагонали  $CD_1$ . Поэтому биссектором двугранного угла куба с ребром  $BC$  является полуплоскость  $A_1 BCD_1$  (рис. 4).

Аналогично, так как сфера касается граней двугранного угла куба с ребром  $CD$ , центр сферы лежит на биссекторе  $A_1 B_1 CD$  (рис. 5.). Следовательно, центр сферы лежит на пересечении указанных биссекторов — на луче  $CA_1$ . После этого можно изобразить радиусы сферы, проведённые в точки касания с гранями  $ABCD$  и  $BCC_1 B_1$ . Для этого нужно провести  $ON \perp AC$  и  $OL \perp CB_1$  (рис. 6).

Для завершения решения задачи рассмотрим плоскость  $A_1 B_1 CD$ , которая содержит центр сферы, радиус, проведённый в точку касания с гранью  $BB_1 C_1 C$  и в точку  $M$ , через которую по условию проходит сфера

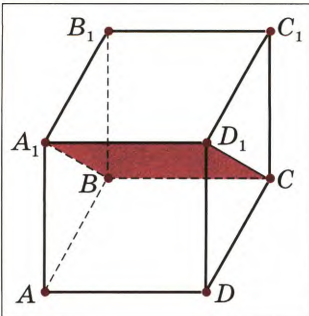


Рис. 4

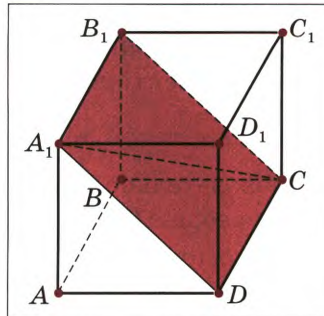


Рис. 5

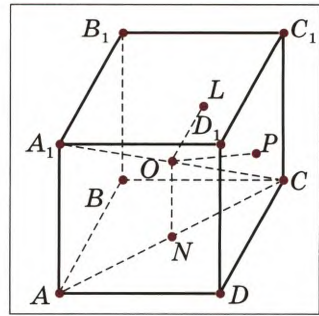


Рис. 6



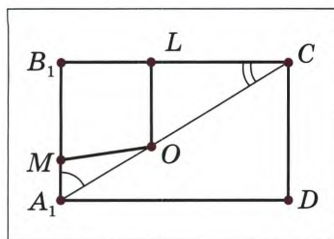


Рис. 7

(рис. 7). Имеем  $A_1B_1 = 10$ ,  $B_1C = 10\sqrt{2}$ ,  $A_1C = 10\sqrt{3}$ ,  
 $\sin \varphi = \sin \angle B_1CA_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos \alpha = \cos \angle B_1A_1C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Пусть  $OL = r$ , причём  $r < 10$ . Тогда

$$OC = \frac{OL}{\sin \varphi} = r\sqrt{3}, \quad A_1O = (10 - r)\sqrt{3}, \quad OM^2 = A_1M^2 +$$
$$+ A_1O^2 - 2A_1M \cdot A_1O \cos \alpha = 4 + 3 \cdot (10 - r)^2 -$$
$$- 4 \cdot (10 - r).$$

По условию  $OM = r$ , поэтому приходим к уравнению  $r^2 = 4 + 300 - 60r + 3r^2 - 40 + 4r$ ,  $r^2 - 28r + 132 = 0$ . Корень  $r_1 = 14 + 8 = 22$  не удовлетворяет условию  $r < 10$ . Второй корень  $r_2 = 14 - 8 = 6$  является искомым значением радиуса.

Ответ: 6.

**Вопрос.** Как доказать, что биссекторы двугранных углов любого трёхгранного угла имеют общий луч?

**3.5.\*\* Другой пример применения биссекторов.** В этом пункте разберём следующую задачу.

**Пример 3.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  в основании лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 2, боковые грани пирамиды образуют с основанием углы в  $60^\circ$ . Найдём радиус сферы, касающейся граней  $ABCD$ ,  $SAB$ ,  $SAD$  и плоскости  $BSD$ .

Построим биссектор двугранного угла пирамиды при ребре  $AD$ . Для этого проведём  $SM \perp AD$ ,  $MN \perp AD$  и получим линейные углы двугранных углов пирамиды при рёбрах  $AD$  и  $BC$  (рис. 8). По условию  $\angle SMN = \angle SNM = 60^\circ$ . Поэтому треугольник  $SMN$  равносторонний, его стороны равны 2, а значит, биссектриса угла  $SMN$  пересекает высоту  $SH$  в такой точке  $F$ , что  $FH = \frac{1}{3}SH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

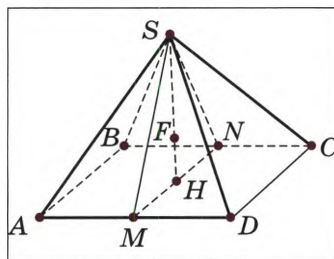


Рис. 8

Следовательно, биссектор двугранного угла при ребре  $AD$  пересекает высоту  $SH$  в точке  $F$ . Аналогично доказывается, что биссектор двугранного угла при ребре  $AB$  пересекает высоту  $SH$  в той же точке  $F$ .

После этого построим биссектор угла между плоскостями  $ABCD$  и  $SBD$ . Поскольку  $SH \perp BD$ ,  $AH \perp BD$ , то угол  $AHS$  — линейный. Проведя биссектрису  $HL$  угла  $AHS$ , получаем биссектор рассматриваемого угла — полуплоскость  $BLD$  (рис. 9).

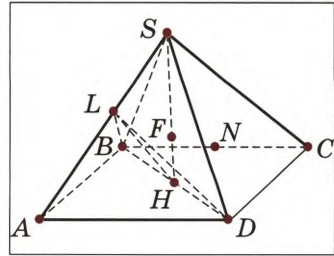


Рис. 9

Наконец заметим, что полуплоскость  $ASC$  является биссектором двугранного угла пирамиды при ребре  $SA$ . Поэтому точка  $O$  пересечения прямых  $HL$  и  $AF$  в плоскости  $ASC$  совпадает с центром искомого шара (рис. 10).

Обозначим  $OP$ , равное  $PH$ , через  $x$ . Поскольку  $AH = \sqrt{2}$ , то

$$\frac{FP}{OP} = \frac{FH}{AH}, \quad \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - x}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{6}}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{6}}.$

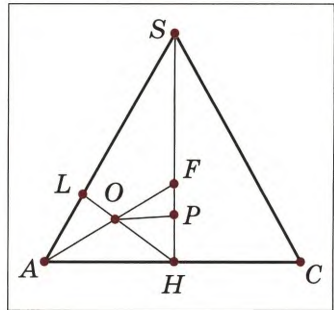


Рис. 10

**Вопрос.** Чему равен радиус сферы, вписанной в пирамиду  $SABD$ ?

### Контрольные вопросы ■

1. Сформулируйте определение плоскости, касающейся сферы.
2. Сформулируйте необходимое и достаточное условие касания сферы с плоскостью.
3. Как построить точку касания сферы с заданной плоскостью, если известен центр сферы?
4. Какая сфера называется вписанной в многогранник?
5. В каком случае многогранник называют описанным около сферы?
6. Где находится центр сферы, вписанной в правильную пирамиду?
7. Что называется биссектором двугранного угла?
8. Каким свойством обладает центр сферы, касающейся граней двугранного угла?

### Задачи и упражнения ■

1. Найдите радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр с ребром 4 см.

2. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, все рёбра которой равны 6.

3. В правильную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  с основанием  $ABC$  можно вписать сферу. Найдите боковое ребро призмы, если ребро основания равно 6.

4.\*\* Докажите, что в каждую правильную пирамиду можно вписать сферу.

5.\* Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1. Одна сфера радиуса 1 имеет центр в точке  $B$ , вторая сфера касается первой и касается граней трёхгранного угла с вершиной  $C_1$ . Найдите радиус второй сферы.

6.\* Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Одна сфера имеет диаметром ребро  $AD$ , а вторая сфера касается первой сферы и касается граней трёхгранного угла с вершиной  $A_1$ . Найдите радиус второй сферы.

7.\* В правильный тетраэдр  $ABCD$  с ребром  $a$  вписан шар. Найдите радиус шара, вписанного в трёхгранный угол с вершиной  $A$  и касающегося первого шара.

8.\*\* В основании правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат со стороной 1, боковые грани образуют угол в  $60^\circ$  с плоскостью основания. В трёхгранные углы с вершинами  $A$  и  $D$  вписаны сферы радиусов  $\frac{1}{4\sqrt{3}}$  и  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . Найдите расстояние между центрами этих сфер.

9.\*\* Пирамиды  $S_1ABCD$  и  $S_2ABCD$  имеют общее основание  $ABCD$ , представляющее собой ромб со стороной  $a$  и острым углом, равным  $60^\circ$ . Вершины  $S_1$  и  $S_2$  лежат по разные стороны от плоскости  $ABCD$ , причём боковые грани одной из пирамид образуют угол в  $30^\circ$  с основанием, другой — угол в  $60^\circ$ . Найдите радиус шара, лежащего внутри многогранника  $S_1ABCD S_2$  и касающегося всех его граней.

10.\* Два касающихся шара с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются граней двугранного угла в  $60^\circ$  с ребром  $MN$ . Прямая  $O_1 O_2$  образует с прямой  $MN$  угол в  $45^\circ$ . Найдите радиус меньшего шара, если радиус большего равен 7.

11.\* Два касающихся шара радиусов 2 и 3 с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются граней двугранного угла с ребром  $MN$ . Определите величину двугранного угла, если прямая  $O_1 O_2$  образует с прямой  $MN$  угол в  $45^\circ$ .



## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Шар радиуса  $R$  касается граней двугранного угла величиной  $120^\circ$ . Чему равно расстояние от центра шара до ребра двугранного угла?

- 1)  $R\frac{\sqrt{3}}{2}$       2)  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$       3)  $R\sqrt{3}$       4)  $\frac{3}{2}R$

**1.2.** Сферу можно вписать в каждую:

- 1) правильную треугольную пирамиду  
2) треугольную призму  
3) правильную треугольную призму  
4) четырёхугольную пирамиду

**1.3.** Сколько касательных плоскостей к сфере можно провести через заданную прямую, которая не пересекается со сферой?

- 1) ни одной      2) одну      3) две      4) бесконечно много

**1.4.** Чему равна главная диагональ куба, вписанного в сферу радиуса  $R$ ?

- 1)  $R$       2)  $R\sqrt{2}$       3)  $R\sqrt{3}$       4)  $2R$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из указанных значений может иметь площадь сечения шара радиуса 3 плоскостью?

- 1) 10      2) 20      3) 30      4) 40

**2.2.\*** Сфера с центром  $O$  касается в точках  $E$ ,  $F$  и  $H$  боковых граней треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  с основанием  $ABC$  и боковыми рёбрами  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Какими свойствами обладает плоскость  $EFH$ ?

- 1) точка  $O$  принадлежит плоскости  $EFH$   
2) плоскость  $EFH$  перпендикулярна плоскости  $AA_1BB_1$   
3) плоскость  $EFH$  перпендикулярна прямой  $CC_1$   
4) каждая прямая плоскости  $AA_1BB_1$  перпендикулярна плоскости  $EFH$

**2.3.** Два шара радиусов  $R$  и  $r$  касаются друг друга и касаются одной плоскости. Чему равно расстояние между точками касания этих шаров с плоскостью?

- 1)  $2\sqrt{Rr}$       2)  $\sqrt{2Rr}$       3)  $\frac{1}{2}\sqrt{Rr}$       4)  $\sqrt{2Rr}$

**2.4.** Какие из указанных значений не может принимать радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду с ребром основания, равным 6?

- 1)  $\sqrt{2}$       2)  $\sqrt{3}$       3) 2      4)  $\sqrt{5}$

## ■ § 4. СФЕРЫ, КАСАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫХ

**4.1. Сфера, касающаяся прямой.** Прямая  $a$  называется *касательной* к сфере  $S$ , если она лежит в плоскости  $\alpha$ , касающейся сферы, и проходит через точку  $M$  касания сферы с плоскостью  $\alpha$  (рис. 1). В этом случае прямая  $a$  имеет со сферой  $S$  единственную общую точку, которая называется *точкой касания* прямой со сферой.

Отрезок  $OM$ , соединяющий центр сферы  $S$  с точкой касания плоскости  $\alpha$  со сферой, перпендикулярен прямой  $a$ . Отсюда сразу следует, что  $OM \perp \alpha$ , причём длина отрезка  $OM$  равна радиусу сферы.

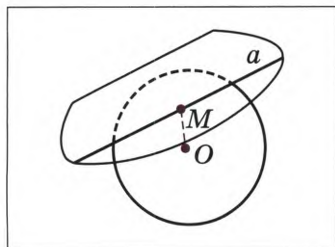


Рис. 1

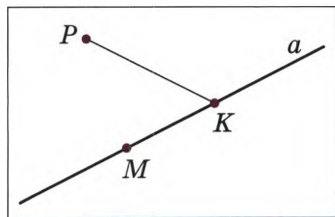


Рис. 2

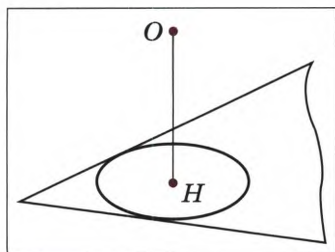


Рис. 3

**Вопрос.** Как доказать, что прямая, имеющая со сферой единственную общую точку, является касательной к этой сфере?

**4.2. Свойство радиуса, проведённого в точку касания сферы и прямой.** Рассмотрим в пространстве прямую  $a$  и не лежащую на ней точку  $P$ . Проведём  $PK \perp a$ , где  $K$  — основание перпендикуляра (рис. 2). Для любой точки  $M$  прямой  $a$ , отличной от точки  $K$ , имеет место неравенство  $PM > PK$ . Отсюда следует, что сфера радиуса  $PK$  с центром  $P$  имеет с прямой  $a$  единственную общую точку и касается прямой  $a$ .

**Вопрос.** Как в пространстве провести из точки  $P$  перпендикуляр к прямой  $a$ ?

**4.3.\* Центр сферы, касающейся сторон плоского угла.** Пусть сфера  $S$  с центром  $O$  касается сторон угла  $BAC$ . Опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $OH$  на плоскость  $BAC$  и рассмотрим сечение сферы плоскостью  $BAC$ . Этим сечением является окружность с центром  $H$ , касающаяся сторон угла  $BAC$  (рис. 3). Отсюда следует, что центр  $O$  сферы находится на перпендикуляре к плоскости  $BAC$ , проходящем через точку биссектрисы угла  $BAC$ . Каждый такой перпендикуляр содержится в плоскости  $\beta$ , проходящей через биссектрису



угла  $BAC$  перпендикулярно плоскости  $BAC$  (рис. 4).

Если сфера касается сторон угла, то центр сферы лежит в плоскости, проходящей через биссектрису угла перпендикулярно плоскости угла.

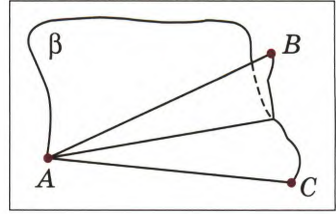


Рис. 4

**Вопрос.** Где находится центр сферы, касающейся двух параллельных прямых?

**4.4.\* Свойство отрезков касательных.** Справедливо следующее утверждение.

Отрезки касательных, проведённых к сфере из одной точки, равны между собой.

**Пример.** В правильной пирамиде  $SABC$  рёбра основания  $ABC$  равны  $a$ , боковые рёбра равны  $m$ . Найдём радиус сферы, касающейся всех рёбер пирамиды.

При пересечении указанной сферы плоскостью  $ABC$  получится окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , поэтому центр  $O$  сферы лежит на прямой  $SH$ , перпендикулярной к плоскости  $ABC$ . Из равенства треугольников  $ASH$ ,  $BSH$ ,  $CSH$  следует, что каждая точка высоты  $SH$  равноудалена от лучей  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ . Проведём  $OK \perp SA$  и  $OM \perp AC$  (рис. 5). При условии  $OK = OM$  точка  $O$  будет центром сферы, касающейся всех рёбер данной пирамиды.

Отрезки  $AM$  и  $AK$  являются отрезками касательных, проведённых к сфере из одной точки. Поэтому  $AK = AM = \frac{a}{2}$ . Отсюда  $SK = m - \frac{a}{2}$ . Далее

$$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SH = \sqrt{m^2 - \frac{a^2}{3}}, \operatorname{tg} \angle ASH = \frac{a}{\sqrt{3m^2 - a^2}}.$$

Тогда

$$OK = SK \cdot \operatorname{tg} \angle ASH = \frac{a \cdot (2m - a)}{2\sqrt{3m^2 - a^2}}.$$

Ответ:  $\frac{a \cdot (2m - a)}{2\sqrt{3m^2 - a^2}}.$

**Вопрос.** Как доказать, что для правильной треугольной пирамиды с ребром основания длины  $a$  и боковым ребром длины  $m$  выполняется неравенство  $3m^2 > a^2$ ?

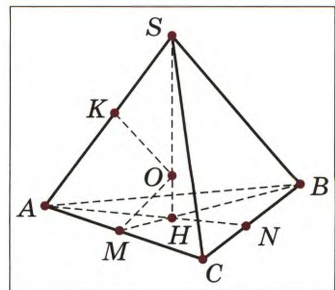


Рис. 5



## ■ Контрольные вопросы

1. Как определяется прямая, касающаяся сферы?
2. Каким свойством обладает точка касания сферы с прямой?
- 3.\*\* Каким свойством обладает центр сферы, касающейся сторон заданного угла?
- 4.\*\* Каким свойством обладает центр сферы, касающейся двух заданных параллельных прямых?
- 5.\*\* Сформулируйте свойство отрезков касательных, проведённых к сфере из заданной точки.

## ■ Задачи и упражнения

1. Найдите радиус сферы, касающейся всех рёбер правильного тетраэдра с ребром 6.
- 2.\* Найдите радиус сферы, касающейся боковых рёбер правильной четырёхугольной пирамиды и касающейся плоскости основания, если известно, что рёбра основания равны  $2\sqrt{2}$ , а боковые рёбра равны 4.
- 3.\*\* Каким условиям должны удовлетворять рёбра треугольной пирамиды, чтобы существовала сфера, касающаяся всех её рёбер?
- 4.\*\* Длина ребра правильного тетраэдра  $SABC$  равна 1. Сфера касается рёбер  $AS$ ,  $AC$ ,  $AB$  и проходит через середину ребра  $BC$ . Найдите радиус сферы, если известно, что её центр лежит внутри тетраэдра.
- 5.\*\* В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AB = a$ ,  $AC = 2a$ . Высота призмы равна  $\frac{a}{2}$ . Найдите радиус сферы, касающейся ребра  $B_1C_1$  и граней  $AA_1B_1B$ ,  $AA_1C_1C$ ,  $ABC$ .
- 6.\*\* Основанием пирамиды  $SABC$  является равнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $AC = AB = a$ ,  $\angle BAC = 120^\circ$ . Ребро  $SA$  перпендикулярно основанию и равно  $a$ . Найдите радиус сферы, касающейся основания и боковых рёбер пирамиды.
- 7.\*\* В основании треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной, равной  $a$ . Боковые рёбра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  перпендикулярны прямой  $BC$  и образуют угол в  $60^\circ$  с плоскостью основания. Известно, что существует сфера, которая касается всех боковых рёбер и рёбер  $A_1C_1$ ,  $A_1B_1$ ,  $BC$ . Найдите высоту призмы.
- 8.\*\* В основании пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 1$ ,  $AD = \sqrt{6}$ . Ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости осно-

вания, его длина равна 1. Сфера, центр которой находится вне пирамиды, касается отрезков  $SB$ ,  $SC$  и плоскостей  $SAD$  и  $ABCD$ . Найдите радиус сферы.

9.\*\* В тетраэдре  $ABCD$  рёбра  $AC$ ,  $BC$ ,  $DC$  попарно перпендикулярны. Точка  $M$  лежит в плоскости  $ABC$  и одинаково удалена от рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ . Точка  $N$  лежит в плоскости  $BCD$  и одинаково удалена от тех же рёбер. Найдите длину отрезка  $MN$ , если  $BC = CD = \sqrt{3}$ ,  $AC = 3$ .

10.\*\* В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  с основанием  $ABC$  длины всех рёбер равны 1. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $A_1C_1$  и  $CC_1$  соответственно. Найдите минимально возможный радиус сферы, касающейся плоскостей граней  $AA_1B_1B$ ,  $ABC$  и прямой  $MN$ .

### Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Из точки  $A$  проведена прямая, касающаяся сферы радиуса 5 в точке  $B$ . Известно, что  $AB = 12$ . Чему равно наименьшее из расстояний от точки  $A$  до точек этой сферы?

- 1) 7                      2) 8                      3) 9                      4) 10

1.2.\* Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равны 1. Чему равен радиус наименьшей сферы, которая может одновременно касаться прямых  $AB$  и  $C_1B_1$ ?

- 1)  $\frac{1}{2}$                       2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$                       3)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$                       4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.3. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  рёбра основания  $ABC$  равны 4, боковые рёбра равны 7. Проводится сфера, которая касается всех рёбер пирамиды. Пусть  $M$  — точка касания этой сферы с ребром  $SA$ . Чему равна длина отрезка  $SM$ ?

- 1) 3                      2) 4                      3) 5                      4) 6

1.4.\*\* Если существует сфера, касающаяся рёбер  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$  треугольной пирамиды, то обязательно выполняется равенство:

- 1)  $AB + BC = AD + DC$                       2)  $AC + BD = AD + BC$   
3)  $AB + CD = BC + AD$                       4)  $AC + BD = AB + CD$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.\*\* В пирамиде  $ABCD$  рёбра  $AB$ ,  $AC$ ,  $DB$ ,  $DC$  равны 8. В каких случаях из указанных существует сфера, касающаяся всех рёбер пирамиды?

- 1)  $BC = 6$ ,  $AD = 9$                       2)  $BC = 7$ ,  $AD = 9$   
3)  $BC = 5$ ,  $AD = 10$                       4)  $BC = 5$ ,  $AD = 11$



**2.2.\*** Сфера с центром  $O$  касается в точках  $A$  и  $B$  параллельных прямых  $m$  и  $n$ , лежащих в плоскости  $\alpha$ , и центр сферы не лежит в плоскости  $\alpha$ . Какие из утверждений являются верными?

- 1) прямые  $AB$  и  $m$  перпендикулярны
- 2) плоскость  $OAB$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$
- 3) отрезок, соединяющий середину  $AB$  с центром  $O$ , перпендикулярен плоскости  $\alpha$
- 4) отрезок  $OA$  перпендикулярен плоскости  $\alpha$

**2.3.\*** Если для треугольной призмы существует сфера, которая касается всех рёбер этой призмы, то:

- 1) основания призмы — правильные треугольники
- 2) в призму можно вписать сферу
- 3) боковые грани призмы — квадраты
- 4) вокруг призмы можно описать сферу

**2.4.\*** Точка  $A$  находится на расстоянии 7 от центра сферы радиуса 4. На каких из указанных расстояний от точки  $A$  не могут находиться точки сферы?

- 1) 2
- 2) 6
- 3) 10
- 4) 14

## ■ Мини-исследования к главе 2

### Мини-исследование 4

Пусть имеется идеальный деревянный шар, радиус которого от 10 см до 20 см. Кроме этого, имеются циркуль, линейка без делений и лист бумаги.

1. Найти, как можно построить радиус проведённой на шаре окружности.

2. Установить, как можно построить радиус данного шара.

### Мини-исследование 5

Описанная сфера существует не для всякого многогранника. Предлагается исследовать существование описанной сферы для некоторых видов многогранников.

1. Выяснить, в каких случаях вокруг призмы можно описать сферу.

2. Рассмотреть многогранники с пятью гранями, у которых две грани — треугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а оставшиеся три грани — четырёхугольники, и также выяснить, при каких условиях вокруг такого многогранника можно описать сферу.



**Мини-исследование 6**

1. Пусть прямая  $a$  имеет со сферой  $S$  единственную общую точку. Как доказать, что прямая  $a$  является касательной к сфере  $S$ ?

2. Пусть известно, что сфера касается двух параллельных прямых. Где в этом случае может находиться центр сферы?

3. Пусть прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$  и известна ортогональная проекция точки  $P$  на плоскость  $\alpha$ . Как в этом случае провести из точки  $P$  перпендикуляр к прямой  $a$ ?

**Мини-исследование 7**

Пусть в пространстве выбраны четыре точки  $A, B, C, D$ , не лежащие в одной плоскости. Соединяя эти точки отрезками  $AB, BC, CD, AD$ , получаем пространственную фигуру, которую часто называют пространственным четырёхугольником.

Предлагается исследовать касание сферы со сторонами пространственного четырёхугольника.

1. Показать, что если существует сфера, касающаяся всех сторон пространственного четырёхугольника  $ABCD$ , то:

а) выполняется равенство  $AB + CD = BC + AD$ ;

б) точки касания сторон четырёхугольника со сферой лежат в одной плоскости.

2. На примерах проверить, что если существует сфера, касающаяся сторон пространственного четырёхугольника, то существует бесконечно много различных сфер, также касающихся всех сторон четырёхугольника.

# Глава 3

## ПРОИЗВОДНАЯ

В этой главе мы напомним определение касательных к кривым, обобщим правила вычисления углового коэффициента касательной и нахождения мгновенной скорости при прямолинейном движении и рассмотрим понятие производной функции. Затем установим правила, с помощью которых можно вычислять производные от функций и находить уравнения касательных к кривым.

### ■ § 1. ПРОИЗВОДНОЕ ЧИСЛО, ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

**1.1. Касательная к графику непрерывной функции.** Если точка  $x_0$  принадлежит области определения функции  $y = f(x)$ , то точка  $A(x_0; y_0)$ , где  $y_0 = f(x_0)$ , является точкой графика этой функции.

**Теорема.** Пусть на плоскости кривая  $K$  является графиком непрерывной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Тогда для любой точки  $A(x_0; y_0)$  кривой  $K$ , где  $x_0 \in (a; b)$ ,  $y_0 = f(x_0)$ , справедливы свойства:

1) если  $y - y_0 = k(x - x_0)$  — уравнение касательной к графику  $K$  в точке  $A(x_0; y_0)$ , где  $k$  — угловой коэффициент этой прямой, то в точке  $x_0$  существует предел функции  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , равный  $k$ ;

2) если в точке  $x_0$  существует предел функции  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , равный  $k$ , то прямая с уравнением  $y - y_0 = k(x - x_0)$ , является касательной к графику  $K$  непрерывной функции  $y = f(x)$  в точке  $A(x_0; y_0)$ .

Утверждение теоремы можно сформулировать короче.

Для функции  $f(x)$ , непрерывной на промежутке  $(a; b)$ , и для любого числа  $x_0$  из промежутка  $(a; b)$ :

1) если уравнение  $y - f(x_0) = k(x - x_0)$  является уравнением касательной к графику функции в точке  $A(x_0; f(x_0))$ , то  $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ;

2) если  $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , то уравнение  $y - f(x_0) = k(x - x_0)$  является уравнением касательной к графику функции в точке  $A(x_0; f(x_0))$ .

**Пример 1.** Найдём уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{1}{x}$  в точке  $A(1; 1)$ .

Поскольку  $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = -1$ , то уравнение касательной к графику функции  $y = \frac{1}{x}$  в точке  $(1; 1)$  имеет вид  $y - 1 = -(x - 1)$  или  $y = -x + 2$ .

**Вопрос.** Какое уравнение имеет касательная к параболе  $y = x^2$ , проходящая через точку  $(-2; 4)$ ?

**1.2.\*\* Угловой коэффициент касательной к графику непрерывной функции.** Докажем свойство 1) из теоремы пункта 1.1 в случае, когда  $k > 0$ . Через  $l_p$  будем обозначать прямую с угловым коэффициентом  $p$ , проходящую через точку  $A$ .

Для произвольного положительного числа  $\varepsilon_0$  выберем такое положительное число  $\varepsilon$ , что  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  и  $k - \varepsilon > 0$ . Проведём через точку  $A$  прямую  $l_{k-\varepsilon}$  с угловым коэффициентом  $k - \varepsilon$  и уравнением  $y - y_0 = (k - \varepsilon)(x - x_0)$ , а также прямую  $l_{k+\varepsilon}$  с угловым коэффициентом  $k + \varepsilon$  и уравнением  $y - y_0 = (k + \varepsilon)(x - x_0)$ . Пусть прямую  $k$  содержит пара  $P_\varepsilon$  вертикальных углов с вершиной в точке  $A$ , образованная этими прямыми. Тогда для любого числа  $m$  из промежутка  $(k - \varepsilon; k + \varepsilon)$  прямая  $l_m$  с уравнением  $y - y_0 = m(x - x_0)$  содержится в той же паре  $P_\varepsilon$  вертикальных углов.

Из монотонности функции  $y = \operatorname{tg} x$  на промежутке  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  следует, что угловой коэффициент  $m$  любой прямой  $l_m$ , отличной от прямых  $l_{k-\varepsilon}$  и  $l_{k+\varepsilon}$  и содержащейся в паре  $P_\varepsilon$  вертикальных углов, принадлежит промежутку  $(k - \varepsilon; k + \varepsilon)$ .

Из того, что  $l_k$  — касательная к кривой  $K$ , следует, что для пары  $P_\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $r$ , что всякая точка  $B$  кривой  $K$ , лежащая внутри окружности  $O_r$  с центром в точке  $A$  и радиусом  $r$ , принадлежит паре  $P_\varepsilon$  вертикальных углов (рис. 1), при этом паре  $P_\varepsilon$  также принадлежит соответствующая прямая  $AB$ .

Пусть теперь прямая  $l_{k-\varepsilon}$  с уравнением  $y - y_0 = (k - \varepsilon)(x - x_0)$  пересекает окружность  $O_r$  в точках  $C_1(x_1; y_1)$  и  $C_2(x_2; y_2)$ , а прямая  $l_{k+\varepsilon}$  с уравнением  $y - y_0 = (k + \varepsilon)(x - x_0)$  пе-

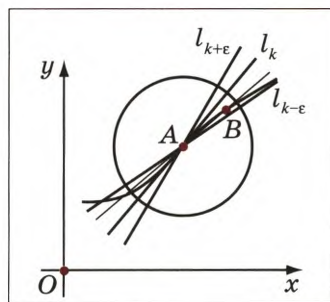


Рис. 1



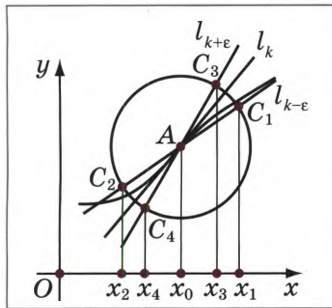


Рис. 2

ресекает указанную окружность в точках  $C_3(x_3; y_3)$  и  $C_4(x_4; y_4)$  (рис. 2). Заметим, что отрезки  $C_1C_2$  и  $C_3C_4$  являются диаметрами окружности  $O_r$ , поэтому из теоремы Фалеса следует, что  $|x_1 - x_0| = |x_2 - x_0|$  и  $|x_3 - x_0| = |x_4 - x_0|$ . Обозначив через  $\delta$  наименьшее из чисел  $|x_1 - x_0|$ ,  $|x_3 - x_0|$ ,  $|a - x_0|$ ,  $|b - x_0|$ , получим интервал  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , содержащий число  $x_0$  и целиком находящийся в интервале  $(a; b)$ .

Выберем произвольное, отличное от  $x_0$ , число  $x$  из промежутка  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ . Тогда для точки  $C(x; f(x))$  кривой  $K$  угловой коэффициент прямой  $AC$  равен

числу  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  и принадлежит промежутку  $(k - \varepsilon; k + \varepsilon)$ . Таким образом,

$$k - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < k + \varepsilon. \text{ Отсюда } \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k \right| < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

По определению предела функции  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  в точке  $x_0$  это означает, что  $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Похожие рассуждения можно провести в случаях  $k < 0$  и  $k = 0$ .

Свойство 2) из теоремы пункта 1.1 мы доказывать не будем.

**Вопрос.** Почему касательной к графику функции  $y = x^2$  в точке  $(-2; 4)$  является прямая с уравнением  $y = -4(x + 1)$ ?

**1.3. Средняя скорость и мгновенная скорость.** При равномерном движении с постоянной скоростью  $v_0$  функция  $S(t)$  расстояния до точки отсчёта имеет вид  $S(t) = v_0 \cdot t + S_0$ , где  $S_0$  — расстояние до точки отсчёта в начальный момент  $t = 0$ . Для вычисления скорости равномерного движения можно взять любой промежуток времени  $[t_1; t_2]$  и разделить путь, пройденный за это время, на величину промежутка времени:

$$v_0 = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Пусть теперь движение по прямолинейному участку пути является неравномерным. В этом случае *средняя скорость движения* на промежутке  $[t_1; t_2]$ , где  $t_1 < t_2$ , вычисляется как отношение

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Зафиксируем число  $t_0$  из  $[t_1; t_2]$ . В случае, когда существует предел  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ , его значение  $v_0$  называют *мгновенной скоростью* или *скоростью движения в момент времени  $t_0$* .

Заметим, что при равномерном прямолинейном движении мгновенная скорость совпадает со скоростью равномерного прямолинейного движения и со средней скоростью движения.

**Вопрос.** Какую мгновенную скорость будет иметь тело через 5 секунд после начала движения, если закон движения задаётся формулой  $S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ , где время  $t$  измеряется в секундах,  $S_0 = 8$  м,  $v_0 = -4$  м/с,  $a = 10$  м/с<sup>2</sup>?

**1.4. Производное число функции в точке.** Сформулируем теперь определение.

Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $D$  и в точке  $x_0$  этого промежутка существует предел функции  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . Тогда этот предел называют *производным числом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$* .

Производное число функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  обозначают через  $f'(x_0)$ .

Иногда разность  $x - x_0$  в знаменателе отношения  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  называют *приращением аргумента*, а разность  $f(x) - f(x_0)$  в числителе этого отношения — соответствующим *приращением функции  $f(x)$* .

Производное число функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

По традиции приращение аргумента часто обозначают символом  $\Delta x$ , а соответствующее приращение функции  $y = f(x)$  — символом  $\Delta y$  ( $\Delta$  — заглавная греческая буква «дельта»). Поэтому определение производного числа в точке  $a$  можно переписать следующим образом:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

**Пример 2.** Вычислим производное число функции  $f(x) = 2x + 1$  в точке 3.

Возьмём  $x \neq 3$ . Тогда  $x - 3$  будет приращением аргумента, а  $f(x) - f(3) = 2(x - 3)$  — соответствующим приращением функции. Поэтому

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 3)}{x - 3} = 2.$$

**Пример 3.** Вычислим производное число в точке 0 функции  $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ , определённой на промежутке  $[0; \infty)$ .

Если  $x \neq 0$ , то  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$ . Поэтому справедливы соотношения  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ , то есть  $f'(0) = 0$ .

Из теоремы пункта 1.1 следует, что для функции  $f(x)$ , непрерывной на некотором промежутке, для любого числа  $x_0$  из этого промежутка, в котором функция имеет производное число, уравнение  $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  является уравнением касательной к графику функции в точке  $A(x_0; f(x_0))$ .

**Вопрос.** Чему равно производное число функции  $f(x) = \sqrt{x}$  в точке  $x_0 = 4$ ?

**1.5.\* Об отсутствии производного числа функции.** Функция  $f(u) = |u|$  является непрерывной в каждой точке числовой оси, но в нуле не имеет производного числа.

Действительно, возьмём  $u \neq 0$ . Тогда  $u - 0 = u$  есть приращение аргумента,  $f(u) - f(0) = |u| - |0| = |u|$  есть соответствующее приращение функции. Поэтому  $g(u) = \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} = \frac{|u|}{u} = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0, \\ -1, & \text{если } u < 0. \end{cases}$

Поскольку получившаяся функция  $g(u)$  не имеет предела при  $u \rightarrow 0$ , то и функция  $f(u) = |u|$  не имеет производного числа в точке 0.

**Вопрос.** Имеет ли функция  $f(x) = x^2 - 2|x|$  производное число в точке  $a = -1$ ?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется производное число функции  $f(x)$  в данной точке  $a$ ?

2. Как определяется касательная к графику функции  $f(x) = x^2$  в заданной точке  $(a; f(a))$ ?

3. Какой геометрический смысл имеет производное число функции  $f(x)$  в точке  $a$ ?

4. Какой физический смысл имеет производное число функции  $f(x)$  в точке  $a$ ?

5.\* Выведите уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  при  $x = a$ , зная значение производного числа  $f'(a)$ .



## Задачи и упражнения ■

1. Вычислите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = x^2$  при  $x = 1$ .

2. В какой точке касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y = x$ ?

3. Вычислите приращение функции  $y = \frac{1}{x}$  в точке  $a$ , зная приращение аргумента  $\Delta x$ .

4.\* В какой точке приращение функции  $y = x^4$  положительно при любом приращении аргумента  $\Delta x$ ?

5. Точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 2t^2 - t + 1$ , где  $S$  — расстояние в сантиметрах,  $t$  — время в секундах. В какой момент времени  $t_0$  мгновенная скорость будет равна 3 см/с?

6. Вычислите производное число функции  $f(x)$  в указанной точке  $a$ :

а)  $f(x) = x^3 - x^2$ ,  $a = 0$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = 2$ ;

в)  $f(x) = x^n$ ,  $a = p$ , если  $n \in N$ .

7. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции  $f(x)$  в указанной точке  $A$ :

а)  $f(x) = x^4$ ,  $A(1; 1)$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{2x}$ ,  $A(2; 2)$ .

8.\*\* Найдите, под какими углами график функции  $f(x)$  пересекает ось абсцисс, то есть какие углы с осью абсцисс образуют касательные к графику, проведенные в точках пересечения графика с осью абсцисс:

а)  $f(x) = x^2 - 1$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ;

в)  $f(x) = x^3 + 1$ .

9. Найдите уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке с указанной абсциссой  $a$ :

а)  $f(x) = x^2$ ,  $a = -1$ ;

б)  $f(x) = \frac{3}{x}$ ,  $a = 1$ ;

в)  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $a = 1$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $a = 4$ .

10.\*\* Покажите, что если  $S(x)$  есть площадь круга радиуса  $x$ , то  $S'(x)$  равняется длине окружности радиуса  $x$ .

11.\*\* Пусть  $V(x)$  есть объём шара радиуса  $x$ . Покажите, что  $V'(x)$  равняется площади поверхности этого шара.

12.\*\* Пусть температура тела  $T(t)$  в зависимости от времени  $t$  убывает по закону  $T(t) = \frac{1000}{t+1}$ . Вычислите скорость охлаждения тела  $T'(t)$ .

13.\*\* Пусть  $m(t) = t^3 + 3t$  — количество вещества, образовавшегося при химической реакции за промежуток времени  $t$ . Вычислите скорость химической реакции  $m'(t_0)$  в момент времени  $t_0$ .

14.\*\* Зная закон движения точки по прямой  $S(t) = t - \sin t$ , найдите скорость этой точки в каждый момент времени.

### ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно производное число функции  $f(x) = x^3(x - 2)$  в точке 1?

- 1) -2                      2) -1                      3) 1                      4) 2

1.2. В какой точке приращение функции  $y = x^2$  положительно при любом приращении аргумента  $\Delta x$ ?

- 1) -3                      2) 0                      3) 1                      4) 2

1.3.\* Какая из указанных функций  $f(x)$  имеет касательную к графику в точке  $x = 0$ ?

- 1)  $f(x) = |x|$                       2)  $f(x) = \sqrt{|x|}$                       3)  $f(x) = |x| \cdot x$                       4)  $f(x) = -|x|$

1.4. Какая из прямых является касательной к графику функции  $y = x^2$  в точке  $a = 1$ ?

- 1)  $y = 2x - 1$                       2)  $y = 2x$                       3)  $y = 2x + 1$                       4)  $y = 2x + 2$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.\* Для каких функций для каждого значения  $x$  существует производное число этой функции?

- 1)  $f(x) = x \cdot |x|$                       2)  $f(x) = |x|$   
3)  $f(x) = (x - 1)|x|$                       4)  $f(x) = (x - 1)|x - 1|$

2.2. Какие из указанных прямых имеют угловой коэффициент, равный 2?

- 1)  $y = 3 + 2x$                       2)  $y = 4 - 2x$                       3)  $y = 5 + 2x$                       4)  $y = 6 - 2x$

2.3. Какие из производных чисел функции  $f(x) = x^3$  вычислены верно?

- 1)  $f'(-1) = 3$                       2)  $f'(-2) = -8$                       3)  $f'(-3) = 27$                       4)  $f'(-4) = 48$

2.4. Какие из указанных функций не имеют производного числа в нуле?

- 1)  $y = \sqrt[3]{|x|}$                       2)  $y = \sqrt[3]{x^2}$                       3)  $y = \sqrt[3]{x^4}$                       4)  $y = \sqrt[3]{x^5}$

## ■ § 2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

**2.1. Производная функции.** Для функции  $f(x)$ , определённой на промежутке  $M$ , рассмотрим множество  $M_0$  всех таких точек промежутка  $M$ , что в каждой точке  $x_0$  из  $M_0$  существует производное число  $f'(x_0)$ .



В результате на множестве  $M_0$  определена новая функция, которую назовём *производной функцией* функции  $f(x)$ . Обозначим эту новую функцию через  $f'(x)$ .

Кратко будем говорить, что  $f'(x)$  — это *производная* функции  $f(x)$ , или производная от  $f(x)$ , или производная для  $f(x)$ . Производное число функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  — это значение производной  $f'(x)$  в точке  $x_0$ . Иногда в этом случае также говорят, что функция  $f(x)$  *дифференцируема в точке*  $x_0$ .

**Пример 1.** Пусть для фиксированного числа  $c$  на множестве всех действительных чисел  $R$  определена функция  $f(x) = c$ . Тогда при каждом действительном значении  $x_0$  имеем  $f'(x_0) = 0$ . Поэтому  $f'(x) = 0$ .

**Вопрос.** На каком множестве действительных чисел существует производная функции  $f(x) = x \cdot |x|$ ?

**2.2. Производные элементарных функций.** Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 2.** Найдём производную определённой на множестве всех действительных чисел  $R$  функции  $f(x) = x$ . Установим, что  $f'(x) = 1$ .

Действительно,  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x-a} = 1$  при любом  $a \in R$ .

**Пример 3.** Найдём производную определённой на множестве всех действительных чисел  $R$  функции  $f(x) = x^2$ . Установим, что  $f'(x) = 2x$ .

Действительно, в любой точке  $x$  производное число

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + (\Delta x)) = 2x.$$

**Пример 4.** Вычислим производную функции  $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ , определённой на множестве всех ненулевых действительных чисел. Установим, что  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

Действительно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x) \cdot x \cdot \Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x + \Delta x) \cdot x} = -\frac{1}{x^2}.$$

**Пример 5.** Особое место в математике занимает число Эйлера  $e$ , которое можно определить как предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$  и как предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Число  $e$  — иррациональное. Выпишем это число, указав первые 15 десятичных знаков после запятой числа Эйлера: 2,718281828459045. Для функции  $f(x) = e^x$  её производная  $f'(x)$  совпада-



ет с функцией  $f(x) = e^x$ . Для производной логарифмической функции с основанием  $e$ , то есть  $f(x) = \ln x = \log_e x$ , при положительных значениях  $x$  выполняется равенство  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

Приведём таблицу основных элементарных функций и их производных, и в каждом случае укажем множество  $M$  тех значений аргумента, при которых производная существует.

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$M$
$c$	$0$	при всех $x$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$nx^{n-1}$	при всех $x$
$x^k, k \in \mathbb{Z}, k < 0$	$kx^{k-1}$	при $x \neq 0$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{Z}, \alpha > 1$	$\alpha x^{\alpha-1}$	при $x \geq 0$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{Z}, \alpha < 1$	$\alpha x^{\alpha-1}$	при $x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	при всех $x$
$\cos x$	$-\sin x$	при всех $x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$e^x$	$e^x$	при всех $x$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	при всех $x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	при $x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	при $x > 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	при $-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	при $-1 < x < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	при всех $x$

**Вопрос.** Как доказать, что  $(x^3)' = 3x^2$ ?

**2.3. Производная суммы функций.** Справедливо следующее правило для вычисления производных функций.

Пусть для функций  $f(x)$  и  $g(x)$  определены производные в точке  $a$ . Тогда сумма функций  $f(x) + g(x)$  имеет производную в точке  $a$ , и производная суммы функций равна сумме производных этих функций:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Если не предполагать существования производных функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , то может оказаться, что для суммы двух функций производная существует, но для каждого из слагаемых это не так.

**Пример 6.** Пусть  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = -|x|$ . Тогда для любого действительного числа  $a$  справедливо равенство  $f(a) + g(a) = 0$ , и для любого действительного числа  $a$  справедливо равенство  $(f + g)'(a) = 0$ . В то же время, как было показано в пункте 1.5, в точке 0 для функции  $f(x) = |x|$  производное число не существует. Отсюда следует, что и для функции  $g(x) = -|x|$  в точке 0 производное число также не существует.

**Вопрос.** Как показать, что если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что существуют производные для функций  $f(x)$  и  $f(x) + g(x)$ , то существует производная функции  $g(x)$ ?

**2.4. Производная произведения функции на число.** Справедливо также следующее правило.

Пусть  $c$  — число и для функции  $f(x)$  определена производная  $f'(a)$  в точке  $a$ . Тогда функция  $g(x) = c \cdot f(x)$  имеет производную в точке  $a$ , и

$$g'(a) = c \cdot f'(a).$$

Действительно, из соотношений  $\frac{\Delta(c \cdot f(x))}{\Delta x} = \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = \frac{c \cdot \Delta(f(x))}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta(f(x))}{\Delta x}$  следует, что если существует предел  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ , то  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(c \cdot f(x))}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(f)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$ .

Это правило можно сформулировать следующим образом:

производная произведения функции  $f(x)$  на постоянное число  $c$  равна произведению производной функции  $f(x)$  на число  $c$ .

**Вопрос.** Как показать, что если на множестве  $M$  существует производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , то на  $M$  существует производная  $g'(x)$  функции  $g(x) = x \cdot f(x)$  и выполняется равенство  $g'(x) = x \cdot f'(x) + f(x)$ ?

**2.5.\*\* Непрерывность функции в точке при наличии в той же точке производной этой функции.** При вычислении производных иногда используется следующее утверждение.

Если функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $a$ , то  $f(x)$  непрерывна в этой точке.

Из определения производной функции  $f(x)$  в точке  $a$  следует, что  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . Поэтому для всякого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое положительное число  $\delta$ , что из неравенства  $|x - a| < \delta$  следует неравенство  $\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon$ .

Обозначим разность  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$  через  $\alpha(x)$ . Тогда если  $|x - a| < \delta$ , то  $|\alpha(x)| < \varepsilon$ , и, таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

По определению  $\alpha(x)$  имеет место формула

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \alpha(x) \cdot (x - a). \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой линейного приближения* дифференцируемой функции  $f(x)$ . Формула линейного приближения означает, что функция  $f(x)$  тем точнее приближается линейной функцией  $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ , чем ближе точка  $x$  к точке  $a$ .

Из формулы линейного приближения легко вывести непрерывность функции  $f(x)$  в точке  $a$ . В самом деле, по теореме об арифметических свойствах пределов функций (пункт 1.8 главы 1):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \alpha(x) \cdot (x - a)) = \\ &= f(a) + f'(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = f(a). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Но это в точности означает, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ .

**Вопрос.** Какой из рассмотренных ранее примеров показывает, что функция может быть непрерывной в точке, но не иметь в этой точке производного числа?

## 2.6. Производные произведения и частного двух функций.

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в точке  $a$ , то функция  $f(x) \cdot g(x)$  также имеет производную в точке  $a$ , причём

$$(f(x) \cdot g(x))'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

Это утверждение называют *правилом вычисления производной произведения*, а соответствующую формулу часто записывают в следующем виде:



$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Такая запись означает, что правило вычисления производной произведения относится к любой точке  $x = a$ , в которой существуют  $f'(x)$  и  $g'(x)$ .

**Пример 7.** Установив, что  $(x)' = 1$ ,  $(x^2)' = 2x$ , можно вычислить производную от  $x^3$  следующим образом:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x \cdot (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  имеют производные в точке  $a$  и  $g(a) \neq 0$ . Тогда функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  также имеет производную в точке  $a$ , причём

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Это утверждение называют *правилом вычисления производной частного* и кратко записывают в следующем виде:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

**Пример 8.**

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Мы не будем доказывать правила вычисления производной произведения и частного функций.

**Вопрос.** По какой формуле находится производная функции вида  $\frac{1}{f(x)}$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Выпишите производные функций, задаваемых выражениями  $x^\alpha$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ .

2. Выпишите производные функций, задаваемых выражениями  $e^x$ ,  $a^x$ ,  $\ln x$ ,  $\log_a x$ .

3. Выпишите производные функций, задаваемых выражениями  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ .

4. Сформулируйте правило вычисления производной от суммы двух функций и от произведения функции на число.

5.\*\* Докажите, что если функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $a$ , то она непрерывна в этой точке.

6.\* Всегда ли непрерывная функция имеет производную?

7. Сформулируйте правило вычисления производной произведения двух функций.

8. Сформулируйте правило вычисления производной частного двух функций.

### ■ Задачи и упражнения

1. Найдите производную функции, заданной выражением:

- а)  $10^x$ ;                      б)  $\lg x$ ;                      в)  $e^x$ ;                      г)  $\ln x$ ;  
 д)  $\sqrt[3]{x}$ ;                      е)  $x^{\sqrt{2}}$ ;                      ё)  $x^e$ ;                      ж)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ;  
 з)  $\ln \sqrt{x}$ ;                      и)  $3x^{-3}$ ;                      й)  $x^5 - 3x^2 + 2x - 1$ ;                      к)  $3^x$ ;  
 л)  $\sin x - \cos x$ ;                      м)  $\frac{1}{7x^7}$ ;                      н)  $\frac{1}{x\sqrt{x}} + \sqrt{x^3}$ ;                      о)  $\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$ ;  
 п)  $\arcsin x - \arccos x$ .

2.\*\* Найдите, в каких точках непрерывна функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Имеет ли эта функция производную в какой-либо точке?

3. Найдите производную произведения:

- а)  $\sqrt{x}(2x - 1)$ ;                      б)  $x \ln x$ ;                      в)  $xe^x$ ;  
 г)  $\sin x \cdot \cos x$ ;                      д)  $x \sin x$ .

4. Найдите производную частного:

- а)  $\frac{\cos x}{\sin x}$ ;                      б)  $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ;                      в)  $\frac{\ln x}{x}$ ;  
 г)  $\frac{\ln^2 x}{x}$ ;                      д)  $\frac{x-1}{x+1}$ ;                      е)  $\frac{1-x}{x}$ .

5.\* Найдите производную функции, заданной выражением:

- а)  $\sin^2 x$ ;                      б)  $(\ln x)^{-1}$ ;                      в)  $\cos 2x$ ;                      г)  $\ln 3x$ .

6. Найдите уравнение касательной, проведённой к графику функции  $y = \ln x$  в точке пересечения графика с осью  $Ox$ .

7. Найдите уравнение касательной к графику функции  $y = \ln x$  в точке с абсциссой  $a = e$ , где  $e$  — это число Эйлера.

8. Найдите уравнение касательной, проведённой к графику функции  $y = \operatorname{arctg} x$  в точке пересечения графика с осью  $Oy$ .

### ■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. При каком значении переменной  $x$  касательная к графику функции  $y = x^2$  параллельна прямой  $y = 4x - 1$ ?

- 1) -2                      2) 0                      3) 1                      4) 2

1.2. Какую производную имеет функция  $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$ ?

- 1)  $\frac{1}{6\sqrt{x}}$                       2)  $\frac{1}{5\sqrt{x^5}}$                       3)  $\frac{1}{5\sqrt{x}}$                       4)  $\frac{1}{6\sqrt{x^5}}$

1.3. Укажите уравнение касательной к графику функции  $y = \ln x$  в точке с абсциссой  $x = \frac{1}{2}$ .

- 1)  $y = 2x + 1$                       2)  $y = x + 2$   
3)  $y = 2x - \ln 2 + 1$                       4)  $y = 2x - \ln 2 - 1$

1.4. Чему равна производная функции вида  $\frac{1}{f(x)}$ ?

- 1)  $\frac{1}{f'(x)}$                       2)  $\frac{f'(x)}{f(x)}$                       3)  $\frac{f'(x)}{f^2(x)}$                       4)  $\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Выберите правильные утверждения

1) наличие производной функции в точке гарантирует, что в этой точке имеется касательная к графику функции

2) наличие касательной к графику функции в точке гарантирует, что в этой точке имеется производное число функции

3) у всякой непрерывной в точке функции есть производное число в этой точке

4) наличие мгновенной скорости тела в некоторый момент времени гарантирует существование значения производной в этот момент для функции, определяющей закон движения

**2.2.** Выберите функции, касательные к графикам которых при  $x = 1$  параллельны прямой  $y = 3x - 10$ .

- 1)  $y = x^3$                       2)  $y = 3\sqrt{x}$   
3)  $y = x^2 + x + 1$                       4)  $y = 2\sqrt{x^3}$

**2.3.** Выберите верно вычисленные производные.

- 1)  $(ex^2)' = 2ex$                       2)  $(2x^e)' = 2ex$   
3)  $(ex^{2e})' = 2ex^{2e-1}$                       4)  $(x^{2e})' = 2ex^{2e-1}$

**2.4.** Какие из производных вычислены верно?

- 1)  $\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{1}{\cos x}$                       2)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$   
3)  $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{1}{\sin x}$                       4)  $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$



### ■ § 3. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

**3.1. Формула производной сложной функции.** Иногда, взяв две функции  $f(z)$  и  $g(x)$ , можно образовать сложную функцию  $h(x) = f(g(x))$ , так что при вычислении значения  $h(x)$  в точке  $a$  сначала вычисляется значение функции  $g(x)$  в точке  $a$ , и затем вычисляется значение функции  $f(z)$  в точке  $g(a)$ . Используя значения  $a$  и  $g(a)$ , сформулируем правило вычисления производной сложной функции.

Пусть функция  $g(x)$  имеет производную в точке  $a$ , функция  $f(z)$  имеет производную в точке  $g(a)$ . Тогда функция  $h(x) = f(g(x))$  имеет производную в точке  $a$  и

$$h'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

**Пример 1.** Вычислим производную функции  $h(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$  при  $x = a$ .

Заметим, что  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(g(x))$ , где  $g(x) = 3x - \frac{\pi}{3}$ . Поэтому нужно вычислить значение  $g'(x)$  в точке  $a$  и значение  $(\sin z)'$  в точке  $b = g(a) = \left(3a - \frac{\pi}{3}\right)$ . Из равенств  $g'(x) = \left(3x - \frac{\pi}{3}\right)' = 3$ ,  $(\sin z)' = \cos z$  следуют равенства  $g'(a) = 3$ ,  $(\sin z \left(3a - \frac{\pi}{3}\right))' = \cos\left(3a - \frac{\pi}{3}\right)$ . Следовательно,  $h'(a) = 3 \cos\left(3a - \frac{\pi}{3}\right)$ .

Кратко вычисления можно записать так:

$$\left(\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right)'(a) = \left(\cos\left(3a - \frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot 3 = 3 \cos\left(3a - \frac{\pi}{3}\right).$$

**Вопрос.** По какому правилу можно вычислить производную функции  $f(g(\varphi(x)))$  в точке  $a$ , используя производные функций  $f(t)$ ,  $g(z)$ ,  $\varphi(x)$ ?

**3.2.\*\* Частный случай формулы производной сложной функции.** В том случае, когда у сложной функции  $h(x) = f(g(x))$  функция  $g(x)$  строго монотонна, правило вычисления производной сложной функции можно доказать следующим образом.

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$  и  $\lim_{z \rightarrow b} \frac{f(z) - f(b)}{z - b} = f'(b)$ , где  $b = g(a)$ . В силу монотонности  $g(x) - g(a) \neq 0$  при  $x \neq a$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{z \rightarrow b} \frac{f(z) - f(b)}{z - b} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(b) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Доказательство правила вычисления производной сложной функции в общем случае мы не приводим.

**Вопрос.** Как в приведённом доказательстве использовалось свойство монотонности функции  $g(x)$ ?

**3.3. Другая запись формулы для производной сложной функции.** Иногда правило вычисления производной сложной функции записывают в следующем виде:

$$f(g(x))' = f_z'(g(x)) \cdot g'(x).$$

При этом предполагается, что значение производной функции  $f(g(x))$  вычисляется в точке  $x$ ; производная функции  $f(z)$  вычисляется по переменной  $z$ , а затем вместо  $z$  подставляется  $g(x)$ , производная функции  $g(x)$  вычисляется в точке  $x$ .

**Пример 2.**  $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^z)'_z (\alpha \ln x) \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$

**Вопрос.** Как из равенства  $(e^x)' = e^x$  вывести, что  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Сформулируйте правило вычисления производной сложной функции.

2.\* Докажите правило вычисления производной функции  $h(x) = f(g(x))$  в предположении, что функция  $g(x)$  строго монотонна.

### Задачи и упражнения ■

1. Найдите производную функции, заданной выражением:

а)  $\ln 5x$ ;                      б)  $\ln^2 x$ ;                      в)  $\sin 3x$ ;

г)  $\operatorname{tg}(x^2 - 1)$ ;              д)  $\sqrt{2x + 3}$ ;                      е)  $e^{\sin x}$ ;

ё)  $\arccos 2x$ ;                      ж)  $\sqrt{9x^2 - 16}$ ;                      з)  $\operatorname{tg}^2 x$ ;

и)  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$ ;              й)  $\ln \sqrt{\sin x}$ ;                      к)  $\sqrt{\ln(x^2)}$ .

2.\* Существует ли такое значение переменной  $x$ , что значение производной от функции  $f(x) = -\frac{\sin^2 x}{x}$  совпадает со значением функции  $g(x) = \cos^2 x$ ?

3. При каких значениях переменной  $x$  касательная к графику функции  $y = \cos^2 x$  совпадает с касательной к графику этой функции в точке 0?

4.\* Изобразите графики функций  $y = \ln x$ ,  $y = \ln 2x$ ,  $y = \ln 3x$  и покажите, что для каждой из этих функций касательная, проведённая через

точку пересечения графика соответствующей функции с прямой  $x = 1$ , образует угол в  $45^\circ$  с этой прямой.

**5.\*\*** Предполагая существование производной и пользуясь правилом вычисления производной сложной функции, найдите производную функции:

а)  $f(x) = \arcsin x$ ; б)  $f(x) = \arccos x$ ; в)  $f(x) = \arctg x$ .

### ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Сколько имеется точек, в которых производная функции  $\frac{\ln^2 x}{x}$  обращается в нуль?

- 1) 1                      2) 2                      3) 3                      4) больше 3

**1.2.** Укажите уравнение касательной к графику функции  $\ln^2 x$  в точке с абсциссой 1.

- 1)  $y = x$               2)  $y = x - 1$               3)  $y = 1$               4)  $y = 0$

**1.3.** Чему равна производная функции вида  $\ln f(x)$ ?

- 1)  $f'(x) + f(x)$       2)  $\frac{f'(x)}{f(x)}$               3)  $\frac{f'(x)}{f^2(x)}$               4)  $f'(x) \cdot f(x)$

**1.4.** Чему равняется производная функции вида  $\ln(x^x)$ ?

- 1)  $\ln x + 1$               2)  $x \cdot \ln x$               3)  $\frac{\ln x}{x}$               4)  $\frac{x}{\ln x}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какое из выражений является производной функции  $y = \frac{f(\sin x)}{x}$ ?

- 1)  $\frac{xf'(\sin x) - f(\sin x)}{x^2}$               2)  $\frac{\cos x f'(\sin x) - f(\sin x)}{x^2}$   
3)  $\frac{x \cos x f'(\sin x) - f(\sin x)}{x^2}$               4)  $\frac{x \cos x f'(\sin x) + f(\sin x)}{x^2}$

**2.2.** Для каких из указанных функций производная равна  $\sin 2x$ ?

- 1)  $f(x) = 2\sin^2 x$               2)  $f(x) = \sin^2 x + 1$   
3)  $f(x) = 2 + 2\sin^2 x$               4)  $f(x) = \sin^2 x + 2$

**2.3.** Пусть  $f(x) = x^2$ ;  $g(x) = \sqrt{x}$ . Укажите верные равенства при всех положительных значениях  $x$ .

- 1)  $(f(x) + g(x))' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$               2)  $(f(x) \cdot g(x))' = 5x^4$



$$3) \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$4) f(g(x))' = 1$$

**2.4.** Пусть  $f(x) = x^2$ ;  $g(x) = x^3$ . Укажите верные равенства при всех действительных значениях  $x$ .

$$1) (f(x) + g(x))' = 3x + 2x^2$$

$$2) (f(x) \cdot g(x))' = 5x^4$$

$$3) \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$4) (f(g(x)))' = 6x^5$$

### Мини-исследования к главе 3 ■

#### Мини-исследование 8

Как известно, из каждой точки, лежащей вне окружности, к ней можно провести две касательных. Выяснить, существует ли такая замкнутая плоская фигура, что из любой точки, лежащей вне этой фигуры, к ней можно было бы провести три или более касательных.

Подсказка: ромашка.

#### Мини-исследование 9

Выяснить, имеются ли точки, в которых дифференцируема функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } x \text{ — рационально и равно } \frac{p}{q} \text{ (дробь несократима),} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

#### Мини-исследование 10

Что можно сказать о дифференцируемости функции  $h(x) = f(g(x))$  в данной точке  $x = a$ , если:

а) функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $b = g(a)$ , а функция  $g(x)$  не имеет производной в точке  $x = a$ ;

б) функция  $f(x)$  не имеет производной в точке  $b = g(a)$ , а функция  $g(x)$  имеет производную в точке  $x = a$ ;

в) функция  $f(x)$  не имеет производной в точке  $b = g(a)$  и функция  $g(x)$  не имеет производной в точке  $x = a$ ?



# Глава 4

## КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

В начале этой главы мы рассмотрим основные принципы изображения точек пространства с помощью ортогональных проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости и введём прямоугольную систему координат. Затем рассмотрим связанные и свободные векторы пространства, операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число. Будут определены коллинеарность и компланарность векторов и доказана теорема о разложении векторов пространства по трём некомпланарным векторам.

### ■ § 1. ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКЦИЙ

#### 1.1. Проекции на две взаимно перпендикулярные плоскости.

Перпендикулярная проекция точки на плоскость не даёт возможности однозначно восстановить положение этой точки в пространстве, потому что различные точки могут иметь одну и ту же проекцию. Например, все точки отрезка  $AB$ , перпендикулярного плоскости  $\alpha$ , проектируются в одну точку (рис. 1).

Рассмотрим теперь две взаимно перпендикулярные плоскости проекций  $\alpha$  и  $\beta$ , пересекающиеся по прямой  $a$ . Для каждой точки  $A$  пространства можно рассмотреть две её проекции: проекцию  $A_1$  на плоскость  $\alpha$  и проекцию  $A_2$  на плоскость  $\beta$  (рис. 2). Точки  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  лежат в одной плоскости, которая перпендикулярна прямой  $a$ . Поэтому для построения проекций точки  $A$  рассмотрим плоскость  $\gamma$ , проходящую через точку  $A$  и перпендикулярную прямой  $a$  (рис. 3). Плоскость  $\gamma$  пересекает плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по перпендикулярным прямым  $m$  и  $n$ . Опустив перпендикуляр  $AA_1$

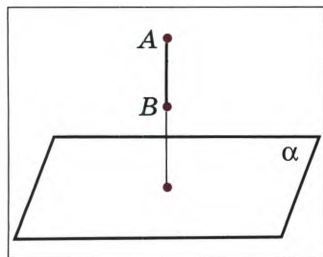


Рис. 1

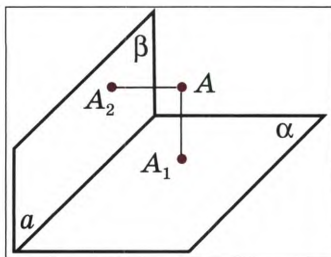


Рис. 2

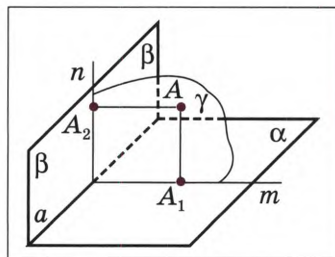


Рис. 3

на прямую  $m$  и перпендикуляр  $AA_2$  на прямую  $n$ , мы получим проекции точки  $A$  на плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ .

**Вопрос.** Какие проекции на плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеет точка плоскости  $\alpha$ ?

**1.2.\* Однозначность определения точки по её проекциям.** По проекциям  $A_1$  и  $A_2$  на две взаимно перпендикулярные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  положение соответствующей точки  $A$  в пространстве определяется однозначно. Действительно, через точку  $A_1$  можно провести единственную прямую  $a$ , перпендикулярную плоскости  $\alpha$ , а через точку  $A_2$  — единственную прямую  $b$ , перпендикулярную плоскости  $\beta$ . Прямые  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости и не параллельны (рис. 4). Единственная точка пересечения прямых  $a$  и  $b$  является той точкой пространства, которая проектируется в точки  $A_1$  и  $A_2$  плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

Любая точка  $B$  пространства, отличная от точки  $A$ , не принадлежит хотя бы одной из прямых  $a$  и  $b$ , и поэтому хотя бы одна из перпендикулярных проекций точки  $B$  не совпадёт с какой-то из точек  $A_1$  или  $A_2$ . Другими словами, пары проекций двух различных точек пространства не совпадают.

**Вопрос.** Пусть точка  $A$  не лежит ни в одной из плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ . Как доказать, что точка  $A$  и её проекции на плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  лежат в плоскости, перпендикулярной прямой  $l$  пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ ?

**1.3. Горизонтальная, вертикальная плоскости проекций, ось проекций.** Рассматривая проекции точек на две взаимно перпендикулярные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , для удобства одну из этих плоскостей называют *горизонтальной* плоскостью проекций, а вторую — *вертикальной* плоскостью проекций. Проекцию точки на горизонтальную плоскость будем называть *горизонтальной проекцией* точки, на вертикальную плоскость — *вертикальной проекцией* точки.

Линию  $l$  пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  называют *осью проекций*. Для практических потребностей достаточно рассматривать проекции точек только одной из частей пространства, которую ограничивают плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 5). В этом случае каждая точка проекти-

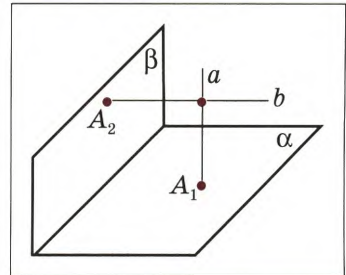


Рис. 4

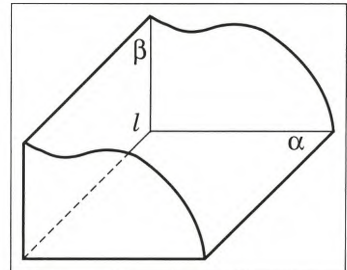


Рис. 5



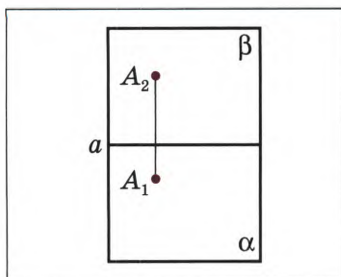


Рис. 6

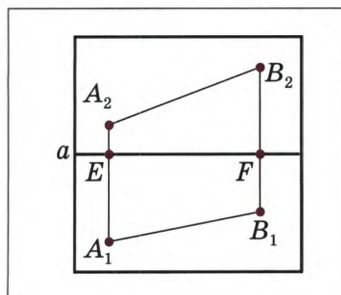


Рис. 7

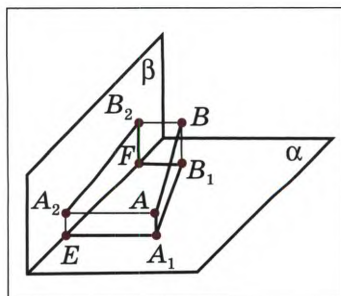


Рис. 8

руется на полуплоскости с границей  $l$ , и эти полуплоскости можно изобразить на одном листе бумаги (рис. 6). Развёрнутый на один лист бумаги рисунок проекций точек на две перпендикулярные полуплоскости называют *эпюром*.

На эпюре проекции каждой точки пространства расположены на одном перпендикуляре к оси проекций. Вертикальная проекция точки изображается в верхней полуплоскости эпюра, горизонтальная проекция точки — в нижней полуплоскости эпюра.

**Вопрос.** Как в пространстве расположена точка, если обе её проекции совпадают?

**1.4. Проекция отрезка на эпюре.** Напомним, что при проектировании отрезок переходит либо в отрезок, либо в точку. Поэтому на эпюре каждый отрезок пространства изображается либо двумя отрезками, либо отрезком и точкой. По изображениям проекций отрезка на эпюре можно наглядно представить положение этого отрезка в пространстве и произвести некоторые численные расчёты.

**Пример 1.** На рис. 7 даны проекции отрезка  $AB$  и известно, что  $A_2E = 1$ ,  $B_2F = 3$ ,  $A_1E = 3$ ,  $B_1F = 2$ ,  $EF = 4$ . Вычислить длину отрезка  $AB$ .

Рассмотрим рис. 8, на котором изображён отрезок  $AB$  и его проекции. Тогда  $AA_1EA_2$  и  $BB_1FB_2$  — прямоугольники, плоскости которых перпендикулярны оси  $l$ . Отсюда следует, что четырёхугольники  $A_1EFB_1$  и  $A_1ABB_1$  — пря-

моугольные трапеции. Поэтому  $A_1B_1^2 = (A_1E - B_1F)^2 + EF^2 = 1 + 16 = 17$ , откуда  $AB^2 = (BB_1 - AA_1)^2 + A_1B_1^2 = (B_2F - A_2E)^2 + A_1B_1^2 = 4 + 17 = 21$ .

Следовательно,  $AB = \sqrt{21}$ .

**Вопрос.** На эпюре одной из проекций отрезка является точка. Как по эпюру найти длину этого отрезка?

**1.5. Определение по эюру пересечения отрезков.** По эюру можно определить, пересекаются два отрезка в пространстве или нет.

**Пример 2.** На рис. 9 даны проекции двух отрезков  $AB$  и  $CD$ . Их горизонтальные проекции  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  пересекаются в точке  $P_1$ , а вертикальные проекции  $A_2B_2$  и  $C_2D_2$  пересекаются в точке  $P_2$ . При этом точки  $P_1$  и  $P_2$  лежат на одном перпендикуляре к оси проекций. Следовательно, точки  $P_1$  и  $P_2$  являются проекциями одной точки  $P$  пространства. Точка  $P$  лежит на отрезке  $AB$ , так как её проекции лежат на проекциях отрезка  $AB$ . Аналогично точка  $P$  лежит на отрезке  $CD$ , так как её проекции лежат на проекциях отрезка  $CD$ . Следовательно,  $P$  — точка пересечения отрезков  $AB$  и  $CD$ .

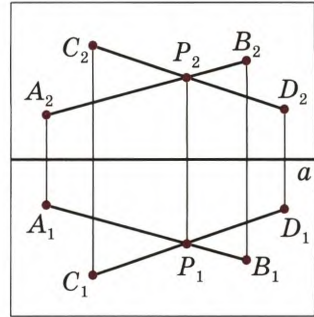


Рис. 9

**Вопрос.** Как по изображениям двух отрезков определить, пересекаются ли прямые, проходящие через эти отрезки, или нет?

**1.6. Дистраивание проекции точки по проекциям других точек.** Рассмотрим три точки  $A, B, C$  пространства, не лежащие на одной прямой. Пусть на эюре их горизонтальные проекции  $A_1, B_1, C_1$  не лежат на одной прямой и их вертикальные проекции  $A_2, B_2, C_2$  также не лежат на одной прямой. В этом случае по горизонтальной проекции каждой точки  $M$  плоскости  $ABC$  однозначно восстанавливается вертикальная проекция точки  $M$ .

**Пример 3.** На рис. 10 даны горизонтальная проекция плоского четырёхугольника  $ABCD$  и вертикальные проекции вершин  $A, B, C$ . Построить вертикальную проекцию точки  $D$ .

Точке  $P$  пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  соответствует в горизонтальной проекции точка  $P_1$  пересечения  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$ , и эту точку можно построить (см. рис. 10). Тогда вертикальная проекция  $P_2$  точки  $P$ , с одной стороны, должна находиться с точкой  $P_1$  на одном перпендикуляре к оси проекции, а с другой стороны, должна находиться на отрезке  $A_2C_2$ . Следовательно, точку  $P_2$  можно

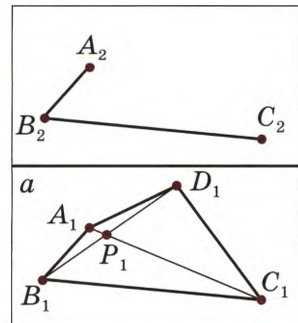


Рис. 10



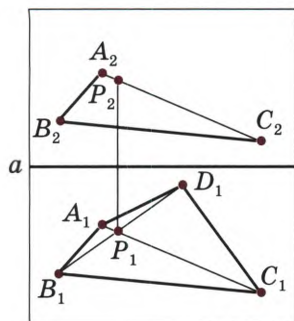


Рис. 11

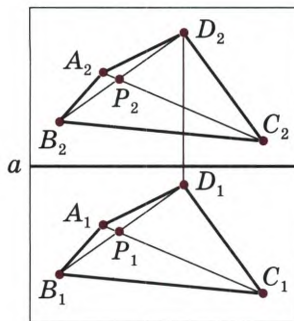


Рис. 12

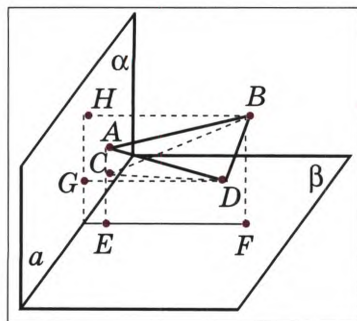


Рис. 13

построить (рис. 11). Но тогда вертикальную проекцию  $D_2$  точки  $D$  можно также построить, так как точка  $D_2$  должна находиться и на прямой  $B_2P_2$ , и с точкой  $D_1$  на одном перпендикуляре к оси проекций (рис. 12).

**Вопрос.** Как по изображениям на эпюре трёх соседних вершин правильного шестиугольника построить изображение всего шестиугольника?

**1.7.\* Проекция многоугольников, расположенных в плоскости, перпендикулярной оси проекции.** В том случае, когда на эпюре вертикальная и горизонтальная проекции плоского многоугольника имеют вид многоугольников, по эпюру восстанавливается вид самого многоугольника. Однако если многоугольник расположен в плоскости, перпендикулярной оси проекций, то вертикальной и горизонтальной проекциями многоугольника будут отрезки. При этом проекции различных многоугольников могут выглядеть одинаково.

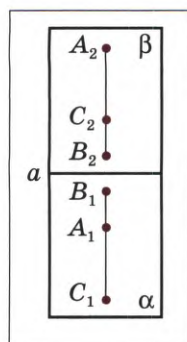


Рис. 14

Например, на рис. 13 можно видеть, что проекциями треугольника  $ABD$ , лежащего в плоскости, перпендикулярной прямой  $a$ , являются отрезки  $EF$  и  $GH$ . Эти же отрезки являются, например, проекциями и треугольника  $BCD$ , который не совпадает с треугольником  $ABD$ . Поэтому без указания проекций вершин невозможно восстановить вид проектируемого многоугольника.

**Вопрос.** На рис. 14 отмечены вертикальные и горизонтальные проекции вершин треугольника  $ABC$ . Как в пространстве расположен треугольник  $ABC$ ?

**1.8.\* Монж и начертательная геометрия.** Метод изображения пространственных фигур перпендику-



лярными проекциями на две плоскости был разработан французским математиком Гаспаром Монжем (1746—1818) и известен как метод Монжа. На основе метода Монжа получают практические приёмы построения изображений пространственных фигур, которые изучаются в курсах *начертательной геометрии* в большинстве технических учебных заведений.

**Вопрос.** Какой вид на эюре имеют проекции цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости горизонтальных проекций?

### 1.9.\* Проекции на три взаимно перпендикулярные плоскости.

Для облегчения восприятия пространственной фигуры по её проекциям рассматривают также проекции на три взаимно перпендикулярные плоскости. Полученные проекции изображают на одном листе, разделенном двумя перпендикулярными прямыми на четыре части. Горизонтальную проекцию иногда называют *видом сверху* и рисуют в левой нижней части листа. Вертикальные проекции называют *видом спереди*, *видом сбоку* и рисуют соответственно в левой верхней части листа и в правой верхней части листа. Правила построения трёх проекций пространственных фигур изучаются в курсах черчения.

**Вопрос.** Какой вид может иметь пространственная фигура, у которой на рис. 15 изображены проекции на три взаимно перпендикулярные плоскости?

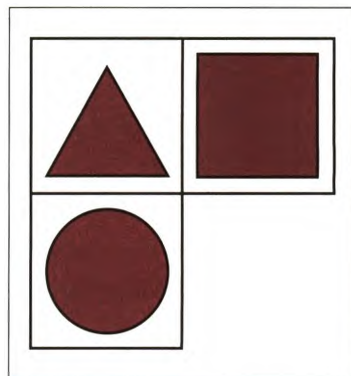


Рис. 15

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Что называют перпендикулярной проекцией точки на плоскость?
2. Могут ли две различные точки иметь одинаковые проекции на одну плоскость?
3. Могут ли две различные точки иметь одинаковые проекции на две перпендикулярные плоскости?
4. Что такое горизонтальная плоскость проекций?
5. Что такое вертикальная плоскость проекций?
6. Что такое ось проекций?
7. Что такое эюр?

## ■ Задачи и упражнения

1. Докажите, что если проекцией отрезка на горизонтальную плоскость проекций является точка, то этот отрезок перпендикулярен горизонтальной плоскости проекций.

2. На эпюре одной из проекций отрезка  $AB$  является точка  $A_1$ , а другой проекцией — отрезок  $A_2B_2$  длиной 2. Чему равна длина отрезка  $AB$ ?

3.\* Пусть проекцией отрезка  $AB$  на горизонтальную и вертикальную плоскости являются отрезки  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , причём длина и того и другого отрезка равна 4. Чему может быть равна длина отрезка  $AB$ ?

4.\*\* Известно, что проекциями фигуры  $\Phi$  на горизонтальную и вертикальную плоскости проекций являются отрезки  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , не перпендикулярные линии пересечения плоскостей проекций. Докажите, что  $\Phi$  — тоже отрезок.

5. Пусть  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  — проекции отрезка  $AB$  на горизонтальную и вертикальную плоскости проекций. Точка  $E$  — пересечение плоскости  $A_1AA_2$  с осью проекций, точка  $F$  — пересечение плоскости  $B_1BB_2$  с осью проекций. Найдите длину отрезка  $AB$ , если:

а)  $A_2E = 1$ ,  $B_2F = 5$ ,  $A_1E = 2$ ,  $B_1F = 4$ ,  $EF = 4$ ;

б)  $A_2E = 3$ ,  $B_2F = 1$ ,  $A_1E = 2$ ,  $B_1F = 4$ ,  $EF = 3$ ;

в)  $A_2E = 4$ ,  $B_2F = 2$ ,  $A_1E = 5$ ,  $B_1F = 1$ ,  $EF = 6$ .

6. Даны горизонтальная проекция  $A_1B_1C_1D_1$  плоского четырёхугольника  $ABCD$  и вертикальные проекции  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $E$ , его вершин  $A$  и  $B$  и точки пересечения диагоналей. Как найти вертикальные проекции вершин  $C$  и  $D$ ?

7. Начертите проекции шара:

а) на две взаимно перпендикулярные плоскости;

б) на три взаимно перпендикулярные плоскости.

8. Дана полусфера, ограниченная окружностью, которая параллельна горизонтальной плоскости, проходящей через центр сферы. Начертите проекции этой фигуры:

а) на две взаимно перпендикулярные плоскости;

б) на три взаимно перпендикулярные плоскости.

9. Дан цилиндр, основание которого параллельно горизонтальной плоскости. Найдите проекции:

а) на две взаимно перпендикулярные плоскости;

б)\* на три взаимно перпендикулярные плоскости.

10. Дан конус с основанием, параллельным горизонтальной плоскости. Найдите его проекции:

а) на две взаимно перпендикулярные плоскости;

б)\* на три взаимно перпендикулярные плоскости.



## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Чему равна высота правильной четырёхугольной пирамиды с ребром основания 2 и боковым ребром 3?

- 1)  $\sqrt{3}$                       2)  $\sqrt{5}$                       3)  $\sqrt{7}$                       4)  $2\sqrt{2}$

**1.2.** Концы отрезка длиной 8 удалены от плоскости  $\alpha$  на расстояния 5 и 7. Чему равна длина перпендикулярной проекции этого отрезка на плоскость  $\alpha$ ?

- 1)  $4\sqrt{3}$                       2)  $2\sqrt{13}$                       3)  $2\sqrt{14}$                       4)  $2\sqrt{15}$

**1.3.** Пусть  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  — проекции отрезка  $AB$  на горизонтальную и вертикальную плоскости проекций. Точка  $E$  — пересечение плоскости  $A_1AA_2$  с осью проекций, точка  $F$  — пересечение плоскости  $B_1BB_2$  с осью проекций. Чему равна длина отрезка  $AB$ , если  $A_2E = 1$ ,  $B_2F = 5$ ,  $A_1E = 2$ ,  $B_1F = 4$ ,  $EF = 4$ ?

- 1) 6                      2) 7                      3) 8                      4) 9

**1.4.** Пусть проекцией отрезка  $AB$  на горизонтальную и вертикальную плоскости являются отрезки  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , причём длина и того и другого отрезка равна 4. Какой может быть наибольшая длина отрезка  $AB$ ?

- 1)  $|AB| = 4$                       2)  $|AB| = 4\sqrt{2}$                       3)  $|AB| = 2\sqrt{3}$                       4)  $|AB| = 4\sqrt{3}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Два луча, угол между которыми равен  $60^\circ$ , проектируются перпендикулярно на плоскость. Какой может быть величина угла между проекциями этих лучей?

- 1)  $15^\circ$                       2)  $30^\circ$                       3)  $120^\circ$                       4)  $150^\circ$

**2.2.** Какие многоугольники могут получаться при перпендикулярном проектировании куба на плоскость?

- 1) треугольник                      2) четырёхугольник  
3) пятиугольник                      4) шестиугольник

**2.3.** Какой вид на эюре может иметь изображение квадрата?

- 1) два параллелограмма                      2) прямоугольник и параллелограмм  
3) два прямоугольника                      4) прямоугольник и точка

**2.4.** Пусть отрезок длины  $c$  изображается на эюре отрезками, длины которых  $a$  и  $b$ . Какие из соотношений всегда являются верными?

- 1)  $c = a + b$                       2)  $c \leq a$                       3)  $b \leq c$                       4)  $c \leq a + b$



## ■ § 2. КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

**2.1. Оси координат в пространстве.** Выберем в пространстве три взаимно перпендикулярные прямые  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Упорядочим эти прямые. Например, будем считать прямую  $x$  — первой, прямую  $y$  — второй и прямую  $z$  — третьей. На них введём координаты так, чтобы точка  $O$  изображала число нуль на каждой из полученных числовых прямых (рис. 1).

Назовём первую числовую прямую *осью абсцисс*, вторую числовую прямую — *осью ординат*, третью числовую прямую — *осью аппликат* (рис. 1). Оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  вместе называют *осями системы координат* или *координатными прямыми системы координат*.

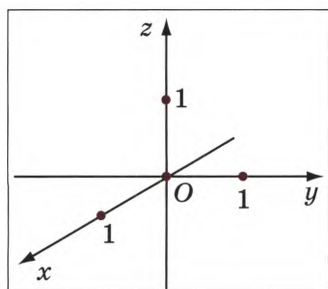


Рис. 1

Рассматривая пары координатных осей, можно построить три координатные плоскости: плоскость  $Oxy$ , проходящую через оси  $Ox$  и  $Oy$ , плоскость  $Oxz$ , проходящую через оси  $Ox$  и  $Oz$ , плоскость  $Oyz$ , проходящую через оси  $Oy$  и  $Oz$ . Отметим, что ось  $Oz$  не параллельна плоскости  $Oxy$ , ось  $Oy$  не параллельна плоскости  $Oxz$ , ось  $Ox$  не параллельна плоскости  $Oyz$ .

**Вопрос.** Сколько различных систем координат с фиксированной единицей измерения длин можно задать, имея три данные пересекающиеся взаимно перпендикулярные прямые?

**2.2. Определение координат точки.** Проведём три координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . С помощью координат точек на осях каждой точке  $M$

пространства можно сопоставить три числа, расположенных в определённом порядке. Сделать это можно следующим образом.

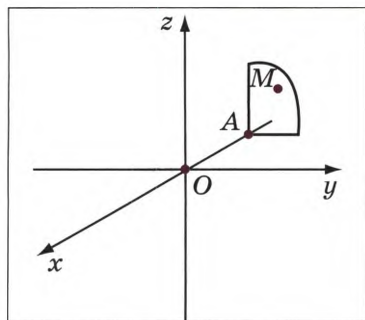


Рис. 2

Сначала проведём через точку  $M$  плоскость  $\alpha$  параллельно координатной плоскости  $Oyz$ . Эта плоскость перпендикулярна оси  $Ox$ . Найдём точку  $A$  её пересечения с осью  $Ox$  (рис. 2). Координату точки  $A$  на оси  $Ox$  назовём *абсциссой* и обозначим через  $a$ .

Аналогично проведём через точку  $M$  плоскость  $\beta$  параллельно плоскости  $Oxz$  и найдём точку  $B$  её пересечения с осью  $Oy$

(рис. 3). Координату точки  $B$  на оси  $Oy$  назовём *ординатой* и обозначим через  $b$ .

Наконец, проведём через точку  $M$  плоскость  $\gamma$  параллельно плоскости  $Oxy$  и найдём точку  $C$  её пересечения с осью  $Oz$  (рис. 4). Координату точки  $C$  на оси  $Oz$  назовём *апplikатой* и обозначим через  $c$ .

Найденные три числа  $a, b, c$  в указанном порядке называются *координатами* точки  $M$  в заданной прямоугольной системе координат. Координаты точки  $M$  записывают в виде  $M(a;b;c)$ .

**Вопрос.** Как доказать, что абсцисса точки  $M$  совпадает с точкой пересечения прямой  $Ox$  и прямой, проведённой через точку  $M$  перпендикулярно оси  $Ox$ ?

**2.3. Определение координат точки, расположенной в одной из координатных плоскостей.** Рассмотрим точку  $P$ , расположенную в координатной плоскости  $Oxy$ . Если через точку  $P$  провести плоскости  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  так, что  $\alpha \parallel Oyz, \beta \parallel Oxz$  и  $\gamma \parallel Oxy$ , то получим следующее:

1) апплика точки  $P$  равна 0, поскольку в этом случае плоскость  $\gamma$  совпадает с плоскостью  $Oxy$ ;

2) абсцисса точки  $P$  в пространстве совпадает со значением абсциссы на плоскости  $Oxy$ , так как в плоскости  $Oxy$  абсциссу точки  $P$  задаёт прямая, проходящая через точку  $P$  перпендикулярно прямой  $Ox$ , а такой прямой является прямая пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $Oxy$ ;

3) ордината точки  $P$  в пространстве совпадает со значением ординаты на плоскости  $Oxy$ , так как в плоскости  $Oxy$  ординату точки  $P$  задаёт прямая, проходящая через точку  $P$  перпендикулярно прямой  $Oy$ , а такой прямой является прямая пересечения плоскостей  $\beta$  и  $Oxy$ .

Таким образом, если точка  $P$  расположена в плоскости  $Oxy$ , то её координаты имеют вид  $(a;b;0)$ , где  $a$  — абсцисса точки  $P$  в плоскости  $Oxy$ ,  $b$  — ордината точки  $P$  в плоскости  $Oxy$ .

Аналогично получаются следующие свойства:

— если точка  $P$  расположена в координатной плоскости  $Oyz$ , то её координаты имеют вид  $(0;b;c)$ ;

— если точка  $P$  расположена в координатной плоскости  $Oxz$ , то её координаты имеют вид  $(a;0;c)$ .

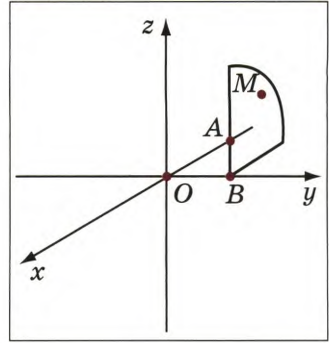


Рис. 3

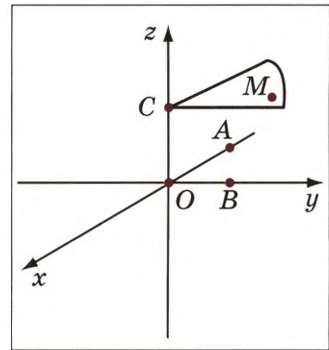


Рис. 4



**Вопрос.** Где расположена точка  $P$ , если две её координаты равны нулю?

**2.4. Определение координат точки, расположенной вне координатных плоскостей.** Когда точка  $M$  не лежит ни в одной из координатных плоскостей, можно рассмотреть попарные пересечения координатных плоскостей с параллельными им плоскостями, проходящими через точку  $M$ .

В результате получим прямоугольный параллелепипед  $AGMEOBFC$  (рис. 5). С помощью такого параллелепипеда можно указать, как вычисляются координаты точек.

Поскольку плоскость  $AGME$  перпендикулярна оси  $Ox$  и  $A$  — это точка пересечения оси  $Ox$  с плоскостью  $AGME$ , то абсцисса точки  $M$  равна абсциссе точки  $A$ . Отметим, что такую же абсциссу имеют точки  $E$  и  $G$  (см. рис. 5).

Аналогично, поскольку плоскость  $BFMG$  перпендикулярна оси  $Oy$  и  $B$  — это точка пересечения оси  $Oy$  с плоскостью  $BFMG$ , то ордината точки  $M$  равна ординате точки  $B$ , и такую же ординату имеют точки  $G$  и  $F$  (см. рис. 5).

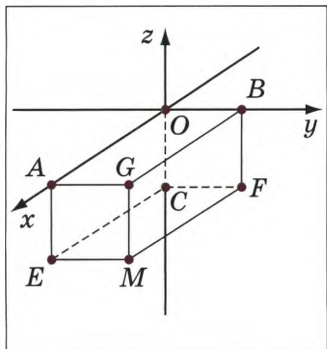


Рис. 5

Точно так же, поскольку плоскость  $CFME$  перпендикулярна оси  $Oz$  и  $C$  — это точка пересечения оси  $Oz$  с плоскостью  $CFME$ , то аппликата точки  $M$  равна аппликате точки  $C$ , и такую же аппликату имеют точки  $F$  и  $E$  (см. рис. 5).

**Вопрос.** Какие знаки имеют абсцисса и аппликата точки  $M$  (см. рис. 5)?

**2.5. Расстояние между точками в пространстве.** Для вычисления расстояния между точками в пространстве по их координатам применяется формула, аналогичная формуле расстояния между точками на плоскости.

Расстояние между точками  $A(a_1; b_1; c_1)$  и  $B(a_2; b_2; c_2)$  равно

$$AB = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}.$$

**Вопрос.** Каким уравнением задаётся в пространстве множество всех точек, удалённых от начала  $O$  на расстояние 1?

**2.6.\*\* Доказательство формулы расстояния.** Докажем формулу расстояния между точками.

I. Пусть точки  $A$  и  $B$  лежат в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, например плоскости  $Oxy$ . Если точка  $A$  имеет



координаты  $(a_1; b_1; c)$ , то точка  $B$  имеет координаты  $(a_2; b_2; c)$ , то есть их аппликаты совпадают. Проведём через точки  $A$  и  $B$  прямые  $a$  и  $b$ , параллельные оси  $Oz$ , и отметим точку  $K$  пересечения  $a$  с плоскостью  $Oxy$  и точку  $L$  пересечения  $b$  с плоскостью  $Oxy$  (рис. 6). Получим прямоугольник  $AKLB$ . Поскольку координаты точек  $K$  и  $L$ , рассматриваемые в плоскости  $Oxy$ , равны  $(a_1; b_1)$  и  $(a_2; b_2)$  соответственно, то

$$\begin{aligned} AB &= KL = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} = \\ &= \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c - c)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае формула расстояния верна.

II. Возьмём точки  $A(a_1; b_1; c_1)$  и  $B(a_2; b_2; c_2)$  так, что прямая  $AB$  не параллельна ни одной из координатных плоскостей, то есть  $a_1 \neq a_2$ ,  $b_1 \neq b_2$ ,  $c_1 \neq c_2$ . Проведём через точку  $A$  плоскость  $\alpha$ , параллельную  $Oxy$ , через точку  $B$  — прямую  $b$ , параллельную  $Oz$ , и найдём точку  $F$  пересечения плоскости  $\alpha$  и прямой  $b$ . Тогда получаем прямоугольный треугольник  $AFB$  с прямым углом при вершине  $F$ , причём точка  $F$  имеет координаты  $(a_2; b_2; c_1)$  (рис. 7).

Поскольку  $BF^2 = (c_2 - c_1)^2$ ,  $AF^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2$ , то по теореме Пифагора получаем

$$\begin{aligned} AB^2 &= AF^2 + BF^2 = \\ &= (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2, \end{aligned}$$

откуда  $AB = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$ .

**Вопрос.** Чему равно расстояние от точки  $A(a; b; c)$  до прямой  $Ox$ ?

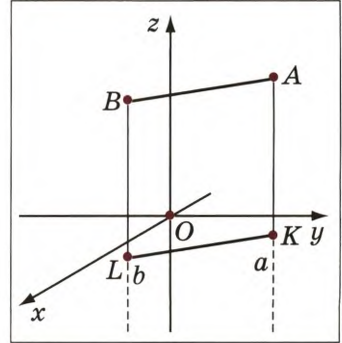


Рис. 6

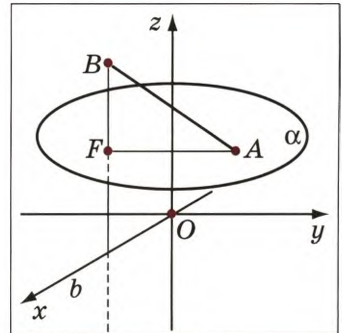


Рис. 7

**2.7. Координаты середины заданного отрезка.** В пространстве координаты середины отрезка вычисляются по формулам, аналогичным формулам координат середины отрезка на плоскости.

Пусть  $A(a_1; b_1; c_1)$  и  $B(a_2; b_2; c_2)$ . Тогда середина отрезка  $AB$  имеет координаты  $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}; \frac{b_1 + b_2}{2}; \frac{c_1 + c_2}{2}\right)$ .

**Вопрос.** Какие координаты имеет середина отрезка  $AB$ , если  $A(-2; -3; -4)$ ,  $B(5; -1; -2)$ ?

**2.8.\*\* Доказательство формулы координат середины отрезка.** Пусть заданы точки  $A(a_1; b_1; c_1)$  и  $B(a_2; b_2; c_2)$ . Обозначим координаты середины  $C$  через  $(m; n; k)$ . Рассмотрим проекции  $A_1, B_1, C_1$  точек  $A, B, C$  на плоскость  $Oxy$ . Из свойств параллельного проектирования следует, что середина  $C$  отрезка  $AB$  проектируется в середину отрезка  $A_1B_1$ , то есть точка  $C$  проектируется в точку  $C_1$ . Поскольку точки  $A_1, B_1, C_1$  в плоскости  $Oxy$  имеют соответственно координаты  $(a_1; b_1), (a_2; b_2), (m; n)$ , то по формулам координат середины отрезка на плоскости получаем  $m = \frac{a_1 + a_2}{2}, n = \frac{b_1 + b_2}{2}$ . Если затем аналогично рассмотреть проекции точек  $A, B, C$  на плоскость  $Oxz$ , то получим ещё одно равенство  $k = \frac{c_1 + c_2}{2}$ .

**Вопрос.** Как доказать, что середины сторон пространственного четырёхугольника являются либо вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой?

**2.9. Параллельный перенос в пространстве.** Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат. Напомним, что параллельным переносом в пространстве, определяемым тройкой чисел  $(a; b; c)$ , называется преобразование точек пространства, при котором каждая точка  $M(x; y; z)$  переходит в точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  такую, что  $x_1 = x + a, y_1 = y + b, z_1 = z + c$ .

Иногда параллельный перенос, определяемый тройкой чисел  $(a; b; c)$ , называют параллельным переносом на  $(a; b; c)$  или параллельным переносом.

При параллельном переносе в пространстве выполняются следующие свойства:

- 1) разные точки переходят в разные точки;
- 2) всякая пространственная фигура переходит в равную ей фигуру;
- 3) если при параллельном переносе точка  $A$  переходит в точку  $A_1$  и точка  $B$  переходит в точку  $B_1$ , то  $AB = A_1B_1$ ;
- 4) середины отрезков  $AB_1$  и  $A_1B$  совпадают;
- 5) если точка  $B$  не лежит на прямой  $AA_1$ , то  $ABB_1A_1$  — параллелограмм.

Наличие свойства 5) позволяет говорить, что параллельный перенос в пространстве действует по «правилу параллелограмма».

**Вопрос.** В какую фигуру переходит плоскость при параллельном переносе в пространстве?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение координатных осей в пространстве.
2. Дайте определение координатных плоскостей в пространстве.



3. Как определяются координаты точки в пространстве?
4. Что можно сказать о координатах точки в пространстве, если известно, что эта точка лежит:
  - а) на оси  $Oz$ ; б) на оси  $Oy$ ; в) на оси  $Ox$ ?
5. Что можно сказать о координатах точки в пространстве, если известно, что она лежит:
  - а) на координатной плоскости  $Oxy$ ;
  - б) на координатной плоскости  $Oxz$ ;
  - в) на координатной плоскости  $Oyz$ ?
6. По какой формуле находится расстояние между точками  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ ?
7. Укажите координаты середины отрезка с концами  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ .
8. Как определяется параллельный перенос в пространстве с прямоугольной системой координат?
9. Сформулируйте свойства параллельного переноса в пространстве.
10. Почему говорят, что параллельный перенос в пространстве действует по «правилу параллелограмма»?

### Задачи и упражнения ■

1. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основанием  $ABCD$  и боковыми рёбрами  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  известны координаты следующих вершин:

- а)  $A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; 2; 0), A_1(0; 0; 2)$ ;
- б)  $B(0; 0; 0), A(3; 0; 0), C(0; -3; 0), B_1(0; 0; -3)$ ;
- в)  $A(0; 0; 0), C(-1; -1; 0), D(0; -1; 0), C_1(-1; -1; -1)$ ;
- г)\*  $A(1; 1; 3), B(1; 2; 3), D(0; 1; 3), A_1(1; 1; 2)$ .

Найдите координаты остальных вершин куба.

2. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основанием  $ABCD$  и боковыми рёбрами  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  известны координаты следующих вершин:

- а)  $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 3; 0), A_1(0; 0; 2)$ ;
- б)  $B(0; 0; 0), A(-2; 0; 0), C(0; -5; 0), B_1(0; 0; 1)$ ;
- в)  $A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), D(0; -1; 0), C_1(2; -1; -3)$ ;
- г)\*  $A(3; 4; 5), B(1; 4; 5), C(1; -1; 5), D_1(3; -1; 2)$ .

Найдите координаты остальных вершин прямоугольного параллелепипеда.



3. Через точку  $(2; 1; 6)$  провели плоскость, параллельную  $Oyz$ . В какой точке эта плоскость пересечёт ось  $Ox$ ?

4. Через точку  $A$  с координатами  $(1; 4; 2)$  провели прямую  $AB$ , параллельную оси  $Ox$ , которая пересекла  $Oyz$  в точке  $B$ . Найдите координаты точки  $B$ .

5. Какой вид имеют координаты точек прямой, которая:

- а) параллельна оси  $Ox$  и проходит через точку  $(0; 2; 3)$ ;
- б) параллельна оси  $Oy$  и проходит через точку  $(3; -2; 3)$ ;
- в) параллельна оси  $Oz$  и проходит через точку  $(-5; -5; -5)$ ?

6. Какой вид имеют координаты точек плоскости, которая:

- а) параллельна плоскости  $Oyz$  и проходит через точку  $(1; 2; 3)$ ;
- б) параллельна плоскости  $Oxz$  и проходит через точку  $(3; -2; -1)$ ;
- в) параллельна плоскости  $Oxy$  и проходит через точку  $(5; 0; -7)$ ?

7. Какой вид имеют координаты точек прямой, проходящей через точку  $(1; 2; 0)$  плоскости  $Oxy$  перпендикулярно этой плоскости?

8. Какой вид имеют координаты точек плоскости, проходящей через точку  $(0; 1; 1)$  перпендикулярно оси  $Ox$ ?

9. Найдите расстояние между точками с координатами:

- а)  $(0; 0; 0)$  и  $(1; 1; 1)$ ;
- б)  $(1; 2; 3)$  и  $(2; 1; 3)$ ;
- в)  $(1; 4; 6)$  и  $(2; 1; 4)$ ;
- г)  $\left(0; \frac{1}{2}; 3\right)$  и  $\left(\frac{1}{2}; 0; 4\right)$ .

10. Найдите координаты середины отрезка, если координаты концов отрезка равны:

- а)  $(0; 0; 0)$  и  $(1; 1; 1)$ ;
- б)  $(1; 2; 4)$  и  $(5; 6; 7)$ ;
- в)  $\left(0; \frac{1}{2}; 6\right)$  и  $\left(1; 5; \frac{1}{2}\right)$ ;
- г)  $(3; 4; 1)$  и  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ .

11. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основанием  $ABCD$  и боковыми рёбрами  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  известны координаты следующих вершин:  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(3; 0; 0)$ ,  $D(0; -3; 0)$ ,  $A_1(0; 0; 3)$ . Найдите координаты:

- а) середины ребра  $C_1 D_1$ ;
- б) середины отрезка  $B_1 C$ ;
- в) середины отрезка  $BD_1$ ;
- г) середины отрезка, концами которого являются середины рёбер  $B_1 C_1$  и  $CD$ .

12. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  известны координаты вершин:  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(-1; -1; 0)$ ,  $C(-1; 1; 0)$ ,  $D(1; 1; 0)$ ,  $S(0; 0; 5)$ . Найдите координаты:

- а) середины ребра  $SB$ ;

- б) середины медианы  $DM$  грани  $SCD$ ;  
 в) середины отрезка, концами которого являются середины рёбер  $AB$  и  $SC$ .

**13.\*\*** Правильный тетраэдр  $SABC$  с ребром 1 расположен в пространстве так, что центр основания  $ABC$  совпадает с началом  $O$  координат, луч  $OS$  является положительным лучом оси  $Oz$ , ордината точки  $A$  равна нулю, абсцисса и ордината точки  $B$  отрицательны. Найдите:

- а) координаты вершин тетраэдра;  
 б) координаты середины отрезка с концами в серединах рёбер  $SB$  и  $AC$ .

### Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Чему равно расстояние от точки  $M(-3; 2; -4)$  до плоскости  $Oxy$ ?

- 1) 1                      2) 2                      3) 3                      4) 4

**1.2.\*** Чему равно расстояние от точки  $M(2; -1; 3)$  до прямой  $Oz$ ?

- 1)  $\sqrt{3}$                       2)  $\sqrt{5}$                       3)  $2\sqrt{2}$                       4)  $\sqrt{10}$

**1.3.** Чему равно расстояние между точками  $A(2; -1; 3)$  и  $B(-1; 2; -3)$ ?

- 1)  $2\sqrt{6}$                       2)  $3\sqrt{6}$                       3)  $4\sqrt{6}$                       4)  $5\sqrt{6}$

**1.4.\*** Даны точки  $A(5; 3; 1)$  и  $C(4; -1; 3)$ . В каком случае точка  $C$  является серединой отрезка  $AB$ ?

- 1)  $B(3; -5; 5)$                       2)  $B(3; 2; 3)$                       3)  $B(6; 4; 3)$                       4)  $B(6; -5; 3)$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из указанных точек расположены от начала координат на расстоянии, не большем 6?

- 1)  $(-2; 4; -3)$                       2)  $(1; -5; 4)$                       3)  $(4; -2; -4)$                       4)  $(-3; -4; 3)$

**2.2.** При каких координатах точек  $A, B$  отрезок  $AB$  равен отрезку с концами  $C(2; 0; -3)$  и  $D(1; -1; -2)$ ?

- 1)  $A(3; 5; -4), B(2; 6; -3)$                       2)  $A(-2; -4; 1), B(-1; -5; 2)$   
 3)  $A(5; -2; -4), B(4; -1; -3)$                       4)  $A(-4; 3; 2), B(-5; 2; 3)$

**2.3.\*** В каких случаях середина отрезка  $AB$  расположена на оси ординат?

- 1)  $A(5; -2; -4), B(-4; 3; 5)$                       2)  $A(-2; 7; 3), B(-3; 1; 2)$   
 3)  $A(5; -2; -4), B(-5; 7; 4)$                       4)  $A(-2; 7; 3), B(2; -4; -3)$

2.4. Даны точки  $A(1;0;0)$  и  $B(1;4;0)$ . В каких случаях точка  $C$  является вершиной равнобедренного треугольника с основанием  $AB$ ?

- 1)  $C(1;2;0)$       2)  $C(4;-1;7)$       3)  $C(-3;2;6)$       4)  $C(5;2;-4)$

## ■ § 3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

**3.1. Координаты точки и вектора.** Пусть в пространстве выбрана точка  $O$ . Тогда для произвольной точки  $M$ , отличной от  $O$ , можно рассматривать направленный отрезок  $\overline{OM}$  с началом в точке  $O$  и концом в точке  $M$ . На рисунках направленный отрезок обычно изображают отрезком со стрелкой, направленной в конец вектора. Как и на плоскости, полученный направленный отрезок называется *вектором, связанным с точкой  $O$* .

Иногда вектор обозначают одной буквой. Например,  $\vec{a} = \overline{OM}$ . Для точки  $O$ , выбранной в качестве начала векторов, определяют также нулевой вектор, у которого конец совпадает с началом. Иногда нулевой вектор обозначают через  $\vec{0}$ .

**Вопрос.** Как называется вектор на плоскости, у которого начало и конец совпадают?

**3.2. Равенство векторов и его свойства.** Рассматривая векторы, связанные с различными точками пространства, как и на плоскости, определяют равенство векторов.

Вектор  $\overline{AB}$  называется равным вектору  $\overline{CD}$ , если при параллельном переносе, который точку  $A$  переводит в точку  $C$ , точка  $B$  переходит в точку  $D$ .

Равенство векторов записывают с помощью знака равенства.

Равенство векторов в пространстве обладает такими же основными свойствами, как и равенство векторов на плоскости. Напомним эти свойства.

1.  $\overline{AB} = \overline{AB}$ .

2. Если  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , то и  $\overline{CD} = \overline{AB}$ .

3. Если  $\overline{AB} = \overline{CD}$  и  $\overline{CD} = \overline{EF}$ , то  $\overline{AB} = \overline{EF}$ .

4. Если  $\overline{AB} = \overline{CD}$  и точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой, то  $ABDC$  — параллелограмм.

5. Равенство  $\overline{AB} = \overline{CD}$  равносильно равенству  $\overline{AC} = \overline{BD}$ .

6. Для каждого вектора  $\overline{AB}$  и каждой точки  $C$  существует единственный вектор, связанный с точкой  $C$  и равный вектору  $\overline{AB}$ .



Доказательства перечисленных свойств аналогичны доказательствам соответствующих свойств на плоскости. Мы эти доказательства приводить не будем.

**Вопрос.** Что в координатном пространстве называют параллельным переносом, определяемым тройкой чисел  $(a; b; c)$ ?

**3.3. Координаты вектора.** В координатном пространстве координаты векторов, связанных с различными точками, определяют таким образом, что равенство векторов равносильно равенству их соответствующих координат.

Координатами вектора  $\overrightarrow{AB}$  с началом  $A(a_1; b_1; c_1)$  и концом  $B(a_2; b_2; c_2)$  называется упорядоченная тройка чисел

$$(a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1).$$

Таким образом, координаты вектора получаются вычитанием из координат конца вектора соответствующих координат его начала.

**Вопрос.** Как доказать, что равенство двух векторов равносильно равенству их соответствующих координат?

**3.4. Сумма векторов и правило параллелограмма.** В прямоугольной системе координат сумму векторов, связанных с началом  $O$ , можно определить с помощью координат.

Суммой  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  векторов  $\overrightarrow{OA} = (a; b; c)$  и  $\overrightarrow{OB} = (m; n; k)$  называется вектор  $\overrightarrow{OC}$  с координатами  $(a + m; b + n; c + k)$ , то есть  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .

Как и на плоскости, сумму двух векторов, связанных с одной точкой, можно находить по «правилу параллелограмма».

**Пример 1.** Рассмотрим связанные с началом  $O$  векторы  $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$  и  $\overrightarrow{OB} = (-3; 4; 1)$ . По формуле расстояния между точками имеем:  $OA = \sqrt{14}$ ,  $OB = \sqrt{26}$ ,  $AB = \sqrt{54}$ . Поскольку  $\sqrt{14} + \sqrt{26} > 3 + 5 > \sqrt{54}$ , то точки  $O, A, B$  не лежат на одной прямой.

По определению  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (2 - 3; -1 + 4; 3 + 1) = (-1; 3; 4)$ . Заметим, что параллельный перенос, который точку  $O$  переводит в точку  $A$ , определяется тройкой чисел  $(2; -1; 3)$ . Этот параллельный перенос точку  $B(-3; 4; 1)$  переводит в точку с координатами  $(2 - 3; -1 + 4; 3 + 1)$  или  $(-1; 3; 4)$ , то есть в точку  $C$ . Но тогда четырёхугольник  $OACB$  — параллелограмм. Следовательно, в данном примере сумма векторов  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  изображается диагональю параллелограмма, построенного на отрезках  $OA$  и  $OB$ , как на сторонах (рис. 1).

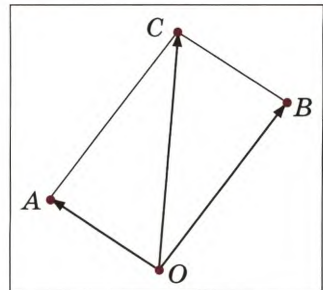


Рис. 1

**Вопрос.** Как найти сумму  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$  на рис. 1?

### 3.5. Сложение векторов по правилу треугольника.

**Пример 2.** Рассмотрим связанные с началом  $O$  векторы  $\overrightarrow{OA} = (1; 3; -2)$  и  $\overrightarrow{OB} = (-2; -1; 4)$ . Из точки  $A$  отложим вектор  $\overrightarrow{AC}$ , равный вектору  $\overrightarrow{OB}$ . Для этого рассмотрим параллельный перенос, определяемый тройкой чисел  $(-2; -1; 4)$ , который точку  $O$  переводит в точку  $B$ . Этот параллельный перенос переводит точку  $A$  в точку  $C$  с координатами  $(1 - 2; 3 - 1; -2 + 4)$  или  $(-1; 2; 2)$ . Значит,  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ , где  $C(-1; 2; 2)$ .

С другой стороны, по правилу вычисления координат суммы векторов имеем  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (1 - 2; 3 - 1; -2 + 4) = (-1; 2; 2) = \overrightarrow{OC}$ . Следовательно, сумма векторов  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  изображается стороной  $OC$  треугольника  $OAC$ , построенного так, что  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$  (рис. 2).

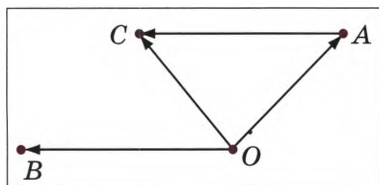


Рис. 2

Таким образом,  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ , и сумма векторов получена «по правилу треугольника».

Аналогично сумму трёх и более векторов в пространстве можно находить «по правилу многоугольника».

**Вопрос.** Как находить сумму четырёх векторов по «правилу многоугольника»?

**3.6. Нулевой вектор.** Особую роль при сложении векторов играет *нулевой вектор*  $\vec{0}$ , у которого конец совпадает с началом. В прямоугольной системе координат с началом  $O$  этот вектор можно записать в виде  $\overrightarrow{OO}$ . Поэтому  $\vec{0} = (0; 0; 0)$ .

При сложении произвольного вектора  $\vec{m} = (a; b; c)$  с нулевым вектором получаем  $\vec{m} + \vec{0} = (a; b; c) + (0; 0; 0) = (a; b; c) = \vec{m}$ , то есть  $\vec{m} + \vec{0} = \vec{m}$ .

Для вектора  $\vec{m} = (a; b; c)$  вектор с координатами  $(-a; -b; -c)$  называется *противоположным вектору  $\vec{m}$*  и обозначается через  $-\vec{m}$ .

При сложении вектора  $\vec{m} = (a; b; c)$  и противоположного ему вектора  $-\vec{m} = (-a; -b; -c)$  получаем  $\vec{m} + (-\vec{m}) = (a; b; c) + (-a; -b; -c) = (0; 0; 0) = \vec{0}$ , то есть  $\vec{m} + (-\vec{m}) = \vec{0}$ .

**Вопрос.** Пусть векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  противоположны друг другу. Как геометрически связаны между собой точки  $O, A$  и  $B$ ?

### 3.7. Разность векторов.

Разностью  $\vec{a} - \vec{b}$  векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , для которого выполняется равенство  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ .



Разность  $\vec{a} - \vec{b}$  можно находить с помощью вектора, противоположного вектору  $\vec{b}$ .

**Пример 3.** Пусть  $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (4; -2; 2)$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (3; -1; 3)$ . Тогда вектор  $(-\vec{b}) = (-3; 1; -3) = \overrightarrow{OD}$  противоположен вектору  $\vec{b}$ . Вектор  $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (4; -2; 2) + (-3; 1; -3) = (4 - 3; -2 + 1; 2 - 3) = \overrightarrow{OC}$  удовлетворяет равенству

$$\vec{b} + \vec{c} = (3; -1; 3) + (4 - 3; -2 + 1; 2 - 3) = (4; -2; 2) = \vec{a}.$$

Разность  $\vec{a} - \vec{b}$  изображается диагональю  $OC$  параллелограмма, построенного на отрезках  $OA$  и  $OD$ , как на сторонах (рис. 3). Разность векторов можно находить также по правилу треугольника.

**Пример 4.** Пусть  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  и  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  (рис. 4). Тогда разностью  $\vec{b} - \vec{a}$  является вектор  $\overrightarrow{AB}$ , поскольку  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ , как это следует из «правила треугольника» сложения векторов.

**Вопрос.** Чему равна разность  $\vec{a} - \vec{a}$ ?

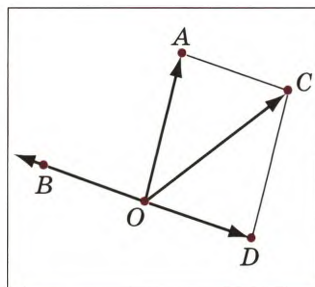


Рис. 3

**3.8. Свойства сложения и вычитания векторов.** В пространстве операции сложения и вычитания векторов имеют следующие основные свойства.

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

2.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

3.  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

4. Для каждого вектора  $\vec{a}$  существует такой вектор  $(-\vec{a})$ , что  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .

5. Если  $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ , то по определению  $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ .

Эти свойства нетрудно доказать с помощью координат.

**Вопрос.** Как доказать свойство 2?

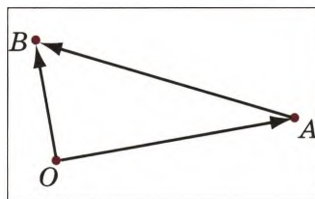


Рис. 4

**3.9. Примеры решения задач.** При решении геометрических задач с использованием векторов важно научиться представлять векторы в виде сумм других векторов. В этом помогает «правило параллелограмма».

**Пример 5.** Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду  $SABCD$ . Пусть точка  $M$  — середина ребра  $SC$ . Представим вектор  $\overrightarrow{AM}$  в виде суммы векторов, направленных по лучам  $AC$  и  $AS$ .



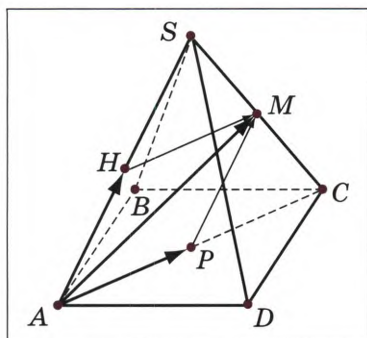


Рис. 5

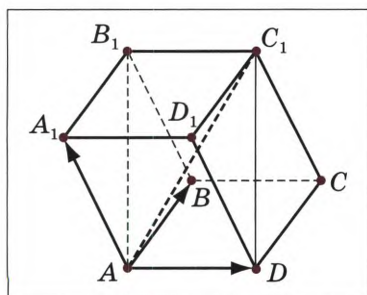


Рис. 6

В плоскости  $ASC$  через точку  $M$  проведём прямые  $MP$  и  $MH$ , соответственно параллельные прямым  $AS$  и  $AC$  (рис. 5). В результате такого построения получим параллелограмм  $APMH$ . Поэтому  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AP}$ .

**Пример 6.** Рассмотрим параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 6). Представим вектор  $\overrightarrow{AC_1}$  в виде суммы векторов, направленных по лучам  $AB$ ,  $AD$  и  $AA_1$ .

Проведём плоскость через точки  $A$ ,  $D$ ,  $C_1$ . Эта плоскость пересекает грань  $AA_1 B_1 B$  по отрезку  $AB_1$ , причём  $AB_1 C_1 D$  — параллелограмм. Поэтому  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB_1}$ . Но поскольку  $AA_1 B_1 B$  — параллелограмм, то  $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB}$ . Следовательно,  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$ .

**Вопрос.** Как доказать, что  $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ ?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется вектор, связанный с точкой  $O$ ?
2. Как определяют координаты вектора  $\overrightarrow{OM}$ , связанного с началом  $O$  прямоугольной системы координат?
3. Как определяется равенство двух векторов?
4. Сформулируйте основные свойства равенства векторов.
5. Как определить координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$  в прямоугольной системе координат, если заданы координаты точки  $A(a_1; b_1; c_1)$  и координаты точки  $B(a_2; b_2; c_2)$ ?
6. Как найти координаты суммы векторов  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  в прямоугольной системе координат, если  $\overrightarrow{OA} = (a; b; c)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (m; n; k)$ ?
7. Как сформулировать «правило параллелограмма» для нахождения суммы векторов?
8. Как сформулировать «правило треугольника» для нахождения суммы векторов?

9. Как определяется нулевой вектор?

10. Как определяется вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$ ?

11. Как по координатам вектора  $(a; b; c)$  найти координаты противоположного вектора?

12. Как определяется разность двух векторов?

13. Как найти координаты разности  $\vec{OA} - \vec{OB}$  векторов  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ , если  $\vec{OA} = (a; b; c)$ ,  $\vec{OB} = (m; n; k)$ ?

14. Какие свойства операций сложения и вычитания векторов вы знаете?

### Задачи и упражнения ■

1. Найдите координаты вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ , если заданы координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\text{а) } \vec{a} = (1; 4; 6), \vec{b} = (2; 1; 3); \quad \text{б) } \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; 3; -\frac{1}{4}\right), \vec{b} = \left(-\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{4}\right);$$

$$\text{в) } \vec{a} = (6; 4; 2), \vec{b} = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{6}; -\frac{1}{2}\right); \quad \text{г) } \vec{a} = (2; -6; 1), \vec{b} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{10}\right).$$

2. Найдите координаты векторов  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{AB} + \vec{CD}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BD}$ ,  $\vec{AC} + \vec{BD}$ , если даны координаты точек  $A, B, C, D$ :

$$\text{а) } A(1; 4; 2), B(1; 2; 0), C(2; 6; 4), D(1; 3; 1);$$

$$\text{б) } A\left(1; \frac{1}{2}; -1\right), B\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right), C\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; 0\right), D(1; 2; 2);$$

$$\text{в) } A\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{10}\right), C\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{10}\right), D\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right);$$

$$\text{г) } A\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{5}\right), B\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{5}; 1\frac{1}{2}\right), C\left(2; 2; -\frac{1}{10}\right), D\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

3. Найдите координаты вектора  $-\vec{a}$ , если даны координаты вектора  $\vec{a}$ :

$$\text{а) } \vec{a} = (-1; 4; 2); \quad \text{б) } \vec{a} = (-1; 3; 6); \quad \text{в) } \vec{a} = (2; -1; -1);$$

$$\text{г) } \vec{a} = (4; -2; 6); \quad \text{д) } \vec{a} = \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{5}\right).$$

4. Найдите координаты векторов  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{b} - \vec{a}$ , если заданы координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\text{а) } \vec{a} = (1; 1; 1), \vec{b} = (1; 4; 6);$$

$$\text{б) } \vec{a} = (2; 1; 2), \vec{b} = (1; 6; 4);$$

$$\text{в) } \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; 1\right), \vec{b} = \left(1; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right);$$

$$\text{г) } \vec{a} = (1; -2; -4), \vec{b} = (2; 0; 3);$$

$$\text{д) } \vec{a} = \left(3; 4; -\frac{1}{2}\right), \vec{b} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 4\right).$$

5. Найдите координаты векторов  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD}$ ,  $\overline{AB} - \overline{CD}$ ,  $\overline{CD} - \overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AC} + \overline{BD}$ ,  $\overline{AC} - \overline{BD}$ ,  $\overline{BD} - \overline{AC}$ , если даны координаты точек  $A, B, C, D$ :

- а)  $A(0; 1; 0)$ ,  $B(2; 1; 3)$ ,  $C(4; 6; 0)$ ,  $D(2; 0; 2)$ ;  
 б)  $A(1; -1; 4)$ ,  $B(2; 1; 6)$ ,  $C(4; 1; 3)$ ,  $D(3; 1; 4)$ ;  
 в)  $A(1; -4; 2)$ ,  $B(3; 2; -2)$ ,  $C(1; 6; 2)$ ,  $D(5; 3; 4)$ ;  
 г)  $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}\right)$ ,  $B\left(1; \frac{1}{5}; 1\frac{1}{2}\right)$ ,  $C\left(-1\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; 2\right)$ ,  $D\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$ .

6.\* В кубе  $ABCA_1B_1C_1D_1$  точки  $M, N, K, L$  — середины рёбер  $AB, BC, CD, AD$  основания, точки  $E, F, G, H$  — середины боковых рёбер  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$ , точки  $P, Q, R, S$  — середины рёбер  $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1$  соответственно. Укажите вектор, равный вектору:

- а)  $\overline{AF} + \overline{QG}$ ;      б)  $\overline{FK} + \overline{LP}$ ;      в)  $\overline{BH} + \overline{LF}$ ;      г)  $\overline{B_1L} + \overline{KC_1}$ ;  
 д)  $\overline{B_1M} - \overline{D_1A}$ ;      е)  $\overline{MQ} - \overline{KN}$ ;      ё)  $\overline{LR} - \overline{MD}$ ;      ж)  $\overline{CR} - \overline{MG}$ .

7.\* В четырёхугольной пирамиде  $SABCD$ , основанием которой является параллелограмм  $ABCD$ , точки  $M, N, K, L$  — середины рёбер  $AB, BC, CD, AD$ , точки  $E, F, G, H$  — середины рёбер  $SA, SB, SC, SD$  соответственно. Укажите вектор, равный вектору:

- а)  $\overline{HB} + \overline{MD}$ ;      б)  $\overline{GL} + \overline{HF}$ ;      в)  $\overline{BG} + \overline{KL}$ ;      г)  $\overline{CA} + \overline{LG}$ ;  
 д)  $\overline{FL} - \overline{GA}$ ;      е)  $\overline{EN} - \overline{KC}$ ;      ё)  $\overline{FH} - \overline{SL}$ ;      ж)  $\overline{SF} - \overline{DE}$ .

8. В трапеции  $ABCD$  длина основания  $BC$  в три раза больше длины основания  $AD$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей трапеции. Выразите вектор  $\overline{AO}$  через:

- а) векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{BD}$ ;      б)\*\* векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AD}$ .

9.\* Медианы в гранях  $SAB$  и  $SAC$  тетраэдра  $SABC$  пересекаются соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Выразите векторы  $\overline{CN}$ ,  $\overline{CM}$  через векторы  $\overline{CA}$ ,  $\overline{CB}$  и  $\overline{CS}$ .

10.  $ABCDEF$  — правильный шестиугольник. Выразите векторы  $\overline{BC}$  и  $\overline{BD}$  через векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AF}$ .

11.  $ABCD$  — параллелограмм, точка  $M$  — середина  $CD$ . Выразите векторы  $\overline{BD}$  и  $\overline{AM}$  через векторы  $\overline{BM}$  и  $\overline{MC}$ .

12. Дан параллелепипед  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Выразите векторы  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  через векторы  $\overline{DA_1}$ ,  $\overline{DC_1}$  и  $\overline{DB_1}$ .



## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Пусть задана точка  $A(-2; 4; -7)$ . При каких координатах точки  $B$  вектор  $\overline{AB}$  имеет координаты  $(-2; -1; 2)$ ?

- 1)  $(7; 10; 7)$       2)  $(3; -2; -1)$       3)  $(-7; -10; -7)$       4)  $(-4; 3; -5)$

**1.2.** Чему равна разность  $\vec{a} - \vec{b}$  при  $\vec{a} = (-1; -2; -3)$  и  $\vec{b} = (-5; -1; -8)$ ?

- 1)  $(4; -1; -5)$       2)  $(-4; -1; 5)$       3)  $(4; -1; 5)$       4)  $(-4; -1; -5)$

**1.3.** Чему равняется  $(-2; -1; -3) - ((-3; -2; -1) - (-1; -3; -2))$ ?

- 1)  $(-2; 2; -4)$       2)  $(0; -2; -4)$       3)  $(0; -2; 4)$       4)  $(2; -2; 4)$

**1.4.** Чему равна разность  $\overline{AB} - \overline{AC}$  при  $A(-1; 4; -2)$ ,  $B(2; 5; -1)$  и  $C(1; 6; -4)$ ?

- 1)  $(-1; 1; -3)$       2)  $(1; -1; 3)$       3)  $(2; 2; -6)$       4)  $(2; -2; 6)$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.\*** При каких координатах точки  $A$  отрезок  $AM$ , где  $M(1; -0,5; 1,5)$ , будет проходить через начало координат?

- 1)  $(-4; 2; -6)$       2)  $(-6; 2; -9)$       3)  $(-2; 1; -3)$       4)  $(-3; 2; -6)$

**2.2.** Какие из разностей равны вектору  $(5; 2; 1)$ ?

- 1)  $(4; -1; -5) - (-1; -3; -6)$       2)  $(7; 3; 1) - (2; 1; 3)$   
3)  $(-2; 1; 3) - (-7; -2; 2)$       4)  $(6; 4; -2) - (1; 2; -3)$

**2.3.** Пусть  $\vec{a} = (-2; 7; -1)$ . Для каких векторов  $\vec{b}$  все координаты разности  $\vec{a} - \vec{b}$  положительны?

- 1)  $\vec{b} = (-3; 2; 3)$       2)  $\vec{b} = (-4; 1; 2)$       3)  $\vec{b} = (-1; 5; -4)$       4)  $\vec{b} = (-6; 4; -3)$

**2.4.** В каких случаях  $\vec{m} - (\vec{n} - \vec{k})$  равняется нулевому вектору?

- 1)  $\vec{m} = (1; 3; -2)$ ,  $\vec{n} = (6; 1; 1)$ ,  $\vec{k} = (5; -2; 3)$   
2)  $\vec{m} = (-2; 4; 1)$ ,  $\vec{n} = (1; 5; 8)$ ,  $\vec{k} = (3; 1; 7)$   
3)  $\vec{m} = (3; -1; 4)$ ,  $\vec{n} = (5; -4; -1)$ ,  $\vec{k} = (2; -3; -5)$   
4)  $\vec{m} = (-1; -3; -5)$ ,  $\vec{n} = (3; 0; -7)$ ,  $\vec{k} = (4; 3; -1)$

## § 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ ПО СОСТАВЛЯЮЩИМ ■

**4.1. Умножение вектора на действительное число.** Определим с помощью координат умножение связанного вектора на число.

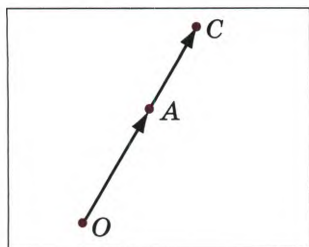


Рис. 1

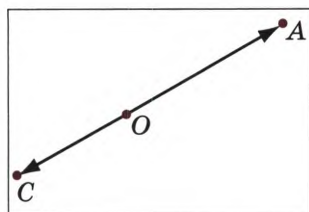


Рис. 2

Пусть дана система координат с началом  $O$ . Произведением вектора  $\vec{OA} = (a; b; c)$  на число  $t$  называется вектор  $(ta; tb; tc)$ .

Произведение вектора  $\vec{a}$  на число  $t$  обозначается через  $t \cdot \vec{a}$  или через  $t\vec{a}$ .

Определённая таким образом операция умножения вектора на число имеет следующий геометрический смысл.

*Первый случай.* Вектор  $\vec{a}$  нулевой. Тогда для любого числа  $t$  вектор  $t\vec{a}$  также нулевой, а поэтому конец вектора  $t\vec{a}$  совпадает с его началом.

*Второй случай.* Число  $t$  равно нулю. Тогда для любого вектора  $\vec{a}$  вектор  $t\vec{a}$  равен нулевому вектору.

*Третий случай.*  $\vec{OA} \neq \vec{0}$  и  $t > 0$ . Тогда  $\vec{OC} = t\vec{OA}$  — это такой связанный с точкой  $O$  вектор, для которого точка  $C$  лежит на луче  $OA$  и  $|OC| : |OA| = t$  (рис. 1).

*Четвёртый случай.*  $\vec{OA} \neq \vec{0}$  и  $t < 0$ . Тогда  $\vec{OC} = t\vec{OA}$  — это такой связанный с точкой  $O$  вектор, для которого точка  $A$  лежит на луче, дополнительном к лучу  $OA$  и  $|OC| : |OA| = |t|$  (рис. 2).

**Вопрос.** Как доказать, что  $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ ?

**4.2.\*\* Доказательство геометрических свойств умножения вектора на число.** Рассмотрим доказательство геометрического свойства умножения вектора на положительное число.

Пусть  $t > 0$  и  $\vec{OA} = (a; b; c)$ . Построим на луче  $OA$  точку  $C$  так, что  $|OC| : |OA| = t$ . Проведём плоскость  $\alpha$  через ось  $Ox$  и прямую  $OA$ . В плоскости  $\alpha$  через точки  $A$  и  $C$  проведём прямые  $m$  и  $n$ , перпендикулярные  $Ox$  и пересекающие ось  $Ox$  соответственно

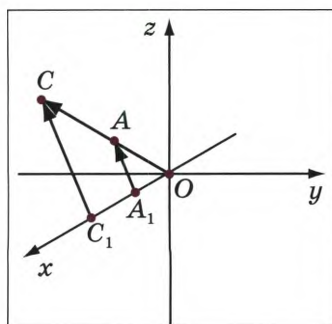


Рис. 3

в точках  $A_1$  и  $C_1$  (рис. 3). Тогда координата точки  $A_1$  по оси  $Ox$  — это абсцисса точки  $A$ , а координата точки  $C_1$  по оси  $Ox$  — это абсцисса точки  $C$ . Далее нужно рассмотреть несколько случаев в зависимости от знака абсциссы точки  $A$ .

I. Пусть абсцисса  $a$  точки  $A$  положительна, как это изображено на рис. 3. Тогда прямые







Справедливо и обратное к этому утверждение. Пусть  $M$  — произвольная точка прямой  $OA$ . Вычислим отношение  $|\overline{OM}| : |\overline{OA}| = k$  и определим число  $t$  так, что  $t = k$ , если точка  $M$  лежит на луче  $OA$ , и  $t = -k$ , если точка  $M$  лежит на продолжении луча  $OA$ . Из геометрического смысла умножения вектора на число получаем, что  $\overline{OM} = t \cdot \overline{OA}$ .

Как и на плоскости, связанные с точкой  $O$  векторы  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$  называются *коллинеарными*, если точки  $O, A, B$  лежат на одной прямой.

Доказанное в этом пункте свойство можно сформулировать так:

ненулевой вектор  $\overline{OA}$  и вектор  $\overline{OM}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда найдётся такое число  $t$ , что  $\overline{OM} = t \cdot \overline{OA}$ .

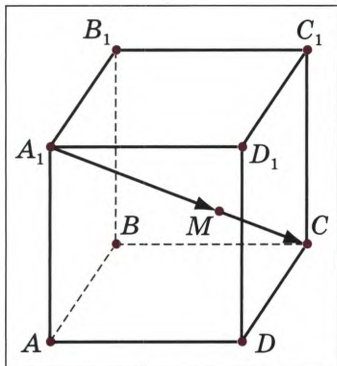


Рис. 5

**Пример 1.** Отметим на диагонали  $A_1C$  куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  точку  $M$  такую, что  $CM = \frac{1}{3} A_1C$  (рис. 5). Получаем, что точки  $A_1, M, C$  лежат на одной прямой, а поэтому векторы  $\overline{A_1M}$  и  $\overline{A_1C}$  коллинеарны. Поскольку  $|A_1M| : |A_1C| = \frac{2}{3}$  и точка  $M$  лежит на луче  $A_1C$ , то приходим к равенству  $\overline{A_1M} = \frac{2}{3} \overline{A_1C}$ .

**Вопрос.** Как в рассмотренном примере изобразить связанный с точкой  $A$  вектор, равный вектору  $\frac{2}{3} \overline{A_1C}$ ?

**4.5. Сонаправленные векторы.** Два вектора  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  пространства, связанные с разными точками, называют *коллинеарными*, если равные им и связанные с одной точкой векторы коллинеарны.

Из предыдущего пункта следует, что если вектор  $\overline{AB}$  ненулевой, то  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда найдётся такое число  $t$ , что  $\overline{CD} = t\overline{AB}$ . При этом векторы  $\overline{CD}$  и  $\overline{AB}$  называются *сонаправленными*, если число  $t$  больше нуля; векторы  $\overline{CD}$  и  $\overline{AB}$  называются *противоположно направленными*, если число  $t$  меньше нуля.

**Вопрос.** Как доказать, что коллинеарные векторы лежат на параллельных прямых?

**4.6. Параметрическое задание прямой.** Используя операции над векторами, координаты всех точек прямой можно задать с помощью переменной, которую обычно называют параметром.

**Пример 2.** Пусть  $O$  — начало системы координат и  $A(5; -4; 3)$ ,  $B(-1; -2; 1)$  — две заданные точки. Запишем координаты всех точек пря-

мой  $AB$ . Для этого сначала найдём координаты вектора  $\overline{AB}$  и получим  $\overline{AB} = (-1-5; -2-(-4); 1-3) = (-6; 2; -2)$ . Для каждой точки  $K$  прямой  $AB$  векторы  $\overline{AK}$  и  $\overline{AB}$  коллинеарны, а поэтому  $\overline{AK} = t\overline{AB} = t(-6; 2; -2) = (-6t; 2t; -2t)$ , где  $t$  — некоторое число, соответствующее точке  $K$ . По «правилу треугольника» имеем

$$\overline{OK} = \overline{OA} + \overline{AK} = (5; -4; 3) + (-6t; 2t; -2t) = (5 - 6t; -4 + 2t; 3 - 2t).$$

Обозначив координаты точки  $K$  в виде  $(x; y; z)$ , получаем, что координаты вектора  $\overline{OK}$  равны соответствующим координатам точки  $K$ . Отсюда

$$\begin{cases} x = 5 - 6t, \\ y = -4 + 2t, \\ z = 3 - 2t. \end{cases} \quad (1)$$

Подставляя в эти формулы вместо  $t$  различные конкретные числа, можем получать координаты различных точек прямой  $AB$ .

Формулы (1) называют *параметрическим заданием прямой*. Параметрическое задание прямой также называют заданием прямой в *параметрическом виде*.

**Вопрос.** Проходит ли прямая  $x = 3 + 2t$ ,  $y = 4 - 3t$ ,  $z = 2 + t$  через точку  $(-1; 10; -1)$ ?

**4.7. Компланарные векторы.** Возьмём два неколлинеарных вектора  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$ , связанных с точкой  $O$ . Для произвольных чисел  $t$  и  $s$  рассмотрим вектор  $\overline{OP} = t \cdot \overline{OA} + s \cdot \overline{OB}$ .

Если  $s = 0$ , то вектор  $\overline{OP}$  изображается так, что точка  $P$  лежит на прямой  $OA$ , а поэтому точка  $P$  лежит и в плоскости  $OAB$ .

Если  $t = 0$ , то вектор  $\overline{OP}$  изображается так, что точка  $P$  лежит на прямой  $OB$ , а поэтому точка  $P$  лежит и в плоскости  $OAB$ .

Если  $t \neq 0$  и  $s \neq 0$ , то  $t \cdot \overline{OA} = \overline{OM}$ ,  $s \cdot \overline{OB} = \overline{ON}$ ,  $t \cdot \overline{OA} + s \cdot \overline{OB} = \overline{OM} + \overline{ON} = \overline{OP}$ , причём точка  $M$  лежит на прямой  $OA$ , точка  $N$  лежит на прямой  $OB$  и четырёхугольник  $OMPN$  — параллелограмм (рис. 6). Следовательно, в этом случае точка  $P$  также лежит в плоскости  $OAB$ .

Таким образом, когда векторы  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$  неколлинеарны, то при произвольных  $t$  и  $s$  вектор  $\overline{OP} = t\overline{OA} + s\overline{OB}$  изображается таким направленным отрезком  $\overline{OP}$ , что точка  $P$  лежит в плоскости  $OAB$ .

Справедливо и обратное к этому утверждение. Пусть  $F$  — произвольная точка плос-

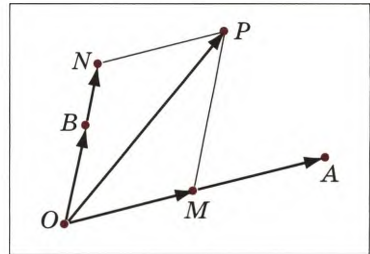


Рис. 6



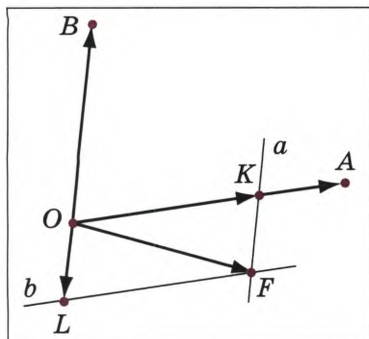


Рис. 7

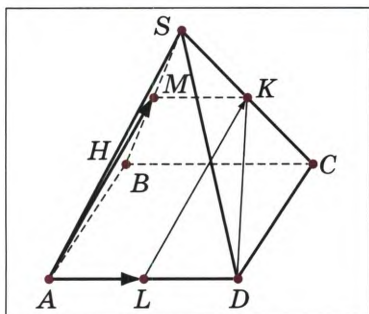


Рис. 8

кости  $OAB$ . Проведём через точку  $F$  прямую  $a$  параллельно прямой  $OB$ . Поскольку прямые  $OA$  и  $a$  не параллельны, то имеется точка  $K$  их пересечения (рис. 7). Тогда вектор  $\overrightarrow{OK}$  коллинеарен вектору  $\overrightarrow{OA}$ , а поэтому найдётся такое число  $t$ , что  $\overrightarrow{OK} = t \cdot \overrightarrow{OA}$ . Аналогично проведём через точку  $F$  прямую  $b$  параллельно прямой  $OA$  и отметим точку  $L$  её пересечения с прямой  $OB$  (рис. 7). Тогда вектор  $\overrightarrow{OL}$  коллинеарен вектору  $\overrightarrow{OB}$ , а поэтому найдётся такое число  $s$ , что  $\overrightarrow{OL} = s \cdot \overrightarrow{OB}$ . По «правилу параллелограмма» получаем

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} = t\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}.$$

Три вектора  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ , связанные с точкой  $O$ , называются *компланарными*, если точки  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежат в одной плоскости.

Доказанное в этом пункте свойство можно сформулировать так:

неколлинеарные векторы  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$  и вектор  $\overrightarrow{OM}$  компланарны тогда и только тогда, когда найдутся такие числа  $t$  и  $s$ , что  $\overrightarrow{OM} = t \cdot \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{OB}$ .

**Пример 3.** Рассмотрим в правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  точки  $M$  и  $K$  — середины рёбер  $SB$  и  $SC$  (рис. 8). Тогда точки  $A$ ,  $D$ ,  $M$ ,  $K$  лежат в одной плоскости. Поэтому вектор  $\overrightarrow{AK}$  можно выразить через векторы  $\overrightarrow{AM}$  и  $\overrightarrow{AD}$ . Для этого проведём  $KL \parallel AM$  и получим параллелограмм  $AMKL$ . Так как  $MK = \frac{1}{2}AD = AL$ , то  $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ .

Три вектора  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{EF}$  пространства называют *компланарными*, если соответственно равные им и связанные с одной точкой векторы компланарны.

**Вопрос.** Как доказать, что три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они лежат на трёх прямых, параллельных одной плоскости?

**4.8. Линейная комбинация векторов.** Возьмём три некопланарных вектора  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ , связанных с точкой  $O$ . Тогда прямая  $OC$  не ле-



жит в плоскости  $OAB$ . Пусть  $P$  — произвольная точка пространства. Проведём через точку  $P$  плоскость  $\alpha$ , параллельную плоскости  $OAB$ , и прямую  $a$ , параллельную прямой  $OC$ . Прямая  $OC$  не параллельна плоскости  $\alpha$ , поэтому имеется их точка пересечения, которую обозначим через  $L$ . Аналогично прямая  $a$  не параллельна плоскости  $OAB$ , поэтому имеется их точка пересечения, которую обозначим через  $F$  (рис. 9). В результате получаем вектор  $\overrightarrow{OL}$ , коллинеарный вектору  $\overrightarrow{OC}$ , и вектор  $\overrightarrow{OF}$ , компланарный с векторами  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$ . Поэтому  $\overrightarrow{OL} = u \cdot \overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{OF} = s \cdot \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{OB}$ , где  $u, s, t$  — соответствующие числа. По «правилу параллелограмма» получаем  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OL}$ . Следовательно,

$$\overrightarrow{OP} = s \cdot \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{OB} + u \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Таким образом, вектор  $\overrightarrow{OP}$  представлен в виде *линейной комбинации* векторов  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ .

Следствием этого результата является общее утверждение.

**Всякий вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации трёх некопланарных векторов.**

**Пример 4.** В треугольной пирамиде  $SABC$  медианы грани  $SBC$  пересекаются в точке  $M$ . Разложить вектор  $\overrightarrow{AM}$  по векторам  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AS}$ .

Рассмотрим плоскость  $ASM$ , пересекающую ребро  $BC$  в середине  $K$ . По свойству точки пересечения медиан треугольника имеем  $SM : MK = 2 : 1$ . Проведём прямые  $FM \parallel AS$  и  $EM \parallel AK$ . По теореме Фалеса  $AE : ES = KM : MS = 1 : 2$ , откуда  $AE = \frac{1}{3}AS$ , и  $AF : FK = SM : MK = 2 : 1$ , откуда  $AF = \frac{2}{3}AK$  (рис. 10). После этого в плоскости  $ABC$  проведём через точку  $F$  прямые  $GF \parallel AC$  и  $HF \parallel AB$ , а через точку  $K$  — прямые  $KP \parallel AC$  и  $KQ \parallel AB$ . В результате таких построений получаем, что  $AP = \frac{1}{2}AB$ ,  $AG = \frac{2}{3}AP = \frac{1}{3}AB$ ,  $AQ = \frac{1}{2}AC$ ,  $AH = \frac{2}{3}AQ = \frac{1}{3}AC$ .

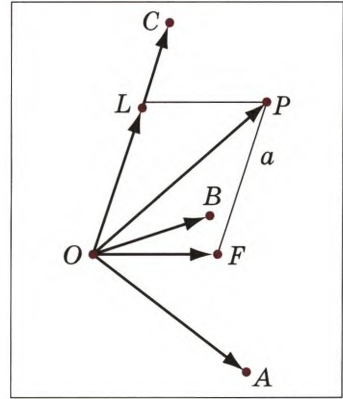


Рис. 9

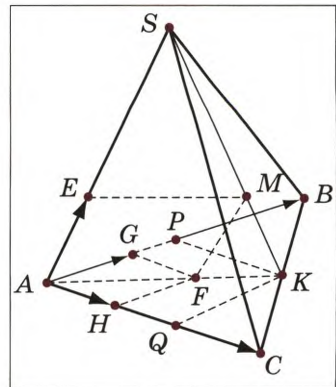


Рис. 10

Следовательно,  $\overline{AF} = \overline{AG} + \overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$  и  $\overline{AM} = \overline{AE} + \overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AS} + \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}$ .

**Вопрос.** Как в рассмотренном примере разложить по векторам  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  и  $\overline{AS}$  вектор, связанный с точкой  $A$  и равный вектору  $\overline{MA}$ ?

**4.9. Единственность разложения вектора по трём некопланарным векторам.** Докажем, что каждый вектор пространства можно единственным образом разложить по трём некопланарным векторам.

Пусть векторы  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  и  $\overline{OC}$  некопланарны. Предположим, что вектор  $\overline{OP}$  двумя разными способами представляется в виде линейной комбинации векторов  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  и  $\overline{OC}$ :

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= x_1\overline{OA} + y_1\overline{OB} + z_1\overline{OC}, \\ \overline{OP} &= x_2\overline{OA} + y_2\overline{OB} + z_2\overline{OC}.\end{aligned}$$

Поскольку эти разложения различны, то хотя бы при одном из векторов  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  коэффициенты различны. Пусть для определённости  $x_1 \neq x_2$ . Тогда

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \overline{OP} - \overline{OP} = (x_1\overline{OA} + y_1\overline{OB} + z_1\overline{OC}) - (x_2\overline{OA} + y_2\overline{OB} + z_2\overline{OC}) = \\ &= (x_1 - x_2)\overline{OA} + (y_1 - y_2)\overline{OB} + (z_1 - z_2)\overline{OC}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)\overline{OA} &= (y_1 - y_2)\overline{OB} + (z_1 - z_2)\overline{OC}, \\ \overline{OA} &= \frac{(y_1 - y_2)}{(x_2 - x_1)}\overline{OB} + \frac{(z_1 - z_2)}{(x_2 - x_1)}\overline{OC}.\end{aligned}$$

Следовательно,  $\overline{OA} = t \cdot \overline{OB} + s \cdot \overline{OC}$ , где  $t$  и  $s$  — соответствующие числа. По признаку из пункта 4.7 получаем, что векторы  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  и  $\overline{OC}$  компланарны, но это противоречит условию.

Таким образом, предположение о существовании различных представлений вектора  $\overline{OP}$  в виде линейной комбинации векторов  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  и  $\overline{OC}$  приводит к противоречию.

Единственность разложения вектора по трём некопланарным векторам означает, что соответствующая линейная комбинация векторов не зависит от способа её нахождения.

**Вопрос.** Пусть  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$  — четыре произвольных вектора пространства. Как доказать, что найдутся числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  такие, что  $x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC} + t\overline{OD} = \vec{0}$ , причём хотя бы одно из чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$  не равно нулю?



**4.10.\*\* Косоугольные системы координат.** В пространстве можно вводить не только прямоугольные системы координат.

**Пример 5.** Пусть  $OABC$  — правильный тетраэдр с ребром  $a$ . Примем точку  $O$  за начало системы координат. Рассмотрим некомпланарные векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  в указанном порядке. Тогда каждый вектор  $\overrightarrow{OM}$  пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Упорядоченную тройку чисел  $(x; y; z)$  будем считать *координатами точки  $M$  в косоугольной системе координат при выборе в пространстве базиса  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и начала  $O$ .*

Таким способом каждой точке пространства ставится в соответствие единственная тройка чисел  $(x; y; z)$ , а каждой тройке чисел  $(x; y; z)$  ставится в соответствие единственная точка  $M$  такая, что  $\overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ .

**Вопрос.** Как показать, что векторы  $(1; 1; 1)$ ,  $(1; 1; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$  являются базисом в пространстве и определяют некоторую косоугольную систему координат?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Как определяется умножение вектора на число?
2. Какие свойства операции умножения вектора на число вы знаете?
3. Какие векторы называются коллинеарными?
4. Какие векторы называются сонаправленными?
5. Какие векторы называются противоположно направленными?
6. Приведите пример параметрического задания прямой.
7. В каком случае три вектора называются коллинеарными?
8. Что называется линейной комбинацией трёх векторов?
9. Объясните, почему любой вектор в трёхмерном пространстве можно единственным образом разложить по трём некомпланарным векторам.
- 10.\*\* Приведите пример косоугольной системы координат.

### Задачи и упражнения ■

1. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Докажите, что векторы  $\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{BC}$  коллинеарны.
2. Дана трапеция  $ABCD$ ,  $MN$  — её средняя линия,  $AD$  — основание. Докажите, что векторы  $\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{MN}$  коллинеарны.



3. Медианы граней  $SAB$  и  $SAC$  тетраэдра  $SABC$  пересекаются в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что вектор  $\overrightarrow{MN}$  коллинеарен вектору  $\overrightarrow{BC}$ .

4. В тетраэдре  $SABC$  точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SB$  и  $SC$ . Разложите векторы  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{BN}$  и  $\overrightarrow{MN}$  по векторам  $\overrightarrow{SA}$ ,  $\overrightarrow{SB}$ ,  $\overrightarrow{SC}$ .

5. В треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  диагонали грани  $BB_1C_1C$  пересекаются в точке  $M$ . Разложите векторы  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{A_1M}$  по векторам  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{CC_1}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ .

6.\* Докажите, что любые ненулевые сонаправленные векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  удовлетворяют условию  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ , где через  $|\vec{a}|$  и  $|\vec{b}|$  обозначены длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

7. Пусть векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны. Определите числа  $x$  и  $y$ , если равны векторы:

а)  $2x\vec{a} - 4y\vec{b}$  и  $(12 - 5y)\vec{a} + (7 - x)\vec{b}$ ;

б)  $(4 - x)\vec{a} + (7 + 3y)\vec{b}$  и  $x\vec{a} + 2x\vec{b}$ ;

в)  $(2x + 4y)\vec{a} + (2y + 1)\vec{b}$  и  $6\vec{a} + x\vec{b}$ ;

г)  $3x\vec{a} + y\vec{b}$  и  $(y - 4)\vec{a} + (10 - 5x)\vec{b}$ .

8. Пусть векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны. Найдите число  $x$ , если коллинеарны векторы:

а)  $(2x - 1)\vec{a} + 2\vec{b}$  и  $5\vec{a} + x\vec{b}$ ;

б)  $(x - 1)\vec{a} + \vec{b}$  и  $2\vec{a} - 2\vec{b}$ ;

в)  $2\vec{a} + (4x - 1)\vec{b}$  и  $(2x + 4)\vec{a} + 9\vec{b}$ ;

г)  $3\vec{a} + 2\vec{b}$  и  $(2x + 3)\vec{a} + (x + 1)\vec{b}$ .

9. Определите, при каких  $x, y$  вектор  $\overrightarrow{AB}$  коллинеарен вектору  $\overrightarrow{CD}$ , если:

а)  $A(1; x; 2)$ ,  $B(2; 4; y)$ ,  $C(1; 3; 2)$ ,  $D(0; 1; 4)$ ;

б)  $A(2; 4; 2x - 1)$ ,  $B(3y - 2; 1; 0)$ ,  $C(2; 1; 4)$ ,  $D(3; 0; 1)$ ;

в)  $A(1; 0; x)$ ,  $B(2; 1; 6)$ ,  $C(2; 1; 2)$ ,  $D(y; 2; 4)$ ;

г)  $A(2; 1; 1)$ ,  $B(4x - 1; 2; 4)$ ,  $C(3; 2 - y; 1)$ ,  $D(5; 5; 5)$ .

10.\* Найдите вектор единичной длины, сонаправленный вектору  $\overrightarrow{AB}$ , если:

а)  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(6; 5; 4)$ ;

б)  $A(1; 2; 2)$ ,  $B(4; 1; 0)$ ;

в)  $A\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$ ,  $B\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ;

г)  $A\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ ,  $B\left(1; \frac{3}{2}; 2\right)$ .

11. Найдите параметрическое задание прямой, параллельной оси  $Ox$  и проходящей через точку  $(1; 1; 1)$ .

12. Найдите параметрическое задание прямой, параллельной вектору  $\overrightarrow{AB}$  и проходящей через точку  $C$ , если:

а)  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(2; 1; 2)$ ;

б)  $A(1; 1; 2)$ ,  $B(1; 4; 3)$ ,  $C(1; 2; 0)$ ;

в)  $A\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $B\left(1; 3; \frac{1}{2}\right)$ ,  $C(1; 0; 1)$ ;

г)  $A\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $B\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{4}{3}\right)$ ,  $C(2; 1; 6)$ .

**13.\*** В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основанием  $ABCD$  и боковыми рёбрами  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  точки  $M, N, K$  расположены соответственно на рёбрах  $CD, CB, CC_1$  так, что  $CM = \frac{1}{3}CD, CN = \frac{1}{4}CB, CK = \frac{4}{5}CC_1$ . Выразите через векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$  следующие векторы:

- а)  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AK}$ ;      б)  $\overrightarrow{B_1M}, \overrightarrow{D_1N}, \overrightarrow{DK}$ ;      в)  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NK}, \overrightarrow{KM}$ .

**14.\*\*** В четырёхугольной пирамиде  $SABCD$ , основанием которой является параллелограмм, точки  $M, N, K$  расположены соответственно на рёбрах  $CD, CB, CS$  так, что  $CM = \frac{2}{3}CD, CN = \frac{3}{4}CB, CK = \frac{1}{5}CS$ . Выразите через векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AS}$  следующие векторы:  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NK}, \overrightarrow{KM}$ .

### Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Медианы грани  $SAC$  тетраэдра  $SABC$  пересекаются в точке  $M$ . Как выражается вектор  $\overrightarrow{CM}$  через векторы  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$  и  $\overrightarrow{CS}$ ?

- 1)  $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CS}$       2)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CS}$   
3)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CS}$       4)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CS}$

**1.2.** Какой из векторов имеет единичную длину и сонаправлен с вектором  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(2;1;2), B(6;5;4)$ ?

- 1)  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$       2)  $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$       3)  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$       4)  $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**1.3.** Укажите параметрическое задание прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку  $(1;1;1)$ .

- 1)  $x = 1 + t, y = 1 + t, z = 1 + t$       2)  $x = 1 + t, y = 1, z = 1$   
3)  $x = 1, y = 1 + t, z = 1$       4)  $x = 1, y = 1, z = 1 + t$

**1.4.** Прямая, проходящая через точку  $A(5;0;-3)$ , задана параметрически:  $x = 5 - t, y = 3t, z = -3 + 2t$ . Чему равна длина отрезка  $AB$ , если точка  $B$  соответствует значению параметра  $t = -\sqrt{2}$ ?

- 1)  $2\sqrt{7}$       2)  $7\sqrt{2}$       3)  $4\sqrt{7}$       4)  $2\sqrt{14}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие операции из приведённых можно выполнять с векторами?

- 1) сложение    2) вычитание    3) умножение    4) деление

**2.2.** Какими свойствами обладает равенство векторов в пространстве?

1) если  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , то  $|AB| = |CD|$

2) если  $|AB| = |CD|$ , то  $\overline{AB} = \overline{CD}$

3) если  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , то  $\overline{AC} = \overline{BD}$

4) если  $AB \parallel CD$ , то  $\overline{AB} = \overline{CD}$

**2.3.** Что называется координатами вектора  $\overline{AB}$  с началом  $A(a_1; b_1; c_1)$  и концом  $B(a_2; b_2; c_2)$ ?

1) множество чисел  $\{a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1\}$

2) упорядоченная тройка чисел  $(a_2 - a_1; b_2 - b_1; c_2 - c_1)$

3) множество чисел  $\{a_2 + a_1; b_2 + b_1; c_2 + c_1\}$

4) упорядоченная тройка чисел  $(a_2 + a_1; b_2 + b_1; c_2 + c_1)$

**2.4.** Пусть две прямые заданы параметрически формулами  $x = a_1 t$ ,  $y = b_1 t$ ,  $z = c_1 t$  и  $x = 1 + a_2 t$ ,  $y = 1 + b_2 t$ ,  $z = 1 + c_2 t$ . В каких случаях прямые параллельны?

1)  $a_1 = b_1 = 0$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $a_2 \neq 0$ ,  $b_2 = c_2 = 0$

2)  $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = 0$

3)  $a_1 = -a_2$ ,  $b_1 = -b_2$ ,  $c_1 = -c_2$

4)  $a_1 = \frac{a_2}{2}$ ,  $b_1 = \frac{b_2}{2}$ ,  $c_1 = \frac{c_2}{2}$

## ■ § 5. СВОБОДНЫЕ ВЕКТОРЫ

**5.1. Свободные векторы.** Как и на плоскости, в пространстве определяют свободные векторы.

Если взять вектор  $\overline{OA}$ , связанный с фиксированной точкой  $O$ , то все векторы пространства, равные  $\overline{OA}$ , считают единым математическим объектом, который называют *свободным вектором*. Равные между собой векторы представляют один и тот же свободный вектор.

Таким образом, каждый свободный вектор является множеством равных между собой связанных векторов. Любой из связанных векторов, входящих в это множество, будем называть *представителем*, или *изображением* свободного вектора.

Свободный вектор однозначно определяется по любому своему изображению.

Для записи свободного вектора  $\vec{a}$  по его изображению  $\overline{MN}$  будем иногда использовать следующее обозначение:  $\vec{a} = [\overline{MN}]$ .

Два свободных вектора *равны*, если они имеют общего представителя (или общее изображение).



**Вопрос.** Как доказать, что  $[\overline{AB}] = [\overline{CD}]$  тогда и только тогда, когда  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ?

**5.2. Длина и направление свободного вектора.** Для свободного вектора определяют понятия длины и направления.

Длиной свободного вектора  $\vec{a}$  является длина его представителя.

В частности, нулевой свободный вектор  $\vec{0} = [\overline{AA}]$  имеет длину 0.

Зафиксируем некоторую точку  $O$ . Вектор  $\vec{a}$  можно изобразить вектором  $\overline{OM}$ , связанным с точкой  $O$ , причём если вектор  $\vec{a}$  ненулевой, то точка  $M$  не совпадает с точкой  $O$ . Для задания направления ненулевого вектора  $\vec{a}$  с представителем  $\overline{OM}$  достаточно указать луч  $OM$ . Направление вектора  $\vec{a}$  можно указать также с помощью точки пересечения луча  $OM$  со сферой единичного радиуса, центр которой совпадает с точкой  $O$ .

**Вопрос.** Как определить сонаправленные и противоположно направленные свободные векторы в пространстве?

**5.3. Сумма свободных векторов.** Сумму свободных векторов определяют с помощью их представителей. При этом известное «правило треугольника» запишется в следующем виде:

$$[\overline{AB}] + [\overline{BC}] = [\overline{AC}].$$

**Вопрос.** Как доказать, что сумма свободных векторов не зависит от выбора их представителей?

**5.4. Разность свободных векторов.** Разность свободных векторов определяют с помощью их представителей. При этом известное «правило треугольника» запишется в следующем виде:

$$[\overline{OB}] - [\overline{OA}] = [\overline{AB}].$$

**Вопрос.** Как доказать это правило?

**5.5. Умножение свободного вектора на число.** Пусть  $\vec{a} = [\overline{OM}]$  и  $t$  — заданное число. В пункте 4.1 для связанного вектора  $\overline{OM}$  был определён связанный с точкой  $O$  вектор  $\overline{OK} = t \cdot \overline{OM}$ . С помощью вектора  $\overline{OK}$  произведение  $t\vec{a}$  определяется так:

$$t\vec{a} = [t \cdot \overline{OM}] = [\overline{OK}].$$

**Вопрос.** Как доказать, что произведение свободного вектора на число не зависит от выбора представителя?

**5.6. Коллинеарность свободных векторов.** Два свободных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются коллинеарными, если коллинеарны их изображения, связанные с одной точкой.

Определять коллинеарность двух свободных векторов можно с помощью признака, аналогичного признаку коллинеарности связанных векторов.

Ненулевой вектор  $\vec{a}$  и вектор  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда  $\vec{b} = t\vec{a}$ , где  $t$  — некоторое число.

**Вопрос.** Как доказать, что изображения с началом в одной точке двух ненулевых коллинеарных свободных векторов лежат на одной прямой?

**5.7. Компланарность свободных векторов.** Три свободных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  называются компланарными, если компланарны их изображения, связанные с одной точкой.

Определить компланарность трёх свободных векторов можно с помощью признака, аналогичного признаку компланарности связанных векторов.

Вектор  $\vec{c}$  и неколлинеарные векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  компланарны тогда и только тогда, когда  $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$ , где  $t$  и  $s$  — некоторые числа.

**Вопрос.** Как доказать, что три вектора компланарны, если два из них коллинеарны?

**5.8. Разложение свободного вектора по трём некопланарным.** Для свободных векторов можно доказать теорему о разложении по трём некопланарным векторам.

Пусть  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  — три некопланарных свободных вектора пространства. Тогда каждый свободный вектор  $\vec{m}$  пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ :

$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — соответствующие числа.

**Вопрос.** Как доказать теорему о разложении свободных векторов по трём некопланарным векторам?

**5.9.\*\* Трёхмерность пространства.** На прямой каждый вектор  $\vec{m}$  можно выразить через один ненулевой вектор  $\vec{a}$  в виде  $\vec{m} = t\vec{a}$ , где  $t$  — соответствующее число. Это означает, что прямая *одномерна*.

На плоскости каждый вектор  $\vec{m}$  можно выразить через два неколлинеарных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в виде  $\vec{m} = t\vec{a} + s\vec{b}$ , где  $t$ ,  $s$  — соответствующие числа. Это означает, что плоскость *двумерна*.

В пространстве каждый вектор  $\vec{m}$  можно выразить через три некопланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  в виде  $\vec{m} = t\vec{a} + s\vec{b} + u\vec{c}$ , где  $t$ ,  $s$ ,  $u$  — соот-



ветствующие числа. Это означает, что изучаемое нами пространство *трёхмерно*.

Развитие математики привело к тому, что помимо привычного трёхмерного пространства рассматривают также четырёхмерное пространство, пятимерное пространство и так далее. Геометрия многомерных пространств имеет как общие черты с геометрией трёхмерного пространства, так и различия. Основным инструментом изучения многомерных пространств являются векторы.

**Вопрос.** Назовём четырёхмерными векторами упорядоченные четвёрки чисел  $(x; y; z; t)$ , где числа рассматриваются как координаты. Как можно определить операции сложения и умножения на число для таких векторов?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Что такое свободный вектор?
2. Что называют изображением вектора  $\vec{a}$  с началом в точке  $F$ ?
3. Как определяется длина свободного вектора?
4. Как определяется направление свободного вектора?
5. Как определяется сумма двух свободных векторов?
6. Как определить разность двух свободных векторов?
7. Как определяется произведение свободного вектора на число?
8. Какие два свободных вектора называются коллинеарными?
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие коллинеарности двух ненулевых свободных векторов.
10. Как определяется компланарность трёх свободных векторов?
- 11.\*\* Докажите теорему о том, что любой свободный вектор можно единственным образом разложить по трём некопланарным свободным векторам.

### Задачи и упражнения ■

- 1.\* Докажите, что если координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  равны, то векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  — представители одного и того же свободного вектора.
- 2.\* Докажите, что если  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  — представители одного и того же свободного вектора, то координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  равны.
- 3.\* Докажите, что если свободный вектор  $[\overline{AB}]$  коллинеарен свободному вектору  $[\overline{CD}]$  и свободный вектор  $[\overline{CD}]$  коллинеарен свободному вектору  $[\overline{EF}]$ , то свободные векторы  $[\overline{AB}]$  и  $[\overline{EF}]$  коллинеарны.
- 4.\*\* Даны три свободных вектора  $[\overline{AB}]$ ,  $[\overline{CD}]$  и  $[\overline{EF}]$ . Известно, что векторы  $[\overline{AB}]$  и  $[\overline{CD}]$  коллинеарны. Докажите, что векторы  $[\overline{AB}]$ ,  $[\overline{CD}]$  и  $[\overline{EF}]$  компланарны.



5.\*\* Даны три свободных вектора  $[\overline{AB}]$ ,  $[\overline{CD}]$  и  $[\overline{EF}]$ . Известно, что вектор  $[\overline{EF}]$  является линейной комбинацией векторов  $[\overline{AB}]$  и  $[\overline{CD}]$ . Докажите, что векторы  $[\overline{AB}]$ ,  $[\overline{CD}]$  и  $[\overline{EF}]$  компланарны.

6. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $M$  и  $K$  — середины рёбер  $B_1 C_1$  и  $CD$  соответственно. Разложите по векторам  $\vec{a} = [\overline{AA_1}]$ ,  $\vec{b} = [\overline{BC_1}]$ ,  $\vec{c} = [\overline{DB_1}]$ :

- а)  $[\overline{AM}]$ ; б)  $[\overline{C_1 K}]$ ; в)  $[\overline{A_1 K}]$ ; г)  $[\overline{MD_1}]$ ; д)  $[\overline{BM}]$ ; е)  $[\overline{KM}]$ .

### ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Пусть векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны. Укажите числа  $x$  и  $y$ , если векторы  $2x \cdot \vec{a} - 4y \cdot \vec{b}$  и  $(12 - 5y)\vec{a} + (7 - x)\vec{b}$  равны.

1)  $x = -6\frac{5}{13}$ ,  $y = \frac{2}{13}$

2)  $x = -5\frac{6}{11}$ ,  $y = \frac{3}{11}$

3)  $x = 6\frac{5}{13}$ ,  $y = -\frac{2}{13}$

4)  $x = 5\frac{6}{11}$ ,  $y = -\frac{3}{11}$

1.2. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  точка  $M$  расположена так, что  $BM : MC = 1 : 3$ . Как выражается вектор  $\overline{AC}$  через векторы  $\vec{a} = \overline{AB}$  и  $\vec{b} = \overline{AM}$ ?

1)  $2\vec{a} + 3\vec{b}$

2)  $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

3)  $\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$

4)  $-3\vec{a} + 4\vec{b}$

1.3. Пусть  $\vec{a} = (-1; 3; -3)$ ,  $\vec{b} = (2; -2; 2)$ ,  $\vec{c} = (3; -1; 1)$ . Какие координаты имеет вектор  $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ ?

1)  $(-4; -4; -4)$

2)  $(4; -4; 4)$

3)  $(4; 4; -4)$

4)  $(-4; 4; -4)$

1.4. При каком значении  $t$  вектор  $\vec{c} = (1; 2; t)$  компланарен с векторами  $\vec{a} = (0; 1; 2)$  и  $\vec{b} = (1; 0; 3)$ ?

1)  $t = 3$

2)  $t = 5$

3)  $t = 7$

4)  $t = 9$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Векторы  $\vec{a} = \overline{AB}$  и  $\vec{b} = \overline{AC}$  неколлинеарны, и  $\overline{AM} = x\vec{a} + y\vec{b}$ . При каких значениях  $x$ ,  $y$  точка  $M$  лежит на отрезке  $BC$ ?

1)  $x = \frac{1}{4}$ ,  $y = \frac{1}{2}$

2)  $x = \frac{3}{5}$ ,  $y = \frac{2}{5}$

3)  $x = \frac{1}{6}$ ,  $y = \frac{2}{3}$

4)  $x = \frac{5}{8}$ ,  $y = \frac{3}{8}$

2.2. Пусть  $\vec{a} = (0; 1; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 1)$ . Какие из указанных векторов  $\vec{c}$  компланарны вместе с векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ?

1)  $\vec{c} = (-2; 3; 3)$

2)  $\vec{c} = (3; -2; 3)$

3)  $\vec{c} = (-4; -4; 2)$

4)  $\vec{c} = (2; -4; -4)$

**2.3.** Пусть  $A(0;1;-2)$ ,  $B(-1;0;1)$ . Какие из точек с указанными координатами лежат на прямой  $AB$ ?

- 1)  $(5;-4;-12)$       2)  $(-2;-1;4)$       3)  $(4;5;-10)$       4)  $(-3;-3;7)$

**2.4.** Векторы  $\vec{a} = \vec{SA}$ ,  $\vec{b} = \vec{SB}$ ,  $\vec{c} = \vec{SC}$  некомпланарны, и  $\vec{SM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ . При каких значениях  $x, y, z$  точка  $M$  лежит внутри пирамиды  $SABC$ ?

- 1)  $x = y = \frac{1}{4}$ ,  $z = \frac{1}{3}$       2)  $x = z = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{1}{2}$   
 3)  $y = z = \frac{2}{7}$ ,  $x = \frac{3}{8}$       4)  $x = y = z = \frac{1}{4}$

## Мини-исследования к главе 4 ■

### Мини-исследование 11

Определим в координатном пространстве с началом  $O$  гомотетию с центром  $O$  и коэффициентом  $k$ , где  $k > 0$ , как такое преобразование, при котором точка  $M$  с координатами  $(a; b; c)$  переходит в точку  $M_1$  с координатами  $(ka; kb; kc)$ . Докажите, что преобразование гомотетии:

- а) пару различных точек  $A$  и  $B$  переводит в такую пару точек  $A_1$  и  $B_1$ , что  $A_1B_1 \parallel AB$  и  $|A_1B_1| = k|AB|$ ;  
 б) отрезок переводит в параллельный ему отрезок;  
 в) прямую переводит в параллельную ей прямую;  
 г) треугольник переводит в подобный ему треугольник;  
 д) сферу радиуса  $R$  переводит в сферу радиуса  $kR$ .

### Мини-исследование 12

Как по изображениям на эпюре трёх соседних вершин правильного шестиугольника построить изображение всего шестиугольника?

Предлагается провести построение по следующей схеме:

- 1) используя теорему о пересечении диагоналей параллелограмма, показать, как по изображениям трёх вершин параллелограмма построить изображение четвёртой;  
 2) по методу, полученному в предыдущем пункте, построить центр правильного шестиугольника;  
 3) построить изображения остальных вершин.

### Мини-исследование 13

Даны две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ . Точка  $C$  расположена на прямой  $AB$  так, что  $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$ . Найдите координаты точки  $C$ , рассмотрев два случая:

- 1) точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$ ;      2) точка  $C$  лежит вне отрезка  $AB$ .



# Глава 5

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы рассмотрим приближения функций линейными функциями, приведём теорему Лагранжа о среднем, установим связь производной с возрастанием и убыванием функции. Будут указаны основные этапы исследования функций, рассмотрены примеры построения графиков функций и примеры задач на нахождение наибольших и наименьших значений.

### ■ § 1. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА О СРЕДНЕМ

#### 1.1. Приближение значения функции с помощью производной.

При изучении функций мы несколько раз говорили о касательных. Касательная представляет из себя прямую, являющуюся графиком некоторой линейной функции. Оказывается, что в некоторой окрестности точки касания значения этой линейной функции дают достаточно хорошие приближения для значений самой функции.

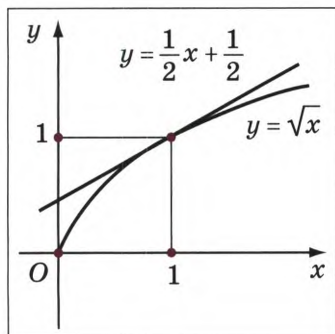


Рис. 1

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt{x}$ , определённую на числовом луче  $[0; \infty)$ . Заметим, что  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Далее, при  $x = 1$  имеем  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = \frac{1}{2}$ , поэтому уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \sqrt{x}$  в точке  $(1; 1)$  имеет вид  $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$ , то есть  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

Изображая график функции  $f(x)$  и касательную, получаем рис. 1.

Выберем теперь такое ненулевое приращение  $\Delta x$ , для которого  $1 + \Delta x > 0$ . Для сравнения значения функции  $f(x) = \sqrt{x}$  и значения уравнения касательной  $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  в точке  $1 + \Delta x$  рассмотрим разность  $f(1 + \Delta x) - g(1 + \Delta x)$  и получим  $f(1 + \Delta x) - g(1 + \Delta x) = \sqrt{1 + \Delta x} - \left(\frac{1}{2}(1 + \Delta x) + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 + \Delta x} - \left(1 + \frac{1}{2}\Delta x\right)$ .

Из существования производного числа функции  $f(x)$  в точке  $x = 1$  следует, что для всякого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое положи-



тельное число  $\delta$ , что как только  $|\Delta x| < \delta$ , то выполняется неравенство  $\left| \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ . Домножив обе части этого неравенства на  $|\Delta x|$ , по-

лучим  $|\Delta x| \cdot \left| \frac{\sqrt{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \right| < \Delta x \cdot \varepsilon < \delta \cdot \varepsilon$  и  $\left| \sqrt{1+\Delta x} - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta x\right) \right| < \delta \cdot \varepsilon$ .

Поэтому, если  $|\Delta x| < \delta$ , то

$$|f(1 + \Delta x) - g(1 + \Delta x)| = \left| \sqrt{1 + \Delta x} - \left(1 + \frac{1}{2}\Delta x\right) \right| < \delta \cdot \varepsilon.$$

Отсюда следует, что значение функции  $f(x)$  в точке  $1 + \Delta x$  отличается от значения уравнения касательной  $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  в точке  $1 + \Delta x$  не более чем на  $\delta \cdot \varepsilon$ .

Таким образом, значение  $\sqrt{1 + \Delta x}$  приближённо равно значению  $1 + \frac{1}{2}\Delta x$ , причём абсолютная погрешность приближения не превосходит значения  $\delta \cdot \varepsilon$ . Например, при  $\varepsilon = 1$  соответствующая абсолютная погрешность не превосходит числа  $\delta$ ; при  $\varepsilon = 0,1$  соответствующая абсолютная погрешность не превосходит числа  $0,1 \cdot \delta$ ; при  $\varepsilon = 0,001$  соответствующая абсолютная погрешность не превосходит числа  $0,001 \cdot \delta$ . Аналогично при других  $\varepsilon > 0$ .

Иногда в этом случае говорят, что ошибка приближённой формулы  $\sqrt{1 + \Delta x} \approx \left(1 + \frac{1}{2}\Delta x\right)$  мала по сравнению с  $|\Delta x|$ .

Подобные рассуждения можно провести для любой функции  $h(x)$ , имеющей производную в точке  $a$ : из существования производного числа  $h'(a)$  функции  $h(x)$  в точке  $x = a$  следует, что для всякого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое положительное число  $\delta$ , что как только  $|\Delta x| < \delta$ , то выполняется неравенство  $|h(a + \Delta x) - (h(a) + h'(a)\Delta x)| < \delta \cdot \varepsilon$ .

Отсюда следует, что значение функции  $h(x)$  в точке  $a + \Delta x$  отличается от значения уравнения касательной  $p(x) = h(a) + h'(a) \cdot (x - a)$  в точке  $a + \Delta x$  не более чем на  $\delta \cdot \varepsilon$ .

Таким образом, значение  $h(a + \Delta x)$  приближённо равно значению  $h(a) + h'(a) \cdot \Delta x$ , причём абсолютная погрешность приближения не превосходит значения  $\delta \cdot \varepsilon$ .

Как в примере 1, и в общем случае говорят, что ошибка приближённой формулы  $h(a + \Delta x) \approx (h(a) + h'(a) \cdot \Delta x)$  мала по сравнению с  $|\Delta x|$ .

**Вопрос.** Как доказать, что  $(1 + x)^3 \approx 1 + 3x$ , причём ошибка мала по сравнению с  $|x|$ ?

## 1.2. Теорема Лагранжа. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема Лагранжа.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и имеет производную в каждой точке интервала  $(a; b)$ . Тогда найдётся точка  $c$  из  $(a; b)$  такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a). \quad (1)$$

Теорема Лагранжа позволяет через производную выразить разность значений функции в концах отрезка числовой прямой. Формулу (1) называют также *формулой конечных приращений*.

Доказательство теоремы Лагранжа мы приводить не будем.

Формулу (1) можно записать также в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

Левая часть  $f'(c)$  полученного равенства равна наклону касательной, проведённой к графику функции  $f(x)$  в точке с абсциссой  $x = c$ . Правая часть  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  равна наклону прямой, проходящей через крайние точки

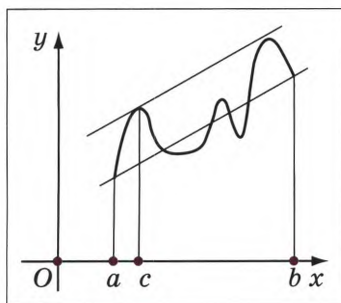


Рис. 2

ки  $(a; f(a))$  и  $(b; f(b))$  графика функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Равенство наклонов прямых означает, что эти прямые параллельны. Поэтому геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что найдётся точка графика функции  $f(x)$ , для которой проведённая в этой точке касательная параллельна хорде, соединяющей крайние точки функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  (рис. 2).

**Вопрос.** Каков геометрический смысл теоремы Лагранжа при условии  $f(a) = f(b)$ ?

**1.3.\*\* Оценка погрешности приближённой формулы.** Теорема Лагранжа позволяет получить оценку абсолютной погрешности приближённой формулы

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a). \quad (3)$$

Пусть функция  $f(x)$  имеет производную в каждой точке некоторой  $\delta$ -окрестности числа  $a$ . Тогда функция  $f(x)$  определена и непрерывна в этой окрестности. Поэтому для любого значения  $b$  из  $\delta$ -окрестности на отрезке с концами  $b$  и  $a$  выполняются все условия теоремы Лагранжа. Это значит, что для числа  $b$  существует такое число  $c$  из интервала  $D(b; a)$



с концами  $b$  и  $a$ , что выполняются равенства  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ , где  $c$  — некоторая точка между  $b$  и  $a$ . Отсюда  $|f(b) - f(a) - f'(a)(b - a)| = |f'(c)(b - a) - f'(a)(b - a)| = |f'(c) - f'(a)| \cdot |b - a|$ . Поскольку точка  $c$  промежуточная между  $b$  и  $a$ , то число  $|f'(c) - f'(a)|$  не превосходит наибольшего значения выражения  $|f'(t) - f'(a)|$ , рассматриваемого для всех значений  $t$  из отрезка с концами  $b$  и  $a$ , которое обозначим через  $M$ . Это позволяет оценить абсолютную погрешность указанной выше формулы следующим образом:

$$|f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)| \leq M \cdot |x - a|, \quad (4)$$

$t \in D(x; a)$

**Пример 2.** Оценим абсолютную погрешность формулы  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$  при  $0 < x < \frac{1}{2}$ .

Пусть  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Тогда  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2}$  и при  $0 < x < \frac{1}{2}$  имеем

$$|f'(x) - f'(0)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{1}{10}.$$

Следовательно,  $|f'(c) - f'(0)| < \frac{1}{10}$ , если  $0 < c < \frac{1}{2}$ . Поэтому наибольшее значение  $M$  выражения  $|f'(t) - f'(0)|$  на промежутке  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$  не больше  $\frac{1}{10}$ , и из неравенства (4) для абсолютной погрешности заданной формулы получим оценку:

$$\left| \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x \right| < \frac{1}{10}|x| < \frac{1}{20}.$$

**Вопрос.** Какова абсолютная погрешность формулы  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$  при  $-\frac{1}{4} < x < 0$ ?

**1.4. Условия монотонности функции.** Теорема Лагранжа позволяет доказать следующее утверждение.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  имеет положительную производную в каждой точке промежутка  $D$ , то функция  $f(x)$  строго возрастает на этом промежутке. Соответственно если функция  $f(x)$  имеет отрицательную производную в каждой точке промежутка  $D$ , то функция  $f(x)$  строго убывает на этом промежутке.

Оба утверждения теоремы доказываются аналогично, поэтому рассмотрим только первое из них. Пусть  $f'(x) > 0$  при всех  $x \in D$ . Возьмём две произвольные точки  $x_1, x_2$  из  $D$  такие, что  $x_1 < x_2$ . Тогда на отрезке



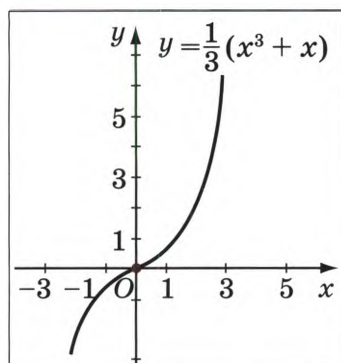


Рис. 3

$[x_1; x_2]$  функция  $f(x)$  определена, имеет производную и поэтому непрерывна. Следовательно, можно применить теорему Лагранжа и записать равенство  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$  для подходящего числа  $c$  из интервала  $(x_1; x_2)$ . Поскольку точка  $c$  лежит в интервале  $(x_1; x_2)$ , то она принадлежит промежутку  $D$ , а поэтому  $f'(c) > 0$ . Из неравенства  $x_1 < x_2$  следует, что  $x_2 - x_1 > 0$ . Значит,  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$ , то есть  $f(x_2) > f(x_1)$ .

**Пример 3.** Функция  $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x)$  определена, непрерывна и имеет производную на всей числовой прямой, причём  $f'(x) = x^2 + \frac{1}{3} > 0$  при всех  $x$ . Из теоремы этого пункта следует, что функция  $f(x)$  строго возрастает на всей числовой прямой. График функции  $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x)$  выглядит примерно так, как изображено на рис. 3.

**Вопрос.** Как доказать второе утверждение теоремы из этого пункта?

**1.5.\*\* Обобщённое неравенство Бернулли.** Докажем, что при  $r > 1$  для всех  $x > -1$  выполняется неравенство

$$(1 + x)^r \geq 1 + rx.$$

Для доказательства рассмотрим функцию  $f(x) = (1 + x)^r - (1 + rx)$ , определённую и непрерывную на промежутке  $[-1; \infty)$ . Заметим, что для производной выполняются соотношения:  $f'(x) = r \cdot (1 + x)^{r-1} - r = r \cdot ((1 + x)^{r-1} - 1)$ .

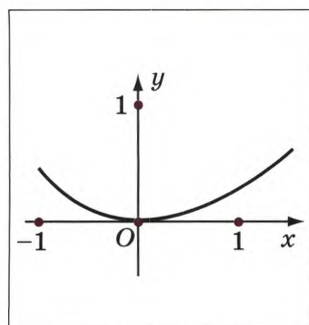


Рис. 4

Если  $x = 0$ , то  $f'(0) = 0$ ; если  $-1 < x < 0$ , то  $f'(x) < 0$ ; если  $x > 0$ , то  $f'(x) > 0$ . Из теоремы предыдущего пункта следует, что на промежутке  $(-1; 0)$  функция  $f(x)$  строго убывает, а на промежутке  $(0; \infty)$  строго возрастает. Поэтому график функции  $f(x) = (1 + x)^r - (1 + rx)$  выглядит примерно так, как изображено на рис. 4, и значение  $f(0) = 0$  является наименьшим значением функции  $f(x)$  на промежутке  $[-1; \infty)$ , то есть для всех  $x$  из промежутка  $[-1; \infty)$  выполняется неравенство  $(1 + x)^r - (1 + rx) \geq 0$ .

Таким образом, при  $r > 1$  для всех  $x > -1$  выполняется неравенство  $(1+x)^r \geq 1+rx$ , которое является обобщением известного неравенства Бернулли для натурального показателя степени на случай произвольного показателя  $r > 1$ .

**Пример 4.** Если взять любое положительное число  $\alpha$ , то  $\alpha + 1 > 1$ ,  $\frac{1}{\alpha+1} > 0$  и  $(\alpha+1) \cdot \frac{1}{\alpha+1} = 1$ . Поэтому для любого положительного числа  $\alpha$  выполняется неравенство  $\left(1 + \frac{1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \geq 2$ .

**Вопрос.** Как доказать, что при  $0 < r < 1$  выполняется неравенство  $(1+z)^r \leq 1+rz$  при всех  $z > -1$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Какой вид имеет уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $a$ ?
2. Как получить приближённое значение функции с помощью уравнения касательной (на примере)?
3. Сформулируйте теорему Лагранжа.
4. В чём состоит геометрический смысл теоремы Лагранжа?
- 5.\*\* Как оценить погрешность приближённой формулы  $f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$ ?
6. Сформулируйте и докажите теорему о строгом возрастании функции на промежутке.
7. Сформулируйте теорему о строгом убывании функции на промежутке.
- 8.\*\* Сформулируйте неравенство Бернулли для показателя степени, большего 1.

### Задачи и упражнения ■

1. Найдите производную от функции  $f(x)$  и значение производной при  $x = a$ , если:

а)  $f(x) = (x+1)^6$ ,  $a = -2$ ;

б)  $f(x) = \sin 3x$ ,  $a = \frac{\pi}{3}$ ;

в)  $f(x) = e^{-2x}$ ,  $a = 4$ ;

г)  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $a = 1$ ;

д)\*  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ ,  $a = 4$ ;

е)\*\*  $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ ,  $a = \frac{\pi}{6}$ ;

ё)\*  $f(x) = \cos^2 2x$ ,  $a = \frac{2\pi}{3}$ ;

ж)\*\*  $f(x) = \cos(\arcsin x)$ ,  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

з)\*\*  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ;

и)\*\*  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $a = \frac{3}{4}$ .

**2.** Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке с абсциссой  $a$ , если:

а)  $f(x) = (x - 2)^2$ ,  $a = 4$ ;

б)  $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ ,  $a = -1$ ;

в)  $f(x) = x\sqrt{x}$ ,  $a = 4$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $a = 1$ ;

д)  $f(x) = \sqrt{2x+3}$ ,  $a = 3$ ;

е)  $f(x) = \sqrt{1-x^3}$ ,  $a = -2$ ;

ё)  $f(x) = \cos 3x$ ,  $a = \frac{2\pi}{3}$ ;

ж)  $f(x) = 2^x$ ,  $a = 2$ .

**3.\*\*** Для приближённой формулы  $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$  оцените погрешность при  $|x - a| < b$ , если:

а)  $f(x) = x^2$ ,  $a = 2$ ,  $b = 0,5$ ;

б)  $f(x) = \sin x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0,1$ ;

в)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $a = 8$ ,  $b = 1$ ;

г)  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0,1$ .

**4.** Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания для функции:

а)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ ;

б)  $f(x) = -4x^2 + 2x - 3$ ;

в)  $f(x) = 3x^2 + 7x - 5$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ ;

д)  $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$ ;

е)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ .

**5.\*** Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания для функции:

а)  $f(x) = \sin x$ ;    б)  $f(x) = \cos x$ ;    в)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Какой вид имеет уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 2x^2 - x + 1$ , проведённой через точку графика с абсциссой  $x = 1$ ?

1)  $y = 2 + 3(x - 1)$

2)  $y = 3 - 2(x - 1)$

3)  $y = 2 - 3(x - 1)$

4)  $y = 3 + 2(x - 1)$

**1.2.** Какой вид имеет формула конечных приращений для функции  $f(x) = \sqrt{x}$  на отрезке  $[a; b]$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c$  — соответствующая точка интервала  $(a; b)$ ?

1)  $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot (b - a)$

2)  $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{c}}{2} \cdot (b - a)$

3)  $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{2}{\sqrt{c}} \cdot (b - a)$

4)  $\sqrt{b} - \sqrt{a} = 2\sqrt{c} \cdot (b - a)$



**1.3.** Какой вид имеет уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \sin 2x + 1$ , проведённой через точку графика с абсциссой  $x = \pi$ ?

1)  $y = 2(x - \pi)$

2)  $y = 2x$

3)  $y = 1 + 2(x - \pi)$

4)  $y = 2(\pi - x) + 1$

**1.4.** Какой вид имеет формула конечных приращений для функции  $f(x) = \cos 2x$  на отрезке  $[a; b]$ , где  $c$  — соответствующая точка интервала  $(a; b)$ ?

1)  $\cos 2b - \cos 2a = \sin 2c \cdot (b - a)$

2)  $\cos 2b - \cos 2a = 2\sin 2c \cdot (b - a)$

3)  $\cos 2b - \cos 2a = \sin 2c \cdot (a - b)$

4)  $\cos 2b - \cos 2a = 2\sin 2c \cdot (a - b)$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.\*\*** Какие из указанных неравенств являются верными при каждом  $x \geq 0$ :

1)  $\sqrt[3]{(1+x)^2} \leq 1 + \frac{2}{3}x$

2)  $\sqrt[3]{(1+x)^2} \geq 1 + \frac{2}{3}x$

3)  $\sqrt[3]{(1+x)^4} \geq 1 + \frac{4}{3}x$

4)  $\sqrt[3]{(1+x)^4} \leq 1 + \frac{4}{3}x$

**2.2.** В каких случаях производные вычислены верно?

1)  $(\sqrt{1+x^2})' = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$

2)  $(\sin \sqrt{x})' = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

3)  $\cos(x^2 + 1)' = 2x \sin(x^2 + 1)$

4)  $\left(\frac{1}{(e^x)^3}\right)' = -3e^{-3x}$

**2.3.** В каких из указанных случаев формула Лагранжа  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$  неприменима?

1)  $f(x) = |x|, a = -2, b = 2$

2)  $f(x) = \operatorname{tg} x, a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{5\pi}{4}$

3)  $f(x) = \operatorname{arctg} x, a = -100, b = 100$

4)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, a = -100, b = 100$

**2.4.\*\*** Какие из указанных неравенств являются верными при каждом  $x \geq 0$ ?

1)  $\sqrt[5]{(1+5x)} \leq 1 + x$

2)  $\sqrt[5]{(1+5x)} \geq 1 + x$

3)  $\sqrt[5]{(1+5x)^6} \geq 1 + 6x$

4)  $\sqrt[5]{(1+5x)^6} \leq 1 + 6x$

## ■ § 2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

**2.1. Графики функций и их построение.** При изучении функций мы неоднократно использовали их геометрическое изображение — графики. Обозримость и наглядность графика делают его незаменимым вспомогательным средством исследования функции.

Заметим, что графики функций изображают приблизительно, передавая общий вид и характерные особенности поведения функций. При необходимости в каждой конкретной точке можно вычислить значение функции и проверить соответствие с рисунком графика. Однако большинство свойств графика обычно требуют обоснования.

Способ построения графика по точкам, который применялся начиная с младших классов, нельзя считать совершенным. Дело в том, что мы можем вычислить значения функции даже в большом количестве точек, но этих значений может оказаться недостаточно для правильного представления о характере поведения функции. Например, предположим, что мы по точкам строим график функции  $y = 1 + \sin 12x$ . Перебирая значения  $x = 0, x = \pm \frac{\pi}{6}; x = \pm \frac{\pi}{4}; x = \pm \frac{\pi}{3}; x = \pm \frac{\pi}{2}; x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  и так далее, мы каждый раз будем получать значение функции, равное 1. Исходя из этого можно вообразить, что графиком функции  $y = 1 + \sin 12x$  является прямая  $y = 1$  (рис. 1). Однако это неверно, и более детальное исследование приводит к графику, изображённому на рис. 2.

Чтобы построить график функции, отражающий основные закономерности её поведения, необходимо провести исследование функции.

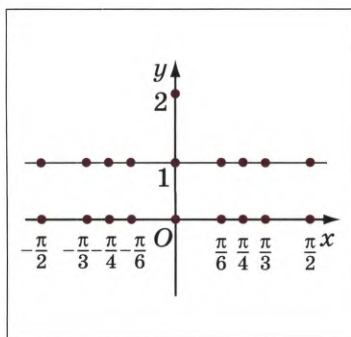


Рис. 1

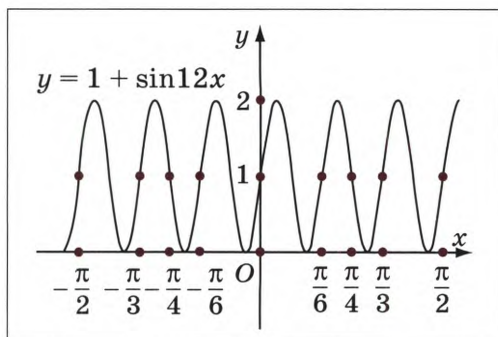


Рис. 2

**Вопрос.** Какое предположение о графике функции может напрашиваться, если вычислить значения функции  $y = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$  в семи точках: при  $x = 0$ ,  $x = \pm 1$ ,  $x = \pm 2$ ,  $x = \pm 3$ ?

**2.2. Области определения и непрерывности.** Первым этапом исследования функции можно считать нахождение её естественной области определения и промежутков непрерывности. За редким исключением будут рассматриваться такие функции, которые непрерывны на всей области определения. Каждый случай наличия разрывов будет оговариваться особо.

На графике свойство непрерывности функции отражается в том, что на каждом из промежутков области определения график изображается неразрывной линией.

Например, функция  $y = \frac{1}{x}$  определена при  $x \neq 0$  и непрерывна в каждой точке области определения. Это приводит к тому, что график функции  $y = \frac{1}{x}$  изображается двумя неразрывными линиями (рис. 3).

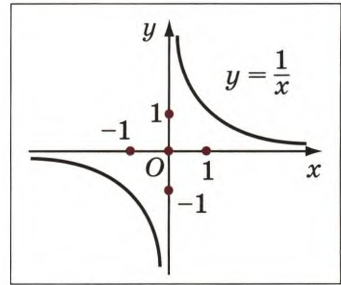


Рис. 3

**Вопрос.** Каким числом неразрывных линий изображается график функции  $y = \frac{x^2 - 4}{x(x^2 - 1)}$ ?

**2.3. Промежутки знакопостоянства и нули функции.** Ещё один этап исследования функции состоит в нахождении нулей и промежутков знакопостоянства.

*Нулями* функции  $f(x)$  называют корни уравнения  $f(x) = 0$ . Каждому нулю функции соответствует точка графика, ордината которой равна нулю. Каждая такая точка лежит на оси абсцисс. Поэтому нули функции позволяют определять пересечение графика с осью  $Ox$ .

Решая неравенство  $f(x) > 0$ , мы получим значения  $x$ , при которых значения функции положительны. Поэтому ординаты соответствующих точек графика положительны и такие точки лежат в полуплоскости  $y > 0$ . Каждый из промежутков, на котором значения функции  $f(x)$  положительны, иногда называют *промежутком положительности* функции  $f(x)$ .

Аналогично, решая неравенство  $f(x) < 0$ , мы получим *промежутки отрицательности* функции  $f(x)$ .



Вместе промежутки положительности и промежутки отрицательности называют *промежутками знакопостоянства* функции  $f(x)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$ . Эта функция определена при  $x \neq -1$ .

Решая уравнение  $\frac{x(x-1)}{x+1} = 0$ , получаем  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . В точках с такими абсциссами график пересекает ось  $Ox$ .

Решая неравенство  $\frac{x(x-1)}{x+1} > 0$ , получаем множество  $(-1; 0) \cup (1; \infty)$ . Промежутки  $(-1; 0)$  и  $(1; \infty)$  являются промежутками положительности

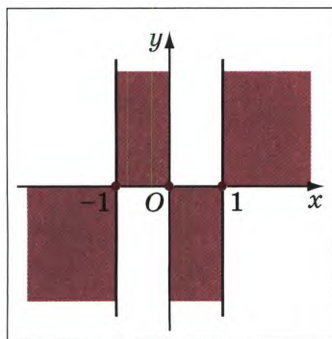


Рис. 4

$f(x)$ . Решениями неравенства  $\frac{x(x-1)}{x+1} < 0$  являются все оставшиеся точки области определения, то есть точки множества  $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$ . Промежутки  $(-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$  являются промежутками отрицательности  $f(x)$ .

Проведённое исследование позволяет поставить две точки  $(0; 0)$  и  $(1; 0)$  графика и отметить те области, в которых лежат оставшиеся точки графика (рис. 4).

**Вопрос.** Какие нули, промежутки положительности и промежутки отрицательности имеет функция  $y = x^3 - x$ ?

**2.4. Промежутки монотонности.** Ещё один этап исследования функции состоит в нахождении промежутков монотонности, то есть промежутков возрастания и промежутков убывания функции. Это исследование основывается на теореме пункта 1.4. Если вычислить производную  $f'(x)$  функции  $f(x)$ , то, решая неравенство  $f'(x) > 0$ , можно найти промежутки строгого возрастания, а решая неравенство  $f'(x) < 0$ , можно найти промежутки строгого убывания функции  $f(x)$ .

**Пример 2.** Найти промежутки монотонности функции  $f(x) = x^3 - 3x$ .

Функция определена при всех  $x$ . Вычислим  $f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$  и решим неравенство  $f'(x) > 0$ :  $3x^2 - 3 = 0$ ,  $x^2 - 1 > 0$ ,  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ . Далее решим уравнение  $f'(x) = 0$  и получим  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . Для  $x$  из интервала  $(-1; 1)$  выполняется неравенство  $f'(x) < 0$ . После этого можно сделать вывод, что функция  $f(x) = x^3 - 3x$  строго возрастает на интервале  $(-\infty; -1)$ , строго убывает на интервале  $(-1; 1)$ , строго возрастает на интер-

вале  $(1; \infty)$ . Такой характер поведения функции можно записать в виде следующей символической таблицы.

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; \infty)$
$f'(x)$	$> 0$	$0$	$< 0$	$0$	$> 0$
$f(x)$	строго возрастает		строго убывает		строго возрастает

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = x^3 - 3x$  строго убывает на отрезке  $[-1; 1]$ ?

**2.5. Локальные минимумы и максимумы функции, точки экстремума.** Исследование функции на возрастание и убывание позволяет определить её точки *локального максимума* и *локального минимума*.

**Пример 3.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^3 - 3x$  на интервале  $(-2; 0)$ . Функция непрерывна на этом интервале, на промежутке  $(-2; -1)$  возрастает и на промежутке  $(-1; 0)$  убывает. Поэтому значение  $f(-1) = 2$  является наибольшим из всех значений  $f(x)$  для  $x \in (-2; 0)$ . Это можно увидеть, если вычислить  $f(-2) = -2$ ,  $f(0) = 0$  и изобразить часть графика функции (рис. 5). Однако число 2 не может быть наибольшим значением функции  $f(x) = x^3 - 3x$ , если её рассматривать на всей числовой прямой. Действительно, нетрудно указать значение  $f(x)$ , которое больше 2. Например,  $f(10) = 10^3 - 3 \cdot 10 = 970 > 2$ . Тем не менее на интервале  $(-2; 0)$  точке  $x = -1$  соответствует характерная особенность данной функции.

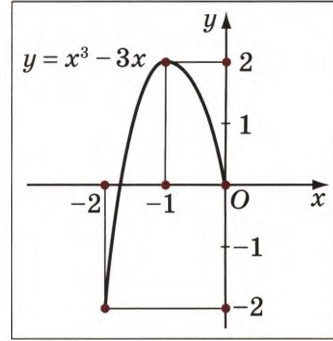


Рис. 5

**Точка  $a$**  называется **точкой локального максимума** функции  $f(x)$ , если область определения включает в себя такой интервал  $U$ , содержащий точку  $a$ , что при всех значениях  $x$  из  $U$  выполняется неравенство  $f(a) \geq f(x)$ .

**Точка  $a$**  называется **точкой локального минимума** функции  $f(x)$ , если область определения включает в себя такой интервал  $U$ , содержащий точку  $a$ , что при всех значениях  $x$  из  $U$  выполняется неравенство  $f(a) \leq f(x)$ .

Точки локального максимума и минимума иногда называют точками *локального экстремума*.

**Вопрос.** Какие точки экстремума имеет функция  $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ?



**2.6.\* Пределы функции справа и слева.** При исследовании поведения функции вблизи граничных точек области определения оказываются удобными понятия пределов справа и слева.

Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $D$ . Возьмём такую точку  $a$ , что некоторая её *правая окрестность*, то есть интервал  $(a; a')$ , где  $a' > a$ , принадлежит множеству  $D$ . При этом сама точка  $a$  может и не лежать в области определения данной функции.

Число  $M$  называется **пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к числу  $a$  справа**, если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$  и  $a < x < a + \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - M| < \varepsilon$ .

Обычно предел функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к числу  $a$  справа, обозначают через  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ .

Число  $M$  называется **пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к числу  $a$  слева**, если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$  и  $a - \delta < x < a$ , выполняется неравенство  $|f(x) - M| < \varepsilon$ .

Аналогично предел функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к числу  $a$  слева, обозначают через  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ . Возьмём теперь такую точку  $a$ , что некоторая её *левая окрестность*, то есть интервал  $(a''; a)$ , где  $a'' < a$ , принадлежит множеству  $D$ . При этом сама точка  $a$  может и не лежать в области определения функции  $f(x)$ .

Отметим, что если в точке  $a$  существуют и левый и правый пределы функции  $f(x)$ , причём  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , который равен пределу справа и пределу слева.

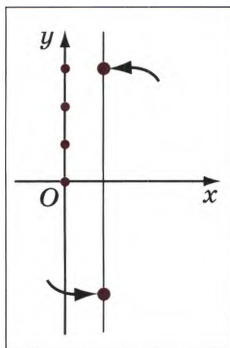


Рис. 6

**Пример 4.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{|x - 1|}$ . Она определена на множестве  $(-\infty; 1)$  и  $(1; \infty)$ . Исследуем поведение функции вблизи граничной точки 1 области определения.

I. Пусть  $x < 1$ . Тогда  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{|x - 1|} = -(x^2 + x + 1)$ . Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-(x^2 + x + 1)) = -\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = -3$ . Следовательно, когда  $x$  приближается слева к числу 1, значения функции  $f(x)$  приближаются к числу  $-3$  (рис. 6).



II. Пусть  $x > 1$ . Тогда  $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$ . Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$ . Следовательно, когда  $x$  приближается справа к числу 1, значения функции  $f(x)$  приближаются к числу 3 (рис. 6).

**Вопрос.** Почему из равенства  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  следует существование предела функции  $f(x)$  в точке  $a$ ?

**2.7. Вертикальные асимптоты.** Ещё один этап исследования функции состоит в установлении характера поведения функции вблизи граничных точек области определения.

**Пример 5.** Рассмотрим функцию  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Она определена на множестве  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . Граничной точкой области определения является число 0, которое не входит в область определения, но является концом промежутков, на которых функция определена.

Для исследования поведения функции вблизи точки 0 рассмотрим два случая.

I. Возьмём достаточно близкое к нулю отрицательное значение  $x$  и вычислим  $f(x)$ . Например, при  $x = -0,001$  имеем  $f(-0,001) = -1\,000\,000$ . Более того,  $f(x) < -10^6$  для всех  $x$  из промежутка  $(-10^3; 0)$ . Точно так же  $f(x) < -10^{2k}$  для всех  $x$  из промежутка  $(-10^{-k}; 0)$ . Аналогично, какое бы большое положительное число  $M$  мы ни взяли, для всех достаточно близких к нулю отрицательных значений  $x$  значение функции  $f(x)$  будет меньше числа  $-M$ .

Про такую особенность поведения функции  $f(x)$  говорят, что при  $x$ , стремящемся к нулю слева, значения  $f(x)$  стремятся к «минус бесконечности». Символически это можно записать в следующем виде:  $f(x) \rightarrow -\infty$  при  $x < 0$  и  $x \rightarrow 0$ .

Геометрически полученная особенность означает, что по мере приближения переменной  $x$  к нулю слева, точки графика приближаются к оси  $Oy$  в её отрицательном направлении. Более того, из убывания данной функции на промежутке  $(-\infty; 0)$  следует, что, выбирая всё более близкие к нулю отрицательные значения  $x$ , будем получать всё большие по модулю отрицательные значения  $f(x)$  (рис. 7).

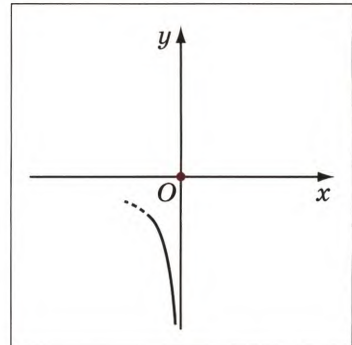


Рис. 7

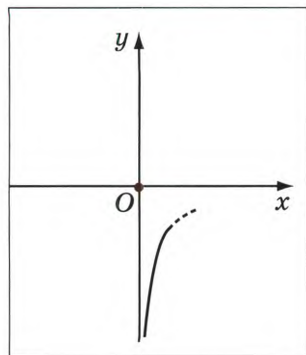


Рис. 8

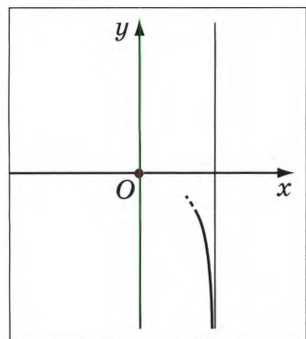


Рис. 9

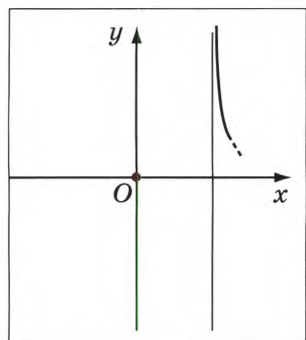


Рис. 10

II. Рассматривая достаточно близкие к нулю положительные значения  $x$ , заметим, что в этом случае значения функции  $f(x)$  могут оказаться сколь угодно большими по модулю отрицательными числами. Например,  $f(x) < -10^{12}$  для всех  $x$  из промежутка  $(0; 10^{-6})$  и вообще  $f(x) < -10^{2k}$  для всех  $x$  из промежутка  $(0; 10^{-k})$ . И в этом случае, какое бы большое положительное число  $M$  мы ни взяли, для всех достаточно близких к нулю положительных значений  $x$  значение функции  $f(x)$  будет меньше числа  $-M$ .

Символически это можно записать в виде:  $f(x) \rightarrow -\infty$  при  $x > 0$  и  $x \rightarrow 0$  (рис. 8).

Вертикальную прямую с уравнением  $x=0$ , к которой приближаются линии графика, называют *вертикальной асимптотой*.

**Пример 6.** Рассмотрим функцию  $g(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$ .

Она определена на множестве  $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ . Для исследования поведения функции вблизи граничной точки 2 рассмотрим два случая.

I. Заметим, что при  $x=1,99$  имеем  $g(1,99) = -10^6$  и  $g(x) < -10^6$  при всех  $x$  из промежутка  $(2-10^{-2}; 2)$ . Для всех значений  $x$  из промежутка  $(2-10^{-k}; 2)$  выполняется неравенство  $g(x) < -10^{3k}$ . И вообще, какое бы большое положительное число  $M$  мы ни взяли, для всех достаточно близких к числу 2 значений  $x < 2$  значение функции  $g(x)$  будет меньше числа  $-M$ .

Таким образом, при выборе достаточно близких к числу 2 значений  $x$  из промежутка  $(-\infty; 2)$  поведение функции  $g(x)$  похоже на поведение функции  $f(x)$  из примера 4, случай I (рис. 9).

Символически такое поведение функции можно записать в виде:  $g(x) \rightarrow -\infty$  при  $x < 2$  и  $x \rightarrow 2$  (рис. 9).

II. Заметим, что при  $x=2,001$  имеем  $g(2,001) = 10^9$  и  $g(x) > 10^9$  при всех  $x$  из промежутка  $(2; 2+10^{-3})$ . Вообще, какое бы большое положительное число  $M$  мы ни взяли, для всех достаточно близких к



числу 2 значений  $x > 2$  значение функции  $g(x)$  будет больше числа  $M$ .

Символически такое поведение функции можно записать в виде:  $g(x) \rightarrow +\infty$  при  $x > 2$  и  $x \rightarrow 2$  (рис. 10).

В этом примере вертикальной асимптотой графика функции является прямая с уравнением  $x = 2$ .

**Вопрос.** Какую вертикальную асимптоту имеет график функции  $y = \frac{1}{x+2}$ ?

**2.8.\* Функции, стремящиеся к бесконечности.** Будем говорить, что функция  $f(x)$ , определённая на множестве  $D$ , стремится к  $+\infty$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  справа, если для каждого положительного числа  $M$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$  и  $a < x < a + \delta$ , выполняется неравенство  $f(x) > M$ .

В этом случае записывают, что  $f(x) \rightarrow +\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$  (при  $a = 0$  можно использовать записи  $f(x) \rightarrow +\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$ ).

Функция  $f(x)$  стремится к  $-\infty$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  справа, если для каждого положительного числа  $M$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$  и  $a < x < a + \delta$ , выполняется неравенство  $f(x) < -M$ .

В этом случае записывают, что  $f(x) \rightarrow -\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$  (при  $a = 0$  можно использовать записи  $f(x) \rightarrow -\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ ).

Аналогично определяют «пределы»  $+\infty$  и  $-\infty$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  слева:  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ . При  $a = 0$  можно использовать записи  $f(x) \rightarrow +\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$  или  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty$ .

**Пример 7.** Покажем, что  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

Взяв произвольное положительное число  $K$ , получим, что неравенство  $\frac{1}{x^2} > K$  выполняется при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{K}}$ . Выбрав  $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$ , получим, что функция  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  удовлетворяет определению 3 при  $x$ , стремящемся к 0 справа.

**Пример 8.** Покажем, что  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty$ .

Взяв произвольное положительное число  $K$ , получим, что неравенство  $\frac{1}{(x-2)^3} < -K$  при  $x < 2$  равносильно неравенству  $(x-2)^3 > -\frac{1}{K}$ . По-



этому, выбрав  $\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{K}}$ , получим, что для функции  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$  при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $2 - \delta < x < 2$ , выполняется неравенство  $f(x) < -K$ , и функция  $f(x)$  стремится к  $-\infty$  при  $x$ , стремящемся к 2 слева.

Заметим, что, когда функция  $f(x)$  стремится к  $+\infty$  или  $-\infty$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  справа или слева, не существует числа, которое являлось бы пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , соответственно стремящемся к  $a$  справа или слева.

Иногда рассматривают также случаи, когда функция  $f(x)$  стремится к  $+\infty$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , или когда функция  $f(x)$  стремится к  $-\infty$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ .

**Вопрос.** Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 100$ . Как пояснить, что  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$ ?

**2.9.\* Пределы функций при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ .** Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $D$ , содержащем некоторый луч вида  $[b; +\infty)$ .

Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $M$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$  и  $x > M$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  обозначают через  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Пример 9.** Покажем, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{3x+1} = 1$ .

Поскольку  $\left| \frac{3x}{3x+1} - 1 \right| = \frac{1}{|3x+1|} < \frac{1}{3x}$  при  $x > 0$ , получим, что для каждого положительного числа  $\varepsilon$  неравенство  $\left| \frac{3x}{3x+1} - 1 \right| < \varepsilon$  выполняется при всех  $x > M = \frac{1}{3\varepsilon}$ .

Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $D$ , содержащем некоторый луч вида  $(-\infty; b]$ .

Число  $B$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ , если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  найдётся такое положительное число  $M$ , что при всех  $x$ , удовлетворяющих условиям  $x \in D$  и  $x < -M$ , выполняется неравенство  $|f(x) - B| < \varepsilon$ .

Предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  обозначают через  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Пример 10.** Покажем, что  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$ .

Поскольку при  $x < -1$  справедливы соотношения  $\left| \frac{x+1}{x^2+1} - 0 \right| < \frac{|x|}{x^2+1} < \frac{|x|}{x^2} \leq \frac{1}{|x|}$ , то для каждого положительного числа  $\varepsilon$  неравенство  $\left| \frac{x+1}{x^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$  выполняется при всех  $x < -M = -\frac{1}{\varepsilon}$ .

**Вопрос.** Как на основе определений доказать, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ?

**2.10.\* Наклонные асимптоты.** Иногда при  $x \rightarrow +\infty$  или при  $x \rightarrow -\infty$  значение функции  $f(x)$  удобно сравнивать со значениями линейной функции  $y(x) = kx + b$ .

**Пример 11.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ .

Из равенства  $\frac{x^2 - x + 1}{x} = (x - 1) + \frac{1}{x}$ , следует, что значение  $f(x)$  отличается от значения  $y(x) = x - 1$  на значение  $\frac{1}{x}$ . При больших по модулю значениях  $x$  разность между  $f(x)$  и  $y(x)$  мала и стремится к нулю как при  $x \rightarrow +\infty$ , так и при  $x \rightarrow -\infty$ . Таким образом, при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$  график функции  $f(x)$  приближается к графику функции  $y(x)$ , то есть к прямой (рис. 11). Эту прямую называют также *наклонной асимптотой* или просто *асимптотой*.

В случае, когда в уравнении асимптоты коэффициент  $k$  наклона равен 0, асимптота параллельна оси  $Ox$  и называется *горизонтальной асимптотой*.

**Вопрос.** Какие уравнения имеют асимптоты графика функции  $f(x) = \frac{|x+1|}{x-1}$ ?

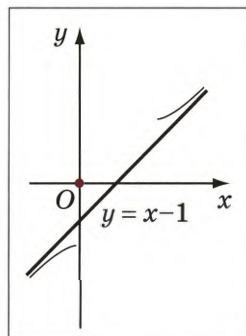


Рис. 11

**2.11.\*\* Определение асимптоты.** Наклонные асимптоты графика функции могут быть как при  $x \rightarrow +\infty$ , так и при  $x \rightarrow -\infty$ .

Прямая с уравнением  $y = kx + b$  называется асимптотой функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ .

Функция  $f(x)$  имеет при  $x \rightarrow +\infty$  асимптоту  $y = kx + b$  в том и только в том случае, когда существуют следующие пределы:  $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$ .

**Пример 12.** Найдём асимптоту функции  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\text{I. } k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$$\text{II. } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -1. \text{ Следовательно,}$$

прямая  $y = x - 1$  является асимптотой данной функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

Аналогично определяется асимптота и записываются правила её нахождения при  $x \rightarrow -\infty$ .

Прямая с уравнением  $y = kx + b$  называется асимптотой функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$ .

Функция  $f(x)$  имеет при  $x \rightarrow -\infty$  асимптоту  $y = kx + b$  в том и только в том случае, когда существуют следующие пределы:  $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$ .

**Вопрос.** Какое уравнение имеет асимптота графика функции  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$  при  $x \rightarrow -\infty$ ?

**2.12.\*\* Промежутки выпуклости.** Понятие выпуклости мы будем рассматривать только на промежутках, на которых функция  $f(x)$  имеет производную.

Функция  $f(x)$  называется выпуклой вверх на промежутке  $D$ , если график функции на этом промежутке лежит ниже каждой касательной, проходящей через точку графика.

Для доказательства выпуклости вверх функции  $f(x)$  на промежутке  $D$  можно использовать следующий признак.

Если на промежутке  $D$  производная  $f'(x)$  убывает, то функция  $f(x)$  выпукла вверх на этом промежутке.

**Пример 13.** Функция  $f(x) = \arcsin x$  выпукла вверх на интервале  $(-1; 0)$ .

Производная  $f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  убывает на интервале  $(-1; 0)$ , так как функция  $y = 1 - x^2$  возрастает на этом интервале. Поэтому функция  $\arcsin x$  выпукла вверх на  $(-1; 0)$ . Изображаем график таким образом, чтобы

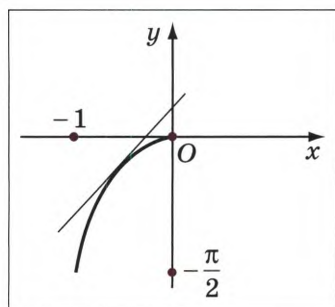


Рис. 12



он проходил ниже любой своей касательной (рис. 12).

Функция  $f(x)$  называется **выпуклой вниз** на промежутке  $D$ , если график функции на этом промежутке лежит выше каждой касательной, проходящей через точку графика.

Для доказательства выпуклости вниз функции  $f(x)$  на промежутке  $D$  можно использовать следующий признак.

Если на промежутке  $D$  производная  $f'(x)$  возрастает, то функция  $f(x)$  выпукла вниз на этом промежутке.

**Пример 14.** Рассмотрим снова функцию  $f(x) = \arcsin x$ . Так как  $f'(x)$  на интервале  $(0;1)$  убывает, функция  $f(x) = \arcsin x$  выпукла вниз на этом интервале. Изображаем график таким образом, чтобы он проходил выше любой своей касательной (рис. 13).

Исследование функции на выпуклость будем считать вспомогательным этапом исследования.

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $f(x) = e^x$  выпукла вниз на всей числовой прямой?

**2.13.\* Сравнение графиков функций при стремлении аргумента к бесконечности.** Ещё один этап исследования функции состоит в установлении характера поведения функции  $f(x)$  при неограниченном возрастании переменной  $x$ , то есть при  $x \rightarrow +\infty$ , или при неограниченном убывании  $x$ , то есть при  $x \rightarrow -\infty$ . При изучении наклонных асимптот мы сравнивали значения заданной функции со значениями линейной функции. Иногда полезно сравнивать значения функции со значениями других, хорошо известных функций.

**Пример 15.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^3 - 3x$ . При больших положительных значениях  $x$  слагаемое  $x^3$  значительно больше, чем  $3x$ , и

$$\frac{(x^3 - 3x) - x^3}{x^3} = -\frac{3}{x^2} \rightarrow 0 \text{ как при } x \rightarrow +\infty, \text{ так и при } x \rightarrow -\infty.$$

Поэтому значение функции  $f(x) = x^3 - 3x$  при больших  $x$  относительно мало отличается от значения функции  $g(x) = x^3$ . Зная, что при  $x \rightarrow +\infty$  график функции  $y = x^3$  всё круче уходит вверх, можно аналогичный вывод сделать и о поведении графика функции  $f(x) = x^3 - 3x$ .

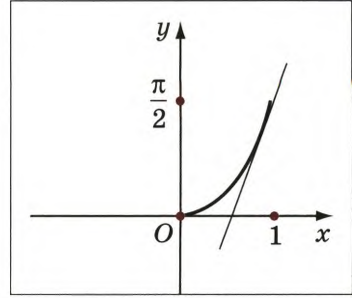


Рис. 13

Точно так же при больших по модулю отрицательных значениях  $x$  значение  $f(x) = x^3 - 3x$  относительно мало отличается от  $x^3$ . Поэтому при  $x \rightarrow -\infty$  график функции  $f(x) = x^3 - 3x$  похож на график функции  $y = x^3$  и всё круче уходит вниз.

**Вопрос.** Как схематически изобразить график функции  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ ?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как вы понимаете слова «естественная область определения функции, заданной формулой»?
2. Что называют нулями функции?
3. Как определяются промежутки знакопостоянства функции?
4. Как с помощью производной найти промежутки монотонности функции?
5. Как определяется точка локального максимума?
6. Как определяется точка локального минимума?
7. Что называют точками экстремума?
- 8.\* Что называют наклонной асимптотой?
- 9.\*\* Как определяется на промежутке выпуклость функции вверх?
- 10.\*\* Как определяется на промежутке выпуклость функции вниз?

### ■ Задачи и упражнения

1. Найдите область определения функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}; & \text{б)} f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}; & \text{в)} f(x) = \frac{4x+3}{6x^2-5x+1}; \\ \text{г)} f(x) = \frac{1}{x^3-x}; & \text{д)} f(x) = \sqrt{2x+3}; & \text{е)} f(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)}. \end{array}$$

2. Найдите область определения функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}; & \text{б)} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}; & \text{в)} f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}; \\ \text{г)} f(x) = \sqrt{x^4-5x^2+4}; & \text{д)} f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}; & \text{е)} f(x) = \sqrt{x(x^2-4)}. \end{array}$$

- 3.\*\* Найдите область определения функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} f(x) = \log_2 \frac{x}{x+2}; & \text{б)} f(x) = \log_{x^2-1}(2x-1); \\ \text{в)} f(x) = \log_{2x}(2+x-x^2); & \text{г)} f(x) = \log_{(x+1)} \frac{2-x}{x+2}; \end{array}$$

д)  $f(x) = \sqrt{\log_x(3x-1)}$ ;

е)  $f(x) = \sqrt{\log_{3x}(x^2+1)}$ .

4. Найдите нули функции:

а)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ ; б)  $f(x) = (x^2 - 2)^2$ ; в)  $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3$ ; д)  $f(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot \sqrt{x}$ ; е)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ .

5. Найдите промежутки знакопостоянства для функции:

а)  $f(x) = x(x+1)(x+2)$ ; б)  $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ ;

в)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ ; г)  $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+5x+6}$ ;

д)  $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}$ ; е)  $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$ ;

ё)  $f(x) = x - \sqrt{x} - 2$ ; ж)  $f(x) = \sqrt{x+2} + 2x - 6$ .

6. Найдите промежутки монотонности и точки локального экстремума для функции:

а)  $f(x) = x^3 - x^2$ ; б)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ; в)  $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ ;

г)  $f(x) = (x-2) \cdot \sqrt{x}$ ; д)  $f(x) = (x^2-1)^2$ ; е)  $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ .

7. Изобразите график функции с его горизонтальной и вертикальной асимптотой:

а)  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ; в)  $f(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$ ;

г)  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ; д)  $f(x) = \frac{2x+1}{4x-2}$ ; е)  $f(x) = \frac{3x-1}{2x-1}$ .

8.\* Найдите наклонные асимптоты для функции:

а)  $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x+1}$ ; б)  $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ ; в)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ ;

г)  $f(x) = \frac{x^3-2x^2+3x-1}{x^2}$ ; д)  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ ; е)  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ .

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какова область определения функции  $f(x) = \arccos \frac{1}{2x}$ ?

1)  $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$  2)  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$



3)  $[-2; 0) \cup (0; 2]$

4)  $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$

**1.2.** Сколько вертикальных асимптот имеет график функции  $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$ ?

1) ни одной

2) одну

3) две

4) три

**1.3.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на интервале  $U$  и имеет производную для всех  $x \in U$ ,  $x \neq a$ . В предложение «Если в некотором интервале  $U$ , содержащем точку  $a$ ,  $\langle \dots \rangle$ , то точка  $a$  является точкой локального максимума функции  $f(x)$ » вместо вместо знака  $\langle \dots \rangle$  по очереди подставляются тексты из указанных вариантов. В каком случае получается верное утверждение?

1) при всех  $x$  из  $U$  выполняется неравенство  $f'(x) < 0$

2) при всех  $x$  из  $U$ , меньших  $a$ , выполняется неравенство  $f'(x) < 0$

3) при всех  $x$  из  $U$ , меньших  $a$ , выполняется неравенство  $f'(x) < 0$ , а при всех  $x$  из  $U$ , больших  $a$ , выполняется неравенство  $f'(x) > 0$

4) при всех  $x$  из  $U$ , меньших  $a$ , выполняется неравенство  $f'(x) > 0$ , а при всех  $x$  из  $U$ , больших  $a$ , выполняется неравенство  $f'(x) < 0$

**1.4.\*** Какая из прямых является наклонной асимптотой для графика функции  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ ?

1)  $y = x$

2)  $y = x - 1$

3)  $y = x + 1$

4)  $y = x - 2$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из указанных чисел входят в область определения функции  $f(x) = \arcsin \frac{3x-1}{2x+1}$ ?

1)  $\frac{1}{3}$

2)  $\frac{3}{4}$

3)  $\frac{5}{3}$

4)  $\frac{9}{4}$

**2.2.\*\*** Укажите, для каких функций  $f(x)$  в точке 1 предел слева равен пределу справа:

1)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

2)  $f(x) = \frac{x - 1}{|x^3 - 1|}$

3)  $f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{x - 1}$

4)  $f(x) = \frac{|x - 1|}{x^3 - 1}$

**2.3.** Какие из указанных функций имеют только неотрицательные значения?

1)  $f(x) = \arccos x$

2)  $f(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$

$$3) f(x) = \pi - \arccos x$$

$$4) f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

**2.4.** На каких из указанных промежутков функция  $f(x) = \frac{x^2(x^2 - 4)}{x + 1}$  принимает только положительные значения?

$$1) (-2; -1)$$

$$2) (-1; 0)$$

$$3) (0; 2)$$

$$4) (2; \infty)$$

### § 3. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИИ ■

**3.1. Этапы построения графика функции.** Построение графика функции  $f(x)$  производится на основе её исследования. Основные этапы исследования функции рассмотрены в предыдущем параграфе. Перечислим их ещё раз:

- найти область определения;
- установить промежутки непрерывности;
- найти промежутки знакопостоянства и нули функции;
- установить промежутки монотонности;
- исследовать поведение функции вблизи граничных точек области определения;
- найти точки экстремума.

Исследование упрощается, если функция имеет характерные особенности: чётность, нечётность, периодичность.

Когда функция  $f(x)$  чётна, достаточно провести её исследование при  $x \geq 0$ , затем построить часть графика при  $x \geq 0$  и симметрично отразить эту часть относительно оси ординат.

Когда функция нечётна, также достаточно построить часть её графика при  $x > 0$  и симметрично отразить эту часть относительно начала системы координат.

Когда функция периодична, достаточно построить часть её графика на промежутке длиной в период, после чего с помощью параллельного переноса изобразить весь график.

**Вопрос.** На рис. 1 изображена часть графика функции  $f(x) = \sin^2 x$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Какой вид имеет весь график?

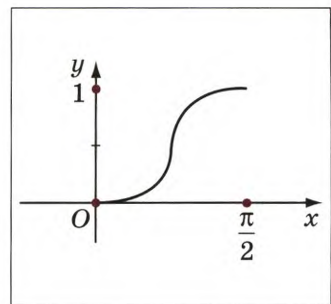


Рис. 1

**3.2. Пример построения графика функции.** Проведём исследование и построим график функции  $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2$ .

I. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

II.  $f(x) = 0$  при  $x = -1, x = 1$ ;  $f(x) > 0$  при  $x \in (-1; 1) \cup (1; \infty)$ ;  $f(x) < 0$  при  $x \in (-\infty; -1)$ .

III.  $f'(x) = ((x+1)(x-1)^2)' = (x+1)' \cdot (x-1)^2 + (x+1)((x-1)^2)' = (x-1)^2 + 2(x-1)(x+1) = (x-1)(3x+1)$ ;  $f'(x) = 0$  при  $x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{3}$ ;  $f'(x) > 0$  при  $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; \infty)$ ;  $f'(x) < 0$  при  $x \in (-\frac{1}{3}; 1)$ . Отсюда следует:

$x$	$(-\infty; -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	$> 0$	0	$< 0$	0	$> 0$
$f(x)$	возрастает	максимум	убывает	минимум	возрастает

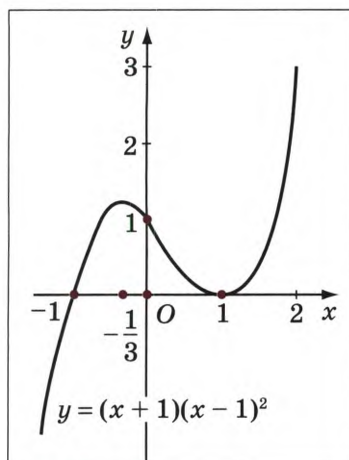


Рис. 2

IV.  $f(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27} = 1\frac{5}{27}$ ;  $f(1) = 0$ . Кроме того,  $f(0) = 1$ .

V. При больших по модулю значениях  $x$  данная функция ведёт себя похоже на функцию  $y = x^3$ .

С учётом отмеченных особенностей строим график (рис. 2).

**Вопрос.** Сколько действительных корней имеет уравнение  $(x+1)(x-1)^2 = 1$ ?

**3.3.\* Пример графика, имеющего асимптоты.** Проведём исследование и построим график функции  $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ .

I. Функция определена при  $x \neq 1$ , непрерывна на каждом из промежутков  $(-\infty; 1), (1; \infty)$ .

II.  $f(x) = 0$  при  $x_1 = -1$ ;  $f(x) > 0$  при  $x \in (-1; 1) \cup (1; \infty)$ ;  $f(x) < 0$  при  $x \in (-\infty; -1)$ .

III.  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x < 1$  и  $x \rightarrow 1$ ;  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x > 1$  и  $x \rightarrow 1$ .

IV.  $f'(x) = \frac{3(x+1)^2(x-1)^2 - (x+1)^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$ ;  $f'(x) = 0$  при  $x_2 = -1, x_3 = 5$ ;  $f'(x) > 0$  при  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (5; \infty)$ ;  $f'(x) < 0$  при  $x \in (1; 5)$ . Отсюда следует:



$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$(1; 5)$	$5$	$(5; \infty)$
$f'(x)$	$> 0$	$0$	$> 0$	$< 0$	$> 0$	$> 0$
$f(x)$	возрастает	нет экстремума	возрастает	убывает	минимум	возрастает

$$V. f(5) = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}.$$

$$VI. f(x) = \frac{(x-1+2)^3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 12(x-1) + 8}{(x-1)^2} = (x-1) + 6 + \frac{12}{(x-1)} + \frac{8}{(x-1)^2} = (x+5) + \left( \frac{12}{(x-1)} + \frac{8}{(x-1)^2} \right).$$

Поскольку при больших по модулю значениях  $x$  слагаемое  $\left( \frac{12}{(x-1)} + \frac{8}{(x-1)^2} \right)$  мало, то при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$  график функции  $f(x)$  приближается к прямой  $y = x + 5$ .

С учётом отмеченных особенностей строим график (рис. 3).

**Вопрос.** Как объяснить, что график функции  $y = (x+5) + \left( \frac{12}{(x-1)} + \frac{8}{(x-1)^2} \right)$  приближается к прямой  $y = x + 5$  при больших по модулю значениях  $x$ ?

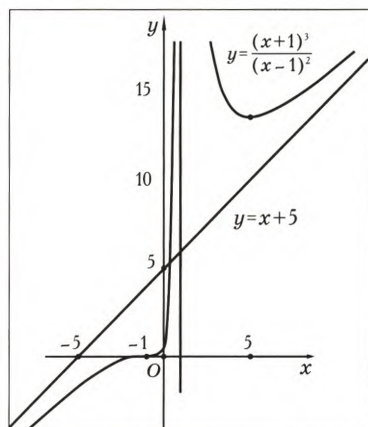


Рис. 3

**3.4.\*\* Пример графика функции с двумя разными наклонными асимптотами.** Построим график функции  $f(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1$ .

I. Функция определена и непрерывна при всех  $x$ .

II. Решим уравнение  $f(x) = 0$ :

$$2\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1 = 0, \quad 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1, \quad 4(x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 1, \\ 3x^2 + 2x + 3 = 0, \text{ действительных корней нет.}$$

III. Поскольку  $f(0) = 1 > 0$ , то  $f(x) > 0$  при всех  $x$ .

$$IV. f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} - 1.$$

Решим уравнение  $f'(x) = 0$ :

$2x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 1} = 0$ ,  $\sqrt{x^2 + x + 1} = 2x + 1$ ,  $x^2 + x + 1 = (2x + 1)^2$  (для корней должно выполняться условие  $2x + 1 \geq 0$ ),  $x^2 + x = 0$ ,  $x_1 = -1$  не удовлетворяет условию  $2x_1 + 1 \geq 0$ ,  $x_2 = 0$  — корень уравнения  $f'(x) = 0$ . Методом интервалов определяем, что  $f'(x) > 0$  при  $x > 0$  и  $f'(x) < 0$  при  $x < 0$ . Отсюда следует, что  $f(x)$  убывает на промежутке  $(-\infty; 0)$  и возрастает на промежутке  $(0; \infty)$ ; точка  $x = 0$  — точка локального минимума.

V. Найдём асимптоту при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x} \right) = 1;$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x^2 + x + 1) - (2x + 1)^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} + (2x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} + (2x + 1)} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, прямая  $y = x$  является асимптотой данной функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

Найдём асимптоту при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x} \right) = -3;$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1) + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x^2 + x + 1) - (2x - 1)^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x + 1} =$$

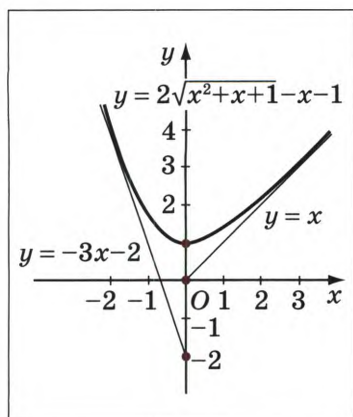


Рис. 4

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - 2x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 + \frac{3}{x}}{-2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 + \frac{1}{x}} = -2. \end{aligned}$$

Следовательно, прямая  $y = -3x - 2$  является асимптотой данной функции при  $x \rightarrow -\infty$ . С учётом отмеченных особенностей строим график (рис. 4).

**Вопрос.** Как доказать, что график функции  $y = 2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1$  не пересекается со своими асимптотами?

### 3.5.\*\* Построение графиков функций при наличии симметрий.

Иногда можно заметить симметричность графика функции относительно вертикальной прямой или относительно точки. В этом случае построение графика упрощается.

**Пример 1.** Проведём исследование и построим график функции  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ .

Сначала заметим, что  $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 1}$ . Поэтому график этой функции получается из графика чётной функции  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  параллельным переносом, который определяется вектором  $(1; 0)$ . Отсюда следует, что график функции  $f(x)$  симметричен относительно прямой  $x = 1$ .

I. Функция  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$  определена и непрерывна на луче  $[2; \infty)$  и не определена при  $1 \leq x < 2$ .

II.  $f(x) = 0$  при  $x = 2$  и  $f(x) > 0$  при  $x \in (2; \infty)$ .

III.  $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ . Неравенство  $f'(x) > 0$  при  $x \geq 2$  очевидно. Следовательно, данная функция на луче  $[2; \infty)$  возрастает.

IV. Найдём асимптоту при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = -1.$$

Таким образом, прямая  $y = x - 1$  является асимптотой данной функции при  $x \rightarrow +\infty$ . С учётом отмеченных особенностей строим часть графика функции на луче  $[2; \infty)$  и затем симметрично отражаем относительно прямой  $x = 1$  (рис. 5).

**Вопрос.** Какое уравнение имеет асимптота графика функции  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$  при  $x \rightarrow -\infty$ ?

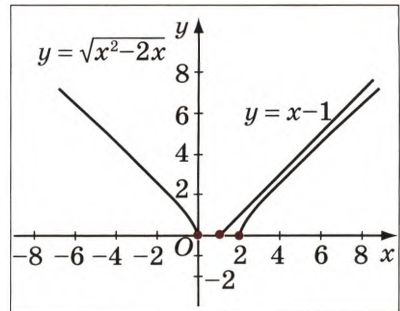


Рис. 5



### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Каковы основные этапы исследования функции?
2. Какие особенности функции могут упростить её исследование?
3. Какая функция называется чётной?
4. Какая функция называется нечётной?
5. Какая функция называется периодической?

### ■ Задачи и упражнения

1. Проведите исследование и постройте график функции:

- |                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| а) $f(x) = x^3 - 4x$ ;        | б) $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$ ; |
| в) $f(x) = x^3 + x^2$ ;       | г) $f(x) = x(x^2 - 1)$ ;       |
| д) $f(x) = x^3 -  2x + 1 $ ;  | е) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ ;   |
| ё) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x$ ; | ж) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ .   |

2.\* Проведите исследование и постройте график функции:

- |                                       |  |                                     |
|---------------------------------------|--|-------------------------------------|
| а) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ;         | б) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ ;                            | в) $f(x) = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$ ; |
| г) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ ; | д) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ ;                          | е) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$ ;       |
| ё) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$ ;  | ж) $f(x) = (x - 1) \cdot \left(\frac{x}{x + 1}\right)^2$ . |                                     |

3.\*\* Проведите исследование и постройте график функции:

- |  |  |
|--|--|
| а) $f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ ;        | б) $f(x) = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$ ;          |
| в) $f(x) = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$ ;        | г) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$ ;   |
| д) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 5} - \frac{4}{3}x$ ; | е) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{1}{2}x$ . |

### ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x - \pi}$ ?

- |       |       |      |      |
|-------|-------|------|------|
| 1) -2 | 2) -1 | 3) 1 | 4) 2 |
|-------|-------|------|------|

**1.2.\*** Какая из прямых является асимптотой графика функции

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2} \text{ при } x \rightarrow +\infty \text{ и при } x \rightarrow -\infty?$$

1)  $y = x - 1$

2)  $y = x - 2$

3)  $y = x - 3$

4)  $y = x - 4$

**1.3.\*** При исследовании функции  $f(x) = (x+1)(x-1)^2$  было найдено, что функция возрастает на промежутках  $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$  и  $(1; \infty)$  и убывает на промежутке  $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ . На каком из указанных промежутков возрастает функция  $g(x) = (1-x)(x+1)^2$ ?

1)  $(-\infty; -1)$

2)  $(-1; 0)$

3)  $(0; 1)$

4)  $(1; +\infty)$

**1.4.\*\*** При исследовании функции  $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$  было найдено, что прямая с уравнением  $y = x + 5$  является наклонной асимптотой при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ . Какая из указанных прямых является наклонной асимптотой для графика функции  $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ ?

1)  $y = x + 6$

2)  $y = x + 5$

3)  $y = x + 4$

4)  $y = x + 3$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из указанных чисел являются нулями функции  $f(x) = \arccos(2\sin x)$ ?

1)  $\frac{5\pi}{6}$

2)  $\frac{7\pi}{6}$

3)  $\frac{11\pi}{6}$

4)  $\frac{13\pi}{6}$

**2.2.** Какие из указанных функций не имеют наклонной асимптоты?

1)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

2)  $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

3)  $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$

4)  $f(x) = \frac{x^5}{x^4 + 1}$

**2.3.** Какие из указанных функций являются чётными?

1)  $y = \frac{x^2}{x+1}$

2)  $y = \frac{x^3}{x-1}$

$$3) y = \frac{x^2}{|x|+1}$$

$$4) y = \frac{x^3}{|x|-1}$$

**2.4.** Какие из утверждений для функции  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$  являются верными?

$$1) f(x) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow 1+0$$

$$2) f(x) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow 1-0$$

$$3) f(x) \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow 1+0$$

$$4) f(x) \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow 1-0$$

## ■ § 4. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

### 4.1. Наибольшее и наименьшее значения функции на мно-

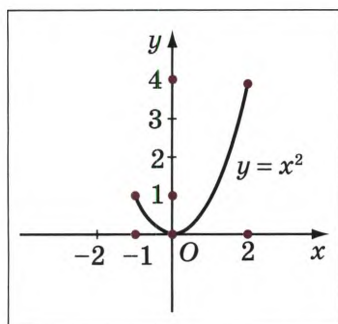


Рис. 1

**жестве.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2$  и её значения на отрезке  $[-1; 2]$  (рис. 1). Число  $f(2) = 4$  является наибольшим из всех значений, которые принимает функция  $f(x)$  на отрезке  $[-1; 2]$ , то есть для любого  $x$  из  $[-1; 2]$  выполняется неравенство  $f(2) \geq f(x)$ . Заметим, что вне отрезка  $[-1; 2]$  нетрудно указать точку, в которой функция  $f(x) = x^2$  принимает значение, большее 4. Наибольшее значение функции в её области определения существует не всегда.

Например, рассмотрим ту же самую функцию  $f(x) = x^2$  на интервале  $(-1; 2)$ . Предположим, что в какой-то точке  $x_0$  из этого интервала значение  $f(x_0)$  наибольшее. Но тогда  $-1 < x_0 < 2$  и  $|x_0| < 2$ . Взяв такое число  $x_1$ , что  $|x_0| < x_1 < 2$ , получим  $x_0^2 = |x_0|^2 < x_1^2$ , то есть  $f(x_0) < f(x_1)$ , вопреки предположению.

Обобщая рассмотренные примеры, дадим определения.

Число  $f(x_0)$  называется **наибольшим значением функции  $f(x)$  на множестве  $M$** , если  $x_0 \in M$  и  $f(x_0) \geq f(x)$  при всех  $x \in M$ .

Наибольшее значение функции  $f(x)$  на множестве  $M$  называют также **максимальным значением функции  $f(x)$  на  $M$** .

Число  $f(x_0)$  называется **наименьшим значением функции  $f(x)$  на множестве  $M$** , если  $x_0 \in M$  и  $f(x_0) \leq f(x)$  при всех  $x \in M$ .

Наименьшее значение функции  $f(x)$  на множестве  $M$  называют также **минимальным значением функции  $f(x)$  на  $M$** .

**Вопрос.** Может ли локальный максимум функции не совпадать с её наибольшим значением?



**4.2. Пример нахождения наибольшего значения функции.** В некоторых случаях решение задачи на максимум или минимум удаётся свести к исследованию функции.

**Пример 1.** В углах квадратного листа жести со стороной 12 см вырезаются одинаковые квадраты (рис. 2), затем края загибаются и делается коробка в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 3). Какие квадраты нужно вырезать, чтобы объём получившейся коробки был наибольшим?

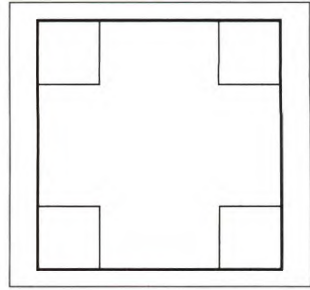


Рис. 2

Обозначим сторону вырезаемых квадратов через  $x$  (см), причём  $0 < x < 6$ . В основании коробки получится квадрат со стороной  $(12 - 2x)$  (см), а высота коробки  $x$  (см). Поэтому объём коробки  $V(x)$  равен  $(12 - 2x)^2 \cdot x$  (см<sup>3</sup>). Рассмотрим на отрезке  $[0; 6]$  функцию  $V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$ .

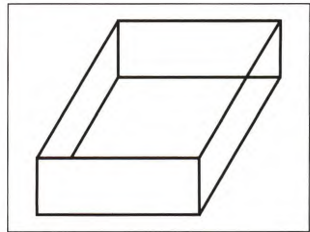


Рис. 3

I. Функция  $V(x)$  на отрезке  $[0; 6]$  определена и непрерывна.

II.  $V(0) = 0$ ,  $V(6) = 0$  и  $V(x) > 0$  при остальных  $x$  из отрезка  $[0; 6]$ .

III.  $V'(x) = 4 \cdot (x(6 - x)^2)' = 4 \cdot ((6 - x)^2 + x \cdot 2(6 - x) \cdot (-1)) = 4 \cdot (6 - x) \cdot (6 - 3x) = 12 \cdot (6 - x) \cdot (2 - x) = 12 \cdot (x - 2)(x - 6)$ . Следовательно,  $V(x)$  возрастает на интервале  $(0; 2)$ , убывает на интервале  $(2; 6)$  и в точке 2 имеет локальный максимум, равный  $V(2) = 128$ .

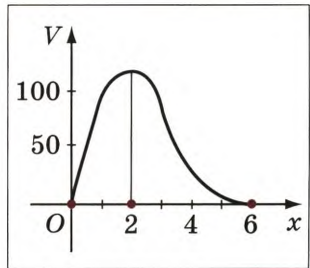


Рис. 4

Отмеченные закономерности позволяют построить схематический график функции  $V(x)$  на отрезке  $[0; 6]$  (рис. 4). Значение  $V(2) = 128$  является наибольшим на интервале  $(0; 6)$ .

*Ответ:* нужно вырезать квадраты со стороной 2 см.

**Вопрос.** Как изменится ответ, если делать коробку наибольшего объёма из квадратного листа со стороной  $a$ ?

**4.3.\*\* Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции.** Существование наибольшего или наименьшего значений непре-

рывной функции обычно устанавливают на основе следующего утверждения.

**Теорема.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Тогда найдутся такие числа  $c_1$  и  $c_2$  из отрезка  $[a; b]$ , что  $f(c_1) \geq f(x)$ ,  $f(c_2) \leq f(x)$  при всех  $x$  из  $[a; b]$ .

Доказательство этой теоремы рассматривается в курсах математического анализа.

**Вопрос.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на интервале  $(a; b)$ . При каких условиях множеством значений  $f(x)$  на  $(a; b)$  будет отрезок?

**4.4.\* Теорема Ферма.** При нахождении наибольшего и наименьшего значений функции важную роль играет теорема Ферма.

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$ , достигает своего наибольшего (наименьшего) значения во внутренней точке  $c$  и имеет в точке  $c$  производную. Тогда  $f'(c) = 0$ .

*Доказательство.* По условию функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $c$ . Это означает, что  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$ . Следовательно, для каждой такой последовательности  $(x_n)$ , что  $x \in [a; b]$ ,  $x_n \neq c$  и  $x_n \rightarrow c$  при  $n \rightarrow \infty$ , последовательность  $\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}$  сходится к числу  $f'(c)$ .

Разберём случай, когда функция  $f(x)$  в точке  $c$  достигает наименьшего значения, то есть  $f(x) \geq f(c)$  при всех  $x \in [a; b]$ . Поскольку точка  $c$  лежит внутри отрезка  $[a; b]$ , то существуют точки этого отрезка, которые меньше  $c$ . Поэтому можно выбрать такую последовательность  $y_n$ , что  $y_n \in [a; b]$ ,  $y_n < c$  и  $y_n \rightarrow c$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $y_n - c < 0$ ,  $f(y_n) - f(c) \geq 0$ , откуда  $\frac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} \leq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} \leq 0$  и  $f'(c) \leq 0$ .

Аналогично существуют точки отрезка  $[a; b]$ , которые больше  $c$ , и можно выбрать такую последовательность  $z_n$ , что  $z_n \in [a; b]$ ,  $z_n > c$  и  $z_n \rightarrow c$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $z_n - c > 0$ ,  $f(z_n) - f(c) \geq 0$ , откуда  $\frac{f(z_n) - f(c)}{z_n - c} \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(c)}{z_n - c} \geq 0$  и  $f'(c) \geq 0$ .

Одновременное выполнение неравенств  $f'(c) \leq 0$  и  $f'(c) \geq 0$  означает, что  $f'(c) = 0$ .

Аналогично рассматривается и тот случай, когда функция  $f(x)$  в точке  $c$  достигает наибольшего значения.



Из теоремы Ферма следует, что если функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$ , то наибольшее значение функции  $f(x)$  на этом отрезке не может быть в тех внутренних точках  $x$  отрезка  $[a; b]$ , в которых производная  $f'(x)$  существует и не равна нулю.

**Вопрос.** В каких точках следует искать наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$ , определённой и непрерывной на отрезке  $[a; b]$ , которая на интервале  $(a; m)$  строго возрастает, на интервале  $(m; b)$  строго убывает ( $a < m < b$ )?

**4.5. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке.** Как наибольшее, так и наименьшее значение непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции следует искать либо в тех точках, где производная равна нулю, либо в тех точках, где производной не существует, либо в концах отрезка  $[a; b]$ .

**Пример 2.** Найдём наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 1$  на отрезке  $[-1; 2]$ .

$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 1\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x - 1)(x - 2)$ . Значит, функция  $f(x)$  на отрезке  $[-1; 2]$  определена, непрерывна и всюду имеет производную.

Далее,  $f'(x) = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ . Так как при остальных значениях  $x$  производная не равна нулю, то максимум и минимум следует искать среди значений:  $f(-1) = \frac{5}{4}$ ;  $f(0) = -1$ ;  $f(1) = -\frac{3}{4}$ ,  $f(2) = -1$ . Отсюда ясно, что максимум достигается при  $x = -1$ , минимум достигается при  $x = 0$  и при  $x = 2$ . Это хорошо видно на графике (рис. 5).

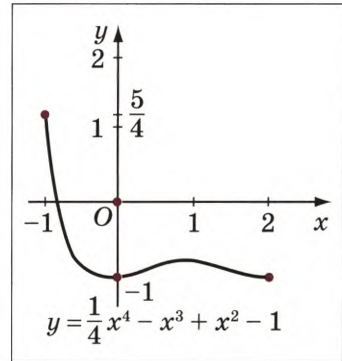


Рис. 5

**Пример 3.** Найдём наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = |2x - 4| - x + 1$  на отрезке  $[0; 3]$ .

Если  $2x - 4 > 0$  или  $x > 2$ , то  $f(x) = |2x - 4| - x + 1 = 2x - 4 - x + 1 = x - 3$ . Поэтому  $f'(x) = (x - 3)' = 1$  при  $x > 2$ . Если  $2x - 4 < 0$  или  $x < 2$ , то  $f(x) = |2x - 4| - x + 1 = -(2x - 4) - x + 1 = 5 - 3x$ . Поэтому  $f'(x) = (5 - 3x)' = -3$  при  $x < 2$ . В точке  $x = 2$  функция  $f(x)$  производной не имеет. В остальных точках  $x$  про-



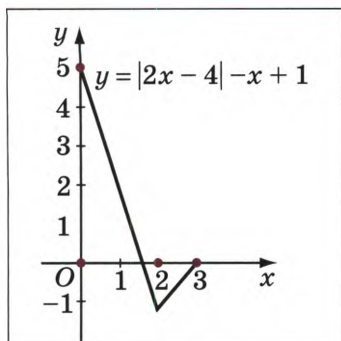


Рис. 6

изводная не равна нулю. Значит, наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$  следует искать среди чисел:  $f(0) = 5$ ,  $f(2) = -1$ ,  $f(3) = 0$ . Наименьшее значение достигается при  $x = 2$ , а наибольшее значение — при  $x = 0$  (рис. 6).

Иногда внутреннюю точку  $c$  отрезка  $[a; b]$  называют *критической* для функции  $f(x)$ , если в точке  $c$  производная либо не существует, либо равна нулю. В этом случае правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции можно сформулировать в следующем виде.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Тогда наибольшее значение и наименьшее значение  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  достигаются либо в критических точках, либо на концах отрезка  $[a; b]$ .

**Вопрос.** В каких точках следует искать наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$ , если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и в каждой точке интервала  $(a; b)$  имеет отличную от нуля производную?

#### 4.6.\* Нахождение наименьшего времени.

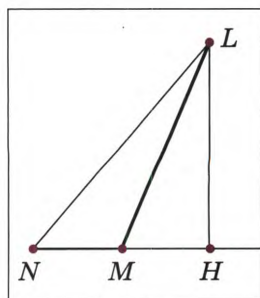


Рис. 7

**Пример 4.** Избушка лесника находится в 5 км от города и в 4 км от прямой дороги, ведущей в город. Зимой лесник может идти по снегу со скоростью 3 км/ч, а по дороге со скоростью 4 км/ч. По какому пути нужно двигаться леснику, чтобы добраться от избушки до города за наименьшее время?

Пусть на рис. 7 точкой  $L$  обозначена избушка лесника, точкой  $N$  — город, точкой  $H$  — основание перпендикуляра, проведённого из точки  $L$  до дороги, точкой  $M$  — то место дороги, до которого лесник добирается по снегу. Тогда  $NL = 5$  (км),  $LH = 4$  (км), откуда по теореме Пифагора  $NH = 3$  (км). Обозначим  $MH$  через  $x$  (км). Тогда  $NM = (3 - x)$  (км),  $LM = \sqrt{16 + x^2}$  (км). На движение по ломаной  $LMN$  леснику потребуется  $\left(\frac{\sqrt{16 + x^2}}{3} + \frac{3 - x}{4}\right)$  часов.

Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{\sqrt{16+x^2}}{3} + \frac{3-x}{4}$  на отрезке  $[0; 3]$ . Функция  $f(x)$  непрерывна на этом отрезке и  $f'(x) = \frac{x}{3\sqrt{16+x^2}} - \frac{1}{4}$ . Найдём нули производной  $f'(x)$  на отрезке  $[0; 3]$ :  $\frac{x}{3\sqrt{16+x^2}} - \frac{1}{4} = 0$ ;  $\sqrt{16+x^2} = \frac{4}{3}x$ ;  $16+x^2 = \frac{16}{9}x^2$  (где  $x \geq 0$ );  $\frac{7}{9}x^2 = 16$ , откуда  $|x| = \frac{12}{\sqrt{7}}$ . Поскольку  $\frac{12}{\sqrt{7}} > 3$ , то найденное значение  $x$  не входит в отрезок  $[0; 3]$ . Поэтому для нахождения наименьшего времени нужно сравнить  $f(0) = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$  и  $f(3) = \frac{5}{3} = \frac{20}{12}$ .

*Ответ:* лесник должен двигаться по снегу прямо в город.

**Вопрос.** Как изменится ответ в этой задаче, если избушка лесника находится в 5 км от города и в 3 км от прямой дороги, ведущей в город?

**4.7.\*\* Нахождение наибольшего сечения.** В этом пункте разберём следующую задачу.

**Пример 5.** Прямой круговой конус с высотой  $H$  и радиусом основания  $R$  пересекается плоскостью, проходящей через вершину конуса. Как провести плоскость, чтобы площадь сечения была наибольшей?

В сечении конуса получается равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными образующей конуса, то есть  $L = \sqrt{R^2 + H^2}$  (рис. 8). Обозначим основание  $AB$  треугольника  $AFB$  через  $2x$ . Тогда  $0 < 2x \leq 2R$  и  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{R^2 + H^2 - x^2}$ .

Функция  $f(x) = x\sqrt{R^2 + H^2 - x^2}$  непрерывна, имеет производную  $f'(x)$  на отрезке  $[0; R]$  и

$$f'(x) = \sqrt{R^2 + H^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{R^2 + H^2 - x^2}} = \frac{R^2 + H^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 + H^2 - x^2}}.$$

Отсюда  $f'(x) = 0$  при  $x_0 = \sqrt{\frac{R^2 + H^2}{2}}$ , так как интересующие нас значения  $x$  неотрицательны.

Найденное значение  $x_0$  входит в отрезок  $[0; R]$ , когда  $\sqrt{\frac{R^2 + H^2}{2}} \leq R$  или  $H \leq R$ . Ясно, что  $x_0 = R$  при  $H = R$ , и тогда значения  $f(x_0)$  и  $f(R) = R^2$  совпадают. В этом случае сечение прово-

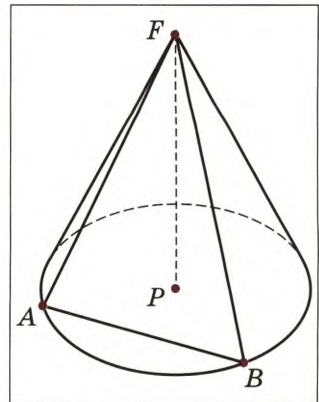


Рис. 8



дится через высоту конуса. При  $H < R$  наибольшее значение площади сечения следует выбирать из чисел  $f(x_0) = \frac{R^2 + H^2}{2}$  и  $f(R) = RH$ . Но при  $R \neq H$  из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом имеем  $\frac{R^2 + H^2}{2} > \sqrt{R^2 H^2} = RH$ . Следовательно, при  $H < R$  сечение нужно проводить так, чтобы основание конуса пересекалось по хорде длиной  $2x_0 = \sqrt{2(R^2 + H^2)}$ .

Найденное значение  $x_0$  не входит в отрезок  $[0; R]$ , если  $\sqrt{\frac{R^2 + H^2}{2}} > R$  или  $H > R$ . В этом случае наибольшая площадь сечения равна  $f(R) = RH$ , а сечение проводится через высоту конуса.

*Ответ:* при  $H \geq R$  сечение нужно проводить через высоту конуса; при  $H < R$  сечение нужно проводить так, чтобы основание конуса пересекалось по хорде длиной  $\sqrt{2(R^2 + H^2)}$ .

**Вопрос.** Каким ещё способом можно решить рассмотренную задачу?

#### 4.8.\* Признаки локального максимума и локального минимума.

Пусть функция  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  достигает наибольшего значения во внутренней точке  $c$  отрезка  $[a; b]$ . Тогда точка  $c$  является одной из точек локального максимума функции  $f(x)$ . Действительно, в этом случае значение  $f(c)$  будет наибольшим в любой окрестности точки  $c$ , лежащей внутри отрезка  $[a; b]$ . Поэтому наибольшее значение непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции следует искать либо среди точек локального максимума, либо в концах отрезка.

Для нахождения локального максимума функции можно применять следующий признак.

Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна в окрестности  $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$  точки  $c$ , имеет положительную производную в каждой точке интервала  $(c - \varepsilon; c)$  и имеет отрицательную производную в каждой точке интервала  $(c; c + \varepsilon)$ . Тогда  $c$  является точкой локального максимума функции  $f(x)$ .

I. Пусть  $x \in (c - \varepsilon; c)$ . Тогда на отрезке  $[x; c]$  выполняются все условия теоремы Лагранжа. Значит,  $f(c) - f(x) = f'(m)(c - x)$ , где  $x < m < c$ . По условию  $f'(m) > 0$ , а так как  $x < c$ , то  $c - x > 0$ . Поэтому  $f(c) - f(x) = f'(m)(c - x) > 0$ , откуда  $f(c) > f(x)$ .

II. Пусть  $x \in (c; c + \varepsilon)$ . Аналогично предыдущему имеем  $f(x) - f(c) = f'(p)(x - c)$ , где  $c < p < x$ . По условию  $f'(p) < 0$ , а так как  $x > c$ , то  $x - c > 0$ . Поэтому  $f(x) - f(c) = f'(p)(x - c) < 0$ , откуда  $f(c) > f(x)$ .



III. При  $x = c$  имеем очевидное неравенство  $f(c) \geq f(x)$ .

Таким образом, при всех  $x \in (c - \varepsilon; c + \varepsilon)$  имеем неравенство  $f(c) \geq f(x)$ .

Для нахождения локального минимума иногда можно применять аналогичный признак.

Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна в окрестности  $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$  точки  $c$ , имеет отрицательную производную в каждой точке интервала  $(c - \varepsilon; c)$  и имеет положительную производную в каждой точке интервала  $(c; c + \varepsilon)$ . Тогда  $c$  является точкой локального минимума функции  $f(x)$ .

Функция  $g(x) = -f(x)$  удовлетворяет всем условиям признака локального максимума в точке  $c$ . Отсюда следует, что  $c$  — точка локального минимума для функции  $f(x)$ .

**Вопрос.** В каком случае точка, в которой функция принимает наименьшее на промежутке значение, не является точкой локального минимума?

**4.9.\*\* Строгие локальные максимумы и минимумы.** Иногда к определению локальных экстремумов подходят иначе и определяют строгие локальные максимум и минимум.

Точка  $a$  называется точкой строгого локального максимума функции  $f(x)$ , если область определения включает в себя такой интервал  $U$ , содержащий точку  $a$ , что при всех значениях  $x$  из  $U$ , отличных от  $a$ , выполняется неравенство  $f(a) > f(x)$ .

Точка  $a$  называется точкой строгого локального минимума функции  $f(x)$ , если область определения включает в себя такой интервал  $U$ , содержащий точку  $a$ , что при всех значениях  $x$  из  $U$ , отличных от  $a$ , выполняется неравенство  $f(a) < f(x)$ .

Точки строгого локального максимума и минимума иногда называют точками строгого локального экстремума.

**Пример 6.** Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

в каждой рациональной точке имеет локальный максимум, а в каждой иррациональной точке — локальный минимум, но не имеет ни строгого локального максимума, ни строгого локального минимума.

**Вопрос.** Как объяснить, что функция Дирихле не имеет строгих локальных экстремумов?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется наибольшее значение функции на некотором множестве?
2. Как определяется наименьшее значение функции на некотором множестве?
- 3.\*\* Сформулируйте теорему о наибольшем и наименьшем значениях функции, непрерывной на некотором отрезке.
4. Сформулируйте теорему Ферма.
- 5.\* Докажите теорему Ферма.
- 6.\* Сформулируйте признаки локального максимума и локального минимума функции.
- 7.\*\* Как определяются строгие экстремумы функции?

### ■ Задачи и упражнения

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение:
  - а) функции  $f(x) = 2x - x^2$  на отрезке  $[-2; 2]$ ;
  - б) функции  $f(x) = x^2 + x + 1$  на отрезке  $[-2; -1]$ ;
  - в) функции  $f(x) = 2 + 4x - 3x^2$  на отрезке  $[0; 3]$ ;
  - г) функции  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$  на отрезке  $[-2; 2]$ .
2. Для функции  $f(x) = x^3 - 3x - 1$  найдите наибольшее и наименьшее значение:
  - а) на отрезке  $[-3; -2]$ ;
  - б) на отрезке  $[-3; 0]$ ;
  - в) на отрезке  $[-1; 1]$ ;
  - г) на отрезке  $[-2; 2]$ .
3. Для функции  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x - \frac{4}{3}$  найдите наибольшее и наименьшее значение:
  - а) на отрезке  $[-1; 3]$ ;
  - б) на отрезке  $[0; 2]$ ;
  - в) на отрезке  $[1; 4]$ ;
  - г) на отрезке  $[-1; 2]$ .
4. Забором длиной 60 м нужно огородить со всех сторон прямоугольный участок наибольшей площади. Какие размеры должен иметь участок?
5. Забором длиной 60 м у реки нужно огородить с трёх сторон прямоугольный участок наибольшей площади. Какие размеры должен иметь участок?
- 6.\*\* Забором длиной 60 м у реки нужно огородить с двух сторон участок треугольного вида наибольшей площади. Какую форму должен иметь участок?



7.\* Из прямоугольного листа жести размером  $15 \times 8$  см вырезают по углам одинаковые квадраты и делают коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Чему равна сторона каждого вырезаемого квадрата в случае, когда объём получившейся коробки наибольший?

8.\*\* В треугольник со сторонами 6, 7, 8 нужно вписать прямоугольник наибольшей площади, одна из сторон которого лежит на стороне треугольника. Как это можно сделать?

9.\* Из бумажного кольца с внешним радиусом  $R = 6$  и внутренним радиусом  $r = 1$  вырезают прямоугольник наибольшей площади так, чтобы все точки прямоугольника принадлежали этому кольцу. Чему равна площадь прямоугольника?

10.\* Какой угол при основании имеет равнобедренная трапеция наибольшей площади, у которой три стороны равны  $a$ ?

11.\*\* Канал шириной  $a$  м под прямым углом поворачивает в канал шириной  $b$  м (рис. 9). Какой наибольшей длины бревно можно провести из одного канала в другой, не вытаскивая бревно из воды (толщиной бревна и глубиной канала можно пренебречь)?

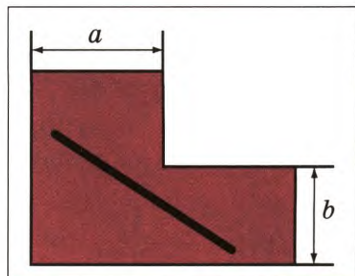


Рис. 9

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое наибольшее значение может иметь площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 5?

- 1) 5,25      2) 6,25      3) 7,25      4) 8,25

1.2. Чему равна производная функции  $f(x) = \frac{1}{(e^x)^6}$ ?

- 1)  $-e^{-7x}$       2)  $-7e^{-7x}$       3)  $-e^{-6x}$       4)  $-6e^{-6x}$

1.3. При исследовании функции  $f(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1$  было найдено, что её наименьшее значение равно 1. Какое наименьшее значение принимает функция  $f(x) = 2\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x$ ?

- 1) 0      2) 1      3) 2      4) 3

1.4. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, две стороны которого равны 3 и 4?

- 1) 6      2) 8      3) 10      4) 12



**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие значения может иметь произведение двух чисел, сумма которых равна 11?

- 1) 30                      2) 30,25                      3) 30,5                      4) 30,75

**2.2.\*** Какие из функций имеют разные асимптоты при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ ?

1)  $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x + 2}$                       2)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x + 2|}$

3)  $f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{x^2 - 3}$                       4)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{|x^2 - 3|}$

**2.3.** Известно, что функция  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$  на промежутке  $[0; 1]$  убывает, на промежутке  $[1; \infty)$  возрастает. В каких точках достигается наименьшее значение  $f(x)$  на всей числовой прямой?

- 1) -2                      2) -1                      3) 0                      4) 1

**2.4.** В каких точках промежутка  $[-1; 2]$  достигается наименьшее значение функции  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 1$ ?

- 1) -1                      2) 0                      3) 1                      4) 2

## ■ Мини-исследования к главе 5

### Мини-исследование 14

Пусть  $x > 0$ ,  $p, q$  — натуральные числа и  $p > q$ . Установите, какое из двух выражений меньше другого:  $(1 + px)^{\frac{1}{p}}$  или  $(1 + qx)^{\frac{1}{q}}$ .

### Мини-исследование 15

Функция  $y = x^3$  на промежутке  $[-1; 1]$  является строго возрастающей. Производная функции в точке  $x = 0$  равна нулю. Этот пример показывает, что утверждение, обратное теореме из пункта 1.6, не имеет места. Однако если непрерывная функция  $f(x)$  имеет положительную производную во всех точках промежутка  $[a; b]$ , кроме одной точки  $c$ , то функция  $f(x)$  строго возрастает на этом промежутке. Для доказательства установите следующее:

1) если функция  $f(x)$  имеет неотрицательную производную во всех точках промежутка  $[a; b]$ , то функция  $f(x)$  возрастает на этом промежутке;

2) если для возрастающей функции  $f(x)$  для точек  $x_1 < x_2$  выполняется равенство  $f(x_1) = f(x_2)$ , то  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in [x_1; x_2]$ .

Аналогично если непрерывная функция  $f(x)$  имеет отрицательную производную во всех точках промежутка  $[a; b]$ , кроме одной точки  $c$ , то функция  $f(x)$  строго убывает на этом промежутке.

**Мини-исследование 16**

Установите, что график функции  $y = f(x)$  симметричен относительно прямой  $x = a$  в том и только том случае, когда выполняются условия:

1) область определения функции симметрична относительно точки  $a$ ;

2) для каждого  $x$  из области определения выполняется равенство  $f(2a - x) = f(x)$ .

Установите, что график функции  $y = f(x)$  симметричен относительно точки  $(a; b)$  в том и только том случае, когда выполняются условия:

1) область определения функции симметрична относительно точки  $a$ ;

2) для каждого  $x$  из области определения выполняется равенство  $f(2a - x) = 2b - f(x)$ .

Найдите, относительно какой точки плоскости симметричен график функции  $f(x) = (x + 1)(x - 1)^2$ .

**Мини-исследование 17**

Наличие теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией наибольшего и наименьшего значений на замкнутом промежутке и теоремы Ферма позволяет доказать теорему Лагранжа о конечных приращениях.

1) Установите вначале, что справедливо следующее утверждение.

Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на промежутке  $[a; b]$ , имеет производную в каждой внутренней точке  $x \in (a; b)$  и принимает равные значения на концах промежутка:  $f(a) = f(b)$ . Тогда найдётся такая внутренняя точка  $c$ , в которой  $f'(c) = 0$ .

Для доказательства рассмотрите два случая: а) функция  $f(x)$  принимает наибольшее и наименьшее значения на концах промежутка и поэтому оказывается постоянной; б) либо наибольшее, либо наименьшее значение достигается функцией во внутренней точке  $c$ . В этом случае следует воспользоваться теоремой Ферма.

2) Для доказательства теоремы Лагранжа рассмотрите функцию  $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$  и установите, что эта функция непрерывна на промежутке  $[a; b]$ , имеет производную в каждой внутренней точке промежутка  $(a; b)$  и принимает равные значения на концах промежутка:  $g(a) = g(b)$ . Проверьте, что для той точки  $c$ , в которой  $g'(c) = 0$ , справедливо равенство  $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ .





# Глава 6

## МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе мы определим скалярное произведение векторов в пространстве, установим геометрический смысл скалярного произведения. Рассмотрим применение прямоугольной системы координат в пространстве для решения задач о вычислении углов и нахождении расстояний. В конце главы приводятся примеры использования координат для решения задач со сферами.

### ■ § 1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

**1.1. Скалярное произведение.** Аналогично тому, как это делалось на плоскости, в пространстве с помощью прямоугольной системы координат определим скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов  $\overrightarrow{AB} = (x_1; y_1; z_1)$  и  $\overrightarrow{AC} = (x_2; y_2; z_2)$ , связанных с точкой  $A$ , называется число, равное

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . Таким образом, если  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ .

**Пример 1.** Пусть точки  $A, B, C$  имеют координаты:  $A(5; 3; -2)$ ,  $B(2; 4; 1)$ ,  $C(6; 1; 3)$ . Тогда  $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; 3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1; -2; 5)$  и  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = -3 - 2 + 15 = 10$ .

Важно понять, что скалярное произведение двух векторов — это число. Поэтому при действиях с векторами следует чётко различать, где появляются векторы, а где — числа.

**Вопрос.** Какой смысл имеет выражение  $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} = (3; 1; 2)$  и  $\vec{c} = (-2; 3; -1)$ ?

**1.2. Свойства скалярного произведения.** В пространстве скалярное произведение векторов имеет следующие основные свойства.

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

2.  $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

3.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

Эти свойства нетрудно доказать с помощью координат. Например, докажем третье свойство.

Пусть  $\vec{a} = (m; n; k)$ ,  $\vec{b} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{c} = (x_2; y_2; z_2)$ . Тогда  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (m; n; k) \cdot ((x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2)) = (m; n; k) \cdot (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2) =$



$$\begin{aligned}
 &= m(x_1 + x_2) + n(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2) = mx_1 + mx_2 + ny_1 + ny_2 + kz_1 + kz_2 = \\
 &= (mx_1 + ny_1 + kz_1) + (mx_2 + ny_2 + kz_2) = (m; n; k) \cdot (x_1; y_1; z_1) + (m; n; k) \cdot (x_2; y_2; z_2) = \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.
 \end{aligned}$$

**Вопрос.** Как доказать, что  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$ ?

**1.3. Длина вектора.** Скалярное произведение векторов обладает важными геометрическими свойствами.

Пусть  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ , где  $A(m; n; k)$ ,  $B(p; q; r)$ . Тогда вектор  $\vec{a}$  имеет координаты  $(p - m; q - n; r - k)$  и по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (p - m)^2 + (q - n)^2 + (r - k)^2.$$

Длина вектора  $\vec{a}$ , равная длине отрезка  $AB$ , вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{(p - m)^2 + (q - n)^2 + (r - k)^2}.$$

Поэтому  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$  и скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  — это число, равное квадрату длины вектора  $\vec{a}$ .

Иногда скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  для краткости обозначают через  $\vec{a}^2$  и называют *скалярным квадратом* вектора  $\vec{a}$ .

**Пример 2.** Найдём длину вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ , где  $\vec{a} = (2; -5; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; -4)$ .

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} &= (2; -5; 1) + (1; 2; -4) = (3; -3; -3). \text{ Поэтому } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \\
 &= 3^2 + (-3)^2 + (-3)^2 = 27.
 \end{aligned}$$

Так как  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$ , то  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .

**Вопрос.** Какой смысл имеет произведение  $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ?

**1.4. Угол между векторами.** Введём понятие угла между векторами, связанными с одной точкой.

Углом между ненулевыми векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  называется угол между лучами  $AB$  и  $AC$ .

Из этого определения следует, что угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  можно определить в плоскости, содержащей точки  $A, B, C$  (рис. 1).

Если векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  сонаправлены, то точки  $B$  и  $C$  лежат на одном луче с началом  $A$ , поэтому угол между такими векторами равен нулю. Если векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  противоположно направлены, то лучи  $AB$  и  $AC$  образуют развёрнутый угол, поэтому угол между такими векторами равен  $180^\circ$ .

В остальных случаях величина угла между двумя ненулевыми векторами принимает значения из

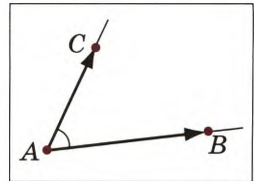


Рис. 1

промежутка  $(0^\circ; 180^\circ)$  в градусной мере или из промежутка  $(0; \pi)$  в радианной мере.

**Вопрос.** В каком случае два ненулевых вектора перпендикулярны?

**1.5. Геометрический смысл скалярного произведения.** Пусть точки  $A, B, C$  пространства не лежат на одной прямой. Тогда, с одной стороны, можно рассмотреть треугольник  $ABC$  и по теореме косинусов записать равенство

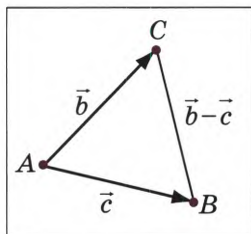


Рис. 2

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cos \angle BAC. \quad (1)$$

С другой стороны, можно рассмотреть векторы  $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{c}$  (рис. 2). Тогда  $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{c}|$ ,  $|AC| = |\overrightarrow{AC}| = |\vec{b}|$ ,  $|BC|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = |\vec{b} - \vec{c}|^2$ .

Поэтому равенство (1) можно записать в виде

$$(\vec{b} - \vec{c})^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \angle BAC. \quad (2)$$

Отсюда

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \angle BAC. \quad (3)$$

Таким образом, если векторы  $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$  неколлинеарны, то скалярное произведение векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  равно произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между этими векторами.

Пусть теперь ненулевые векторы  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$  и  $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$  коллинеарны. Тогда  $\vec{b} = t \cdot \vec{c}$ , где  $t$  соответствующее число.

При  $t > 0$  векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  сонаправлены и  $\vec{b} \cdot \vec{c} = (t \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c} = t \cdot (\vec{c} \cdot \vec{c}) = t \cdot |\vec{c}|^2 = t \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| = |t \cdot \vec{c}| \cdot |\vec{c}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot 1 = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 0$ .

При  $t < 0$  векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  противоположно направлены и  $\vec{b} \cdot \vec{c} = (t \cdot \vec{c}) \cdot \vec{c} = t \cdot (\vec{c} \cdot \vec{c}) = t \cdot |\vec{c}|^2 = t \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| = -|t \cdot \vec{c}| \cdot |\vec{c}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot (-1) = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \pi$ .

В результате доказана следующая теорема.

**Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно произведению длин этих векторов, умноженному на косинус угла между ними.**

**Пример 3.** Пусть даны  $A(-2; 1; 4)$ ,  $B(7; 3; 9)$  и  $C(4; 2; 5)$ . Найдём угол между векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ . Имеем  $\overrightarrow{AB} = (9; 2; 5)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (6; 1; 1)$ ,  $\overrightarrow{AB}^2 = 9^2 + 2^2 + 5^2 = 110$ ,  $\overrightarrow{AC}^2 = 6^2 + 1^2 + 1^2 = 38$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 61$ ,

$$\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{61}{\sqrt{110} \cdot \sqrt{38}}.$$



**Вопрос.** Как доказать, что площадь треугольника  $ABC$  можно вычислить по формуле  $S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2 \cdot |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$ ?

**1.6. Скалярное произведение векторов, связанных с различными точками.** Равные векторы имеют равные координаты. Это свойство позволяет определить скалярное произведение двух векторов, связанных с различными точками.

Скалярным произведением векторов  $\vec{a} = \overline{AB}$  и  $\vec{b} = \overline{CD}$  называется скалярное произведение равных им векторов, связанных с одной точкой.

Определим величину угла между произвольными ненулевыми векторами.

Величиной угла между двумя ненулевыми векторами  $\vec{a} = \overline{AB}$  и  $\vec{b} = \overline{CD}$  называется величина угла между равными им векторами, связанными с одной точкой.

Иногда величину угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будем обозначать  $\angle(\vec{a}; \vec{b})$ .

**Пример 4.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдём угол между векторами  $\overline{AB_1}$  и  $\overline{BC_1}$  (рис. 3).

Поскольку  $\overline{BC_1} = \overline{AD_1}$ , то угол между заданными векторами равен углу  $\varphi$  между векторами  $\overline{AB_1}$  и  $\overline{AD_1}$ . В данном примере этот угол можно найти из геометрических соображений. Если ребро куба равно  $a$ , то  $|\overline{AB_1}| = a\sqrt{2}$ ,  $|\overline{AD_1}| = a\sqrt{2}$ ,  $|\overline{B_1D_1}| = a\sqrt{2}$ .

Следовательно, треугольник  $AB_1D_1$  равнобедренный, а поэтому  $\varphi = \angle B_1AD_1 = \frac{\pi}{3}$ .

**Вопрос.** Как в рассмотренном примере с помощью координат вычислить угол между векторами  $\overline{AB_1}$  и  $\overline{BC_1}$ ?

**1.7. Перпендикулярность векторов.** Для установления перпендикулярности двух векторов часто используется следующая теорема.

Два ненулевых вектора пространства перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Пусть  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  и  $\varphi$  — величина угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Тогда  $|\vec{a}| \neq 0$ ,  $|\vec{b}| \neq 0$  и  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$ .

Отсюда следует, что если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , а если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то  $\cos \varphi = 0$ , а поэтому  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Тем самым теорема доказана.

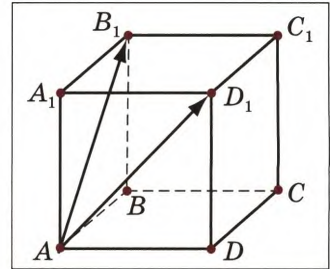


Рис. 3



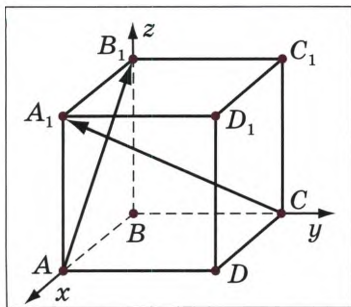


Рис. 4

**Пример 5.** Докажем, что в кубе  $ABCA_1B_1C_1D_1$  векторы  $\overrightarrow{AB_1}$  и  $\overrightarrow{CA_1}$  перпендикулярны.

Введём прямоугольную систему координат с началом  $B$  и осями  $BA$ ,  $BC$  и  $BB_1$  (рис. 4).

Пусть ребро куба равно  $a$ . Тогда  $A(a;0;0)$ ,  $B_1(0;0;a)$ ,  $C(0;a;0)$ ,  $A_1(a;0;a)$ . Отсюда  $\overrightarrow{AB_1} = (-a;0;a)$ ,  $\overrightarrow{CA_1} = (a;-a;a)$  и  $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{CA_1} = (-a;0;a) \cdot (a;-a;a) = (-a) \cdot a + 0 \cdot (-a) + a \cdot a = -a^2 + a^2 = 0$ . По свойству из данного пункта векторы  $\overrightarrow{AB_1}$  и  $\overrightarrow{CA_1}$  перпендикулярны.

**Вопрос.** Как доказать, что в кубе диагонали  $AC_1$  и  $BD_1$  не перпендикулярны?

### 1.8.\* Применение векторов к решению геометрических задач.

**Пример 6.** Докажем, что в правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$  векторы  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AS}$  перпендикулярны (рис. 5).

Пусть  $AB = BC = AC = a$ ,  $SA = SB = SC = b$ . Поскольку треугольник  $ABC$  равносторонний, то  $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ . Пусть  $\angle SAC = \angle SAB = \varphi$ . Из равнобедренного треугольника  $ASC$  получаем  $\cos \varphi = \frac{1}{2}AC : AS = \frac{a}{2b}$ .

Теперь рассмотрим векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{AS}$ . Имеем  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a$ ,  $|\overrightarrow{AS}| = b$  и  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC = a \cdot a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$ ;  $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi = b \cdot a \cdot \frac{a}{2b} = \frac{a^2}{2}$ ;  $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \varphi = b \cdot a \cdot \frac{a}{2b} = \frac{a^2}{2}$ .

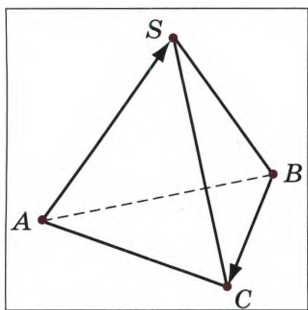


Рис. 5

Поскольку  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ , то  $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AS} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$ .

Отсюда и из теоремы предыдущего пункта следует перпендикулярность векторов  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AS}$ .

**Вопрос.** Как доказать, что в пирамиде  $ABCD$  рёбра  $CD$  и  $AB$  перпендикулярны, если известно, что равны рёбра  $AC$  и  $BC$  и равны углы  $\angle ACD$  и  $\angle BCD$ ?

## Контрольные вопросы и задания ■

1. Как определяется скалярное произведение двух векторов?
2. Сформулируйте основные свойства скалярного произведения.
3. Как с помощью скалярного произведения определить длину вектора?
4. Как определяется угол между двумя ненулевыми векторами?
5. Как найти скалярное произведение двух векторов, если известны длины этих векторов и угол между ними?
6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов с помощью скалярного произведения.

## Задачи и упражнения ■

1. Вычислите скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если:
 

а) $\vec{a} = (0; 0; 0)$ , $\vec{b} = (1; 1; 1)$ ;	б) $\vec{a} = (1; 1; 1)$ , $\vec{b} = (4; 3; 2)$ ;
в) $\vec{a} = (12; 3; 14)$ , $\vec{b} = (2; 13; 4)$ ;	г) $\vec{a} = (1; -1; 2)$ , $\vec{b} = (-1; 3; 2)$ .
2. Дан куб с вершинами  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(2; 0; 0)$ ,  $C(2; 2; 0)$ ,  $D(0; 2; 0)$ ,  $A_1(0; 0; 2)$ ,  $B_1(2; 0; 2)$ ,  $C_1(2; 2; 2)$ ,  $D_1(0; 2; 2)$ . Найдите скалярное произведение векторов:
 

а) $\overline{AB}$ и $\overline{AA_1}$ ;	б) $\overline{AC_1}$ и $\overline{AD_1}$ ;	в) $\overline{AB}$ и $\overline{AC_1}$ ;
г) $\overline{AC_1}$ и $\overline{DB_1}$ ;	д) $\overline{AB}$ и $\overline{AD_1}$ ;	е) $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$ .
3. Дан прямоугольный параллелепипед с вершинами  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(5; 0; 0)$ ,  $C(5; 2; 0)$ ,  $D(1; 2; 0)$ ,  $A_1(1; 0; 1)$ ,  $B_1(5; 0; 1)$ ,  $C_1(5; 2; 1)$ ,  $D_1(1; 2; 1)$ . Точка  $M$  — центр грани  $ABCD$ , точка  $M_1$  — центр грани  $A_1B_1C_1D_1$ , точка  $N$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите скалярное произведение векторов:
 

а) $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ ;	б) $\overline{DM_1}$ и $\overline{BM_1}$ ;	в) $\overline{AB}$ и $\overline{D_1M}$ ;
г) $\overline{DN}$ и $\overline{AC_1}$ ;	д) $\overline{AB}$ и $\overline{AC_1}$ ;	е) $\overline{CN}$ и $\overline{C_1M}$ .
4. Найдите:
  - а) при каких  $x, y$  вектор  $\vec{a} = (-2; 3; y)$  коллинеарен вектору  $(x; -6; 2)$ ;
  - б) вектор единичной длины, сонаправленный с вектором  $\vec{a} = (-6; 3; -2)$ ;
  - в) координаты вектора  $\vec{b}$ , коллинеарного вектору  $\vec{a} = \left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$  и образующего острый угол с вектором  $(0; 0; 1)$ , если известно, что  $|\vec{b}| = 3$ ;

г) координаты вектора  $\vec{b}$ , коллинеарного вектору  $\vec{a} = (-1; 1; -2)$ , если известно, что  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ .

5. Определите длины векторов  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $\vec{a} = (1; 4; 2)$ ,  $\vec{b} = (2; -2; 4)$ .

6.\* Пусть  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 14$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$ . Найдите  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

7.\* Пусть  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 11$  и  $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ . Найдите  $|\vec{b}|$ .

8. Найдите угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если:

а)  $\vec{a} = (1; 2; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; 4)$ ;

б)  $\vec{a} = (1; 1; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; 0; 6)$ ;

в)  $\vec{a} = (4; 0; 3)$ ,  $\vec{b} = (2; -2; 1)$ ;

г)  $\vec{a} = (1; -3; 1)$ ,  $\vec{b} = \overline{AB}$ , где  $A(-5; 7; -8)$ ,  $B(-7; 9; -9)$ ;

д)  $\vec{a} = (4; 6; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; -5; 1)$ .

9. Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $120^\circ$  и  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ . Найдите:

а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;

б)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ ;

в)  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ;

г)  $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{b} - \vec{a})$ ;

д)  $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{b} + \vec{a})$ .

10. При каком значении  $x$  вектор  $\vec{a} = (x; 7; -2)$  перпендикулярен вектору  $\vec{b} = (-3; x; 2)$ ?

11. Найдите угол между векторами  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $2\vec{a} - \vec{c}$ , если  $\vec{a} = (-1; 1; -1)$ ,  $\vec{b} = (2; -1; 2)$ ,  $\vec{c} = (-2; 1; 3)$ .

12. Даны точки  $A(-1; -2; 4)$ ,  $B(3; 2; -2)$ ,  $C(3; -2; 1)$ . Найдите:

а) стороны и углы треугольника  $ABC$ ;

б) медианы треугольника  $ABC$ .

13. Даны точки  $A(-1; 3; -7)$ ,  $B(2; -1; 5)$ ,  $C(0; 1; -5)$ ,  $D(-5; 5; 3)$ . Найдите угол между векторами:

а)  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$ ; б)  $\overline{AC}$  и  $\overline{BD}$ ; в)  $\overline{AD}$  и  $\overline{BC}$ .

14. Найдите  $x$  и  $y$ , если известно, что вектор  $\vec{a} = (-3; x; -1)$  перпендикулярен вектору  $\vec{b} = (2; 1; y)$  и  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .

15. Найдите координаты вектора  $\vec{a}$ , перпендикулярного векторам  $(1; 0; 0)$  и  $(3; 2; -1)$ , если известно, что  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ .

16. Найдите координаты вектора  $\vec{a}$  длины 3, перпендикулярного вектору  $(-1; 2; 2)$  и образующего равные углы с векторами  $(1; 0; 0)$  и  $(0; 1; 0)$ .



17. Угол между векторами  $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; \alpha; 1\right)$  и  $(0; 2; -1)$  равен  $\frac{\pi}{6}$ . Найдите  $\alpha$ .

18. Угол между векторами  $(-\sqrt{2}; \sqrt{6}; \alpha)$  и  $(1; 0; \sqrt{2})$  равен  $\frac{\pi}{4}$ . Найдите  $\alpha$ .

19. Угол между векторами  $\left(-2\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \alpha\right)$  и  $(0; 1; \sqrt{3})$  равен  $\frac{\pi}{3}$ . Найдите  $\alpha$ .

20.\*\* Какой наименьший угол могут образовать два вектора вида:

а)  $(2; 5x + 1; 1)$  и  $(4x + 2; -1; 1 - 3x)$ ;

б)  $(1 - 5x; 1; 3)$  и  $(-1; 1 + 4x; 3 - 3x)$ ?

21.\* Дан правильный тетраэдр  $ABCD$ , у которого все рёбра равны,  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(2; 0; 0)$ , и точка  $C$  лежит на плоскости  $Oxy$  и имеет положительную ординату.

а) Найдите координаты точки  $C$ , точки  $D$ , середины  $M$  отрезка  $AC$ , середины  $Q$  отрезка  $BC$ , середины  $P$  отрезка  $AD$ , середины  $N$  отрезка  $DB$ ;

б) докажите, что векторы  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{PQ}$  перпендикулярны и  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{PQ}|$ .

### Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. При каких  $x, y$  вектор  $(x; 7; -2)$  коллинеарен вектору  $(2; y; 4)$ ?

1)  $x = 1, y = 14$

2)  $x = -1, y = 14$

3)  $x = 1, y = -14$

4)  $x = -1, y = -14$

1.2. Чему равно скалярное произведение  $(1; -2; 3) \cdot (2; -3; -4)$ ?

1)  $-6$

2)  $-4$

3)  $4$

4)  $6$

1.3. Каким должно быть число  $x$ , чтобы вектор  $\vec{a} = (x; -7; 3)$  был перпендикулярен вектору  $\vec{b} = (-2; 3; 1)$ ?

1)  $3$

2)  $5$

3)  $7$

4)  $9$

1.4. Найдите, при каком  $\alpha$  угол между векторами  $\left(\alpha; 1; \sqrt{\frac{24}{5}}\right)$  и  $(3; 1; 0)$  равен  $\frac{\pi}{4}$ .

1)  $-1$

2)  $0$

3)  $1$

4)  $2$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из скалярных произведений отрицательны?

1)  $(-3; 5; 1) \cdot (2; 1; -3)$

2)  $(4; -6; 9) \cdot (7; 3; 2)$

3)  $(-2; -5; 3) \cdot (4; -2; -3)$

4)  $(5; 8; -2) \cdot (-6; 4; 5)$

**2.2.\*** Пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  — векторы. Для каких из приведённых выражений результатами вычислений являются числа?

$$1) (\vec{a} + \vec{b})^2 \cdot \vec{c} \quad 2) (\vec{a} + \vec{b})^2 + |\vec{c}| \quad 3) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \quad 4) (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$$

**2.3.** Какие из векторов имеют длину, равную 1?

$$1) \left( \frac{2}{\sqrt{40}}; -\frac{5}{\sqrt{40}}; \frac{3}{\sqrt{40}} \right) \quad 2) \left( -\frac{1}{\sqrt{54}}; \frac{7}{\sqrt{54}}; -\frac{2}{\sqrt{54}} \right)$$

$$3) \left( \frac{4}{\sqrt{26}}; \frac{1}{\sqrt{26}}; -\frac{3}{\sqrt{26}} \right) \quad 4) \left( \frac{8}{5\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{4}{5\sqrt{2}} \right)$$

**2.4.** Ненулевые векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны и их длины равны. Какие из указанных пар векторов перпендикулярны?

$$1) \vec{a} + 2\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b} \quad 2) 3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b}$$

$$3) 4\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b} \quad 4) 2\vec{a} + 3\vec{b}, 3\vec{a} - 6\vec{b}$$

## ■ § 2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

**2.1. Нормаль к плоскости.** Ненулевой вектор  $\vec{AB}$  назовём перпендикулярным плоскости  $\alpha$ , если для всяких двух различных точек  $M$  и  $N$  плоскости  $\alpha$  векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{MN}$  перпендикулярны. Перпендикулярность вектора  $\vec{AB}$  и плоскости  $\alpha$  записывают в виде  $\vec{AB} \perp \alpha$ . Иногда вектор, перпендикулярный к плоскости, называют *нормалью* к этой плоскости.

**Вопрос.** Как доказать, что в кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  вектор  $\vec{AA_1}$  является нормалью к плоскости  $ABCD$ ?

**2.2.\* Существование нормали.** Существование векторов, перпендикулярных данной плоскости, вытекает из следующего утверждения.

Пусть вектор  $\vec{AB}$  перпендикулярен двум неколлинеарным векторам  $\vec{MN}$  и  $\vec{MK}$  плоскости  $\alpha$ . Тогда  $\vec{AB} \perp \alpha$ .

Пусть  $P$  и  $Q$  — две произвольные различные точки плоскости  $\alpha$ . Тогда векторы  $\vec{MN}, \vec{MK}$  и  $\vec{PQ}$  компланарны. По признаку компланарности векторов имеем  $\vec{PQ} = x\vec{MN} + y\vec{MK}$ . Поэтому  $\vec{AB} \cdot \vec{PQ} = \vec{AB} \cdot (x\vec{MN} + y\vec{MK}) = x \cdot \vec{AB} \cdot \vec{MN} + y \cdot \vec{AB} \cdot \vec{MK} = x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0$ , то есть  $\vec{AB} \perp \vec{PQ}$ .

**Вопрос.** Как показать, что если  $\vec{AB} \perp \alpha$ , то для каждого  $t \neq 0$  вектор  $t \cdot \vec{AB}$  также перпендикулярен плоскости  $\alpha$ ?



**2.3. Задание плоскости с помощью уравнения.** Для каждой плоскости  $\alpha$  можно построить перпендикулярный к ней вектор  $\vec{n}$ . Если в плоскости  $\alpha$  выбрать точку  $M$ , то  $\alpha$  можно задать как множество всех таких точек  $K$ , что либо  $K = M$ , либо вектор  $\overrightarrow{MK}$  перпендикулярен вектору  $\vec{n}$ . Эти условия в силу теоремы из пункта 1.8 равносильны равенству  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$ . Записывая последнее равенство через координаты, получим уравнение данной плоскости.

**Пример 1.** Пусть плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $M(1;2;3)$  и перпендикулярна вектору  $\vec{n} = (5;-7;6)$ . Обозначим координаты произвольной точки  $K$  плоскости  $\alpha$  соответственно переменными  $x, y, z$  по осям  $Ox, Oy, Oz$ . Тогда  $\overrightarrow{MK} = (x;y;z) - (1;2;3) = (x-1; y-2; z-3)$ . Поэтому равенство  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$  записывается в виде  $(5;-7;6) \cdot (x-1; y-2; z-3) = 0$ . Таким образом, выполняется равенство  $5(x-1) + (-7)(y-2) + 6(z-3) = 0$ , которое можно переписать в виде  $5x + (-7)y + 6z - (5 \cdot 1 + (-7) \cdot 2 + 6 \cdot 3) = 0$  или в виде

$$5x - 7y + 6z - 9 = 0. \quad (1)$$

Отсюда следует, что множество всех точек плоскости с координатами  $x, y, z$ , удовлетворяющими уравнению (1), совпадает с множеством решений уравнения (1).

**Вопрос.** Как доказать, что уравнения  $\frac{5}{2}x - \frac{7}{2}y + 3z - \frac{9}{2} = 0$  и  $5x - 7y + 6z - 9 = 0$  задают одну и ту же плоскость?

**2.4. Уравнение плоскости.** Рассмотренный в предыдущем пункте пример и аналогичные ему задачи показывают, что плоскость задаётся линейным уравнением вида

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (2)$$

где  $a, b, c, d$  — конкретные числа, причём хотя бы одно из чисел  $a, b, c$  отлично от нуля.

Докажем, что каждое уравнение вида (2), при условии отличия от нуля хотя бы одного из коэффициентов  $a, b, c$ , определяет плоскость.

Пусть, для определённости,  $a \neq 0$ . Положим,  $p = -\frac{d}{a}$ ,  $q = 0$ ,  $r = 0$ , и аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте, составим уравнение плоскости  $\alpha$ , проходящей через точку  $M(p;q;r)$  и перпендикулярной ненулевому вектору  $\vec{n} = (a;b;c)$ .

Для этого рассмотрим произвольную точку  $K(x;y;z)$  плоскости  $\alpha$ . В результате  $\overrightarrow{MK} = (x;y;z) - (p;q;r) = (x-p; y-q; z-r)$  и выполняется ра-



венство  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$ , то есть  $(a; b; c) \cdot (x - p; y - q; z - r) = 0$ . Отсюда  $a(x - p) + by + cz = 0$  или  $ax + by + cz - ap = 0$ . Поэтому  $ax + by + cz - a \cdot \left(-\frac{d}{a}\right) = 0$  и, следовательно,  $ax + by + cz + d = 0$ .

Таким образом, каждая точка  $K(x; y; z)$  плоскости  $\alpha$  является решением уравнения  $ax + by + cz + d = 0$ .

Следовательно, линейное уравнение вида (2) при условии отличия от нуля хотя бы одного из коэффициентов  $a, b, c$  определяет плоскость.

**Вопрос.** Как найти координаты какой-нибудь точки плоскости с уравнением  $2y - 3z = 5$ ?

**2.5. Геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в уравнение плоскостей.** В уравнении плоскости  $ax + by + cz + d = 0$  коэффициенты  $a, b, c$  имеют важный геометрический смысл: вектор  $\vec{n} = (a; b; c)$  является нормалью к этой плоскости. Это означает, что по уравнению плоскости можно сразу представить направление перпендикулярных к ней прямых.

**Вопрос.** Как доказать, что плоскости с уравнениями  $x - 2y + 3z = 1$  и  $2x - 4y + 6z = 1$  параллельны?

**2.6. Составление уравнения плоскости.** Рассмотрим, как составлять уравнение плоскости, перпендикулярной к прямой.

**Пример 2.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  рёбра основания  $ABCD$  равны 2, высота  $SH$  равна 4. Точка  $M$  — середина ребра  $AB$ , точка  $N$  — середина ребра  $SC$ , и точка  $K$  — середина отрезка  $MN$ . Через точку  $K$  перпендикулярно прямой  $MN$  проводится плоскость  $\alpha$ .

Найдём, в каких отношениях плоскость  $\alpha$  делит рёбра пирамиды.

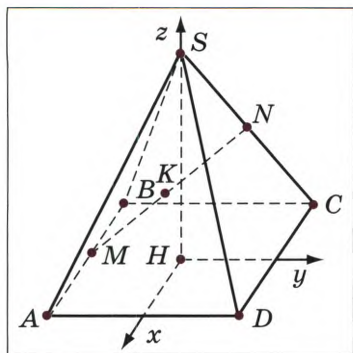


Рис. 1

Введём прямоугольную систему координат с началом  $H$  и осями  $Hx, Hy, Hz$ , направленными так, как указано на рис. 1. Тогда  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(-1; -1; 0)$ ,  $C(-1; 1; 0)$ ,  $S(0; 0; 4)$ . Поскольку точка  $M$  — середина ребра  $AB$ , то её координаты равны полусуммам соответствующих координат точек  $A$  и  $B$ , откуда  $M(0; -1; 0)$ . Координаты точек  $N$  и  $K$  находятся аналогично:  $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ ,  $K\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 1\right)$ .

Вычислим координаты вектора  $\overline{MN}$ , перпендикулярного искомой плоскости  $\alpha$ :  $\overline{MN} = \overline{HN} - \overline{HM} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right) - (0; -1; 0) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$ .

Поскольку  $\overline{MN} \perp \alpha$ , то уравнение плоскости  $\alpha$  имеет вид

$$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + 2z + d = 0$$

или

$$-x + 3y + 4z + d_1 = 0, \text{ где } d_1 = 2d.$$

Для нахождения числа  $d_1$  запишем условие, что плоскость  $\alpha$  проходит через точку  $K$ :

$$(-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 4 \cdot 1 + d_1 = 0.$$

Отсюда  $d_1 = -\frac{7}{2}$ . Поэтому плоскость  $\alpha$  задаётся уравнением

$$-x + 3y + 4z - \frac{7}{2} = 0.$$

Для нахождения координат точек пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром пирамиды запишем координаты точек ребра в параметрической форме.

Например, найдём координаты точки  $F$  пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $AS$  (рис. 2). Имеем  $\overline{HF} = \overline{HA} + \overline{AF} = \overline{HA} + t\overline{AS}$ , где  $t$  — неизвестное значение параметра. Так как  $A(1; -1; 0)$ ,  $S(0; 0; 4)$ , то  $\overline{HA} = (1; -1; 0)$ ,  $\overline{AS} = (-1; 1; 4)$ , откуда  $\overline{HF} = (1; -1; 0) + t(-1; 1; 4) = (1 - t; -1 + t; 4t)$ , и точка  $F$  имеет координаты  $x = 1 - t$ ,  $y = -1 + t$ ,  $z = 4t$ . Поскольку точка  $F$  лежит в плоскости  $\alpha$ , то координаты точки  $F$  удовлетворяют уравнению плоскости:

$$-(1 - t) + 3(-1 + t) + 4 \cdot 4t - \frac{7}{2} = 0.$$

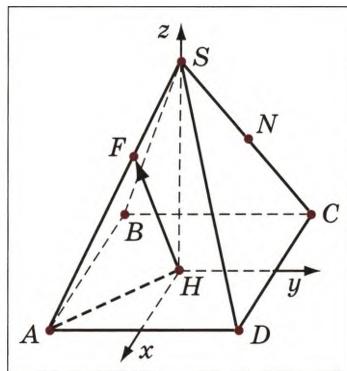


Рис. 2

Отсюда  $20t = \frac{15}{2}$ ,  $t = \frac{3}{8}$ . Следовательно, точка  $F$  имеет координаты  $\left(1 - \frac{3}{8}; -1 + \frac{3}{8}; 4 \cdot \frac{3}{8}\right)$  или  $\left(\frac{5}{8}; -\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right)$ . Число  $t = \frac{3}{8}$  позволяет вычислить отношение, в каком точка  $F$  делит ребро  $AS$ , потому что  $AF : AS = 3 : 8$ , откуда  $AF : FS = 3 : 5$ .

**Вопрос.** Какие координаты имеет точка пересечения плоскости  $\alpha$  с прямой  $CD$ ?

### 2.7.\* Векторный признак параллельности прямой и плоскости.

Для составления уравнения плоскости, параллельной одной или двум прямым, можно использовать следующий признак.

Если нормаль к плоскости  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $a$ , то плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $a$ .

**Пример 3.** Покажем, как в кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  провести плоскость через середины рёбер  $AA_1$  и  $CD$  параллельно прямой  $BD_1$ .

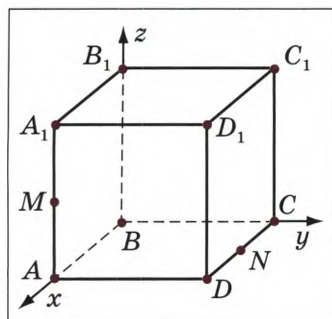


Рис. 3

Обозначим ребро куба через  $a$ . Введём прямоугольную систему координат с началом  $B$  и осями, направленными так, как изображено на рис. 3. Найдём координаты вершин  $B$ ,  $D_1$ , середины  $M$  ребра  $AA_1$  и середины  $N$  ребра  $CD$ :  $B(0;0;0)$ ,  $D_1(a;a;a)$ ,  $M(a;0;\frac{a}{2})$ ,  $N(\frac{a}{2};a;0)$ .

Пусть искомая плоскость  $\alpha$  имеет уравнение  $mx + ny + kz + l = 0$ . Тогда из условия  $M \in \alpha$  составляется уравнение  $ma + \frac{ka}{2} + l = 0$ , из условия  $N \in \alpha$  получаем уравнение  $\frac{ma}{2} + na + l = 0$ .

Далее, поскольку вектор  $\vec{p} = (m;n;k)$  перпендикулярен плоскости  $\alpha$ , а плоскость  $\alpha$  должна быть параллельна прямой  $BD_1$ , то  $\vec{p} \perp \overline{BD_1}$ , откуда  $\vec{p} \cdot \overline{BD_1} = (m;n;k) \cdot (a;a;a) = ma + na + ka = 0$ .

В итоге для неизвестных  $m, n, k, l$  получаем систему

$$\begin{cases} ma + \frac{ka}{2} + l = 0, \\ \frac{ma}{2} + na + l = 0, \\ a(m + n + k) = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} 2m + k + \frac{2l}{a} = 0, \\ m + 2n + \frac{2l}{a} = 0, \\ m + n + k = 0. \end{cases}$$



Вычитая из первого уравнения второе, получаем  $2m + k - m - 2n = 0$ ,  $m + k - 2n = 0$ ,  $m + k = 2n$ . Так как из третьего уравнения  $m + k = -n$ , то  $2n = -n$ , откуда  $n = 0$ . Поэтому  $m + k = 0$ ,  $k = -m$ . Подставляя в первое уравнение системы, получаем  $2m - m + \frac{2l}{a} = 0$ ,  $m = -\frac{2l}{a}$ . В итоге неизвестные  $m, n, k$  выражаются через  $l$ :  $m = -\frac{2l}{a}$ ,  $n = 0$ ,  $k = -m = \frac{2l}{a}$ .

Полагая  $l = -a$ , получим  $m = 2$ ,  $n = 0$ ,  $k = -2$ .

Окончательно уравнение плоскости  $\alpha$  записывается в виде  $2x - 2z - a = 0$ .

**Вопрос.** Какие координаты имеет точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $CC_1$ ?

### 2.9.\*\* Нормальное уравнение плоскости.

Пусть плоскость  $\beta$  не проходит через начало  $O$  системы координат. Опустим из точки  $O$  на плоскость перпендикуляр  $OP$ . Положение точки  $P$  в пространстве можно задать расстоянием  $OP = p$  и тремя углами  $\alpha, \beta, \gamma$ , которые луч  $OP$  образует соответственно с положительными лучами осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  (рис. 4).

Рассматривая проекции точки  $P$  на оси системы координат, получаем, что точка  $P$  имеет абсциссу  $p \cos \alpha$ , ординату  $p \cos \beta$  и аппликату  $p \cos \gamma$ . Следовательно,  $P(p \cos \alpha; p \cos \beta; p \cos \gamma)$ , откуда  $OP^2 = p^2 \cos^2 \alpha + p^2 \cos^2 \beta + p^2 \cos^2 \gamma$ .

Пусть  $M(x; y; z)$  — произвольная точка плоскости  $\beta$ . Заметим, что плоскости  $\beta$  принадлежат те и только те точки  $M$ , для которых либо точка  $M$  совпадает с точкой  $P$ , либо треугольник  $OMP$  — прямоугольный. Во всех случаях можно написать равенство  $OM^2 = OP^2 + MP^2$ .

Записав это равенство через координаты точек, получаем:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= p^2 + (x - p \cos \alpha)^2 + (y - p \cos \beta)^2 + (z - p \cos \gamma)^2, \\ 2p(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) &= p^2 + p^2 \cos^2 \alpha + p^2 \cos^2 \beta + p^2 \cos^2 \gamma. \end{aligned}$$

Поскольку  $p^2 \cos^2 \alpha + p^2 \cos^2 \beta + p^2 \cos^2 \gamma = p^2$ , то

$$\begin{aligned} 2p(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) &= p^2, \\ x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma &= p. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, уравнению (3) удовлетворяют координаты  $(x; y; z)$  тех и только тех точек, которые лежат на данной плоскости  $\beta$ .

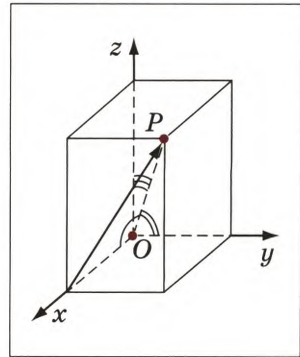


Рис. 4

Уравнение (3) называется *нормальным уравнением плоскости*.

В нормальном уравнении плоскости каждый коэффициент при переменных и число  $p$  имеют конкретный геометрический смысл:

– число  $p$  неотрицательно и равно расстоянию от начала координат до плоскости;

– коэффициенты  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  при  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны косинусам углов, образуемых нормалью  $OP$  к плоскости с положительными лучами осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно, если направление нормали рассматривать от начала  $O$  к плоскости;

– вектор  $\vec{n} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$  является нормалью к плоскости;

– вектор  $\vec{n} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$  имеет единичную длину, то есть  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

**Вопрос.** Как записать уравнение плоскости, проходящей через начало координат, сумма квадратов коэффициентов которого при  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равна 1?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется нормаль к плоскости?
2. Какой вид имеет уравнение плоскости в пространстве?
3. Пусть плоскость задана уравнением  $ax + by + cz + d = 0$ . Какой геометрический смысл имеет вектор  $(a; b; c)$ ?
4. Как записать условие параллельности плоскости  $ax + by + cz + d = 0$  и прямой  $AB$ , проходящей через точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ ?
- 5.\*\* Какой вид имеет нормальное уравнение плоскости?

### ■ Задачи и упражнения

1. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно вектору  $\vec{n}$ , если:

а)  $A(0; 0; 0)$ ,  $\vec{n} = (1; 0; 0)$ ;

б)  $A(1; 0; 0)$ ,  $\vec{n} = (1; 1; 2)$ ;

в)  $A(1; 2; 1)$ ,  $\vec{n} = \left(1; -2; \frac{1}{2}\right)$ ;

г)  $A\left(1; \frac{1}{2}; -2\right)$ ,  $\vec{n} = (-1; -2; 2)$ .

2. Известно, что точка  $A$  является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составьте уравнение этой плоскости, если:

а)  $A(1; 1; 1)$ ,      б)  $A(1; 2; -1)$ ,      в)  $A(3; 4; 2)$ ,      г)  $A\left(-\frac{1}{2}; 3; 2\right)$ .

3. Составьте уравнение плоскости:

- а) проходящей через точку  $A(1;1;1)$  параллельно плоскости  $x + y + z = 0$ ;
- б) проходящей через точку  $A(1;2;-1)$  параллельно плоскости  $2x + y - z + 4 = 0$ ;
- в) проходящей через точку  $A(2;1;4)$  параллельно плоскости  $3x + 3y - 2z + 1 = 0$ ;
- г) проходящей через точку  $A(1;3;2)$  параллельно плоскости  $-2x + y - z + 2 = 0$ .

4. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , если:

- а)  $A\left(1;2;\frac{5}{4}\right)$ ,  $B(0;3;2)$ ,  $C\left(2;0;\frac{1}{4}\right)$ ;
- б)  $A\left(1;1;-\frac{3}{2}\right)$ ,  $B(1;4;-3)$ ,  $C(2;1;-2)$ ;
- в)  $A(1;1;-1)$ ,  $B(-1;-1;3)$ ,  $C(0;1;0)$ ;
- г)  $A(2;1;-2)$ ,  $B(4;1;-4)$ ,  $C(3;0;-5)$ .

5. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки  $A$  и  $B$  параллельно прямой  $CD$ , если:

- а)  $A(1;1;1)$ ,  $B(2;0;-2)$ ,  $C(1;0;0)$ ,  $D(0;2;1)$ ;
- б)  $A(1;0;-1)$ ,  $B(1;4;-3)$ ,  $C(2;1;4)$ ,  $D(3;2;2)$ ;
- в)  $A(1;0;0)$ ,  $B(-1;-1;3)$ ,  $C(0;1;1)$ ,  $D(1;-1;2)$ ;
- г)  $A(2;1;-2)$ ,  $B(2;1;-2)$ ,  $C(2;1;2)$ ,  $D(3;2;3)$ .

6. Найдите уравнение плоскости, которая пересекает ось  $Ox$  в точке  $A$ , ось  $Oy$  в точке  $B$ , ось  $Oz$  в точке  $C$ , причём:

- а)  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$ ,  $C(0;0;1)$ ;
- б)  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;3;0)$ ,  $C(0;0;5)$ ;
- в)  $A(-2;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$ ,  $C(0;0;2)$ ;
- г)  $A(-2;0;0)$ ,  $B(0;-1;0)$ ,  $C(0;0;4)$ .

7.\* Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку  $A$  параллельно прямым  $BC$  и  $MN$ , если:

- а)  $A(1;0;0)$ ,  $B(1;2;1)$ ,  $C(2;2;3)$ ,  $M(-1;0;1)$ ,  $N(-1;1;4)$ ;
- б)  $A(1;1;1)$ ,  $B(0;0;1)$ ,  $C(1;-1;2)$ ,  $M(0;1;1)$ ,  $N(4;4;1)$ .



■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Какая из плоскостей содержит точку  $M(-5; 3; -2)$ ?

1)  $x + 2y - 3z - 6 = 0$

2)  $2x - y + 4z + 20 = 0$

3)  $y - x + 3z - 2 = 0$

4)  $3x + z - 2y + 21 = 0$

**1.2.** Какая из указанных плоскостей параллельна прямой, проходящей через точки  $A(4; -3; -1)$ ,  $B(3; -4; -2)$ ?

1)  $2x + y + 3z - 2 = 0$

2)  $x + 2y + z - 4 = 0$

3)  $x + y + z + 3 = 0$

4)  $3x - y - 2z - 1 = 0$

**1.3.** В каком случае точка  $C$  с указанными координатами расположена на отрезке с концами  $A(-2; 7; 1)$ ,  $B(4; 1; -5)$  так, что  $AC : CB = 2 : 1$ ?

1)  $C(-1; 6; 0)$

2)  $C(0; 5; -1)$

3)  $C(1; 4; -2)$

4)  $C(2; 3; -3)$

**1.4.\*** Какая из указанных плоскостей не пересекается с прямой, которая в параметрической форме имеет вид:  $x = 1 - 2t$ ,  $y = 2 + 3t$ ,  $z = 4 - t$ ?

1)  $x - y + z = 6$

2)  $x + y + z = 4$

3)  $x - y - z = 8$

4)  $x + y - z = 10$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из указанных векторов перпендикулярны к плоскости с уравнением  $2x - z + 3 = 0$ ?

1)  $(-4; 2; 2)$

2)  $(6; 0; -3)$

3)  $(2; 0; 4)$

4)  $(5; 1; 10)$

**2.2.** В прямоугольной системе координат с началом  $O$  задана плоскость с уравнением  $x + 5y - 3z + 1 = 0$ . Для каких из указанных точек  $M$  отрезок  $OM$  пересекает эту плоскость?

1)  $M(2; 1; 3)$

2)  $M(-3; 2; -1)$

3)  $M(-1; -2; -4)$

4)  $M(5; -1; 2)$

**2.3.** Какие из точек расположены на прямой, проходящей через точки  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(-2; 1; -4)$ ?

1)  $(0, 2; -0, 1; 0, 4)$

2)  $(-1, 2; 0, 6; -2, 4)$

3)  $(1; -0, 5; 2)$

4)  $(0, 8; -0, 4; 1, 6)$

**2.4.** Какие из указанных плоскостей содержат точку  $A(-2; 1; 2)$ ?

1)  $x - 2y + z + 2 = 0$

2)  $x + 3y - z + 1 = 0$

3)  $2x + 4y - 3z + 6 = 0$

4)  $5x - y - 2z + 12 = 0$

## § 3. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ■

**3.1. Косинус угла между векторами.** Пусть  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  и  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$  — два ненулевых вектора, связанных с точкой  $A$ . Угол  $\varphi$  между такими векторами определяется как угол между лучами  $AC$  и  $AB$ . В прямоугольной системе координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (1)$$

В общем случае угол между двумя ненулевыми векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  был определён как угол между равными им векторами, связанными с одной точкой. Поэтому из равенства (1) косинус угла между ненулевыми векторами можно выразить через скалярное произведение и длины этих векторов:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (2)$$

В прямоугольной системе координат равенство (2) позволяет вычислить угол между любыми двумя заданными ненулевыми векторами.

**Вопрос.** Какие углы образует вектор  $\vec{a} = (3; 4; 5)$  с единичными векторами  $\vec{e}_1 = (1; 0; 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$ ,  $\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$  координатных осей?

**3.2. Угол между прямыми.** Напомним, что угол между скрещивающимися прямыми  $m$  и  $n$  определяется как угол между пересекающимися прямыми  $m_1$  и  $n_1$ , которые соответственно параллельны прямым  $m$  и  $n$ .

Пусть на прямой  $m$  заданы различные точки  $A$  и  $B$ , а на прямой  $n$  — различные точки  $C$  и  $D$ . Обозначим направляющий вектор  $\overrightarrow{AB}$  прямой  $m$  через  $\vec{a}$  и направляющий вектор  $\overrightarrow{CD}$  прямой  $n$  через  $\vec{b}$  (рис. 1). Выбрав некоторую точку  $O$ , мы можем построить векторы  $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{ON} = \vec{b}$  (рис. 2). Поскольку прямая  $OM$  параллельна прямой  $AB$ , а прямая  $ON$  параллельна прямой  $CD$ , то угол между прямыми  $m$  и  $n$  можно вычислять как угол между прямыми  $OM$  и  $ON$ . Если координаты точек  $A, B, C, D$  известны, то можно вычислить координаты векторов  $\overrightarrow{OM}$  и  $\overrightarrow{ON}$  и найти угол  $\varphi$  между эти-

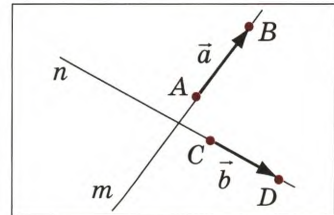


Рис. 1

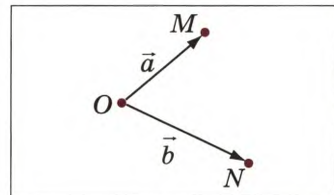


Рис. 2

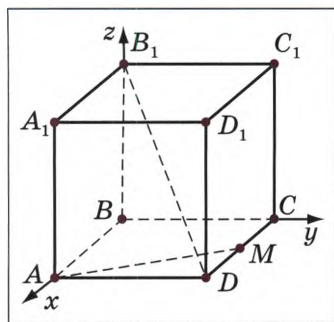


Рис. 3

ми векторами. Если  $\varphi$  не больше  $90^\circ$ , то угол между прямыми  $OM$  и  $ON$  равен  $\varphi$ , а если  $\varphi$  больше  $90^\circ$ , то угол между прямыми  $OM$  и  $ON$  равен углу, смежному с углом  $MON$ , и его величина равна  $180^\circ - \varphi$ .

**Пример 1.** В кубе  $ABCA_1B_1C_1D_1$  точка  $M$  — середина ребра  $CD$ . Найдём угол между прямыми  $B_1D$  и  $AM$ .

Обозначим ребро куба через  $a$ . Введём прямоугольную систему координат с началом в осями  $BA$ ,  $BC$  и  $BB_1$  (рис. 3).

Тогда  $A(a;0;0)$ ,  $D(a;a;0)$ ,  $B_1(0;0;a)$ ,  $M\left(\frac{a}{2};a;0\right)$ . Введём векторы  $\vec{m} = \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{2};a;0\right)$ ,  $\vec{n} = \overrightarrow{DB_1} = (-a;-a;a)$  и обозначим через  $\varphi$  угол между  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ . Далее находим:

$$|\vec{m}|^2 = \vec{m}^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4}; \quad |\vec{n}|^2 = \vec{n}^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2;$$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot (-a) + a \cdot (-a) + 0 \cdot a = -\frac{a^2}{2}.$$

Отсюда  $\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cos \varphi$ ,  $-\frac{a^2}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{3} \cos \varphi$ ,  $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{15}}$ . Поскольку  $\cos \varphi < 0$ , то угол между векторами  $m$  и  $n$  — тупой. Поэтому угол  $\alpha$  между прямыми  $AM$  и  $B_1D$  равен  $180^\circ - \varphi$  и  $\cos \alpha = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{15}} = |\cos \varphi|$ .

Ответ:  $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$ .

**Вопрос.** Как объяснить, что косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых?

### 3.3.\* Применение формулы косинуса угла между прямыми.

В этом пункте разберём следующую задачу.

**Пример 2.** В основании правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной  $a$ . Известно, что прямые  $AB_1$  и  $CA_1$  перпендикулярны. Найдём боковые рёбра призмы.



Обозначим  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$ . Введём прямоугольную систему координат с началом  $A$ , ось  $Oy$  направим вдоль  $AB$ , ось  $Oz$  направим вдоль  $AA_1$ , ось  $Ox$  направим в плоскости основания так, как на рис. 4. Найдём координаты вершин призмы:  $A(0;0;0)$ ,  $B(0;a;0)$ ,  $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ ,  $A_1(0;0;h)$ ,  $B_1(0;a;h)$ ,  $C_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; h\right)$ . Отсюда  $\vec{m} = \overrightarrow{AB_1} = (0;a;h)$ ,  $\vec{n} = \overrightarrow{CA_1} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; h\right)$ .

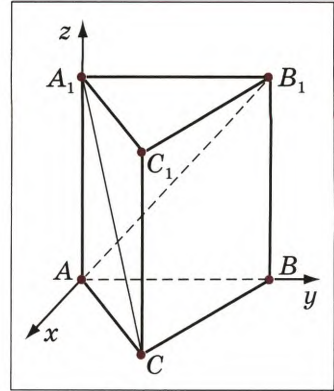


Рис. 4

Из условия следует, что  $\vec{m} \perp \vec{n}$ . Поэтому

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = (0;a;h) \cdot \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; h\right) = h^2 - \frac{a^2}{2} = 0. \text{ Поскольку } h > 0, \text{ то } h = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ответ:  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ .

**Вопрос.** Как изменится решение этой задачи, если ввести систему координат с началом в середине  $H$  ребра  $AB$  и осями  $HC$ ,  $HV$ ,  $HH_1$ , где  $H_1$  — середина ребра  $A_1B_1$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Как найти косинус угла между векторами, если заданы координаты векторов?
2. Как определяется угол между двумя скрещивающимися прямыми?
3. Как найти угол между прямыми  $m$  и  $n$ , если известны координаты направляющего вектора  $\vec{a}$  прямой  $m$  и направляющего вектора  $\vec{b}$  прямой  $n$ ?
4. В каком случае две скрещивающиеся прямые  $m$  и  $n$  перпендикулярны?

### Задачи и упражнения ■

1. Даны точки  $A(1;0;6)$ ,  $B(5;4;0)$ ,  $C(5;0;3)$ . Найдите косинусы углов при вершинах треугольника  $ABC$ .

2. Найдите косинусы углов, которые образует с координатными осями вектор  $\vec{a} = (2; -1; -2)$ .

3. Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ , а векторы  $2\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - 3\vec{b}$  перпендикулярны.

4. Два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  таковы, что  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ . Докажите, что векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны.

5.\* Вектор  $\vec{a} + 3\vec{b}$  перпендикулярен вектору  $\vec{a} - 5\vec{b}$ , а вектор  $\vec{a} + 4\vec{b}$  перпендикулярен вектору  $\vec{a} - 3\vec{b}$ . Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

6. В основании правильной треугольной пирамиды  $SABC$  лежит равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной 2. Найдите боковые рёбра пирамиды, если известно, что прямые  $CP$  и  $AQ$  перпендикулярны, где  $P$ ,  $Q$  — середины рёбер  $SA$  и  $SB$  соответственно.

7. В основании правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат со стороной 6. Точка  $P$  — середина ребра  $SB$ . Найдите высоту пирамиды, если известно, что прямые  $AP$  и  $SC$  перпендикулярны.

8.\* В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  все рёбра равны. Найдите угол между медианами  $SK$  и  $DL$  граней  $ASB$  и  $CSD$  соответственно.

9.\* В пирамиде  $ABCD$  ребро  $AC$  перпендикулярно рёбрам  $AB$  и  $CD$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если известно, что  $AB = CD = 1$ ,  $AC = 3$ ,  $BD = 2\sqrt{3}$ .

10.\*\* В пирамиде  $ABCD$  точки  $P$  и  $Q$  лежат на рёбрах  $AD$  и  $BC$  так, что  $AP : PD = BQ : QC = 1 : 2$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $DC$ , если известно, что  $AB = DC = 2PQ$ .

11.\*\* В пирамиде  $ABCD$  точка  $P$  — середина ребра  $CD$ . Ребро  $AD$  перпендикулярно рёбрам  $CD$  и  $AB$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если известно, что  $AD = 3a$ ,  $CD = 4a$ ,  $AB = BP = 5a$ .

12.\*\* В пирамиде  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  лежат на рёбрах  $AC$  и  $BD$  так, что  $AM : MC = BN : ND = 1 : 3$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если известно, что  $AB = 3a$ ,  $MN = 4a$ ,  $CD = 9a$ .

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Чему равна сумма векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ , если  $A(1; 5; 2)$ ,  $B(-1; 7; 1)$ ,  $C(3; 3; 4)$ ,  $D(4; 0; 5)$ ?

- 1)  $(0; 1; 0)$       2)  $(1; 1; 1)$       3)  $(-1; -1; -1)$       4)  $(-1; -1; 0)$

**1.2.** Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}(3; 0; 1)$  и  $\vec{b}(0; 1; 3)$ ?

- 1)  $0,2$       2)  $0,3$       3)  $0,4$       4)  $0,5$

**1.3.** При каком значении  $m$  вектор  $\vec{a}(3; 2m; 1)$  перпендикулярен вектору  $\vec{b}(m; -2; 3)$ ?

- 1)  $3$       2)  $4$       3)  $5$       4)  $6$

**1.4.** Чему равен косинус угла между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 0,5 \cdot |\vec{b}|$ , а векторы  $3\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - 2\vec{b}$  перпендикулярны?

- 1)  $-\frac{1}{2}$       2)  $0$       3)  $\frac{1}{2}$       4)  $1$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Укажите пары перпендикулярных скрещивающихся прямых:

- 1)  $AC$  и  $B_1 D_1$       2)  $AC_1$  и  $BD_1$   
3)  $AA_1$  и  $B_1 D_1$       4)  $AB_1$  и  $CD_1$

**2.2.** Какие из указанных величин могут быть значениями углов между двумя векторами?

- 1)  $-45^\circ$       2)  $(30\sqrt{2})^\circ$       3)  $180^\circ$       4)  $(300\sqrt{2})^\circ$

**2.3.** Какие из приведённых значений равны косинусам некоторых углов, которые образует с координатными осями вектор  $\vec{a} = (2; -1; -2)$ ?

- 1)  $\frac{1}{3}$       2)  $-\frac{1}{3}$       3)  $\frac{2}{3}$       4)  $-\frac{2}{3}$

**2.4.** При каких  $a$  угол между векторами  $\vec{n}(1; 2; 2)$  и  $\vec{m}(2a; 1; -a)$  более  $60^\circ$ ?

- 1)  $\frac{1}{\sqrt{8}}$       2)  $\frac{1}{\sqrt{7}}$       3)  $\frac{1}{\sqrt{6}}$       4)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$



## ■ § 4. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

**4.1. Угол между нормальными к плоскостям.** Пусть заданы две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , которые пересекаются по прямой  $c$ . Проведём плоскость  $\gamma$ , перпендикулярную прямой  $c$  и пересекающую плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по прямыми  $a$  и  $b$  соответственно (рис. 1). Тогда по определению угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  равен углу между прямыми  $a$  и  $b$ .

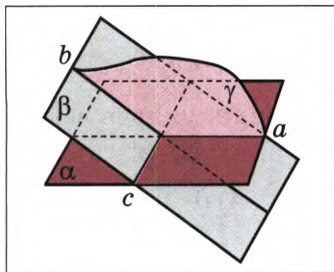


Рис. 1

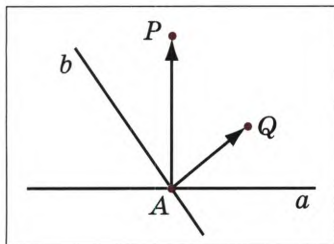


Рис. 2

Покажем, что вычисление угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  можно свести к вычислению угла между нормальными к этим плоскостям. Из точки  $A$  пересечения прямых  $a$  и  $b$  отложим ненулевой вектор  $\overrightarrow{AP}$ , перпендикулярный плоскости  $\alpha$ , и ненулевой вектор  $\overrightarrow{AQ}$ , перпендикулярный плоскости  $\beta$ . Тогда  $AP \perp c$ ,  $AP \perp a$ ,  $AQ \perp c$ ,  $AQ \perp b$ . Отсюда получаем, что прямые  $a$ ,  $b$ ,  $AP$ ,  $AQ$  проходят через точку пересечения и перпендикулярны прямой  $c$ . Поэтому все прямые  $a$ ,  $b$ ,  $AP$ ,  $AQ$  лежат в одной плоскости  $\gamma$  (рис. 2). Но поскольку  $AP \perp a$  и  $AQ \perp b$ , то угол между прямыми  $AP$  и  $AQ$  равен углу между прямыми  $a$  и  $b$ . Это означает, что угол между нормальными  $AP$  и  $AQ$  к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  либо равен углу между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , либо дополняет этот угол до  $180^\circ$ .

**Вопрос.** Как определяются двугранный угол и линейный угол двугранного угла?

**4.2. Угол между плоскостями.** Пусть в координатном пространстве заданы две плоскости: плоскость  $\alpha$  с уравнением  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  и плоскость  $\beta$  с уравнением  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ . Тогда вектор  $\vec{m} = (a_1; b_1; c_1)$  перпендикулярен плоскости  $\alpha$ , вектор  $\vec{n} = (a_2; b_2; c_2)$  перпендикулярен плоскости  $\beta$ . Как следует из предыдущего пункта, угол между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  позволяет определить угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

**Пример 1.** Найдём угол между плоскостями, заданными уравнениями  $3x - y - 2 = 0$  и  $-2x - z + 5 = 0$ .

Пусть  $\vec{m} = (3; -1; 0)$ ,  $\vec{n} = (-2; 0; -1)$ ,  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ .

Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

Поскольку получено отрицательное значение косинуса, то  $\varphi > 90^\circ$ . Поэтому угол  $\alpha$  между заданными плоскостями равен  $180^\circ - \varphi$  и

$$\cos \alpha = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{5}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{3\sqrt{2}}{5}$ .

**Вопрос.** Как найти угол между плоскостями, заданными уравнениями  $3x - y + 1 = 0$  и  $2x + z - 1 = 0$ ?

**4.3. Векторный признак перпендикулярности плоскостей.** Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют уравнения  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  и  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  соответственно.

Плоскость  $\alpha$  перпендикулярна плоскости  $\beta$  в том и только в том случае, когда вектор  $\vec{m} = (a_1; b_1; c_1)$  перпендикулярен вектору  $\vec{n} = (a_2; b_2; c_2)$ . Это равносильно тому, что  $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ , то есть  $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ .

**Вопрос.** Как объяснить, что условие перпендикулярности плоскостей не зависит от коэффициентов  $d_1$  и  $d_2$ ?

**4.4. Векторный признак параллельности плоскостей.** Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны только в том случае, когда перпендикулярные к ним векторы параллельны.

Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют уравнения  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  и  $\alpha \parallel \beta$ . Параллельность векторов  $\vec{m} = (a_1; b_1; c_1)$  и  $\vec{n} = (a_2; b_2; c_2)$  означает их коллинеарность. Поэтому найдётся такое число  $\lambda \neq 0$ , что  $\vec{n} = \lambda \vec{m}$ . Отсюда  $(a_2; b_2; c_2) = \lambda(a_1; b_1; c_1)$  и  $a_2 = \lambda a_1$ ,  $b_2 = \lambda b_1$ ,  $c_2 = \lambda c_1$ . В результате приходим к следующему утверждению:

две плоскости параллельны, если в их уравнениях пропорциональны соответствующие коэффициенты при переменных  $x, y, z$ .

**Вопрос.** Как составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки  $M(1;1;1)$  и  $N(2;2;2)$  и перпендикулярной к плоскости  $x + y - z - 1 = 0$ ?

**4.5. Вычисление угла между плоскостями.** Разберём задачу о нахождении угла между плоскостями.

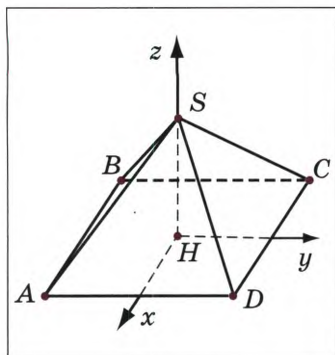


Рис. 3

**Пример 2.** В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  рёбра основания  $ABCD$  равны 4, высота  $SH$  равна 3. Найдём угол между плоскостями  $SAB$  и  $SBC$ .

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке  $H$  и осями, направленными так, как на рис. 3. Тогда  $A(2; -2; 0)$ ,  $B(-2; -2; 0)$ ,  $C(-2; 2; 0)$ ,  $S(0; 0; 3)$ .

Будем искать уравнение плоскости  $SAB$  в виде  $ax + by + cz + d = 0$ . По условию:

$$S \in \alpha, \text{ поэтому } a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 3 + d = 0;$$

$$A \in \alpha, \text{ поэтому } a \cdot 2 + b \cdot (-2) + c \cdot 0 + d = 0;$$

$$B \in \alpha, \text{ поэтому } a \cdot (-2) + b \cdot (-2) + c \cdot 0 + d = 0.$$

В результате приходим к системе  $3c + d = 0$ ,  $2a - 2b + d = 0$ ,  $2a + 2b - d = 0$ , откуда  $a = 0$ ,  $b = \frac{1}{2}d$ ,  $c = -\frac{1}{3}d$ . Выбирая  $d = 6$ , уравнение плоскости  $SAB$  получаем в виде  $3y - 2z + 6 = 0$ , а вектор нормали к ней в виде  $\vec{m} = (0; 3; -2)$ .

Будем искать уравнение плоскости  $SBC$  в виде  $px + qy + rz + t = 0$ . Для этого, подставляя соответствующие координаты в уравнение плоскости  $SBC$ , получим и решим систему уравнений. В результате уравнение плоскости  $\beta$  получим в виде  $3x - 2z + 6 = 0$ , а нормаль к ней — в виде  $\vec{n} = (3; 0; -2)$ .

Пусть  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ . Тогда  $\cos \varphi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4}{13}$ . Поскольку  $\cos \varphi > 0$ , то угол между плоскостями равен  $\varphi$ .

Ответ:  $\arccos \frac{4}{13}$ .

**Вопрос.** Чему равен двугранный угол при ребре  $SB$  у пирамиды из рассмотренного примера?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется угол между двумя плоскостями?
2. Докажите, что угол между двумя плоскостями равен либо углу между нормальными к плоскостям, либо смежному с ним углу.



3. Как найти угол между двумя плоскостями, если известны их уравнения?
4. При каком условии две плоскости, заданные уравнениями, перпендикулярны?
5. При каком условии две плоскости, заданные уравнениями, параллельны?

### Задачи и упражнения ■

1. Найдите угол между плоскостями:
  - а)  $x + y + z - 1 = 0$  и  $2x - y - z + 5 = 0$ ;
  - б)  $2x + y - z + 4 = 0$  и  $x + 2y + z - 1 = 0$ ;
  - в)  $2x + 3y + 4z - 12 = 0$  и  $3x - 6y + 1 = 0$ ;
  - г)  $3x - 2y - 3z + 5 = 0$  и  $9x - 6y - 9z - 5 = 0$ .
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1; -3; 2)$  параллельно плоскости  $2x + y + 2z - 1 = 0$ .
3. Найдите, при каком значении  $m$  плоскость  $2x + my - 3z - 1 = 0$  перпендикулярна плоскости  $5x + y + 3z + 1 = 0$ .
4. Найдите угол между плоскостью  $Oxy$  и плоскостью, заданной уравнением  $\sqrt{2} \cdot x + y - 3z + 17 = 0$ .
5. Дан куб с основанием  $ABCD$  и боковыми рёбрами  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ . Через вершину  $B$  и середины рёбер  $CC_1$  и  $A_1D_1$  проведена плоскость. Найдите величину двугранного угла, образованного этой плоскостью с плоскостью основания.
- 6.\* В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$ , длины катетов  $AB$  и  $AC$  которого равны  $3a$  и  $4a$  соответственно. Ребро  $SA$  пирамиды перпендикулярно плоскости основания и имеет длину  $a$ . Через середины рёбер  $AB$ ,  $SC$  и точку, лежащую на ребре  $AC$  и удалённую от вершины  $A$  на расстояние  $a$ , проведена плоскость. Определите величину двугранного угла, образованного этой плоскостью и плоскостью основания.
- 7.\* В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной  $1$ , ребро  $SA$  пирамиды перпендикулярно плоскости основания,  $|SA| = \sqrt{3}$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямым  $SB$  и  $AC$ , плоскость  $\beta$  параллельна прямым  $SC$  и  $AB$ . Определите величину угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .
8. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $|AB| = 3$ ,  $|BC| = 2$ . Боковые рёбра пирамиды

имеют одинаковую длину, её высота равна 3. Плоскость  $\alpha$  параллельна прямым  $SB$  и  $AC$ , плоскость  $\beta$  параллельна прямым  $SC$  и  $BD$ . Определите величину угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

9. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  длины рёбер  $|AB| = 1$ ,  $|AD| = \sqrt{3}$ ,  $|AA_1| = 2$ . Через вершины  $B_1$ ,  $D$  и точку  $M$  — середину ребра  $BC$  проведена плоскость  $\pi$ . Определите величину двугранного угла между плоскостью  $\pi$  и плоскостью грани  $ABCD$ .

10. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точка  $M$  — середина ребра  $C_1 D_1$ , точка  $N$  выбрана на ребре  $AB$  так, что  $|AN| = 2|NB|$ . Через вершину  $D$  и точки  $M$  и  $N$  проведена плоскость  $\alpha$ . Определите величину двугранного угла между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью грани  $ABCD$  куба.

11.\* В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1 плоскость  $\alpha$  проходит через главную диагональ  $AC_1$ , пересекает ребро  $CD$  и образует угол в  $60^\circ$  с плоскостью основания  $ABCD$ . Найдите, в каком отношении плоскость  $\alpha$  делит ребро  $CD$ .

12. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $ABCD$  равна 1, высота пирамиды равна 2. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $SB$  и  $CD$  соответственно. Через вершину  $A$  и точки  $M$  и  $N$  проведена плоскость  $\beta$ . Определите величину двугранного угла между плоскостью  $\beta$  и плоскостью основания  $ABCD$ .

13.\*\* В основании треугольной пирамиды  $ABCD$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $BC$ , равной единице, и углом  $ABC$ , равным  $60^\circ$ . Длины рёбер  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  равны  $\frac{\sqrt{13}}{4}$ , точка  $M$  — середина  $CD$ . Через прямую  $BM$  под углом  $45^\circ$  к плоскости  $ABC$  проведена плоскость, пересекающая ребро  $AC$  в некоторой точке  $N$ . Найдите отношение  $AN : NC$ .

14.\* В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 4$ ,  $BC = 2$ . Длины всех боковых рёбер равны 3, точка  $M$  — середина  $AS$ . Через прямую  $BM$  параллельно диагонали  $AC$  проведена плоскость. Определите величину угла между этой плоскостью и плоскостью  $SAC$ .

15.\*\* В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 3$ ,  $BC = 1$ . Ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости основания и равно  $2\sqrt{5}$ , точка  $M$  — середина  $CD$ . Через прямую  $BM$  под углом  $45^\circ$  к плоскости  $SAB$  проведена плоскость, пересекающая ребро  $SA$  в некоторой точке  $N$ . Найдите отношение  $SN : NA$ .



## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Чему равен косинус угла между плоскостями  $2x - 4y + 5z - 21 = 0$  и  $x - 3z + 18 = 0$ ?

- 1)  $\frac{17}{15\sqrt{2}}$       2)  $\frac{13}{15\sqrt{2}}$       3)  $\frac{14}{15}$       4)  $\frac{13}{15}$

**1.2.** Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2;3;0)$  параллельно плоскости  $2x - y + 3z = 0$ :

- 1)  $2x - y + 3z + 4 = 0$   
 2)  $x - 2y + 3z + 4 = 0$   
 3)  $2x - y + 3z - 1 = 0$   
 4)  $4x - 2y + 6z - 1 = 0$

**1.3.** При каком значении  $m$  плоскость  $5x + my + 3z - 2 = 0$  перпендикулярна плоскости  $-x - 2y + 3z - 4 = 0$ ?

- 1)  $-1$       2)  $0$       3)  $1$       4)  $2$

**1.4.** Чему равен угол между плоскостью  $Oxz$  и плоскостью, заданной уравнением  $\sqrt{3}x - 2y + z + 5 = 0$ ?

- 1)  $30^\circ$       2)  $45^\circ$       3)  $135^\circ$       4)  $150^\circ$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** При каких значениях  $n$  и  $m$  плоскости  $2x + 6y + mz - 8 = 0$  и  $nx - 3y + 8z + 1 = 0$  параллельны?

- 1)  $m = 16, n = -4$       2)  $m = -8, n = 1$   
 3)  $m = -16, n = -1$       4)  $m = -8, n = -4$

**2.2.** При каких значениях  $m$  плоскости с уравнениями  $2x + my - z + 1 = 0$  и  $mx + 3my + z - 1 = 0$  перпендикулярны?

- 1)  $-1$       2)  $0$       3)  $\frac{1}{3}$       4)  $1$

**2.3.** При каких значениях  $m$  плоскости с уравнениями  $mx - 4y + 3z + 1 = 0$  и  $mx + y + mz + 2 = 0$  перпендикулярны?

- 1)  $-4$       2)  $-1$       3)  $0$       4)  $1$

**2.4.** При каких значениях  $a$  угол между вектором  $\vec{m} = (1; 2; a)$  и координатным вектором  $(0; 0; 1)$  равен  $30^\circ$ ?

- 1)  $\sqrt{15}$       2)  $4$       3)  $-\sqrt{15}$       4)  $-4$



## ■ § 5. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

**5.1. Синус угла между прямой и плоскостью.** Пусть задана плоскость  $\alpha$  и наклонная прямая  $a$ , которая пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $A$ . Из другой точки  $B$  прямой  $a$  опустим перпендикуляр  $BH$  на плоскость  $\alpha$  (рис. 1). Тогда прямая  $AH$  является перпендикулярной проекцией прямой  $a$  на плоскость  $\alpha$ . По определению угол между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$  равен углу  $BAH$ . Поскольку треугольник  $ABH$  прямоугольный, то  $\angle BAH + \angle ABH = 90^\circ$ . Значит, угол  $BAH$  дополняет до  $90^\circ$  угол  $ABH$ , образованный прямой  $a$  и перпендикуляром  $BH$  к плоскости  $\alpha$ , и поэтому  $\sin \angle BAH = \cos \angle ABH$ . Отсюда следует, что, вычислив косинус угла между прямой  $a$  и перпендикуляром к плоскости  $\alpha$ , мы сможем найти синус угла между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$ .

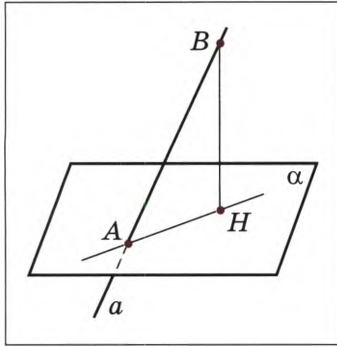


Рис. 1

**Вопрос.** Чему равен угол между прямой  $m$  и плоскостью  $\alpha$ , если угол между нормалью к плоскости  $\alpha$  и направляющим вектором прямой  $m$  равен  $120^\circ$ ?

**5.2. Вычисление угла между прямой и плоскостью.** Пусть в координатном пространстве заданы плоскость  $\alpha$  с уравнением  $ax + by + cz + d = 0$  и прямая  $l$ , проходящая через точки  $A(p_1; q_1; r_1)$  и  $B(p_2; q_2; r_2)$ . Тогда вектор  $\vec{m} = (a; b; c)$  является нормалью к плоскости  $\alpha$ , а вектор  $\vec{AB} = (p_2 - p_1; q_2 - q_1; r_2 - r_1)$  — направляющим вектором прямой  $AB$ . Из предыдущего пункта следует, что угол между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{AB}$  позволяет определить угол между прямой  $l$  и плоскостью  $\alpha$ .

**Пример 1.** Найдём угол между плоскостью с уравнением  $x + 2y + 3z = 0$  и прямой  $AB$ , где  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(2; -5; 1)$ .

Обозначим через  $\vec{m} = (1; 2; 3)$  нормаль к данной плоскости, через  $\vec{a} = (2; -5; 1)$  — направляющий вектор прямой  $AB$ , через  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{a}$ , через  $\alpha$  — угол между прямой  $AB$  и заданной плоскостью. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2 + 1^2}} = -\sqrt{\frac{5}{84}}.$$

Поскольку значение косинуса отрицательно, то  $\varphi > 90^\circ$ . Поэтому

$$\sin \alpha = \cos (\pi - \varphi) = \sqrt{\frac{5}{84}}.$$

Ответ:  $\arcsin \sqrt{\frac{5}{84}}$ .

**Вопрос.** Как связаны друг с другом угол между двумя прямыми и угол между направляющими векторами этих прямых?

### 5.3.\* Плоскость, образующая заданный угол с заданной прямой.

**Пример 2.** В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  через прямую  $B_1 C$  проведена плоскость, пересекающая ребро  $AB$  и образующая угол в  $60^\circ$  с прямой  $A_1 B$ . Найдём, в каком отношении эта плоскость делит ребро  $AB$ . Введём прямоугольную систему координат с началом  $B$  и осями, направленными как на рис. 2. Найдём координаты нужных точек:  $B_1(0;0;1)$ ,  $C(0;1;0)$ ,  $A_1(1;0;1)$ ,  $B(0;0;0)$ .

Вектор  $\vec{a} = \overrightarrow{BA_1} = (1;0;1)$  является направляющим вектором прямой  $A_1 B$ .

Обозначим искомую плоскость через  $\gamma$  и запишем её уравнение в виде  $mx + ny + kz + l = 0$ . Тогда вектор  $\vec{b} = (m;n;k)$  есть нормаль к плоскости  $\gamma$ . Из условия следует, что век-

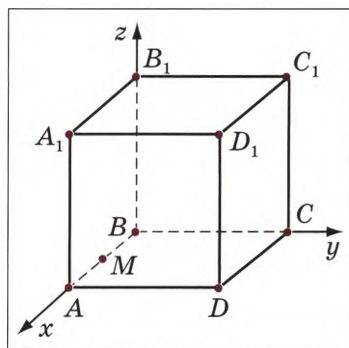


Рис. 2

тор  $\vec{b}$  образует с прямой  $A_1 B$  угол в  $30^\circ$ , откуда  $\left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right| = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\frac{|m+k|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+k^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как плоскость  $\gamma$  проходит через точки  $B_1$  и  $C$ , то  $k+l=0$ ,  $n+l=0$ . В результате приходим к системе

$$\begin{cases} k+l=0, \\ n+l=0, \\ \sqrt{2} \cdot |m+k| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{m^2+n^2+k^2}. \end{cases}$$

Заметим, что плоскость  $\gamma$  не может совпадать с плоскостью  $BB_1 C$ , а поэтому не проходит через начало системы координат. Значит, в уравнении плоскости  $\gamma$  можно взять  $l = -1$ . Тогда  $k = 1$ ,  $n = 1$ , а последнее уравнение системы можно записать в виде  $\sqrt{2} \cdot |m+1| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{m^2+2}$ .

Отсюда  $2(m^2 + 2m + 1) = 3(m^2 + 2)$ ,  $m^2 - 4m + 4 = 0$ ,  $m = 2$ . Следовательно, уравнение плоскости  $\gamma$  имеет вид  $2x + y + z - 1 = 0$ .

Пусть  $M(t; 0; 0)$  — точка пересечения прямой  $AB$  с плоскостью  $\gamma$ . Тогда  $2t + 0 + 0 - 1 = 0$ , откуда  $t = \frac{1}{2}$ , а поэтому точка  $M$  — середина отрезка  $AB$ .

*Ответ:*  $1 : 1$ .

**Вопрос.** В каком отношении плоскость  $\gamma$  делит диагональ  $BA_1$  грани  $BB_1A_1A$ ?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется угол между прямой и плоскостью?
2. Как связаны друг с другом угол между прямой и плоскостью и угол между прямой и нормалью к этой плоскости?
3. Как найти угол между прямой и плоскостью, если заданы уравнение плоскости и направляющий вектор прямой?

### ■ Задачи и упражнения

1. Найдите угол между прямой, проходящей через точки  $A(1;1;1)$ ,  $B(2;4;0)$ , и плоскостью, проходящей через точки  $C(1;1;2)$ ,  $D(1;2;1)$  и  $E(2;2;3)$ .

2. В треугольной пирамиде  $SABC$  рёбра  $AB$ ,  $AC$ ,  $AS$  взаимно перпендикулярны и  $AB = 3$ ,  $AC = 1$ ,  $AS = \sqrt{3}$ . Найдите угол между медианой  $BK$  грани  $ASB$  и плоскостью  $BSC$ .

3.\* В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной 2, длины боковых рёбер  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  равны  $\sqrt{3}$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямым  $AC_1$  и  $A_1B$ . Определите величину угла между прямой  $BC$  и плоскостью  $\alpha$ .

4.\* В основании пирамиды  $SABC$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной 2, ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости основания,  $|SA| = \sqrt{3}$ . Плоскость  $\alpha$  параллельна прямым  $SC$  и  $AB$ , точка  $K$  — середина ребра  $BC$ . Определите величину угла между прямой  $AK$  и плоскостью  $\alpha$ .

5.\* В основании прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с боковыми рёбрами  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 5$ ,  $BC = 1$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AB$ . Найдите длину ребра  $AA_1$ , если известно, что прямые  $MC_1$  и  $B_1C$  образуют равные углы с плоскостью  $A_1BCD_1$ .



6. В правильном тетраэдре  $SABC$  плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $S$ ,  $C$  и середину  $M$  ребра  $AB$ , плоскость  $\beta$  проходит через вершину  $B$  и точки  $K$  и  $L$  — середины рёбер  $SA$  и  $SC$  соответственно. Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $l$ . Найдите величину угла между прямой  $l$  и плоскостью грани  $ABC$ .

7.\* Сторона основания  $ABCD$  правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна 1, её высота равна 2. Плоскость  $\alpha$  проходит через вершины  $A$ ,  $S$  и середину  $M$  ребра  $BC$ , плоскость  $\beta$  проходит через вершину  $B$  и точки  $K$  и  $L$  — середины рёбер  $AS$  и  $SC$ . Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $l$ . Найдите величину угла между прямой  $l$  и плоскостью основания  $ABCD$ .

8.\*\* В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$ , у которого  $AB = BC = 1$ . Длины боковых рёбер  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  призмы также равны 1. Через прямую  $B_1C$  проведена плоскость, пересекающая ребро  $A_1C_1$  и образующая с ним угол в  $60^\circ$ . В каком отношении эта плоскость делит ребро  $A_1C_1$ ?

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен синус угла между плоскостью  $x + y + z + 10 = 0$  и вектором  $\vec{n} = (2; -1; 2)$ ?

- 1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       2)  $\frac{1}{2}$       3)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       4)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

1.2. При каком значении  $a$  из указанных угол между плоскостью  $x + y = 2$  и вектором  $\vec{n} = (1; 1; a)$  равен  $60^\circ$ ?

- 1)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$       2) 1      3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       4) 2

1.3. Какая из указанных плоскостей составляет наибольший угол с вектором  $(1; -3; 2)$ ?

- 1)  $x - y + z - 1 = 0$       2)  $x + 2y + z - 2 = 0$   
3)  $x + y + 2z - 3 = 0$       4)  $x + 2y - z - 4 = 0$

1.4. Какой из перечисленных ниже векторов составляет наименьший угол с плоскостью  $x + y + z - 2 = 0$ ?

- 1)  $\vec{n} = (1; 2; 3)$       2)  $\vec{n} = (-1; 2; 3)$       3)  $\vec{n} = (1; -2; 3)$       4)  $\vec{n} = (1; 2; -3)$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из перечисленных векторов составляют с плоскостью  $2x - y + 2z + 1 = 0$  угол, больший  $30^\circ$ ?

- 1)  $\vec{n} = (1; 1; 2)$       2)  $\vec{n} = (1; -1; 2)$       3)  $\vec{n} = (1; -1; 1)$       4)  $\vec{n} = (1; 1; 4)$

**2.2.** С какими из перечисленных плоскостей вектор  $\vec{n} = (3; 4; 5)$  составляет угол, не равный  $45^\circ$ ?

- 1)  $2x - y + 2z - 3 = 0$       2)  $x - 2y - 2z - 10 = 0$   
3)  $2x - 2y + z + 6 = 0$       4)  $2x + y + 2z - 6 = 0$

**2.3.** При каких значениях  $a$  вектор  $\vec{n} = (1; 0; 1)$  составляет угол  $60^\circ$  с плоскостью  $ax + y + z - 3 = 0$ .

- 1)  $-2$       2)  $-1$       3)  $1$       4)  $2$

**2.4.** Дана правильная четырёхугольная пирамида, все рёбра которой равны между собой. Какие из перечисленных значений может принимать синус угла между некоторым ребром пирамиды и некоторой её гранью?

- 1)  $0$       2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       3)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$       4)  $\frac{1}{2}$

## ■ § 6. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

**6.1. Формула расстояния от точки до плоскости.** Напомним, что расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Пусть в координатном пространстве плоскость  $\alpha$  задана уравнением  $ax + by + cz + d = 0$  и точка  $A$  имеет координаты  $(m; n; k)$ . Расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$  равно расстоянию от точки  $A$  до такой точки  $B(x_0; y_0; z_0)$  плоскости  $\alpha$ , для которой вектор  $\overline{AB}$  перпендикулярен  $\alpha$ . Если  $\overline{AB} \perp \alpha$ , то вектор  $\overline{AB}$  коллинеарен нормали  $(a; b; c)$  к плоскости  $\alpha$ . Значит, найдётся такое число  $\lambda$ , что  $(x_0 - m; y_0 - n; z_0 - k) = \lambda(a; b; c)$  или  $x_0 - m = \lambda a$ ,  $y_0 - n = \lambda b$ ,  $z_0 - k = \lambda c$ .

Расстояние  $AB$  от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$  можно найти по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 + (z_0 - k)^2} = \sqrt{\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Для вычисления  $\lambda$  запишем равенства  $x_0 = m + \lambda a$ ,  $y_0 = n + \lambda b$ ,  $z_0 = k + \lambda c$  и подставим в уравнение плоскости  $\alpha$ . В результате получим, что  $a(m + \lambda a) + b(n + \lambda b) + c(k + \lambda c) + d = 0$ , поэтому  $\lambda(a^2 + b^2 + c^2) =$

$= -(am + bn + ck + d)$ . Из определения уравнения плоскости следует, что хотя бы один из коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  отличен от нуля, поэтому  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  и  $\lambda = \frac{am + bn + ck + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Поскольку  $AB = |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , то

$$AB = \frac{|am + bn + ck + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|am + bn + ck + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Таким образом, расстояние  $h$  от точки  $A(m; n; k)$  до плоскости с уравнением  $ax + by + cz + d = 0$  вычисляется по формуле

$$h = \frac{|am + bn + ck + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (1)$$

**Пример 1.** Точка  $M$  — середина ребра  $AD$  единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Через середину  $N$  отрезка  $B_1 M$  перпендикулярно  $B_1 M$  проводится плоскость  $\alpha$ . Найдём расстояние от центра  $O$  куба до плоскости  $\alpha$ .

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке  $A$ , направив ось  $Ox$  по  $AB$ , ось  $Oy$  по  $AD$ , ось  $Oz$  по  $AA_1$  (рис. 1). Выпишем координаты нужных точек:  $A(0; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $B_1(1; 0; 1)$ ,  $M(0; \frac{1}{2}; 0)$ ,  $N(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ ,  $O(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ . Вектор  $\overrightarrow{MB_1} = (1; -\frac{1}{2}; 1)$

перпендикулярен искомой плоскости, поэтому уравнение плоскости будет иметь вид  $x - \frac{1}{2}y + z + d = 0$ . Подставив в уравнение плоскости координаты точки  $N$ , которая лежит на плоскости, получим  $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + d = 0$ , откуда  $d = -\frac{7}{8}$ . Поэтому по формуле (1) иско-

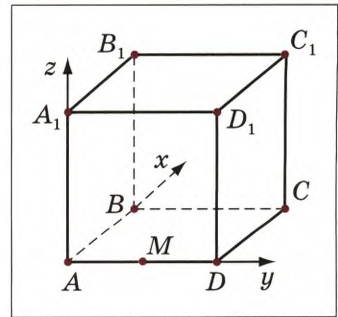


Рис. 1

мое расстояние равно

$$\frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{8}|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12}.$$

Ответ:  $\frac{1}{12}$ .



### 6.2.\* Расстояние между скрещивающимися прямыми.

**Пример 2.** В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной длины 1. Длины боковых рёбер  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  равны 2. Точки  $K$  и  $L$  — середины  $AB$  и  $CC_1$  соответственно. Найдём расстояние между прямыми  $KL$  и  $A_1C$ .

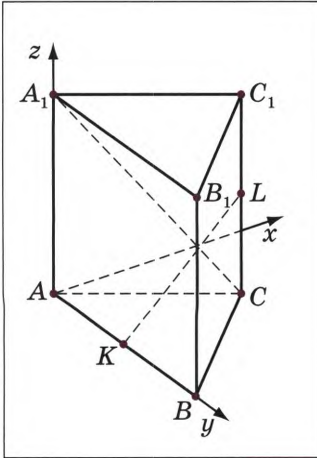


Рис. 2

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке  $A$ , направив ось  $Oy$  по  $AB$ , ось  $Oz$  по  $AA_1$ , ось  $Ox$  перпендикулярно  $AB$  и  $AA_1$  (рис. 2). Выпишем координаты нужных точек:  $A_1(0;0;2)$ ,  $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ ,  $K\left(0;\frac{1}{2};0\right)$ ,  $L\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right)$ .

Отсюда  $\overline{KL} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;1\right)$ . Обозначим через  $\alpha$  плоскость, которая проходит через точки  $A_1$ ,  $C$  и параллельна прямой  $KL$ , и запишем её уравнение в виде  $ax + by + cz + d = 0$ .

Из условия, что точки  $A_1$ ,  $C$  лежат в плоскости  $\alpha$ , получим равенства  $2c + d = 0$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2} + b + d = 0$ . Из условия параллельности плоскости

$\alpha$  и прямой  $KL$  следует, что нормаль  $\vec{n} = (a;b;c)$  перпендикулярна  $\overline{KL}$ . Отсюда  $\vec{n} \cdot \overline{KL} = 0$  или  $\frac{\sqrt{3}}{2}a + c = 0$ . В результате придём к системе:

$$\begin{cases} 2c + d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + c = 0. \end{cases}$$

Выразив неизвестные  $b$ ,  $c$ ,  $d$  через  $a$ , получим  $b = -3\sqrt{3}a$ ,  $c = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ,  $d = \sqrt{3}a$ . Положив  $a = 2\sqrt{3}$ , запишем уравнение плоскости  $\alpha$  в виде  $2\sqrt{3}x - 18y - 3z + 6 = 0$ . После этого по формуле (1) найдём расстояние  $h$  от точки  $K\left(0;\frac{1}{2};0\right)$  до плоскости  $\alpha$ , которое равно искомому расстоянию между скрещивающимися прямыми:

$$h = \frac{|2\sqrt{3} \cdot 0 - 18 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{12 + 324 + 9}} = \sqrt{\frac{3}{115}}.$$

Ответ:  $\sqrt{\frac{3}{115}}$ .

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Как определяется расстояние от точки до плоскости?
2. Как вычислить расстояние от точки до плоскости, если известны координаты точки и уравнение плоскости?
- 3.\* Как найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми?

### Задачи и упражнения ■

1. Найдите расстояние от точки с координатами  $(-4; -2; 3)$  до плоскости с уравнением  $-x + 2y + 2z + 3 = 0$ .

2. Вычислите расстояние от начала координат до плоскости с уравнением  $2x - 2y + z + 6 = 0$ .

3. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  точка  $M$  — середина ребра  $AB$ , точка  $K$  — середина ребра  $SC$ . Через середину  $MK$  перпендикулярно  $MK$  проводится плоскость  $\alpha$ . Найдите расстояние от центра основания  $ABCD$  до плоскости  $\alpha$ , если  $AB = 2$ ,  $AS = 4$ .

4.\* В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной 2, длины боковых рёбер  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  равны  $\sqrt{3}$ . Точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  — середины рёбер  $BC$ ,  $CC_1$ ,  $A_1C_1$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $M$ ,  $N$  и  $P$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

5.\* В основании пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 2$ ,  $BC = 1$ , точка  $M$  — середина ребра  $AB$ . Боковые рёбра пирамиды имеют одинаковую длину, высота пирамиды равна  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ . Через прямую  $DM$  параллельно  $SA$  проходит плоскость  $\alpha$ . Найдите расстояние от вершины  $C$  до плоскости  $\alpha$ .

6.\* В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит правильный треугольник  $ABC$  со стороной 1, плоскости граней  $SAB$  и  $ABC$  перпендикулярны,  $SA = SB$ , высота пирамиды равна 1. На ребре  $SA$  выбрана точка  $M$  так, что  $MA = 2SM$ , точка  $N$  — середина ребра  $SC$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через точки  $B$ ,  $M$  и  $N$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$ .

**7.\*** Ребро куба равно  $a$ . Найдите расстояние между прямыми, на которых расположены скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба.

**8.\*** Все рёбра правильной треугольной призмы равны  $a$ . Найдите расстояние между прямыми, на которых расположены скрещивающиеся диагонали двух боковых граней призмы.

**9.\*** В основании треугольной пирамиды  $ABCD$  лежит равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной длины 2. Длины боковых рёбер  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$  равны  $\sqrt{3}$ . Точки  $K$  и  $L$  — середины  $AC$  и  $BD$  соответственно. Найдите расстояние между прямыми  $BK$  и  $AL$ .

**10.\*\*** Дан куб с основанием  $ABCD$  и боковыми рёбрами  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ . Длины всех рёбер куба равны единице. Точки  $M$  и  $N$  — середины  $CD$  и  $CC_1$  соответственно. Найдите расстояние между прямыми  $AN$  и  $BM$ .

**11.\*\*** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  рёбра  $AB = 3$ ,  $AD = 3\sqrt{2}$ ,  $AA_1 = 2$ . Найдите длину перпендикулярной проекции отрезка  $C_1 D$  на плоскость  $B_1 C M$ , где  $M$  — середина ребра  $AD$ .

**12.\*** В основании параллелепипеда лежит параллелограмм  $ABCD$ , острый угол  $A$  которого имеет величину  $60^\circ$ , длины сторон  $AB$  и  $BC$  равны соответственно  $a$  и  $2a$ . Боковые рёбра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , и  $DD_1$  параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, их длина равна  $a$ . Через вершины  $A$ ,  $B_1$  и  $D_1$  параллелепипеда проведена плоскость. Найдите расстояние от вершины  $C$  до этой плоскости.

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Чему равно расстояние от точки  $A(2; -5; 6)$  до плоскости  $2x - y - 2z + 4 = 0$ ?

1)  $\frac{1}{3}$

2)  $\frac{2}{3}$

3) 1

4)  $\frac{4}{3}$

**1.2.** Расстояние от какой из перечисленных ниже точек до плоскости  $3x - 4y - 3z + 1 = 0$  минимально?

1)  $A(1; 1; 2)$

2)  $B(-1; 1; 2)$

3)  $C(1; -1; 2)$

4)  $D(1; 1; -2)$

**1.3.** Чему равно расстояние между параллельными плоскостями  $x - 2y + 3z + 1 = 0$  и  $x - 2y + 3z - 1 = 0$ ?

1)  $\sqrt{\frac{1}{7}}$

2)  $\sqrt{\frac{2}{7}}$

3)  $\sqrt{\frac{3}{7}}$

4)  $\sqrt{\frac{4}{7}}$



1.4.\* Рёбра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равны 2. Чему равно расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $CD$ ?

- 1) 1                      2)  $\sqrt{2}$                       3) 2                      4)  $2\sqrt{2}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Сколько на данной прямой может существовать точек, удалённых от заданной плоскости на заданное положительное расстояние?

- 1) ни одной                      2) только одна  
3) только две                      4) бесконечное множество

2.2. При каких значениях  $a$  расстояние между параллельными плоскостями  $x + y + z + 1 = 0$  и  $x + y + z + a = 0$  равно  $\sqrt{3}$ ?

- 1)  $a = 4$                       2)  $a = 2$                       3)  $a = 0$                       4)  $a = -2$

2.3. При каких значениях  $a$  плоскости с уравнениями  $x + 8y - az = 0$  и  $x + y + az = 0$  перпендикулярны?

- 1)  $a = -3$                       2)  $a = -1$                       3)  $a = 1$                       4)  $a = 3$

2.4.\* В пространстве через точку  $A$ , которая расположена на расстоянии 3 от заданной прямой  $m$ , проводится прямая  $a$ . Какие значения из указанных может иметь расстояние между прямыми  $a$  и  $m$ ?

- 1)  $\sqrt{10}$                       2)  $\sqrt{10} - 1$                       3)  $\sqrt{10} - 2$                       4)  $\sqrt{10} - 3$

## § 7. УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ ■

**7.1. Уравнение сферы.** Напомним, что в координатном пространстве с прямоугольной системой координат расстояние между точками  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Пусть центр  $F$  сферы имеет координаты  $(a; b; c)$ , а радиус сферы равен  $r$ . Обозначим через  $M(x; y; z)$  произвольную точку данной сферы. Тогда  $FM = r$ , то есть  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = r$ . Поскольку  $r > 0$ , последнее соотношение равносильно равенству

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \quad (1)$$

Полученное равенство верно для тех и только тех наборов  $(x; y; z)$  переменных, которые являются координатами точек данной сферы. Равенство (1) называется *уравнением сферы*.

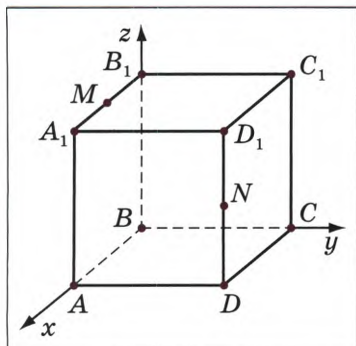


Рис. 1

**Пример 1.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 2. Найдём радиус сферы, проходящей через вершины  $C, C_1$  и через середины  $M$  и  $N$  рёбер  $A_1 B_1$  и  $DD_1$ .

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке  $B$  и направим ось  $Ox$  — по лучу  $BA$ , ось  $Oy$  — по лучу  $BC$ , ось  $Oz$  — по лучу  $BB_1$  (рис. 1). Найдём координаты точек:  $C(0;2;0)$ ,  $C_1(0;2;2)$ ,  $M(1;0;2)$ ,  $N(2;2;1)$ .

Запишем уравнение сферы в виде  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ . Поскольку указанные точки принадлежат сфере, то при подстановке в уравнение сферы вместо переменных  $x, y, z$  координат этих точек получаем

$$\begin{cases} a^2 + (2 - b)^2 + c^2 = r^2, \\ a^2 + (2 - b)^2 + (2 - c)^2 = r^2, \\ (1 - a)^2 + b^2 + (2 - c)^2 = r^2, \\ (2 - a)^2 + (2 - b)^2 + (1 - c)^2 = r^2. \end{cases}$$

Вычитая почленно первое равенство из всех остальных, получим систему из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 4 - 4c = 0, \\ (1 - 2a) + 4b - 4c = 0, \\ 4 - 4a + 1 - 2c = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим  $c = 1$ ,  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = \frac{9}{8}$ . Подставляя в уравнение  $a^2 + (2 - b)^2 + c^2 = r^2$  найденные значения  $a, b, c$ , получим  $r^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 + 1 = \frac{36 + 49 + 64}{8^2} = \frac{149}{8^2}$ , откуда  $r = \frac{1}{8}\sqrt{149}$ .

Ответ:  $\frac{1}{8}\sqrt{149}$ .

**Вопрос.** Чему равен радиус и каковы координаты центра сферы с уравнением  $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 5$ ?

**7.2.\*\* Касание сферы с плоскостью.** Когда сфера с центром  $F$  и радиусом  $r$  касается плоскости  $\alpha$ , расстояние от точки  $F$  до плоскости  $\alpha$  равно  $r$ . В прямоугольной системе координат такое равенство

можно записать с помощью соответствующей формулы и тем самым выразить условие касания сферы с плоскостью в виде некоторого соотношения.

**Пример 2.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$  плоскость  $\alpha$  проходит через вершину  $A$ , параллельна диагонали  $B_1 D$ , касается вписанной в куб сферы и пересекает ребро  $A_1 B_1$ . Найдём площадь сечения куба плоскостью  $\alpha$ .

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке  $A$ , направив ось  $Ox$  — по прямой  $AD$ , ось  $Oy$  — по прямой  $AB$ , ось  $Oz$  — по прямой  $AA_1$  (рис. 2). Обозначим через  $F$  центр сферы, вписанной в куб. Найдём координаты нужных точек:  $A(0;0;0)$ ,  $A_1(0;0;a)$ ,  $B_1(0;a;a)$ ,  $D(a;0;0)$ ,  $F\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ .

Отсюда  $\overline{B_1 D} = (a; -a; -a)$ .

Плоскость  $\alpha$  проходит через начало системы координат, поэтому уравнение плоскости  $\alpha$  будем искать в виде  $mx + ny + kz = 0$ , где вектор  $\vec{p} = (m; n; k)$  является нормалью к плоскости  $\alpha$ .

Поскольку  $\alpha \parallel \overline{B_1 D}$ , то нормаль к плоскости  $\alpha$  перпендикулярна вектору  $\overline{B_1 D}$ . Отсюда следует, что  $\vec{p} \cdot \overline{B_1 D} = 0$ ,  $ma - na - ka = 0$ ,  $m - n - k = 0$ .

Радиус вписанной в куб сферы равен  $\frac{a}{2}$ , поэтому, записывая расстояние от точки  $F$  до плоскости  $\alpha$ , получим:

$$\frac{\left| m \cdot \frac{a}{2} + n \cdot \frac{a}{2} + k \cdot \frac{a}{2} \right|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} = \frac{a}{2},$$

$|m + n + k| = \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}$ . В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} m - n - k = 0, \\ |m + n + k| = \sqrt{m^2 + n^2 + k^2}. \end{cases}$$

Отсюда  $m = n + k$ ,  $2|n + k| = \sqrt{2n^2 + 2k^2 + 2nk^2}$ ,  $4n^2 + 8nk + 4k^2 = 2n^2 + 2nk + 2k^2$ ,  $n^2 + 3nk + k^2 = 0$ . Выражая переменную  $n$  через  $k$ , приходим к двум случаям.

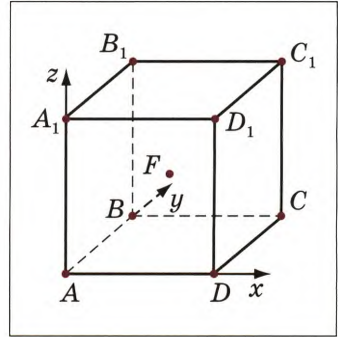


Рис. 2



I. Пусть  $n = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}k$ . Полагая  $k = -2$ , получим  $n = 3 + \sqrt{5}$ ,  $m = n + k = 1 + \sqrt{5}$ . Подставим эти значения в уравнение  $mx + ny + kz = 0$  плоскости  $\alpha$ :

$$(1 + \sqrt{5})x + (3 + \sqrt{5})y - 2z = 0. \quad (2)$$

Точки ребра  $A_1B_1$  имеют координаты  $(0; t; a)$ , где  $0 \leq t \leq a$ . Подставив координаты в уравнение (2), получим  $(3 + \sqrt{5})t - 2a = 0$ ,  $t = \frac{2a}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{2}$ . Следовательно, плоскость  $\alpha$  пересекает ребро  $A_1B_1$  в точке  $P\left(0; \frac{(3 - \sqrt{5})a}{2}; a\right)$ . Аналогично точки ребра  $A_1D_1$  имеют координаты  $(u; 0; a)$ , где  $0 \leq u \leq a$ . Подставив эти координаты в уравнение (2), получим  $(1 + \sqrt{5})u - 2a = 0$ ,  $u = \frac{2a}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)a}{2}$ . Следовательно, плоскость  $\alpha$  пересекает ребро  $A_1D_1$  в точке  $Q\left(\frac{(\sqrt{5} - 1)a}{2}; 0; a\right)$ .

Для нахождения площади  $S$  сечения выполним следующую работу:

$$\vec{m} = \overrightarrow{AP} = \left(0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}a; a\right); \quad \vec{n} = \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}a; 0; a\right);$$

$$\vec{m} = \left(\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1\right)a^2 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}a^2;$$

$$\vec{n} = \left(\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 + 1\right)a^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}a^2; \quad \vec{m} \cdot \vec{n} = a^2.$$

Площадь треугольника, сторонами которого являются векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , найдём по формуле

$$\begin{aligned} S_{\text{сеч}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\vec{m}^2 \cdot \vec{n}^2 - (\vec{m} \cdot \vec{n})^2} = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} - 1} = \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})a^2}{2}. \end{aligned}$$

II. Пусть  $n = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}k$ . Полагая  $k = 2$ , получим  $n = -3 + \sqrt{5}$ ,  $m = n + k = \sqrt{5} - 1$ . Подставив эти значения в уравнение  $mx + ny + kz = 0$  плоскости  $\alpha$ , получим:

$$(\sqrt{5} - 1)x + (-3 + \sqrt{5})y + 2z = 0. \quad (3)$$

Подставляя в уравнение (3) координаты  $(0; t; a)$  точек прямой  $A_1B_1$ , находим  $(-3 + \sqrt{5})t + 2a = 0$ ,  $t = \frac{2a}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})a}{2} > a$ . Следовательно, в этом случае плоскость  $\alpha$  пересекает продолжение ребра  $A_1B_1$ , а поэтому не соответствует условию задачи.

Ответ:  $\frac{(3 - \sqrt{5})a^2}{2}$ .

**Вопрос.** Как с помощью векторов можно вычислить площадь четырёхугольника?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Какой вид имеет уравнение сферы радиуса  $r$  с центром в точке  $F(a; b; c)$ ?
2. Как составить уравнение сферы, проходящей через четыре точки с заданными координатами?
- 3.\*\* Как при помощи координат записать условие параллельности плоскости и прямой?
- 4.\*\* Как при помощи координат записать условие касания плоскости со сферой?
- 5.\*\* Как при помощи координат вычислить площадь треугольника?

### Задачи и упражнения ■

1. Укажите координаты центра и радиус сферы, имеющей уравнение:
  - а)  $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 + (z + 5)^2 = 2$ ;
  - б)  $(x - \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{3})^2 + (z - \sqrt{5})^2 = 3$ ;
  - в)  $(x + 1 - \sqrt{2})^2 + (y - 2 + \sqrt{2})^2 + (z + 1 + 2\sqrt{2})^2 = 8$ .
- 2.\* Найдите множество центров всех сфер данного радиуса, которые проходят через заданную точку.
3. Преобразуйте к виду  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = t$  следующее уравнение:
  - а)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y + 2z = 0$ ;
  - б)  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 10y - 6z + 40 = 0$ ;
  - в)  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y + z + 1 = 0$ ;
  - г)  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 0$ .

В каких случаях соответствующее уравнение определяет сферу?

4.\*\* Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1. Точка  $M$  лежит на луче  $CA$ ,  $CM = 2\sqrt{2}$ . Точки  $P$  и  $Q$  — середины рёбер  $D_1 A_1$  и  $A_1 B_1$  соответственно. Найдите радиус сферы, проходящей через точки  $M, A, P, Q$ .

5. В правильной пирамиде  $SABCD$  в основании лежит квадрат  $ABCD$  со стороной 2, боковые рёбра пирамиды равны  $\sqrt{6}$ . Найдите радиус сферы, проходящей через вершины  $A, C$  и через середины рёбер  $SB$  и  $SD$ .

6.\*\* Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1. Найдите радиус сферы, которая касается граней  $ABCD, AA_1 B_1 B, AA_1 D_1 D$  и проходит через середину ребра  $CC_1$ .

7.\*\* В основании пирамиды  $SABC$  лежит правильный треугольник со стороной 4, ребро  $SA$  перпендикулярно основанию  $SA = 2$ . Найдите радиус сферы, центр которой находится на прямой  $SA$ , если известно, что сфера проходит через середины рёбер  $BC$  и  $SC$ .

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Укажите координаты центра сферы, заданной уравнением  $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 6x - 2y + 2z + 1 = 0$ .

- 1)  $O(3; 1; -1)$       2)  $O\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$       3)  $O\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$       4)  $O\left(\frac{3}{8}; \frac{1}{8}; -\frac{1}{8}\right)$

1.2. Укажите радиус сферы  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 4z + 15 = 0$ .

- 1) 1      2) 2      3) 3      4) 4

1.3. При каком из указанных значений параметра  $a$  уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + az + 6 = 0$  определяет единственную точку?

- 1)  $a = -3$       2)  $a = -1$       3)  $a = 2$       4)  $a = 4$

1.4.\*\* Чему равно наименьшее расстояние от точек сферы с уравнением  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$  до плоскости  $x + 2y - 2z + 1 = 0$ ?

- 1) 1      2) 2      3) 3      4) 4

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Укажите из перечисленных точек те, которые лежат на сфере с уравнением  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 8$ .

- 1)  $(-1; 0; 1)$       2)  $(1; -2; 3)$       3)  $(1; 2; 1)$       4)  $(1; 2; 4)$



**2.2.** Укажите из перечисленных уравнений те, которые задают сферы, касающиеся плоскости  $x + y + z = 3$ .

1)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2)  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

3)  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 3$

4)  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 12$

**2.3.** Выберите из перечисленных уравнений те, которые определяют сферу.

1)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y + 2z = 0$

2)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 7 = 0$

3)  $x^2 + 4y^2 + z^2 - 8x + 6y + 2z = 0$

4)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 1 = 0$

**2.4.** Выберите из перечисленных точек те, которые лежат внутри сферы  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 8$ .

1)  $(-1; 0; 1)$

2)  $(1; -2; 3)$

3)  $(1; -1; 5)$

4)  $(1; 2; 1)$

## Мини-исследования к главе 6 ■

### Мини-исследование 18

В пространстве заданы точки  $A$  и  $B$ . В зависимости от положительного числа  $k$  найдите соответствующее множество всех таких точек  $M$  пространства, для которых  $AM : MB = k$ .

### Мини-исследование 19

Даны координаты концов отрезка и уравнение сферы. Как определить, сколько общих точек имеет этот отрезок с данной сферой?



# Глава 7

## УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫМИ

В этой главе вы познакомитесь с понятием первообразной и некоторыми применениями первообразных в задачах естествознания.

### ■ § 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ

**1.1. Понятие первообразной.** Многие задачи естествознания и техники сводятся к нахождению функции  $F(x)$  по её производной  $f(x) = F'(x)$ .

**Пример 1.** Пусть материальная точка движется прямолинейно с постоянной скоростью  $v$  и требуется найти закон движения этой точки, то есть функцию  $S(t)$ , выражающую зависимость пройденного пути  $S$  от времени  $t$ .

Поскольку  $v = S'(t)$ , то в данном примере по известной производной требуется найти функцию  $S(t)$ .

Заметим, что эта задача имеет бесконечное множество решений. Например, функции  $vt$ ,  $vt + 1$ ,  $vt - \frac{1}{2}$ ,  $vt + 3$ , ... являются решениями, так как

$$(vt)' = (vt + 1)' = \left(vt - \frac{1}{2}\right)' = (vt + 3)' = \dots = v.$$

Функция  $F(x)$  называется первообразной функции  $f(x)$  на заданном промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Рассмотренные в примере 1 функции  $vt$ ,  $vt + 1$ ,  $vt - \frac{1}{2}$  являются первообразными функции  $f(t) = v$  на промежутке  $(-\infty; \infty)$ .

**Вопрос.** Как проверить, что функция  $F(x) = \frac{x^5}{5}$  есть первообразная функции  $f(x) = x^4$  на множестве всех действительных чисел?

**1.2. Признак постоянства функции.** При нахождении первообразных важную роль играет следующий признак постоянства функции.

Если производная  $F'(x)$  функции  $F(x)$  для каждого значения из промежутка  $D$  равна нулю, то функция  $F(x)$  является постоянной на  $D$ .

Выберем какое-нибудь число  $a$  из промежутка  $D$ . Тогда по теореме Лагранжа для любого другого числа  $x$  из промежутка найдётся такое число  $c$ , заключённое между  $x$  и  $a$ , что  $F(x) - F(a) = F'(c)(x - a)$ .

Поскольку число  $c$  принадлежит промежутку, то  $F'(c) = 0$ . Следовательно,  $F(x) - F(a) = 0$ .

Таким образом,

$$F(x) = F(a),$$

то есть функция  $F$  является постоянной на  $D$ .

**Вопрос.** Верно ли утверждение, обратное к теореме этого пункта?

**1.3. Связь между первообразными непрерывной функции.** В этом пункте рассмотрим *основное свойство* первообразных.

Любые две первообразные  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  одной и той же функции  $f(x)$ , определённой на некотором промежутке, отличаются друг от друга на этом промежутке на постоянное слагаемое.

По условию  $F_1'(x) = f(x)$  и  $F_2'(x) = f(x)$ . Отсюда

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Поэтому в силу признака постоянства функции разность  $F_1(x) - F_2(x)$  на промежутке совпадает с некоторой постоянной  $C$ , то есть

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Если  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  и  $C$  — произвольная постоянная, то функция

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

также является первообразной функции  $f(x)$ .

Действительно,  $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ .

Нахождение всех первообразных данной функции называется *интегрированием*. Произвольная постоянная  $C$  в формуле  $\Phi(x) = F(x) + C$  называется *постоянной* или *константой* интегрирования.

В некотором смысле интегрирование является операцией, обратной к операции дифференцирования.

**Пример 2.** Для любого действительного числа  $x$  производная функции  $y = \sin x$  равна  $\cos x$ , поэтому всякая первообразная  $F(x)$  функции  $f(x) = \cos x$  на всей числовой прямой имеет вид  $F(x) = \sin x + C$ , где  $C$  — постоянная интегрирования.

**Пример 3.** Поскольку  $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$  на промежутке  $[0; \infty)$ , то  $\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = x^{\frac{1}{2}}$ , и всякая первообразная функции  $f(x) = \sqrt{x}$  определена на промежутке  $[0; \infty)$  и имеет вид  $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ , где  $C$  — постоянная интегрирования.



**Вопрос.** Какие первообразные имеет функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  на промежутке  $(0; \infty)$ , если известно, что на этом промежутке  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ?

**1.4.\*\* Связь между первообразными разрывной функции.** Заметим, что иногда рассматривают функцию  $f(x)$ , заданную на двух или нескольких промежутках. В этом случае на каждом из промежутков можно найти некоторую первообразную функции  $f(x)$  и тем самым получить функцию  $F(x)$ , определённую на том же множестве, на котором определена функция  $f(x)$ .

**Пример 4.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  рассматривается на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$ . Нетрудно проверить, что если  $F(x) = -\frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$ , то  $F'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ . При этом равенство  $F'(x) = \frac{1}{x^2}$  верно как при  $x > 0$ , так и при  $x < 0$ . Из предыдущего пункта следует, что функция  $\Phi_1(x) = -\frac{1}{x} + C_1$  будет первообразной для функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  на промежутке  $(0; \infty)$  при любом выборе числа  $C_1$ , а функция  $\Phi_2(x) = F(x) + C_2$  является первообразной функции  $f(x)$  на промежутке  $(-\infty; 0)$ . Заметим, что на разных промежутках можно выбирать как одинаковые, так и различные константы интегрирования. Например, пусть  $\Phi_1(x) = F(x) + 3 = -\frac{1}{x} + 3$  при  $x > 0$  и  $\Phi_2(x) = F(x) - 1 = -\frac{1}{x} - 1$  при  $x < 0$ . Тогда функция

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 3, & \text{если } x > 0, \\ -\frac{1}{x} - 1, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

задаваемая разными формулами на разных промежутках, является первообразной функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  на всей области определения  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ .

**Вопрос.** Как показать, что функции вида  $F(x) = -\frac{1}{5x^5} + C$  являются первообразными функции  $f(x) = \frac{1}{x^6}$ ?

**1.5. Таблица первообразных.** Для нахождения первообразных используется следующая таблица, в которой особое внимание следует обратить на области определения.

	Функция	Множество первообразных с областью определения
1	$f(x) = k$ для постоянной величины $k$	$F(x) = kx + C, x \in (-\infty; \infty)$
2	$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, x \in (-\infty; \infty)$
3	$f(x) = x^\alpha,$ $\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha < -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C_k$ , где $C_k = C_1$ при $x \in (-\infty; 0)$ , $C_k = C_2$ при $x \in (0; \infty)$
4	$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x  + C_k$ , где $C_k = C_1$ при $x \in (-\infty; 0)$ , $C_k = C_2$ при $x \in (0; \infty)$
5	$f(x) = x^\alpha,$ $\alpha \notin \mathbb{Z}$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ , $x \in [0; \infty)$ , когда $\alpha > 0$ , $x \in (0; \infty)$ , когда $\alpha < 0$
6	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C, x \in (-\infty; \infty)$
7	$f(x) = a^x$ для постоянной величины $a$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, x \in (-\infty; \infty)$
8	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C, x \in (-\infty; \infty)$
9	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C, x \in (-\infty; \infty)$
10	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x + C_k, k$ — целое число, $x \in \left( \frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2} \right)$
11	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x + C_k, k$ — целое число, $x \in (k\pi; (k+1)\pi)$
12	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x + C, x \in (-\infty; \infty)$
13	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \operatorname{arcsin} x + C, x \in (-1; 1)$

Заметим, что константы интегрирования  $C, C_1, C_2, C_k$  могут быть одинаковыми, а могут быть различными. При этом предполагается, что первообразная функции определена при тех же значениях  $x$ , при которых определена и сама функция.

Многие первообразные можно найти, используя определение производной.

**Пример 5.** Покажем, что функция  $F(x) = \ln|x|$ , определённая при  $x \neq 0$ , есть первообразная функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Действительно, если  $x > 0$ , то  $|x| = x$  и  $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

Если же  $x < 0$ , то  $|x| = -x$  и  $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ .

**Вопрос.** Как проверить, что множество  $\{\sin x + C, \text{ где } C \in R\}$  есть множество первообразных функции  $f(x) = \cos x$ ?

**1.6.\* Неопределённый интеграл.** Множество всех первообразных функции  $f(x)$ , определённой на некотором промежутке, называется *неопределённым интегралом* от функции  $f(x)$  и записывается в виде

$$\int f(x) dx$$

(читается: «неопределённый интеграл эф от икс дэ икс»).

Если известна какая-либо одна из первообразных функций  $F(x)$  функции  $f(x)$ , то неопределённый интеграл от функции  $f(x)$  является множеством функций  $\{F(x) + C, \text{ где } C \in R\}$ . Однако традиционно используют запись

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где справа от интеграла приведён общий вид первообразных функции  $f(x)$ ,  $C$  — произвольная постоянная.

Иногда для краткости неопределённый интеграл называют интегралом, когда из текста ясно, что речь идёт о неопределённых интегралах.

**Вопрос.** Как проверить, что  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ ?

## ■ Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение первообразной функции данной функции  $f(x)$ , рассматриваемой на промежутке.

2. Сформулируйте и докажите признак постоянства функции.



3. Докажите основное свойство первообразных функций.

4. Как читается символ  $\int f(x)dx$  и что означает равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + C?$$

### Задачи и упражнения ■

1. Докажите, что на промежутке  $(-\infty; \infty)$  функция  $F(x)$  есть первообразная функции  $f(x)$ , если:

а)  $F(x) = x$ ,  $f(x) = 1$ ;

б)  $F(x) = x^2$ ,  $f(x) = 2x$ ;

в)  $F(x) = x^6$ ,  $f(x) = 6x^5$ ;

г)  $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ ,  $f(x) = \cos 2x$ ;

д)  $F(x) = \sin 2x$ ,  $f(x) = 2\cos 2x$ ;

е)  $F(x) = \sin^2 x$ ,  $f(x) = \sin 2x$ .

2. Докажите, что функция  $F(x)$  на указанном промежутке есть первообразная функции  $f(x)$ , если:

а)  $F(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x \in (0; \infty)$ ;

б)  $F(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ;

в)  $F(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $x \in (0; \pi)$ ;

г)  $F(x) = -\frac{1}{x^3}$ ,  $f(x) = \frac{3}{x^4}$ ,  $x \in (0; \infty)$ ;

д)  $F(x) = e^{2x}$ ,  $f(x) = 2e^{2x}$ ,  $x \in (-\infty; \infty)$ .

3. Найдите такую первообразную функции  $f(x) = e^x$ , что график первообразной пересекает ось  $Ox$  в точке  $x = 1$ .

4. Для функции  $f(x)$  найдите такую её первообразную, что график первообразной проходит через заданную точку  $M$ , если:

а)  $f(x) = x^3$ ,  $M(2; 1)$ ;    б)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ,  $M\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ ;    в)  $f(x) = \cos x$ ,  $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

5. Докажите равенство:

а)  $\int dx = x + C$ ;

б)  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ ;

в)  $\int \frac{1}{2^x} = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C$ ;

г)  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ .

■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Какая функция является первообразной функции  $f(x) = \sin x$ ?

- 1)  $5 + \sin x$                       2)  $6 - \cos x$                       3)  $7 - \sin x$                       4)  $8 + \cos x$

**1.2.** Какая функция является первообразной функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ ?

- 1)  $\frac{1}{x}$                                       2)  $e^x$                                       3)  $\ln x + 5$                                       4)  $6 - \lg x$

**1.3.** Какая функция является первообразной функции  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ?

- 1)  $\lg x$                                       2)  $\operatorname{ctg} x$                                       3)  $-\lg x$                                       4)  $-\operatorname{ctg} x$

**1.4.** Чему равен  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$ ?

- 1)  $-\operatorname{ctg} x$                                       2)  $\cos x + C$                                       3)  $-\lg x + C$                                       4)  $C - \operatorname{ctg} x$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из приведённых функций являются первообразными функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ?

- 1)  $F(x) = \operatorname{arctg} x$                                       2)  $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$   
3)  $F(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$                                       4)  $F(x) = \arcsin x$

**2.2.** Какие из приведённых функций являются первообразными функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ?

- 1)  $F(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$                       2)  $F(x) = \frac{x-1}{x}$                       3)  $F(x) = \frac{2x-1}{x}$                       4)  $F(x) = \frac{5x-3}{3x}$

**2.3.** Какие из равенств являются верными?

- 1)  $\int x dx = x^2 + C$                                       2)  $\int 3x^3 dx = \frac{4}{3}x^4 + C$   
3)  $\int \sin x dx = \cos x + C$                                       4)  $\int \cos x dx = \sin x + C$

**2.4.** Какие из указанных функций  $F(x)$  являются первообразными функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  на промежутке  $(-\infty; 0)$ ?

- 1)  $F(x) = \ln 2x$                                       2)  $F(x) = 2 \ln \sqrt{-x}$   
3)  $F(x) = -\ln \frac{1}{x}$                                       4)  $F(x) = -\ln \left(-\frac{1}{x}\right)$

## § 2. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ ■

**2.1. Первообразная суммы функций.** При вычислении первообразных используют таблицу первообразных из первого параграфа и руководствуются следующими основными правилами.

**Правило 1.** Если  $F(x)$  есть первообразная функции  $f(x)$ , а  $G(x)$  — первообразная функции  $g(x)$ , то  $F(x) + G(x)$  есть первообразная функции  $f(x) + g(x)$ .

Действительно, так как  $F'(x) = f(x)$  и  $G'(x) = g(x)$ , то

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

**Пример 1.** Из таблицы первообразных получаем, что первообразной функции  $f(x) = \cos x$  является функция  $F(x) = \sin x$ , а одной из первообразных функции  $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  на интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  является функция  $G(x) = \operatorname{tg} x$ . Поскольку  $\frac{\cos^3 x + 1}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$ , то на интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  одной из первообразных функции  $h(x) = \frac{\cos^3 x + 1}{\cos^2 x}$  является функция  $H(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$ .

Пусть  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$ ,  $G(x)$  — первообразная функции  $g(x)$ . Правило 1 показывает, что, складывая различные первообразные  $F(x) + C_1$  функции  $f(x)$  с различными первообразными  $G(x) + C_2$  функции  $g(x)$ , мы будем получать первообразные  $F(x) + G(x) + C_3$  функции  $f(x) + g(x)$ , где  $C_3 = C_1 + C_2$ . Заметим, что таким образом можно получить любую постоянную  $C_3$ , подбирая подходящие постоянные  $C_1$  и  $C_2$ .

Отсюда следует, что, складывая всевозможные первообразные функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , мы получим всевозможные первообразные функции  $f(x) + g(x)$ . Поэтому первое правило кратко можно сформулировать так: сумма неопределённого интеграла одной функции и неопределённого интеграла другой функции есть интеграл от суммы данных функций:

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx.$$

**Вопрос.** Как найти одну из первообразных функции  $h(x) = \cos x + \sin x$ ?

## 2.2. Первообразная функции $kF(x)$ , где $k$ — постоянное число.

**Правило 2.** Если  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  и  $k$  — постоянная, то функция  $kF(x)$  есть первообразная функции  $kf(x)$ .

Действительно,  $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$ , так как постоянный множитель можно выносить за знак производной.



**Пример 2.** Поскольку одна из первообразных функции  $f(x) = x^4$  есть  $F(x) = \frac{x^5}{5}$ , то функция  $G(x) = x^5$  будет одной из первообразных функции  $g(x) = 5x^4$ .

При умножении на ненулевое число  $k$  всевозможных первообразных функции  $f(x)$  мы получим всевозможные первообразные функции  $k \cdot f(x)$ . Поэтому правило 2 кратко можно сформулировать так: постоянный ненулевой множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

**Вопрос.** Как найти одну из первообразных функции  $h(x) = 2\cos x + 3\sin x$ ?

### 2.3. Линейная замена переменной.

**Правило 3.** Если  $F(t)$  — первообразная функции  $f(t)$  и  $t = kx + a$  — линейная функция, причём  $k$  — постоянная, отличная от нуля, то  $\frac{1}{k}F(kx + a)$  есть первообразная функции  $f(kx + a)$ .

Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + a)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + a) \cdot k = f(kx + a).$$

**Пример 3.** Найдём первообразную функции  $h(x) = \sin(3x + 2)$ .

Положим,  $t = 3x + 2$ . Первообразная функции  $\sin t$  есть  $(-\cos t)$ . По правилу 3 функция  $H(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x + 2)$  является первообразной функции  $h(x) = \sin(3x + 2)$ .

**Вопрос.** Как найти одну из первообразных функции  $h(x) = \cos 2x + \sin 3x$ ?

**2.4.\*\* Правило замены переменной.** Правило 3 допускает следующее обобщение.

**Правило 4.** Если  $F(t)$  — первообразная функции  $f(t)$  и  $t = g(x)$  — дифференцируемая функция, то  $F(g(x))$  — первообразная функции  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ .

По правилу вычисления производной сложной функции имеем:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Но  $F'(t) = f(t)$ . Следовательно,

$$(F(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Пример 4.** Пусть  $F(t) = \ln|t|$  — первообразная функции  $\frac{1}{t}$  и  $t = \sin x$  — функция, имеющая производную  $t'(x) = \cos x$ . По правилу 4,  $G(x) = \ln|\sin x|$  есть первообразная функции  $g(x) = f(t(x)) \cdot t'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{tg} x$ .

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $F(x) = e^{\sin x}$  — первообразная функции  $f(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Сформулируйте и докажите правило нахождения первообразной суммы  $f(x) + g(x)$ .

2. Сформулируйте и докажите правило нахождения первообразной произведения  $k \cdot f(x)$  ( $k$  — постоянная).

3. Сформулируйте и докажите правило нахождения первообразной функции  $f(kx + a)$  ( $k \neq 0$ ).

4. Сформулируйте и докажите правило нахождения первообразной функции  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ .

5.\* Докажите формулу  $\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx$ .

6.\* Докажите формулу  $\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ , где  $k$  — ненулевая постоянная.

### Задачи и упражнения ■

1. Найдите первообразную функции  $f(x)$ :

а)  $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$ ;

б)  $f(x) = kx + a$ ;

в)  $f(x) = mx^2 + nx + k$ ;

г)  $f(x) = \cos(3x - 2)$ ;

д)  $f(x) = 2\sin \frac{x}{2} - \cos 5x$ ;

е)  $f(x) = (2x - 1)^{10}$ ;

ё)  $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x+3}}$ ;

ж)  $f(x) = \frac{3}{\sin^2 5x}$ ;

з)  $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ;

и)  $f(x) = e^{3x}$ .

2. Найдите все первообразные заданной функции на соответствующих промежутках области определения:

а)  $f(x) = -\frac{1}{x^2} - 4x$ ;

б)  $f(x) = \frac{3}{\cos^2 5x}$ ;

в)  $f(x) = x - \cos 2x$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ ;

д)  $f(x) = 2^{3x}$ ;

е)  $f(x) = 2^{\cos x} \cdot \sin x$ ;

ё)  $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ ;

ж)  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ ;

з)  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ .

3. Для функции  $f(x)$  найдите первообразную  $F(x)$ , принимающую заданное значение при указанном значении  $x$ , если:

а)  $f(x) = x - 2$ ,  $F(2) = 0$ ;

б)  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $F(3) = 12$ ;

в)  $f(x) = \sin(x + 1)$ ,  $F(-1) = 0$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

4. Найдите на соответствующих промежутках:

а)  $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ ;

б)  $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ ;

в)  $\int (1 - \sin 3x) dx$ ;

г)  $\int (\sin 2x + \cos 2x) dx$ ;

д)  $\int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx$ ;

е)  $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ .

ё)  $\int 0 dx$ ;

ж)  $\int e^{2x} dx$ .

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какой формулой задаётся множество всех первообразных функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ?

1)  $F(x) = -\frac{1}{x} + C$  2)  $F(x) = \frac{1}{x} + C$  3)  $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C$  4)  $F(x) = \frac{3}{x^3} + C$

1.2. Для какой из первообразных  $F(x)$  функции  $f(x) = 6x + 3$  выполняется равенство  $F(-2) = 4$ ?

1)  $F(x) = 3x^2 + 3x + 2$

2)  $F(x) = 3x^2 + 3x + 4$

3)  $F(x) = 3x^2 + 3x - 4$

4)  $F(x) = 3x^2 + 3x - 2$

1.3. Какой формулой задаётся множество всех первообразных функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ ?



$$1) F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x-2} + C$$

$$2) F(x) = 2\sqrt{3x-2} + C$$

$$3) F(x) = \frac{3}{2}\sqrt{3x-2} + C$$

$$4) F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x-2} + C$$

**1.4.** Чему равен неопределённый интеграл от функции  $f(x) = e^{5x}$ ?

$$1) 5e^{5x} + C$$

$$2) \frac{1}{5}e^{5x} + C$$

$$3) \frac{1}{\ln 5}e^{5x} + C$$

$$4) e^{5x} + C$$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из приведённых функций являются первообразными функции  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ?

$$1) F(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$2) F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

$$3) F(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$$

$$4) F(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x$$

**2.2.** Какие из равенств являются верными?

$$1) \int (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{2} + x^2 + C$$

$$2) \int (\sin x + \cos x) dx = \sin x - \cos x + C$$

$$3) \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + C$$

$$4) \int \frac{1+x^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$$

**2.3.** Какие из формул задают множество всех первообразных функции

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 3\sin 2x?$$

$$1) F(x) = \frac{3}{2}\cos 2x - \operatorname{ctg} x + C$$

$$2) F(x) = \operatorname{tg} x + \frac{3}{2}\cos 2x + C$$

$$3) F(x) = \operatorname{tg} x - \frac{3}{2}\cos 2x + C$$

$$4) F(x) = \frac{3}{2}\cos 2x - \operatorname{tg} x + C$$

**2.4.** Какие из формул задают неопределённый интеграл от функции  $f(x) = 3\cos 4x$ ?

$$1) F(x) = -12\sin 4x + C$$

$$2) F(x) = \frac{3}{4}\sin 4x + C$$

$$3) F(x) = \frac{1}{12}\sin 4x + C$$

$$4) F(x) = \sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x + C$$

## ■ § 3. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫМИ

### 3.1. Пример дифференциального уравнения.

**Пример 1.** Предположим, что нам нужно установить закон движения точки по прямой, если известно, что точка движется с постоянной скоростью  $v = 4$  км/ч и в момент времени  $t_0 = 0,5$  часа находится на расстоянии 3 км от начальной точки отсчёта.

Для ответа на этот вопрос обозначим через  $S(t)$  функцию, выражающую зависимость от времени  $t$  расстояния между движущейся точкой и начальной точкой отсчёта. Тогда по определению скорости для каж-

дого момента времени  $t$  выполняется равенство  $S'(t) = 4$ . Это равенство задаёт связь между производной от неизвестной функции  $S(t)$  и известной функцией  $v(t) = 4$ . Следовательно, мы должны решить уравнение, в котором неизвестная функция  $S(t)$  входит со знаком производной, и при этом выбрать такое из решений  $S(t)$ , что выполняется равенство  $S(0,5) = 3$ .

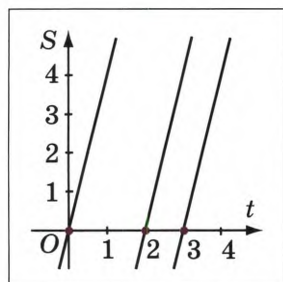


Рис. 1

По основному свойству первообразных все решения уравнения  $S'(t) = 4$  можно задать формулой  $S(t) = 4t + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

На рис. 1 изображены графики некоторых решений уравнения  $S'(t) = 4$ .

Из всех найденных функций  $S(t) = 4t + C$  нужно выбрать такую функцию, что  $S(0,5) = 3$ , то есть  $S(0,5) = 4 \cdot 0,5 + C = 3$ . Отсюда  $C = 1$ , а поэтому искомый закон движения точки имеет вид  $S(t) = 4t + 1$  (рис. 2).

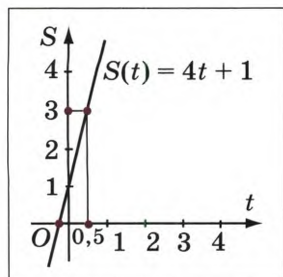


Рис. 2

**Вопрос.** На каком расстоянии от начальной точки отсчёта будет находиться движущаяся точка из примера 1 через 8 часов?

**3.2. Интегральные кривые.** Уравнение  $S'(t) = 4$  из пункта 3.1 является одним из уравнений вида

$$y'(x) = f(x),$$

где  $f(x)$  — заданная функция, а  $y$  — неизвестная функция, которую требуется найти.

**Уравнения, содержащие неизвестную функцию и её производные, называются дифференциальными уравнениями.**

На каждом из промежутков области определения функции  $f(x)$  все решения дифференциального уравнения можно найти с помощью первообразных.

В частности, если для каждого  $x$  из промежутка  $D$  выполняется равенство  $y'(x) = f(x)$ , то по определению функция  $y(x)$  есть первообразная функции  $f(x)$ . Найдя одну из первообразных  $F(x)$  функции  $f(x)$  на промежутке  $D$ , все решения уравнения  $y' = f(x)$  на этом промежутке можно записать в виде

$$y = F(x) + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

**Пример 2.** Найти все решения уравнения  $y' = \frac{1}{x^2}$  на промежутке  $(0; \infty)$ .

Поскольку для функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  одной из первообразных является функция  $F(x) = -\frac{1}{x}$ , то множество функций  $y = -\frac{1}{x} + C$ , где  $C$  — произвольная постоянная, на промежутке  $(0; \infty)$  задаёт все соответствующие решения. На рис. 3 изображены некоторые из решений.

Решения уравнения, содержащего неизвестную функцию и её производные, иногда называют *интегралами* этого уравнения, а процесс решения — *интегрированием*. Графики полученных решений называют также *интегральными кривыми*.

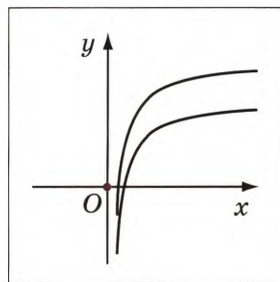


Рис. 3

**Вопрос.** Какие решения имеет дифференциальное уравнение  $y'(x) = \frac{1}{x^2}$  на промежутке  $(-\infty; 0)$ ?

### 3.3. Движение точки по прямой.

**Пример 3.** Пусть точка движется по прямой с постоянным ускорением  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>, в момент времени  $t_0 = 3$  с находится на расстоянии  $S_0 = 4$  м от начала отсчёта и при этом имеет скорость  $v_0 = 5$  м/с.

Для установления закона движения обозначим через  $S(t)$  расстояние от начала отсчёта до движущейся точки. Тогда  $S'(t) = v(t)$ , где  $v(t)$  — скорость точки в момент времени  $t$ , и  $v'(t) = a(t)$ , где  $a(t)$  — ускорение точки в момент времени  $t$ . По условию, ускорение постоянно,  $a(t) = 2$ .



Следовательно, чтобы найти скорость, нужно найти решения уравнения

$$v'(t) = 2,$$

которое решается аналогично тому, как это рассмотрено в пункте 3.1. В результате получаем  $v(t) = 2t + C_1$ , где  $C_1$  — постоянная. Для определения  $C_1$  подставим  $t_0 = 3$  и получим  $v(t_0) = 5 = 2t_0 + C_1 = 6 + C_1$ . Отсюда  $C_1 = -1$  и  $v(t) = 2t - 1$ .

После этого уравнение  $S'(t) = v(t)$  запишется в виде

$$S'(t) = 2t - 1.$$

По правилам нахождения первообразных получим  $S(t) = t^2 - t + C_2$ , где  $C_2$  — постоянная. Для определения  $C_2$  подставим  $t_0 = 3$ . Из равенства  $S(t_0) = 4 = 3^2 - 3 + C_2$  следует, что  $C_2 = -2$ . В итоге  $S(t) = t^2 - t - 2$ .

Найденное решение представляет собой функцию, график которой изображён на рис. 4.

**Вопрос.** В каком месте находилась движущаяся точка в момент времени  $t_1 = 1$ ?

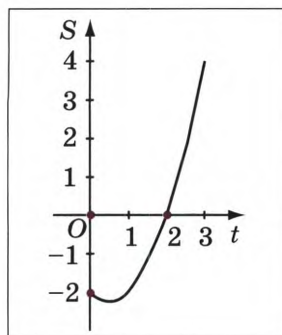


Рис. 4

### 3.4.\* Задача о полёте снаряда.

**Пример 4.** Рассмотрим задачу о полёте снаряда, выброшенного из орудия с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Для простоты силу сопротивления воздуха учитывать не будем.

Точку вылета снаряда из ствола примем за начало координат и будем считать, что движение происходит в плоскости  $Oxy$ , причём ось  $Ox$  выбрана горизонтально, а ось  $Oy$  направлена вертикально вверх (рис. 5).

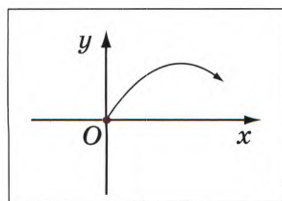


Рис. 5

В каждый момент времени  $t$  движение снаряда является результатом сложения двух движений: движения со скоростью  $v_x(t)$  вдоль оси  $x$  под действием силы  $F_x(t)$  и движения со скоростью  $v_y$  вдоль оси  $y$  под действием силы  $F_y(t)$ . Поскольку на снаряд действует только сила тяжести, направленная вертикально вниз, то  $F_x(t) = 0$  и  $F_y(t) = -mg$ , где  $m$  — масса снаряда,  $g$  — ускорение свободного падения.

По закону Ньютона

$$mv'_x(t) = 0 \text{ и } mv'_y(t) = -mg.$$

Отсюда  $v'_x(t) = 0$ ,  $v'_y(t) = -g$ .

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению двух дифференциальных уравнений  $v'_x(t) = 0$  и  $v'_y(t) = -g$ . Интегрируя, найдём

$$v_x(t) = C_1, \quad v_y(t) = -gt + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — соответствующие константы интегрирования.

В момент времени  $t = 0$  имеем:  $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_y(0) = v_0 \sin \alpha$ . Следовательно,  $C_1 = v_0 \cos \alpha$ ,  $C_2 = v_0 \sin \alpha$ . В результате получаем

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t) = -gt + v_0 \sin \alpha.$$

Поскольку в момент времени  $t$  горизонтальная составляющая  $v_x(t)$  скорости  $v(t)$  является производной  $x'(t)$  координаты  $x(t)$  снаряда по оси  $Ox$ , вертикальная составляющая  $v_y(t)$  скорости  $v(t)$  является производной  $y'(t)$  координаты  $y(t)$  снаряда по оси  $Oy$ , то

$$x'(t) = v_0 \cos \alpha, \quad y'(t) = -gt + v_0 \sin \alpha.$$

Интегрируя, находим

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t + C_3, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + C_4,$$

где  $C_3$  и  $C_4$  — соответствующие постоянные интегрирования.

При  $t = 0$  имеем  $x(0) = C_3 = 0$ ,  $y(0) = C_4 = 0$ . Подставляя  $C_3 = 0$  и  $C_4 = 0$  в уравнения, получим

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t.$$

Выражая  $t$  из первого соотношения, получим  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ . Подставляя  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  во второе соотношение, получим уравнение траектории снаряда в декартовых координатах  $x$  и  $y$ :

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Таким образом, траекторией движения снаряда является дуга параболы.

**Вопрос.** Как вычислить дальность полёта снаряда?

### 3.5.\*\* Задача о выравнивании температур.

**Пример 5.** Вода охлаждается за 10 минут от  $100^\circ$  до  $60^\circ$ . Температура в комнате  $20^\circ$ . Через какое время вода остынет до  $25^\circ$ ?

Пусть  $T(t)$  — температура воды в момент времени  $t$ . По условию

$$T(0) = 100^\circ, \quad T(10) = 60^\circ.$$

Из физики известно, что скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Поэтому

$$T'(t) = k(T(t) - 20),$$

где  $k$  — постоянная. Перепишем теперь полученное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{T'(t)}{T(t) - 20} = k.$$

Интегрируя правую и левую части по переменной  $t$  и учитывая, что  $T > 20$ , получим

$$\ln(T(t) - 20) = kt + c, \quad T(t) - 20 = e^{kt+c}, \quad T(t) = e^c \cdot e^{kt} + 20,$$

где  $c$  — постоянная интегрирования.

Записывая  $c$  в виде  $c = \ln a$  для подходящего числа  $a$ , будем иметь

$$T(t) = ae^{kt} + 20.$$

Полагая  $t = 0$ , получаем  $a + 20 = 100$ ,  $a = 100 - 20 = 80$ . В результате  $T(t) = 80 \cdot e^{kt} + 20$ .

По условию  $T(10) = 60$ , откуда  $60 = 80 \cdot e^{10k} + 20$ ,  $e^{10k} = \frac{1}{2}$ ,  $10k = -\ln 2$ . Следовательно,  $k = -\frac{\ln 2}{10}$ ,  $e^{kt} = 2^{-\frac{t}{10}}$ . Таким образом,

$$T(t) = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} + 20.$$

Время  $t_1$  остывания воды до  $25^\circ$  найдём из уравнения

$$25 = 80 \cdot 2^{-\frac{t_1}{10}} + 20.$$

Решая его, получим  $2^{-4} = 2^{-\frac{t_1}{10}}$ , откуда  $t_1 = 40$  (мин).

**Вопрос.** Через сколько минут после начала охлаждения вода в комнате остынет до  $30^\circ$ ?

**3.6.\*\* Уравнения с разделёнными переменными.** Рассмотренная в предыдущем пункте задача является примером, приводящим к уравнению вида

$$g(y) \cdot y'(x) = f(x),$$

где  $f$ ,  $g$  — заданные функции, а  $y(x)$  — та функция, которую требуется найти. Такие уравнения иногда называют дифференциальными уравнениями с разделёнными переменными.

Способ решения уравнения с разделёнными переменными основывается на том, что если функция  $G(z)$  является первообразной для функ-



ции  $g(z)$ , то при произвольной дифференцируемой функции  $y(x)$  функция  $g(y(x)) \cdot y'(x)$  имеет первообразную  $G(y(x))$ . Поэтому по основному свойству первообразных из равенства  $g(y) \cdot y'(x) = f(x)$  вытекает равенство

$$G(y(x)) = F(x) + C,$$

где  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$ , а  $C$  — произвольная постоянная.

**Вопрос.** Как записать дифференциальное уравнение  $xy'(x) = y$  в виде уравнения с разделёнными переменными?

**3.7.\*\* Задача о полёте парашютиста.** Найдём закон изменения скорости  $v(t)$  падения тела массы  $m$ , сброшенного с высоты с начальной скоростью  $v(0) = 0$ , предполагая, что кроме силы тяжести на тело действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости тела с коэффициентом пропорциональности  $k > 0$ .

По второму закону Ньютона  $m \cdot v'(t) = F$ , где  $F$  — сила, действующая в направлении движения, и  $v'(t)$  — ускорение тела. Сила  $F$  складывается из двух сил: силы тяжести  $mg$  и силы сопротивления воздуха  $-k \cdot v(t)$ , которая взята со знаком «минус», так как сила сопротивления воздуха направлена в сторону, противоположную направлению скорости.

Значит,  $F = mg - k \cdot v(t)$ , и в результате получаем дифференциальное уравнение

$$m \cdot v'(t) = mg - k \cdot v(t).$$

Для краткости скорость  $v(t)$  обозначим через  $v$ , её производную  $v'(t)$  через  $v'$ , так что получим запись уравнения в виде

$$mv' = mg - kv.$$

Найдём решения этого уравнения в предположении, что  $mg - kv > 0$ , выполняющемся, в частности, и при  $t = 0$ . Разделив обе части уравнения на  $mg - kv$ , придём к уравнению с разделёнными переменными:

$$\frac{mv'}{mg - kv} = 1. \text{ В результате получаем } \frac{v'}{mg - kv} = \frac{1}{m}, \text{ затем } \frac{v'}{-k\left(v - \frac{m}{k}g\right)} = \frac{1}{m}.$$

$$\text{Отсюда } \frac{v'}{\left(v - \frac{m}{k}g\right)} = \frac{-k}{m} \text{ и } \frac{\left(v - \frac{m}{k}g\right)'}{\left(v - \frac{m}{k}g\right)} = -\frac{k}{m}. \text{ Первообразная левой части}$$

есть  $\ln\left|v - \frac{mg}{k}\right| + C_1$ , первообразная правой части есть  $-\frac{k}{m}t + C_2$ , где

$C_1$  и  $C_2$  — постоянные. Поэтому  $\ln\left|v - \frac{mg}{k}\right| = -\frac{k}{m}t + C$ , где  $C = C_2 - C_1$ .

Отсюда  $\left| v - \frac{mg}{k} \right| = e^{-\frac{k}{m}t + C} = e^C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$ . Учитывая условие  $mg - kv > 0$ , получим  $v - \frac{mg}{k} = -e^C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$ . Поскольку  $v(0) = 0$ , получим  $-\frac{mg}{k} = -e^C$ , откуда  $v(t) - \frac{mg}{k} = -\frac{mg}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$ . Таким образом, приходим к выражению для скорости в зависимости от времени падения:

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

Если мы хотим пренебречь силой сопротивления воздуха и найти закон изменения скорости  $v(t)$  при заданных условиях, то мы должны вернуться к начальному дифференциальному уравнению  $mv' = mg - kv$  и положить в нём  $k = 0$ . Тогда получится уравнение  $v' = g$ , откуда  $v = gt + C$ . При  $t = 0$  будем иметь  $C = v(0) = 0$ . Следовательно, при отсутствии сопротивления воздуха закон изменения скорости примет вид

$$v(t) = gt.$$

**Вопрос.** Как доказать, что при заданных условиях в случае, когда  $k > 0$ , скорость  $v(t)$  падающего тела не может неограниченно возрастать?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется первообразная для функции  $f(x)$ ?
2. Какие уравнения называются дифференциальными?
3. Как на указанном промежутке найти все решения уравнения  $y' = f(x)$ , где  $f(x)$  — заданная функция?
4. Как найти решение  $y(x)$  уравнения  $y' = f(x)$ , удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ ?
5. Что называют интегралами дифференциального уравнения?
- 6.\*\* Уравнения какого вида называют дифференциальными уравнениями с разделёнными переменными?
- 7.\*\* Как найти решения уравнения с разделёнными переменными?

### ■ Задачи и упражнения

1. Найдите решения дифференциального уравнения:

а)  $y' = \sin x + \cos x$ ; б)  $y' = \frac{x^4 - 1}{x^3}$ .

- 2.\* Найдите решения дифференциального уравнения  $(y')^2 - 5y' + 6 = 0$ .



3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

а)  $y' = x^2 - x^5$ ,  $y(3) = \frac{1}{2}$ ;

б)  $y' = \cos 2x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ;

в)  $x^2 y' = 1$ ,  $y(1) = 2$ .

4.\*\* Найдите решения дифференциального уравнения:

а)  $y' = xy$ ;

б)  $y' = \frac{3x}{y}$ ;

в)  $yy' = x + 1$ .

5.\*\* Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию:

а)  $y' = 2\sqrt{y}$ ,  $y(0) = 1$ ;

б)  $y' + y \sin 2x = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ;

в)  $y' = \frac{2y}{x}$ ,  $y(1) = 1$ .

6.\* Снаряд вылетает из орудия со скоростью 80 м/с. Определите дальность стрельбы, если угол вылета  $\alpha = 30^\circ$  (сопротивление воздуха не учитывать).

7.\* Найдите наивысшую точку траектории снаряда, вылетающего из орудия с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту (сопротивление воздуха не учитывать).

8.\* При каком угле вылета снаряда с начальной скоростью  $v_0$  дальность стрельбы наибольшая (сопротивление воздуха не учитывать)?

9.\* По какой траектории будет двигаться шарик, брошенный горизонтально с высоты  $h$  с начальной скоростью  $v_0$  (сопротивление воздуха не учитывать)?

10.\*\* Найдите кривые, для которых угловой коэффициент любой касательной равен ординате точки касания.

11.\*\* Найдите кривые, у которых отрезок любой касательной, заключённый между точкой касания и осью  $Ox$ , делится осью  $Oy$  пополам.

12.\*\* Одно тело имеет температуру  $200^\circ$ , а другое —  $100^\circ$ . Через 10 минут остывания этих тел на воздухе с температурой  $0^\circ$  первое тело остыло до температуры  $100^\circ$ , а второе до  $80^\circ$ . Через сколько минут температуры тел сравняются?

13.\*\* Скорость распада радия  $Q'(t)$  в каждый момент времени  $t$  пропорциональна имеющемуся наличному количеству  $Q(t)$  радия. Найдите закон распада радия, если начальное количество радия равно  $Q(0) = Q_0$  и известно, что через 1600 лет останется лишь половина этого количества.



■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Общее решение дифференциального уравнения  $y' = y$  имеет вид  $y(x) = Ce^x$ , где  $C$  — постоянная. Какая из интегральных кривых проходит через точку  $(-1; 2)$ ?

- 1)  $y = 2e^x$                       2)  $y = 2e^{x-1}$                       3)  $y = 2e^{x+1}$                       4)  $y = e^{x+2}$

**1.2.\*** Какое из указанных множеств функций является общим решением дифференциального уравнения  $y' = 3x^2y^2$  ( $C$  — постоянная)?

- 1)  $y = \frac{1}{x^3} + C$                       2)  $y = -\frac{1}{x^3} + C$                       3)  $y = \frac{1}{x^3 + C}$                       4)  $y = -\frac{1}{x^3 + C}$

**1.3.** Общее решение дифференциального уравнения  $y' \cdot x = 1$  имеет вид  $y(x) = \ln|x| + C$ , где  $C$  — постоянная. Какая из интегральных кривых проходит через точку  $(-e; 3)$ ?

- 1)  $y = \ln x + 4$     2)  $y = \ln(-x) + 3$   
3)  $y = \ln x + 2$     4)  $y = \ln(-x) + 2$

**1.4.\*** Какое из указанных множеств функций является общим решением дифференциального уравнения  $y' = \frac{x}{y}$  ( $C$  — постоянная)?

- 1)  $y = \sqrt{x + C}$ ,  $y = -\sqrt{x + C}$     2)  $y = \sqrt{x^2 + C}$ ,  $y = -\sqrt{x^2 + C}$   
3)  $y = \sqrt{2x + C}$ ,  $y = -\sqrt{2x + C}$     4)  $y = \sqrt{2x^2 + C}$ ,  $y = -\sqrt{2x^2 + C}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из указанных функций  $S(t)$  являются решениями дифференциального уравнения  $S'' = 4$ ?

- 1)  $S(t) = 4t^2 + 8t - 1$     2)  $S(t) = 2t^2 + 5t + 3$   
3)  $S(t) = 4t^2 - 3t - 2$     4)  $S(t) = 2t^2 - 18t + 1$

**2.2.** Какие из указанных функций  $T(t)$  являются решениями дифференциального уравнения  $T' = 2(T + 1)$ ?

- 1)  $T(t) = 3e^{2t} - 1$     2)  $T(t) = 2e^t - 1$   
3)  $T(t) = 5e^{2t} - 1$     4)  $T(t) = 2e^{2t} + 1$

**2.3.** Какие из указанных функций  $y(x)$  являются решениями дифференциального уравнения  $y'' + y = 0$ ?

- 1)  $\sin x$                       2)  $\cos x$                       3)  $\sin x - \cos x$                       4)  $2\sin x + 3\cos x$

2.4. Какие из указанных функций  $y(x)$  являются решениями дифференциального уравнения  $y' = y^2 + 1$ ?

- 1)  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$                       2)  $\operatorname{tg} x + 2$                       3)  $-\operatorname{ctg} x$                       4)  $1 - \operatorname{ctg} x$

### Мини-исследования к главе 7 ■

#### Мини-исследование 20

1) Найдите производную функции  $\ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha})$ .

2) Чему равен неопределённый интеграл  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx$ ?

#### Мини-исследование 21

В пункте 2.5 сформулированы и обоснованы свойства интеграла, получающиеся применением правил 1 и 2 для первообразных. Предлагается вывести свойства неопределённого интеграла, получающиеся из правил 3 и 4, и по аналогии с приведёнными примерами вычислить некоторые неопределённые интегралы.

1) Пусть  $\int f(x) dx = F(x) + C$ ,  $k \neq 0$ . Докажите, что

$$\int f(kx + a) dx = \frac{1}{k} F(kx + a) + C.$$

2) Пусть  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , и  $g(x)$  — дифференцируемая на некотором промежутке функция, причём определена сложная функция  $f(g(x))$ . Докажите, что на этом промежутке  $\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$ . Почему формула из примера 1 является частным случаем полученной формулы?

3) Используя формулу из примера 1, легко вычислить  $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$ . В самом деле,

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \left(\frac{x}{a}\right)' dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Найдите, чему равен неопределённый интеграл  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ .

4) С помощью соотношения  $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$  можно получить,

$$\text{что } \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (-\ln|1-x| + \ln|1+x|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

Найдите, чему равен неопределённый интеграл  $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$ .

Проверьте результат непосредственным дифференцированием.

### Мини-исследование 22

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на некотором промежутке, то справедлива следующая формула производной произведения этих функций:  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ .

1) Пусть функция  $f(x) \cdot g'(x)$  имеет первообразную на данном промежутке. Докажите, что тогда функция  $f'(x) \cdot g(x)$  тоже имеет первообразную на данном промежутке и справедлива формула

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Эта формула носит название *формулы интегрирования по частям*.

2) Пусть первообразную на данном промежутке имеет функция  $f'(x) \cdot g(x)$ . Как тогда формулируется правило интегрирования по частям?

3) Вычислите неопределённые интегралы  $\int x \sin x dx$  и  $\int x \cos x dx$ .

### Мини-исследование 23

*Задача о форме зеркала прожектора.* Постановка задачи следующая: требуется найти уравнение такой зеркальной поверхности, что свет, испускаемый точечным источником, выходит после отражения от поверхности параллельным пучком.

1) Для упрощения выкладок поместим источник света  $F$  в начало системы координат; будем считать, что пучок выходит в направлении, параллельном оси  $Ox$ . Предположим, что верхняя полуплоскость координатной плоскости  $Oxy$  пересекает поверхность зеркала по некоторой кривой  $y = y(x)$ .

2) Пусть луч, выходя из точки  $F$ , отражается от зеркала в точке  $M(x; y)$ . Если угол падения, равный углу отражения, обозначить через  $\alpha$ , то  $y' = \operatorname{tg} \alpha$ . Кроме того,  $\frac{y(x)}{x} = \operatorname{tg} 2\alpha$ . Получаем дифференциальное уравнение  $\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2}$ .

3) Разрешите полученное квадратное уравнение относительно  $y'$ , выразив  $y'$  через  $\frac{y}{x}$ .

4) При замене  $\frac{y}{x}$  на  $u$  ( $u$  — новая неизвестная функция) приходим к равенствам  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$ . Подставив это в выражение для  $y'$  из 3) и



умножив полученное равенство на  $u$ , получим два соотношения:  $uu' + u^2 = -1 \pm \sqrt{1 + u^2}$ .

5) Сделав ещё одну замену:  $v^2 = 1 + u^2$  и разделив переменные, получим уравнения  $\frac{v'}{\pm 1 - v} = \frac{1}{x}$ . Интегрирование этих уравнений даёт равенства  $-\ln |\pm 1 - v| + C_1 = \ln |x|$ , откуда  $C_1 = \ln |x(v \pm 1)|$ .

6) Выразив  $v$  через  $x$  и  $y$ , получим соотношения  $C = |\sqrt{x^2 + y^2} \pm x|$  для подходящей константы  $C = \pm e^{C_1}$ .

7) Получите равенства  $y^2 = 2C(\pm x + C)$  и объясните, почему эти уравнения задают семейство парабол.

8) Найдите уравнения поверхностей, полученных вращением этих парабол вокруг оси  $Ox$ .

9) В какую точку  $F$  нужно поместить источник света, чтобы после отражения от поверхности  $y^2 + z^2 = 2x$  свет вышел параллельным пучком?

# Глава 8

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

### ■ § 1. ГРАНИЦА И ВНУТРЕННОСТЬ МНОЖЕСТВА

**1.1. Внутренние, внешние и граничные точки шара.** Говоря о шаре, мы отметили, что шар имеет как внутренние, так и граничные точки.

Каждая внутренняя точка  $M$  входит в заданный шар вместе с некоторым шаром, центр которого находится в точке  $M$  (рис. 1). Множество всех внутренних точек шара называют *внутренностью* этого шара. Чтобы наглядно представить внутренность шара, нужно вообразить себе шар, с которого удалена его поверхность, то есть сфера.

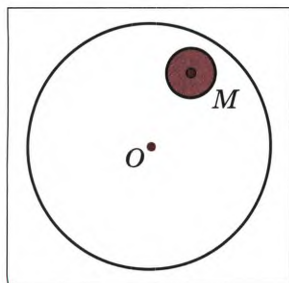


Рис. 1

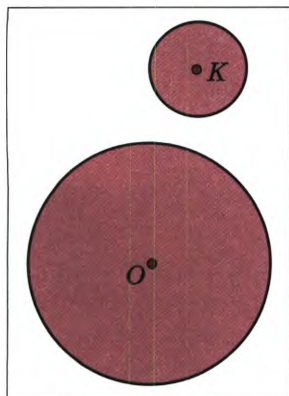


Рис. 2

Для каждой граничной точки  $N$  шара любой шар с центром  $N$  содержит как точки, принадлежащие заданному шару, так и точки, не принадлежащие ему. Множество всех граничных точек шара называют его *границей*. Граница шара радиуса  $R$  с центром  $O$  — это ограничивающая его сфера радиуса  $R$  с центром  $O$ . Для каждой точки  $K$ , не принадлежащей шару, можно указать некоторый шар с центром  $K$ , все точки которого не принадлежат заданному шару (рис. 2). Поэтому точку  $K$  называют внешней точкой для данного шара. Множество всех внешних точек для данного шара иногда называют *внешностью* этого шара. Внешность шара совпадает с множеством точек, не принадлежащих шару.

**Вопрос.** Почему граничные точки шара не являются его внутренними точками?

**1.2. Окрестность точки.** Внутренность шара радиуса  $r$  с центром  $O$  называют *шаровой окрестностью* точки  $O$ . Иногда для краткости слово «шаровая» опускают и говорят просто об *окрестности* точки  $O$ . Обозначают шаровую окрестность через  $U_r(O)$ , где  $r$  — радиус соответствующего шара.

В прямоугольной системе координат окрестность точки  $F(a;b;c)$  радиуса  $r$  можно задать неравенством:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2.$$

**Вопрос.** Как доказать, что внутренняя точка шара входит в шар вместе с некоторой своей окрестностью?

### 1.3. Внешние, внутренние и граничные точки множества.

Точка  $M$  называется внутренней точкой множества  $\Phi$ , если существует шаровая окрестность точки  $M$ , все точки которой принадлежат  $\Phi$ .

Заметим, что если  $M$  — внутренняя точка множества  $\Phi$ , то  $M$  принадлежит  $\Phi$  вместе со всеми точками своей окрестности. Множество  $I$ , состоящее из всех внутренних точек множества  $\Phi$ , называется внутренностью множества  $\Phi$ . Например, внутренность шара радиуса  $R$  с центром  $O$  есть множество всех точек  $M$ , для которых  $|OM| < R$ .

Точка  $N$  называется внешней точкой для множества  $\Phi$ , если существует шаровая окрестность точки  $N$ , все точки которой не принадлежат  $\Phi$ .

Заметим, что если  $N$  — внешняя точка для множества  $\Phi$ , то  $N$  не принадлежит  $\Phi$ .

Точка  $K$  называется граничной точкой множества  $\Phi$ , если каждая шаровая окрестность точки  $K$  содержит как точки, принадлежащие множеству  $\Phi$ , так и точки, не принадлежащие  $\Phi$ .

Множество  $Q$ , состоящее из всех граничных точек множества  $\Phi$ , называется границей множества  $\Phi$ . Например, границей шара радиуса  $R$  с центром  $O$  является сфера радиуса  $R$  с центром  $O$ .

**Вопрос.** Каковы внутренность и граница отрезка, рассматриваемого в пространстве?

### 1.4. Внутренние, внешние и граничные точки на плоскости.

Пусть  $F$  — некоторая точка плоскости и  $r > 0$ . Круговой окрестностью точки  $F$  называется множество всех точек  $M$  плоскости, таких, что  $|FM| < r$ .

Таким образом, на плоскости круговой окрестностью точки  $F$  является круг, рассматриваемый без его границы. Иногда для краткости круговую окрестность точки  $F$  на данной плоскости будем называть просто окрестностью точки  $F$ .

Пусть теперь  $\Phi$  — некоторое множество точек плоскости.

Точка  $M$  называется внутренней точкой множества  $\Phi$ , если существует круговая окрестность точки  $M$ , все точки которой принадлежат  $\Phi$ .



Точка  $N$  называется внешней точкой множества  $\Phi$ , если существует круговая окрестность точки  $N$ , все точки которой не принадлежат  $\Phi$ .

Точка  $K$  называется граничной точкой множества  $\Phi$ , если каждая круговая окрестность точки  $K$  содержит как точки, принадлежащие  $\Phi$ , так и точки, не принадлежащие  $\Phi$ .

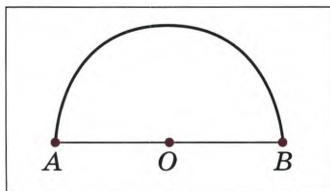


Рис. 3

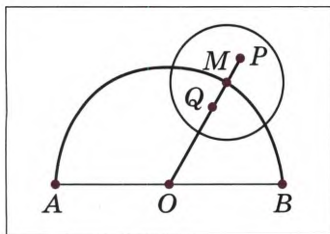


Рис. 4

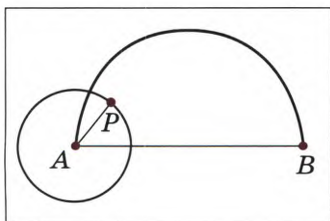


Рис. 5

Совокупность всех внутренних точек множества  $\Phi$  называется *внутренностью* множества  $\Phi$ ; совокупность всех граничных точек множества  $\Phi$  называется *границей* множества  $\Phi$ .

**Пример 1.** Рассмотрим полукруг радиуса  $R$  с центром  $O$  без его диаметра (рис. 3). Покажем, что границей этой фигуры является объединение дуги и отрезка, ограничивающих полукруг.

Пусть точка  $M$  лежит на дуге и  $U_r(M)$  — произвольная круговая окрестность радиуса  $r$  точки  $M$ , где  $r < R$ . Построим на луче  $OM$  точки  $P$  и  $Q$  так, что  $|OP| = R + \frac{r}{2}$ ,  $|OQ| = R - \frac{r}{2}$  (рис. 4). Тогда точки  $P$  и  $Q$  лежат в окрестности  $U_r(M)$ . Однако точка  $P$  не принадлежит рассматриваемому полукругу, а точка  $Q$  — принадлежит. Пусть точка  $N$  лежит на диаметре  $AB$ . Если  $N$  не совпадает ни с одной из точек  $A$  и  $B$ , то в каждой круговой окрестности  $U_r(N)$  с центром в точке  $N$  радиуса  $r$ , который меньше или равен половине минимального значения длин отрезков  $AN$  и  $NB$ , есть точки из рассматриваемого полукруга и точки из дополнения к нему. Рассмотрим теперь случай, когда точка  $N$  совпадает с точкой  $A$ . Возьмём произвольную окрестность  $U_r(A)$  точки  $A$  радиуса  $r$ .

В полуплоскости с границей  $AB$ , содержащей дугу полукруга, построим точку  $P$  так, что  $|AP| = \frac{r}{2}$ ,  $\angle BAP = 45^\circ$  (рис. 5). Тогда точки  $A$  и  $P$  лежат в окрестности  $U_r(A)$ , однако точка  $P$  принадлежит рассматриваемому полукругу, а точка  $A$  не принадлежит.

**Вопрос.** Как доказать, что центр  $O$  является граничной точкой рассматриваемого в примере 1 множества?

**1.5. Внутренние, внешние и граничные точки множеств на прямой.** Пусть  $A$  — некоторая точка прямой и  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $A$  называется множество всех точек  $M$  прямой, таких, что  $AM < \varepsilon$ . Для краткости  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$  будем называть просто *окрестностью* точки  $A$ .

Напомним, что на числовой прямой  $\varepsilon$ -окрестность числа  $a$  является интервалом с центром в точке  $a$  длиной  $2\varepsilon$ . Аналогично для точки  $A$  плоского множества (круговую) окрестность  $U_\varepsilon(A)$  радиуса  $\varepsilon$  можно называть (круговой)  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $A$ . Если же  $A$  — точка множества, лежащего в пространстве, то (*шаровую*) окрестность  $U_\varepsilon(A)$  можно называть (шаровой)  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $A$ .

Пусть теперь  $\Phi$  — некоторое множество точек прямой.

Точка  $M$  называется *внутренней точкой* множества  $\Phi$ , если существует окрестность точки  $M$ , все точки которой принадлежат  $\Phi$ .

Точка  $N$  называется *внешней точкой* множества  $\Phi$ , если существует окрестность точки  $N$ , все точки которой не принадлежат  $\Phi$ .

Точка  $K$  называется *граничной точкой* множества  $\Phi$ , если каждая окрестность точки  $K$  содержит как точки, принадлежащие  $\Phi$ , так и точки, не принадлежащие  $\Phi$ .

**Вопрос.** Как доказать, что если последовательность  $(a_n)$  сходится к числу  $a$ , то это число  $a$  является одной из граничных точек множества  $\{a_n\}$  всех членов данной последовательности?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Как в пространстве определяется шаровая окрестность точки?
2. Какую точку называют внутренней для множества точек пространства?
3. Какую точку называют граничной для множества точек пространства?
4. Какую точку называют внешней для множества точек пространства?
5. Как определяется внутренность множества в пространстве?
6. Как определяется граница множества в пространстве?
7. Как на плоскости определяется круговая окрестность точки?
8. Как определяется внутренность множества на плоскости?
9. Как определяется граница множества на плоскости?
10. Как определяются внутренние, граничные и внешние точки множества на прямой?



### ■ Задачи и упражнения

1. В пространстве рассматривается отрезок  $E$ . Докажите, что:

- а) внутренность множества  $E$  пуста;
- б) граница множества  $E$  совпадает с  $E$ .

Укажите множество внешних точек для  $E$ .

2. В пространстве рассматривается плоскость  $P$ . Докажите, что:

- а) внутренность множества  $P$  пуста;
- б) граница множества  $P$  совпадает с  $P$ .

Укажите множество внешних точек для  $P$ .

3. В пространстве рассматривается полупространство  $F$  с границей  $\alpha$ , содержащее свою границу. Докажите, что:

- а) внутренность множества  $F$  есть множество  $F \setminus \alpha$ ;
- б) граница множества  $F$  совпадает с плоскостью  $\alpha$ .

Укажите множество внешних точек для  $F$ .

4.\* Пусть  $U$  — множество всех точек пространства. Докажите, что:

- а) внутренность множества  $U$  совпадает с  $U$ ;
- б) граница множества  $U$  пуста;
- в) внешность множества  $U$  пуста.

5.\*\* Рассмотрим в координатном пространстве куб  $\Phi$ , состоящий из точек  $M(x; y; z)$  таких, что  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Докажите, что:

а) для точки  $K\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{10}\right)$  найдётся окрестность, целиком содержащаяся в  $\Phi$ ;

б) для точки  $L\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$  найдётся окрестность, ни одна из точек которой не принадлежит  $\Phi$ ;

в) для точки  $N\left(1; \frac{4}{5}; \frac{1}{3}\right)$  каждая её окрестность содержит точки, как принадлежащие множеству  $\Phi$ , так и не принадлежащие ему.

Укажите: внутренность множества  $\Phi$ ; границу множества  $\Phi$ ; внешность множества  $\Phi$ .

6. На плоскости  $\alpha$  рассматривается прямая  $l$ . Докажите, что:

- а) внутренность множества  $l$  пуста;
- б) граница множества  $l$  совпадает с  $l$ .

Укажите множество внешних точек для  $l$ .

7. На плоскости  $\alpha$  рассматривается множество  $U$  всех точек этой плоскости. Докажите, что:

- а) внутренность множества  $U$  совпадает с  $U$ ;
- б) граница множества  $U$  пуста;
- в) внешность множества  $U$  пуста.



8.\*\* На числовой прямой рассматривается множество  $\Phi$ , равное объединению всех отрезков вида  $\left[\frac{1}{2n}; \frac{1}{2n-1}\right]$ , где  $n \in N$ . Найдите границу множества  $\Phi$ .

## Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** В координатном пространстве множество  $\Phi$  задано неравенством  $x^2 + y^2 + 2z^2 \geq 2$ . Какой для множества  $\Phi$  является точка с координатами  $(1; 0; 1)$ ?

- 1) внутренней                      2) граничной  
3) внешней                         4) не принадлежащей множеству

### 1.2. Какая из фигур плоскости не имеет граничных точек?

- 1) вся плоскость                      2) полуплоскость  
3) плоский угол                      4) внутренность треугольника

1.3. Каково множество всех решений неравенства  $|x + 4| < 3$ ?

- 1)  $(-7;-1)$       2)  $(-7;1)$       3)  $(-1;7)$       4)  $(1;7)$

**1.4. Какое из объединений промежутков имеет единственную граничную точку?**

- $$\begin{array}{ll} 1) (-\infty; -1) \cup (-0,5; 2) & 2) (-\infty; -3) \cup [-3; 5) \\ 3) (-\infty; -2] \cup [-1; 1] & 4) (-\infty; -3] \cup (-2; -1) \end{array}$$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** В пространстве точка  $M$  является внутренней для множества  $A$  и для множества  $B$ . Для каких из указанных множеств точка  $M$  также является внутренней (через  $\bar{X}$  обозначено множество всех точек пространства, не принадлежащих множеству  $X$ )?

- 1)  $A \cup B$       2)  $A \cap B$       3)  $\overline{A \cup B}$       4)  $A \cap \overline{B}$

**2.2.** Какие из точек являются внутренними для пересечения полуплоскостей  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y \leq 2$ ,  $x + 2y \geq 1$  на плоскости?

- $$1) \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) \quad 2) \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right) \quad 3) \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \quad 4) \left(\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right)$$

**2.3.** На числовой прямой рассматриваются отрезки  $[2;4]$  и  $[3;5]$ . Какие из указанных точек являются граничными для их объединения?

- 1) 2                      2) 3                      3) 4                      4) 5

**2.4.** На числовой прямой рассматривается множество  $A = [0; \sqrt{2}] \cup [\sqrt{5}; \sqrt{10}]$ . Какие из указанных точек являются внешними для множества  $A$ ?

- 1) 1                      2) 2                      3) 3                      4) 4

## ■ § 2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЛА И ЗАМКНУТЫЕ ПЛОСКИЕ ОБЛАСТИ

**2.1. Тело и область.** Среди различных пространственных фигур в геометрии выделяют класс фигур, называемых телами. Телами являются такие фигуры, как параллелепипеды, пирамиды, призмы. Шар, конус, цилиндр — тоже являются примерами тел.

Приведём несколько примеров фигур в пространстве, не являющихся телами.

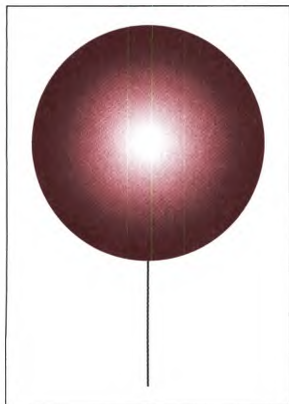


Рис. 1

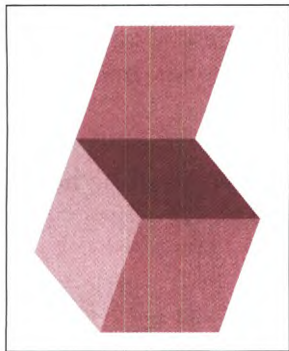


Рис. 2

Прямая не является телом, потому что эта фигура не содержит внутренних точек: всякий, даже очень маленький шарик с центром в точке прямой не принадлежит ей. По той же причине телом не является плоскость.

Если к шару присоединить отрезок (рис. 1) или к кубу приставить квадрат (рис. 2), то получившиеся фигуры не являются телами.

Полупространство не ограничено и поэтому не является телом.

Такая фигура, как шар, из которого удалили точки его поверхности, составляющие сферу, не является телом, поскольку эта фигура не содержит свою границу.

И ещё, телом не является фигура, состоящая из двух или более частей, каждая две из которых не имеют общих внутренних точек.

Среди различных плоских фигур в геометрии выделяют класс фигур, называемых областями. Среди областей преимущественно рассматривают замкнутые области, то есть области, которые включают свою границу. Замкнутыми областями на плоскости являются такие фигуры, как квадрат, треугольник, параллелепипед, рассматриваемые как части плоскости, заключённые в границах этих фигур. Круг тоже является примером замкнутой области.

**Вопрос.** Какая фигура является границей куба?

**2.2. Пространственные тела.** Рассмотрим некоторые свойства, которыми обладают пространственные тела.



**Свойство 1. Тело есть ограниченное множество.**

Это свойство означает, что найдётся шар, который целиком содержит данное тело.

Если множество не содержится ни в каком шаре, то оно не является телом. Например, двугранный угол (рис. 3), определяемый как фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей границей, не является телом, так как он не содержится ни в каком шаре.

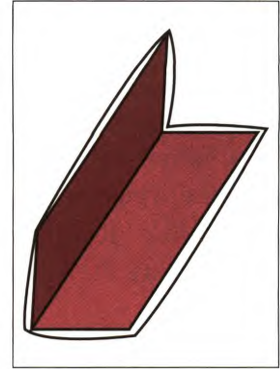


Рис. 3

**Вопрос.** Как доказать, что если множество элементов пространства содержится в некотором кубе, то это множество ограничено?

**2.3. Непустота внутренности тел.**

**Свойство 2. Тело имеет непустую внутренность.**

Это свойство означает, что тело имеет хотя бы одну внутреннюю точку. Напомним, что точка  $A$  является внутренней для фигуры  $\Phi$ , если существует такое положительное число  $r$ , что фигура  $\Phi$  содержит шаровую окрестность  $U_r(A)$  точки  $A$ .

Множества с пустой внутренностью не являются телами. Например, отрезок в пространстве не является телом.

**Вопрос.** Как доказать, что каждое тело имеет бесконечное множество внутренних точек?

**2.4.\*\* Связная внутренность тел.**

**Свойство 3. Тело имеет связную внутренность.**

Это свойство означает, что любые две точки внутренности тела можно соединить ломаной, состоящей из внутренних точек тела.

**Пример.** Объединение двух касающихся внешним образом шаров не является телом.

Внутренность такого множества представляет собой объединение непересекающихся внутренностей шаров. Это множество не является связным, так как плоскость, одновременно касающаяся обоих шаров, не имеет общих точек с внутренностью каждого шара и относительно касательной плоскости внутренности рассматриваемых шаров расположены в различных полупространствах. Поэтому если внутреннюю точку одного шара соединять ломаной с внутренней точкой другого шара, то эта ломаная содержит точку, принадлежащую касательной плоскости.

**Вопрос.** Как доказать, что внутренность объединения двух шаров, имеющих общую внутреннюю точку, связна?



## 2.5. Замкнутость тела.

**Свойство 4.** Тело является замкнутым множеством.

Это свойство означает, что тело содержит все свои граничные точки.

Незамкнутые множества пространства не являются телами. Например, шаровая окрестность, то есть шар, у которого удалена ограничивающая его сфера, не является телом.

**Вопрос.** Как доказать, что точка, не принадлежащая замкнутому множеству  $\Phi$ , является внешней точкой множества  $\Phi$ ?

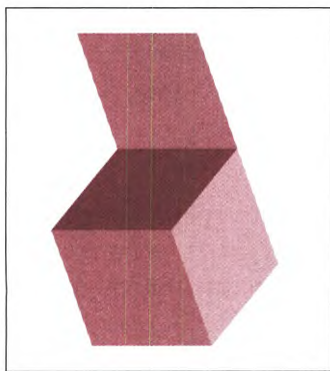


Рис. 4

## 2.6. Свойство границы тела.

**Свойство 5.** Граница тела совпадает с границей его внутренности.

Например, границей внутренности куба является ограничивающая его поверхность, состоящая из шести квадратов. Однако объединение куба и квадрата со стороной, совпадающей с ребром куба (рис. 4), имеет ту же внутренность в пространстве, что и куб, но границы у этих фигур различны.

**Вопрос.** Как доказать, что объединение замкнутого шара и отрезка является замкнутым множеством?

## 2.7. Определение тела.

Телом называется ограниченное замкнутое множество точек пространства с непустой связной внутренностью, граница которого совпадает с границей его внутренности.

Телами являются пирамиды, призмы, шары. Цилиндры и конусы определяют таким образом, чтобы они также были пространственными телами. Мы не будем доказывать, что названные фигуры являются телами.

**Вопрос.** Как доказать, что в координатном пространстве множество всех точек с координатами  $(x; y; z)$ , удовлетворяющих двойному неравенству

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,$$

является телом?

**2.8.\*\* Пересечение замкнутых фигур в пространстве.** Замкнутые фигуры в пространстве обладают следующим свойством.

Непустое пересечение нескольких замкнутых фигур пространства есть замкнутая фигура.

Пусть  $G$  — пересечение замкнутых фигур  $F_1, F_2, F_3, \dots$ . Предположим, что некоторая граничная точка  $A$  множества  $G$  не принадлежит  $G$ . Тогда точка  $A$  не принадлежит какому-то из множеств  $F_1, F_2, F_3, \dots$ . Пусть для определённости точка  $A$  не принадлежит множеству  $F_1$ . Рассмотрим произвольную шаровую окрестность  $U_r(A)$  точки  $A$ . По определению граничной точки окрестность  $U_r(A)$  содержит некоторую точку  $B$  из множества  $G$ . Но тогда точка  $B$  принадлежит всем фигурам  $F_1, F_2, F_3, \dots$ . В частности, точка  $B$  принадлежит фигуре  $F_1$ .

В результате получаем, что точка  $A$  не принадлежит фигуре  $F_1$ , а каждая окрестность точки  $A$  содержит точку из  $F_1$ . Поэтому точка  $A$  — граничная точка множества  $F_1$  и должна принадлежать фигуре  $F_1$ , так как по условию фигура  $F_1$  содержит все свои граничные точки. Таким образом, предположение о том, что пересечение  $G$  замкнутых фигур  $F_1, F_2, F_3, \dots$  не содержит все свои граничные точки, приводит к противоречию. Следовательно,  $G$  — замкнутая фигура.

**Вопрос.** Как доказать, что отрезок является замкнутой фигурой в пространстве?

**2.9.\*\* Поверхность тела.** Границу тела называют поверхностью этого тела.

Поверхность тела разделяет его внутренние и его внешние точки, то есть если соединить ломаной внутреннюю точку тела с его внешней точкой, то такая ломаная обязательно имеет хотя бы одну общую точку с поверхностью тела.

Действительно, пусть ломаная соединяет внутреннюю точку тела с внешней. Если какая-то из вершин ломаной является граничной точкой, то утверждение доказано. В остальных случаях найдётся звено ломаной, один конец которого есть внутренняя точка тела, а другой — внешняя точка. Обозначим через  $A_1B_1$  то звено ломаной, у которого  $A_1$  — внутренняя точка тела, а  $B_1$  — внешняя точка. Затем рассмотрим следующий процесс.

*1 шаг.* Разделим отрезок  $A_1B_1$  точкой  $C_1$  пополам (рис. 5). Далее поступим следующим образом:

а) если  $C_1$  — граничная точка тела, то процесс закончим;

б) если точка  $C_1$  — внутренняя, то обозначим  $C_1$  через  $A_2$ , а  $B_1$  через  $B_2$  и перейдём ко второму шагу;

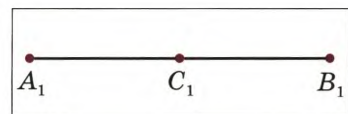


Рис. 5



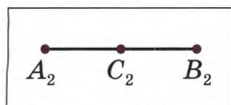


Рис. 6

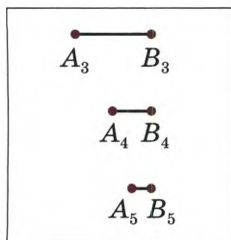


Рис. 7

в) если точка  $C_1$  — внешняя, то обозначим  $A_1$  через  $A_2$ , а  $C_1$  через  $B_2$  и перейдем ко второму шагу.

**2 шаг.** Разделим отрезок  $A_2B_2$  точкой  $C_2$  пополам (рис. 6). Затем:

а) если  $C_2$  — граничная точка тела, то процесс закончим;

б) если точка  $C_2$  — внутренняя, то обозначим  $C_2$  через  $A_3$ , а  $B_2$  через  $B_3$  и перейдем к третьему шагу;

в) если точка  $C_2$  — внешняя, то обозначим  $A_2$  через  $A_3$ , а  $C_2$  через  $B_3$  и перейдем к третьему шагу.

Намеченный процесс продолжаем шаг за шагом (рис. 7). Если процесс закончится через конечное число шагов, то граничная точка тела получится как одна из точек деления. Если процесс не закончится через конечное число шагов, то получится последова-

тельность отрезков  $A_nB_n$ , вложенных друг в друга, длины которых стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . По аксиоме Кантора найдется точка  $F$ , общая для всех отрезков  $A_nB_n$ .

В результате для каждой окрестности  $U$  точки  $F$  найдется некоторый отрезок  $A_nB_n$ , целиком содержащийся в  $U$ . Поэтому окрестность  $U$  содержит концы этого отрезка, один из которых является внутренней точкой, а другой — внешней точкой тела. Отсюда, по определению, точка  $F$  является граничной для этого тела и расположенной на рассматриваемой ломаной.

**Вопрос.** Как доказать, что точка  $F$  принадлежит данному телу?

**2.10.\*\* Замкнутые области на плоскости.** Аналогично тому, как это делается в пространстве, на плоскости также можно определить ограниченность, замкнутость множеств и связность внутренности множества. По аналогии с пространственным телом введём понятие замкнутой области.

**Замкнутой областью** называется ограниченное замкнутое множество точек плоскости с непустой связной внутренностью, граница которого совпадает с границей его внутренности.

Из известных плоских фигур замкнутыми областями являются, например, треугольник, рассматриваемый со своими внутренними точками, круг, множество всех точек  $(x; y)$  координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству  $x^2 + 2y^2 \leq 3$ .

**Вопрос.** Будет ли замкнутой областью фигура, состоящая из трёх точек и трёх попарно соединяющих их отрезков?



## Контрольные вопросы и задания ■

1. Какое множество пространства называется ограниченным?
2. Как определяется связность внутренности множества?
3. Какое множество пространства называется замкнутым?
4. Приведите пример множества в пространстве, граница которого не совпадает с границей его внутренности.
5. Сформулируйте определение тела.
6. Как определяется поверхность тела?

## Задачи и упражнения ■

1.\*\* Пусть известно, что расстояние между любыми двумя точками множества  $\Phi$  пространства не превосходит фиксированного числа  $d$ . Докажите, что существует шар радиуса  $d$ , содержащий множество  $\Phi$ .

2.\*\* Докажите, что множество  $\Phi$  пространства ограничено в том и только в том случае, когда расстояния между любыми двумя точками множества  $\Phi$  не превосходят фиксированного числа.

3.\*\* Пусть  $\Phi$  — ограниченное множество в пространстве. Докажите, что найдётся куб, содержащий множество  $\Phi$ .

4.\*\* Пусть известно, что множество  $U$  в пространстве содержит некоторый луч. Докажите, что в таком случае множество  $U$  не является ограниченным.

5.\*\* На плоскости фигура  $\Phi$  содержит точки  $A$  и  $B$ , причём известно, что  $AB = 1$ , а расстояние между любыми двумя точками фигуры  $\Phi$  не превосходит единицы. Докажите, что фигуру  $\Phi$  можно заключить в круг радиуса  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

6.\*\* В пространстве фигура  $\Phi$  содержит точки  $A$  и  $B$ , причём известно, что  $AB = 1$ , а расстояние между любыми двумя точками фигуры  $\Phi$  не превосходит единицы. Докажите, что фигуру  $\Phi$  можно заключить в шар радиуса  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

7.\*\* В пространстве заданы два шара радиуса  $R$ , расстояние между центрами которых равно  $R$ . Опишите, какой вид имеет: а) внутренность пересечения; б) граница пересечения. Объясните, почему такое пересечение является пространственным телом.

8.\*\* На высоте правильного тетраэдра, как на диаметре, построен шар. Опишите, какой вид имеет: а) внутренность пересечения; б) граница пересечения. Объясните, почему такое пересечение является пространственным телом.

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Какое из указанных множеств в пространстве является телом?

- 1) отрезок                      2) сфера                      3) круг                      4) шар

**1.2.\*** Какое из указанных неравенств задаёт в пространстве множество, которое является телом?

- 1)  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$                       2)  $x + y + z \leq 3$   
3)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$                       4)  $x + y + z \geq 5$

**1.3.** Для какого из указанных множеств на числовой прямой каждая его точка является внутренней?

- 1)  $[-2; 3)$                       2)  $(-\infty; -3)$                       3)  $(4; 5]$                       4)  $[7; \infty)$

**1.4.** Какая точка из указанных является внутренней для плоского треугольника на координатной плоскости с вершинами  $(0; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 0)$ ?

- 1)  $(0, 2; 0, 9)$                       2)  $(0, 3; 0, 4)$                       3)  $(0, 4; 0, 6)$                       4)  $(0, 3; 0, 7)$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из указанных множеств пространства не имеют внутренних точек?

- 1) множество всех точек, удалённых от заданной точки на расстояние 2  
2) объединение всех сфер радиуса 1 с центрами на заданной сфере радиуса 3  
3) множество всех точек, удалённых от заданной плоскости на расстояние 2  
4) множество всех точек, расстояние от которых до какой-либо из точек заданной плоскости равно 2

**2.2.** Пусть множества  $A$  и  $B$  задаются в пространстве неравенствами  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  и  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  соответственно. Какие из множеств являются телом?

- 1)  $A \cap B$                       2)  $A \cup B$                       3)  $A \setminus B$                       4)  $B \setminus A$

**2.3.** Какие из указанных множеств на плоскости не являются ограниченными?

- 1) множество всех точек плоскости, равноудалённых от двух заданных точек  
2) множество всех точек биссектрисы заданного угла  
3) множество всех точек высоты заданного треугольника  
4) множество всех точек биссектрисы заданного треугольника



**2.4.** Какие из указанных множеств на числовой прямой не являются замкнутыми?

1)  $([1;2] \cup [4;6]) \cap (0;3)$

2)  $([2;4] \cup [7;9]) \cap (3;8)$

3)  $((-5;-3) \cup (-1;7)) \cap [-4;4]$

4)  $((1;4] \cup [5;8)) \cap [3;7]$

### § 3. ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА ■

**3.1. Выпуклые фигуры на плоскости и в пространстве.** Напомним, что на плоскости фигура  $\Phi$  называется выпуклой, если для любых двух точек  $A$  и  $B$  фигуры  $\Phi$  все точки отрезка  $AB$  принадлежат  $\Phi$ . Например, на рис. 1 изображена выпуклая замкнутая область. Примером невыпуклой фигуры может служить фигура, изображённая на рис. 2.

Определение выпуклой фигуры в пространстве аналогично определению выпуклой фигуры на плоскости.

Фигура  $\Phi$  пространства называется выпуклой, если для любых двух точек  $A$  и  $B$  фигуры  $\Phi$  все точки отрезка  $AB$  принадлежат  $\Phi$ .

Примерами выпуклых фигур в пространстве являются треугольная пирамида, треугольная призма, параллелепипед, шар, полупространство, двугранный угол (рис. 3).

**Вопрос.** Как доказать, что непустое пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

**3.2.\*\* Описание выпуклых фигур на прямой.** В отличие от плоскости при рассмотрении фигур на прямой можно перечислить все возможные виды выпуклых фигур.

На прямой выпуклая фигура есть либо точка, либо отрезок, либо интервал, либо полуинтервал, либо луч с его началом или без начала, либо вся прямая.

Если фигура состоит из одной точки, то доказывать нечего.

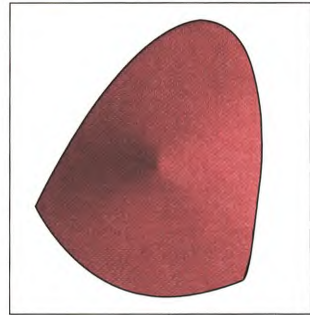


Рис. 1

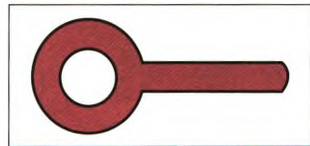


Рис. 2

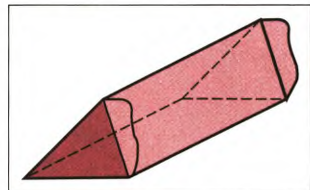


Рис. 3



Пусть  $A$  и  $B$  — две различные точки выпуклой фигуры.

I. Предположим, что все точки и луча  $AB$ , и луча  $BA$  принадлежат фигуре. Тогда, очевидно, фигура совпадает со всей прямой  $AB$ .

II. Предположим теперь, что на луче  $AB$  имеется точка  $C$ , не принадлежащая фигуре  $\Phi$ . Тогда если точка  $C$  — граничная для фигуры  $\Phi$ , то  $AC$  — это либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок. Если точка  $C$  не является граничной для фигуры  $\Phi$ , то, применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям из пункта 2.8, получим, что существует точка  $F$ , делящая точки луча  $AB$  на внутренние и внешние точки по отношению к фигуре  $\Phi$ . В этом случае снова получаем, что  $AF$  — это либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок.

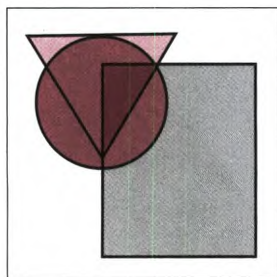


Рис. 4

Аналогичные рассуждения, проведённые для луча  $BA$ , показывают, что на прямой всякая выпуклая фигура является либо точкой, либо интервалом, либо полуинтервалом, либо отрезком, либо лучом с началом, либо лучом без начала, либо прямой.

**Вопрос.** Как доказать, что если выпуклое множество  $F$  на плоскости содержит две пересекающиеся прямые, то  $F$  — это вся плоскость?

**3.3. Пересечение нескольких выпуклых фигур.** Выпуклые фигуры обладают следующим свойством.

**Непустое пересечение нескольких выпуклых фигур есть выпуклая фигура.**

На рис. 4 это свойство проиллюстрировано для выпуклых фигур плоскости.

**Вопрос.** Как доказать сформулированное в этом пункте свойство?

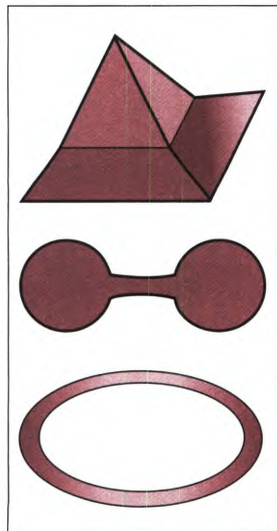


Рис. 5

**3.4. Выпуклые тела.** Тело в пространстве называют *выпуклым*, если оно представляет собой выпуклую фигуру.

Из известных пространственных тел выпуклыми являются, например, параллелепипед, шар, прямой круговой конус со своими внутренними точками. На рис. 5 изображены некоторые невыпуклые фигуры.

**Вопрос.** В каком случае объединение двух шаров будет выпуклым телом?

**3.5.\*\* Пересечение прямой с выпуклым телом.** Выпуклые тела обладают следующим свойством.

Каждая прямая, имеющая с выпуклым телом хотя бы одну общую точку, пересекает его либо в одной точке, либо по отрезку.

Пересечение прямой с телом ограничено, так тело ограничено.

Пересечение прямой с телом замкнуто, так как и прямая, и тело замкнуты.

Пересечение прямой с телом выпукло, так как прямая — выпуклое множество, а тело выпукло по условию.

Следовательно, при пересечении прямой с телом образуется ограниченное, замкнутое и выпуклое множество на прямой. Из пункта 3.2 следует, что таким множеством может быть либо точка, либо отрезок. Тем самым свойство доказано.

На рис. 6 проиллюстрировано, что указанное свойство для невыпуклых тел не выполняется.

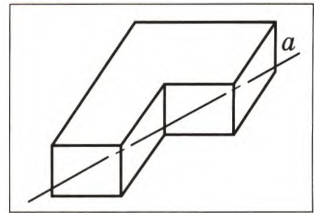


Рис. 6

**Вопрос.** Как доказать, что любой луч с началом во внутренней точке выпуклого тела пересекает это тело по отрезку?

**3.6.\*\* Признак выпуклости тела.** Справедливо следующее утверждение, которое обратно к утверждению, доказанному в предыдущем пункте, и является одним из признаков выпуклости тела.

Если каждая прямая, имеющая с телом хотя бы одну общую точку, пересекает его либо в одной точке, либо по отрезку, то такое тело выпукло.

Пусть  $A$  и  $B$  — две произвольные точки тела  $\Phi$ , удовлетворяющего условиям признака. Тогда прямая  $AB$  пересекает  $\Phi$  по некоторому отрезку  $CD$ . Так как точки  $A$  и  $B$  принадлежат отрезку  $CD$ , то и все точки отрезка  $AB$  принадлежат отрезку  $CD$ , а поэтому принадлежат и телу  $\Phi$ .

**Вопрос.** Как доказать, что прямой круговой цилиндр со своими внутренними точками является выпуклым телом?

**3.7.\*\* Задание полупространства с помощью координат.** Справедлив следующий результат.

Пусть в координатном пространстве плоскость  $\alpha$  задаётся линейным уравнением  $ax + by + cz + d = 0$ , где  $a, b, c, d$  — числа и  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ . Тогда полупространство с границей  $\alpha$  задаётся одним из неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{либо } ax + by + cz + d > 0; & \text{либо } ax + by + cz + d \geq 0; \\ \text{либо } ax + by + cz + d < 0; & \text{либо } ax + by + cz + d \leq 0. \end{array}$$



Для доказательства обозначим через  $U$  множество всех точек с координатами  $(x; y; z)$ , для которых  $ax + by + cz + d > 0$ , и через  $V$  — множество всех точек, для которых  $ax + by + cz + d < 0$ .

Докажем, что отрезок, соединяющий точки одного из этих множеств, не пересекает плоскость  $\alpha$ , а отрезок, соединяющий точки разных множеств, — пересекает плоскость  $\alpha$ .

Обозначим через  $O$  начало системы координат и рассмотрим три случая.

I. Пусть точки  $A(m_1; n_1; k_1)$  и  $B(m_2; n_2; k_2)$  принадлежат множеству  $U$ , то есть

$$am_1 + bn_1 + ck_1 + d > 0,$$

$$am_2 + bn_2 + ck_2 + d > 0.$$

Для каждой точки  $M$  отрезка  $AB$  имеем

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \lambda \overline{AB},$$

где  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= (m_1; n_1; k_1) + \lambda(m_2 - m_1; n_2 - n_1; k_2 - k_1) = \\ &= (\lambda m_2 + (1 - \lambda)m_1; \lambda n_2 + (1 - \lambda)n_1; \lambda k_2 + (1 - \lambda)k_1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a(\lambda m_2 + (1 - \lambda)m_1) + b(\lambda n_2 + (1 - \lambda)n_1) + c(\lambda k_2 + (1 - \lambda)k_1) + d = \\ = \lambda(am_2 + bn_2 + ck_2 + d) + (1 - \lambda)(am_1 + bn_1 + ck_1 + d) > 0, \end{aligned}$$

так как числа  $am_2 + bn_2 + ck_2 + d$  и  $am_1 + bn_1 + ck_1 + d$  положительны по условию, а числа  $\lambda$ ,  $1 - \lambda$  неотрицательны и хотя бы одно из них отлично от нуля. Таким образом, если  $A \in U$ ,  $B \in U$ , то любая точка отрезка  $AB$  также принадлежит  $U$ .

II. Пусть точка  $A$  принадлежит множеству  $U$  или множеству  $V$ , точка  $B$  принадлежит плоскости  $\alpha$ . Этот случай разбирается аналогично первому случаю.

III. Пусть концы отрезка  $AB$  принадлежат различным множествам:

$$A(m_1; n_1; k_1) \in U, B(m_2; n_2; k_2) \in V, \text{ то есть}$$

$$am_1 + bn_1 + ck_1 + d > 0,$$

$$am_2 + bn_2 + ck_2 + d < 0.$$

В этом случае уравнение

$$\lambda(am_2 + bn_2 + ck_2 + d) + (1 - \lambda)(am_1 + bn_1 + ck_1 + d) = 0$$



относительно  $\lambda$  имеет корень

$$\lambda_0 = \frac{am_1 + bn_1 + ck_1 + d}{(am_1 + bn_1 + ck_1 + d) - (am_2 + bn_2 + ck_2 + d)},$$

причём  $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ . Но тогда точка

$$M(\lambda_0 m_2 + (1 - \lambda_0)m_1; \lambda_0 n_2 + (1 - \lambda_0)n_1; \lambda_0 k_2 + (1 - \lambda_0)k_1)$$

принадлежит отрезку  $AB$  и лежит в плоскости  $\alpha$ .

**Вопрос.** Как выглядит приведённое доказательство для плоскости с уравнением  $z = 0$ ?

**3.8.\*\* Теорема отделимости.** Одним из самых важных свойств выпуклых тел является следующее свойство.

Если точка  $A$  не принадлежит выпуклому телу  $\Phi$ , то существует такая плоскость  $\alpha$ , что тело  $\Phi$  лежит в одном полупространстве с границей  $\alpha$ , а точка  $A$  — в другом.

Это свойство иногда называют теоремой отделимости и кратко формулируют в следующем виде.

Для каждой точки, не принадлежащей выпуклому телу, существует плоскость, которая отделяет эту точку от выпуклого тела.

Доказательство теоремы мы приводить не будем.

Для невыпуклых тел теорема отделимости неверна. Например, если из шара вырезали меньший шар, то центр меньшего шара невозможно отделить плоскостью от оставшейся части большего шара.

**Вопрос.** Как доказать, что в пространстве точку, не лежащую на отрезке, можно отделить плоскостью от этого отрезка?

**3.9.\*\* Выпуклое тело как пересечение всех содержащих его полупространств.** Пусть  $\Phi$  — выпуклое тело. Из теоремы отделимости следует, что для каждой точки  $A$ , не принадлежащей телу  $\Phi$ , можно построить полупространство  $U_A$ , которое целиком содержит тело  $\Phi$  и не содержит точки  $A$ . Рассмотрим пересечение всех построенных таким образом полупространств. Тогда, с одной стороны, это пересечение содержит тело  $\Phi$ , так как каждое полупространство  $U_A$  содержит  $\Phi$ . С другой стороны, ни одна точка  $B$ , не принадлежащая телу  $\Phi$ , не может входить в пересечение, так как точка  $B$  не принадлежит некоторому полупространству  $U_B$ . Тем самым любое выпуклое тело можно получить как пересечение полупространств, содержащих данное тело.

**Вопрос.** Как задать треугольную пирамиду пересечением полупространств?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение выпуклой фигуры.
- 2.\*\* Какой вид может иметь выпуклая фигура, расположенная на прямой?
3. Сформулируйте свойство выпуклых фигур.
4. В каком случае тело называют выпуклым?
- 5.\*\* Сформулируйте и докажите утверждение о пересечении выпуклого тела с прямой.
- 6.\*\* Сформулируйте и докажите признак выпуклости тела.
- 7.\*\* Сформулируйте теорему отделимости.
- 8.\*\* Докажите, что в координатном пространстве каждое полупространство можно задать как множество решений линейного неравенства.

### ■ Задачи и упражнения

- 1.\*\* На плоскости рассматривается наименьшая выпуклая фигура  $\Phi$ , содержащая четыре заданные точки  $A, B, C, D$ . В каком случае фигура  $\Phi$  будет: а) отрезком; б) треугольником; в) четырёхугольником?
- 2.\*\* В пространстве рассматривается наименьшая выпуклая фигура  $\Phi$ , содержащая четыре заданные точки  $A, B, C, D$ . В каком случае фигура  $\Phi$  будет: а) отрезком; б) треугольником; в) четырёхугольником; г) тетраэдром?
- 3.\*\* В пространстве наименьшая выпуклая фигура, содержащая пять заданных точек, является многогранником с пятью вершинами. Сколько рёбер и сколько граней может иметь такой многогранник?
- 4.\*\* Из квадрата, рассматриваемого с внутренними точками, удалили вершины. Докажите, что получившаяся фигура — выпуклое множество.
- 5.\*\* Из круга удалили некоторое число точек его границы. Докажите, что получившаяся фигура — выпуклое множество.
- 6.\*\* Докажите, что если фигура  $\Phi$  получена удалением непустого множества точек границы шара, то фигура  $\Phi$ :

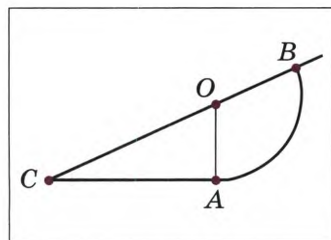


Рис. 7

- а) выпуклая;
- б) не является замкнутой;
- в) имеет незамкнутую проекцию на некоторую плоскость.

7.\*\* Рассмотрим объединение сектора  $AOB$  и треугольника  $AOC$ , расположенных так, что точка  $C$  лежит на продолжении радиуса  $OB$ , а отрезок  $AC$  касается дуги сектора. Удалим из этого множества точку  $A$  и получившуюся



фигуру обозначим через  $\Phi$  (рис. 7). Докажите, что фигура  $\Phi$ :

- а) выпуклая;
- б) не является замкнутой;
- в) имеет замкнутую проекцию на любую прямую.

**8.\*\*** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит невыпуклый четырёхугольник  $ABCD$  (рис. 8). Какие точки пространства можно отделить плоскостью от этой пирамиды, а какие нельзя?

**9.\*\*** Какой системой линейных неравенств в координатном пространстве задаётся тетраэдр с вершинами  $A(1;-2;1)$ ,  $B(2;0;-3)$ ,  $C(-1;4;0)$ ,  $D(0;1;1)$ ?

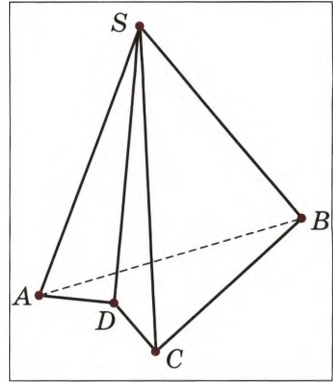


Рис. 8

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.\*\*** Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости. Какое минимальное выпуклое множество содержит эти точки?

- 1) объединение отрезков  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$ ,  $CD$
- 2) тетраэдр  $ABCD$
- 3) шар, ограниченный сферой, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$
- 4) призма  $ABCDEF$ , где отрезки  $BE$  и  $CF$  параллельны и равны  $AD$

**1.2.** В каком случае минимальная выпуклая фигура в пространстве, содержащая четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , будет плоским четырёхугольником?

- 1) точка  $C$  принадлежит отрезку  $AB$
- 2) точки лежат на одной прямой
- 3) прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке, принадлежащей отрезку  $AC$  и не принадлежащей отрезку  $BD$
- 4) отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке, отличной от  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$

**1.3.\*\*** Рассмотрим квадрат  $ABCD$  как фигуру, составленную из отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ . Каким является это множество?

- 1) выпуклым и замкнутым
- 2) выпуклым и незамкнутым
- 3) невыпуклым и замкнутым
- 4) невыпуклым и незамкнутым

**1.4.\*\*** Множество решений какого из неравенств изображается на координатной плоскости в виде выпуклого множества?

- 1)  $x^2 + y^2 > 1$
- 2)  $y \leq x^2$
- 3)  $|x| \geq y$
- 4)  $|x| + |y| < 2$ .

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** На координатной плоскости рассматривается объединение плоского прямоугольника  $ABCD$  с вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(0;3)$ ,  $C(4;3)$ ,  $D(4;0)$



и плоского треугольника  $ABM$ . В каких из указанных случаев получается выпуклая фигура?

- 1)  $M(-2;1)$       2)  $M(-5;4)$       3)  $M(-1;-2)$       4)  $M(3;5)$

**2.2.** Какие из указанных множеств в пространстве являются выпуклыми?

- 1) куб, из которого удалены вершины
- 2) куб, из которого удалены центры граней
- 3) объединение единичных шаров, с центрами в вершинах заданного единичного куба
- 4) объединение всех отрезков заданной длины, середины которых принадлежат заданному отрезку

**2.3.** Какие из указанных множеств на плоскости являются выпуклыми?

- 1) множество всех точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых
- 2) множество всех точек, равноудалённых от двух параллельных прямых
- 3) множество всех точек круга, из которого удалили концы одного диаметра
- 4) множество всех точек плоского квадрата, из которого удалили середины сторон

**2.4.\*\*** Какой вид может иметь непустое пересечение выпуклого множества на плоскости с отрезком?

- 1) интервал
- 2) объединение двух непересекающихся интервалов
- 3) отрезок
- 4) полуинтервал

## ■ § 4. МНОГОГРАННИКИ

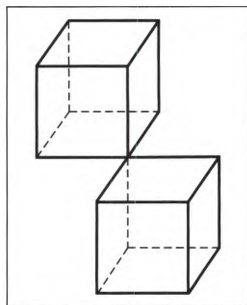


Рис. 1

**4.1. Представление о многогранниках.** Куб, пирамида, параллелепипед, призма являются представителями обширного класса фигур, называемых многогранниками. Граница каждого из указанных многогранников состоит из конечного числа плоских многоугольников: треугольников, квадратов, параллелограммов и так далее. Заметим, что не всякую фигуру, граница которой состоит из многоугольников, следует считать многогранником. Например, фигуру, состоящую из двух кубов, расположенных так, как изображено на рис. 1, многогранником не считают.

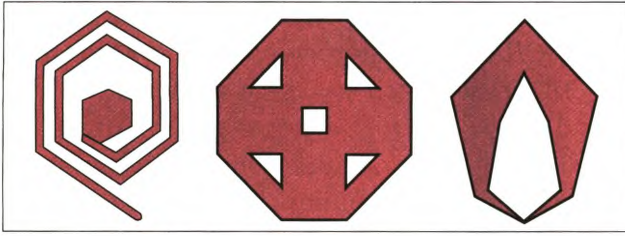


Рис. 2

**Вопрос.** Из каких многоугольников состоит граница пятиугольной призмы?

#### 4.2. Многоугольные области.

Многоугольной областью называется замкнутая плоская область, граница которой является объединением конечного числа отрезков.

Это определение обобщает понятие многоугольника. На рис. 2 изображено несколько необычных многоугольных областей.

**Вопрос.** Как определяется замкнутая плоская область?

**4.3. Многогранники.** В стереометрии значительное внимание уделяется изучению многогранников.

Многогранником называется тело, граница которого является объединением конечного числа многоугольных областей.

На рис. 3 изображено несколько необычных многогранников. Фигура на рис. 1 не является многогранником, так как она не удовлетворяет определению тела из пункта 2.7 — внутренность этой фигуры несвязна, так как состоит из двух отдельных фигур.

**Вопрос.** Будет ли многогранником фигура, полученная удалением из куба всех внутренних точек октаэдра, вершины которого совпадают с центрами граней заданного куба?

**4.4.\*\* Пример области с границей из бесконечного числа отрезков.** Возьмём на окружности точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , являющиеся вершинами правильного треугольника (рис. 4).

Разделим пополам точкой  $A_1$  меньшую из дуг с концами  $B$  и  $A$ , то есть дугу, не содержащую точ-

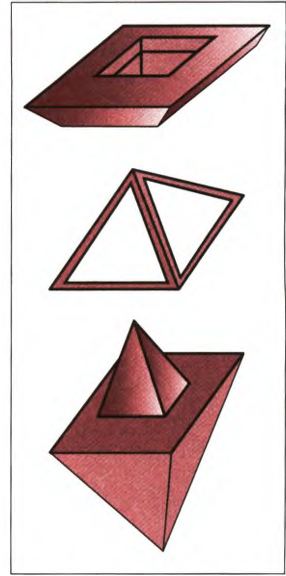


Рис. 3

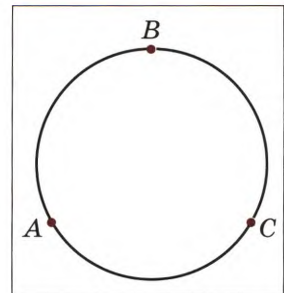


Рис. 4



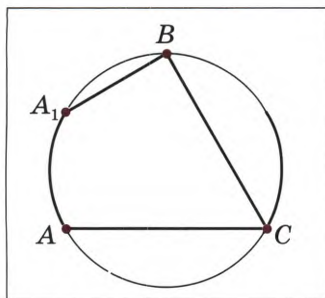


Рис. 5

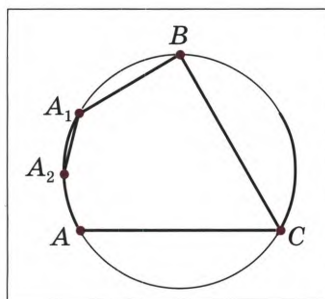


Рис. 6

ку  $C$ , и рассмотрим замкнутую плоскую фигуру  $ACBA_1A$ , ограниченную отрезками  $AC$ ,  $CB$ ,  $BA_1$  и меньшей из дуг с концами  $A_1$  и  $A$  (рис. 5).

Аналогично разделим пополам точкой  $A_2$  меньшую из дуг с концами  $A_1$  и  $A$  и рассмотрим замкнутую плоскую фигуру  $ACBA_1A_2A$ , ограниченную отрезками  $AC$ ,  $CB$ ,  $BA_1$ ,  $A_1A_2$  и меньшей из дуг с концами  $A_2$ ,  $A$  (рис. 6).

Продолжая этот процесс, после  $s$ -го шага разделим пополам точкой  $A_{s+1}$  меньшую из дуг с концами  $A_s$  и  $A$  и рассмотрим замкнутую плоскую фигуру  $ACBA_1A_2...A_sA$ , ограниченную отрезками  $AC$ ,  $CB$ ,  $BA_1$ ,  $A_1A_2$ , ...,  $A_sA_{s+1}$  и меньшей из дуг с концами  $A_{s+1}$ ,  $A$ .

Рассмотрим теперь область  $\Phi$ , граница которой состоит из отрезков  $AC$ ,  $CB$  и последовательности отрезков:  $BA_1$ ,  $A_1A_2$ , ...,  $A_sA_{s+1}$ , ... . Область  $\Phi$  является замкнутой областью, но не является многоугольником.

Аналогично если не требовать конечности числа многоугольников, ограничивающих многогранник, то также можно построить не являющееся многогранником тело, граница которого состоит из бесконечного числа многоугольников.

**Вопрос.** Как построить тело, граница которого состоит из бесконечного числа многоугольных областей?

**4.5. Выпуклые многогранники.** Многогранник, являющийся выпуклой фигурой, называется *выпуклым многогранником*.

Примерами выпуклых многогранников являются правильные пирамиды, правильные призмы, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Многогранники, изображённые на рис. 3, не являются выпуклыми.

Выпуклый многогранник нетрудно разрезать на пирамиды, то есть представить в виде объединения конечного числа пирамид, попарно не имеющих общих внутренних точек.

Для этого достаточно взять внутреннюю точку многогранника и соединить её со всеми вершинами. Например, соединив центр правильной шестиугольной призмы с вершинами, мы получим две шестиугольные



пирамиды и шесть четырёхугольных пирамид (рис. 7).

Произвольную пирамиду можно разрезать на треугольные пирамиды. Для этого достаточно разбить основание пирамиды на треугольники и каждый треугольник считать основанием соответствующей пирамиды. Например, на рис. 8 пятиугольная пирамида  $SABCDE$  разрезана на треугольные пирамиды  $SABE$ ,  $SBCE$  и  $SBDE$ .

Аналогично любой выпуклый многогранник можно разбить на треугольные пирамиды.

**Вопрос.** Выпуклый многогранник плоскостью разрезан на два многогранника. Как доказать, что получившиеся многогранники — выпуклые?

#### 4.6. Усечённая пирамида.

**Пример.** Рассмотрим пирамиду  $SABC$ . Параллельно основанию  $ABC$  проведём плоскость, пересекающую боковые рёбра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно. Эта плоскость разбивает пирамиду на треугольную пирамиду  $SA_1B_1C_1$  и многогранник  $ABCA_1B_1C_1$ , который называется *усечённой пирамидой* (рис. 9). Параллельные грани  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  называются *основаниями* усечённой пирамиды. Расстояние между плоскостями оснований усечённой пирамиды называют *высотой* этой усечённой пирамиды. Грани  $AA_1B_1B$ ,  $BB_1C_1C$ ,  $AA_1C_1C$  называются *боковыми гранями* усечённой пирамиды.

Основания усечённой пирамиды имеют соответственно параллельные стороны, поэтому являются подобными треугольниками. Боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.

Усечённую пирамиду можно всегда достроить до пирамиды.

**Вопрос.** Как доказать, что площадь боковой поверхности правильной усечённой тре-

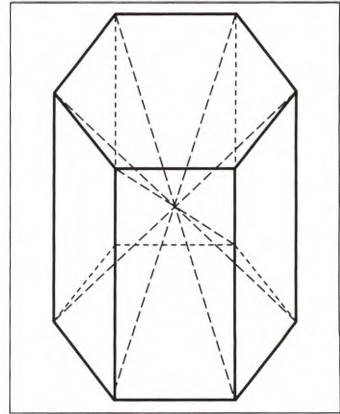


Рис. 7

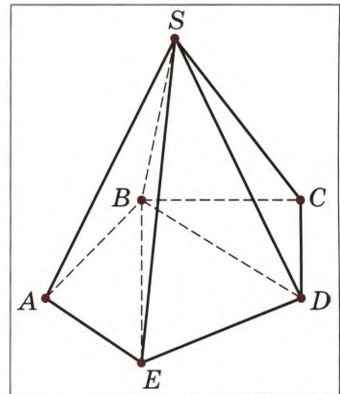


Рис. 8

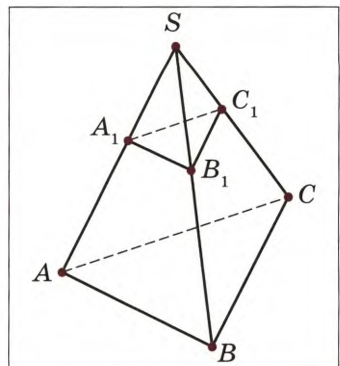


Рис. 9

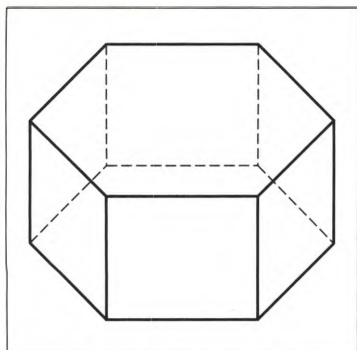


Рис. 10

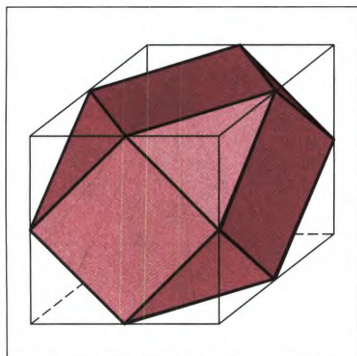


Рис. 11

угольной пирамиды больше разности площадей оснований?

#### 4.7.\*\* Полуправильные многогранники.

Наряду с правильными многогранниками рассматривают также *полуправильные* многогранники. Ограничимся несколькими примерами.

У выпуклых полуправильных многогранников каждая грань является правильным многоугольником, причём не все грани равны. В каждой вершине полуправильного многогранника соединяется по одинаковому числу граней фиксированного вида, причём схема их соединения одна и та же.

Среди призм полуправильным многогранником является любая  $n$ -угольная призма, боковые грани которой — квадраты. У правильной шестиугольной призмы, изображённой на рис. 10, в каждой вершине соединяются один правильный шестиугольник и два квадрата.

На рис. 11 изображён полуправильный многогранник, у которого в каждой вершине соединяются чередующимся образом по два правильных треугольника и по два квадрата.

**Вопрос.** Какие примеры полуправильных многогранников можете привести вы?

#### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется многоугольная область?
2. Сформулируйте определение многогранника.
3. Какой многогранник называется выпуклым?
4. Докажите, что каждый выпуклый многогранник можно разрезать на конечное число треугольных пирамид.
- 5.\*\* Докажите, что любой многогранник можно разрезать на конечное число пирамид.
6. Как построить усечённую пирамиду?
7. Что называют основаниями усечённой пирамиды?



8. Что называют боковыми гранями усечённой пирамиды?
9. Что называют высотой усечённой пирамиды?
- 10.\*\* Какие примеры полуправильных многогранников вы знаете?

### Задачи и упражнения ■

1. Докажите, что выпуклую многоугольную область можно разрезать на конечное число треугольников.

2. Докажите, что круг можно представить в виде объединения бесконечного числа треугольников.

3. Приведите пример многогранника, у которого одна грань — четырёхугольник, все остальные грани — треугольники, но который не является пирамидой.

4. Приведите пример многогранника, у которого две грани — равные пятиугольники, все остальные грани — параллелограммы, но который не является призмой.

5.\*\* В правильную усечённую треугольную пирамиду, у которой в основаниях правильные треугольники со сторонами 1 см и 2 см, можно вписать шар. Найдите радиус этого шара.

6.\*\* Докажите, что около каждой правильной усечённой пирамиды можно описать сферу.

7.\*\* В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  нижнее основание  $ABCD$  — квадрат со стороной 3, верхнее основание  $A_1 B_1 C_1 D_1$  — квадрат со стороной 1, боковые рёбра  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  имеют длину 3. Точка  $M$  — середина ребра  $C_1 D_1$ . Через точку  $M$  проходит прямая, пересекающая прямые  $AA_1$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Найдите длину отрезка  $PQ$ .

8.\*\* Основания усечённой пирамиды являются правильными треугольниками, а их периметры относятся как 8:5. Сфера с центром, расположенным в плоскости меньшего из оснований, касается другого основания и продолжений боковых граней пирамиды. Найдите углы, образованные боковыми рёбрами пирамиды с большим основанием, если известно, что все эти углы одинаковы.

### Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  не лежат на одной прямой. Какое минимальное выпуклое множество содержит эти точки?

- 1) объединение отрезков  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$
- 2) круг, ограниченный окружностью, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$



3) плоский треугольник  $ABC$

4) параллелограмм, у которого тремя вершинами являются точки  $A$ ,  $B$  и  $C$

**1.2.\*\*** Рёбра одного из оснований правильной усечённой треугольной пирамиды равны 2, а все остальные рёбра равны 1. Чему равен радиус сферы, описанной около этой пирамиды?

- 1)  $\frac{\sqrt{21}}{4}$       2)  $\frac{\sqrt{22}}{4}$       3)  $\frac{\sqrt{23}}{4}$       4)  $\frac{\sqrt{24}}{4}$

**1.3.\*\*** Грани полуправильного многогранника с 12 вершинами — квадраты и треугольники. К каждой вершине примыкают два квадрата и два треугольника. Сколько граней у этого многогранника?

- 1) 10      2) 12      3) 14      4) 16

**1.4.** В пирамиде  $SABC$  рёбра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  попарно перпендикулярны и имеют длину  $a$ . Чему равна высота этой пирамиды, опущенная из вершины  $S$ ?

- 1)  $\frac{a}{3}$       2)  $\frac{a}{2}$       3)  $\frac{a}{\sqrt{3}}$       4)  $\frac{a}{\sqrt{2}}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какой вид может иметь пересечение прямой с выпуклой фигурой в пространстве?

- 1) интервал  
2) объединение двух непересекающихся интервалов  
3) луч  
4) прямая

**2.2.\*\*** Какой многоугольник может быть основанием правильной пирамиды, боковые грани которой — равносторонние треугольники?

- 1) четырёхугольник      2) пятиугольник  
3) шестиугольник      4) семиугольник

**2.3.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , высота которой равна 8, на боковых рёбрах  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  выбираются соответственно точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ . В каких случаях многогранник с вершинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  равен многограннику с вершинами  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ?

- 1)  $AK = 4$ ,  $BL = 3$ ,  $CM = 5$       2)  $AK = 1$ ,  $BL = 4$ ,  $CM = 5$   
3)  $AK = 5$ ,  $BL = 2$ ,  $CM = 4$       4)  $AK = 2$ ,  $BL = 4$ ,  $CM = 6$

**2.4.\*\*** В многограннике  $ABCA_1B_1C_1$  грань  $BB_1C_1C$  является квадратом со стороной 20; ребро  $AA_1$  параллельно ребру  $BB_1$ , грани  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  —

правильные треугольники и  $AA_1 < BB_1$ . Каким может быть расстояние от вершины  $A$  до плоскости грани  $BB_1C_1C$ ?

1) 14

2) 15

3) 16

4) 17

## Мини-исследования к главе 8 ■

### Мини-исследование 24

На числовой прямой рассматривается множество  $\Phi$ , состоящее из всех конечных десятичных дробей, принадлежащих отрезку  $[0;1]$ . Установить, какие точки являются внутренними, внешними и граничными для множества  $\Phi$ .

*Подсказка:* показать, что отрезок  $[0;1]$  не содержит внутренних точек множества  $\Phi$ .

### Мини-исследование 25

Доказать, что рассматриваемая в пространстве плоская замкнутая фигура будет замкнутой и в пространстве.

Предлагается следующая схема исследования.

1. Показать, что если точка  $M$  не лежит в плоскости фигуры, то она не может быть граничной. В этом случае точка находится на фиксированном расстоянии от плоскости.

2. Показать, что если точка  $M$  лежит в плоскости фигуры и является граничной, то она является граничной и в плоскости. Действительно, если шаровая окрестность точки  $M$  содержит точку нашей фигуры, то она обязательно содержится в плоскости. Поэтому круговая окрестность точки  $M$  того же радиуса в плоскости также содержит точку нашей фигуры.

### Мини-исследование 26

На плоскости даны четыре выпуклые фигуры. Известно, что пересечение любых трёх из них непусто. Докажите, что тогда пересечение всех четырёх фигур — непусто.

Пусть  $A_1$  — общая точка фигур  $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ ;  $A_2$  — общая точка фигур  $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4$ ;  $A_3$  — общая точка фигур  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_4$ ;  $A_4$  — общая точка фигур  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ . Рассмотрите три случая:

1) точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  — вершины выпуклого четырёхугольника;

2) одна из точек  $A_i$  лежит в треугольнике с вершинами в остальных точках;

3) все точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  лежат на одной прямой.

Рассмотрите обобщение, известное как теорема Хелли: если на плоскости даны  $n$  выпуклых фигур, причём пересечение любых трёх из них непусто, то пересечение всех этих фигур — непусто.





## Глава 9

### ПЛОЩАДЬ И ОБЪЁМ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

В этой главе рассказывается об общих подходах к определению площадей и объёмов, берущих начало ещё в античные времена и составляющих основу современных представлений теории меры. Рассматривается понятие определённого интеграла, изучаются его свойства и применение к вычислению площадей и объёмов.

#### ■ § 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФИГУРЫ

**1.1. Свойства площади.** Для некоторых фигур плоскости определяют численную характеристику, которую называют площадью. Ранее вы познакомились с основными свойствами площади плоских фигур. Напомним эти свойства.

Площадь выражается неотрицательным числом и имеет следующие свойства:

- 1) **монотонность** — если одна фигура содержится внутри другой, то площадь внутренней фигуры не больше площади внешней;
- 2) **равные фигуры имеют равные площади**;
- 3) **аддитивность** — если какая-нибудь фигура состоит из двух частей, не имеющих общих внутренних точек, то площадь всей фигуры равна сумме площадей составляющих её частей;
- 4) **единицей площади** считается площадь квадрата, длина стороны которого равна выбранной единице длины.

С этими свойствами связан целый ряд вопросов, с давних пор привлекавших внимание математиков: можно ли приписать определённую площадь каждой плоской фигуре, не нарушая свойств 1–4, сколькими способами это можно сделать, как указать простые формулы для вычисления площадей тех или иных классов фигур и так далее. Эти вопросы оказались настолько трудными и так тесно связанными с основами математики, что ответы на них получены сравнительно недавно — в начале XX века, хотя они интенсивно исследовались с незапамятных времён. В частности, ещё античными учёными было показано, что простейшие геометрические фигуры — прямоугольники, параллелограммы, треугольники и трапеции — имеют площади, а также установлены известные формулы для их площадей.



**Вопрос.** Каковы формулы площадей треугольника, параллелограмма и трапеции?

**1.2. Палетки.** Простейшим инструментом для приближённого измерения площадей является *палетка*, то есть равномерная сетка из одинаковых квадратов. Сетку накладывают на измеряемую фигуру и считают суммарную площадь квадратов, полностью поместившихся внутри фигуры (рис. 1). Сумма площадей этих квадратов является приближённым значением искомой площади с недостатком. Если же при этом наложить подсчитать, сколько квадратов имеют с данной фигурой общие точки, то получится приближённое значение площади с избытком. Разность между этими приближениями определяет оценку погрешности измерения. Когда погрешность слишком велика, берут палетку с более мелким шагом и снова повторяют процедуру измерения площади.

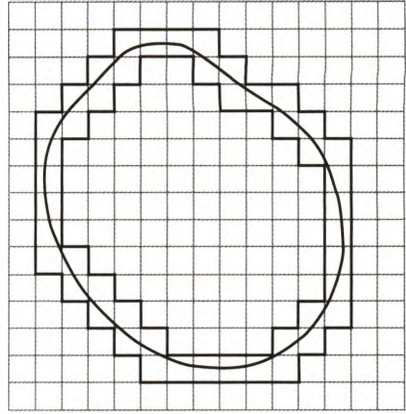


Рис. 1

**Вопрос.** Как выводится формула для площади прямоугольника?

**1.3. Элементарные фигуры.** Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Для каждого целого числа  $a$  через точку  $A(a;0)$  оси  $Ox$  проведём прямую, параллельную оси  $Oy$ . Аналогично для каждого целого числа  $b$  через точку  $B(0;b)$  оси  $Oy$  проведём прямую, параллельную оси  $Ox$ . В результате вся плоскость покроется сетью одинаковых квадратов единичной площади (рис. 2). Эту сеть будем называть *сетью нулевого ранга*. Иногда такую сеть квадратов называют *палеткой нулевого ранга*, связанной с заданной прямоугольной системой координат.

Если для каждого целого числа  $a$  через точку  $A\left(\frac{m}{2};0\right)$  провести прямую, параллельную оси  $Oy$ , и через точку  $B\left(0;\frac{m}{2}\right)$  провести прямую, параллельную оси  $Ox$ , то получится сеть с более мелким шагом:

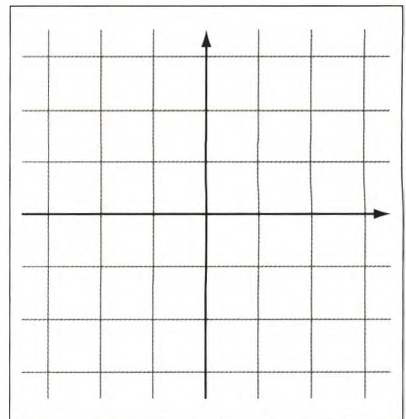


Рис. 2

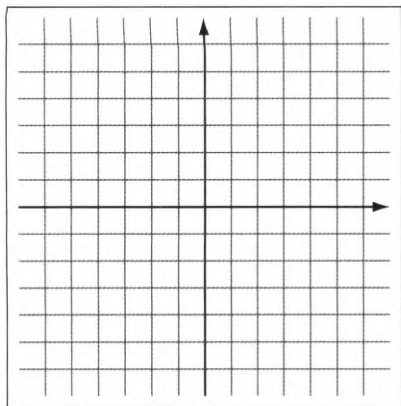


Рис. 3

каждый из квадратов сети нулевого ранга разделится на четыре равных квадрата площади  $\frac{1}{4}$  (рис. 3). Эту сеть назовём *сетью первого ранга* или *палеткой первого ранга*.

Процесс деления пополам шагов сетки можно продолжить. Разделив пополам стороны квадратов сети первого ранга, получим сеть второго ранга, затем — сеть третьего ранга и так далее. Для каждого целого числа  $m$  через точку  $A\left(\frac{m}{2^n}; 0\right)$  проведём прямую, параллельную оси  $Oy$ , и через точку  $B\left(0; \frac{m}{2^n}\right)$  проведём

прямую, параллельную оси  $Ox$ . В результате получим сеть квадратов ранга  $n$ , при этом сторона наименьшего квадрата этой сети равна  $\frac{1}{2^n}$ , а площадь наименьшего квадрата этой сети равна  $\frac{1}{4^n}$ . При переходе от сети ранга  $n$  к сети ранга  $n + 1$  каждый квадрат делится на четыре одинаковых меньших квадрата.

Говоря о «квадрате сети ранга  $n$ », мы имеем в виду соответствующий замкнутый квадрат, то есть часть плоскости, ограниченную контуром квадрата, включая сам этот контур.

**Вопрос.** Сколько квадратов сети ранга  $n$  имеют общие точки с заданным квадратом сети ранга  $n$ ?

**1.4. Площадь элементарных фигур.** Легко найти площадь любой фигуры, составленной из квадратов сети ранга  $n$ . Достаточно сосчитать число таких квадратов и умножить его на  $\frac{1}{4^n}$  — площадь одного квадрата  $n$ -го ранга.

Элементарной фигурой ранга  $n$  называется объединение конечного числа квадратов сети ранга  $n$ . Площадь (или мера) элементарной фигуры равна сумме площадей составляющих её квадратов ранга  $n$ .

Площадь элементарной фигуры  $F$  будем обозначать через  $S(F)$ .

Одну и ту же элементарную фигуру можно составлять из квадратов разного ранга. Пусть, например, фигура  $F$  составлена из  $m$  квадратов  $n$ -го ранга. Следовательно, её площадь  $S(F)$  равняется  $\frac{m}{4^n}$ . Разделим каждый квадрат ранга  $n$  на 4 квадрата ранга  $n + 1$



(рис. 4). Получится разложение той же самой фигуры  $F$  в объединение  $4m$  квадратов ранга  $n + 1$ , однако площадь при этом никак не изменится, поскольку

$$\frac{4m}{4^{n+1}} = \frac{4m}{4 \cdot 4^n} = \frac{m}{4^n}.$$

Точно так же, если разделить каждый квадрат ранга  $n$  на  $4^k$  квадратов ранга  $n + k$ , то получится разложение фигуры  $F$  в объединение  $4^k m$  квадратов ранга  $n + k$ . Сумма их площадей снова равняется

$$\frac{4^k m}{4^{n+k}} = \frac{4^k m}{4^k \cdot 4^n} = \frac{m}{4^n}.$$

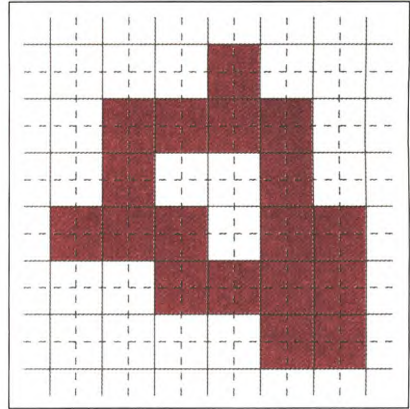


Рис. 4

Таким образом, всякая элементарная фигура ранга  $n$  одновременно является элементарной фигурой ранга  $n + k$ , причём значение площади не зависит от того, какой ранг ей приписан. Поэтому конкретное значение ранга бывает несущественным, и мы часто будем его опускать, говоря просто об «элементарных фигурах».

Пустое множество удобно считать элементарной фигурой (любого ранга), площадь которой равна нулю.

**Вопрос.** Можно ли из 548 квадратов ранга 8 составить элементарную фигуру ранга 5?

**1.5. Аддитивность и монотонность площади для элементарных фигур.** Площадь элементарных фигур обладает свойствами 1–4, перечисленными в пункте 1.1. Докажем свойство 3.

Пусть  $F$  и  $G$  — элементарные фигуры рангов  $m$  и  $n$  соответственно. Положим  $k = \max(m; n)$  и будем считать, что фигура  $F$  составлена из  $P$  квадратов, а  $G$  — из  $Q$  квадратов ранга  $k$ . Если  $F$  и  $G$  не имеют общих внутренних точек, то в состав объединения  $F \cup G$  входят  $P + Q$  квадратов ранга  $k$ . Значит,

$$S(F \cup G) = \frac{P + Q}{4^k} = \frac{P}{4^k} + \frac{Q}{4^k} = S(F) + S(G).$$

Доказанное свойство справедливо для любого конечного набора элементарных фигур. Это свойство называется *аддитивностью* площади.

Непосредственно из определений вытекает, что если элементарная фигура  $F$  содержится в элементарной фигуре  $G$ , то  $S(F) \leq S(G)$ . В результате получаем свойство 1, которое называется *монотонностью* площади.



Таким образом, площадь элементарных фигур аддитивна и монотонна.

**Вопрос.** Как доказать, что если  $F$  и  $G$  — элементарные фигуры, причём  $F \subseteq G$  и  $S(F) = S(G)$ , то  $F = G$ ?

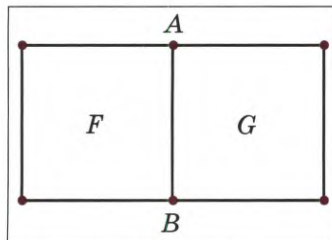


Рис. 5

**1.6.\*\* Объединение и пересечение элементарных фигур.** Очевидно, что теоретико-множественное объединение двух элементарных фигур всегда является элементарной фигурой. Однако для пересечений и разностей это не так.

**Пример 1.** Пусть  $F$  и  $G$  — два различных квадрата ранга 0, пересечением которых является общая сторона  $AB$  (рис. 5). Отрезок  $AB$  не является элементарной фигурой, поскольку

ку не существует такого натурального числа  $n$ , чтобы  $AB$  был объединением квадратов ранга  $n$ .

Определим теперь для элементарных фигур новую операцию — элементарное пересечение. Эта операция является аналогом операции пересечения множеств. В результате применения этой операции к элементарным фигурам получаются элементарные фигуры.

Заметим, для элементарной фигуры  $F$  ранга  $n_1$  и элементарной фигуры  $G$  ранга  $n_2$  их общим рангом можно считать наибольший из рангов  $n_1$  и  $n_2$ .

Для элементарных фигур  $F$  и  $G$  ранга  $n$  их элементарным пересечением называется объединение всех квадратов ранга  $n$ , каждый из которых входит в состав как первой, так и второй фигуры одновременно.

Элементарное пересечение фигур  $F$  и  $G$  будем обозначать через  $F \overset{e}{\cap} G$ .

Может оказаться, что элементарное пересечение или элементарная разность элементарных фигур окажется пустым множеством. Напомним, что мы условились считать пустое множество элементарной фигурой.

**Вопрос.** В каком случае непустое теоретико-множественное пересечение элементарных фигур является элементарным пересечением этих фигур?

**1.7.\*\* Разность элементарных фигур.** Напомним, что разностью  $F \setminus G$  множеств  $F$  и  $G$  называется множество всех элементов из  $F$ , которые не принадлежат множеству  $G$ .

Для элементарных фигур  $F$  и  $G$  ранга  $n$  их элементарной разностью  $F \overset{e}{-} G$  называется объединение всех квадратов ранга  $n$ , каждый из которых входит в состав фигуры  $F$  и не входит в состав фигуры  $G$ .

**Вопрос.** Чему равна площадь элементарной разности между элементарной фигурой  $F$  и пустым множеством?

**1.8.\*\* Свойства операций над элементарными фигурами.** Из определения операций над элементарными фигурами следует, что для любых элементарных фигур справедливы формулы

$$F = (F \overset{e}{\cap} G) \cup (F \overset{e}{-} G),$$

$$F \cup G = (F \overset{e}{\cap} G) \cup (F \overset{e}{-} G) \cup (G \overset{e}{-} F),$$

причём фигуры, обозначения которых стоят в скобках в правой части каждого из равенств, не имеют общих внутренних точек. Из приведённых формул и из свойства аддитивности площади элементарных фигур вытекает, что

$$S(F) = S(F \overset{e}{\cap} G) + S(F \overset{e}{-} G),$$

$$S(F \cup G) = S(F \overset{e}{\cap} G) + S(F \overset{e}{-} G) + S(G \overset{e}{-} F) = S(F) + S(G) - S(F \overset{e}{\cap} G).$$

В частности, если  $G \subset F$ , то  $G \overset{e}{-} F = \emptyset$ ,  $F \overset{e}{\cap} G = G$  и

$$S(F \overset{e}{-} G) = S(F) - S(G).$$

**Вопрос.** Пусть  $F$  и  $G$  — такие элементарные фигуры, что  $S(F \cup G) = S(F) + S(G)$ . Что можно сказать об элементарном пересечении  $F \overset{e}{\cap} G$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. В чём состоят основные свойства площади?
2. Как пользоваться палеткой для приближённого измерения площадей?
3. Как устроена сеть ранга  $n$  и что называется элементарной фигурой?
4. Как определяется площадь элементарной фигуры?
5. Почему значение площади элементарной фигуры не зависит от приписанного ей ранга?
6. Сформулируйте свойство аддитивности площади элементарных фигур.
7. Сформулируйте свойство монотонности площади элементарных фигур.
- 8.\*\* Что называется элементарным пересечением и элементарной разностью элементарных фигур?

### Задачи и упражнения ■

1. Для прямоугольника  $M$  с вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(0;\frac{2}{3})$ ,  $C(1;\frac{2}{3})$ ,  $D(1;0)$  найдите элементарные фигуры  $N$  и  $K$  такие, что  $M \subseteq N$ ,  $M \supseteq K$ , а модуль разности площадей фигур  $K$  и  $N$  меньше 0,01.



2. Для треугольника  $M$  с вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(2;2)$ ,  $C(2;0)$  найдите элементарную фигуру  $N$  такую, что  $N \subseteq M$ , а площадь фигуры  $N$  больше 1,8.

3.\* Для треугольника  $M$  с вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(2;3)$ ,  $C(2;0)$  найдите элементарную фигуру  $K$  такую, что  $K \supseteq M$ , а площадь фигуры  $K$  меньше 3,2.

4.\*\* Для отрезка  $M$  с концами  $A(0;0)$  и  $B(1;2)$  найдите элементарную фигуру  $K$  такую, что  $K \supseteq M$ , а площадь фигуры  $K$  меньше 0,1.

5.\*\* Для трапеции  $M$  с вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(1;2)$ ,  $C(2;2)$ ,  $D(4;0)$  найдите элементарные фигуры  $N$  и  $K$  такие, что  $M \subseteq N$ ,  $M \supseteq K$ , а модуль разности площадей фигур  $K$  и  $N$  меньше 0,1.

### ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Элементарная фигура состоит из 8 квадратов палетки ранга 3. Сколько квадратов палетки ранга 5 составляют эту фигуру?

- 1) 32                      2) 64                      3) 128                      4) 256

1.2. Элементарная фигура состоит из одного квадрата палетки ранга 0, из одного квадрата ранга 1, одного квадрата ранга 2, одного квадрата ранга 3, одного квадрата ранга 4, одного квадрата ранга 5, причём ни один из квадратов не лежит внутри другого. Сколько квадратов палетки ранга 5 составляют эту фигуру?

- 1) 85                      2) 341                      3) 1365                      4) 3413

1.3. Сколько квадратов палетки ранга  $n$ , где  $n$  — натуральное число, имеют общие точки с контуром квадрата нулевого ранга?

- 1)  $2^n$                       2)  $2^{n-1}$                       3)  $2^{n+2}$                       4)  $2^{n+3}$

1.4. Чему равна площадь равностороннего треугольника со стороной  $4a$ ?

- 1)  $a^2\sqrt{3}$                       2)  $2a^2\sqrt{3}$                       3)  $4a^2\sqrt{3}$                       4)  $16a^2\sqrt{3}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Для каких из указанных значений  $S$  существует элементарная фигура площади  $S$ ?

- 1)  $S = 2$                       2)  $S = \frac{5}{2}$                       3)  $S = \frac{4}{3}$                       4)  $S = \frac{5}{4}$

2.2. В каких из указанных случаев квадрат  $ABCD$  на координатной плоскости является элементарной фигурой?

- 1)  $A(1;-1)$ ,  $B(-1;-1)$ ,  $C(-1;1)$ ,  $D(1;1)$   
2)  $A(1;0)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(-1;0)$ ,  $D(0;-1)$



$$3) A(0;0), B\left(0;\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), D\left(\frac{1}{2};0\right)$$

$$4) A(0;0), B\left(0;\frac{1}{3}\right), C\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), D\left(\frac{1}{3};0\right)$$

**2.3.** Площади каких прямоугольников со сторонами  $a, b$  больше 2?

$$1) a = 1,2; b = 1,8$$

$$2) a = 1,3; b = 1,5$$

$$3) a = 1,4; b = 1,6$$

$$4) a = 1,1; b = 1,9$$

**2.4.** Какие из величин равны  $51\,236\text{ мм}^2$ ?

$$1) 5,1236\text{ дм}^2$$

$$2) 0,51236\text{ дм}^2$$

$$3) 512,36\text{ см}^2$$

$$4) 5123,6\text{ см}^2$$

## § 2. МЕРА ЖОРДАНА ■

**2.1. Измеримость по Жордану на плоскости.** Приближая произвольные геометрические фигуры элементарными, можно распространить понятие площади на очень широкий класс множеств. Такой идеей руководствовались ещё древнегреческие учёные Евдокс, Евклид и Архимед, которые использовали её для вычисления площади (или меры) некоторых конкретных фигур. В строгую теорию меры эта идея оформилась на рубеже XIX–XX веков благодаря работам таких математиков, как Камилл Жордан, Анри Лебег и др.

Пусть  $F$  — произвольная геометрическая фигура (ограниченное множество точек) на плоскости. Для всякого натурального  $n$  составим две элементарных фигуры  $F'_n$  и  $F''_n$  рангов  $n$  по правилам:  $F'_n$  образована всеми квадратами  $n$ -го ранга, целиком содержащимися в  $F$  (рис. 1), а  $F''_n$  — всеми квадратами ранга  $n$ , имеющими с  $F$  хотя бы по одной общей точке (рис. 2). В частности, фигура  $F'_n$  может оказаться пустой. Даже  $F''_n$  будет пустой, если  $F = \emptyset$ . Тем не менее во всех случаях

$$F'_n \subseteq F \subseteq F''_n.$$

С увеличением номера  $n$  фигура  $F'_n$  может только расширяться, а  $F''_n$  — только сужиться:

$$F'_n \subseteq F'_{n+1} \subseteq F \subseteq F''_{n+1} \subseteq F''_n.$$

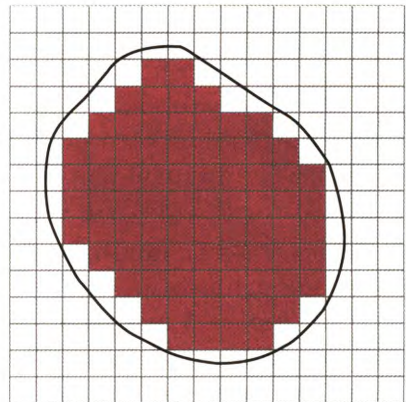


Рис. 1

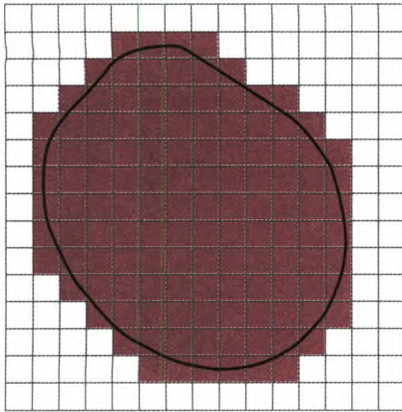


Рис. 2

Отсюда и из монотонности площади элементарных фигур вытекает, что

$$S(F'_1) \leq \dots \leq S(F'_n) \leq S(F'_{n+1}) \leq S(F''_{n+1}) \leq S(F''_n) \leq \dots \leq S(F''_1).$$

Иными словами, числовая последовательность  $S(F'_n)$  не убывает и ограничена сверху, а числовая последовательность  $S(F''_n)$  не возрастает и ограничена снизу. По теореме о пределе монотонных последовательностей, существуют пределы:  $S'(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F'_n)$ ,  $S''(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F''_n)$ , и при этом

$$S'(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S(F''_n) = S''(F).$$

Фигура  $F$  плоскости называется измеримой по Жордану, если  $S'(F) = S''(F)$ .

Иногда для краткости фигуру называют *измеримой*, если эта фигура измерима по Жордану.

Если значения  $S'(F)$  и  $S''(F)$  не совпадают, то такую фигуру называют *неизмеримой*.

Общее значение  $S'(F)$  и  $S''(F)$  измеримой фигуры  $F$  называется *мерой Жордана* фигуры  $F$ .

Меру Жордана плоской фигуры иногда называют *жордановой мерой* этой фигуры.

Для меры Жордана измеримой фигуры  $F$  будем использовать обозначение  $S(F)$ .

**Вопрос.** Как доказать, что всякий отрезок, расположенный на оси  $Ox$ , имеет нулевую меру Жордана?

**2.2.\*\* Пример множества, неизмеримого по Жордану.** Приведём пример неизмеримого по Жордану множества точек на плоскости. Рассмотрим единичный квадрат

$$E = \{(x; y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

и выберем в нём подмножество  $F$ , состоящее из всех точек с рациональными координатами.

Понятно, что никакой квадрат ранга  $n$  не может целиком принадлежать множеству  $F$ , так как в любом квадрате есть точки с иррациональными координатами. Значит,  $F'_n = \emptyset$  при любом натуральном  $n$ , поэтому

$$S'(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F'_n) = S(\emptyset) = 0.$$



С другой стороны, любой заключённый в  $E$  квадрат ранга  $n$  обязательно содержит точки с рациональными координатами. Поэтому всякий такой квадрат войдёт в состав фигуры  $F_n''$ . Следовательно,  $E \subset F_n''$  и

$$S''(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F_n'') \geq S(E) = 1.$$

Итак, значения  $S'(F)$  и  $S''(F)$  различны, а потому фигура  $F$  неизмерима по Жордану.

**Вопрос.** Что можно сказать об измеримости дополнения к построенному множеству  $F$  до единичного квадрата  $E$ ?

**2.3. Монотонность меры Жордана.** Непосредственно из определения вытекает монотонность меры Жордана. Иными словами, если фигуры  $F$  и  $G$  измеримы, причём  $G \subseteq F$ , то  $S(G) \leq S(F)$ .

В самом деле, из включения  $G \subseteq F$  вытекает включение элементарных фигур  $G'_n \subseteq F'_n$  при всех натуральных  $n$ . Согласно свойству монотонности площади для элементарных фигур имеем  $S(G'_n) \leq S(F'_n)$ . Устремляя  $n$  к бесконечности, по теореме о предельном переходе в неравенстве, получим  $S(G) \leq S(F)$ .

**Вопрос.** Пусть фигура  $G$  содержится в фигуре  $F$ , мера Жордана которой равна нулю. Что можно сказать об измеримости  $G$ ?

**2.4. Меры Жордана равных фигур.** Важным свойством площади является следующее:

если две фигуры равны, то измеримость одной из них влечёт измеримость другой, причём их жордановы меры совпадают.

Доказательство этого утверждения достаточно сложно и обычно рассматривается в университетских курсах математического анализа. Мы это доказательство опускаем. В итоге, рассмотрев свойства измеримых множеств на плоскости, мы получаем, что мера Жордана обладает всеми свойствами площади, сформулированными в начале предыдущего параграфа.

**Вопрос.** Почему любой многоугольник имеет площадь?

**2.5. Критерий измеримости.** Приведём критерий измеримости, который может быть использован не только для доказательства измеримости тех или иных фигур, но и для вычисления приближённых значений мер этих фигур.

Фигура  $F$  измерима по Жордану в том и только в том случае, когда для всякого  $\varepsilon > 0$  существуют такие измеримые фигуры  $F'_\varepsilon$  и  $F''_\varepsilon$ , что  $F'_\varepsilon \subseteq F \subseteq F''_\varepsilon$  и  $S(F''_\varepsilon) - S(F'_\varepsilon) < \varepsilon$ .



Из критерия измеримости следует утверждение:  
если для последовательностей  $G_n$  и  $H_n$  измеримых фигур выполнены условия

$$G_n \subseteq F \subseteq H_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [S(H_n) - S(G_n)] = 0,$$

то фигура  $F$  измерима. Более того,

$$S(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(H_n).$$

**Вопрос.** Как доказать, что всякий отрезок имеет нулевую меру Жордана?

**2.6.\*\* Доказательство критерия измеримости.** Докажем критерий измеримости, приведённый в пункте 2.5.

I. Пусть фигура  $F$  измерима. Тогда пределы последовательностей  $S(F'_n)$  и  $S(F''_n)$  равны. Это значит, что разность  $S(F''_n) - S(F'_n)$  стремится к нулю. Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$  и подберём такой номер  $N$ , чтобы  $S(F''_N) - S(F'_N) < \varepsilon$ . Теперь в качестве искомым фигур  $F'_\varepsilon$  и  $F''_\varepsilon$  можно взять соответственно  $F'_N$  и  $F''_N$ .

II. Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$  и подберём такую пару измеримых фигур  $F'_{\varepsilon/3}$  и  $F''_{\varepsilon/3}$ , что  $F'_{\varepsilon/3} \subseteq F \subseteq F''_{\varepsilon/3}$  и  $S(F''_{\varepsilon/3}) - S(F'_{\varepsilon/3}) < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Поскольку фигура  $F'_{\varepsilon/3}$  измерима, то она содержит некоторую элементарную фигуру  $G_m$  ранга  $m$ , площадь  $S(G_m)$  которой отличается от меры Жордана  $S(F'_{\varepsilon/3})$  менее чем на  $\frac{\varepsilon}{3}$ :

$$S(F'_{\varepsilon/3}) - \frac{\varepsilon}{3} < S(G_m) \leq S(F'_{\varepsilon/3}).$$

Аналогично можно подобрать некоторую элементарную фигуру  $H_k$  ранга  $k$ , содержащую  $F''_{\varepsilon/3}$  и такую, что

$$S(F''_{\varepsilon/3}) \leq S(H_k) < S(F''_{\varepsilon/3}) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если взять теперь  $n \geq \max(m, k)$ , то

$$G_m \subseteq F'_m \subseteq F'_n \subseteq F \subseteq F''_n \subseteq F''_k \subseteq H_k,$$

откуда

$$\begin{aligned} S(F''_n) - S(F'_n) &\leq S(H_k) - S(G_m) < \left[ S(F''_{\varepsilon/3}) + \frac{\varepsilon}{3} \right] - \left[ S(F'_{\varepsilon/3}) - \frac{\varepsilon}{3} \right] = \\ &= S(F''_{\varepsilon/3}) - S(F'_{\varepsilon/3}) + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S(F''_n) - S(F'_n)] = 0, \text{ и } S'(F) = S''(F).$$

Поэтому фигура  $F$  измерима.

**Вопрос.** Как доказать измеримость треугольника  $ABC$  с вершинами  $A(0; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $C(2; 0)$ ?

**2.7. Аддитивность меры Жордана.** С измеримыми фигурами можно выполнять обычные теоретико-множественные операции: объединение, пересечение, разность. При этом снова будут получаться измеримые фигуры.

Мера Жордана обладает свойством аддитивности.

Если измеримые по Жордану фигуры  $F$  и  $G$  не имеют общих внутренних точек, то  $S(F \cup G) = S(F) + S(G)$ .

**Вопрос.** Почему площадь выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  равна сумме площадей треугольников  $ABC$  и  $ADC$ ?

**2.8.\*\* Доказательство аддитивности меры Жордана.** Докажем измеримость объединения измеримых фигур, а также аддитивное свойство меры Жордана.

Пусть фигуры  $F$  и  $G$  измеримы. Зафиксируем произвольное  $\varepsilon \neq 0$  и заметим, что по определению измеримости для всех достаточно больших  $n$  выполнены неравенства

$$S(F''_n) - S(F'_n) < \frac{\varepsilon}{2}, S(G''_n) - S(G'_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим,  $H'_n = F'_n \cup G'_n$ ,  $H''_n = F''_n \cup G''_n$ , тогда

$$H'_n \subseteq F'_n \cup G'_n \subseteq H''_n,$$

причём

$$H''_n \stackrel{e}{-} H'_n \subseteq (F''_n \stackrel{e}{-} F'_n) \cup (G''_n \stackrel{e}{-} G'_n).$$

Отсюда и из свойств площади элементарных фигур вытекает, что

$$\begin{aligned} S(H''_n) - S(H'_n) &= S(H''_n \stackrel{e}{-} H'_n) \leq S(F''_n \stackrel{e}{-} F'_n) + S(G''_n \stackrel{e}{-} G'_n) = \\ &= [S(F''_n) - S(F'_n)] + [S(G''_n) - S(G'_n)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу критерия измеримости фигура  $F \cup G$  измерима, причём

$$0 \leq S(F \cup G) - S(H'_n) < \varepsilon$$

для всех достаточно больших  $n$ . Это означает, что

$$S(F \cup G) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(H'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F'_n \cup G'_n).$$

Если дополнительно известно, что фигуры  $F$  и  $G$  не имеют общих внутренних точек, то это же самое будет верно и для любых элементарных фигур  $F'_n$  и  $G'_n$ , содержащихся в  $F$  и  $G$  соответственно. Отсюда заключаем, что

$$S(F \cup G) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F'_n \cup G'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F'_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} S(G'_n) = S(F) + S(G).$$

Тем самым аддитивность меры Жордана установлена.

**Вопрос.** Как доказать, что пересечение измеримых фигур является измеримой фигурой?

**2.9. Следствия аддитивности меры Жордана.** Сформулируем несколько основных свойств меры Жордана плоских фигур.

**I. Мера Жордана элементарной фигуры совпадает с площадью этой фигуры.**

Это утверждение следует из того, что мера Жордана квадрата сети любого ранга равна площади этого квадрата.

**II. Пусть фигуры  $F$  и  $G$  измеримы, причём  $G \subseteq F$ . Тогда  $S(F - G) = S(F) - S(G)$ .**

Разложим  $F$  в объединение непересекающихся фигур:  $F = G \cup (F \setminus G)$  и применим свойство аддитивности. Поэтому  $S(F) = S(G) + S(F \setminus G)$ , то есть  $S(F \setminus G) = S(F) - S(G)$ .

**III. Пусть  $F$  и  $G$  — произвольные измеримые фигуры. Тогда  $S(F \cup G) = S(F) + S(G) - S(F \cap G)$ .**

Действительно,  $F \cup G = F \cup [G \setminus (F \cap G)]$ . Заметим, что  $F$  и  $G \setminus (F \cap G)$  не пересекаются, кроме того,  $F \cap G \subseteq G$ , поэтому

$$S(F \cup G) = S(F) + S(G \setminus (F \cap G)) = S(F) + S(G) - S(F \cap G).$$

**IV. Мера Жордана обладает свойствами 1–4 из пункта 1.1.**

Именно поэтому меру Жордана измеримой плоской фигуры называют площадью этой фигуры.

**Вопрос.** Как показать, что мера Жордана единичного квадрата равна 1?

**2.10. Измеримость круга.** Покажем, что произвольный круг  $F$  является измеримой фигурой.

В силу критерия измеримости достаточно построить две такие последовательности многоугольников  $\{G_n\}$  и  $\{H_n\}$ , для которых выполнены условия:

$$G_n \subseteq F \subseteq H_n, \lim_{n \rightarrow \infty} [S(H_n) - S(G_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [S(H_n \setminus G_n)] = 0.$$

В качестве  $H_1$  возьмём произвольный многоугольник, описанный около данного круга. Пусть для определённости это пятиугольник (рис. 3). Соединим хордами все соседние точки касания сторон многоугольника  $H_1$ . Получится вписанный многоугольник, который назовём  $G_1$ .

Для построения  $H_2$  и  $G_2$  разделим пополам каждую дугу, соединяющую соседние вершины многоугольника  $G_1$ , а затем соединим хордами



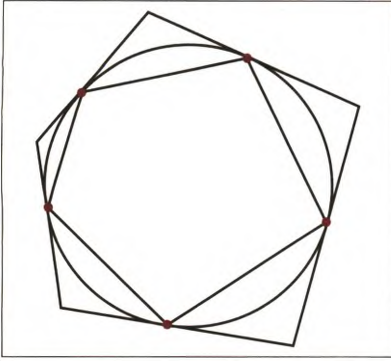


Рис. 3

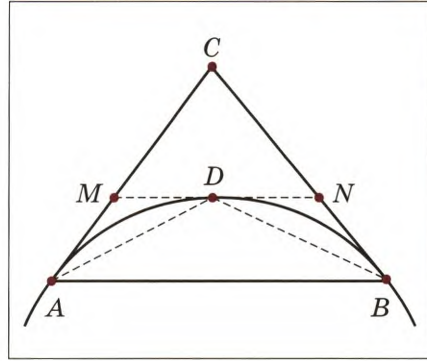


Рис. 4

середины дуг с их концами. Получится вписанный многоугольник  $G_2$  с числом сторон в два раза большим, чем у  $G_1$ . Если теперь через середины дуг провести касательные до пересечения с ближайшими сторонами многоугольника  $H_1$ , то получим описанный многоугольник  $H_2$ , число сторон которого также в два раза больше, чем у  $H_1$ .

Приведённую процедуру удвоения сторон можно продолжить. В результате получится последовательность  $\{G_n\}$  вписанных многоугольников, обладающая свойством  $G_n \subseteq G_{n+1}$ , а также последовательность  $\{H_n\}$  описанных многоугольников, обладающая свойством  $H_n \supseteq H_{n+1}$  при всех натуральных  $n$ .

Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} [S(H_n \setminus G_n)] = 0$ . Разность  $H_n \setminus G_n$  состоит из треугольников, у каждого из которых одна сторона совпадает со стороной  $G_n$ , а две другие — с отрезками касательных, проведённых из соответствующей вершины  $H_n$ . На рис. 4 изображён один из таких треугольников  $ABC$ . При переходе от  $n$  к  $n+1$  середину  $D$  дуги  $AB$  нужно соединить с её концами, а затем провести через точку  $D$  касательную до пересечения с  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

Теперь вместо треугольника  $ABC$  разность  $H_{n+1} \setminus G_{n+1}$  будет содержать пару треугольников  $AMD$  и  $BND$ , сумма площадей которых меньше половины площади трапеции  $AMNB$  и тем более меньше половины площади  $ABC$ . Поэтому  $S(H_{n+1} \setminus G_{n+1}) < \frac{1}{2} S(H_n \setminus G_n)$ ,

$$S(H_n) - S(G_n) = S(H_n \setminus G_n) < \frac{1}{2^{n-1}} S(H_1 \setminus G_1).$$

Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} [S(H_n \setminus G_n)] = 0$ , и круг  $F$  имеет площадь.

**Вопрос.** Чему равна площадь окружности?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Какие фигуры называются измеримыми по Жордану?
- 2.\*\* Приведите пример неизмеримого по Жордану множества.
3. Какое свойство называется монотонностью площади?
4. В чём состоит необходимое и достаточное условие измеримости?
- 5.\* Как доказать критерий измеримости?
6. Что вам известно об объединениях, пересечениях и разностях измеримых фигур?
7. Как формулируется аддитивное свойство площади?
- 8.\* Докажите аддитивность жордановой меры.
9. Почему круг имеет площадь?

### ■ Задачи и упражнения

1. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если известно, что  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ , а угол  $ABC$  в два раза больше угла  $BAC$ .
- 2.\* Площадь остроугольного треугольника  $ABC$  равна 12, его медианы  $AN$  и  $CM$  имеют длину 6 и  $3\sqrt{2}$  соответственно. Найдите стороны треугольника  $ABC$ .
3. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, а длина средней линии равна  $l$ . Найдите площадь трапеции.
4. Площадь трапеции с основаниями длины  $m$  и  $n$  равна  $S$ . Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах диагоналей и оснований этой трапеции.
5. Боковая сторона  $AD$  трапеции  $ABCD$  перпендикулярна основаниям  $AB$  и  $CD$ ,  $AB = 3$ ,  $CD = 1$ . Окружность, построенная на стороне  $BC$  как на диаметре, касается стороны  $AD$ . Найдите площадь трапеции.
- 6.\* Найдите, при каком значении высоты равнобедренная трапеция с острым углом  $45^\circ$  и периметром 8 имеет наибольшую площадь.
- 7.\* Через середину стороны ромба перпендикулярно этой стороне проводится прямая, которая делит ромб на части, площади которых равны 12 и 27. Найдите сторону ромба.
- 8.\* Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  со стороной  $a$  выбрана точка  $M$  так, что площади треугольников  $ABM$ ,  $ACM$  и  $BCM$  пропорциональны числам 1, 2 и 3 соответственно. Найдите длину отрезка  $AM$ .
- 9.\*\* В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$  биссектриса угла  $B$  перпендикулярна боковой стороне  $AD$  и пересекает её в точке  $E$ . В каком отношении прямая  $BE$  делит площадь трапеции, если известно, что  $AE = 2DE$ ?



**10.\*\*** На плоскости заданы две окружности радиусов 3 и 1, расстояние между центрами которых равно  $2\sqrt{2}$ . Прямая  $l$  — общая касательная этих окружностей. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания и ближайшая к  $l$  точка пересечения окружностей.

**11.\*\*** В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BD$ . Известно, что угол  $ABC$  равен  $135^\circ$ , окружность, описанная около треугольника  $BCD$ , касается прямой  $AB$ , и её радиус равен  $R$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

**12.\*\*** Дан правильный треугольник  $ABC$  со стороной 2. Через середину  $M$  стороны  $AB$  проведена прямая, пересекающая сторону  $AC$  в точке  $N$  и продолжение стороны  $BC$  в точке  $D$ . Найдите длину отрезка  $MN$ , если известно, что площади треугольников  $AMN$  и  $NCD$  равны.

**13.\*\*** Равносторонние треугольники  $ABC$  и  $AMN$  расположены так, что стороны  $AB$  и  $AM$  образуют угол в  $30^\circ$ . Известно, что площадь пересечения треугольников  $ABC$  и  $AMN$  равна  $\frac{63}{8}\sqrt{3}$ , а площадь их объединения равна  $\frac{215}{8}\sqrt{3}$ . Найдите площадь каждого из треугольников.

**14.\*\*** Основания  $BC$  и  $AD$  трапеции  $ABCD$  таковы, что  $AD = 3BC$ . На сторонах  $AB$  и  $CD$  выбраны точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = 2AM$  и прямая  $MN$  делит площадь трапеции пополам. Найдите отношение  $CN : ND$ .

**15.\*\*** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катеты  $AC = 2$ ,  $BC = 3$ . На прямую, проходящую через точку  $C$ , опущены перпендикуляры  $AH$  и  $BK$ . Известно, что точка  $H$  лежит между точками  $C$  и  $K$ , причём  $CK = 3CH$ . Найдите площадь трапеции  $AHBK$ .

**16.\*\*** Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $E$  так, что угол  $BEC$  прямой. Найдите площадь треугольника  $BCE$ , если известно, что  $BC = \sqrt{10}$ , а расстояние от центра квадрата до точки  $E$  равно 1.

**17.\*\*** В равнобедренной трапеции  $ABCD$  угол при вершине  $A$  равен  $60^\circ$ , а длина диагонали  $AC$  равна  $2\sqrt{3}$ . Найдите площадь трапеции, если известно, что прямая, параллельная  $AC$  и делящая площадь трапеции пополам, пересекает трапецию по отрезку, длина которого равна 3.

**18.\*\*** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  — середина стороны  $CD$ . Известно, что биссектриса угла  $C$  параллелограмма делит треугольник  $AMD$  на две части равной площади. Найдите длину стороны  $AD$ , если  $CD = 4$ .

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Чему равна площадь треугольника с периметром 10 и радиусом вписанной окружности 2?

- 1) 5                      2) 10                      3) 15                      4) 20



**1.2.** Чему равна площадь окружности радиуса  $R$ ?

- 1)  $\pi R^2$                       2)  $\pi R$                       3)  $2\pi R$                       4) 0

**1.3.** Чему равна площадь треугольника  $ABC$  с вершинами  $A(-3; -4)$ ,  $B(1; -4)$ ,  $C(-1; -5)$ ?

- 1) 1                      2) 2                      3) 3                      4) 4

**1.4.** Чему равна площадь трапеции  $ABCD$  с вершинами  $A(5; 1)$ ,  $B(7; 4)$ ,  $C(9; 4)$ ,  $D(12; 1)$ ?

- 1) 12,5                      2) 13,5                      3) 14,5                      4) 15,5

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из указанных плоских фигур имеют меру Жордана, равную 0?

- 1) квадрат                      2) граница квадрата                      3) круг                      4) окружность

**2.2.** Какие из указанных плоских фигур измеримы по Жордану?

- 1) треугольник со всеми внутренними точками  
2) квадрат со всеми внутренними точками  
3) четырёхугольник со всеми внутренними точками  
4) подмножество  $F$  единичного квадрата, который задаётся как  $E = \{(x; y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ где } x, y \text{ — рациональные числа}\}$

**2.3.\*** Какие из указанных пределов равны 1?

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$                       2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$                       3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$                       4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

**2.4.** При каких значениях  $a$  и  $h$  площадь треугольника с основанием  $a$  и проведённой к нему высотой  $h$  больше 4400?

- 1)  $a = 99, h = 101$                       2)  $a = 82, h = 121$   
3)  $a = 73, h = 125$                       4)  $a = 65, h = 140$

## ■ § 3. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**3.1. Криволинейная трапеция.** В координатной плоскости можно определить меру Жордана, то есть площадь, для фигур, которые называются криволинейными трапециями.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и принимает на этом отрезке неотрицательные значения. Проведём прямые  $x = a$ ,  $x = b$  и отметим их точки пересечения с осью  $Ox$  и графиком функции  $f(x)$ , как

показано на рис. 1. Замкнутая фигура, ограниченная отрезками  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и дугой  $AD$  графика, называется *криволинейной трапецией* с границей  $f(x)$ .

Можно показать, что для непрерывной функции  $f(x)$  криволинейная трапеция всегда имеет площадь. Эту площадь называют *определённым интегралом* по промежутку  $[a; b]$  от функции  $f(x)$  и обозначают следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**Вопрос.** Как доказать, что для функции  $f(x) = 2x + 3$  существует определённый интеграл по промежутку  $[4; 5]$ ?

**3.2. Метод исчерпывания.** Иногда площадь криволинейной трапеции можно вычислять методом исчерпывания, примеры применения которого рассматривались в 8 классе.

Рассмотрим непрерывную функцию  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , которая задаёт криволинейную трапецию  $\Phi$ . Пусть  $n$  — натуральное число, большее единицы. Разобьём отрезок  $[a; b]$  точками  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$  на  $n$  отрезков:  $[a; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; b]$ . Для удобства будем полагать, что  $a = x_0, b = x_n$ .

Для каждого целого числа  $k$ , где  $0 \leq k \leq n-1$ , обозначим через  $m_k$  наименьшее, а через  $M_k$  наибольшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_k; x_{k+1}]$  и рассмотрим часть  $\Phi_k$  криволинейной трапеции  $\Phi$ , которая ограничена вертикальными прямыми, проходящими через точки  $x_k$  и  $x_{k+1}$  оси  $Ox$  (рис. 2). Площадь  $P_k$  такой части не больше площади прямоугольника с основанием  $x_{k+1} - x_k$  и высотой  $M_k$  и не меньше площади прямоугольника с основанием  $x_{k+1} - x_k$  и высотой  $m_k$ , то есть

$$(x_{k+1} - x_k) \cdot m_k \leq P_k \leq (x_{k+1} - x_k) \cdot M_k. \quad (1)$$

Введём следующие обозначения:

$$S'_n = (x_1 - x_0) \cdot m_0 + (x_2 - x_1) \cdot m_1 + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot m_{n-1}$$

и

$$S''_n = (x_1 - x_0) \cdot M_0 + (x_2 - x_1) \cdot M_1 + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot M_{n-1}.$$

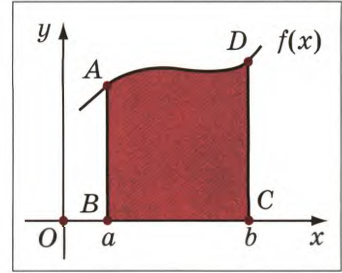


Рис. 1

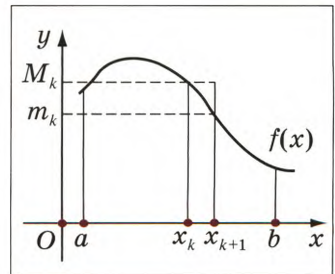


Рис. 2

Из неравенств (1) следует, что для площади  $P$  криволинейной трапеции  $\Phi$  выполняются неравенства:

$$S'_n \leq P \leq S''_n.$$

В том случае, когда наибольшая из длин отрезков  $[x_k; x_{k+1}]$  стремится к нулю при  $n$ , стремящемся к бесконечности, последовательность разностей  $S''_n - S'_n$  стремится к нулю. Поэтому из критерия измеримости, сформулированного в пункте 2.5, следует, что криволинейная трапеция  $\Phi$  измерима по Жордану и

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n.$$

Здесь мы не будем доказывать это утверждение.

Метод исчерпывания позволяет находить приближённые, а иногда и точные значения площади криволинейной трапеции.

**Вопрос.** Чему равен  $\int_0^1 x dx$ ?

**3.3. Интегральные суммы.** Для непрерывных функций, принимающих значения разных знаков, по правилам из предыдущего пункта можно составлять суммы  $S'_n$  и  $S''_n$ . Для каждого разбиения отрезка  $[a; b]$  точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$  определяем  $m_k$  как наименьшее значение функции  $f(x)$  и  $M_k$  как наибольшее значение этой функции на отрезке  $[x_k; x_{k+1}]$ . Затем составляем суммы:

$$\begin{aligned} S'_n &= (x_1 - x_0) \cdot m_0 + (x_2 - x_1) \cdot m_1 + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot m_{n-1}, \\ S''_n &= (x_1 - x_0) \cdot M_0 + (x_2 - x_1) \cdot M_1 + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot M_{n-1}. \end{aligned}$$

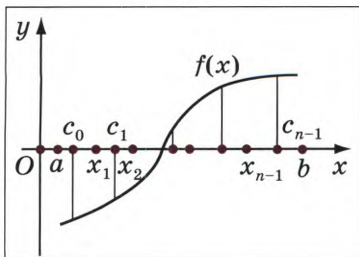


Рис. 3

В случае, когда наибольшая из длин отрезков стремится к нулю при  $n$ , стремящемся к бесконечности, последовательность разностей  $S''_n - S'_n$  стремится к нулю, а каждая из последовательностей  $S'_n$  и  $S''_n$  сходится к одному и тому же числу  $P$ .

Возможен и более общий подход. А именно для указанного разбиения отрезка  $[a; b]$  в каждой части  $[x_k; x_{k+1}]$  можно выбрать произвольную точку  $c_k$  (рис. 3), вычислить значение  $f(c_k)$  и составить следующую сумму:

$$\sum_n = (x_1 - x_0) \cdot f(c_0) + (x_2 - x_1) \cdot f(c_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot f(c_{n-1}).$$

Тогда  $S'_n \leq \sum_n \leq S''_n$ , а поэтому последовательность сумм  $\sum_n$  также сходится к числу  $P$ .



Суммы вида  $\sum_n$  называют *интегральными суммами для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$* . Число  $P$ , к которому приближаются суммы  $\sum_n$ , равняется общему пределу последовательностей  $S'_n$  и  $S''_n$ , то есть определённому интегралу от функции  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$ :

$$\int_a^b f(x) dx.$$

В случае, когда функция  $f(x)$  принимает отрицательные значения на отрезке  $[a; b]$ , соответствующее число  $P$  отрицательно и модуль этого числа равен площади криволинейной трапеции, которая на отрезке  $[a; b]$  определяется функцией  $-f(x)$ .

**Вопрос.** К чему приближаются интегральные суммы для функции  $f(x) = -x$  на отрезке  $[0; 2]$  при разбиении этого отрезка на всё более мелкие равные части?

**3.4. Формула площади криволинейной трапеции.** Площадь криволинейной трапеции можно вычислять, используя следующее правило.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  и графиком непрерывной и неотрицательной функции  $f(x)$ , равна разности

$$F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  — первообразная для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

**Пример 1.** Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную прямыми  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$  и графиком функции  $f(x) = \sin x$  (рис. 4). Так как функция  $F(x) = -\cos x$  является первообразной для  $\sin x$ , то площадь криволинейной трапеции равна

$$S = F(\pi) - F(0) = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

**Вопрос.** Чему равна площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  и графиком функции  $f(x) = x - 2$ ?

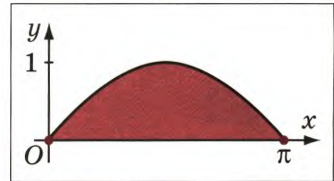


Рис. 4

**3.5.\* Доказательство формулы площади криволинейной трапеции.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на отрезке  $[a; b]$ . Для каждого значения  $x$  из отрезка  $[a; b]$  криволинейная трапеция, ограниченная прямыми  $y = 0$ ,  $x = a$ , вертикальной прямой с абсциссой  $x$  и графиком функции  $y = f(x)$ , имеет площадь, которую обозначим через  $S(x)$ .

Зафиксируем значение  $x_0$  из  $[a; b]$ . Для приращения  $\Delta x$  переменной  $x$  рассмотрим в точке  $x_0$  соответствующее приращение  $\Delta S$ , равное  $S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$ .

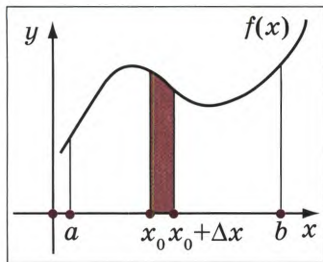


Рис. 5

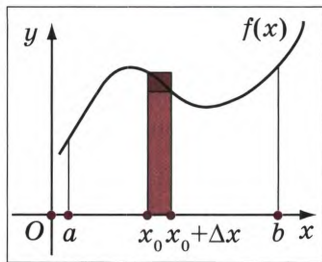


Рис. 6

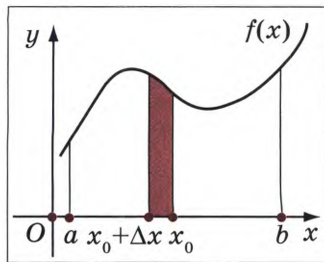


Рис. 7

Пусть  $x_0 \in (a; b)$ . Приращение  $\Delta x$  возьмём таким, чтобы число  $x_0 + \Delta x$  тоже принадлежало интервалу  $(a; b)$ .

При  $\Delta x > 0$  приращение площади  $\Delta S$  есть площадь «узкой» криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_0; x_0 + \Delta x]$  (рис. 5). Обозначим через  $f_{\max}$  наибольшее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_0; x_0 + \Delta x]$  и через  $f_{\min}$  — наименьшее значение функции  $f(x)$  на этом отрезке. Тогда «узкая» криволинейная трапеция входит в прямоугольник высотой  $f_{\max}$  и шириной  $\Delta x$  и содержит прямоугольник высотой  $f_{\min}$  и шириной  $\Delta x$  (рис. 6). Аналогично тому, как это было сделано в пункте 3.2, получаем, что выполняются неравенства  $f_{\min} \cdot \Delta x \leq \Delta S \leq f_{\max} \cdot \Delta x$ . Отсюда и из условия, что  $\Delta x > 0$ , следуют неравенства

$$f_{\min} \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq f_{\max}. \quad (2)$$

При  $\Delta x < 0$  приращение  $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$  можно также связать с площадью «узкой» криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_0 + \Delta x; x_0]$  (рис. 7). В этом случае

$$S(x_0) - S(x_0 + \Delta x) = -\Delta S.$$

Аналогично тому, как это было сделано в пункте 3.2, получаем, что  $f_{\min} \cdot (-\Delta x) \leq -\Delta S \leq f_{\max} \cdot (-\Delta x)$ . Отсюда и из условия, что  $-\Delta x > 0$ , следуют неравенства

$$f_{\min} \leq \frac{-\Delta S}{-\Delta x} = \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq f_{\max}. \quad (3)$$

Таким образом, в обоих случаях приходим к неравенствам

$$f_{\min} \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq f_{\max}. \quad (4)$$

По условию функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , поэтому  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_{\min} = f(x_0)$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f_{\max} = f(x_0)$  и по теореме о пределе промежуточной функции получаем, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x_0)$ , то есть функция  $S(x)$  имеет в точке  $x_0$  производное число и  $S'(x_0) = f(x_0)$ .



Следовательно, функция  $S(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$  на интервале  $(a; b)$ .

Пусть теперь  $x_0 = a$ . Приращение  $\Delta x$  возьмём таким, чтобы  $x_0 + \Delta x$  принадлежало интервалу  $(a; b)$ . При этом  $\Delta x > 0$  и приращение площади  $\Delta S$  есть площадь «узкой» криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; a + \Delta x]$ . Точно так же, как это было сделано ранее для случая  $\Delta x > 0$ , найдём, что  $\Delta S = S(a + \Delta x) - S(a)$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(a)$  и  $S'(a) = f(a)$ .

Наконец, если  $x_0 = b$ , то возьмём приращение  $\Delta x$  таким, чтобы  $b + \Delta x$  принадлежало интервалу  $(a; b)$ . При этом  $\Delta x < 0$ , и точно так же, как это было сделано ранее для случая  $\Delta x < 0$ , найдём, что  $\Delta S = S(b + \Delta x) - S(b)$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(b)$  и  $S'(b) = f(b)$ .

Таким образом, функция  $S(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

Если  $F(x)$  — некоторая известная первообразная для функции  $f(x)$ , то  $S(x) = F(x) + C$ , где  $C$  — постоянная.

Значение  $C$  можно найти из условия  $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = 0$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \lim_{x \rightarrow a} (F(x) + C) = F(a) + C = 0$ , откуда  $C = -F(a)$  и  $S(x) = F(x) - F(a)$ .

**Вопрос.** Как доказать, что значение площади криволинейной трапеции не зависит от выбора первообразной для функции  $f(x)$ ?

**3.6. Формула Ньютона – Лейбница.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке, содержащем числа  $a$  и  $b$ , и  $F(x)$  — первообразная для этой функции. Число  $F(b) - F(a)$  совпадает с определённым интегралом

$$\int_a^b f(x) dx$$

функции  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$ .

Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ .

Полученная формула имеет очень важное значение в математике и известна как формула Ньютона — Лейбница.

При решении задач разность  $F(b) - F(a)$  удобно записывать в виде  $F(x)|_a^b$ . Введённые обозначения позволяют записывать следующие равенства:



$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Пример 2.** Поскольку функция  $F(x) = \operatorname{arctg} x$  есть первообразная функции  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , то

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

**Вопрос.** Чему равно значение  $\int_1^5 (x-3)^2 dx$ ?

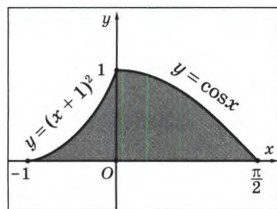


Рис. 8

**3.7. Вычисление площадей.** Использование аддитивности площади позволяет решать разнообразные задачи вычисления площадей.

**Пример 3.** Найдём площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $y = (x+1)^2$  на отрезке  $[-1; 0]$ , графиком функции  $y = \cos x$  на отрезке  $[0; \frac{\pi}{2}]$  и осью  $Ox$  (рис. 8).

Ось  $Oy$  разбивает данную фигуру на две криволинейные трапеции. Первая криволинейная трапеция ограничена графиком функции  $y = (x+1)^2$  на отрезке  $[-1; 0]$ . Её площадь

$$S_1 = \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Вторая криволинейная трапеция ограничена графиком функции  $y = \cos x$  на отрезке  $[0; \frac{\pi}{2}]$ . Её площадь

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Площадь  $S_0$  заданной фигуры можно вычислить как сумму найденных площадей:

$$S_0 = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

*Ответ:*  $\frac{4}{3}$ .

**Вопрос.** Как вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = x^2$  и прямой  $y = 2$ ?

**3.8. Формула площади фигуры, ограниченной графиками двух функций.** Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  на отрезке  $[a; b]$  непрерывны и  $f(x) \geq g(x)$

при всех  $x \in [a; b]$ . Тогда площадь фигуры, ограниченной прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и графиками функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

**Вопрос.** Чему равна площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $f(x) = x^2$  и  $g(x) = 1 + x - x^2$ ?

**3.9. Свойства определённого интеграла.** При вычислении определённых интегралов можно использовать следующие основные правила.

Пусть существуют  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$ . Тогда

$$\text{I. } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\text{II. } \int_a^b (kf(x)) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k \text{ — постоянная.}$$

$$\text{III. } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Докажем правило III.

Пусть  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ . Тогда

$$\int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a), \quad \int_c^b f(x) dx = F(b) - F(c),$$

откуда

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

**Вопрос.** Как доказать правила I и II?

**3.10.\*\* Нахождение первообразных с помощью площадей.** Иногда с помощью площадей удаётся найти и первообразную для некоторой функции.

**Пример 4.** Функция  $f(x) = e^x$  имеет первообразную  $F(x) = e^x$ . Поэтому при  $a > 0$  площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = a$  и графиком функции  $f(x) = e^x$  равна

$$S_1 = \int_0^a e^x dx = e^x \Big|_0^a = e^a - 1.$$

Дополним эту криволинейную трапецию до прямоугольника, как изображено на рис. 9. Тогда пло-

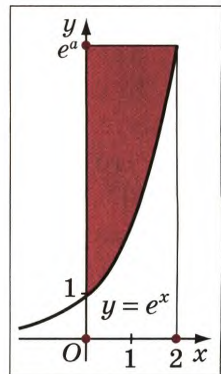


Рис. 9

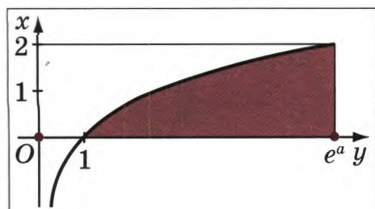


Рис. 10

щадь закрашенной части равна  $S_2 = a \cdot e^a - (e^a - 1) = a \cdot e^a - e^a + 1$ .

Симметрично отразим полученный чертёж относительно биссектрисы первого координатного угла и придём к рис. 10. На этом рисунке закрашенная часть является криволинейной трапецией, ограниченной прямыми  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = e^a$  и графиком

функции  $g(y) = \ln y$ . Если обозначим через  $G(y)$  первообразную для функции  $g(y) = \ln y$ , то

$$S_2 = a \cdot e^a - e^a + 1 = \int_1^{e^a} g(y) dy = G(e^a) - G(1).$$

Отсюда

$$G(e^a) = a \cdot e^a - e^a + 1 + G(1).$$

Полагая  $e^a = z$ , получим  $a = \ln z$  и

$$G(z) = (\ln z) \cdot z - z + 1 + G(1).$$

Так как  $1 + G(1)$  — некоторая постоянная, то

$$\int \ln z dz = z(\ln z - 1) + C.$$

**Вопрос.** Чему равен  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ?

## ■ Контрольные вопросы и задания

1. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
2. Как определяется и как обозначается определённый интеграл от неотрицательной функции по заданному отрезку?
3. Что называют интегральными суммами для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ ?
4. Как определяется и как обозначается определённый интеграл от функции  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$ ?
5. Сформулируйте правило вычисления площади криволинейной трапеции с помощью первообразных.
- 6.\*\* Докажите формулу для площади криволинейной трапеции.
7. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.



8. По какой формуле находится площадь фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций и двумя вертикальными прямыми?

9. Сформулируйте основные свойства определённых интегралов.

### Задачи и упражнения ■

1. С помощью интегральных сумм найдите площадь трапеции, ограниченной прямыми:

а)  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2x - 1$ ;      б)  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3 - x$ .

2. Найдите:

а)  $\int (x-1)^2 dx$ ;      б)  $\int \sin 3x dx$ ;      в)  $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}} dx$ ;  
 г)  $\int \frac{dx}{x-1}$ ;      д)  $\int \frac{x+1}{x+2} dx$ ;      е)  $\int \sqrt{x-2} dx$ ;  
 ё)  $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$ ;      ж)\*\*  $\int \sin^2 x dx$ ;      з)\*  $\int x \cdot \sqrt{x-1} dx$ ;  
 и)\*  $\int \frac{dx}{4-x^2}$ ;      й)\*  $\int \frac{dx}{1+2x^2}$ .

3. Найдите значение определённого интеграла:

а)  $\int_1^2 x^2 dx$ ;      б)  $\int_2^4 x^3 dx$ ;      в)  $\int_0^2 (x-1)^3 dx$ ;      г)  $\int_{-1}^1 x^2 dx$ ;  
 д)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ ;      е)  $\int_2^4 \frac{dx}{x^3}$ ;      ё)  $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ ;      ж)  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ .

4. Вычислите площадь криволинейной трапеции с границей  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$ , если:

а)  $f(x) = x^2$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ;      б)  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ;  
 в)  $f(x) = (x-1)^2$ ,  $a = -1$ ,  $b = 2$ ;      г)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$ ;  
 д)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 4$ ;      е)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $a = 2$ ,  $b = 5$ ;  
 ё)  $f(x) = \cos x$ ,  $a = 0$ ,  $b = \frac{\pi}{2}$ ;      ж)  $f(x) = \sin x + \cos x$ ,  $a = -\frac{\pi}{4}$ ,  $b = \frac{3\pi}{4}$ ;  
 з)  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ ;      и)  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x)$ ,  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ ;  
 й)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 10$ ;      к)  $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ;  
 л)  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ ,  $a = 3$ ,  $b = 7$ ;      м)  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ .

5.\*\* Вычислите:

а)  $\int_0^1 \arcsin x dx$ ;      б)  $\int_0^1 \arctg x dx$ .

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

- а)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = 2x - x^2$ ;      б)  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $g(x) = x - 1$ ;  
 в)  $f(x) = 1 - 3x$ ,  $g(x) = 4 - x - x^2$ ;      г)  $f(x) = 2(x - x^2)$ ,  $g(x) = 1 - x$ .  
 д)  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $g(x) = 2x^2 + x$ ;      е)  $f(x) = 2x^2$ ,  $g(x) = -x^2 + x + 2$ ;  
 ё)  $f(x) = x^2 + 3x - 4$ ,  $g(x) = 2x^2 - 2x + 2$ ;  
 ж)  $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$ ,  $g(x) = x^2 + 2x$ .

7.\*\* Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а)  $y = \sin \pi x$ ,  $y = 4(x^2 - x)$  на отрезке  $[0; 1]$ ;

б)  $y = \frac{3}{x}$ ,  $y = 4$ ,  $y = 6$ ,  $x = 0$ ;

в)  $y = 1 + \frac{1}{3(x-1)}$ ,  $y = \frac{1}{6x}$ ;

г)  $3y = -x^2 + 8x - 7$ ,  $y + 1 = \frac{4}{x-3}$ .

8.\* Вычислите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты

$(x; y)$  которых являются решениями системы неравенств  $\begin{cases} y \geq x^2, \\ y \leq \sqrt{x}. \end{cases}$

9.\*\* Найдите, в каком отношении парабола  $2y = x^2$  делит площадь круга  $x^2 + y^2 \leq 8$ .

10.\*\* Найдите площадь фигуры, которая в координатной плоскости задана двумя неравенствами:  $5x + 1 \geq y^2$ ,  $y - 1 \geq x^2 - 2x$ .

11.\*\* Вычислите с помощью интегральных сумм:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ ;

г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \sin \frac{3\pi}{2n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{2n} \right)$ .

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Чему равна площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми  $x = -2$ ,  $x = 0$  и графиком функции  $f(x) = x^2$ ?

- 1)  $\frac{7}{3}$                       2)  $\frac{8}{3}$                       3) 3                      4)  $\frac{10}{3}$

**1.2.** Чему равно значение  $\int_0^{3\pi} \cos \frac{x}{2} \cdot dx$ ?

- 1) -2                      2) 0                      3) 2                      4) 4

**1.3.** Чему равна площадь фигуры, ограниченной графиками функций  $f(x) = 2x^2 - 1$  и  $g(x) = 2 - x^2$ ?

- 1) 2                      2) 4                      3) 6                      4) 8

**1.4.** Значение какого из интегралов равно 4?

- 1)  $\int_3^4 x^2 dx$                       2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin \frac{x}{3} dx$                       3)  $\int_1^{e^2} \frac{2}{x} dx$                       4)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из следующих фигур являются криволинейными трапециями?

- 1) ограниченная прямыми  $x = 2$ ,  $x = 5$ ,  $y = 0$  и кривой  $y = x^2 + 7$   
 2) ограниченная прямыми  $x = 2$ ,  $x = 5$ ,  $y = 0$  и кривой  $y = x^2 - 7$   
 3) ограниченная прямыми  $x = 7$ ,  $x = 10$ ,  $y = 0$  и кривой  $y = x^2 + 1$   
 4) ограниченная прямыми  $2x = 7$ ,  $3x = 10$ ,  $y = 0$  и кривой  $y = 27x^2 + 100$

**2.2.** Рассмотрим разбиение отрезка  $[0; 3]$  точками  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ . Какие из приведённых выражений являются записью некоторой интегральной суммы для функции  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[0; 3]$ ?

- 1)  $(x_2 - x_1) \cdot 0 + (x_3 - x_2) \cdot 1 + (x_4 - x_3) \cdot 4$   
 2)  $(x_2 - x_1) \cdot 1 + (x_3 - x_2) \cdot 4 + (x_4 - x_3) \cdot 9$   
 3)  $(x_2 - x_1) \cdot 1 + (x_3 - x_2) \cdot 2 + (x_4 - x_3) \cdot 3$   
 4)  $(x_2 - x_1) \cdot 0 + (x_3 - x_2) \cdot 3 + (x_4 - x_3) \cdot 6$

**2.3.** Какие из указанных функций являются первообразными для функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ , рассматриваемой на промежутке  $(-\infty; 0)$ ?

- 1)  $F(x) = -\ln x + 1$                       2)  $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln x^2 + 1$   
 3)  $F(x) = \ln(-x) + 1$                       4)  $F(x) = \ln(1 - x)$



#### 2.4. Площади каких фигур больше 2?

- 1) ограниченной в пределах от 0 до  $\pi$  линиями  $y = 0,5 \sin x$ ,  $y = -0,5 \sin x$
- 2) ограниченной в пределах от 0 до  $\pi$  линиями  $y = \sin x$ ,  $y = -\sin x$
- 3) ограниченной в пределах от 0 до  $\pi$  линиями  $y = 1,5 \sin x$ ,  $y = -1,5 \sin x$
- 4) ограниченной в пределах от 0 до  $\pi$  линиями  $y = 2 \sin x$ ,  $y = -2 \sin x$

### ■ § 4. ОБЪЁМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

**4.1. Свойства объёма.** Теория меры Жордана на плоскости, изложенная в предыдущих параграфах, почти дословно может быть перенесена на случай пространства, при этом получится теория меры Жордана и объёма пространственных фигур или тел.

Для некоторых фигур пространства определяют численную характеристику, которую называют объёмом.

Объём выражается неотрицательным числом и имеет следующие свойства:

- 1) монотонность — если одна фигура содержится внутри другой, то объём внутренней фигуры не больше объёма внешней;
- 2) равные фигуры имеют равные объёмы;
- 3) аддитивность — если какая-нибудь фигура состоит из двух частей, не имеющих общих внутренних точек, то объём всей фигуры равен сумме объёмов составляющих её частей;
- 4) единицей объёма считается объём куба, длина ребра которого равна выбранной единице длины.

**Вопрос.** Для каких геометрических тел вам известны формулы вычисления объёмов?

**4.2. Объём элементарных фигур.** Как и на плоскости, исходным моментом теории меры в пространстве является понятие *элементарной фигуры*.

Введём в пространстве прямоугольную систему координат с осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Зафиксируем неотрицательное целое число  $n$ . Для каждого целого числа  $m$  через точку  $A\left(\frac{m}{2^n}; 0; 0\right)$  проведём плоскость, параллельную плоскости  $Oyz$ . Точно так же для каждого целого числа  $m$  через точку  $B\left(0; \frac{m}{2^n}; 0\right)$  проведём плоскость, параллельную плоскости  $Oxz$ . Анало-

гично для каждого целого числа  $m$  через точку  $C(0; 0; \frac{m}{2^n})$  проведём плоскость, параллельную плоскости  $Oxy$ .

В результате получится бесконечная система равных кубов с рёбрами длины  $\frac{1}{2^n}$  и объёмами, равными  $\frac{1}{8^n}$ . Эту систему называют *пространственной сетью ранга  $n$* .

Кубы считаются замкнутыми, то есть каждому из них принадлежат не только внутренние точки, но и все точки их граней и рёбер. Как и в плоском случае, определяют элементарные фигуры как объединения кубов пространственной сети некоторого ранга, причём всякую элементарную фигуру ранга  $n$  можно считать фигурой любого большего ранга  $n + k$ , если разделить каждый из кубов  $n$ -го ранга на  $8^k$  кубов ранга  $n + k$ .

Понятно, что, как и в плоском случае, численное значение объёма элементарной фигуры не зависит от того, какая пространственная сеть ранга  $n$  выбирается для данной элементарной фигуры. Поэтому при вычислении объёмов элементарной фигуры  $F$  ранга  $n_1$  и элементарной фигуры  $G$  ранга  $n_2$  их общим рангом можно считать наибольший из рангов  $n_1$  и  $n_2$ .

В дальнейшем объём элементарной фигуры  $F$  будем обозначать через  $V(F)$ .

Пустое множество считается элементарной фигурой (любого ранга), объём которой равен нулю.

**Вопрос.** Как проверить аддитивность и монотонность меры Жордана для элементарных фигур?

**4.3. Измеримость по Жордану в пространстве.** Пусть  $F$  — произвольная геометрическая фигура в пространстве. Для всякого натурального числа  $n$  составим две элементарные фигуры  $F'_n$  и  $F''_n$  рангов  $n$  по правилам:  $F'_n$  образована всеми кубами  $n$ -го ранга, целиком содержащимися в  $F$ , а  $F''_n$  — всеми кубами ранга  $n$ , имеющими с  $F$  хотя бы по одной общей точке. Понятно, что

$$F'_n \subseteq F \subseteq F''_n.$$

С увеличением номера  $n$  фигура  $F'_n$  может только расширяться, а  $F''_n$  — только сузиться, поэтому:

$$F'_n \subseteq F'_{n+1} \subseteq F \subseteq F''_{n+1} \subseteq F''_n.$$

Отсюда и из монотонности меры элементарных фигур вытекает, что

$$V(F'_1) \leq \dots \leq V(F'_n) \leq V(F'_{n+1}) \leq V(F''_{n+1}) \leq V(F''_n) \leq \dots \leq V(F''_1).$$



По теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности существуют пределы  $V'(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(F'_n)$ ,  $V''(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(F''_n)$ , и при этом

$$V'(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(F'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V(F''_n) = V''(F).$$

Фигура  $F$  пространства называется измеримой по Жордану, если  $V'(F) = V''(F)$ .

Для измеримой фигуры  $F$  общее значение  $V'(F)$  и  $V''(F)$  называется пространственной мерой Жордана фигуры  $F$ .

Если для фигуры  $F$  значения  $V'(F)$  и  $V''(F)$  не совпадают, то такая фигура считается неизмеримой.

Меру Жордана измеримой пространственной фигуры  $F$  обычно обозначают через  $V(F)$ .

**Вопрос.** Чему равна пространственная мера Жордана квадрата с вершинами  $A(0;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$ ,  $C(1;0;0)$ ,  $D(1;1;0)$ ?

**4.4. Равенство мер Жордана равных фигур.** Одним из свойств пространственной меры Жордана является следующее:

если две пространственные фигуры равны, то измеримость одной из них влечёт измеримость другой, причём их меры Жордана совпадают.

Доказательство этого утверждения обычно рассматривается в университетских курсах математического анализа. Мы не будем приводить это доказательство.

**Вопрос.** Почему любой прямоугольный параллелепипед является измеримым по Жордану?

**4.5. Критерии измеримости.** Для доказательства существования пространственной меры Жордана у тех или иных геометрических фигур и для вычисления приближённых значений меры Жордана можно пользоваться критериями измеримости, аналогичными критериям измеримости для плоских фигур.

Фигура  $F$  измерима по Жордану в том и только в том случае, когда для всякого положительного числа  $\varepsilon$  существуют такие измеримые по Жордану фигуры  $F'_\varepsilon$  и  $F''_\varepsilon$ , что  $F'_\varepsilon \subseteq F \subseteq F''_\varepsilon$  и  $V(F''_\varepsilon) - V(F'_\varepsilon) < \varepsilon$ .

Из критерия измеримости следует утверждение:

если для последовательностей  $G_n$  и  $H_n$  измеримых фигур выполнены условия

$$G_n \subseteq F \subseteq H_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [V(G_n) - V(H_n)] = 0,$$

то фигура  $F$  измерима и



$$V(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(H_n).$$

Доказательства критерия измеримости по Жордану в пространстве очень похоже на доказательство критерия измеримости на плоскости. Мы его приводить не будем.

**Вопрос.** Как вывести формулу для вычисления объёма прямой трёхугольной призмы?

**4.6. Свойства меры Жордана в пространстве.** Применение обычных теоретико-множественных операций к измеримым по Жордану фигурам не выводит за пределы класса фигур, измеримых по Жордану. Мы здесь доказывать этого не будем, перечислим только свойства меры Жордана в пространстве.

I. Объединение, пересечение и разность измеримых фигур являются измеримыми фигурами.

II. Равные фигуры имеют равные меры Жордана.

III. Мера Жордана неотрицательна.

IV. Если фигуры  $F$  и  $G$  измеримы и  $F \subseteq G$ , то  $V(F) \leq V(G)$ .

V. Если измеримые фигуры  $F$  и  $G$  не имеют общих внутренних точек, то  $V(F \cup G) = V(F) + V(G)$ .

VI. Мера Жордана элементарной фигуры в пространстве совпадает с объёмом этой фигуры.

Свойство IV называется монотонностью, а свойство V — аддитивностью меры Жордана.

Заметим, что мера Жордана куба с единичным ребром равна 1. Отсюда, из свойств I–VI этого пункта следует, что мера Жордана для пространственных фигур обладает свойствами объёма 1–4 из пункта 4.1. Именно поэтому меру Жордана измеримой фигуры в пространстве называют также объёмом этой фигуры.

**Вопрос.** Как показать, что мера Жордана единичного куба равна 1?

**4.7. Объём обобщённого прямого цилиндра.** Пусть плоская фигура  $F$  расположена в плоскости  $\alpha$ . Обобщённым прямым цилиндром  $Q$  с основанием  $F$  и образующей длины  $h$  будем называть пространственную фигуру, состоящую из всех отрезков длины  $h$ , перпендикулярных плоскости  $\alpha$ , один конец каждого из которых принадлежит  $F$ , а другой — принадлежит плоскости  $\beta$ , параллельной плоскости  $\alpha$ .

Пусть основание обобщённого прямого цилиндра — измеримая фигура. Для каждого натурального числа  $n$  существуют плоские элемен-

тарные фигуры  $F'_n$  и  $F''_n$  ранга  $n$ , для которых выполнены включения  $F'_n \subseteq F \subseteq F''_n$ . Так как фигура  $F$  измерима, то  $F'_n$  и  $F''_n$  можно выбрать так, чтобы

$$S(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(F''_n).$$

Пусть теперь  $Q'_n$  — прямой цилиндр высоты  $h$ , основанием которого является элементарная фигура  $F'_n$ . Нетрудно понять, что этот цилиндр составлен из одинаковых прямоугольных параллелепипедов высоты  $h$ , основаниями которых являются квадраты ранга  $n$ , составляющие элементарную фигуру  $F'_n$ . Объём каждого такого параллелепипеда равен площади соответствующего квадрата, умноженной на высоту  $h$ . Складывая объёмы всех параллелепипедов, составляющих цилиндр  $Q'_n$ , получаем  $V(Q'_n) = S(F'_n) \cdot h$ .

Аналогично, рассмотрев прямой цилиндр  $Q''_n$  с основанием  $F''_n$  и высотой  $h$ , получим  $V(Q''_n) = S(F''_n) \cdot h$ .

Итак, имеются две последовательности  $Q'_n$  и  $Q''_n$  измеримых тел, обладающие свойствами

$$Q'_n \subseteq Q \subseteq Q''_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [V(Q''_n) - V(Q'_n)] = h \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} [S(F''_n) - S(F'_n)] = 0.$$

Следовательно, цилиндр  $Q$  также является измеримой фигурой, причём

$$V(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(Q'_n) = h \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S(F'_n) = h \cdot V(F).$$

Получилось следующее правило.

**Объём обобщённого прямого цилиндра, в основании которого лежит измеримая плоская фигура, равен произведению площади основания и высоты этого цилиндра.**

**Вопрос.** Чему равен объём прямой призмы высоты  $h$ , в основании которой лежит многоугольник площади  $S$ ?

**4.8. Формула для вычисления объёма.** Предположим, что в пространстве выбрана такая прямоугольная система координат, что единственный отрезок каждой из осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  равен единице измерения длины.

Пусть задана такая ограниченная геометрическая фигура  $\Phi$ , что множество значений абсцисс всех точек этой фигуры  $\Phi$  принадлежит отрезку  $[a; b]$ . Тогда для каждого значения  $x$  из промежутка  $[a; b]$  плоскость  $\gamma_x$ , проходящая через точку  $x$  перпендикулярно оси абсцисс, пересекает



тело  $\Phi$  по некоторой плоской фигуре  $F_x$  (рис. 1). Можно доказать следующее утверждение.

Пусть выполнены условия:

1) фигура  $\Phi$  измерима по Жордану (имеет объём);

2) для любого значения  $x$  из промежутка  $[a; b]$  плоская фигура  $F_x$  измерима по Жордану и её площадь равна  $S(x)$ ;

3) на промежутке  $[a; b]$  функция  $S(x)$  является непрерывной функцией.

Тогда объём  $V(\Phi)$  фигуры  $\Phi$  равен определённому интегралу от функции  $S(x)$  по промежутку  $[a; b]$ , то есть

$$V(\Phi) = \int_a^b S(x) dx. \quad (1)$$

Доказывать это утверждение мы не будем.

**Пример 1.** Рассмотрим наклонную призму с площадью основания  $S$  и высотой  $H$ .

Проведём прямую  $l$  перпендикулярно основаниям и выберем на ней систему координат так, что точка  $O$  пересечения прямой  $l$  с нижним основанием имеет координату 0, а точка  $F$  пересечения прямой с верхним основанием — координату  $H$  (рис. 2).

Далее через точку  $M$  отрезка  $OF$  с координатой  $x$  проведём перпендикулярно прямой  $l$  и параллельно основаниям сечение  $F_x$  (рис. 2). В сечении получится многоугольник, равный основаниям призмы. Поэтому площадь  $S(x)$  сечения  $F_x$  равна  $S$  при любом  $x$  из отрезка  $[0; H]$ . Применяя формулу (1), получаем

$$V = \int_0^H S(x) \cdot dx = \int_0^H S \cdot dx = S \cdot \int_0^H dx = S \cdot x \Big|_0^H = SH - 0 = SH.$$

Таким образом, объём произвольной призмы можно вычислять по формуле

$$V = SH,$$

где  $S$  — площадь основания призмы,  $H$  — её высота.

**Вопрос.** Как вычислить объём параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если известны площадь основания  $ABCD$ , боковое ребро  $AA_1$  и угол, который образует боковое ребро с плоскостью основания?

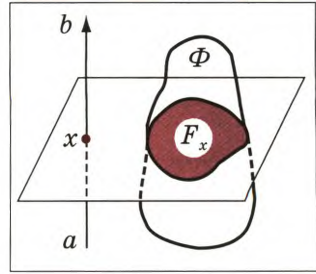


Рис. 1

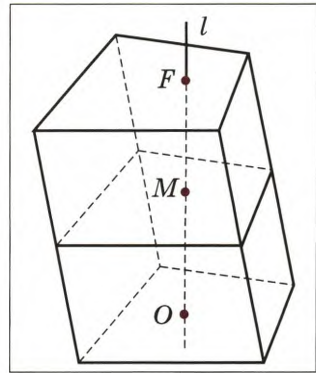


Рис. 2



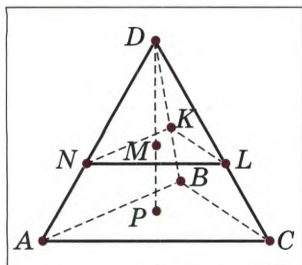


Рис. 3

**4.9. Объём пирамиды.** В этом пункте докажем, что объём произвольной пирамиды можно вычислять по формуле

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где  $S$  — площадь основания пирамиды,  $H$  — её высота.

*I случай.* Рассмотрим треугольную пирамиду  $DABC$  с высотой  $DP = H$ . Отметим на высоте  $DP$  точку  $M$  так, что  $DM = x$ , и проведём через  $M$  сечение  $F_x = NKL$ , перпендикулярное  $DP$  (рис. 3). Так как стороны треугольника  $NKL$  соответственно параллельны сторонам треугольника  $ABC$ , то эти треугольники подобны. Коэффициент  $k$  подобия треугольника  $NKL$  треугольнику  $ABC$  находим из равенств  $k = \frac{NK}{AB} = \frac{ND}{AD} = \frac{MD}{PD} = \frac{x}{H}$ . Отсюда  $S(x) = S_{\triangle NKL} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{x^2}{H^2} \cdot S$ . Поэтому по формуле (1) имеем

$$V = V_{DABC} = \int_0^H S(x) dx = \int_0^H \frac{x^2}{H^2} S dx = \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{1}{3}SH.$$

Тем самым формула для объёма произвольной треугольной пирамиды доказана.

*II случай.* Рассмотрим теперь произвольную пирамиду с высотой  $H$ . Разобьём её основание на треугольники с площадями  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ . Соответственно и пирамиду разобьём на треугольные пирамиды (рис. 4). Тогда объём  $V$  всей пирамиды равен сумме объёмов составляющих её пирамид, откуда

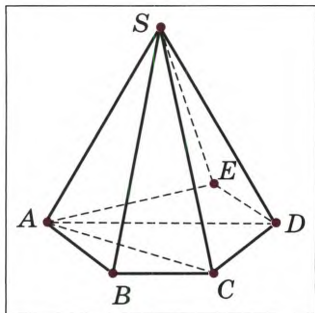


Рис. 4

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_k = \\ &= \frac{1}{3}S_1H + \frac{1}{3}S_2H + \frac{1}{3}S_3H + \dots + \frac{1}{3}S_kH = \\ &= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_k)H = \frac{1}{3}SH. \end{aligned}$$

Тем самым доказана формула для объёма произвольной пирамиды.

**Вопрос.** Чему равен объём треугольной пирамиды, у которой боковые рёбра попарно перпендикулярны и имеют длины  $a, b, c$ ?

**4.10. Тело вращения.** Пусть некоторая прямая  $a$  в пространстве выбрана в качестве оси вращения. Для каждой точки  $M$ , не лежащей на оси  $a$ , при её вращении относительно оси образуется окружность, лежащая в плоскости, которая перпендикулярна оси. При вращении точки, лежащей на оси, получается сама точка. При вращении относительно оси всех точек некоторой фигуры  $F$  образуется некоторое тело. Полученное таким образом тело называют *телом вращения*.

Рассмотрим тело  $T$ , которое образуется вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$ . Тогда объём тела  $T$  можно вычислять по формуле

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Пример 2.** Объём конуса можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

где  $R$  — радиус основания конуса,  $H$  — высота конуса.

**Пример 3.** Объём шара можно вычислить по формуле

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

где  $R$  — радиус шара.

**Вопрос.** Как доказать, что если прямой круговой цилиндр имеет высоту  $H$  и радиус основания  $R$ , то объём цилиндра можно вычислить по формуле  $V = \pi R^2 H$ ?

**4.11. Принцип Кавальери.** Поставим на одну плоскость полушар  $T$  радиуса  $R$  с центром  $O$  и цилиндр  $C$ , высота которого и радиус основания равны  $R$ . Из цилиндра вырежем конус с вершиной в центре нижнего основания и основанием, совпадающим с верхним основанием цилиндра (рис. 5). Проведём произвольное сечение этих тел плоскостью, параллельной плоскости оснований (рис. 6). В сечении первого тела имеем круг радиуса  $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ , площадь которого равна  $S_1 = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2)$ . В сечении второго тела получим кольцо с внешним радиусом  $R$  и внутренним радиу-

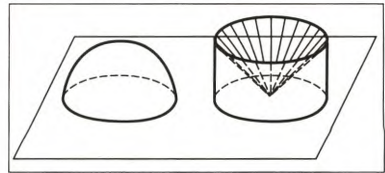


Рис. 5

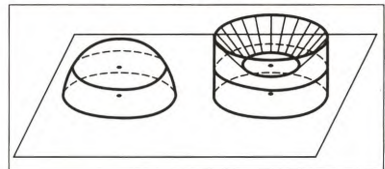


Рис. 6

сом  $x$ , площадь которого равна  $S_2 = \pi R^2 - \pi x^2$ . Поскольку  $S_1 = S_2$  при любом  $x$  от 0 до  $R$ , то объём  $V(T)$  полушара  $T$  равен разности между объёмом  $V(C)$  цилиндра  $C$  и объёмом конуса с высотой  $R$  и радиусом основания  $R$  и равен  $\pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3$ . Это приводит к известной формуле объёма шара. С помощью похожих соображений формулу объёма шара получил великий древнегреческий математик Архимед.

В XVI веке аналогичные рассуждения использовались при вычислении объёмов различных пространственных фигур. В основе лежало утверждение, известное как *принцип Кавальери*.

Пусть два тела имеют объёмы, их основания лежат в одной плоскости, высоты равны и площади сечений этих тел каждой плоскостью, параллельной плоскости оснований, равны между собой. Тогда объёмы этих тел равны.

Иллюстрацией применения принципа Кавальери и служит приведённый в этом пункте способ вывода формулы для объёма шара.

**Вопрос.** Как принцип Кавальери связан с формулой объёма тела вращения из пункта 4.10?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Каковы основные свойства объёма?
2. Что такое «элементарная фигура» в пространстве?
3. Какие фигуры в пространстве называются измеримыми по Жордану?
4. Сформулируйте критерии измеримости.
5. Чему равен объём обобщённого прямого цилиндра высоты  $h$ , площадь основания которого равна  $S$ ?
6. Напишите формулу для вычисления объёма тела через площади сечений, перпендикулярных одной прямой.
7. Как вычислить объём наклонной призмы?
8. Напишите формулу объёма прямого кругового цилиндра.
9. По какой формуле вычисляется объём пирамиды?
10. Напишите формулу объёма конуса.
11. Напишите формулу объёма шара.
- 12.\*\* Сформулируйте принцип Кавальери?

### ■ Задачи и упражнения

- 1.\* Докажите, что объём  $V$  прямоугольного параллелепипеда с измерениями  $a, b, c$  равен  $abc$ .



2. Вычислите объём тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $f(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$ , если:

а)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 4$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ,  $a = \frac{\pi}{3}$ ,  $b = \frac{2\pi}{3}$ ;

в)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 10$ ;

г)  $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ ,  $a = -\sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .

3. Пусть  $AB$  — диаметр шара радиуса  $R$ , и точка  $M$  на отрезке  $AB$  расположена так, что  $AM = H$ . Через точку  $M$  перпендикулярно  $AB$  проводится плоскость, которая делит шар на две части — шаровые сегменты. Найдите объёмы этих частей.

4. В шаре радиуса  $R$  сверлом, диаметр которого равен  $R$ , высверлили отверстие так, что ось отверстия проходит через центр шара. Найдите объём оставшейся части шара.

5.\*\* В треугольной пирамиде  $ABCD$  рёбра  $AB$  и  $CD$  имеют длину 6, все остальные рёбра имеют длину  $\sqrt{34}$ . Найдите объём тела, которое получается вращением пирамиды  $ABCD$  относительно оси, проходящей через середины рёбер  $AB$  и  $CD$ .

6.\*\* Найдите объём тела, которое получается вращением единичного куба относительно оси, проходящей через середины двух параллельных рёбер куба, не принадлежащих одной грани.

7.\*\* Найдите объём пересечения двух цилиндров радиуса  $r$ , оси которых пересекаются и перпендикулярны (предполагается, что основания каждого из цилиндров не имеют общих точек с другим цилиндром).

8. В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2 дм, боковое ребро равно 3 дм и образует угол в  $45^\circ$  с плоскостью основания. Найдите объём призмы.

9. Найдите объём правильного тетраэдра с ребром 10 см.

10. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, у которой ребро основания равно 6 см, а боковое ребро равно 9 см.

11. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1 точка  $M$  — середина ребра  $AB$ , точка  $N$  — середина ребра  $B_1 C_1$ . Через прямые  $B_1 M$  и  $BN$  проведены параллельные плоскости. Найдите объём части куба, содержащейся между этими плоскостями.

12.\* В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $AB = 2$ ,  $AC = 4$ , боковые рёбра пирамиды равны 4. На луче  $CA$  выбраны точки  $M$  и  $N$  так, что  $CM = 1$ ,  $CN = 6$ ; на луче  $BS$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $BP = 2$ ,  $BQ = 5$ . Найдите объём пирамиды  $MNPQ$ .

13.\*\* В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  через середины рёбер  $AB$ ,  $AD$  и  $SC$  проведено сечение. Известно, что пло-

щадь сечения равна  $2\sqrt{2}$ , а плоскость сечения образует с плоскостью основания  $ABCD$  угол в  $45^\circ$ . Найдите объём данной пирамиды.

14. Отрезая от конуса коническую часть плоскостью, параллельной основанию, получают усечённый конус. Расстояние между сечением и основанием называют высотой усечённого конуса. Найдите объём усечённого конуса, если радиусы  $R$ ,  $r$  его нижнего и верхнего оснований и высота  $h$  равны:

а)  $R = 5$ ,  $r = 3$ ,  $h = 2$ ;

б)  $R = 10$ ,  $r = 2$ ,  $h = 8$ ;

в)  $R = 4$ ,  $r = 3$ ,  $h = 10$ ;

г)  $R = 6$ ,  $r = 4$ ,  $h = 3$ .

15. Из жестяного круга радиуса 10 см вырезали сектор с углом  $90^\circ$  и из оставшейся части сделали воронку конической формы. Сколько воды можно налить в такую воронку?

16. Найдите объём правильной усечённой пирамиды, у которой площади оснований равны 81, 100, а высота равна 10.

17. Основаниями правильной усечённой пирамиды служат квадраты со сторонами  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ). Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Найдите объём усечённой пирамиды.

18. В треугольной усечённой пирамиде высота равна 10, стороны одного основания равны 27, 29 и 52, а периметр другого основания равен 72. Найдите объём усечённой пирамиды.

19.\* Куб, ребро которого равно  $a$ , срезан по углам плоскостями так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определите объём получившегося многогранника.

20.\*\* В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Через середины рёбер  $AB$ ,  $AD$  и  $SC$  проведена плоскость. Найдите отношение объёмов частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. При пересечении тела плоскостями, перпендикулярными заданной числовой оси, получаются сечения, площади которых выражаются формулой  $S(x) = 2x - 1$  для  $1 \leq x \leq 4$ . Чему равен объём этого тела?

1) 12

2) 20

3) 28

4) 30

1.2. При пересечении тела вращения плоскостями, перпендикулярными заданной числовой оси, получаются сечения, радиусы которых выражаются формулой  $R(x) = \sqrt{x}$  для  $1 \leq x \leq 2$ . Чему равен объём этого тела?



- 1)  $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$       2)  $\frac{3\pi}{2}$       3)  $\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$       4)  $2\pi$

**1.3.** При пересечении тела вращения плоскостями, перпендикулярными заданной числовой оси, получаются сечения, радиусы которых выражаются формулой  $R(x) = \sqrt{\sin x}$  для  $0 \leq x \leq \pi$ . Чему равен объём этого тела?

- 1)  $\pi$       2)  $\frac{3\pi}{2}$       3)  $2\pi$       4)  $\frac{5\pi}{2}$

**1.4.** Чему равен объём тела, получаемого при вращении вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции с границей  $y = \sin x$  в пределах от 0 до  $\pi$ ?

- 1)  $\frac{\pi \cdot (\pi - 1)}{4}$       2)  $\frac{\pi^2}{2}$       3)  $\frac{\pi^2}{4}$       4)  $\frac{\pi \cdot (\pi - 1)}{2}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** В координатном пространстве фигуру  $G$  получают из элементарной фигуры  $F$  параллельным переносом, который задаётся вектором  $\vec{n}$ . В каких из указанных случаев фигура  $G$  является элементарной фигурой, если:

- 1)  $\vec{n} = (5; -2; 3)$       2)  $\vec{n} = (2, 5; -2, 5; 3, 5)$   
 3)  $\vec{n} = (3, 2; 1, 3; -2, 4)$       4)  $\vec{n} = (\sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7})$

**2.2.** Объём каких из перечисленных тел равен  $12\pi^3$ ?

- 1) цилиндр с радиусом основания  $2\pi$  и высотой 3  
 2) цилиндр с радиусом основания 2 и высотой  $3\pi$   
 3) конус с радиусом основания  $3\pi$  и высотой 4  
 4) конус с радиусом основания  $2\pi$  и высотой 3

**2.3.** Укажите те из тел, объём которых больше объёма конуса с радиусом основания 2 и высотой 5.

- 1) тело высоты 4 с зависимостью площади горизонтального сечения от расстояния до основания  $S(h) = \pi h^2 + 1$   
 2) тело высоты 6 с зависимостью площади горизонтального сечения от расстояния до основания  $S(h) = 3h^2$   
 3) тело высоты 5 с зависимостью площади горизонтального сечения от расстояния до основания  $S(h) = \sin \pi h + 2$   
 4) тело высоты 5 с зависимостью площади горизонтального сечения от расстояния до основания  $S(h) = h^3 + 1$

**2.4.** Объём каких из перечисленных тел больше объёма шара радиуса 3?

- 1) цилиндр с радиусом основания 4 и высотой 2  
 2) половина шара радиуса 4



3) конус с радиусом основания 4 и высотой 7

4) куб с ребром 5

## ■ Мини-исследования к главе 9

### Мини-исследование 27

С младших классов хорошо известна формула площади прямоугольника:  $S = ab$ , где  $a$  и  $b$  — длины его сторон. Однако, рассматривая различные прямоугольники на координатной плоскости, получаем, что далеко не все из них являются элементарными фигурами.

Предлагается доказать формулу площади прямоугольника по следующей схеме.

1. Рассмотреть прямоугольник  $ABCD$  с вершинами  $A(0; 0)$ ,  $B(a; 0)$ ,  $C(a; b)$ ,  $D(0; b)$ , где  $a$  и  $b$  — положительные двоично-рациональные числа, и показать, что  $S = ab$ .

2. Рассмотреть прямоугольник  $KLMN$  с вершинами  $K(0; 0)$ ,  $L(a; 0)$ ,  $M(a; b)$ ,  $N(0; b)$ , где  $a$  и  $b$  — положительные действительные числа, и показать, что  $S = ab$ .

3. На основании того, что площади равных фигур равны, сделать вывод о справедливости указанной формулы для любого прямоугольника.

### Мини-исследование 28

Значение определённого интеграла можно вычислять как предел некоторых последовательностей интегральных сумм. С другой стороны, это же значение можно находить по формуле Ньютона – Лейбница. Поэтому в том случае, когда значение определённого интеграла известно, этот результат можно использовать для вычисления пределов некоторых последовательностей сложной структуры.

Например, для функции  $f(x) = \sqrt{x}$  при разбиении отрезка  $[0; 1]$  на  $n$  равных частей можно составить следующие интегральные суммы:

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right).$$

Поскольку по формуле Ньютона – Лейбница  $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$ ,

то можно сделать вывод, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$ .

Предлагается на основе вычисляемых определённых интегралов составить несколько интересных задач на пределы последовательностей.

**Мини-исследование 29**

Предлагается доказать формулу  $V = \frac{1}{3}SH$  объёма правильной пирамиды, площадь основания которой равна  $S$  и высота равна  $H$ , по следующей схеме.

1. Для каждого натурального числа  $n$  рассмотреть  $n$  плоскостей, которые параллельны основанию пирамиды и делят высоту на  $n$  равных частей.

2. Каждую часть пирамиды, заключённую между двумя из соседних проведённых плоскостей, ограничить с двух сторон прямыми призмами так, чтобы одна из призм содержала рассматриваемую часть и была наименьшей из таких призм, а другая содержалась внутри рассматриваемой части пирамиды и была наибольшей.

3. Составить суммы  $V'_n$  объёмов для внутренних и  $V''_n$  для внешних призм.

4. Показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} [V''_n - V'_n] = 0$ , откуда будет следовать измеримость рассматриваемого тела.

5. Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} V'_n$  и тем самым получить формулу объёма правильной пирамиды.

6. Выяснить, для каких ещё видов пирамид возможны аналогичные рассуждения.

**Мини-исследование 30**

Предлагается вывести формулы для вычисления объёмов многогранников в ином виде.

1. В тетраэдре  $ABCD$  рёбра  $AB$  и  $CD$  расположены на скрещивающихся прямых, расстояние между которыми равно  $h$ , а угол между ними равен  $\alpha$ . Докажите, что объём тетраэдра можно вычислять по формуле  $V = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot h \sin \alpha$ .

2. Дан выпуклый многогранник, все вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях. Докажите, что его объём можно вычислить по формуле  $V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S)$ , где  $S_1$  — площадь грани, расположенной в одной плоскости;  $S_2$  — площадь грани, расположенной в другой плоскости;  $S$  — площадь сечения многогранника плоскостью, равноудалённой от двух данных плоскостей;  $h$  — расстояние между данными плоскостями.

3. Проверьте справедливость формулы из пункта 2 этого исследования в том случае, когда многогранник: а) призма; б) пирамида; в) усечённая пирамида.



# Глава 10

## УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В этой главе вы познакомитесь с понятием условной вероятности и его применением к решению некоторых задач о вероятностях достаточно сложных событий.

### ■ § 1. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОДСЧЁТА УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**1.1. Условная вероятность.** Рассмотрим эксперимент, который удовлетворяет следующим условиям.

1. Эксперимент состоит в случайном выборе точки из множества  $\Omega$  всех возможных исходов эксперимента, на котором определена мера  $\mu$ .

2. Если  $A$  — некоторое подмножество множества  $\Omega$ , и в результате эксперимента точка оказалась одной из точек множества  $A$ , то говорят, что произошло событие  $A$ .

3. Вероятность  $P(A)$  события  $A$  определяется как отношение меры множества  $A$  к мере множества  $\Omega$ , то есть

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \quad (1)$$

Иногда вероятность события может зависеть от других обстоятельств.

**Пример 1.** Ученик, пришедший сдавать экзамен, не знает трёх билетов из 25, лежащих на столе у учителя. Какова вероятность того, что ученик выберет один из тех билетов, которые он не знает, если среди десяти билетов, вытянутых до него, он не знает ровно один билет?

Поскольку на столе осталось 15 билетов, среди которых ученик не знает ровно двух, то искомая вероятность равна  $\frac{2}{15}$ .

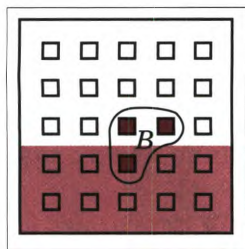


Рис. 1

На рис. 1 схематически изображены 25 билетов — это множество  $\Omega$  всех возможных исходов эксперимента. Среди этих билетов три билета выделены красным цветом — это множество  $B$  тех билетов, которые ученик не знает. Если бы ученик пришёл на экзамен первым, то вероятность события  $B$  вычислялась бы по формуле

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)}.$$



Множество  $H$  тех билетов, которые остались на столе у экзаменатора, на рис. 1 не закрашено.

Поскольку нам известно, что произошло событие  $H$ , то ученик берёт один из билетов, оставшихся на столе. В этом случае событие  $B$  происходит только в том случае, когда ученик выбирает билет из множества  $B \cap H$ .

Следовательно, вероятность  $P(B|H)$  события  $B$ , состоящего в том, что ученик выберет билет, который он не знает, при условии, что произошло событие  $H$ , состоящее в том, что осталось 15 билетов, из которых 2 билета ученик не знает, равна отношению

$$\frac{N(B \cap H)}{N(H)}.$$

Пусть рассматриваемый эксперимент удовлетворяет условиям 1, 2 и 3. Условной вероятностью события  $B$  при условии, что произошло событие  $H$ , называется число

$$P(B|H) = \frac{\mu(B \cap H)}{\mu(H)}. \quad (2)$$

**Вопрос.** Во время тиража спортлото «5 из 36» изображение на экране телевизора исказилось. На первом вытянутом шаре вы сумели разглядеть лишь то, что его номер — двузначный. Какова вероятность того, что вы угадали номер вынутого шара, если среди пяти записанных вами номеров всего два номера — однозначных?

**1.2. Формула условной вероятности.** Рассмотрим формулу (2) для условной вероятности и разделим числитель и знаменатель на число  $\mu(\Omega)$ . В результате получим

$$P(B|H) = \frac{\frac{\mu(B \cap H)}{\mu(\Omega)}}{\frac{\mu(H)}{\mu(\Omega)}}.$$

Но, по формуле (1),

$$\frac{\mu(H)}{\mu(\Omega)} = P(H) \quad \text{и} \quad \frac{\mu(B \cap H)}{\mu(\Omega)} = P(BH),$$

где  $P(BH)$  — вероятность произведения событий  $B$  и  $H$ . Таким образом,

$$P(B|H) = \frac{P(BH)}{P(H)}. \quad (3)$$

Формулу (3) иногда называют *формулой условной вероятности*.

**Пример 2.** Опрос общественного мнения, проведённый перед выборами по поручению кандидата Петрова, дал картину, описанную в таблице.

Событие	Собираются голосовать за Петрова	Собираются голосовать за других кандидатов	Собираются голосовать против всех	Не собирались голосовать
Вероятность	0,40	0,30	0,05	0,25

С какой вероятностью явившиеся на выборы проголосуют за кандидата Петрова?

Пусть  $H$  — событие, что избиратель явился на выборы. Из таблицы  $P(\bar{H}) = 0,25$ , поэтому  $P(H) = 1 - P(\bar{H}) = 0,75$ . Далее, пусть  $B$  — событие, состоящее в том, что избиратель проголосует за Петрова. Следуя таблице,  $P(B) = 0,40$ . Но собирающиеся голосовать за Петрова явятся на выборы. Следовательно,  $BH = B$  и  $P(BH) = P(B) = 0,40$ . Таким образом,

$$P(B|H) = \frac{P(BH)}{P(H)} = \frac{0,40}{0,75} = \frac{8}{15}.$$

**Вопрос.** С какой вероятностью на выборах, о которых шла речь в примере 2, избиратели проголосуют против всех кандидатов?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Что называют произведением двух событий?
2. Как определяется вероятность события  $B$  при условии, что произошло событие  $H$ ?
3. По какой формуле можно вычислять условную вероятность?

### ■ Задачи и упражнения

1. Рассматривается эксперимент с бросанием игрального кубика.
  - а) Какова вероятность того, что выпало чётное число очков, если известно, что выпавшее число очков делится на три?
  - б) Какова вероятность того, что выпавшее число очков делится на три, если известно, что это число очков нечётное?
2. Пусть известно, что в течение года из 365 дней ожидается 200 солнечных дней без осадков, 120 дней, когда идёт дождь, и 100 дней, когда идёт снег. Какова вероятность того, что в дождливый день выпадет снег?

3. Из 50 экзаменационных билетов студент хорошо знает только 35. Какова вероятность того, что этому студенту достанется билет, который он плохо знает, если до него зашли 18 студентов и взяли 10 билетов, которые он хорошо знал?

4. Пусть эксперимент заключается в подбрасывании монеты. Какова вероятность того, что при втором бросании выпадет «орёл», если известно, что при первом бросании выпала «решка»?

5. В магазин завезли 1000 лампочек, из которых 400 произведено на первом заводе, и среди них 20 бракованных; 600 произведено на втором заводе, и среди них 10 бракованных. Какова вероятность купить хорошую лампочку, если известно, что эта лампочка с первого завода?

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какова вероятность того, что при двух подбрасываниях монеты выпадет два «орла»?

- 1)  $\frac{1}{6}$                       2)  $\frac{1}{4}$                       3)  $\frac{1}{3}$                       4)  $\frac{1}{2}$

1.2. Какова вероятность того, что при двух подбрасываниях игрального кубика выпадет две шестёрки?

- 1)  $\frac{1}{100}$                       2)  $\frac{1}{50}$                       3)  $\frac{1}{36}$                       4)  $\frac{1}{24}$

1.3. Сколько всего двузначных чисел, обе цифры которых чётны?

- 1) 15                      2) 20                      3) 25                      4) 30

1.4. На выбранном диаметре  $AB$  окружности случайным образом выбрали точку и провели через неё хорду перпендикулярно  $AB$ . Какова вероятность того, что длина хорды больше радиуса окружности?

- 1)  $\frac{1}{4}$                       2)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$                       3)  $\frac{1}{2}$                       4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Игральный кубик подбрасывают два раза. Вероятность каких событий больше 0,1?

- 1) сумма очков равна 3                      2) сумма очков равна 5  
3) сумма очков равна 7                      4) сумма очков равна 9

2.2. Игральный кубик подбрасывают два раза. Вероятность каких событий равна нулю?

- 1) сумма очков равна 1                      2) сумма очков равна 6  
3) сумма очков равна 11                      4) сумма очков равна 15



**2.3.** Из 20 экзаменационных билетов студент плохо знает 7. Какой может быть условная вероятность вытянуть «плохой» билет, если до него билеты взяли 5 человек?

- 1)  $\frac{2}{15}$       2)  $\frac{4}{15}$       3)  $\frac{6}{15}$       4)  $\frac{8}{15}$

**2.4.** Какие из условных вероятностей всегда равны 1?

- 1)  $P(B|A+B)$ , если  $P(A+B) > 0$       2)  $P(B|B)$ , если  $P(B) > 0$   
 3)  $P(B|A+\bar{B})$ , если  $P(A+\bar{B}) > 0$       4)  $P(B|AB)$ , если  $P(AB) > 0$

## ■ § 2. ФОРМУЛА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**2.1. Вероятность произведения двух событий.** Когда известны вероятности событий  $P(A) \neq 0$  и  $P(AB)$ , можно найти и условную вероятность  $P(B|A)$  по формуле:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (1)$$

Однако встречаются задачи, в которых вероятность  $P(AB)$  произведения событий  $A$  и  $B$  неизвестна, а условная вероятность  $P(B|A)$  находится непосредственно из условия задачи.

В такой ситуации полезна формула произведения вероятностей, которая получается как следствие формулы (1):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A). \quad (2)$$

Для доказательства равенства (2) достаточно обе части формулы (1) умножить на ненулевое число, равное  $P(A)$ .

**Пример 1.** Для участника розыгрыша спортлото «5 из 36» найдём вероятность того, что будут угаданы два первых номера.

Вероятность события  $A_1$  угадать номер первого шара очевидно равна  $\frac{5}{36}$ , так как в барабанах 36 шаров, а зритель записал 5 номеров. После того как событие  $A_1$  произошло, в барабанах осталось 35 шаров, из которых номера четырёх шаров записаны зрителем. Следовательно, условная вероятность события  $A_2$  угадать номер второго шара в этом случае легко находится:  $P(A_2|A_1) = \frac{4}{35}$ .

В результате по формуле (2) имеем:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{35} = \frac{1}{63}.$$

**Вопрос.** Чему равна вероятность не угадать ни один из первых двух номеров в спортлото «5 из 36»?

**2.2.\* Вероятность произведения нескольких событий.** Формула (2) обобщается на случай произведения произвольного числа событий.

**Теорема** (формула произведения вероятностей). Для произведения нескольких событий выполняется равенство

$$P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}), \quad (3)$$

которое выполняется всегда, когда определены все условные вероятности в его правой части.

**Пример 2.** Рассмотрим пример из предыдущего пункта и найдём вероятность угадать все 5 номеров в спортлото «5 из 36».

Пусть каждое из событий  $A_k$ , где  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , состоит в том, что мы угадаем номер  $k$ -го по счёту шара, вынутого из барабана. Если произошло событие  $A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1}$ , то есть если участник розыгрыша угадал первые  $(k-1)$  номеров, то в барабане осталось ровно  $36 - (k-1)$  шаров, из которых номера  $5 - (k-1)$  шаров записаны участником розыгрыша. Следовательно:

$$P(A_k | A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1}) = \frac{5 - (k-1)}{36 - (k-1)}, \text{ где } 1 < k \leq 5. \quad (4)$$

В силу равенства (3), чтобы найти вероятность произведения  $A_1 \cdot \dots \cdot A_5$ , надо перемножить вероятность  $P(A_1)$  и все вероятности из (4):

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdot \dots \cdot A_5) &= \frac{5}{36} \cdot \frac{5-1}{36-1} \cdot \frac{5-2}{36-2} \cdot \frac{5-3}{36-3} \cdot \frac{5-4}{36-4} = \\ &= \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{34} \cdot \frac{2}{33} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{21 \cdot 17 \cdot 33 \cdot 32} = \frac{1}{377\,000}. \end{aligned}$$

**Вопрос.** Что вероятнее в спортлото «5 из 36»: угадать хотя бы один номер из пяти или не угадать ни одного номера?

**2.3.\*\* Доказательство формулы произведения вероятностей.** Докажем формулу произведения вероятностей.

Прежде всего заметим, что при  $A = A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1}$  и  $B = A_k$  из формулы (2) вытекает, что

$$P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) = P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1}) \cdot P(A_k | A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1}) \text{ при каждом } k > 1.$$

Выписывая последовательно эти равенства, получаем:

$$P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \cdot P(A_n | A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}),$$

$$P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}),$$

...

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \cdot P(A_4 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3),$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2),$$

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1).$$

Перемножив соответственно левые и правые части и сократив лишние множители, получим требуемую формулу (3).

**Вопрос.** Чему равна вероятность вытащить подряд три чёрных шара из урны, в которой лежат 20 белых и 5 чёрных шаров?

**2.4. Независимость событий.** На практике часто встречаются события, между которыми не видно какой-либо причинной зависимости. Трудно предположить, например, что выпадение «орла» или «решки» при подбрасывании одной монеты влияет на выпадение «орла» при подбрасывании другой монеты. Если между событиями  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k$  нет причинной зависимости, то естественно предположить, что информация о том, какие из событий  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$  произошли, а какие нет, не должна повлиять на вероятность появления события  $A_k$ , и в этом случае естественно считать, что  $P(A_k | A_1 \cdot \dots \cdot A_{k-1}) = P(A_k)$  при всех  $k = 1, 2, \dots$ .

События  $A_1$  и  $A_2$  называются *независимыми*, если

$$P(A_2 | A_1) = P(A_2) \quad \text{и} \quad P(A_1 | A_2) = P(A_1).$$

В случае независимости событий  $A_1$  и  $A_2$  формула произведения вероятностей приводит к равенству

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Таким образом, при  $n = 2$  независимость  $A_1$  и  $A_2$  влечёт равенство

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Если события  $A_1$  и  $A_2$  независимы, то независимы также события  $A_1$  и  $\bar{A}_2$ . Действительно,  $P(\bar{A}_2 | A_1) + P(A_2 | A_1) = 1$  и  $P(A_2 | A_1) = P(A_2)$ . Следовательно,  $P(\bar{A}_2 | A_1) = 1 - P(A_2) = P(\bar{A}_2)$ . Аналогично  $P(\bar{A}_1 | A_2) = P(\bar{A}_1)$ .

Общее понятие независимости нескольких событий сложно. Поэтому чаще всего ограничиваются интуитивным представлением о независимости событий и предполагают, что если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы, то справедливо равенство

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n), \quad (5)$$



причём аналогичное равенство сохраняется и в том случае, когда некоторые из событий  $A_i$  заменить на их дополнения  $\bar{A}_i$ .

**Пример 3.** Монета подбрасывается  $n$  раз. Какова вероятность, что при каждом подбрасывании выпадет «орёл»?

Пусть событие  $A_k$  состоит в том, что при  $k$ -м подбрасывании выпадет «орёл», где  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $P(A_k) = \frac{1}{2}$ , а все события  $A_1, \dots, A_n$  независимы. Следовательно,

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \frac{1}{2^n}.$$

**Пример 4.** Игральная кость подбрасывается  $n$  раз. Чему равна вероятность того, что ни разу не выпадет 6 очков?

Пусть событие  $A_k$  состоит в том, что при  $k$ -м подбрасывании выпадет 6 очков. Тогда  $P(A_k) = \frac{1}{6}$ ,  $P(\bar{A}_k) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  при всех  $k$ .

$$\text{Значит, } P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

**Вопрос.** Чему равна вероятность того, что при двух подбрасываниях игральной кости оба раза выпадет по 6 очков?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Какой вид имеет формула вероятности произведения двух событий?
2. Какой вид имеет формула вероятности произведения нескольких событий?
3. В каком случае два события называются независимыми?
4. Как найти вероятность произведения двух независимых событий?
5. Чему равна вероятность произведения нескольких независимых событий?
- 6.\*\* Докажите формулу произведения вероятностей.

### Задачи и упражнения ■

1. Бросают 3 монеты. Какова вероятность выпадения трёх «гербов»?
2. Из урны, содержащей 5 белых и 4 чёрных шара, вынимают один шар, запоминают его цвет и опускают обратно в урну. Шары перемешивают и снова вынимают шар. Какова вероятность того, что:
  - а) оба вынутых шара — чёрные;
  - б) оба шара — белые;
  - в) один шар — чёрный, другой — белый?

3. Из урны, содержащей 5 белых и 4 чёрных шара, вынимают один за другим два шара, не опуская их обратно в урну. Какова вероятность того, что оба вынутых шара — чёрные?

4. Два охотника увидели лису и одновременно выстрелили в неё. Предположим, что каждый из охотников на таком расстоянии обычно убивает лису в одном из трёх случаев. Какова вероятность того, что оба охотника промахнутся и лиса уцелеет?

5. В артиллерийской батарее четыре орудия. Первое орудие пристреляно так, что вероятность попадания из него по цели равна 0,3; для каждого из остальных трёх орудий вероятность попадания равна 0,2. Батарея дала залп. Какова вероятность того, что:

- а) все орудия попадут в цель;
- б) ни одно из орудий не попадёт в цель;
- в) одно лишь первое орудие попадёт в цель?

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно число  $C_7^3$  сочетаний из 7 по 3?

- 1) 30                      2) 35                      3) 60                      4) 70

1.2. Какова вероятность угадать задуманное двузначное число с третьей попытки, если первые две попытки были неудачными?

- 1)  $\frac{1}{98}$                       2)  $\frac{1}{92}$                       3)  $\frac{1}{88}$                       4)  $\frac{1}{82}$

1.3. В зрительном зале 18 рядов по 20 мест. Какова вероятность того, что при покупке билета номер ряда совпадёт с номером места?

- 1)  $\frac{1}{18}$                       2)  $\frac{1}{20}$                       3)  $\frac{1}{9}$                       4)  $\frac{1}{10}$

1.4. Каким числом способов можно выбрать двух мужчин и двух женщин из коллектива, в котором 6 мужчин и 4 женщины?

- 1)  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4}$                       2)  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3}$                       3)  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2}$                       4)  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из равенств для вероятностей являются верными?

- 1)  $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$                       2)  $P(AB) = P(B) \cdot P(B|A)$
- 3)  $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$                       4)  $P(AB) = P(A) \cdot P(A|B)$

**2.2.** В эксперименте монета подбрасывается 4 раза. Вероятность каких из приведённых событий больше 0,5?

- 1) выпадает меньше 2 «орлов»
- 2) выпадает ровно 2 «орла»
- 3) выпадает не меньше 2 «орлов»
- 4) выпадает не больше 2 «орлов»

**2.3.\*** Для событий  $A$  и  $B$  известно, что  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ . Какие значения не может иметь  $P(AB)$ ?

- 1)  $\frac{1}{2}$
- 2)  $\frac{1}{3}$
- 3)  $\frac{1}{4}$
- 4)  $\frac{1}{12}$

**2.4.** При каких значениях  $n$  число  $C_n^3$  сочетаний из  $n$  по 3 больше 200?

- 1)  $n = 10$
- 2)  $n = 11$
- 3)  $n = 12$
- 4)  $n = 13$

### § 3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ■ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

**3.1. Полный класс событий.** Введём одно вспомогательное, но очень полезное понятие. Возможные события  $H_1, \dots, H_n$  образуют полный класс событий, если при любом исходе эксперимента происходит одно и только одно из этих событий.

**Пример 1.** Пусть  $n$  бригад завода производят одинаковые изделия, и  $H_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ , — событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие этого завода произведено бригадой с номером  $k$ . В этом случае события  $H_1, \dots, H_n$  образуют полный класс событий, поскольку любое выбираемое изделие произведено какой-то одной из указанных бригад.

**Пример 2.** В тесто, из которого сделали пирог, некто случайно уронил одну горошину душистого перца. Пирог разделили на  $n$  человек. Тогда горошина обязательно попадётся одному и только одному из участников обеда. Поэтому, обозначив через  $H_k$  событие, что горошина достанется  $k$ -му участнику, получим полный класс событий  $H_1, \dots, H_n$ .

Определение полного класса событий можно записать в следующем виде.

Возможные события  $H_1, \dots, H_n$  образуют полный класс событий тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

- 1) события  $H_1, \dots, H_n$  попарно несовместны;
- 2) объединение  $H_1 \cup \dots \cup H_n$  даёт всё пространство  $\Omega$  элементарных исходов.



В частности, если события  $A$  и  $\bar{A}$  непусты, то они всегда образуют полный класс событий, каково бы ни было событие  $A$ .

**Вопрос.** Как доказать, что если все события  $A \cap B$ ,  $A \cap \bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap B$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$  возможны, то они образуют полный класс, каковы бы ни были события  $A$  и  $B$ ?

**3.2. Формула полной вероятности.** Удачный подбор полного класса событий может облегчить подсчёт некоторых вероятностей, если использовать основное свойство полного класса событий.

Пусть  $H_1, \dots, H_n$  — полный класс событий,  $A$  — произвольное событие. Тогда

$$P(A) = P(A \cap H_1) + \dots + P(A \cap H_n). \quad (1)$$

Действительно, по определению полного класса событий, событие  $A$  может произойти тогда и только тогда, когда произойдёт одно из событий  $(A \cap H_1), \dots, (A \cap H_n)$ , причём никакие два из этих событий не могут произойти одновременно. Таким образом,  $A = (A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$ , причём события  $(A \cap H_1), \dots, (A \cap H_n)$  попарно не пересекаются.

После этих рассуждений формула (1) следует из закона сложения вероятностей.

Из свойства полного класса событий следует формула полной вероятности.

Пусть события  $H_1, \dots, H_n$  образуют полный класс событий и имеют положительные вероятности. Тогда для любого события  $A$  имеет место следующее равенство:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A | H_n). \quad (2)$$

Это утверждение следует из формулы (1), так как

$$P(A \cap H_k) = P(H_k) \cdot P(A | H_k)$$

при всех  $k = 1, \dots, n$ , в силу формулы произведения вероятностей.

**Пример 3.** Имеется 5 урн, из которых две содержат по 1 белому и по 5 чёрных шаров, одна урна — 2 белых и 5 чёрных шаров и последние две урны — по 3 белых и по 5 чёрных шаров. Наудачу выбирается одна урна, и из неё наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется белым?

Пусть  $H_k$  — событие, состоящее в том, что шар извлечён из урны, содержащей  $k$  белых шаров. Тогда  $H_1, H_2, H_3$  — полный класс событий, причём  $P(H_1) = \frac{2}{5}$ ,  $P(H_2) = \frac{1}{5}$ ,  $P(H_3) = \frac{2}{5}$ . Через  $A$  обозначим событие, состоящее в том, что извлекается белый шар. Зная количество белых и чёрных шаров в каждой урне, нетрудно вычислить условные вероятности события  $A$ :

$$P(A|H_1) = \frac{1}{6}, \quad P(A|H_2) = \frac{2}{7}, \quad P(A|H_3) = \frac{3}{8}.$$

В итоге по формуле (2) получаем:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{23}{84}.$$

**Вопрос.** Как объяснить, что вероятности  $P(H_1)$ ,  $P(H_2)$  и  $P(H_3)$  в примере 3 равны  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{5}$  и  $\frac{2}{5}$  соответственно?

**3.3.\*\* Формула Байеса вероятности гипотез.** Другим важным следствием из формулы (1) является следующее утверждение.

Пусть события  $H_1, \dots, H_n$  составляют полный класс событий и имеют ненулевые вероятности. Тогда для любого события  $A$  с положительной вероятностью и при любом  $k = 1, 2, \dots, n$ , верно равенство

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}. \quad (3)$$

Поскольку  $A \cap H_k = H_k \cap A$ , то по формуле произведения вероятностей имеем

$$P(A \cap H_k) = P(A) \cdot P(H_k|A) = P(H_k) \cdot P(A|H_k).$$

Отсюда

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

По формуле полной вероятности имеем равенство:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n).$$

Подставляя полученное выражение для  $P(A)$  в предыдущее равенство, приходим к формуле (3), которая называется *формулой Байеса* или *формулой вероятности гипотез*.

**Пример 4.** Имеется 5 урн, из которых две урны содержат по 2 белых и по 3 чёрных шара, две урны — по 1 белому и по 4 чёрных шара, одна урна содержит 4 белых и 1 чёрный шар. Наудачу выбирается урна, и из неё извлекается шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что этот шар вынут из урны, содержащей 4 белых и 1 чёрный шар?

Пусть  $H_k$  — событие, состоящее в том, что шар извлечён из урны, содержащей  $k$  белых шаров, где  $k$  — либо 1, либо 2, либо 4. Тогда  $H_1, H_2, H_4$  — полный класс событий. Через  $A$  обозначим событие, состоящее в том, что извлекается белый шар. Требуется вычислить вероятность  $P(H_4|A)$ .

По условию

$$P(H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(H_2) = \frac{2}{5}, \quad P(H_4) = \frac{1}{5},$$

$$P(A|H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{5}, \quad P(H|A_4) = \frac{4}{5}.$$

По формуле Байеса

$$P(H_4|A) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{2}{5}.$$

**Вопрос.** Как в примере 4 найти  $P(H_1|A)$  и  $P(H_2|A)$ ?

### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Что такое полный класс событий?
2. Сформулируйте основное свойство полного класса событий.
3. Какой вид имеет формула полной вероятности?
4. Какой вид имеет формула Байеса?

### ■ Задачи и упражнения

1. Имеется 5 урн, из которых две содержат по 2 белых и одному чёрному шару, одна урна — 10 чёрных шаров и ещё две урны — по 3 белых и одному чёрному шару. Наудачу выбирается одна урна, и из неё наудачу извлекается шар. Какова вероятность, что этот шар окажется: а) белым; б) чёрным?

2.\*\* Имеется 5 урн с белыми и чёрными шарами, из которых три содержат по три белых и одному чёрному шару, и две содержат по 4 белых и 2 чёрных шара. Наудачу выбирается урна, и из неё наудачу извлекается шар, который оказался белым. Какова вероятность, что этот шар вынут: а) из урны первого состава; б) из урны второго состава?

3. На заводе — три цеха. 50% продукции производит цех № 1, 30% — цех № 2 и 20% — цех № 3. При этом вероятность произвести бракованную продукцию равна 1% у цеха № 1, 2% — у цеха № 2 и 2% — у цеха № 3. Какова вероятность того, что завод выпустит бракованное изделие?

4.\* Урны занумерованы числами от 1 до  $m$ . Урна с номером  $i$  содержит  $N_i$  шаров, из которых  $n_i$  шаров белые. Наудачу выбирается одна урна, и из неё наудачу извлекается шар. Какова вероятность, что этот шар окажется белым?



5.\*\* В артиллерийской батарее четыре орудия. Первое орудие пристроено так, что вероятность попадания из него по цели равна 0,3, для каждого из остальных трёх орудий она равна 0,2. Батарея дала залп, и было получено в точности одно попадание в цель. Какова вероятность того, что в цель попал снаряд: а) из первого орудия; б) из второго орудия?

6. Из урны, содержащей 5 белых и 4 чёрных шара, вынимают один за другим 2 шара, причём вынутые шары не возвращают обратно в урну. Какова вероятность того, что оба шара белые?

## Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Из теста, в которое случайно попало маковое зёрнышко, сделали булку в форме шара радиуса  $R$ . Какова вероятность того, что маковое зёрнышко окажется от центра шара на расстоянии, не большем  $0,5 \cdot R$ ?

- 1)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       2)  $\frac{1}{4}$       3)  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$       4)  $\frac{1}{8}$

1.2. Какое из приведённых чисел является наибольшим?

- 1)  $C_{10}^4$       2)  $C_{10}^5$       3)  $C_{10}^6$       4)  $C_{10}^7$

1.3. Чему равно число  $A_5^3$ ?

- 1) 10      2) 20      3) 40      4) 60

1.4. Какова вероятность того, что при первом бросании монеты выпадет «орёл», при втором — «решка» и при третьем — «орёл»?

- 1)  $\frac{1}{12}$       2)  $\frac{1}{9}$       3)  $\frac{1}{8}$       4)  $\frac{1}{6}$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из равенств для вероятностей являются верными?

- 1)  $P(A + B) = P(A) + P(B)$       2)  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$   
3)  $P(A + B) = P(A) + P(\overline{BA})$       4)  $P(A + B) = P(\overline{AB}) + P(B)$

2.2. Для событий  $A$  и  $B$  известно, что  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ . Какие значения не может иметь  $P(A + B)$ ?

- 1)  $\frac{1}{2}$       2)  $\frac{7}{12}$       3)  $\frac{2}{3}$       4)  $\frac{3}{4}$

2.3. Для некоторых событий  $A$  и  $H$  известно, что  $P(A|H) \leq 0,6$ . Какие значения может иметь условная вероятность  $P(\overline{A}|H)$ ?

- 1) 0,25      2) 0,5      3) 0,75      4) 1

**2.4.** Эксперимент состоит в двукратном бросании игрального кубика.

Вероятности каких из приведённых событий равны  $\frac{1}{9}$ ?

- 1) произведение выпавших очков равно 6
- 2) произведение выпавших очков равно 12
- 3) произведение выпавших очков равно 4
- 4) произведение выпавших очков равно 8



В этой главе будет доказана периодичность основных тригонометрических функций и показано, как это свойство можно использовать при построении графиков. Будут рассмотрены также функции, обладающие наименьшим положительным периодом.

## § 1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ■

**1.1. Всюду определённые периодические функции.** Важнейшей особенностью тригонометрических функций является их периодичность.

Рассмотрим функции, определённые на всей числовой оси.

Функция  $f(x)$ , определённая на всей числовой оси, называется периодической, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для всех значений  $x$  выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x). \quad (1)$$

Число  $T$  с этими свойствами называется *периодом* функции  $f(x)$ .

Заменяя  $x$  в равенстве (1) на  $x - T$ , получим также равенство

$$f(x - T) = f(x) \quad (2)$$

для всех значений  $x$ .

Таким образом, если  $T$  — период функции  $f(x)$ , то число  $(-T)$  — тоже период. Поэтому рассматривают как положительные, так и отрицательные периоды.

Для ненулевого действительного числа  $A$  и целого числа  $k$  число  $kA$  назовём кратным числу  $A$ .

Если  $T$  — период функции  $f(x)$ , то любое ненулевое кратное числа  $T$  также является периодом функции  $f(x)$ .

Действительно, пусть, например,  $k = 3$ . Используя равенство (1), получаем:

$$f(x + 3T) = f(x + 2T) = f(x + T) = f(x).$$

Точно так же устанавливается, что  $f(x + kT) = f(x)$  для каждого натурального числа  $k$ .

Аналогично доказывается, что  $f(x + kT) = f(x)$  для каждого целого отрицательного числа  $k$ . В частности, при  $k = -2$  имеем:

$$f(x - 2T) = f(x - 2T + T) = f(x - T) = f(x - T + T) = f(x).$$



Для постоянной функции каждое ненулевое число является периодом. Например, пусть на всей числовой оси  $f(x) = 1$ . Тогда для любого числа  $T \neq 0$  при всех значениях  $x$  выполняется равенство  $f(x + T) = 1 = f(x)$ .

Если функция имеет наименьший положительный период, то он называется *основным периодом*.

**Функции  $g(x) = \sin x$  и  $h(x) = \cos x$ , определённые на всей числовой оси, обладают основным периодом, равным  $2\pi$ .**

Покажем вначале, что множества периодов функций  $g(x) = \sin x$  и  $h(x) = \cos x$  совпадают.

Действительно, если  $P$  — произвольный период функции  $h(x) = \cos x$ , то для каждого значения  $\alpha$  выполняются равенства  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - P\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - P\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + P)\right)$ . Отсюда и из того, что для любого числа  $\alpha$  справедливо равенство  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ , следует, что  $\sin(\alpha + P) = \sin \alpha$ . Тем самым  $P$  — период функции  $g(x) = \sin x$ .

Аналогично показывается, что всякий период функции  $g(x) = \sin x$  является периодом функции  $h(x) = \cos x$ .

Рассмотрим теперь функцию  $h(x) = \cos x$ , определённую на всей числовой оси. Число  $2\pi$  является периодом функции  $h(x) = \cos x$ , поскольку для всех действительных значений  $x$  выполняется равенство  $\cos(2\pi + x) = \cos x$ .

Пусть теперь  $T$  — некоторый положительный период функции  $h(x) = \cos x$ . Тогда для любого значения  $x$  выполняется равенство  $\cos x = \cos(x + T)$ . В частности,  $1 = \cos 0 = \cos(0 + T) = \cos T$ . Однако для положительных чисел равенство  $\cos T = 1$  выполняется лишь для чисел вида  $2\pi \cdot n$ , где  $n$  — натуральное число. Наименьшим из таких чисел является  $T = 2\pi$ . Поэтому основной период функции  $h(x) = \cos x$  равен  $2\pi$ . Но тогда основной период функции  $g(x) = \sin x$  также равен  $2\pi$ , поскольку функции  $g(x) = \sin x$  и  $h(x) = \cos x$  имеют одни и те же периоды.

**Вопрос.** Как доказать, что основной период функции  $f(x) = \sin x + \cos x$ , определённой на всей числовой оси, равен  $2\pi$ ?

**1.2. Основной период функции  $y = \sin 2x$ .** По основным периодам функций  $\sin x$  и  $\cos x$  можно находить основные периоды некоторых других функций.

**Пример 1.** Найдём основной период функции  $y = \sin 2x$ .

Пусть  $T$  — период функции  $y = \sin 2x$ . Тогда при подстановке вместо  $x$  числа  $x + T$  значение функции должно сохраняться. Следовательно,

$$\sin 2(x + T) = \sin 2x.$$

Отсюда  $\sin(2x + 2T) = \sin 2x$ . Полагая  $2x = z$ , получим

$$\sin(z + 2T) = \sin z$$

для всех  $z$ . Но наименьший положительный период функции  $g(z) = \sin z$  равен  $2\pi$ . Поэтому из равенства  $2T = 2\pi$  получим наименьший положительный период  $T = \pi$  функции  $y = \sin 2x$ .

**Вопрос.** Какой основной период имеет функция  $g(x) = \sin x + 1$  ?

**1.3. Периодические функции, определённые не всюду.** Общее определение периодической функции должно учитывать её область определения.

Функция  $f(x)$  с областью определения  $D$  называется периодической, если существует такое число  $T \neq 0$ , что для всякого числа  $x$  из области  $D$  числа  $x + T$  и  $x - T$  также принадлежат  $D$  и выполняется равенство  $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$ .

Число  $T$  в этом определении называется *периодом* функции  $f(x)$ .

Если функция  $f(x)$  имеет период  $T$ , то число  $(-T)$  также является периодом этой функции.

Отметим, что число нуль не считают периодом функции.

В общем случае наименьший положительный период функции, если он существует, называется *основным* периодом.

**Функция  $y = \operatorname{tg} x$  обладает основным периодом, равным  $\pi$ .**

Действительно, область определения  $D$  функции  $y = \operatorname{tg} x$  состоит из всех чисел, отличных от чисел вида  $\frac{\pi}{2} + \pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Если число  $x$  принадлежит этой области, то числа  $x + \pi$  и  $x - \pi$  тоже принадлежат области  $D$ , причём выполняется равенство  $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ .

Таким образом, число  $\pi$  есть период функции  $y = \operatorname{tg} x$ .

Пусть теперь  $T$  — некоторый положительный период функции  $y = \operatorname{tg} x$ . Тогда для любого значения  $x$  выполняется равенство  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + T)$ . Поэтому  $0 = \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}(0 + T) = \operatorname{tg} T$ . Однако для положительных чисел равенство  $\operatorname{tg} T = 0$  выполняется лишь для чисел вида  $\pi \cdot n$ , где  $n$  — натуральное число. Наименьшим из таких чисел является  $T = \pi$ . Поэтому основной период функции  $y = \operatorname{tg} x$  равен  $\pi$ .

**Вопрос.** Чему равен основной период функции  $y = \operatorname{tg}^2 x$ ?

**1.4. Особенности графика периодической функции.** Пусть функция  $f(x)$  обладает основным периодом  $T > 0$ . Благодаря тождествам  $f(x + T) = f(x)$  и  $f(x - T) = f(x)$ , точки графика, абсциссы которых отличаются на число, кратное  $T$ , имеют одинаковые ординаты. Поэтому достаточно построить график функции  $f(x)$  на отрезке от 0 до  $T$ , и весь график



функции можно получить, передвигая построенную на отрезке  $[0; T]$  часть графика влево и вправо вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $T, 2T, 3T$  и так далее.

Установив, что некоторая функция  $f(x)$  является периодической, при построении графика этой функции можно поступать следующим образом:

1) выбрать на числовой прямой отрезок, длина которого равна периоду функции (не обязательно основному периоду);

2) на этом отрезке выделить точки, входящие в область определения;

3) на получившемся множестве с использованием известных приёмов и с учётом найденных особенностей построить часть графика;

4) передвигая построенную часть графика влево и вправо вдоль оси  $Ox$  на каждое из расстояний, кратных периоду, изобразить весь график.

Отметим, что если длина отрезка  $[a; b]$  равна периоду, то построение части графика можно выполнять на промежутке  $(a; b]$  и затем полученную часть сдвигать вдоль оси  $Ox$ .

**Пример 2.** Построить график функции  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ .

Функция определена на множестве  $D$  таких значений  $x$ , для которых  $\sin x \geq 0$ . Заметим, что если  $x_0 \in D$ , то  $\sin x_0 \geq 0$ ,  $\sin(x_0 + 2\pi) = \sin x_0 \geq 0$ ,  $\sin(x_0 - 2\pi) = \sin x_0 \geq 0$ . Следовательно,  $T = 2\pi$  является периодом данной функции.

Выберем промежуток  $(-\pi; \pi]$  числовой прямой длиной  $2\pi$ .

Для  $-\pi < x < 0$  значение  $\sin x$  отрицательно, а поэтому  $f(x)$  не определена. Далее, на отрезке  $[0; \frac{\pi}{2}]$  функция  $y = \sin x$  возрастает, поэтому  $f(x)$  на этом отрезке также возрастает; на отрезке  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$  функция  $y = \sin x$  убывает, и поэтому функция  $f(x)$  убывает на отрезке  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ .

С помощью вычислительных средств составим таблицу значений:

$x$	$-\pi$	$0$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\pi$
$\sqrt{\sin x}$	0	0	0,62	0,84	0,96	1	0,96	0,84	0,62	0

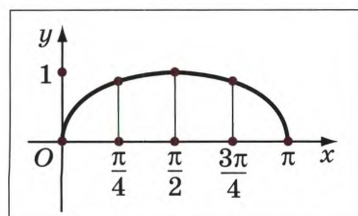


Рис. 1

Отметим в соответствии с таблицей точки с координатами  $(x; \sqrt{\sin x})$  и проведём плавную линию (рис. 1).

Передвигая построенную часть графика влево и вправо вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , получим весь график функции  $y = \sqrt{\sin x}$  (рис. 2).



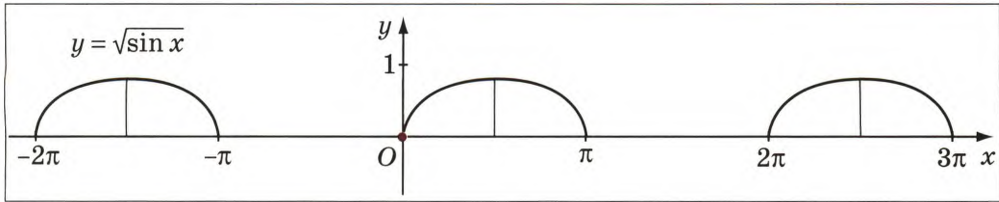


Рис. 2

**Вопрос.** Почему начальную часть графика функции  $y = \sqrt{\sin x}$  можно строить на полуинтервале  $(0; 2\pi]$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. В каком случае функция, определённая на всей числовой оси, называется периодической?
2. Что называется периодом функции?
3. Какой период функции называется основным?
4. Докажите, что функции  $g(x) = \sin x$  и  $h(x) = \cos x$  обладают одними и теми же периодами.
5. Докажите, что функция  $y = \cos x$  обладает основным периодом, равным  $2\pi$ .
6. Приведите пример периодической функции, которая не имеет основного периода.
7. Сформулируйте общее определение периодической функции.
8. Докажите, что функция  $y = \operatorname{tg} x$  является периодической и имеет основной период, равный  $\pi$ .
9. Как построить график функции  $y = \operatorname{tg} x$  на всей области определения?
- 10.\* Как построить график функции  $y = \operatorname{ctg} x$  с помощью графика функции  $y = \operatorname{tg} x$ ?
11. Как можно построить график периодической функции?

### Задачи и упражнения ■

1. Докажите, что функция  $f(x) = \sin^2 x$  является периодической.
2. Докажите, что функция  $f(x) = \sin x + \sin 2x$  является периодической.
3. Пусть  $T$  — период функции  $f(x)$ . Докажите, что тогда при любом целом  $k \neq 0$  число  $kT$  также является периодом функции  $f(x)$ .

4. Найдите период функции:

а)  $y = \sin \frac{x}{2}$ ;

б)  $y = \sin \pi x$ ;

в)  $y = \cos \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right)$ ;

г)  $y = \sin 3x$ ;

д)  $y = \cos \left( 4x + \frac{\pi}{3} \right)$ ;

е)  $y = \sin \sqrt{2}x$ .

5. Докажите, что  $\pi$  — основной период функции  $y = \cos^2 x$ .

6.\*\* Приведите пример таких функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , что основные периоды обеих функций равны между собой, а сумма  $f(x) + g(x)$  имеет меньший основной период.

7. Докажите, что функция  $f(x) = x$  не является периодической.

8.\* Докажите, что функция  $f(x) = \sqrt{|x|}$  не является периодической.

9.\*\* Докажите, что определённая на всей числовой прямой функция  $f(x) = x - [x]$ , где  $[x]$  — это целая часть числа  $x$ , является периодической.

10.\* Найдите область определения и основной период функции:

а)  $y = \operatorname{tg} 2x$ ;

б)  $y = \operatorname{tg} \pi x$ ;

в)  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;

г)  $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ .

11. Какие из функций являются периодическими:

а)  $y = \sin \frac{1}{x}$ ;

б)  $y = \frac{1}{\sin x}$ ;

в)  $y = \frac{\sin x}{x}$ ;

г)  $y = \sin x + \operatorname{tg} x$ ?

12.\* Докажите, что основной период функции  $y = \operatorname{ctg} x$  равен  $\pi$ .

13.\* Докажите, что число  $\pi$  не является периодом функции  $y = \sin x + \operatorname{tg} x$ .

14. Постройте график функции:

а)  $y = \sin 2x$ ;

б)  $y = \sin^2 x$ ;

в)  $y = \cos 2x$ ;

г)  $y = \cos^2 x$ .

15.\* Постройте график функции  $y = \sin |x|$ . Выясните, будет ли эта функция периодической.

16. Какой основной период имеет функция  $y = |\operatorname{tg} x|$ ?

17.\* Постройте график функции  $y = \operatorname{tg} |x|$ . Будет ли эта функция периодической?

18.\* В каких точках график функции  $y = \sin \frac{1}{x}$  пересекает ось  $Ox$ ?

19. Изобразите график функции:

а)  $y = \sin^2 x$ ;

б)\*  $y = \frac{1}{\sin x}$ ;

в) \*  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ ;

г)\*\*  $y = \sqrt{2 \sin x - 1}$ ;

д)\*  $y = \sqrt{-\cos x}$ ;

е)\*\*  $y = \sin \frac{1}{x}$ .

## ■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен основной период функции  $f(x) = 1 + \sin 3x$ ?

1)  $6\pi$

2)  $2\pi$

3)  $\frac{1}{3}\pi$

4)  $\frac{2}{3}\pi$

1.2. Чему равен основной период функции  $f(x) = \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}$ ?

- 1)  $6\pi$                       2)  $3\pi$                       3)  $\frac{2}{3}\pi$                       4)  $\frac{1}{3}\pi$

1.3. Какое из указанных множеств может быть областью определения некоторой периодической функции?

- 1)  $(0; \infty)$                       2)  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$                       3)  $[-1; 1]$   
4) множество всех действительных чисел, которые не являются целыми

1.4. График какой из приведённых функций симметричен относительно оси ординат?

- 1)  $y = \sin x + \cos x$                       2)  $y = \sin x \cdot \sin 3x$   
3)  $y = \sin x \cdot (1 + \cos x)$                       4)  $y = 1 + \sin x$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных функций не являются периодическими?

- 1)  $y = \sin \sqrt{x}$                       2)  $y = \sqrt{\sin x}$                       3)  $y = \sin \frac{1}{x}$                       4)  $y = \frac{1}{\sin x}$

2.2. Какие из указанных чисел являются периодами функции  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ?

- 1)  $\frac{\pi}{2}$                       2)  $\pi$                       3)  $\frac{3\pi}{2}$                       4)  $2\pi$

2.3. Какие из указанных функций имеют основной период  $T = \frac{\pi}{2}$ ?

- 1)  $y = \sin 4x$                       2)  $y = \sin \frac{x}{2}$                       3)  $y = \cos^2 2x$                       4)  $y = \cos \frac{x}{4}$

2.4. Какие из функций имеют период  $T = -\frac{\pi}{2}$ ?

- 1)  $y = \operatorname{tg} 2x$                       2)  $y = \operatorname{ctg} 3x$                       3)  $y = \operatorname{tg} 4x$                       4)  $y = \operatorname{ctg} 6x$

## § 2. ФУНКЦИИ С ОСНОВНЫМ ПЕРИОДОМ ■

### 2.1. Множество периодов функции, имеющей основной период.

Заметим, что если функция  $f(x)$  имеет основной период  $T$ , то каждое ненулевое число, кратное  $T$ , то есть число вида  $nT$ , где  $n$  — целое число, также будет периодом функции  $f(x)$ .

Следующая теорема показывает, что при наличии основного периода функция не имеет других периодов, кроме кратных основному периоду.

Пусть функция  $f(x)$  обладает основным периодом  $T$ . Тогда любой её период кратен основному периоду  $T$ .

**Вопрос.** Каковы все периоды функции  $y = \sin 2x$ ?



**2.2.\*\* Доказательство теоремы о периодах.** Пусть  $T$  — основной период функции  $f(x)$ . Рассмотрим произвольный положительный период  $P$  функции  $f(x)$ , причём  $P > T$ . Из аксиомы Архимеда следует, что для числа  $P$  найдётся такое натуральное число  $n$ , что выполняются неравенства  $nT \leq P < (n+1)T$ . Это значит, что число  $P$  можно записать в виде  $P = nT + S$ , где  $0 \leq S < T$ . Предположим, что  $S > 0$ . Покажем, что в этом случае число  $S = P - nT$  должно быть периодом функции  $f(x)$ .

1. Пусть  $D$  — область определения функции  $f(x)$ . Если  $x \in D$ , то  $(x + P) \in D$ , а отсюда  $(x + P) - nT \in D$ , так как  $P$  и  $nT$  — периоды. Следовательно, для любого числа  $x \in D$  имеем  $x + S \in D$ . Аналогично доказывается, что  $x - S \in D$ .

2. Для любого числа  $x \in D$  выполняются равенства

$$f(x + S) = f(x + (P - nT)) = f((x + P) - nT) = f(x + P) = f(x).$$

Аналогично доказывается, что  $f(x - S) = f(x)$ .

Таким образом, число  $S$  должно быть периодом функции  $f(x)$ . Но по условию  $T$  — наименьший положительный период, а  $0 < S < T$ . Следовательно, предположение о том, что  $S > 0$  приводит к противоречию. Значит,  $S = 0$ , откуда  $P = nT$ .

**Вопрос.** Какие периоды имеет функция  $\operatorname{tg} x$ ?

### 2.3.\*\* Изменение периодов при линейной замене аргумента.

**Пример 1.** Покажем, что если аргумент функции  $y = \cos x$  заменить линейным выражением  $5x + 3$ , то получим функцию  $g(x) = \cos(5x + 3)$  с основным периодом  $\frac{2\pi}{5}$ .

Действительно, число  $\frac{2\pi}{5}$  является периодом функции  $g(x)$ , так как верны тождества

$$g\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + 3\right) = \cos(5x + 3 + 2\pi) = \cos(5x + 3) = g(x).$$

Пусть  $T$  — произвольный положительный период функции  $g(x) = \cos(5x + 3)$ . Тогда выполняется тождество  $\cos(5x + 3) = \cos(5(x + T) + 3) = \cos((5x + 3) + 5T)$ . Поэтому если  $5x + 3 = 0$ , то  $\cos 0 = \cos 5T = 1$ . Отсюда следует, что существует такое натуральное число  $n$ , что  $2\pi \cdot n = 5T$ . Следовательно,  $5T \geq 2\pi$  и  $T \geq \frac{2\pi}{5}$ . Значит, число  $\frac{2\pi}{5}$  — наименьший положительный период функции  $g(x) = \cos(5x + 3)$ .

Справедлива общая теорема о линейной замене аргумента периодической функции.

Пусть периодическая функция  $f(x)$  имеет основной период  $T$ . Тогда функция  $F(x) = f(kx + a)$ , где  $k > 0$ , является периодической с основным периодом, равным  $\frac{T}{k}$ .

**Вопрос.** Какой основной период имеет функция  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ?

**2.4.\*\* Доказательство теоремы о линейной замене аргумента периодической функции.** Пусть  $T$  — основной период функции  $f(x)$ . Рассмотрим функцию  $F(x) = f(kx + a)$ , где  $k > 0$ .

Обозначим области определения функций  $f(x)$  и  $F(x)$  соответственно через  $D_f$  и  $D_F$ . Тогда условие  $x \in D_F$  равносильно тому, что  $(kx + a) \in D_f$ .

Покажем сначала, что  $\frac{T}{k}$  — период функции  $F(x)$ . Для этого мы должны проверить выполнение условий:

- 1) если  $x \in D_F$ , то  $x + \frac{T}{k} \in D_F$  и  $x - \frac{T}{k} \in D_F$ ;
- 2) для всех  $x \in D_F$  выполняются равенства

$$F\left(x + \frac{T}{k}\right) = F(x) \text{ и } F\left(x - \frac{T}{k}\right) = F(x).$$

Заметим, что если  $x \in D_F$ , то  $kx + a \in D_f$ . Поэтому

$$k\left(x + \frac{T}{k}\right) + a = (kx + a) + T \in D_f,$$

откуда  $x + \frac{T}{k} \in D_F$ . Далее, для всех  $x \in D_F$  имеют место равенства

$$F\left(x + \frac{T}{k}\right) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + a\right) = f((kx + a) + T) = f(kx + a) = F(x).$$

Аналогично показывается, что  $x - \frac{T}{k} \in D_F$  и  $F\left(x - \frac{T}{k}\right) = F(x)$ .

Отсюда следует, что число  $\frac{T}{k}$  является периодом функции  $F(x)$ .

Пусть теперь  $P$  — произвольный положительный период функции  $F(x)$ . Тогда  $F(x) = F(x + P) = F(x - P)$  для всех  $x \in D_F$ . Отсюда получаем, что если  $y = kx + a$  принадлежит области  $D_f$ , то выполняются равенства

$$f(y + kP) = f(k(x + P) + a) = F(x + P) = F(x) = f(kx + a) = f(y).$$

Таким образом,  $kP$  — положительный период функции  $f(x)$ , откуда  $kP \geq T$ , то есть  $P \geq \frac{T}{k}$ . Следовательно, число  $\frac{T}{k}$  является наименьшим положительным периодом функции  $F(x)$ , то есть основным периодом этой функции.

**Вопрос.** Как доказать, что периодом функции  $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + \sin \frac{2}{3}x + \sin\left(\frac{2}{5}x - 1\right)$  является общий период всех трёх слагаемых?

**2.5. Тригонометрический двучлен.** Функция вида  $f(x) = a \sin kx + b \cos kx$ , где число  $k$  и оба коэффициента  $a$  и  $b$  отличны от нуля, называется *тригонометрическим двучленом*. Справедлива следующая теорема.

Тригонометрический двучлен  $a \sin kx + b \cos kx$  обладает основным периодом, равным  $\frac{2\pi}{|k|}$ .

**Вопрос.** Чему равен основной период функции  $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ ?

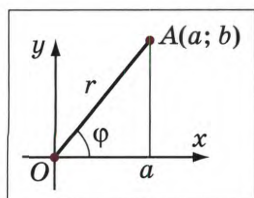


Рис. 1

**2.6.\*\* Доказательство теоремы об основном периоде тригонометрического двучлена.** На координатной плоскости выберем точку  $A(a; b)$  (рис. 1). Длину вектора  $\overline{OA}$  обозначим через  $r$ , а направленный угол, образованный вектором  $\overline{OA}$  с осью  $Ox$ , через  $\varphi$ . Тогда:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Отсюда

$$a \sin kx + b \cos kx = r \cos \varphi \cdot \sin kx + r \sin \varphi \cdot \cos kx = r \sin(kx + \varphi).$$

Если  $k > 0$ , то, применив теорему о линейной замене аргумента периодической функции, получим, что основной период функции  $a \sin kx + b \cos kx$  равен числу  $\frac{2\pi}{k}$ , которое равно  $\frac{2\pi}{|k|}$ , так как  $k > 0$ .

При  $k < 0$  можем записать равенства

$$r \sin(kx + \varphi) = -r \sin(-kx - \varphi) = -r \sin(|k|x - \varphi).$$

Поэтому по теореме о линейной замене аргумента периодической функции также получаем, что основной период равен  $\frac{2\pi}{|k|}$ .

**Вопрос.** Чему равен основной период функции  $f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{2}x - 4 \cos \frac{\pi}{2}x$ ?

**2.7. Сумма и произведение периодических функций с соизмеримыми периодами.** Положительные периоды  $T_1$  и  $T_2$  двух функций называются *соизмеримыми*, если их отношение  $\frac{T_1}{T_2}$  рационально. Справедлив следующий результат.



Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  обладают соизмеримыми положительными периодами  $T_1$  и  $T_2$ , то их сумма  $f_1(x) + f_2(x)$  и произведение  $f_1(x) \cdot f_2(x)$  являются периодическими функциями.

**Вопрос.** Являются ли периодическими функции  $f_1(x) = 2\sin 3x + 4\sin 5x$  и  $f_2(x) = 2(\sin 3x) \cdot 4(\sin 5x)$ ?

### 2.8.\*\* Доказательство периодичности суммы и произведения периодических функций с соизмеримыми периодами.

Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — области определения данных функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Тогда множество  $D = D_1 \cap D_2$  есть область определения функций  $f_1(x) + f_2(x)$  и  $f_1(x) \cdot f_2(x)$ .

Если  $T_1 : T_2 = m : n$ , где  $m$  и  $n$  — положительные целые числа, то  $nT_1 = mT_2$ . Обозначим число  $nT_1$  через  $T$ . Заметим теперь, что  $T$  является периодом каждой из функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Поэтому  $T$  является периодом функции  $f_1(x) + f_2(x)$  и функции  $f_1(x) \cdot f_2(x)$ .

**Вопрос.** Соизмеримы ли основные периоды функций  $f_1(x) = \sin\left(\frac{3}{5}x + 2\right)$  и  $f_2(x) = \cos\left(\frac{4}{7}x + 3\right)$ ?

**2.9.\*\* О сумме двух периодических функций.** Сумма двух произвольных периодических функций, имеющих основные периоды, может не быть периодической функцией.

**Пример 2.** Функции  $f_1(x) = \cos \sqrt{2}x$  и  $f_2(x) = \cos x$  определены на всей числовой прямой и имеют основные периоды  $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$  и  $2\pi$ . Функция  $g(x) = \cos \sqrt{2}x + \cos x$  тоже определена на всей числовой прямой. Покажем, что она не является периодической.

Допустим, что  $T$  — положительный период функции  $g(x)$ , то есть для любого значения  $x$  выполняется равенство

$$\cos \sqrt{2}(x + T) + \cos(x + T) = \cos \sqrt{2}x + \cos x.$$

Тогда для числа 0 получим равенство  $\cos \sqrt{2}T + \cos T = \cos 0 + \cos 0 = 2$ . Отсюда и из того, что максимальное значение функции  $f(z) = \cos z$  равно 1, следует, что  $\cos \sqrt{2}T = 1$  и  $\cos T = 1$ .

Но тогда  $\sqrt{2}T = 2\pi m$  и  $T = 2\pi n$  для некоторых целых чисел  $m$  и  $n$ , отличных от нуля, поскольку  $T \neq 0$ . Почленным делением получаем  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ , но это невозможно, так как число  $\sqrt{2}$  иррационально.

Таким образом, предположение о существовании положительного периода для функции  $g(x) = \cos \sqrt{2}x + \cos x$  приводит к противоречию. Следовательно, функция  $\sin \sqrt{2}x + \cos x$  не является периодической.

**Вопрос.** Будет ли периодической функция  $\sin(\sqrt{2} \cdot x) + \cos(\sqrt{2} \cdot x)$ ?

**2.10.\*\* Тригонометрический двучлен общего вида.** Тригонометрическим двучленом общего вида называется функция  $f(x) = a \sin sx + b \cos tx$ , где числа  $s, t, a$  и  $b$  отличны от нуля.

Тригонометрический двучлен  $f(x) = a \sin sx + b \cos tx$  общего вида является периодической функцией тогда и только тогда, когда отношение  $\frac{s}{t}$  рационально.

С учётом нечётности синуса и чётности косинуса можно предполагать, что  $s$  и  $t$  — положительные числа.

Доказательство проведём в два этапа.

I. Пусть отношение  $\frac{s}{t}$  рационально, то есть  $\frac{s}{t} = \frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. Тогда  $\frac{m}{s} = \frac{n}{t}$  и  $m \cdot \frac{2\pi}{s} = n \cdot \frac{2\pi}{t}$ . Функция  $g(x) = \sin sx$  имеет основной период  $\frac{2\pi}{s}$ , а функция  $h(x) = \cos tx$  — основной период  $\frac{2\pi}{t}$ , поэтому  $T = m \cdot \frac{2\pi}{s} = n \cdot \frac{2\pi}{t}$  будет периодом для каждой из функций  $g(x) = \sin sx$  и  $h(x) = \cos tx$ , а следовательно, и для функции  $f(x) = a \sin sx + b \cos tx$ . Отсюда и из того, что  $T \neq 0$ , следует периодичность функции  $f(x) = a \sin sx + b \cos tx$ .

II. Обратно, пусть функция  $f(x) = a \sin sx + b \cos tx$  — периодическая и  $T$  — некоторый её положительный период. Тогда  $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$  и выполняется равенство

$$a \sin s(x - T) + b \cos t(x - T) = a \sin s(x + T) + b \cos t(x + T).$$

Отсюда, воспользовавшись формулами для синуса суммы, синуса разности, косинуса суммы, косинуса разности и приведя подобные члены, получим равенство

$$a(\cos sx) \cdot (\sin sT) = -b(\sin tx) \cdot (\sin tT). \quad (1)$$

Подставив в это равенство значение  $x = 0$ , получим равенство  $a \cdot (\sin sT) = 0 \cdot (\sin tT)$ . Отсюда и из того, что  $a \neq 0$ , следует, что  $\sin sT = 0$ . Поэтому для подходящего натурального числа  $k$  и числа  $\pi$  выполняется равенство  $sT = k\pi$ , то есть

$$T = \frac{k}{s} \cdot \pi. \quad (2)$$



Подставив в равенство (1) значение  $sx = \frac{\pi}{2}$ , то есть  $x = \frac{\pi}{2s}$ , получим равенство  $0 \cdot (\sin sT) = -b(\sin tx) \cdot (\sin tT)$ . Учитывая формулу (2) и то, что  $b \neq 0$ , получаем:

$$\sin\left(t \cdot \frac{\pi}{2s}\right) \cdot \sin\left(t \cdot \frac{k}{s} \cdot \pi\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{t}{s} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{t}{s} \cdot \pi\right) = 0.$$

Но тогда либо  $\sin\left(\frac{t}{s} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , либо  $\sin\left(k \cdot \frac{t}{s} \cdot \pi\right) = 0$ . Следовательно, либо отношение  $\frac{t}{s}$  является чётным числом, либо выражение  $k \cdot \frac{t}{s}$  является натуральным числом. И в том и в другом случае отношение  $\frac{s}{t}$  является рациональным числом.

**Вопрос.** При каком отношении  $\frac{s}{t}$  функция  $y = \sin(s+t)x + \cos(s-t)x$ , где  $s+t \neq 0$ ,  $s-t \neq 0$ ,  $t \neq 0$ , является периодической?

### Контрольные вопросы и задания ■

1.\*\* Докажите, что если функция  $f(x)$  имеет основной период  $T$ , то любой её период  $P$  кратен основному периоду  $T$ .

2. Сформулируйте теорему о линейной замене аргумента.

3.\*\* Докажите теорему о линейной замене аргумента.

4. Какая функция называется тригонометрическим двучленом?

5. В каком случае положительные периоды  $T_1$  и  $T_2$  двух функций называются соизмеримыми?

6. Докажите, что сумма  $f_1(x) + f_2(x)$  и произведение  $f_1(x) \cdot f_2(x)$  двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , обладающих соизмеримыми периодами, являются периодическими функциями.

7.\*\* Приведите пример двух периодических функций, сумма которых не является периодической функцией.

8. Какая функция называется тригонометрическим двучленом общего вида?

9. В каком случае тригонометрический двучлен общего вида является периодической функцией?



## ■ Задачи и упражнения

1.\*\* Рассмотрим функцию Дирихле:

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Докажите, что:

- а) каждое рациональное число  $T \neq 0$  является периодом  $d(x)$ ;
- б) ни одно иррациональное число  $T$  не является периодом  $d(x)$ ;
- в) функция  $d(x)$  не имеет основного периода.

2. Найдите все периоды функции:

а)  $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ ;      б)  $y = \operatorname{tg} 3x$ ;      в)  $y = \sin(0,1x)$ ;      г)  $y = \cos 10x$ .

3.\*\* Докажите периодичность функции:

а)  $y = \sin 2x - \cos 3x$ ;      б)  $y = \sin(0,7x) + \cos(0,9x)$ ;  
 в)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x - 1\right) + \sin(3\pi x + 1)$ .

4. Найдите период и постройте график функции  $y = \sin 2x + \cos 2x$ .

5.\* Найдите все числа  $\beta$ , для которых выполняется тождественное равенство  $a \sin kx + b \cos kx = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(kx - \beta)$ .

6.\*\* Вычислите значение функции  $y = \sin x + \cos x - \sqrt{2} \cdot \cos 2x$  при  $x = \frac{5\pi}{12}$ .

7.\*\* Найдите наибольшее значение функции  $y = \sin x + \cos x - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

8.\*\* Найдите основной период функции:

а)  $y = \sin 2x + \cos 3x$ ;      б)  $y = \sin 30x - \cos 42x$ ;  
 в)  $y = \sin \frac{4}{5}x + \cos \frac{6}{7}x$ ;      г)  $y = \sin(1,24x) + \cos(0,93x)$ ;  
 д)  $y = 3 \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{3}$ .

9.\*\* Для каких целых чисел  $n$  функция  $y = \sin x + \cos(\sqrt{n} \cdot x)$  является периодической?

10. Укажите какой-либо положительный период для функции:

а)  $y = 2 \sin 3x - 3 \cos 3x + 5 \cos 5x$ ;      б)  $y = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{5} - \sin \frac{x}{7}$ ;  
 в)  $y = \cos \frac{x}{6} + \sin \frac{x}{8} - \cos \frac{x}{9}$ .

**11.\*\*** Найдите все точки отрезка  $[0; \pi]$ , в которых значения функции  $y = \sin 3x - \cos 5x$  равны нулю.

**12.\*\*** Какое наибольшее число раз график функции  $y = 3\sin \frac{x}{2} + 4\cos \frac{x}{2}$  может пересечь ось  $Ox$  на отрезке длины  $4\pi$ ?

### Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Какой основной период имеет функция  $f(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$ ?

- 1) 1                      2)  $\frac{1}{2}\pi$                       3) 2                      4)  $\pi$

**1.2.\*** Какой основной период имеет функция  $f(x) = \sin 2x + \sin 3x$ ?

- 1)  $\pi$                       2)  $2\pi$                       3)  $3\pi$                       4)  $4\pi$

**1.3.** Известно, что функция  $f(x)$  имеет основной период  $T = 2$ . Какой основной период имеет функция  $F(x) = f\left(\frac{2}{5}x + 3\right)$ ?

- 1) 0,4                      2) 2,5                      3) 5                      4) 10

**1.4.** Какой основной период имеет функция  $f(x) = 3\sin\left(\frac{2x}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$ ?

- 1)  $\frac{2}{3}\pi$                       2)  $\pi$                       3)  $\frac{3}{2}\pi$                       4)  $3\pi$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Известно, что функция имеет основной период  $T = \frac{2}{3}$ . Какие из указанных чисел не являются периодами этой функции?

- 1)  $\frac{8}{3}$                       2) 2                      3) 3                      4)  $\frac{10}{3}$

**2.2.** Какие из указанных чисел не являются периодами функции  $f(x) = \sin 5x + 2\cos 5x + 3$ ?

- 1)  $\frac{\pi}{5}$                       2)  $\frac{2\pi}{5}$                       3)  $\frac{3\pi}{5}$                       4)  $\frac{4\pi}{5}$

**2.3.** Какие из указанных функций являются периодическими?

- 1)  $f(x) = |\sin x|$                       2)  $f(x) = \sin |x|$   
3)  $f(x) = |\sin x + 1|$                       4)  $f(x) = \sin |x + 1|$

**2.4.\*** Какие из указанных чисел являются периодами функции  $f(x) = \cos x + \cos \frac{3}{4}x$ ?

- 1)  $4\pi$                       2)  $8\pi$                       3)  $12\pi$                       4)  $16\pi$

## ■ Мини-исследования к главе 11

### Мини-исследование 31

Для того чтобы установить периодичность некоторой всюду определённой функции  $f(x)$ , достаточно найти такое число  $T \neq 0$ , что  $f(x + T) = f(x)$  при любом действительном значении  $x$ . Доказательство того, что некоторая функция не является периодической, может основываться на разных идеях.

Предлагается, на примерах функций  $f(x) = x$ ;  $f(x) = x^2$ ;  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  и некоторых других, найти несколько способов доказательства того, что функция не является периодической.

### Мини-исследование 32

Предлагается решить две задачи.

1. Известно, что график функции  $f(x)$  симметричен относительно прямых  $x = a$  и  $x = b$ , причём  $a \neq b$ . Докажите, что эта функция периодическая.

2. Известно, что график функции  $f(x)$  симметричен относительно точек  $A(m; 0)$  и  $B(n; 0)$ , причём  $m \neq n$ . Докажите, что эта функция периодическая.

### Мини-исследование 33

В главе установлено следующее утверждение.

**Тригонометрический двучлен общего вида  $f(x) = a \sin s x + b \cos t x$  является периодической функцией, обладающей основным периодом, тогда и только тогда, когда отношение  $\frac{s}{t}$  рационально.**

Проведите анализ приведённого доказательства и выясните, каким образом можно найти основной период тригонометрического двучлена общего вида в случае его периодичности.

Покажите, что если  $s \neq t$ , а число  $T$  — любой положительный период тригонометрического двучлена, то должны выполняться условия

$$\sin sT = 0, \quad \sin tT = 0.$$

Выведите из этих условий, что найдутся такие натуральные числа  $m$  и  $n$ , для которых выполняются равенства  $T = m \cdot \frac{2\pi}{s} = n \cdot \frac{2\pi}{t}$ .

Докажите, что в случае взаимно простых чисел  $m$  и  $n$  период  $T$  будет основным.

Найдите основной период тригонометрического двучлена, когда  $s$  и  $t$  — взаимно простые натуральные числа.



# Глава 12

## КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



В этой главе определено представление комплексных чисел в тригонометрической форме, получена формула Муавра для комплексных чисел и установлено, как строятся множества корней натуральной степени из комплексных чисел. Будут рассмотрены примеры функций комплексного переменного и связь некоторых из них с перемещениями плоскости. Также приведена одна из знаменитых формул Эйлера, с помощью которой определяются некоторые степени с комплексными показателями.

### § 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

**1.1. Модуль комплексного числа.** Напомним, что комплексное число  $z = a + bi$ , где  $a$  и  $b$  действительные числа,  $i$  — мнимая единица, можно изобразить точкой  $(a; b)$  координатной плоскости.

Иногда удобно считать, что число  $z = a + bi$  изображается вектором, связанным с началом координат  $O$ , концом которого служит точка  $M(a; b)$  (рис. 1).

Длина вектора  $\overrightarrow{OM}$ , изображающего комплексное число  $z$ , называется *модулем* комплексного числа  $z$  и обозначается как  $|z|$ .

По формуле, выражающей длину вектора через его координаты, получаем равенство

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, модуль комплексного числа  $z = a + bi$  — это неотрицательное действительное число  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , геометрическим смыслом которого является длина связанного вектора, изображающего число  $z$ .

**Вопрос.** Какими точками изображаются комплексные числа, модуль которых равен 1?

**1.2. Аргумент комплексного числа.** Пусть комплексное число  $z = a + bi$ , отличное от нуля, изображается вектором длины  $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ , идущим из начала координат в точку  $M(a; b)$ .

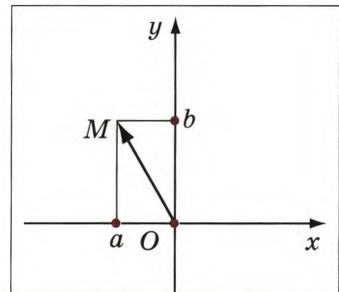


Рис. 1

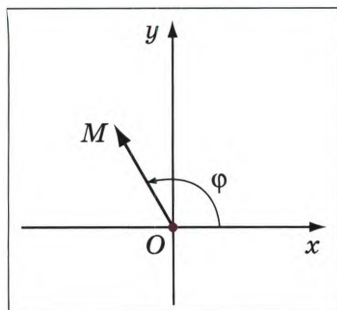


Рис. 2

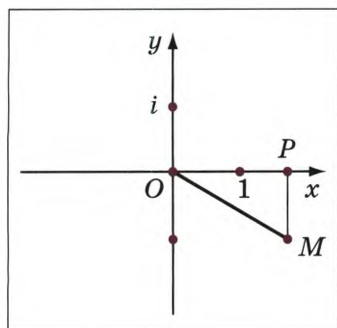


Рис. 3

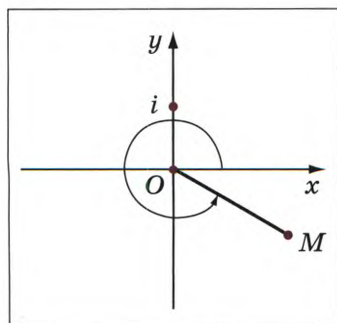


Рис. 4

Величина направленного угла  $\varphi$  между осью  $Ox$  и вектором  $\overline{OM}$  называется *аргументом* комплексного числа  $z$  (рис. 2).

Аргумент  $\varphi$  комплексного числа  $z \neq 0$  определяется по-разному, с точностью до чисел, кратных  $2\pi$ . Это значит, что если число  $\varphi$  есть аргумент числа  $z$ , то число  $\varphi + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , также является аргументом числа  $z$ .

**Пример 1.** Вычислим аргумент числа  $z = \sqrt{3} - i$ .

Изобразим в комплексной плоскости число  $z = \sqrt{3} - i$  точкой  $M(\sqrt{3}; -1)$  (рис. 3). Опустим перпендикуляр  $MP$  на ось  $Ox$ .

Тогда  $OP = \sqrt{3}$ ,  $MP = 1$ , а поэтому  $\operatorname{tg} \angle OMP = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Следовательно, в треугольнике

$OMP$  угол  $MOP$  равен  $\frac{\pi}{6}$ , а направленный угол между осью  $Ox$  и вектором  $\overline{OM}$ , отсчитываемый в отрицательном направлении, равен  $-\frac{\pi}{6}$ . Выбирая для вектора  $\overline{OM}$  направленный угол в положительном направлении, получаем, что в качестве аргумента числа

$z = \sqrt{3} - i$  можно взять  $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6}$  (рис. 4).

Аналогично в качестве аргумента числа  $z = \sqrt{3} - i$  можно взять любое число вида  $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Пример 2.** Найдём аргумент числа  $z = -2 + 3i$ .

Изобразим в комплексной плоскости число  $z = -2 + 3i$  точкой  $K(-2; 3)$  (рис. 5). Тогда  $OK = |z| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ . Пусть  $\varphi$  — величина на-

правленного угла, который образует вектор  $\overline{OK}$  с осью  $Ox$ . Тогда из определения тригонометрических функций направленного угла получаем

$$\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Поскольку вектор  $\overrightarrow{OK}$  находится во второй четверти и  $\cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ , то в качестве аргумента числа  $z$  можно взять число  $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ , равное числу  $\pi - \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$ .

Таким образом, для каждого ненулевого комплексного числа  $z$  определяется его аргумент. Аргумент комплексного числа можно вычислить по-разному, но при этом разность между любыми двумя аргументами одного и того же числа кратна  $2\pi$ .

Для комплексного числа 0 аргумент не определяется.

**Вопрос.** Какой аргумент имеет комплексное число  $(-5)$ ?

**1.3. Запись комплексного числа в тригонометрической форме.** Пусть ненулевое комплексное число  $z = a + bi$  изображается точкой  $M(a;b)$  координатной плоскости и модуль числа  $z$  равен  $r$ , а аргумент равен  $\varphi$ .

Это означает, что точка  $M$  расположена на расстоянии  $r$  от начала  $O$ , а луч  $OM$  образует направленный угол  $\varphi$  с положительным лучом оси  $Ox$  (рис. 6). Поэтому координаты точки  $M$  можно записать в виде  $(r \cos \varphi; r \sin \varphi)$ . Следовательно,

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

Отсюда

$$z = a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

В результате получаем, что комплексное число  $z$  можно записать в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1)$$

где  $r$  — модуль,  $\varphi$  — аргумент числа  $z$ . Полученная форма записи числа  $z \neq 0$  называется *нормальной тригонометрической формой комплексного числа*. Обычно для краткости слово «нормальная» опускают и правую часть в записи (1) называют *тригонометрической формой* ненулевого комплексного числа.

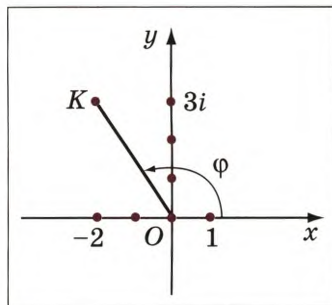


Рис. 5

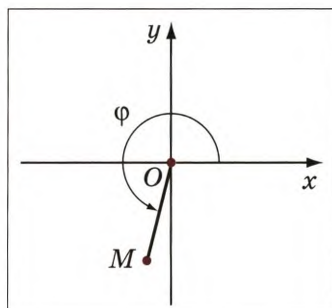


Рис. 6



**Пример 3.** Запишем число  $z = -2 + 3i$  в тригонометрической форме.

В примере 2 из предыдущего пункта было найдено, что  $r = |z| = \sqrt{13}$ , а аргумент числа  $z$  равен  $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ . Поэтому  $z = \sqrt{13}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ .

В итоге число  $z = -2 + 3i$  записано в тригонометрической форме.

**Вопрос.** Как записать в тригонометрической форме число  $2i$ ?

**1.4.\*\* Один из способов нахождения аргумента ненулевого комплексного числа.** Для ненулевого комплексного числа  $z = a + bi$  рассмотрим равенства  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$ . При  $a = 0$  аргументы числа  $z$  нужно искать среди корней уравнения  $\cos x = 0$ . При  $a \neq 0$  можно получить равенство  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ , а поэтому аргументы числа  $z$  являются некоторыми из корней уравнения  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ .

В случае, когда аргумент  $\varphi$  комплексного числа  $z$  выбирается из промежутка  $[0; 2\pi)$ , можно сформулировать следующее правило:

если  $a = 0$  и  $b > 0$ , то  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;      если  $a = 0$  и  $b < 0$ , то  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ;

если  $a > 0$ , то  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ ;      если  $a < 0$ , то  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi$ .

**Вопрос.** Как обосновать это правило?

**1.5. Комплексно сопряжённые числа.** Напомним, что для комплексного числа  $z = a + bi$  число  $a - bi$  называется комплексно сопряжённым и обозначается через  $\bar{z}$ .

Заметим, для числа  $a - bi$  комплексно сопряжённым числом является число  $a + bi$ .

Пусть комплексное число  $z$  записано в нормальной тригонометрической форме  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . В силу чётности функции  $f(x) = \cos x$  выполняется равенство  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ , а в силу нечётности функции  $g(x) = \sin x$  имеет место равенство  $-\sin \varphi = \sin(-\varphi)$ . Отсюда и из того, что комплексное число  $z$  в алгебраической записи имеет вид  $z = r \cdot \cos \varphi + (r \cdot \sin \varphi)i$ , следует, что комплексно сопряжённое к нему число записывается в виде  $\bar{z} = r \cdot \cos \varphi - (r \cdot \sin \varphi)i$ , и поэтому нормальная тригонометрическая форма числа  $\bar{z}$ , комплексно сопряжённого к числу  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , имеет вид  $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$ .

**Вопрос.** Почему модуль комплексного числа  $z$  совпадает с модулем комплексно сопряжённого для него числа  $\bar{z}$ ?

## Контрольные вопросы и задания ■

1. Каким вектором изображается комплексное число  $z = a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа?
2. Как определяется модуль комплексного числа?
3. Что называется аргументом ненулевого комплексного числа?
4. Как связаны между собой аргументы одного и того же комплексного числа?
5. Что называют алгебраической формой записи комплексного числа?
6. Что называют нормальной тригонометрической формой записи ненулевого комплексного числа?
- 7.\*\* Какой способ нахождения аргумента ненулевого комплексного числа вы знаете?

## Задачи и упражнения ■

1. Изобразите векторами комплексные числа:
  - а)  $z = 2 + i$ ;
  - б)  $z = 2 - i$ ;
  - в)  $z = -i$ ;
  - г)  $z = -3 + 4i$ ;
  - д)  $z = -3 - 4i$ .
2. Комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$  изображаются векторами  $\overline{OM}_1$  и  $\overline{OM}_2$ . Каким вектором можно изобразить разность  $z_1 - z_2$ ?
- 3.\* Докажите, что  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  при любых комплексных  $z_1$  и  $z_2$ .
4. Комплексное число  $z$  имеет аргумент  $\varphi$ . Какой аргумент имеет:
  - а) противоположное число  $-z$ ;
  - б) число, противоположное комплексно сопряжённому числу  $\bar{z}$ ?
5. Вычислите модуль и аргумент комплексного числа:
  - а)  $z = 1 + i$ ;
  - б)  $z = -1 + i$ ;
  - в)  $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;
  - г)  $z = 4 - i$ ;
  - д)\*\*  $z = 1 + \sqrt{2} + i$ .
6. Запишите в тригонометрической форме комплексное число:
  - а)  $z = -\sqrt{3} + i$ ;
  - б)  $z = -1 - i$ ;
  - в)  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;
  - г)  $z = -1$ ;
  - д)  $z = 1 + 5i$ ;
  - е)\*  $z = -\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$ ;
  - ё)\*  $z = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$ ;
  - ж)\*\*  $z = 1 + \sqrt{2} - i$ .

7. Модули комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$  равны 1, а аргументы равны соответственно  $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ . Вычислите сумму  $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6$ .

8.\* Какое множество точек комплексной плоскости задаётся условием:

- а)  $|z + 1| = 1$ ;      б)  $|z + 1| < 1$ ;      в)  $|z - i| = 1$ ;      г)  $3 \leq |z + i| \leq 5$ ?

9.\*\* Какое множество точек комплексной плоскости задаётся условием:

- а)  $|z - 2| = |z + 4i|$ ;      б) аргумент  $z$  равен  $60^\circ$ ;      в)  $z \cdot \bar{z} = iz - i\bar{z}$ ?

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно произведение  $(2 - i) \cdot (1 + 3i)$ ?

- 1)  $-1 + 7i$       2)  $5 - 7i$       3)  $1 + 5i$       4)  $5 + 5i$

1.2. Чему равен модуль числа  $1 - \sqrt{3}i$ ?

- 1) 1      2)  $\sqrt{2}$       3) 2      4) 4

1.3. Чему равен аргумент числа  $2 - 2i$ ?

- 1)  $\frac{\pi}{4}$       2)  $\frac{3\pi}{4}$       3)  $\frac{5\pi}{4}$       4)  $\frac{7\pi}{4}$

1.4. Чему равен минимальный положительный аргумент числа  $-1 + 2i$ ?

- 1)  $\arctg 2$       2)  $\arctg(-2)$       3)  $\pi - \arctg 2$       4)  $2\pi - \arctg 2$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Как может изображаться в комплексной плоскости множество всех чисел  $z$  таких, что аргумент  $z$  равен  $\alpha$ ?

- 1) точками луча, включая его начало  
2) точками прямой  
3) точками луча, исключая его начало  
4) точками, лежащими на окружности

2.2. Какие из уравнений задают прямую?

- 1)  $|z + 1| = z - i$       2)  $|z - 2i| = |z + 2i|$   
3)  $|2z + i| = |z - 1|$       4)  $|2z + 1| = |2z - i|$

2.3. Как может изображаться в комплексной плоскости множество всех чисел  $z$  таких, что  $|z - m| = |z - n|$ , где  $m \in C$  и  $n \in C$ ?

- 1) точками, лежащими на оси  $Ox$   
2) точками, лежащими на прямой  
3) точками, лежащими на луче  
4) точками, лежащими на окружности



2.4. Какие значения может иметь аргумент числа  $1 - \sqrt{3}i$ ?

1)  $-\frac{\pi}{3}$

2)  $\frac{\pi}{2}$

3)  $\frac{3\pi}{2}$

4)  $\frac{5\pi}{3}$

## § 2. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ■

**2.1. Умножение комплексных чисел в нормальной тригонометрической форме записи.** Комплексные числа, записанные в нормальной тригонометрической форме, легко перемножить.

Пусть требуется перемножить числа  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)) = \\ &= (r_1 \cdot r_2) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Произведение модулей двух комплексных чисел равно модулю произведения сомножителей, а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.

**Пример 1.** Пусть  $z_1 = 2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$ ,  $z_2 = 3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 3 \cdot (\cos(20^\circ + 25^\circ) + i \sin(20^\circ + 25^\circ)) = 6 \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \\ &= 6 \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i. \end{aligned}$$

**Вопрос.** Как находить модуль и аргумент произведения трёх комплексных чисел?

**2.2. Деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.** Пусть комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$  заданы в тригонометрической форме:  $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ ,  $z_2 \neq 0$  и  $z_2$  число, сопряжённое к числу  $z_2$ . Тогда, в силу пункта 1.5,  $\bar{z}_2 = r_2 \cdot (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))$ .

Умножая делимое и делитель отношения  $\frac{z_1}{z_2}$  на число  $\bar{z}_2$ , комплексно сопряжённое числу  $z_2$ , и учитывая, что  $\cos 0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \text{равенства: } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot r_2 \cdot (\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2))} = \\ &= \frac{r_1 \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{r_2 \cdot (\cos(\varphi_2 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_2))} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Таким образом,

**модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя двух комплексных чисел является аргументом их частного.**

**Пример 2.** Представим в тригонометрической форме число  $\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$ .

Запишем делимое и делитель в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} - i &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = 2 \cdot \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right), \\ 1 - i &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \sqrt{2} \cdot \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right). \end{aligned}$$

По правилу деления комплексных чисел, записанных в нормальной тригонометрической форме, получаем:

$$\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \cdot \left( \cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \right).$$

**Вопрос.** Чему равен модуль и аргумент частного  $\frac{-1 + i}{1 + i}$ ?

**2.3. Формула Муавра.** Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . По правилу произведения комплексных чисел, записанных в нормальной тригонометрической форме,

$$\begin{aligned} z^2 &= (r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)) \cdot (r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)) = \\ &= r^2 \cdot (\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)) = r^2 \cdot (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi). \end{aligned}$$

Аналогично можем записать куб числа  $z$ :

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2 \cdot z = (r^2 \cdot (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)) \cdot (r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)) = \\ &= (r^2 \cdot r) \cdot (\cos(2\varphi + \varphi) + i \sin(2\varphi + \varphi)) = r^3 \cdot (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

Продолжив этот процесс далее, для произвольного натурального числа  $n$  получим:

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Эта формула называется формулой *Муавра*, по имени британского математика Муавра (1667—1754).

В частности, при  $r = 1$  формула Муавра принимает вид

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

**Пример 3.** Возведём число  $1 + i$  в 20-ю степень.

Запишем число  $1 + i$  в тригонометрической форме:

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

По формуле Муавра

$$\begin{aligned} (1 + i)^{20} &= (\sqrt{2})^{20} \cdot \left( \cos \left( 20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( 20 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2^{10} \cdot (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = \\ &= 1024 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -1024. \end{aligned}$$

**Вопрос.** Чему равно  $(-1 + i\sqrt{3})^8$ ?

**2.4.\* Тригонометрические функции кратного аргумента.** Формула Муавра позволяет вычислять синусы и косинусы кратных углов.

Например, при  $n = 2$  по формуле Муавра имеем:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi.$$

Непосредственно возведя в квадрат левую часть, получим

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + i \cdot 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + i \cdot 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

По условию равенства комплексных чисел имеем:

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Аналогично при  $n = 3$  находим:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \\ &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi + 3i^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi + i^3 \cdot \sin^3 \varphi = \\ &= (\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi) + i(3 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - \sin^3 \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi - \sin^3 \varphi.$$

**Вопрос.** Как доказать, что для любого целого числа  $n$  и любого действительного числа  $\varphi$  выполняется равенство  $(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi - i \sin n\varphi$ ?



### ■ Контрольные вопросы и задания

1. Как найти модуль и аргумент произведения двух комплексных чисел, заданных в нормальной тригонометрической форме?
2. Как найти модуль и аргумент отношения двух комплексных чисел, заданных в нормальной тригонометрической форме?
3. Выразите  $\sin 3\varphi$  и  $\cos 3\varphi$  через  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  с помощью формулы Муавра.
4. Запишите и докажите формулу Муавра.

### ■ Задачи и упражнения

1. Вычислите произведение:

$$\text{а) } \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right); \quad \text{б) } \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

2. Запишите в тригонометрической форме число:

$$\text{а) } \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}; \quad \text{б) } \frac{i-1}{\sqrt{3}+i}; \quad \text{в) } \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \right)^{12}; \quad \text{г) ** } \frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{4}-2\sqrt{2}}.$$

- 3.\* С помощью формулы Муавра докажите, что

$$\cos 4\varphi = 8\cos^4 \varphi - 8\cos^2 \varphi + 1.$$

4. Запишите в алгебраической форме число:

$$\text{а) } (1-i)^{10}; \quad \text{б) } (\sqrt{3}-i)^6; \quad \text{в) } \left( -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^7; \quad \text{г) ** } (-1-i\sqrt{3})^8.$$

- 5.\* Пусть  $\varphi \in R$ . Представьте в тригонометрической форме число:

$$\text{а) } \sin \varphi + i \cos \varphi; \quad \text{б) } (-\cos \varphi + i \sin \varphi)^3; \quad \text{в) } -\sin \varphi - i \cos \varphi;$$

$$\text{г) } \frac{1}{\sin \varphi - i \cos \varphi}; \quad \text{д) } 1 + i \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

- 6.\*\* Пусть  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , причём  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . Запишите в тригонометрической форме число:

$$\text{а) } 1+z; \quad \text{б) } z^2+z^3; \quad \text{в) } z+\frac{1}{z};$$

$$\text{г) } 1+z+z^2; \quad \text{д) } z-z^3; \quad \text{е) } \frac{1}{z^2-1}.$$

- 7.\*\* Докажите, что если  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  и  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ , то точки  $z_1, z_2, z_3$  являются вершинами правильного треугольника.

$$\text{8.** При } a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ вычислите сумму } S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{19}.$$

$$\text{9.** Вычислите сумму } a + a^2 + \dots + a^{1000} \text{ при } a = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}.$$

Тесты ■

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Какова запись числа  $3 - \sqrt{3}i$  в нормальной тригонометрической форме?

- 1)  $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$       2)  $\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$   
 3)  $2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$       4)  $\sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

**1.2.** Чему равняется  $(3 + \sqrt{3}i)^3$ ?

- 1)  $-24\sqrt{3}$       2)  $24\sqrt{3}i$       3)  $12$       4)  $-12i$

**1.3.** Чему равняется  $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ?

- 1)  $-1$       2)  $i$       3)  $1$       4)  $-i$

**1.4.** Какова запись числа  $\frac{i-1}{2+2i}$  в нормальной тригонометрической форме?

- 1)  $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$       2)  $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$   
 3)  $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$       4)  $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из приведённых значений являются аргументами числа  $-3 - \sqrt{3}i$ ?

- 1)  $\frac{5\pi}{6}$       2)  $-\frac{5\pi}{6}$       3)  $\frac{7\pi}{6}$       4)  $-\frac{7\pi}{6}$

**2.2.** Для каких из указанных чисел выполняется равенство  $z^3 = -i$ ?

- 1)  $\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}$       2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}$       3)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$       4)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

**2.3.** Каким из указанных выражений равно частное  $\frac{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}}$ ?

- 1)  $\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$       2)  $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$   
 3)  $\cos\frac{17\pi}{12} - i\sin\frac{17\pi}{12}$       4)  $\cos\frac{13\pi}{12} - i\sin\frac{13\pi}{12}$

**2.4.** У каких комплексных чисел есть аргумент, принадлежащий промежутку  $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ ?

- 1)  $2 - i$       2)  $1 + 2i$       3)  $-4 - i$       4)  $-2 - 3i$

### ■ § 3. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ ИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

**3.1. Корни из комплексного числа.** Пусть  $n$  — натуральное число, большее 1.

**Корнем  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$**  называется каждое такое число  $w$ , что  $w^n = z$ .

При  $z = 0$  корень  $n$ -й степени из  $z$  находится легко. Действительно, если  $w^n = 0$ , то тогда  $|w^n| = 0$ ,  $|w|^n = 0$ ,  $|w| = 0$ , а поэтому  $w = 0$ .

В отличие от действительных чисел, для ненулевых комплексных чисел через  $\sqrt[n]{z}$  обозначают *множество всех корней  $n$ -й степени из числа  $z$* . Иногда элементы этого множества называются *значениями корня  $n$ -й степени из числа  $z$* .

При  $z \neq 0$  корни  $n$ -й степени удобно находить, записывая комплексные числа в тригонометрической форме.

**Пример 1.** Найдём корни кубические из числа

$$z = -1 + i\sqrt{3}.$$

Запишем число  $z$  в тригонометрической форме:  $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ .

Обозначим какой-то корень из множества  $\sqrt[3]{z}$  через  $w$  и запишем его в виде

$$w = q(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Поскольку  $w^3 = z$ , то

$$q^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Следовательно,  $q^3 = 2$ ,  $3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Отсюда  $q = \sqrt[3]{2}$ ,  $\theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

В итоге множество  $\sqrt[3]{-1 + i\sqrt{3}}$  состоит из комплексных чисел вида  $\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Подставив вместо  $k$  различные целые числа, получим три различных корня из данного комплексного числа:

$$w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right);$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right);$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$



Таким образом, множество  $\sqrt[3]{-1 + i\sqrt{3}}$  состоит из трёх различных комплексных чисел (рис. 1).

В общем случае получим: множество  $\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$  состоит из  $n$  различных комплексных чисел вида  $\sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right)$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Вопрос.** Из каких комплексных чисел состоит множество  $\sqrt[4]{i}$ ?

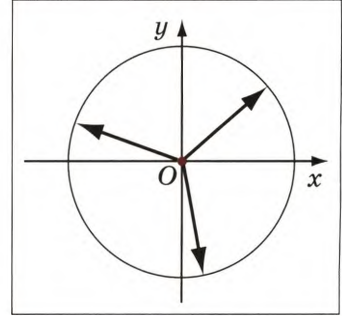


Рис. 1

**3.2.\*\* Формула корней из комплексного числа.** Рассмотрим в общем случае извлечение комплексных корней.

I. Пусть  $z \neq 0$  и  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Обозначим один из корней множества  $\sqrt[n]{z}$  через  $w$  и запишем его в виде

$$w = q(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Поскольку  $w^n = z$ , то приходим к равенству

$$q^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Следовательно,  $q^n = r$ ,  $n\theta = \varphi + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . Отсюда  $q = \sqrt[n]{r}$ ,  $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Таким образом, множество  $\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$  состоит из комплексных чисел вида

$$\sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Докажем, что среди записанных значений есть только  $n$  различных комплексных чисел. Рассмотрим сначала значения  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Получим корни:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right); \\ w_1 &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) \right); \\ w_2 &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right); \\ &\dots\dots\dots; \\ w_{n-1} &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right). \end{aligned}$$

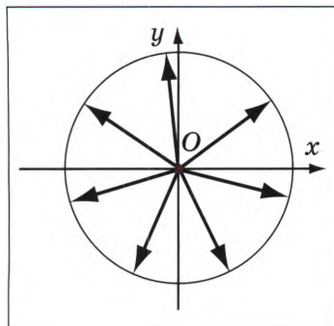


Рис. 2

Все эти корни имеют модуль, равный  $\sqrt[n]{r}$ . Поэтому они изображаются точками окружности радиуса  $\sqrt[n]{r}$  с центром в начале  $O$  системы координат. Вектор, идущий из точки  $O$  в точку  $w_0$ , образует с осью  $Ox$  угол  $\frac{\varphi}{n}$ . Вектор, идущий из точки  $O$  в точку  $w_1$ , составляет с осью  $Ox$  угол  $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$ . Вектор, идущий из точки  $O$  в точку  $w_2$ , составляет с осью  $Ox$  угол  $\frac{\varphi}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$ , и так далее. Центральный угол между двумя соседними векторами равен  $\frac{2\pi}{n}$ . Таким образом, корни

$w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$  изображаются вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{r}$  с центром в начале системы координат. На рис. 2 изображены корни седьмой степени из некоторого комплексного числа.

II. Рассмотрим произвольное целое число  $k$ . Разделив его на  $n$  с остатком, получим

$$k = mn + s, \text{ где } 0 \leq s \leq n - 1.$$

Аргумент корня  $w_k$  при выбранном значении  $k$  равен

$$\frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi(mn + s)}{n} = 2\pi m + \frac{\varphi + 2\pi s}{n}.$$

Следовательно, он отличается от аргумента корня  $w_s$  на  $2\pi m$ . Отсюда следует, что  $w_k = w_s$ . Это и означает, что  $w_k$  совпадает с одним из корней  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ .

В итоге получаем следующий результат.

**Корень  $n$ -й степени из числа  $z \neq 0$  имеет в точности  $n$  различных комплексных значений.**

**Вопрос.** Сколько различных комплексных корней имеет уравнение  $x^5 + 1 = 0$ ?

**3.3. Комплексные корни из 1.** Пусть  $n$  — натуральное число. Для вычисления комплексных корней  $n$ -й степени из числа 1 запишем его в тригонометрической форме:

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0).$$

Из общей формулы следует, что множество  $\sqrt[n]{1}$  состоит из чисел вида

$$1 \cdot \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right), \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

При  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  получаем все различные элементы множества  $\sqrt[n]{1}$ :

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n};$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n};$$

.....

$$\varepsilon_{n-1} = \cos \frac{2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-1)}{n}.$$

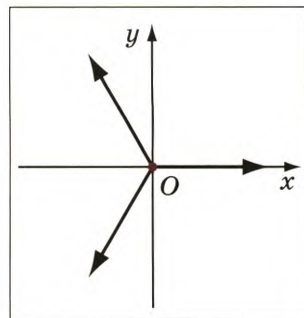


Рис. 3

Эти корни изображаются вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром  $O$ , причём одной из его вершин является точка  $(1;0)$ . На рис. 3 изображены

корни третьей степени из 1, равные  $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ .

В дальнейшем для полученных выше элементов множества  $\sqrt[n]{1}$  будем использовать обозначения  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ .

**Вопрос.** Какие корни имеет уравнение  $x^6 - x = 0$ ?

**3.4. Свойства корней из 1.** Заметим, что каждый из комплексных корней  $n$ -й степени из единицы можно получить с помощью арифметических операций из корня  $\varepsilon_1$ . Действительно,

$$\varepsilon_1^2 = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} = \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1^3 = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^3 = \cos \frac{6\pi}{n} + i \sin \frac{6\pi}{n} = \varepsilon_3$$

и так далее.

В общем виде приходим к равенству

$$\varepsilon_1^k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \varepsilon_k.$$

**Вопрос.** Пусть  $\varepsilon_1$  — значение корня пятой степени из 1. Чему равно число  $(\varepsilon_1)^{-8}$ ?

**3.5. Сумма корней из 1.** Докажем, что сумма всех корней  $n$ -й степени из 1 равна 0. Действительно,

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_1^{n-1} = \frac{1 - \varepsilon_1^n}{1 - \varepsilon_1} = \frac{1 - 1}{1 - \varepsilon_1} = 0.$$

**Вопрос.** Чему равно произведение всех корней  $n$ -степени из единицы?



**3.6.\*\* Представление корней из комплексного числа с помощью корней из 1.** В пункте 3.2 было показано, что множество  $\sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  состоит из комплексных чисел вида

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right), \text{ где } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Для каждого числа  $w_k$  выполняются равенства:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) \cdot \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) = \\ &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k. \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что  $\varepsilon_1 = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)$ , получим

$$w_k = w_0 \cdot \varepsilon_1^k, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Пример 2.** Число  $w_0 = 1 + i$  является значением кубического корня из числа  $-2 + 2i$ , так как  $(1 + i)^3 = -2 + 2i$ . Поэтому числа

$$w_1 = (1 + i) \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-1 - \sqrt{3} + (-1 + \sqrt{3})i}{2},$$

$$w_2 = (1 + i) \left( \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-1 + \sqrt{3} + (-1 - \sqrt{3})i}{2}$$

также являются элементами множества  $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ .

**Вопрос.** Сколько различных комплексных корней имеет уравнение  $z^5 = (\bar{z})^6$ ?

**3.7.\*\* Пример использования корней из 1.** Пусть  $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , где  $n$  — натуральное число, большее 2. Тогда

$$\varepsilon_1^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_1} = \cos \left( -\frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi}{n} \right) = \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Поэтому

$$\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right), \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2i} \left( \varepsilon_1 - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

Аналогично для произвольного натурального  $k \leq n-1$  получаются равенства

$$\cos \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_1^k + \frac{1}{\varepsilon_1^k} \right), \sin \frac{2\pi k}{n} = \frac{1}{2i} \left( \varepsilon_1^k - \frac{1}{\varepsilon_1^k} \right).$$

Такое представление тригонометрических функций позволяет вычислять некоторые суммы.

**Пример 3.** Найдём  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ .

Рассмотрим  $\varepsilon_1$  при  $n = 7$ , то есть  $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ . Из равенств данного пункта имеем

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{2} \left( \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} + \varepsilon_1^3 + \frac{1}{\varepsilon_1^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1^3} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^4 + \varepsilon_1^5 + \varepsilon_1^6) = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1^3} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3 + \varepsilon_1^4 + \varepsilon_1^5 + \varepsilon_1^6 - \varepsilon_1^3) = \frac{1}{2\varepsilon_1^3} (0 - \varepsilon_1^3) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ .

**Вопрос.** Чему равно произведение  $\cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{8\pi}{7}$ ?

### Контрольные вопросы и задания ■

1. Как определяется корень  $n$ -й степени из комплексного числа?
2. Запишите общую формулу для корней  $n$ -й степени из комплексного числа  $z \neq 0$ , представленного в тригонометрической форме.
- 3.\*\* Докажите общую формулу для корней  $n$ -й степени из числа  $z \neq 0$ .
- 4.\*\* Как расположены на координатной плоскости точки, изображающие корни  $n$ -й степени из комплексного числа?
5. Запишите кубические корни из числа 1.
6. Запишите корни  $n$ -й степени из числа 1.
7. Докажите, что сумма всех корней  $n$ -й степени из 1 равна нулю.

### Задачи и упражнения ■

1. Найдите:

- а)  $\sqrt{i}$ ;      б)  $\sqrt[3]{8i}$ ;      в)  $\sqrt{8 + i \cdot 8\sqrt{3}}$ ;      г)  $\sqrt[3]{-8}$ ;  
 д)  $\sqrt[6]{-64}$ ;      е)  $\sqrt{32i}$ ;      ё)  $\sqrt{-4 + \sqrt{48} \cdot i}$ .

2. Решите уравнение:

- а)  $x^4 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$ ;      б)  $x^2 - 2ix - 5 = 0$ ;  
 в)  $x^2 + x + 1 = 0$ ;      г)\*  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ;  
 д)\*\*  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ .

3.\*\* К точке приложено 20 сил, причем угол между двумя последовательными силами равен  $45^\circ$ , а модули сил составляют геометрическую

прогрессию, первый член которой равен 1, а знаменатель равен  $\sqrt{2}$ . Найдите величину и направление равнодействующей силы.

4.\* Докажите, что произведение и частное двух корней  $n$ -й степени из числа 1 также являются корнями  $n$ -й степени из 1.

5. Покажите, что корни  $n$ -й степени из 1 изображаются вершинами правильного  $n$ -угольника, симметричного относительно оси  $Ox$ . Для каких  $n$  этот многоугольник симметричен также относительно оси  $Oy$ ?

6.\*\* Докажите, что уравнение  $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  не имеет действительных корней.

7.\* Найдите такое наименьшее натуральное число  $n$ , для которого  $(1 + i)^n = (1 - i)^n$ .

8.\* Найдите все комплексные корни уравнения:

а)  $z^2 + \bar{z} = 0$ ;      б)  $z^3 + |z| = 0$ ;      в)  $z^5 = \bar{z}$ .

9.\*\* Сколько корней в множестве комплексных чисел имеет уравнение:

а)  $z^{100} = (\bar{z})^{99}$ ;      б)  $z^{100} = (\bar{z})^{100}$ ?

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Вершинами какой фигуры на координатной плоскости являются все корни четвёртой степени из комплексного числа  $-1$ ?

- 1) ромба с углом  $60^\circ$
- 2) квадрата со сторонами, параллельными координатным осям
- 3) квадрата со сторонами, параллельными биссектрисам первой и второй четверти
- 4) прямоугольника со сторонами, параллельными биссектрисам первой и второй четверти

1.2. Какой вид имеют корни третьей степени из  $\sqrt{3}i + 1$ ?

- 1)  $\sqrt[3]{4} \left( \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right)$ , где  $k = 0, 1, 2$
- 2)  $\sqrt[3]{4} \left( \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) \right)$ , где  $k = 0, 1, 2$
- 3)  $\sqrt[3]{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) \right)$ , где  $k = 0, 1, 2$
- 4)  $\sqrt[3]{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right)$ , где  $k = 0, 1, 2$



**1.3.\*** Сколько корней имеет уравнение  $z^3 = \bar{z}^2$ ?

- 1) 3 корня      2) 4 корня      3) 5 корней      4) 6 корней

**1.4.\*** Пусть  $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{12} + i \sin \frac{2\pi k}{12}$  —  $k$ -й корень двенадцатой степени из

единицы. Чему равно произведение  $(z - \varepsilon_3)(z - \varepsilon_6)(z - \varepsilon_9)$ ?

- 1)  $z^3 + z^2 + z + 1$       2)  $z^3 - z^2 + z - 1$   
3)  $z^3 - \varepsilon_3 - \varepsilon_6 - \varepsilon_9$       4)  $(z - \varepsilon_6)^3$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Корни чётной степени из действительного числа изображаются на координатной плоскости. Какие особенности имеет это множество?

- 1) симметрично относительно начала системы координат  
2) симметрично относительно оси  $Ox$   
3) симметрично относительно оси  $Oy$   
4) симметрично относительно прямой, проходящей через начало системы координат и точку, изображающую любой из корней

**2.2.** Какие из указанных чисел являются элементами множества  $\sqrt[3]{-1}$ ?

- 1)  $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$       2)  $\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$   
3)  $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$       4)  $\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$

**2.3.** Какие из указанных чисел являются значениями корней второй степени из числа  $z = -5 - 12i$ ?

- 1)  $-2 - 3i$       2)  $-2 + 3i$       3)  $2 - 3i$       4)  $2 + 3i$

**2.4.\*** Пусть  $\varepsilon_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ . При возведении каких из указанных чисел  $t$  в натуральные степени можно получить все корни 8-й степени из 1?

- 1)  $t = \varepsilon_0^2$       2)  $t = \varepsilon_0^3$       3)  $t = \varepsilon_0^4$       4)  $t = \varepsilon_0^5$

## § 4. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ ■ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**4.1. Функции комплексного переменного.** Ранее в курсе математики постоянно рассматривались числовые функции действительного аргумента. В некоторых задачах оказываются полезными функции комплексного аргумента.

Функцией  $f$  комплексного переменного  $z$  называют правило, которое каждому комплексному числу  $z$  из множества  $D$  комплексных чисел

ставит в соответствие однозначно определённое комплексное число  $w$  из подмножества  $E$  множества  $C$  комплексных чисел. Записывают это соответствие в виде  $w = f(z)$ . Множество  $D$  называется *областью определения* функции  $f$ , а множество  $E$  называется областью значений функции  $f$ .

Одним из способов задания функции комплексного переменного является запись формулы, по которой вычисляют значения функции. При формульном задании функции, если отдельно не указана область определения, предполагают, что область определения совпадает с множеством тех значений аргумента, при которых выполнимы все операции, участвующие в записи формулы, а в качестве области значений выбирают множество всех тех комплексных чисел  $w$ , для которых существует такое  $z \in D$ , что  $w = f(z)$ . Например, функция  $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  определена для всех  $z \in C, z \neq 0$ .

Функции действительного аргумента можно считать частным случаем функций комплексного переменного, так как такие функции определяются на подмножествах множества  $R$  действительных чисел, которое является частью множества  $C$  комплексных чисел.

**Вопрос.** Какова область значений функции, заданной формулой  $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ ?

**4.2. Функция  $f(z) = z + m$  и параллельный перенос.** Выберем и зафиксируем комплексное число  $m = a + bi$ , где  $a, b \in R$ . Рассмотрим функцию  $f(z) = z + m$ , определённую на множестве  $C$ . Пусть  $z = x + yi$  и  $f(z) = x_1 + y_1i$ , где  $x, y, x_1, y_1$  — действительные числа. Тогда

$$x_1 + y_1i = (x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i.$$

Изобразим комплексные числа  $z$  и  $z + m$  точками координатной плоскости. Мы видим, что функция  $f(z) = z + m$  переводит точку  $z$  с координатами  $(x; y)$  в точку  $w$  с координатами  $(x_1; y_1)$  так, что  $x_1 = x + a, y_1 = y + b$ .

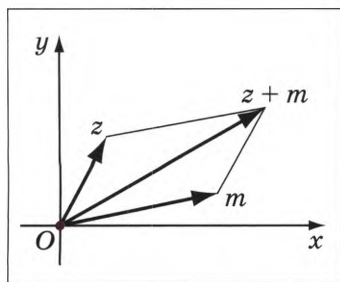


Рис. 1

Полученное правило преобразования координат точек совпадает с правилом преобразования координат при параллельном переносе, определяемом парой чисел  $(a; b)$ , причём  $(a; b)$  — это координаты точки, изображающей комплексное число  $m$  (рис. 1). Можно сказать, что функция  $f(z) = z + m$  задаёт параллельный перенос координатной плоскости



ти, определяемый комплексным числом  $m$ , или параллельный перенос на  $m$ .

**Вопрос.** Пусть  $m \in \mathbb{C}$ . Какое преобразование координатной плоскости определяет функция  $f(z) = z - m$ , где  $z \in \mathbb{C}$ ?

**4.3. Функция  $f(z) = mz$  и поворот.** Выберем и зафиксируем комплексное число  $m$ , модуль которого равен 1, а аргумент равен  $\varphi$ . Тогда  $m = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Рассмотрим функцию  $f(z) = mz$ , определённую на множестве  $\mathbb{C}$ .

Если  $z = 0$ , то  $w = f(0) = m \cdot 0 = 0$ .

Если  $z \neq 0$ , то запишем это число в нормальной тригонометрической форме:  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ . По правилу умножения чисел, записанных в нормальной тригонометрической форме, имеем

$$\begin{aligned} w = f(z) = mz &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \\ &= r(\cos(\alpha + \varphi) + i \sin(\alpha + \varphi)). \end{aligned}$$

Изображая комплексные числа  $z$  и  $f(z)$  в координатной плоскости, получаем, что функция  $f(z) = mz$  переводит точку  $z$  с координатами  $(r \cos \alpha; r \sin \alpha)$  в такую точку  $w$  с координатами  $(x_1; y_1)$ , что  $x_1 = r \cos(\alpha + \varphi)$ ,  $y_1 = r \sin(\alpha + \varphi)$ .

Полученное правило преобразования координат точек совпадает с правилом преобразования координат при повороте относительно начала координат на угол  $\varphi$  (рис. 2). Таким образом, при  $|m| = 1$  функция  $f(z) = mz$  определяет поворот координатной плоскости относительно начала системы координат на угол, величина которого равна аргументу числа  $m$ .

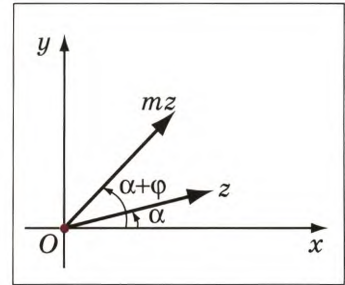


Рис. 2

**Вопрос.** Какое преобразование координатной плоскости определяет функция  $f(z) = \frac{z}{m}$  при  $m = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ?

**4.4.\*\* Функция  $f(z) = tz$  при  $t \in \mathbb{R}$  и гомотетия.** Выберем и зафиксируем положительное действительное число  $t$ . Рассмотрим функцию  $f(z) = tz$ , определённую на множестве  $\mathbb{C}$ . Пусть  $z = x + yi$ . Тогда

$$w = x_1 + y_1 i = f(z) = t(x + yi) = tx + tyi.$$

Изображая комплексные числа  $z$  и  $f(z)$  точками координатной плоскости, получим, что функция  $f(z) = tz$  переводит точку  $z$  с координатами  $(x; y)$  в точку  $w$  с координатами  $(x_1; y_1)$  так, что  $x_1 = tx$ ,  $y_1 = ty$ .



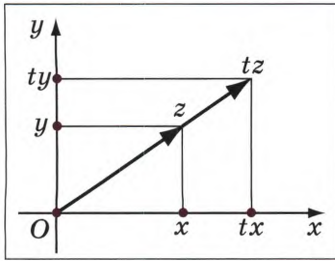


Рис. 3

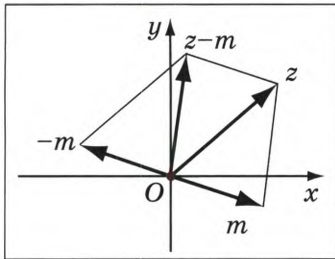


Рис. 4

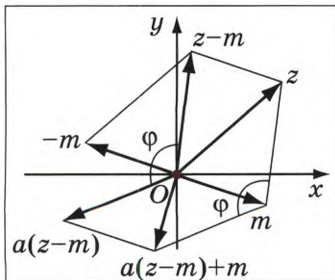


Рис. 5

Полученное правило преобразования координат точек совпадает с правилом преобразования координат при гомотетии с центром в начале системы координат и коэффициентом  $t$  (рис. 3). Следовательно, при  $t > 0$  функция  $f(z) = tz$  определяет гомотетию координатной плоскости с центром в начале системы координат и коэффициентом  $t$ .

**Вопрос.** Какое преобразование координатной плоскости определяет функция  $f(z) = -z$ , где  $z \in \mathbb{C}$ ?

#### 4.5. Повороты в комплексной плоскости.

Рассмотрим функцию  $f(z) = a(z - m) + m$ , где  $a = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,  $a \neq 1$ . Для каждого  $z \in \mathbb{C}$  точка  $z - m$  получается из точки  $z$  параллельным переносом на  $-m$  (рис. 4). Далее, точка  $a(z - m)$  получается из точки  $z - m$  поворотом относительно точки  $O$  на угол  $\varphi$  (рис. 5). Наконец, точка  $a(z - m) + m$  получается из точки  $a(z - m)$  параллельным переносом на  $m$  (рис. 5). Заметим, что при параллельном переносе на  $m$  точки  $z - m$ ,  $0$ ,  $a(z - m)$  переходят соответственно в точки  $z$ ,  $m$ ,  $a(z - m) + m$ . Поскольку точка  $a(z - m)$  получается из точки  $z - m$  поворотом относительно точки  $O$  на угол  $\varphi$ , то после параллельного переноса на  $m$  точка  $a(z - m) + m$  получается из точки  $z$  поворотом относительно точки  $m$  на угол  $\varphi$ .

**Пример.** Функция  $f(z) = a(z - m) + m$  при  $a = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$  и  $m = 3 - i$  определяет поворот координатной плоскости относительно точки  $3 - i$  на угол  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Вопрос.** Какое преобразование координатной плоскости определяет функция  $f(z) = i(z - 1 - 2i) + 1 + 2i$ ?

**4.6.\*\* Геометрический смысл линейных функций в комплексной плоскости.** Пусть  $f(z) = az + b$ , где  $a$  и  $b$  — заданные комплексные числа.

При  $a = 1$  и произвольном  $b$  функция имеет вид  $f(z) = z + b$  и определяет параллельный перенос на комплексное число  $b$ .

При  $a \neq 1$ ,  $|a| = 1$  и произвольном  $b$  составим равенство  $az + b = a(z - m) + m$ , откуда получим  $b = (1 - a)m$ ,  $m = \frac{b}{1 - a}$ . Из предыдущего пункта следует, что функция  $f(z) = az + b$  определяет поворот плоскости относительно точки  $\frac{b}{1 - a}$  на угол, равный аргументу числа  $a$ .

При остальных ненулевых значениях  $a$  и произвольных  $b$  функция  $f(z) = az + b$  определяет преобразование подобия плоскости. Другими словами, существует такое положительное число  $k$ , что после преобразования расстояние между любыми двумя точками изменяется в  $k$  раз.

Действительно, рассмотрим на плоскости произвольные точки  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ , определяемые комплексными числами  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Функция  $f(z) = az + b$  переводит эти точки в точки  $w_1 = az_1 + b$  и  $w_2 = az_2 + b$ . Расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$  равно модулю  $|z_1 - z_2|$ , а расстояние между точками  $w_1$  и  $w_2$  равно  $|f(z_1) - f(z_2)| = |w_1 - w_2| = |az_1 + b - (az_2 + b)| = |a| \cdot |z_1 - z_2|$ .

Поскольку  $z_1$  и  $z_2$  — произвольные комплексные числа, то функция  $f(z) = az + b$  определяет преобразование подобия.

**Вопрос.** Какое преобразование плоскости определяет функция  $f(z) = (4 - 3i)z + 25$ ?

**4.7. Функция  $f(z) = \bar{z}$  и симметрия относительно действительной оси.** В пункте 4.5 было показано, что при  $|a| = 1$  функция  $f(z) = az + b$ , где  $a$  и  $b$  — заданные комплексные числа, определяет либо параллельный перенос, либо поворот. Рассмотрим теперь функцию  $f(z) = \bar{z}$ , где  $\bar{z}$  — число, комплексно сопряжённое к числу  $z$ . Пусть  $z = x + yi$ . Тогда  $w = x_1 + y_1 i = f(z) = \bar{z} = x - yi$ .

Изображая эти числа точками координатной плоскости, получаем, что функция  $f(z) = \bar{z}$  переводит точку  $z$  с координатами  $(x; y)$  в точку  $w$  с координатами  $(x_1; y_1)$  так, что  $x_1 = x$ ;  $y_1 = -y$ .

Полученное правило преобразования координат точек совпадает с правилом преобразования координат при симметрии относительно оси  $Ox$  (рис. 6). Следовательно, функция  $f(z) = \bar{z}$  определяет преобразование симметрии координатной плоскости относительно действительной оси.

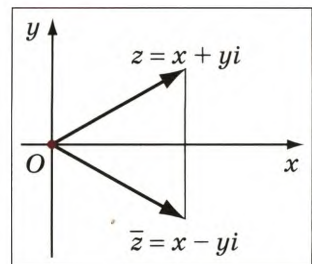


Рис. 6



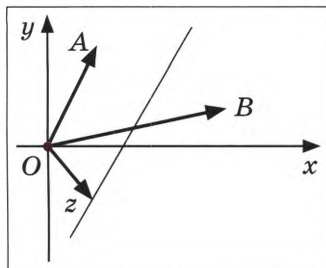


Рис. 7

**Вопрос.** При каких поворотах мнимая ось переводится в действительную ось?

**4.8. Уравнение прямой в комплексной плоскости.** Для каждой прямой на комплексной плоскости можно указать такие две точки  $A$  и  $B$ , что данная прямая будет серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$ , то есть она будет состоять из тех и только тех точек плоскости, которые равноудалены от точек  $A$  и  $B$  (рис. 7).

Пусть точки  $A$  и  $B$  изображают комплексные числа  $a$  и  $b$ . Тогда равенство

$$|z - a| = |z - b| \quad (1)$$

будет выполняться для тех и только тех комплексных чисел  $z$ , которые изображаются точками данной прямой. Поэтому равенство (1) можно рассматривать как уравнение данной прямой.

**Вопрос.** Как записать в комплексной форме уравнение прямой, состоящей из точек, которые равноудалены от точек  $i$  и  $2 - 3i$ ?

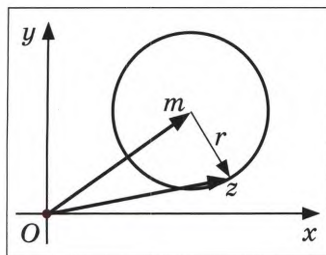


Рис. 8

**4.9. Уравнение окружности в комплексной плоскости.** На плоскости каждую окружность можно задать как множество всех точек, удалённых от фиксированной точки  $m$  на заданное расстояние  $r$ .

Это означает, что окружность в комплексной плоскости можно задать уравнением

$$|z - m| = r, \quad (2)$$

где  $m \in \mathbb{C}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  и  $r > 0$  (рис. 8).

**Вопрос.** Каким уравнением в комплексной плоскости задаётся окружность с центром в точке  $1 - i$  и проходящая через точку  $0$ ?

## ■ Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется функцией комплексного переменного?
2. Какая функция определяет параллельный перенос координатной плоскости?
3. Какая функция определяет поворот координатной плоскости относительно начала координат?



4.\*\* Какая функция определяет гомотетию координатной плоскости?

5. Как найти центр и угол поворота, определяемого функцией  $f(z) = a(z - m) + m$  при  $|a| = 1$  и  $a \neq 1$ ?

6.\*\* Как найти центр и угол поворота, определяемого функцией  $f(z) = az + b$  при  $|a| = 1$  и  $a \neq 1$ ?

7. Какая функция определяет симметрию комплексной плоскости относительно действительной оси?

8. Какие виды перемещений комплексной плоскости вы знаете?

9. Каким уравнением определяется прямая в комплексной плоскости?

10. Каким уравнением определяется окружность в комплексной плоскости?

### Задачи и упражнения ■

1. Для каких комплексных чисел  $z$  функция  $f(z) = \frac{z}{|z|}$  принимает значение, равное одному из указанных чисел?

а) 1;                      б) -1;                      в)  $i$ ;                      г)  $-i$ .

2. Для каких комплексных чисел  $z$  значение функции  $f(z) = \frac{z}{|z| - 1}$  не определено?

3. Для каких комплексных чисел  $z$  значения функции  $f(z) = z^2$  действительны?

4. Какое преобразование комплексной плоскости определяет функция  $f(z)$ ?

а)  $f(z) = z + i$ ;      б)  $f(z) = iz$ ;      в)\*\*  $f(z) = \frac{z}{2}$ ;      г)  $f(z) = \frac{z}{i}$ .

5. В какую фигуру преобразуется окружность радиуса 1 с центром в точке 0 с помощью данной функции  $f(z)$ ?

а)  $f(z) = z - i$ ;      б)\*  $f(z) = 2z$ ;      в)  $f(z) = -iz$ .

6. Найдите, в какую фигуру преобразуется окружность радиуса 1 с центром в точке  $i$  с помощью функции  $f(z)$ :

а)  $f(z) = iz + 1$ ;                      б)  $f(z) = i(z - 1) + 1$ ;  
в)\*\*  $f(z) = 2(z - i) + 3$ ;              г)\*  $f(z) = -i(z - 2i) + 2$ .

7.\*\* Какая функция определяет симметрию комплексной плоскости относительно мнимой оси?

8.\*\* Какая функция определяет симметрию комплексной плоскости относительно прямой, содержащей биссектрису первого координатного угла?

**9.\*\*** Во что преобразуется окружность радиуса 1 с центром в точке  $(1;1)$  с помощью функции комплексного переменного  $f(z)$ ?

а)  $f(z) = \bar{z}$ ;      б)  $f(z) = -\bar{z}$ ;      в)  $f(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 \cdot \bar{z}$ .

**10.\*\*** В какую фигуру функция  $f(z) = iz - 1$  переводит фигуру, заданную уравнением?

а)  $|z - i| = 2$ ;      б)  $|z + 1| = |z - i|$ .

**11.** Запишите в комплексной форме уравнение серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему точки: а)  $i$  и  $1 - i$ ; б)  $-i$  и  $1$ ; в)  $0$  и  $-1 + 2i$ .

**12.** Напишите уравнение окружности в комплексной форме с центром в точке  $1 - i$  и радиусом  $\sqrt{2}$ .

**13.\*\*** Докажите, что приведённое уравнение задаёт окружность, и найдите её центр и радиус:

а)  $z\bar{z} - 2 = 0$ ;      б)  $z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 0$ .

## ■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.** Какое число не может быть значением функции  $f(z) = \frac{z}{|z|}$ ?

1)  $i$       2)  $-i$       3)  $\frac{1-i}{2}$       4)  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

**1.2.** В какую точку комплексной плоскости функция  $f(z) = \frac{1}{z}$  переводит точку  $z = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ?

1)  $z = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$       2)  $z = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

3)  $z = \frac{3}{4}\left(-\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$       4)  $z = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

**1.3.** В какой точке находится центр поворота координатной плоскости, определяемого функцией  $f(z) = i(z - i + 1) + i - 1$ ?

1)  $i - 1$       2)  $i$       3)  $1 - i$       4)  $\frac{(i-1)}{2}$

**1.4.** Какая из перечисленных ниже функций определяет поворот?

1)  $f(z) = 2iz + i + 1$

2)  $f(z) = -3iz + i + 2$

3)  $f(z) = iz + 2i + 1$

4)  $f(z) = -2iz + i + 1$

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.** Какие из функций определяют параллельный перенос координатной плоскости?

1)  $f(z) = 2z + i$

2)  $f(z) = z + i + 1$

3)  $f(z) = \sqrt{2}z + \sqrt{2}$

4)  $f(z) = z + i\sqrt{2}$

**2.2.** Какие из функций переводят точку  $1 + i$  в точку  $2 + 3i$ ?

1)  $f(z) = z + 1 + i$

2)  $f(z) = 2z + i$

3)  $f(z) = 3z - 1$

4)  $f(z) = 2(z + i)$

**2.3.** Какие функции из заданных определяют поворот комплексной плоскости?

1)  $f(z) = iz - 1$

2)  $f(z) = \frac{3 + 4i}{5}z - 2i$

3)  $f(z) = z^2 + 1$

4)  $f(z) = z \cdot \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$

**2.4.** Какие из указанных точек функция  $f(z) = \frac{1}{z}$  переводит в точки, находящиеся на расстоянии 0,2 от нуля?

1)  $2 + 3i$

2)  $3 - 4i$

3)  $-2 + 3i$

4)  $-4 - 3i$

## § 5. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ■ ДЛЯ МНИМЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

**5.1.\* Формула Эйлера для мнимых показателей.** В середине XVIII века академик Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707–1783) определил степень числа  $e$  с комплексным показателем и установил формулу, ныне носящую его имя:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \text{ где } \varphi \text{ — действительное число.}$$

Для действительных чисел  $x$  и  $y$  с помощью этой формулы вычислим произведение комплексных чисел  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  и  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ :

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) = \\ &= (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) + i (\cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y) = \\ &= \cos(x + y) + i \sin(x + y) = e^{i(x+y)}. \end{aligned}$$

В результате получается равенство

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{ix+iy},$$

аналогичное известному равенству для степеней с действительными показателями.



С помощью формулы Эйлера любое ненулевое комплексное число  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  можно записать в особой форме. Поскольку по определению  $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ , то  $z = re^{i\varphi}$ , где  $r, \varphi$  — действительные числа и  $r > 0$ .

Запись вида

$$z = re^{i\varphi}$$

называется *показательной формой* ненулевого комплексного числа.

**Вопрос.** Как показать, что  $e^{i\pi} + 1 = 0$ ?

**5.2.\* Степень числа  $e$  с комплексным показателем.** С учётом формулы Эйлера для мнимых показателей для произвольного комплексного числа  $z = a + bi$  определим

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b).$$

**Пример 1.** Покажем, как изобразить комплексное число, равное произведению  $e^{2+\pi i} \cdot e^{-1+3\pi i}$ .

Согласно определению  $e^{a+bi}$  запишем равенства:

$$\begin{aligned} e^{2+\pi i} \cdot e^{-1+3\pi i} &= e^2 \cdot e^{\pi i} \cdot e^{-1} \cdot e^{3\pi i} = e^2 \cdot e^{-1} \cdot e^{\pi i} \cdot e^{3\pi i} = \\ &= e^{2-1} \cdot e^{\pi i + 3\pi i} = e(\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = e. \end{aligned}$$

Таким образом, число  $e^{2+\pi i} \cdot e^{-1+3\pi i}$  изображается на комплексной плоскости точкой  $e$  действительной оси.

**Пример 2.** Заметим, что для комплексного числа  $e^z$  выполняются следующие соотношения:

$$e^z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{\frac{1}{2}\ln(a^2 + b^2)} \cdot e^{i\varphi} = e^{\frac{1}{2}\ln(a^2 + b^2) + i\varphi},$$

где  $a$  — действительная часть,  $b$  — мнимая часть,  $\varphi$  — аргумент числа  $e^z$ .

**Вопрос.** Как доказать, что для любых комплексных чисел  $u, v$  имеет место равенство  $e^{u+v} = e^u \cdot e^v$ ?

**5.3.\*\* Синус и косинус при комплексном значении аргумента.** Формула Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  для мнимых показателей позволяет выразить функции  $\sin x$  и  $\cos x$  через показательную функцию с мнимым показателем.

Заменяя число  $\varphi$  в формуле Эйлера на  $x$  и  $-x$ , получим два равенства:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая эти равенства, будем иметь:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x, \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$$

Отсюда для действительных  $x$  имеют место равенства:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

В общем случае для любого комплексного числа  $z$  по определению полагают

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Вычисляя сумму  $\cos z + i \sin z$ , получим

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = e^{iz}.$$

**Пример 3.** Вычислим  $\cos i$  и  $\sin i$ .

Подставляя в предыдущие формулы вместо  $z$  число  $i$ , получим

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e},$$

$$\sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = i \cdot \frac{e^2 - 1}{2e}.$$

**Вопрос.** Как упростить выражение  $\cos i + i \sin i$ ?

**5.4.\*\* Показательная функция в комплексной плоскости.** Рассмотрим теперь функцию  $f(z) = e^z$ , определённую на множестве  $\mathbb{C}$ .

Пусть  $z = x + yi$ . Тогда по формуле Эйлера

$$w = f(z) = e^{x+yi} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y).$$

Отсюда можно получить следующие свойства.

I. Если два числа  $z_1$  и  $z_2$  имеют равные действительные части, то модули соответствующих значений функции  $w_1 = f(z_1)$  и  $w_2 = f(z_2)$  равны.

II. Если  $z_1 = x + y_1 i$ ,  $z_2 = x + y_2 i$  и  $y_1 - y_2 = 2\pi k$ , где  $k$  — целое число, то  $e^{z_1} = e^{z_2}$ .

III. Если два числа  $z_1$  и  $z_2$  имеют равные мнимые части, то аргументы соответствующих значений функции  $w_1 = f(z_1)$  и  $w_2 = f(z_2)$  отличаются на число, кратное числу  $2\pi$ .

Эти свойства позволяют установить другие свойства функции  $f(z) = e^z$ .

Пусть  $z = x + yi$  и  $w = e^z = u + vi$ . Число  $z$  условимся изображать точкой  $(x; y)$  на координатной плоскости  $Oxy$ , а число  $w$  — точкой  $(u; v)$  на другой координатной плоскости  $Ouv$  (рис. 1).

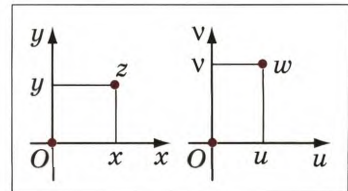


Рис. 1

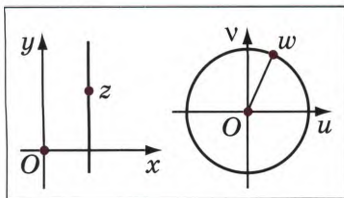


Рис. 2

Функция  $w = e^z$  преобразует каждую фигуру плоскости  $Oxy$  в фигуру на плоскости  $Ouv$ .

**Пример 4.** Пусть точка  $z = x + iy$  описывает прямую, параллельную оси  $Oy$ . В этом случае число  $x$  постоянно, а число  $y$  изменяется. Модуль числа  $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  постоянен, число  $y$  принимает все действительные значения, следовательно, точка  $w = e^z$  описы-

вает окружность радиуса  $r = e^x$  с центром в начале системы координат (рис. 2).

**Вопрос.** Как должна перемещаться точка  $z$  из примера 4 для того, чтобы точка  $w$  совершила только один полный оборот по окружности?

### 5.5.\*\* О множестве значений функции $e^z$ .

Рассмотрим множество  $D$  точек  $z = x + yi$ , для которых  $0 \leq y < 2\pi$  и  $x$  — произвольное действительное число. Множество  $D$  на плоскости  $Oxy$  является полосой шириной  $2\pi$ , которая ограничена осью  $Ox$  и прямой  $y = 2\pi$ , причём точки прямой  $y = 2\pi$  в эту полосу не входят (левая часть рис. 3).

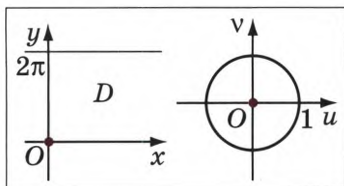


Рис. 3

Для каждого фиксированного значения  $x$  точки  $z = x + iy$  из множества  $D$  пробегают вертикальный отрезок, нижний конец которого — точка  $x$ , верхний конец — точка  $x + 2\pi i$ , причём нижний конец принадлежит  $D$ , а верхний — нет. Точка  $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ , соответствующая точке  $z$ , на плоскости  $Ouv$  описывает окружность радиуса  $e^x$  с центром в начале системы координат. Например, если  $x = 0$ , то радиус соответствующей окружности равен 1 (правая часть рис. 3). Если  $x > 0$ , а  $0 \leq y < 2\pi$ , то функция  $e^z$  отображает точки соответствующего отрезка в точки плоскости  $Ouv$ , лежащие на окружности радиуса  $e^x > 1$ . Если  $x < 0$ , а  $0 \leq y < 2\pi$ , то функция  $w = e^z$  отображает точки соответствующего отрезка в точки, лежащие на окружности радиуса  $e^x < 1$ .

В итоге функция  $w = e^z$  отображает полосу  $D$  на всю координатную плоскость  $Ouv$ , за исключением начала системы координат, причём разным точкам полосы  $D$  соответствуют разные точки плоскости  $Ouv$ . Другими словами, функция  $w = e^z$  *взаимно однозначно* отображает полосу  $D$  на всю плоскость  $Ouv$ , из которой исключена точка 0.

**Вопрос.** Как доказать, что функция  $e^z$  не принимает значение 0?



## Контрольные вопросы и задания ■

- 1.\* Как определяется  $e^{i\varphi}$  при действительном  $\varphi$ ?
- 2.\* Как определяется число  $e^z$  при комплексном  $z$ ?
- 3.\* Как записать комплексное число  $z \neq 0$  в виде  $re^{i\varphi}$ , где  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  и  $r > 0$ ?
- 4.\*\* Как выражаются значения  $\sin x$  и  $\cos x$  через показательную функцию с мнимым показателем?
- 5.\*\* Как определяются значения  $\sin z$  и  $\cos z$  при комплексном  $z$ ?
- 6.\*\* Какое множество точек описывает точка  $e^z = u + vi$  на плоскости  $Ouv$ , если точка  $z + yi$  описывает прямую, параллельную оси  $y$  на плоскости  $Oxy$ ?
- 7.\*\* Какое подмножество множества  $\mathbb{C}$  функция  $f(z) = e^z$  взаимно однозначно отображает на всё множество ненулевых комплексных чисел?

## Задачи и упражнения ■

- 1.\* Изобразите на плоскости точку, соответствующую числу:
  - а)  $e^{-1}$ ;
  - б)  $e^{1+i}$ ;
  - в)  $e^{i\pi}$ ;
  - г)  $e^{2\pi i}$ .
- 2.\* Докажите, что  $e^{z+2\pi i} = e^z$  при любом комплексном  $z$  (результат этой задачи позволяет говорить, что функция  $e^z$  обладает периодом  $2\pi i$ ).
- 3.\* Какое число является комплексно сопряжённым к числу  $e^{ix}$ , где  $x$  — действительное число?
- 4.\* Вычислите:
  - а)  $e^{2i} + e^{-2i}$ ;
  - б)  $e^{\pi i} + e^{-\pi i}$ ;
  - в)  $e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ;
  - г)\*\*  $\cos i - i \sin i$ .
- 5.\* Запишите в виде  $re^{i\varphi}$  число:
  - а)  $1 + i$ ;
  - б)  $\sqrt{3} - i$ ;
  - в)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ;
  - г)  $1 + 5i$ .
- 6.\* Вычислите:
  - а)  $e^{1+2i}$ ;
  - б)  $e^{-1-i}$ ;
  - в)  $e^{1+\bar{u}i}$ ;
  - г)  $e^{1-2\bar{u}i}$ .
- 7.\*\* Покажите, что при любом действительном  $x$  число  $\cos ix$  — действительное, а число  $\sin ix$  — мнимое.
- 8.\*\* Докажите, что  $\cos i$ ,  $\cos 2i$  — действительные числа, такие, что  $\cos i > 1$  и  $\cos 2i > 2$ .
- 9.\*\* Покажите, что числа  $\cos i + \sin i$  и  $\cos i - \sin i$  комплексно сопряжены.
- 10.\*\* Докажите, что  $\cos(z + 2\pi) = \cos z$  и  $\sin(z + 2\pi) = \sin z$  при любом комплексном значении  $z$ .
- 11.\*\* Докажите, что  $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$ .

**12.\*\*** Точка  $z = x + yi$  описывает на плоскости  $Oxy$  прямую, параллельную оси  $Ox$ . Какое множество точек описывает точка  $u + vi = e^z$  на плоскости  $Ouv$ ?

■ Тесты

**Задание 1.** Укажите правильный вариант ответа.

**1.1.\*\*** Какое множество точек описывает точка  $e^z = u + vi$  на плоскости  $Ouv$ , если точка  $z = x + yi$  описывает прямую, параллельную оси  $Oy$  на плоскости  $Oxy$ ?

- 1) луч                      2) прямую                      3) окружность                      4) эллипс

**1.2.\*** Чему равен модуль числа  $e^{2i}$ ?

- 1) 1                      2) 2                      3)  $\ln 2$                       4)  $e^2$

**1.3.\*** Чему равен аргумент числа  $e^{3i}$ ?

- 1) 1                      2) 3                      3)  $\frac{3}{\pi}$                       4)  $\frac{\pi}{3}$

**1.4.\*** Какое из указанных значений может иметь  $e^{\pi ki}$  при целом  $k$ ?

- 1) -1                      2) -2                      3) -3                      4) -4

**Задание 2.** Укажите все правильные варианты ответа.

**2.1.\*** Какие из перечисленных ниже чисел равны 1?

- 1)  $e^{\frac{i\pi}{2}}$                       2)  $e^{-i\pi}$                       3)  $e^{2\pi i}$                       4)  $e^{-4\pi i}$

**2.2.\*\*** Сколько различных комплексных решений относительно  $z$  может иметь уравнение вида  $e^z = w$ , где  $w$  — заданное число из множества  $C$  комплексных чисел?

- 1) ни одного                      2) ровно одно  
3) ровно два                      4) бесконечное множество

**2.3.\*\*** Какие из перечисленных ниже чисел являются действительными?

- 1)  $\cos i$                       2)  $\sin i$                       3)  $\operatorname{tg} i$                       4)  $i \sin i$

**2.4.\*\*** Какие из указанных чисел равны числу, комплексно сопряжённому к числу  $e^{ix}$ , где  $x$  — действительное число?

- 1)  $-\cos x + i \sin x$                       2)  $\cos x - i \sin x$   
3)  $e^{-ix}$                       4)  $-e^{ix}$

■ Мини-исследования к главе 12

**Мини-исследование 34**

Докажите, что последовательное выполнение двух поворотов плоскости с общим центром является поворотом с тем же центром (тождественное преобразование плоскости также считается поворотом).

Докажите, что последовательное выполнение двух поворотов плоскости с различными центрами является либо поворотом, либо параллельным переносом.

### Мини-исследование 35

Известно, что функция  $f(z) = \bar{z}$  определяет симметрию комплексной плоскости относительно действительной оси.

Определите, какая функция комплексного переменного определяет на комплексной плоскости:

а) симметрию относительно вертикальной прямой, проходящей через точку  $a$  действительной оси;

б) симметрию относительно горизонтальной прямой, проходящей через точку  $bi$  мнимой оси.

в) симметрию относительно прямой, являющейся биссектрисой первого координатного угла;

г) симметрию относительно прямой, проходящей через точку  $0$  под углом  $\varphi$  к действительной оси.

Выясните, в каких случаях функция  $f(z) = a\bar{z} + b$  определяет симметрию комплексной плоскости относительно некоторой прямой.

### Мини-исследование 36

Выясните, какая фигура на комплексной плоскости определяется уравнением:

а)  $|z - i| = |z + i|$ ;

б)  $|z - i| = 2|z + i|$ ;

в)  $|z - a| = k|z - b|$ , где  $a$  и  $b$  — заданные комплексные числа,  $k$  — положительное действительное число.

### Мини-исследование 37

Решите уравнение  $\sin z = 100$ .



# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсцисса 94

Аддитивность меры Жордана  
в пространстве 295  
на плоскости 275

Аппликата 95

Аргумент комплексного числа 338

Асимптота

вертикальная 140  
горизонтальная 143  
наклонная 143

Базис системы координат 117

Биссектор двугранного угла 57

Вектора

длина 169  
координаты 103  
умножение на число 121

Вектор

нулевой 104  
связанный с точкой 102  
свободный 120

Векторный признак

перпендикулярности  
плоскостей 191  
параллельности плоскостей 191

Векторов

линейная комбинация 115  
перпендикулярность 171  
равенство 102, 120  
разложение 116, 122  
разность 104, 121  
скалярное произведение 168  
сумма 103, 121

Векторы

коллинеарные 112, 122  
компланарные 114, 122  
противоположно направленные 112  
сонаправленные 112

Вероятность

выбора элемента из множества 306  
независимых событий 312  
полная 316  
произведения событий 310, 311  
условная 307

Внешняя точка множества

в пространстве 236, 237  
на плоскости 238  
на прямой 239

Внутренность множества 236, 237, 238

Внутренняя точка множества

в пространстве 47, 236, 237  
на плоскости 237  
на прямой 239

Выпуклое множество (фигура) 249

Выпуклое тело 250

Выпуклость функции

вверх 144  
вниз 145

Граница множества 237, 238

Граничная точка множества

в пространстве 237  
на плоскости 238  
на прямой 239

Двучлен тригонометрический 330

Дифференциальное уравнение 225

интегрирование 225  
с разделёнными переменными 228

Замечательный тригонометрический предел 27

Замкнутая область 246

Замкнутое множество (тело) 244

Знакопостоянство непрерывной функции 36

- Измеримость по Жордану
  - в пространстве 294
  - круга 276
  - на плоскости 272
- Интеграл
  - дифференциального уравнения 225
  - неопределённый 216
  - определённый 281
- Интегральные кривые 225
- Интегральные суммы 283
- Исчерпывания метод 281
- Касательная
  - к графику функции 68
  - плоскость к сфере 45, 206
  - прямая к сфере 62
  - угловой коэффициент 68
- Коллинеарность векторов 112
- Компланарность векторов 114
- Комплексно сопряжённые числа 340
- Комплексное число
  - аргумент 338
  - изображение 337
  - модуль 337
  - показательная форма 364
  - тригонометрическая форма 339
- Комплексных чисел
  - умножение 343
  - деление 344
- Координаты
  - вектора 103
  - середины отрезка 97
  - точки в пространстве 95
- Корень
  - из единицы 350
  - из комплексного числа 348
- Корни  $n$ -й степени из единицы 350
- Косинус комплексного числа 365
- Криволинейная трапеция 281
  - формула площади 283
- Критерий измеримости 273, 294
- Лагранжа теорема 128
- Линейная комбинация векторов 115
- Мера Жордана
  - аддитивность 275, 295
  - в пространстве 294
  - критерий измеримости 273, 294
  - монотонность 273, 295
- Метод
  - интервалов обобщённый 37
  - исчерпывания 281
- Мнимая единица 337
- Многогранник 257
  - вписанный в сферу 50, 55
  - выпуклый 258
  - описанный около сферы 55
  - полуправильный 260
- Многоугольная область 257
- Множества
  - внутренность 237, 238
  - граница 237, 238
- Множество исходов эксперимента 306
- Модуль комплексного числа 337
- Монотонность меры Жордана 273
- Наибольшее значение функции 156, 160
- Наименьшее значение функции 156, 160
- Начертательная геометрия 91
- Независимость событий 312
- Неопределённый интеграл 216
- Непрерывность функции
  - арифметические свойства 19
  - в точке 17, 19
  - дифференцируемой 78
  - монотонной 31

- на множестве 17
- обратной функции 31, 32
- сложной функции 20
- элементарных функций 24, 26, 27, 31, 32
- Несовместные события 315
- Нормаль к плоскости 176
- Нормальное уравнение плоскости 181
- Нуль функции 135
- Ньютона – Лейбница формула 285
- Область
  - замкнутая 246
  - многоугольная 257
  - определения функции 5
- Обобщённый метод интервалов 37
- Обобщённое неравенство Бернулли 130
- Объём
  - пирамиды 298
  - свойства 292
  - тела вращения 299
  - элементарной фигуры 293
- Ограниченное множество 243
- Окрестность точки
  - в пространстве 236
  - круговая 237
  - на плоскости 237
  - на прямой 239
  - шаровая 236
- Окрестность числа 6
- Определённый интеграл 281
  - свойства 287
- Ордината 95
- Основной период функции 322
- Ось
  - абсцисс 94
  - аппликат 94
  - координат 94
  - ординат 94
- Палетка на плоскости 265
  - нулевого ранга 265
  - первого ранга 266
- Параллельный перенос в пространстве 98
- Параметрическое задание прямой 113
- Первообразная 212
  - замена переменных 220
  - произведения на число 219
  - суммы 219
- Периодическая функция 321, 323
- Период функции 321, 323
  - основной 322, 323
- Плоскость проекции
  - горизонтальная 87
  - вертикальная 87
- Площадь
  - криволинейной трапеции 281
  - свойства 264
  - элементарной фигуры 266
- Поверхность тела 245
- Показательная форма комплексного числа 364
- Правило
  - параллелограмма 103
  - треугольника 104
- Предел функции
  - на бесконечности 142
- Предел функции в точке 7, 8
  - графическая иллюстрация 9
  - свойства 10, 11, 12
  - слева 138
  - справа 138
- Предельная точка множества 7
- Представитель (изображение) свободного вектора 120



- Признак
  - локального максимума 162
  - локального минимума 163
  - монотонности функции 129
  - постоянства функции 212
- Принцип Кавальери 300
- Приращение
  - аргумента 71
  - функции 71
- Проекций
  - плоскость 87
  - ось 87
- Произведение событий 310
- Производная функция 75
  - произведения 78
  - произведения на число 77
  - сложной функции 82
  - суммы 77
  - частного 79
- Производное число 71
- Промежуток
  - выпуклости 144, 145
  - знакопостоянства 136
  - монотонности 136
  - непрерывности 135
- Пространственная сеть ранга  $n$  293
- Пространство возможных исходов 306
- Прямая
  - касательная к сфере 62
  - параметрическое задание 113
- Равенство векторов 102, 120
- Разность векторов 104, 121
- Расстояние
  - между точками 96
  - от точки до плоскости 201
  - между прямыми 202
- Свойства пределов функций 10, 11, 12
  - непрерывных функций 19, 20
- Свойства
  - корней из единицы 351
  - меры Жордана 295
  - операций над векторами 105, 111,
  - скалярного произведения 168
- Свойство отрезков касательных 63
- Связность 243
- Серединный перпендикуляр к отрезку в пространстве 52
- Сеть
  - нулевого ранга 265
  - пространственная 292
  - ранга  $n$  265, 292
- Синус комплексного числа 365
- Система координат в пространстве
  - косоугольная 117
  - прямоугольная 94
- Скалярное произведение векторов 168, 171
  - геометрический смысл 170
  - свойства 168
- Скалярный квадрат вектора 169
- Скорость
  - мгновенная 71
  - средняя 70
- Событие как множество 306
- События
  - независимые 312
  - полный класс 315
  - произведение 310, 311
- Соизмеримые периоды 330
- Сумма векторов 103, 121
- Сфера 44
  - вписанная в пирамиду 56
  - касающаяся плоскости 45, 55
  - касающаяся прямой 62

- касающаяся сферы 46
- описанная около многогранника 50
- уравнение 205
- Таблица
  - первообразных 215
  - производных 76
- Тело 243–244
  - вращения 299
  - выпуклое 250
  - объём 295, 297
- Теорема
  - Лагранжа 128
  - о достижении нуля 31
  - о монотонной функции 31
  - о знакопостоянстве функции 36
  - о промежуточных значениях 30
  - отделимости 253
- Ферма 158
- Точка
  - внешняя 237, 238, 239
  - внутренняя 47, 236, 237, 239
  - граничная 237, 238 239
  - изолированная 19
  - критическая 160
  - локального максимума функции 137, 163
  - локального минимума функции 137, 163
  - наибольшего значения функции 158
  - наименьшего значения функции 158
  - локального экстремума 137
- Тригонометрический двучлен 330
  - общего вида 332
- Тригонометрическая форма комплексного числа 339
- Угол
  - между векторами 169, 185
  - между нормальными 190
  - между плоскостями 190
  - между прямой и плоскостью 196
  - между прямыми 185
- Уравнение
  - прямой на комплексной плоскости 360
  - окружности на комплексной плоскости 360
- Уравнение
  - дифференциальное 225
  - плоскости 177
  - сферы 205
- Усечённая пирамида 259
- Условие монотонности функции 129
- Условная вероятность 307
  - формула 307
- Фигура
  - измеримая 272, 294
  - элементарная 266, 292
- Формула
  - Байеса 317
  - вероятности гипотез 317
  - корней из комплексного числа 349, 352
  - линейного приближения 78
  - Муавра 344
  - Ньютона – Лейбница 285
  - произведения вероятностей 310, 311
  - полной вероятности 316
  - объёма 297
  - условной вероятности 307
  - Эйлера для мнимых показателей 363
- Функция
  - Дирихле 163

дифференцируемая 75  
комплексного переменного 355  
непрерывная  
    в точке 17, 19  
    на множестве 17  
обратная 30  
периодическая 321, 323  
разрывная 17

    стремящаяся к  
        бесконечности 141  
Цилиндр прямой обобщённый 295  
Шар 44  
Эксперимент 306  
Элементарная фигура  
    ранга  $n$  266, 292  
Эпюр 88



# ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

## Глава 1

### § 1

1. а)  $\frac{3}{2}$ ; б) 0; в) 0; г) 1; д)  $\frac{1}{16}$ ; е) 1. 3. а)  $(-2; 8)$ ; б)  $(-9; -5)$ ; в)  $(-29; -21)$ ; г)  $(0, 7; 1, 3)$ ; д)  $(-0, 15; 0, 35)$ ; е)  $(-\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ . 4. а)  $R$ ; б)  $x \neq \frac{1}{3}$  и  $x \neq 1$ ; в)  $x \geq -\frac{3}{2}$ ; г)  $x > -\frac{3}{2}$ ; д)  $x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ; е)  $x \leq -4, x \geq -3$ . 5. а)  $|x| < 2, x \neq -1$  и  $x \neq 0$ ; б)  $x > 4$ ; в)  $x > 2$ ; г)  $x \neq 1$  и  $x \neq -1$ ; д)  $|x| \geq \sqrt{2}$ ; е)  $x \geq 1$ . 6. а)  $x = y + 2k\pi$ , где  $y \in [0; \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}; \pi]$ ,  $k \in Z$ ; б) объединение множеств  $1 < |x| < \sqrt{2}$  и  $|x| > \sqrt{3}$ ; в) объединение интервалов  $(10^{2k\pi}; 10^{(2k+1)\pi})$ ,  $k \in Z$ ; г)  $[-1; 0]$ . 7. Функция  $f(x)$  определена, а  $g(x)$  не определена при: а)  $x < -2$ ; б)  $-1 < x < 0$ ; в)  $x = 0$ . 9. а)  $\delta \leq \sqrt{4,1} - 2$ ; б)  $\delta \leq \sqrt{9,01} - 3$ ; в)  $\delta \leq 10^{-3}$ ; г)  $\delta \leq \frac{6}{\sqrt{35}} - 1$ . 11. а)  $\frac{5}{3}$ ; б)  $-\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{3}{7}$ ; г) 0; д)  $\frac{1}{6}$ . 12. а) 0; б)  $\frac{1}{4}$ ; в) 4; г)  $\frac{3}{2}$ ; д)  $-\frac{3}{2}$ ; е)  $\frac{5}{12}$ . 13. а)  $\frac{5}{3}$ ; б)  $\frac{7}{36}$ ; в)  $-0,33$ ; г) 1; д)  $-\frac{1}{2}$ . *Указание.* Примените формулу  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ .

### § 2

1. *Указание.* Воспользуйтесь теоремами о непрерывности суммы, произведения, отношения. 2. *Указание.* Применив очевидное неравенство  $|f(x)| \leq |x|$ , покажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . 3. *Указание.* Покажите, что  $|f(x)| \leq |x|$ . 4. *Указание.* Воспользуйтесь непрерывностью каждой из данных функций и их равенством при  $x = 1$ . 5. *Указание.* а) покажите, что  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{1}{2}$ ; б)  $f(x)$  не имеет предела в точке  $x = 1$ ; в) воспользуйтесь теоремой о непрерывности отношения. 6. а)  $\sin(x^2 + 1)$ ; б)  $x^4 + 4x^2 + 2$ ; в)  $\log_2(\cos x)$ ; г)  $\lg(\cos x) + \sin(\cos x)$ ; д)  $\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}, x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$ ; е)  $\operatorname{tg}(\log_2 x + \log_x 2)$ ; ё)  $\frac{|x+5|}{\sqrt[4]{x}}$ . 7. а)  $2^{2\sin x} - 2^{\sin x}$ ; б)  $\sin 2x + 2|\sin x + \cos x| + 2$ ; в)  $\frac{\pi}{2}$  при  $x = 1$  и не определена при  $x \neq 1$ ; г)  $x^8 + 4x^7 + 12x^6 + 22x^5 + 35x^4 + 38x^3 + 37x^2 + 21x + 13$ . 8. а)  $f(x) = x^3 - 3x, g(x) = \sin x$ ; б)  $f(x) = x^2 + 2x - 1, g(x) = \sqrt{x}$ ; в)  $f(x) = \log_3 x + x, g(x) = \sin x$ ; г)  $f(x) = \log_3 x, g(x) = \sin x + x$ ; д)  $f(x) = \sqrt{1 + x^2} -$

$-x^2$ ,  $g(x) = \sin x$ ; е)  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \operatorname{tg} x$ . 9. а)  $f(g(x)) \equiv 0$ ; б)  $g(f(x)) \equiv f(x)$ ; в)  $f(h(x)) \equiv f(x)$ ; г)  $h(f(x)) \equiv 0$ ; д)  $f(g(h(x))) \equiv 0$ ; е)  $h(g(f(x))) \equiv 0$ ; ё)  $g(h(f(x))) \equiv 0$ .

### § 3

1. Указание. Воспользуйтесь теоремами о непрерывности суммы, произведения, отношения и сложной функции. 2. а) 2; б)  $\frac{3}{2}$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ; г) 1; д) 2; е)  $\frac{3}{4}$ . 3. а) 1; б)  $\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{1}{8}$ ; г) 0. Указание. Примените формулу  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ , где  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  и  $a_n \neq 0$ . 4. а)  $\frac{5}{7}$ ; б) -2; в)  $\frac{5}{11}$ ; г)  $\frac{3}{2}$ ; д)  $\frac{1}{4}$ ; е) 2; ё)  $\frac{1}{2}$ ; ж) 1. 5. Указание. См. пункт 3.3.

### § 4

1. а)  $[-1; 2]$ ; б)  $[-1; -\frac{1}{3}]$ ; в)  $[1; \sqrt{5}]$ ; г)  $[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$ ; д)  $[-2; 2]$ . 2. а)  $[0; 4]$ ; б)  $[-1; 0]$ ; в)  $[1; \sqrt{3}]$ ; г)  $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$ . 3. а)  $[-\frac{1}{4}; \infty)$ ; б)  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ ; в)  $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ ; г)  $[\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty)$ ; д)  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ; е)  $[-5; 5]$ . Указание. Примените формулу  $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ , где  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . 4. а)  $1 - \sqrt{3} \approx -0,7$  с избытком; б) 0,6 с недостатком. Указание. Пусть  $f(x) = x - \frac{1}{x^2 + 1}$ . Покажите, что  $f(0,6) < 0$ ;  $f(0,7) > 0$ . 5. Указание. Воспользуйтесь теоремами о непрерывности суммы, произведения, отношения и сложной функции. 6. а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{32}$ ; в)  $\frac{1}{4}$ ; г) 3; д)  $\frac{5}{3}$ ; е) 3. Указание. Использовать формулу  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ . 7. Указание. Применить теорему о непрерывности сложной функции. 8. а) 2; б) 2; в) 2. 9. а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $\pi$ ; в)  $\frac{\pi}{6}$ ; г)  $\frac{\pi}{3}$ ; д)  $-\frac{\pi}{4}$ ; е)  $\frac{\pi}{6}$ . 10. а)  $\frac{\pi}{6}$ ; б)  $\frac{\pi}{2}$ . 11.  $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ .

### § 5

2. Например: а)  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = x$ ; б)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = 2x$ ; в)  $f(x) = 2x + |x|$ ,  $g(x) = 2x$ ,  $D = [-1; 1]$ . 4. а)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $D = [1; 2]$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $D = [1; 2]$ ; в)  $f(x) = 1 - x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $D = (0; 1)$ . 6. а)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,  $D = (0; \infty)$ ; б)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $D = (0; \infty)$ ; в)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x - 1$ ,  $D = (0; 1)$ . 7. а) Возрастает; б) убывает. 8. Указание: а)  $f(x) = x(x^2 - 1)$ , причём оба сомножителя неотрицательны и возрастают при  $x \geq 1$ ; б) оба слагаемых убывают;

в—г) см. указание к пункту а; д) пусть  $x > y \geq 1$ , тогда

$f(x) - f(y) = \frac{(x-y)(xy-1)}{xy} > 0$ ; е) см. указание к пункту а). 9. а)  $[1; 7]$ ; б)  $(-\infty; 0] \cup$

$\cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right]$ ; в)  $\left(-\infty; 1 - \frac{2\sqrt{21}}{3}\right) \cup [4; \infty)$ . 10. а)  $\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}; 2\right) \cup \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$ ; б)  $[-2; -\sqrt{2}] \cup$

$\cup \left(\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right]$ ; в)  $(-1 - \sqrt{5}; -3) \cup (\sqrt{5} - 1; 5)$ ; г)  $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4+\sqrt{6}}{5}\right) \cup (1; \sqrt{2})$ ; д)  $\left(\frac{-6+\sqrt{6}}{3}; -1\right)$ ;

е)  $(1; 2)$ ; ё)  $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$ . Указание. Перейти к новой переменной  $y = \log_2 x$ .

11.  $\left(-\infty; -\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(-2; -\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) \cup [1; \infty)$ .

## Глава 2

### § 1

1. Указание. Рассмотрите всевозможные сечения сфер плоскостями, проходящими через их центры. 2.  $\frac{R\sqrt{15}}{4}$ . 3. Пусть  $O$  — центр шара.

Искомое геометрическое место — сечение сферы плоскостью, перпендикулярной  $OA$  и проходящей через одну из точек касания. 4.  $\frac{a}{2}$ .

5.  $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ . 6.  $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ . 7.  $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ . 8.  $\sqrt{\frac{(r_1^2 + r_2^2 + h^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2}{4h^2}}$ . 9. а) 8; б) 18. Указание.

Покажите, что искомые точки — концы диаметра шара, на продолжении которого лежит точка  $A$ . 10. Указание. Пусть пересечение некоторой плоскости  $\alpha$  с данной фигурой есть круг. Рассмотрите всевозможные сечения плоскостями, проходящими через центр этого круга и перпендикулярными  $\alpha$ . 11. Указание. Проведите плоскость через центр шара и точки касания.

12. а) 5; б)  $\frac{5}{7}$ . Указание. Плоскости лежат по разные стороны от центра шара.

### § 2

1. Указание. Боковые грани призмы параллельны отрезку, соединяющему центры окружностей, описанных около оснований. 2. а)  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ ;

б)  $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$ . 3. 8, 1. 4.  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ . 5. Возможные значения тангенса этого угла:

$2\sqrt{3} + \sqrt{11}$  и  $2\sqrt{3} - \sqrt{11}$ . 6.  $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ . 7.  $\sqrt{13}$ . Указание. Центр сферы совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины рёбер  $AB$  и  $CD$ . 8.  $\frac{\sqrt{7}}{3}$ .



### § 3

1.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . 2.  $\frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ . 3.  $2\sqrt{3}$ . 4. *Указание.* Покажите, что биссекторы двугранных углов при каждом ребре основания пересекают высоту пирамиды в одной и той же точке. 5.  $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ . 6.  $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 7.  $\frac{a\sqrt{6}}{24}$ . 8.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . *Указание.* Центры данных сфер лежат на лучах, соединяющих вершины  $A$  и  $D$  с центром вписанного в пирамиду шара. 9.  $\frac{a\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}$ . 10.  $9-4\sqrt{2}$ . 11.  $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{5}$ .

### § 4

1.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ . 2.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 3. Суммы длин скрещивающихся рёбер совпадают. То есть если  $ABCD$  — данная пирамида, то  $AB + CD = AC + BD = AD + BC$ . 4.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . 5.  $\frac{7a}{18}$ . *Указание.* Рассмотрите проекцию центра сферы на плоскость  $A_1B_1C_1$ . 6.  $\frac{2a}{3+\sqrt{2}}$ . *Указание.* Центр шара лежит в плоскости, проходящей через ребро  $SA$  и середину  $BC$ . 7. Пусть  $D$  — середина  $BC$ . Возможны два случая:  $\angle A_1AB = 60^\circ$  и  $\angle A_1AD = 120^\circ$ . При этом получится либо  $\frac{8\sqrt{3}+3}{16}a$ , либо  $\frac{8\sqrt{3}-3}{16}a$ . *Указание.* Использовать равенство отрезков касательных, проведённых к сфере из одной точки. 8.  $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ . *Указание.* Покажите, что сфера касается отрезка  $SB$  в его середине. 9.  $\sqrt{7}$ . *Указание.* Покажите, что точка  $M$  лежит на ребре  $AC$ , а фигура  $BCDN$  — квадрат. 10.  $\frac{3\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3}+\sqrt{7})}$ . *Указание.* Искомый шар касается плоскостей  $AA_1B_1B$ ,  $ABC$  и плоскости, проходящей через прямую  $MN$  параллельно  $AB$ .

## Глава 3

### § 1

1. 2. 2. В каждой точке  $x = a$ , где  $f'(a) = 1$ . 3.  $-\frac{\Delta x}{a(a+\Delta x)}$ . 4.  $x = 0$ . 5. При  $t = 1$  с. 6. а)  $f'(0) = 0$ ; б)  $f'(2) = -\frac{1}{4}$ ; в)  $f'(p) = np^{n-1}$ . 7. а) 4; б)  $\frac{1}{2}$ . 8. а)  $\arctg 2$  при  $x = 1$  и  $\pi - \arctg 2$  при  $x = -1$ ; б)  $\arctg \frac{1}{2}$  при  $x = 1$ ; в)  $\arctg 3$  при  $x = -1$ . 9. а)  $y = -2x - 1$ ; б)  $y = -3x + 6$ ; в)  $y = x + 1$ ; г)  $16y = -x + 12$ . 10. Если  $S(x) =$

$= \pi x^2$ , то  $S'(x) = 2\pi x$ . 11. Если  $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ , то  $V'(x) = 4\pi x^2$ . 12.  $T'(t) = -\frac{1000}{(t+1)^2}$ . 13.  $m'(t) = 3t^2 + 3$ . 14.  $S'(t) = 1 - \cos t$ .

## § 2

1. а)  $10^x \ln 10$ ; б)  $\frac{1}{x \ln 10}$ ; в)  $e^x$ ; г)  $\frac{1}{x}$ ; д)  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ; е)  $\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ ; ё)  $ex^{e-1}$ ; ж)  $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ ; з)  $\frac{1}{2x}$ ; и)  $-9x^{-4}$ ; й)  $-\frac{1}{x^8}$ ; к)  $3^x \ln 3$ ; л)  $\cos x + \sin x$ ; м)  $5x^4 - 6x + 2$ ; н)  $-\frac{1}{x^2(1+x^2)}$ ; о)  $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ ; п)  $\frac{3(x^2-1)}{2x^2\sqrt{x}}$ . 2. Непрерывна при  $x=0$ , производной не имеет. 3. а)  $3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ; б)  $\ln x + 1$ ; в)  $e^x(x+1)$ ; г)  $\cos 2x$ ; д)  $\sin x + x \cos x$ . 4. а)  $-\frac{1}{\sin^2 x}$ ; б)  $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$ ; в)  $\frac{1-\ln x}{x^2}$ ; г)  $\frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$ ; д)  $\frac{2}{(x+1)^2}$ ; е)  $-\frac{1}{x^2}$ . 5. а)  $\sin 2x$ ; б)  $-\frac{1}{x \ln^2 x}$ ; в)  $-2\sin 2x$ ; г)  $\frac{1}{x}$ . 6.  $y = x - 1$ . 7.  $ey = x$ . 8.  $y = x$ .

## § 3

1. а)  $\frac{1}{x}$ ; б)  $\frac{2\ln x}{x}$ ; в)  $3\cos 3x$ ; г)  $\frac{2x}{\cos^2(x^2-1)}$ ; д)  $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ ; е)  $e^{\sin x} \cos x$ ; ё)  $-\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ ; ж)  $\frac{9x}{\sqrt{9x^2-16}}$ ; з)  $\frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$ ; и)  $\frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - \frac{2\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$ ; й)  $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$ ; к)  $\frac{1}{x\sqrt{\ln(x^2)}}$ . 2. Да, все  $x \neq 0$ , для которых  $\operatorname{tg} x = x \cdot (1 \pm \sqrt{2})$ . 3. При  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 4. Указание. Найдите производные данных функций в точке  $x = 1$ . 5. Указание. Примените к каждой из данных функций обратную и найдите производные получившихся суперпозиций.

## Глава 4

### § 1

1. Указание. См. содержание пункта 1.4 главы 4 и вопрос к нему. 2. 2. 3. Указание. Обратимся к рис. 8 из пункта 1.4, в силу которого  $AB^2 = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 - EF^2 = 32 - EF^2$ , и заметим, что  $0 \leq EF \leq 4$ , поэтому  $4 \leq AB \leq 4\sqrt{2}$ . 4. Указание. Данная фигура расположена на линии пересечения плоскостей, содержащих прямые  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  и перпендикулярных соответствующим плоскостям проекций. 5. а) 6; б)  $\sqrt{17}$ ; в)  $2\sqrt{14}$ . 6. Указание. См. содержание пункта 1.6 главы 4.

### § 2

1. а)  $C(2;2;0)$ ,  $B_1(2;0;2)$ ,  $C_1(2;2;2)$ ,  $D_1(0;2;2)$ ; б)  $D(3;-3;0)$ ,  $A_1(3;0;-3)$ ,  $C_1(0;-3;-3)$ ,  $D_1(3;-3;-3)$ ; в)  $B(-1;0;0)$ ,  $A_1(0;0;-1)$ ,  $B_1(-1;0;-1)$ ,  $D_1(0;-1;-1)$ ;



р)  $C(0;2;3)$ ,  $B_1(1;2;2)$ ,  $C_1(0;2;2)$ ,  $D_1(0;1;2)$ . 2. а)  $C(1;3;0)$ ,  $B_1(1;0;2)$ ,  $C_1(1;3;2)$ ,  $D_1(0;3;2)$ ; б)  $D(-2;-5;0)$ ,  $A_1(-2;0;1)$ ,  $C_1(0;-5;1)$ ,  $D_1(-2;-5;1)$ ; в)  $C(2;-1;0)$ ,  $A_1(0;0;-3)$ ,  $B_1(2;0;-3)$ ,  $D_1(0;-1;-3)$ ; р)  $D(3;-1;5)$ ,  $A_1(3;4;2)$ ,  $B_1(1;4;2)$ ,  $C_1(1;-1;2)$ . 3.  $(2;0;0)$ . 4.  $(0;4;2)$ . 5. а)  $(x;2;3)$ ; б)  $(3;y;3)$ ; в)  $(-5;-5;z)$ ;  $x, y, z \in R$ . 6. а)  $(1;y;z)$ ; б)  $(x;-2;z)$ ; в)  $(x;y;-7)$ . 7.  $(1;2;z)$ . 8.  $(0;y;z)$ . 9. а)  $\sqrt{3}$ ; б)  $\sqrt{2}$ ; в)  $\sqrt{14}$ ; р)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ . 10. а)  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ; б)  $\left(3; 4; \frac{11}{2}\right)$ ; в)  $\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{4}; \frac{13}{4}\right)$ ; р)  $\left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}; \frac{2}{3}\right)$ . 11. а)  $\left(\frac{3}{2}; -3; 3\right)$ ; б)  $\left(3; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ; в)  $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ; р)  $\left(\frac{9}{4}; -\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right)$ . 12. а)  $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ ; б)  $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$ ; в)  $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ . 13. а)  $S\left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ,  $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0\right)$ ,  $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};0\right)$ ,  $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0\right)$ ; б)  $\left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{12}\right)$ .

### § 3

1. а)  $(3;5;9)$ ; б)  $\left(-1;3;\frac{1}{2}\right)$ ; в)  $\left(\frac{29}{5};\frac{23}{6};\frac{3}{2}\right)$ ; р)  $\left(\frac{5}{2};-\frac{27}{4};\frac{11}{10}\right)$ . 2. а)  $\overline{AB} = (0;-2;-2)$ ,  $\overline{CD} = (-1;-3;-3)$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD} = (-1;-5;-5)$ ,  $\overline{AC} = (-1;2;2)$ ,  $\overline{BD} = (0;1;1)$ ,  $\overline{AC} + \overline{BD} = (-1;3;3)$ ; б)  $\overline{AB} = \left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$ ,  $\overline{CD} = \left(\frac{2}{3};\frac{11}{6};2\right)$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD} = \left(\frac{1}{6};\frac{13}{12};\frac{7}{2}\right)$ ,  $\overline{AC} = \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$ ,  $\overline{BD} = \left(\frac{1}{2};\frac{9}{4};\frac{3}{2}\right)$ ,  $\overline{AC} + \overline{BD} = \left(-\frac{1}{6};\frac{23}{12};\frac{5}{2}\right)$ ; в)  $\overline{AB} = \left(\frac{1}{12};0;-\frac{3}{5}\right)$ ,  $\overline{CD} = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{15}\right)$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD} = \left(\frac{5}{6};\frac{1}{6};-\frac{8}{15}\right)$ ,  $\overline{AC} = \left(0;-\frac{1}{6};-\frac{2}{5}\right)$ ,  $\overline{BD} = \left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{16}\right)$ ,  $\overline{AC} + \overline{BD} = \left(\frac{2}{3};-\frac{1}{6};-\frac{2}{15}\right)$ ; р)  $\overline{AB} = \left(-\frac{5}{6};\frac{3}{10};\frac{21}{10}\right)$ ,  $\overline{CD} = \left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD} = \left(-\frac{7}{3};-\frac{6}{5};\frac{29}{10}\right)$ ,  $\overline{AC} = \left(1;\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overline{BD} = \left(\frac{1}{3};\frac{7}{10};1\right)$ ,  $\overline{AC} + \overline{BD} = \left(\frac{4}{3};\frac{16}{5};\frac{1}{2}\right)$ . 3. а)  $(1;-4;-2)$ ; б)  $(1;-3;-6)$ ; в)  $(-2;1;1)$ ; р)  $(-4;2;-6)$ ; д)  $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{6};\frac{1}{5}\right)$ . 4. а)  $(2;5;7)$ ,  $(0;-3;-5)$ ,  $(0;3;5)$ ; б)  $(3;7;6)$ ,  $(1;-5;-2)$ ,  $(-1;5;2)$ ; в)  $\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{12};\frac{3}{4}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{12};\frac{5}{4}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{12};-\frac{5}{4}\right)$ ; р)  $(3;-2;-1)$ ,  $(-1;-2;-7)$ ,  $(1;2;7)$ ; д)  $\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2};-\frac{9}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{5}{2};-\frac{11}{2};\frac{9}{2}\right)$ . 5. а)  $\overline{AB} = (2;0;3)$ ,  $\overline{CD} = (-2;-6;2)$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD} = (0;-6;5)$ ,  $\overline{AB} - \overline{CD} = (4;6;1)$ ,  $\overline{CD} - \overline{AB} = (-4;-6;-1)$ ,  $\overline{AC} = (4;5;0)$ ,  $\overline{BD} = (0;-1;-1)$ ,  $\overline{AC} + \overline{BD} = (4;4;-1)$ ,  $\overline{AC} - \overline{BD} = (4;6;1)$ ,  $\overline{BD} - \overline{AC} = (-4;-6;-1)$ ; б)  $\overline{AB} = (1;2;2)$ ,  $\overline{CD} = (-1;0;1)$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD} = (0;2;3)$ ,  $\overline{AB} - \overline{CD} = (2;2;1)$ ,  $\overline{CD} - \overline{AB} = (-2;-2;-1)$ ,  $\overline{AC} = (3;2;-1)$ ,  $\overline{BD} = (1;0;-2)$ ,  $\overline{AC} + \overline{BD} = (4;2;-3)$ ,  $\overline{AC} - \overline{BD} = (2;2;1)$ ,  $\overline{BD} - \overline{AC} = (-2;-2;-1)$ ; в)  $\overline{AB} = (2;6;-4)$ ,  $\overline{CD} = (4;-3;2)$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD} = (6;3;-2)$ ,  $\overline{AB} - \overline{CD} = (-2;9;-6)$ ,



$$\begin{aligned} \overline{CD} - \overline{AB} &= (2; -9; 6), \overline{AC} = (0; 10; 0), \overline{BD} = (2; 1; 6), \overline{AC} + \overline{BD} = (2; 11; 6), \overline{AC} - \overline{BD} = \\ &= (-2; 9; -6), \overline{BD} - \overline{AC} = (2; -9; 6); \text{г) } \overline{AB} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{20}; \frac{17}{10}\right), \overline{CD} = \left(3; \frac{1}{30}; -\frac{7}{5}\right), \overline{AB} + \overline{CD} = \\ &= \left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{60}; \frac{3}{10}\right), \overline{AB} - \overline{CD} = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{12}; \frac{31}{10}\right), \overline{CD} - \overline{AB} = \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{12}; -\frac{31}{10}\right), \overline{AC} = \left(-2; -\frac{1}{12}; \frac{11}{5}\right), \\ \overline{BD} &= \left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{9}{10}\right), \overline{AC} + \overline{BD} = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{12}; \frac{13}{10}\right), \overline{AC} - \overline{BD} = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{12}; \frac{31}{10}\right), \overline{BD} - \overline{AC} = \\ &= \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{12}; -\frac{31}{10}\right). \text{ 6. а) } \overline{AN}; \text{ б) } \overline{FQ}; \text{ в) } \overline{BQ}; \text{ г) } \overline{QR}; \text{ д) } \overline{B_1R}; \text{ е) } \overline{MR}; \text{ ё) } \overline{LB_1}; \text{ ж) } \overline{CE}. \\ \text{7. а) } \overline{HK}; \text{ б) } \overline{GM}; \text{ в) } \overline{BE}; \text{ г) } \overline{CF}; \text{ д) } \overline{AD}; \text{ е) } \overline{FN}; \text{ ё) } \overline{MS}; \text{ ж) } \overline{SK}. \text{ 8. а) } \overline{AB} + \frac{3}{4} \overline{BD}; \\ \text{б) } \frac{1}{4} \overline{AB} + \overline{AD}. \text{ 9. } \overline{CN} = \frac{1}{3}(\overline{CA} + \overline{CS}), \overline{CM} = \frac{1}{3}(\overline{CA} + \overline{CB} + \overline{CS}). \text{ 10. } \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AF}, \\ \overline{BD} = \overline{AB} + 2\overline{AF}. \text{ 11. } \overline{BD} = \overline{BM} - \overline{MC}, \overline{AM} = \overline{BM} + 2\overline{MC}. \text{ 12. } \overline{AA_1} = \overline{DA_1} + \overline{DC_1} - \overline{DB_1}, \\ \overline{AC} = \overline{DC_1} - \overline{DA_1}, \overline{BD} = \overline{DA_1} + \overline{DC_1} - 2\overline{DB_1}. \end{aligned}$$

#### §4

3. Указание. Прямые  $MN$  и  $BC$  параллельны одной и той же средней линии треугольника  $ABC$ . 4.  $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{SB} - \overline{SA}$ ,  $\overline{BN} = \frac{1}{2} \overline{SC} - \overline{SB}$ ,  $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{SC} - \frac{1}{2} \overline{SB}$ . 5.  $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{CC_1}) - \overline{CA}$ ,  $\overline{A_1M} = \frac{1}{2}(\overline{CB} - \overline{CC_1}) - \overline{CA}$ . 6. Указание. Сравните длины и направления векторов  $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$  и  $\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$ . 7. а)  $x = \frac{83}{13}$ ,  $y = -\frac{2}{13}$ ; б)  $x = 2$ ,  $y = -1$ ; в)  $x = 2$ ,  $y = \frac{1}{2}$ ; г)  $x = \frac{3}{4}$ ,  $y = \frac{25}{4}$ . 8. а)  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$ ; б)  $x = 0$ ; в)  $x_1 = \frac{11}{4}$ ,  $x_2 = 1$ ; г)  $x = -3$ . 9. а)  $x = 0$ ,  $y = -2$ ; б)  $x = 5$ ,  $y = \frac{7}{3}$ ; в)  $x = 4$ ,  $y = 3$ ; г)  $x = \frac{9}{8}$ ,  $y = -\frac{5}{3}$ . 10. а)  $\left(\frac{5}{\sqrt{43}}; \frac{3}{\sqrt{43}}; \frac{3}{\sqrt{43}}\right)$ ; б)  $\left(\frac{3}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}; -\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$ ; в)  $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; 0\right)$ ; г)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ . 11.  $x = t + 1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ . 12. а)  $x = 2$ ,  $y = t + 1$ ,  $z = 2$ ; б)  $x = 1$ ,  $y = 3t + 2$ ,  $z = t$ ; в)  $x = 1$ ,  $2y = 5t$ ,  $2z = t + 2$ ; г)  $2x = t + 4$ ,  $2y = -t$ ,  $6z = 36 - 11t$ . 13. а)  $\overline{AM} = \frac{2}{3} \overline{AB} + \overline{AD}$ ,  $\overline{AN} = \overline{AB} + \frac{3}{4} \overline{AD}$ ,  $\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{AD} + \frac{4}{5} \overline{AA_1}$ ; б)  $\overline{B_1M} = \overline{AD} - \overline{AA_1} - \frac{1}{3} \overline{AB}$ ,  $\overline{D_1N} = \overline{AB} - \overline{AA_1} - \frac{1}{4} \overline{AD}$ ,  $\overline{DK} = \overline{AB} - \frac{4}{5} \overline{AA_1}$ ; в)  $\overline{MN} = \frac{1}{3} \overline{AB} - \frac{1}{4} \overline{AD}$ ,  $\overline{NK} = \frac{1}{4} \overline{AD} + \frac{4}{5} \overline{AA_1}$ ,  $\overline{KM} = -\frac{4}{5} \overline{AA_1} - \frac{1}{3} \overline{AB}$ . 14.  $\overline{MN} = \frac{2}{3} \overline{a} - \frac{3}{4} \overline{b}$ ,  $\overline{NK} = \frac{11}{20} \overline{b} - \frac{1}{5} \overline{a} + \frac{1}{5} \overline{c}$ ,  $\overline{KM} = \frac{1}{5} \overline{b} - \frac{7}{15} \overline{a} - \frac{1}{5} \overline{c}$ .

## § 5

3–5. *Указание.* Для каждого из данных свободных векторов возьмите по одному представителю и покажите, что необходимое утверждение справедливо для этих представителей. 6. а)  $\bar{c} + \frac{3}{2}(\bar{b} - \bar{a})$ ; б)  $-\frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c})$ ; в)  $\frac{3}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c} - 3\bar{a}$ ; г)  $\frac{3}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b} - \bar{c}$ ; д)  $\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$ ; е)  $\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{c})$ .

## Глава 5

### § 1

1. а)  $6(x+1)^5$ ,  $-6$ ; б)  $3\cos 3x$ ,  $-3$ ; в)  $-2e^{-2x}$ ,  $-2e^{-8}$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $1$ ; д)  $\frac{x}{\sqrt{x^5+9}}$ ,  $\frac{4}{5}$ ; е)  $\frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$ ,  $\frac{\sqrt{15}}{10}$ ; ё)  $-2\sin 4x$ ,  $-\sqrt{3}$ ; ж)  $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $-1$ ; з)  $\frac{2}{1-x^2}$ ,  $\frac{8}{3}$ ; и)  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ,  $\frac{4}{5}$ . 2. а)  $y = 4x - 12$ ; б)  $y = 6x + 2$ ; в)  $y = 3x - 4$ ; г)  $x + 4y = 3$ ; д)  $3y - x = 6$ ; е)  $y = -2x - 1$ ; ё)  $y = 1$ ; ж)  $y = 4\ln 2 \cdot (x - 2) + 4$ . 3. а)  $f(x) \approx 4x - 4$  с точностью  $0,5$ ; б)  $f(x) \approx x$  с точностью  $0,0005$ ; в)  $f(x) \approx \frac{x}{12} - \frac{4}{3}$  с точностью  $0,0125$ ; г)  $f(x) \approx x$  с точностью  $0,012$ . 4. а) Возрастает на  $[1; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; 1]$ ; б) возрастает на  $(-\infty; \frac{1}{4}]$ , убывает на  $[\frac{1}{4}; \infty)$ ; в) возрастает на  $[-\frac{7}{6}; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; -\frac{7}{6}]$ ; г) возрастает на  $(-\infty; -2)$  и на  $(-2; 0]$ , убывает на  $[0; 2)$  и на  $(2; \infty)$ ; д) возрастает на  $(-\infty; \frac{1}{2}]$ , убывает на  $[\frac{1}{2}; \infty)$ ; е) возрастает на  $(-\infty; 1)$  и на  $(1; \frac{3}{2}]$ , убывает на  $[\frac{3}{2}; 2)$  и на  $(2; \infty)$ . 5. а) возрастает на  $[2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ , убывает на  $[2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$ ; б) возрастает на  $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$ , убывает на  $[2k\pi; (2k+1)\pi]$ ; в) возрастает на  $(k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2})$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

### § 2

1. а)  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ ; б)  $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$ ; в)  $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$ ; г)  $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$ ; д)  $[-\frac{3}{2}; \infty)$ ; е)  $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$ . 2. а)  $(-\infty; -1] \cup (3; \infty)$ ; б)  $[-1; 0) \cup (0; \infty)$ ; в)  $(-\infty; 1] \cup (2; \infty)$ ; г)  $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; \infty)$ ; д)  $(-2; -1] \cup [1; \infty)$ ; е)  $[-2; 0] \cup [2; \infty)$ . 3. а)  $(-\infty; -2) \cup (0; \infty)$ ; б)  $(1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$ ; в)  $(0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 2)$ ; г)  $(-1; 0) \cup (0; 2)$ ; д)  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \cup (1; \infty)$ ; е)  $(\frac{1}{3}; \infty)$ . 4. а)  $0$ ;

-1; -2; б)  $\sqrt{2}; -\sqrt{2}$ ; в)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ; г) 1;  $-\frac{1}{3}$ ; д) 0; 3; е) -1. 5. а)  $f(x) > 0$  на  $(-2; -1) \cup (0; \infty)$ ,  $f(x) < 0$  на  $(-\infty; -2) \cup (-1; 0)$ ; б)  $f(x) > 0$  на  $(-1; 1) \cup (2; \infty)$ ,  $f(x) < 0$  на  $(-\infty; -1) \cup (1; 2)$ ; в)  $f(x) > 0$  на  $(-2; -1) \cup (2; \infty)$ ,  $f(x) < 0$  на  $(-\infty; -2) \cup (-1; 2)$ ; г)  $f(x) > 0$  на  $(-\infty; -3) \cup (-2; 0) \cup (1; \infty)$ ,  $f(x) < 0$  на  $(-3; -2)$  и на  $(0; 1)$ ; д)  $f(x) > 0$  на  $(-1; 1) \cup (2; \infty)$ ,  $f(x) < 0$  на  $(-\infty; -1) \cup (1; 2)$ ; е)  $f(x) > 0$  на  $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ,  $f(x) < 0$  на  $(-1; -1)$ ; ё)  $f(x) > 0$  на  $(4; \infty)$ ,  $f(x) < 0$  на  $[0; 4]$ ; ж)  $f(x) > 0$  на  $(2; \infty)$ ,  $f(x) < 0$  на  $[-2; 2]$ . 6. а) Возрастает на  $(-\infty; 0]$  и на  $[\frac{2}{3}; \infty)$ , убывает на  $[0; \frac{2}{3}]$ ; локальный максимум при  $x = 0$ , локальный минимум при  $x = \frac{2}{3}$ ; б) возрастает на  $(-\infty; -1]$  и на  $[1; \infty)$ , убывает на  $[-1; 0]$  и на  $(0; 1]$ ; локальный максимум при  $x = -1$ , локальный минимум при  $x = 1$ ; в) возрастает на  $(-\infty; 0]$  и на  $[4; \infty)$ , убывает на  $[0; 2]$  и на  $(2; 4]$ ; локальный максимум при  $x = 0$ , локальный минимум при  $x = 4$ ; г) возрастает на  $[\frac{2}{3}; \infty)$ , убывает на  $[0; \frac{2}{3}]$ ; локальный максимум при  $x = 0$ , локальный минимум при  $x = \frac{2}{3}$ ; д) возрастает на  $[-1; 0]$  и на  $[1; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; -1]$  и на  $[0; 1]$ ; локальный максимум при  $x = 0$ , локальные минимумы при  $x = -1$  и  $x = 1$ ; е) возрастает на  $[4; \infty)$ , убывает на  $(0; 4]$ ; локальный минимум при  $x = 4$ . 7. Асимптоты: а)  $x = -1, y = 0$ ; б)  $x = \frac{1}{2}, y = 0$ ; в)  $x = 1, y = 1$ ; г)  $x = -2, y = 1$ ; д)  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ ; е)  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$ . 8. а)  $y = x - 2$ ; б)  $y = x + 2$ ; в)  $y = x - 2$ ; г)  $y = x - 2$ ; д)  $y = x + 2$ ; е)  $y = x - 5$ .

### § 3

1. а) Нули функции: -2, 0, 2; экстремумы:  $x_{\max} = -\frac{2}{\sqrt{3}}, x_{\min} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ; б) нули функции: -1, 2; экстремумы:  $x_{\max} = 0, x_{\min} = 2$ ; в) нули функции: -1, 0; экстремумы:  $x_{\max} = -\frac{2}{3}, x_{\min} = 0$ ; г) нули функции: -1, 0, 1; экстремумы:  $x_{\max} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; д) нули функции  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ; экстремумы:  $x_{\max} = -\frac{1}{2}, x_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ; е) нули: 0, 1; экстремумы:  $x_{\max} = 0, x_{\min} = \frac{1}{3}$ ; ё) нули функции:  $2 - \sqrt{7}, 0, 2 + \sqrt{7}$ ; экстремумы:  $x_{\max} = -\frac{1}{3}, x_{\min} = 3$ ; ж) нули функции: -2, 1; экстремумы:  $x_{\max} = -2, x_{\min} = 0$ . 2. а) Функция нечётная; асимптоты:  $x = 0, y = x$ ; экстремумы:  $x_{\max} = -2, x_{\min} = 2$ ; б) функция нечётная; асимптота  $y = 0$ ; экстремумы:  $x_{\max} = 1, x_{\min} = -1$ ; в) асимптоты:  $x = 2, y = x + 4$ ; экстре-



мум  $x_{\min} = 6$ ; г) асимптоты:  $x = -1$ ,  $y = x$ ; экстремумы:  $x_{\max} = -2$ ,  $x_{\min} = 0$ ; при  $x = 1$  функция не определена; д) функция нечётная; асимптоты:  $x = -\sqrt{3}$ ,  $x = \sqrt{3}$ ,  $y = x$ ; экстремумы:  $x_{\max} = -3$ ,  $x_{\min} = 3$ ; е) асимптот нет; экстремумы:  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = \frac{1}{3}$ ; ё) асимптоты:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; точка максимума  $x_{\max} = 4$ ; ж) асимптоты:  $x = -1$ ,  $y = -3$ , экстремумы:  $x_{\max} = -\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ ,  $x_{\min} = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ . 3. а) Чётная функция, равна нулю при  $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$ , экстремумы:  $x_{\min} = 0$ ,  $x_{\min} = \pm 1$ ; б) асимптоты:  $x = -1$ ,  $y = x - 3$ , экстремумы:  $x_{\max} = -4$ ,  $x_{\min} = 0$ ; в) чётная функция, равна нулю при  $x = \pm\sqrt{2}$ , имеет горизонтальную асимптоту  $y = 0$ , экстремумы:  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$ ; г) нули:  $x = \pm 1$ ; асимптоты:  $x = 2$ ,  $x = 3$ ,  $y = 1$ ; экстремумы:  $x_{\min} = \frac{7+2\sqrt{6}}{5}$ ,  $x_{\min} = \frac{7-2\sqrt{6}}{5}$ ; д) асимптоты:  $y = \frac{2}{3}x$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $y = -\frac{10}{3}x$  при  $x \rightarrow -\infty$ ; экстремумы:  $x_{\min} = 1$ ; е) область определения  $(-\infty; -2] \cup [0; \infty)$ ; нули:  $x = -\frac{8}{3}$  и  $x = 0$ ; асимптоты:  $y = \frac{3}{2}x + 1$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $y = -\frac{1}{2}x - 1$  при  $x \rightarrow -\infty$ ; экстремумы:  $x_{\min} = -3$ ,  $x_{\min} = 0$ .

#### § 4

1. а) 1; -8; б) 3; 1; в)  $3\frac{1}{3}$ ; -13; г) 7; -5. 2. а) -3; -19; б) 1; -19; в) 1; -3; г) 1; -3. 3. а)  $1\frac{3}{2}$ ; -9; б)  $\frac{1}{3}$ ;  $-\frac{4}{3}$ ; в)  $9\frac{1}{3}$ ; 0; г)  $\frac{1}{3}$ ; -9. 4. 15 м  $\times$  15 м. 5. 15 м  $\times$  30 м. 6. Прямоугольный треугольник с катетами по 30 м. *Указание.* Воспользуйтесь формулой  $S_{\Delta} = \frac{1}{2}abs\sin\alpha$ . 7. Вырезать уголки со стороной  $1\frac{2}{3}$  см. 8. Тремя способами, взяв одну из средних линий за сторону прямоугольника. 9. Стороны прямоугольника 3,5 см и  $3\sqrt{7}$ . *Указание.* Одна из сторон прямоугольника должна касаться меньшей окружности, а противоположная сторона является хордой большей окружности. 10.  $60^\circ$ . 11.  $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ . *Указание.* Пусть  $ABCD$  — прямоугольник со сторонами  $AB = a$ ,  $CD = b$ . Рассмотрите всевозможные прямоугольные треугольники, катеты которых являются продолжениями сторон  $AB$  и  $AD$ , а гипотенузы проходят через точку  $C$ . Наименьшая из этих гипотенуз и есть искомая длина.

## Глава 6

### § 1

1. а) 0; б) 9; в) 119; г) 0. 2. а) 0; б) 8; в) 4; г) 4; д) 0; е) -4. 3. а) 16; б) -4; в) 8; г)  $12\frac{1}{2}$ ; д) 16; е)  $1\frac{1}{2}$ . 4. а)  $x = 4, y = -1$ ; б)  $\left(-\frac{6}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{2}{7}\right)$ ; в)  $(-2; -2; 1)$ ; г)  $(-2; 2; -4)$ . 5.  $|\bar{a} + \bar{b}| = 7, |\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{41}$ . 6.  $\sqrt{246}$ . 7. 7. 8. а)  $\arccos \sqrt{\frac{5}{21}}$ ; б)  $\arccos \frac{7}{\sqrt{111}}$ ; в)  $\arccos \frac{11}{15}$ ; г)  $\arccos \left(-\frac{3\sqrt{11}}{11}\right)$ ; д)  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$ . 9. а) -3; б) 7; в) 19; г) -41; д) -19. 10.  $x = 1$ . 11.  $\arccos \left(-\frac{5\sqrt{13}}{26}\right)$ . 12. а)  $AB = 2\sqrt{17}, AC = BC = 5, \angle A = \angle B = \arccos \frac{\sqrt{17}}{5}, \angle C = \arccos \left(-\frac{9}{25}\right)$ ; б)  $2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{161}}{2}, \frac{\sqrt{161}}{2}$ . 13. а)  $\arccos \sqrt{\frac{5}{21}}$ ; б)  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{89}}{9}\right)$ ; в)  $\arccos \left(-\frac{22}{9\sqrt{10}}\right)$ . 14.  $x = \frac{31}{12}, y = -\frac{41}{12}$ . 15.  $\left(0; \frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$  и  $\left(0; -\frac{\sqrt{10}}{5}; -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$ . 16.  $(2; 2; -1)$  и  $(-2; -2; 1)$ . 17.  $\alpha = 17$ . 18.  $\alpha = 10$ . 19.  $\alpha = 2$ . 20. а)  $\arccos \frac{4}{5}$ ; б)  $\arccos \frac{9}{10}$ . 21. а)  $C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), D\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right), M\left(\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right), Q\left(\frac{7}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right), P\left(\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right), N\left(\frac{7}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ .

### § 2

1. а)  $x = 0$ ; б)  $x + y + 2z = 1$ ; в)  $2x - 4y + z = 5$ ; г)  $x + 2y - 2z = 6$ . 2. а)  $x + y + z + 53 = 0$ ; б)  $x + 2y - z = 6$ ; в)  $3x + 4y + 2z = 29$ ; г)  $2x - 12y - 8z + 53 = 0$ . 3. а)  $x + y + z = 3$ ; б)  $2x + y - z = 5$ ; в)  $3x + 3y - 2z = 1$ ; г)  $2x - y + z = 1$ . 4. а)  $2x - y + 4z = 5$ ; б)  $x + y + 2z + 1 = 0$ ; в)  $x + y + z = 1$ ; г)  $x - 2y + z = -2$ . 5. а)  $5x + 2y + z = 8$ ; б)  $3x + y + 2z = 1$ ; в)  $x + y + z = 1$ ; г)  $y - z = 3$ . 6. а)  $x + y + z = 1$ ; б)  $15x + 10y + 6z = 30$ ; в)  $x - 2y - z = -2$ ; г)  $2x + 4y - z = -4$ . 7. а)  $2x + 3y - z = 2$ ; б)  $3x - 4y - 7z = -8$ .

### § 3

1.  $\cos \angle A = \cos \angle B = \frac{\sqrt{17}}{5}, \cos \angle C = -\frac{9}{25}$ . 2.  $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ . 3.  $\frac{1}{2}$ . 4. Указание. Используйте равенство  $|\bar{x}|^2 = \bar{x} \cdot \bar{x}$ . 5.  $\arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ . Указание. Найдите отношение длин векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . 6.  $\sqrt{6}$ . 7. 6. 8.  $\arccos \frac{1}{6}$ . 9.  $\frac{\pi}{3}$ . 10.  $\arccos \frac{11}{16}$ . 11.  $\arccos \frac{13}{20}$ . 12.  $\arccos \frac{47}{81}$ .

# § 4

1. а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{\pi}{3}$ ; в)  $\arccos \frac{4}{\sqrt{145}}$ ; г) параллельны. 2.  $2x + y + 2z = 3$ . 3.  $m = -1$ .  
 4.  $\frac{\pi}{6}$ . 5.  $\arccos \frac{4}{\sqrt{29}}$ . 6.  $\arccos \frac{6}{7}$ . 7.  $\arccos \frac{1}{5}$ . 8.  $\arccos \frac{1}{17}$ . 9.  $\arccos \sqrt{\frac{3}{31}}$ .  
 10.  $\arccos \frac{3}{\sqrt{61}}$ . 11.  $1 : \sqrt{3}$ . 12.  $\arccos \sqrt{\frac{5}{21}}$ . 13.  $1 : 2$ . *Указание.* Покажите, что основанием высоты пирамиды является середина гипотенузы треугольника  $ABC$ . 14.  $\arccos \sqrt{\frac{5}{21}}$ . 15.  $2 : 3$ .

# § 5

1. 0. 2.  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{13}$ . 3.  $\frac{\pi}{3}$ . 4.  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}$ . 5. 10. 6.  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{9}$ . 7.  $\arcsin \frac{2}{\sqrt{17}}$ .  
 8.  $1 : 2$ .

# § 6

1. 3. 2. 2. 3.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ . 4.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ . 5. 1. 6.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . 7.  $\frac{a}{\sqrt{3}}$ . 8.  $\frac{a}{\sqrt{5}}$ . 9.  $\sqrt{\frac{5}{17}}$ . 10.  $\frac{2}{\sqrt{41}}$ .  
 11.  $\frac{7}{2}$ . *Указание.* Длина проекции отрезка на плоскость равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла между прямой, на которой лежит отрезок, и плоскостью. 12.  $a\sqrt{2}$ .

# § 7

1. а)  $(-3; -4; -5)$ ,  $R = \sqrt{2}$ ; б)  $(\sqrt{2}; -\sqrt{3}; \sqrt{5})$ ,  $R = \sqrt{3}$ ; в)  $(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} - 1; -2\sqrt{2} - 1)$ ,  $R = 2\sqrt{2}$ . 2. Сфера данного радиуса с центром в данной точке. 3. а)  $(x - 4)^2 + (x + 3)^2 + (z + 1)^2 = 26$ ; б)  $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = -2$ ;  
 в)  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{31}{4}$ ; г)  $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$ .  
 4.  $\frac{9}{8}$ . 5.  $\frac{\sqrt{33}}{4}$ . 6.  $\frac{5 - \sqrt{7}}{4}$ . 7.  $\frac{\sqrt{97}}{2}$ .

# Глава 7

# § 1

- 1–2. *Указание.*  $F'(x) = f(x)$ . 3.  $e^x - e$ . 4. а)  $\frac{x^4}{4} - 3$ ; б)  $5 - \frac{1}{2x^2}$ ;  
 в)  $\sin x - 1$ . 5. *Указание.* Производная функция в правой части равенства должна равняться функции, стоящей под знаком интеграла.



## § 2

1. а)  $\frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + C$ ; б)  $\frac{1}{2}kx^2 + ax + C$ ; в)  $\frac{1}{3}mx^3 + \frac{1}{2}nx^2 + kx + C$ ;  
 г)  $\frac{1}{3}\sin(3x-2) + C$ ; д)  $-4\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{5}\sin 5x + C$ ; е)  $\frac{1}{22}(2x-1)^{11} + C$ ; ё)  $5\sqrt{2x+3} + C$ ;  
 ж)  $C - \frac{3}{5}\operatorname{ctg} 5x$ ; з)  $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$ ; и)  $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ . 2. а)  $x^{-1} - 2x^2 + C$ ; б)  $\frac{3}{5}\operatorname{tg} 5x + C$ ;  
 в)  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x + C$ ; г)  $(1-x)^{-1} + C$ ; д)  $\frac{1}{3\ln 2}2^{3x} + C$ ; е)  $C - \frac{1}{\ln 2}2^{\cos x}$ ;  
 ё)  $C - \cos(\ln t)$ ; ж)  $C - 2\sqrt{\cos x}$ ; з)  $\ln|\ln x| + C$ . 3. а)  $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ ; б)  $\frac{1}{3}x^3 + x$ ;  
 в)  $1 - \cos(x+1)$ ; г)  $1 - \operatorname{ctg} x$ . 4. а)  $\frac{1}{2}x^4 + x^{-1} + C$ ; б)  $2\sqrt{x+1} + C$ ; в)  $x + \frac{1}{3}\cos 3x + C$ ;  
 г)  $\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$ ; д)  $3\operatorname{tg}\frac{x}{3} + C$ ; е)  $C - \frac{1}{\ln x}$ ; ё)  $C$ ; ж)  $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ .

## § 3

1. а)  $y = \sin x - \cos x + C$ ; б)  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + C$ . 2.  $y_1 = 2x + C_1$ ,  $y_2 = 3x + C_2$ .  
 3. а)  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 + 113$ ; б)  $y = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}$ ; в)  $y = 3 - x^{-1}$ . 4. а)  $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ ;  
 б)  $y_1 = \sqrt{3x^2 + C_1}$ ,  $y_2 = -\sqrt{3x^2 + C_2}$ ; в)  $y_1 = \sqrt{x^2 + 2x + C_1}$ ,  $y_2 = -\sqrt{x^2 + 2x + C_2}$ .  
 5. а)  $y = (x+1)^2$ ; б)  $y = e^{\frac{1}{2}\cos 2x}$ ; в)  $y = x^2$ . 6.  $3200\frac{\sqrt{3}}{g} \approx 560$  м. 7.  $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ . 8.  $45^\circ$ .  
 9.  $y = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ . 10.  $y = Ce^x$ . Указание. Решите уравнение  $y'(x) = y(x)$ .  
 11.  $y = C\sqrt{|x|}$ . Указание. Решите уравнение  $2x \cdot y'(x) = y(x)$ . 12.  $\frac{10\lg 2}{4\lg 2 - 1}$  мин.  
 Указание. См. пункт 3.5. 13.  $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{1600}}$ , где  $t$  — число прошедших лет.

## Глава 8

### § 1

5. а) Например, шар радиуса  $\frac{1}{10}$  с центром в точке  $K$ ; б) например, шар радиуса  $\frac{1}{4}$  с центром в точке  $L$ ; в) каждый шар радиуса  $r < 1$  с центром  $N$  содержит точку  $\left(1 - \frac{r}{2}; \frac{4}{5}; \frac{1}{3}\right)$ , принадлежащую данному множеству, и не принадлежащую ему точку  $\left(1 + \frac{r}{2}; \frac{4}{5}; \frac{1}{3}\right)$ . Внутренность  $\Phi$  — множество

всех точек  $(x; y; z)$  таких, что  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ ,  $0 < z < 1$ ; граница  $\Phi$  — множество всех точек, принадлежащих граням куба; внешность  $\Phi$  — все точки пространства, не принадлежащие данному кубу. 8. Объединение всех концов указанных отрезков и точки  $\{0\}$  — начала координат.

## § 2

1. *Указание.* Рассмотрите замкнутый шар радиуса  $d$  с центром в произвольной точке данного множества. 2. *Указание.* Если множество ограничено, то оно содержится в некотором шаре радиуса  $R$ , тогда расстояние между любыми точками этого множества не больше диаметра шара. Обратное утверждение вытекает из результата предыдущей задачи. 3. *Указание.* Возьмите шар, содержащий данное множество, и опишите куб вокруг этого шара. 4. *Указание.* См. задачу 2. 5. *Указание.* Рассмотрите круг радиуса  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  с центром в середине отрезка  $AB$ . 6. *Указание.* См. предыдущую задачу. 7. *Указание.* Рассмотрите шаровые сегменты, отсекаемые от данных шаров плоскостью, которая перпендикулярна отрезку, соединяющему центры шаров, и проходит через его середину. 8. *Указание.* Данная фигура — часть шара без шаровых сегментов, отсекаемых плоскостями боковых граней тетраэдра.

## § 3

1. а) Если все точки лежат на одной прямой; б) если одна из точек принадлежит замкнутому треугольнику с вершинами в трёх других точках; в) во всех остальных случаях. 2. а–в) Если точки лежат в одной плоскости, то задача сводится к предыдущей; г) когда точки не лежат в одной плоскости. 3. Если какие-нибудь четыре данные точки лежат в одной плоскости, то получится четырёхугольная пирамида с 5 гранями и 8 рёбрами. В противном случае получится 6 треугольных граней и 9 рёбер. 4. *Указание.* Получившаяся фигура — пересечение данного квадрата и описанного вокруг него открытого круга. 5. *Указание.* Получившаяся фигура — пересечение замкнутого круга и открытых полуплоскостей, границами которых являются касательные, проходящие через удалённые точки границы круга. 6. *Указание.* а) См. предыдущую задачу; б) удалённые точки поверхности шара принадлежат границе фигуры  $\Phi$ ; в) рассмотрите плоскость, проходящую через центр шара и одну из удалённых точек на его поверхности. 7. *Указание.* а) Рассмотрите пересечение всех треугольников с вершиной  $C$ , две стороны которых лежат на сторонах угла  $ACB$ , а третья касается дуги  $AB$ ; б) удалённая точка  $A$  принадлежит границе фигуры  $\Phi$ ; в) покажите, что проекция фигуры  $\Phi \cup \{A\}$  является замкнутым промежутком, а затем убедитесь, что при удалении точки  $A$  эта проекция не меняется.



8. Можно отделить все точки, за исключением точек замкнутого тетраэдра  $SABC$ . 9. *Указание.* Система состоит из четырёх неравенств, каждое из которых определяет открытое полупространство, ограниченное одной из плоскостей граней тетраэдра, и где находится противоположная этой грани вершина.

## § 4

1. *Указание.* Соедините внутреннюю точку многоугольника со всеми его вершинами прямолинейными отрезками. 2. *Указание.* Рассмотрите все треугольники, стороны которых являются хордами данной окружности. 3. Например, можно взять куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и удалить из него тетраэдры  $A_1 B_1 C_1 B$  и  $A_1 C_1 D_1 D$ . 4. Можно взять две призмы с одинаковыми пятиугольными основаниями и «приставить» одну к другой, совместив основания. 5.  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . 6. *Указание.* Центр сферы лежит на прямой, проходящей через центры (точки пересечения медиан) оснований пирамиды. 7.  $\frac{3\sqrt{101}}{5}$ . 8.  $\arctg \frac{2}{3}$ .

## Глава 9

### § 1

1. *Указание.* Подберите  $n$  так, чтобы  $2^n > 100$ , и рассмотрите прямоугольники с основанием  $AD$ , состоящие из квадратов ранга  $n$ . 2. *Указание.* Рассмотрите элементарные фигуры ранга  $n$ , где  $2^n > 10$ . 3. *Указание.* Покажите, что отрезок  $AB$  пересекает  $2^{n+2}$  квадрата ранга  $n$ . 4. *Указание.* Отрезок  $AB$  можно покрыть  $2^{n+1}$  квадратами ранга  $n$ . 5. *Указание.* Разделите трапецию вертикальными прямыми на два треугольника и прямоугольник, а затем воспользуйтесь решением предыдущей задачи.

### § 2

1.  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ . 2. 4,  $2\sqrt{10}$ ,  $2\sqrt{10}$ . *Указание.* Пусть  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Найдите длины сторон  $AO$ ,  $CO$  и площадь треугольника  $ACO$ . Это позволит определить угол  $AOC$ , а затем и стороны треугольника  $ABC$ . 3.  $l^2$ . 4.  $\frac{|m-n|}{2(m+n)} \cdot S$ . 5.  $4\sqrt{3}$ . 6.  $\sqrt{2}$ . 7. 6,5. *Указание.* Покажите, что обе части ромба являются трапециями, и найдите отношения их оснований. 8.  $\frac{a\sqrt{7}}{6}$ . *Указание.* Сумма расстояний от любой точки равнобедренного треугольника до его сторон равна высоте. 9.  $S_{ABE} : S_{BCDE} = 8 : 7$ . *Указание.* При продолжении боковых сторон трапеции до пересечения



получится равнобедренный треугольник. Выразите  $S_{ABE}$  и  $S_{BCDE}$  через площадь этого треугольника. **10.**  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . *Указание.* Пусть  $O_1$  и  $O_2$  соответственно центры большой и малой окружностей,  $A$  и  $B$  — точки касания с прямой  $l$ , а  $C$  — ближайшая к  $l$  точка пересечения. Воспользуйтесь тем, что  $O_1ABO_2$  — прямоугольная трапеция с острым углом в  $45^\circ$ , а треугольник  $O_1CO_2$  — прямоугольный. **11.**  $R^2 \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ . *Указание.* Заметьте, что  $BC = R\sqrt{2}$ , найдите отношение сторон  $AB$  и  $AC$  по теореме о касательной и секущей, проведённых из одной точки, а затем воспользуйтесь теоремой косинусов. **12.**  $\frac{\sqrt{13}}{3}$ . *Указание.* Понятно, что  $AN \cdot MN = NC \cdot ND$  или  $AN : NC = ND : MN$ . Пусть  $NC = x$ . Покажите, что  $AN : NC = \frac{2-x}{x}$ ,  $ND : MN = \frac{x}{1-x}$  и найдите  $x$ . **13.**  $\frac{75\sqrt{3}}{4}$  и  $16\sqrt{3}$ . **14.** 4:3. *Указание.* Пусть  $S$  — площадь трапеции. Выразите через  $S$  площади треугольников  $MCN$  и  $MDN$ . **15.** 2,8. **16.** 2. *Указание.* Точка  $E$  лежит на окружности с диаметром  $BC$ . **17.**  $3\sqrt{3}$ . *Указание.* Найдите отношение площадей треугольников  $ABC$  и  $ACD$ . **18.**  $7 + \sqrt{17}$ . *Указание.* Через точку  $M$  проведите прямую, параллельную биссектрисе угла  $C$ , и воспользуйтесь теоремой Фалеса.

### § 3

1. а) 6; б) 6. 2. а)  $\frac{1}{3}(x-1)^3 + C$ ; б)  $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$ ; в)  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ ; г)  $\ln|x-1| + C$ ;  
 д)  $x - \ln|x+2| + C$ ; е)  $\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3} + C$ ; ё)  $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$ ; ж)  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$ ;  
 з)  $\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$ ; и)  $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$ ; й)  $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctg(x\sqrt{2}) + C$ . 3. а)  $\frac{7}{3}$ ;  
 б) 60; в) 0; г)  $\frac{2}{3}$ ; д)  $\frac{1}{2}$ ; е)  $\frac{3}{8}$ ; ё)  $\frac{2}{3}$ ; ж) 2. 4. а)  $\frac{26}{3}$ ; б)  $\frac{8}{3}$ ; в) 3; г) 64; д)  $\frac{14}{3}$ ; е)  $\frac{3}{10}$ ;  
 ё) 1; ж)  $2\sqrt{2}$ ; з) 4; и)  $\pi$ ; й)  $\ln 10$ ; к)  $1 + \ln \frac{3}{2}$ ; л)  $4 + 2\ln 5$ ; м)  $1 - 3\ln \frac{5}{4}$ . 5. а)  $\frac{\pi}{2} - 1$ ;  
 б)  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ . *Указание.* См. содержание пункта 3.10. 6. а)  $\frac{1}{6}$ ; б)  $\frac{9}{2}$ ; в)  $\frac{32}{3}$ ;  
 г)  $\frac{1}{24}$ ; д)  $\frac{4}{3}$ ; е)  $\frac{125}{54}$ ; ё)  $\frac{1}{6}$ ; ж)  $\frac{2}{3}$ . 7. а)  $\frac{2}{\pi} + \frac{2}{3}$ ; б)  $3\ln \frac{2}{3}$ ; в)  $\frac{1}{6}\left(1 + \ln \frac{3}{8}\right)$ ; г)  $9 - 8\ln 2$ .  
 8.  $\frac{1}{3}$ . 9.  $(3\pi + 2) : (9\pi - 2)$ . *Указание.* Пусть  $O$  — начало координат,  $A$  и  $B$  — точки пересечения параболы и окружности. Проверьте, что угол  $AOB$  — прямой. При этом меньшая из искомых частей равна объединению четверти круга и области, ограниченной данной параболой и графиком

функции  $y = |x|$ . 10.  $\frac{27}{5}$ . Указание. Покажите, что графики функций  $y = \sqrt{5x+1}$  и  $y = x^2 - 2x + 1$  пересекаются при  $x = 0$  и  $x = 3$ . 11. а)  $\frac{1}{5}$ ; б)  $\frac{1}{6}$ ; в)  $\frac{2}{3}$ ; г)  $\frac{2}{\pi}$ .

#### § 4

1. Указание. Используйте приближения чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  сверху и снизу дробями вида  $\frac{m}{2^n}$ . 2. а)  $8\pi$ ; б)  $\pi$ ; в)  $\frac{9\pi}{10}$ ; г)  $8\pi$ . 3.  $\frac{\pi}{3}H^2(3R-H)$ ,  $\frac{\pi}{3}(R+H)(2R-H)^2$ . 4.  $\frac{\pi}{2}R^3\sqrt{3}$ . 5.  $24\pi$ . Указание. Сечения пирамиды плоскостями, перпендикулярными оси вращения, являются прямоугольниками. 6.  $\frac{5\pi}{12}\sqrt{2}$ . Указание. См. предыдущую задачу. 7.  $\frac{16}{3}r^3$ . Указание. Рассмотрите сечения данного тела плоскостями, параллельными осям обоих цилиндров. 8.  $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ . 9.  $\frac{250}{3}\sqrt{2}$ . 10.  $9\sqrt{23}$ . 11.  $\frac{5}{12}$ . 12.  $\frac{5}{4}\sqrt{13}$ . Указание. Представьте пирамиду  $MQPN$  как разность пирамид  $QMNB$  и  $PMNB$ . 13.  $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ . Указание. Высота пирамиды равна диагонали основания. 14. а)  $\frac{98\pi}{3}$ ; б)  $\frac{992\pi}{3}$ ; в)  $\frac{370\pi}{3}$ ; г)  $76\pi$ . 15.  $\frac{375\pi}{8}\sqrt{7}$  см<sup>3</sup>. 16.  $\frac{2710}{3}$ . 17.  $\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3 - b^3)$ . 18. 1900. 19.  $\frac{7(\sqrt{2}-1)}{3}a^3$ . 20. 1:1.

### Глава 10

#### § 1

1. а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{3}$ . 2.  $\frac{11}{24}$ . 3.  $\frac{25}{32}$ . 4.  $\frac{1}{2}$ . 5.  $\frac{19}{20}$ .

#### § 2

1.  $\frac{1}{8}$ . 2. а)  $\frac{16}{81}$ ; б)  $\frac{25}{81}$ ; в)  $\frac{40}{81}$ . 3.  $\frac{1}{6}$ . 4.  $\frac{4}{9}$ . 5. а) 0,0024; б) 0,3584; в) 0,1536.

#### § 3

1. а)  $\frac{17}{30}$ ; б)  $\frac{13}{30}$ . 2. а)  $\frac{27}{43}$ ; б)  $\frac{16}{43}$ . 3. 1,5%. 4.  $\frac{1}{m}\left(\frac{n_1}{N_1} + \dots + \frac{n_m}{N_m}\right)$ . 5. а)  $\frac{4}{11}$ ; б)  $\frac{7}{33}$ . 6.  $\frac{5}{18}$ .

## Глава 11

### § 1

**2. Указание.** Число  $2\pi$  является общим периодом для функций  $\sin x$  и  $\sin 2x$ . **4.** а)  $4\pi$ ; б)  $2$ ; в)  $\pi$ ; г)  $\frac{2\pi}{3}$ ; д)  $\frac{\pi}{2}$ ; е)  $\pi\sqrt{2}$ . **5. Указание.** Воспользуйтесь формулой  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ . **6. Указание.** Рассмотрите, например, функции  $\sin x$  и  $\sin 2x - \sin x$ . **7. – 8. Указание.** Воспользуйтесь строгой монотонностью данных функций на промежутке  $[0; \infty)$ . **9. Указание.** Покажите, что период данной функции равен  $1$ . **10.** Основные периоды: а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $1$ ; в)  $2\pi$ ; г)  $\pi$ . **11.** Периодичны функции в пунктах б) и г). **12. Указание.** Выразите функцию  $\operatorname{ctg} x$  через  $\operatorname{tg} x$ . **13. Указание.** Воспользуйтесь равенствами  $\sin(x + \pi) = -\sin x$ ,  $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ . **15.** Функция не периодична. **16.**  $\pi$ . **17.** Функция не периодична. **18.** В точках  $x_k = \frac{1}{k\pi}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 0$ . **19. Указание.** В примерах а–д воспользуйтесь периодичностью соответствующих функций. В примере е) график симметричен относительно начала координат; нули функции найдены в задаче 18; при  $x \rightarrow \infty$  функция монотонно стремится к нулю.

### § 2

**1. в)** Среди всех положительных рациональных периодов нет наименьшего. **2.** а)  $4k$ ; б)  $\frac{k\pi}{3}$ ; в)  $20k\pi$ ; г)  $\frac{k\pi}{5}$ ;  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ . **3. Указание.** Воспользуйтесь утверждениями пунктов 2.7 и 2.10. **4. Указание.** Данная функция равна  $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ . **5.** Пусть  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ,  $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Тогда  $\beta = \varphi + 2m\pi$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ . **6.  $\sqrt{6}$ . Указание.** Преобразуйте функцию к виду  $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  и воспользуйтесь формулой разности синусов. **7. 2. Указание.** Преобразуйте функцию по той же схеме, что и в задаче 6. **8.** а)  $2\pi$ ; б)  $\frac{\pi}{3}$ ; в)  $35\pi$ ; г)  $\frac{200\pi}{31}$ ; д)  $12\pi$ . **9.** Для квадратов целых чисел. **10.** а)  $2\pi$ ; б)  $210\pi$ ; в)  $144\pi$ . **11.**  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{16}$ ,  $\frac{5\pi}{16}$ ,  $\frac{9\pi}{16}$ ,  $\frac{13\pi}{16}$ . **Указание.** Преобразуйте функцию к виду  $\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$  и примените формулу раз-



ности синусов. **12. 3. Указание.** Примените формулу тригонометрического двучлена из пункта 2.6.

## Глава 12

### § 1

**2.**  $\overline{OM_1} - \overline{OM_2}$ . **3. Указание.** Можно сослаться на неравенство треугольника для векторов, изображающих соответствующие комплексные числа. **4.** а)  $\pi + \varphi$ ; б)  $\pi - \varphi$ . **5.** а)  $|z| = \sqrt{2}$ ,  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ ; б)  $|z| = \sqrt{2}$ ,  $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ ; в)  $|z| = 1$ ,  $\arg z = -\frac{\pi}{3}$ ; г)  $|z| = \sqrt{17}$ ,  $\arg z = -\arctg \frac{1}{4}$ ; д)  $|z| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$ ,  $\arg z = \frac{\pi}{8}$ . **6.** а)  $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$ ; б)  $\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$ ; в)  $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ ; г)  $\cos \pi + i \sin \pi$ ; д)  $\sqrt{26}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $\varphi = \arctg 5$ ; е)  $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$ ; ё)  $\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$ ; ж)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8}\right)$ . **7.** 0. **8.** а) Окружность радиуса 1 с центром в точке  $(-1; 0)$ ; б) открытый круг радиуса 1 с центром в точке  $(-1; 0)$ ; в) окружность радиуса 1 с центром в точке  $(0; 1)$ ; г) замкнутое кольцо, заключённое между концентрическими окружностями радиусов 3 и 5 с общим центром  $(0; -1)$ . **9.** а) Прямая, перпендикулярная отрезку с концами  $(2; 0)$ ,  $(0; -4)$  и проходящая через его середину; б) открытый луч, выходящий из начала координат, расположенный в первой четверти координатной плоскости и образующий угол  $60^\circ$  с осью  $Ox$ ; в) окружность радиуса 1 с центром  $(0; -1)$ .

### § 2

**1.** а)  $i$ ; б)  $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ . **2.** а)  $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}\right)$ ; в)  $\cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ ; г)  $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ . **4.** а)  $-2^5 i$ ; б)  $-2^6$ ; в)  $-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ ; г)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ . **Указание.** См. задачу 2 г). **5.** а)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ ; б)  $\cos(\pi - 3\varphi) + i \sin(\pi - 3\varphi)$ ; в)  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$ ; г)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ ; д)  $\frac{1}{\cos \varphi}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , если  $\cos \varphi > 0$ ;  $\frac{1}{|\cos \varphi|}(\cos(\pi + \varphi) + i \sin \varphi(\pi + \varphi))$ , если  $\cos \varphi < 0$ . **6.** а)  $2\cos \frac{\varphi}{2}\left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right)$ ; б)  $2\cos \frac{\varphi}{2}\left(\cos \frac{5\varphi}{2} + i \sin \frac{5\varphi}{2}\right)$ ; в)  $2\cos \varphi$ ; г)  $(2\cos \varphi + 1)(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ; д)  $2\sin \varphi\left(\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ .

$+ i \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ ; е)  $\frac{1}{2\sin\varphi} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \right)$ . 7. Указание. Покажите, что скалярные произведения  $(z_i; z_j)$  векторов, отвечающих числам  $z_i$ , равны  $-\frac{1}{2}$  при  $i \neq j$ . Следовательно, углы между этими векторами равны  $\frac{2\pi}{3}$ .

8.  $-1 + (\sqrt{2} + 1)i$ . 9.  $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ . Указание. Примените формулу суммы геометрической прогрессии и равенство  $a^3 = 1$ .

### § 3

1. а)  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ ; б)  $2\left(\cos\frac{(4k+1)\pi}{6} + i \sin\frac{(4k+1)\pi}{6}\right)$ ; в)  $4\left(\cos\frac{(12k+1)\pi}{12} + i \sin\frac{(12k+1)\pi}{12}\right)$ ; г)  $2\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{3} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\right)$ ; д)  $2\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{6} + i \sin\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)$ ; е)  $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{(4k+1)\pi}{4} + i \sin\frac{(4k+1)\pi}{4}\right)$ ; ё)  $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{(3k+1)\pi}{3} + i \sin\frac{(3k+1)\pi}{3}\right)$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ . 2. а)  $2\left(\cos\frac{(3k+2)\pi}{2} + i \sin\frac{(3k+2)\pi}{2}\right)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ ; б)  $\pm 2 + i$ ; в)  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ; г)  $i, -1, -i$ ; д)  $\cos\frac{k\pi}{3} + i \sin\frac{k\pi}{3}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ . 3. Вектор равнодействующей сил равен  $(0; 1025)$ .

4. Указание. Используйте формулы  $(ab)^n = a^n b^n$  и  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ . 5. Указание. Воспользуйтесь свойствами: точки  $z$  и  $\bar{z}$  симметричны относительно оси  $Ox$ , а точки  $z$  и  $-\bar{z}$  — относительно оси  $Oy$ . 6. Указание. Данное уравнение равносильно утверждениям  $x^7 = 1$ ,  $x \neq 1$ . 7.  $n = 4$ . 8. а и б)  $0, -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\cos\frac{k\pi}{3} + i \sin\frac{k\pi}{3}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 5$ . 9. а) 200. Указание. Один из корней равен нулю, а остальные удовлетворяют уравнению  $z^{199} = 1$ ; б) бесконечно много. Указание. Уравнению удовлетворяют, в частности, все действительные числа.

### § 4

1. а) Для действительных положительных  $z$ ; б) для действительных отрицательных  $z$ ; в) для мнимых  $z$ , лежащих в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ ; г) для мнимых  $z$ , лежащих в полуплоскости  $\operatorname{Im} z < 0$ . 2. Для комплексных чисел, лежащих на единичной окружности с центром в нуле. 3. Для действительных или чисто мнимых чисел. 4. а) Параллельный перенос на вектор  $(0; 1)$ ; б) поворот против часовой стрелки на угол  $90^\circ$  вокруг начала координат; в) гомотетия с коэффициентом  $\frac{1}{2}$  и центром в нача-

ле координат; г) поворот по часовой стрелке на угол  $90^\circ$  вокруг начала координат. 5. а) В окружность радиуса 1 с центром в точке  $-i$ ; б) в окружность радиуса 2 с центром в точке 0; в) в окружность радиуса 1 с центром в точке 0. 6. а) В окружность радиуса 1 с центром в точке 0; б) в окружность радиуса 1 с центром в точке  $-i$ ; в) в окружность радиуса 2 с центром в точке 3; г) в окружность радиуса 1 с центром в точке 1. 7.  $f(z) = -\bar{z}$ . 8.  $f(z) = i \cdot \bar{z}$ . 9. а) В окружность радиуса 1 с центром в точке  $(1; -1)$ ; б) в окружность радиуса 1 с центром в точке  $(-1; 1)$ ; в) в себя. 10. а) В окружность радиуса 2 с центром в точке 0; б) в прямую с уравнением  $|w| = |w + 1 + i|$ . 11. а)  $|z - i| = |z - 1 + i|$ ; б)  $|z + i| = |z - 1 + i|$ ; в)  $|z| = |z + 1 - 2i|$ . 12.  $|z - 1 + i| = \sqrt{2}$ . 13. а)  $(0; 0)$ ,  $r = \sqrt{2}$ ; б)  $(0; -1)$ ,  $r = 1$ .

## § 5

1. в)  $e^{\pi i} = -1$ ; г)  $e^{2\pi i} = 1$ . 2. Указание. См. предыдущую задачу. 3.  $e^{-ix}$ . 4. а)  $2\cos 2$ ; б)  $-2$ ; в) 0; г)  $e$ . 5. а)  $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ ; б)  $2e^{\frac{-i\pi}{6}}$ ; в)  $e^{\frac{-i\pi}{4}}$ ; г)  $\sqrt{26}e^{i\varphi}$ ,  $\varphi = \arctg 5$ . 6. а)  $e(\cos 2 + i\sin 2)$ ; б)  $e^{-1}(\cos 1 - i\sin 1)$ ; в)  $e^{1+b}(\cos a - i\sin a)$ ; г)  $e^{1-2b}(\cos 2a - i\sin 2a)$ , где  $a + ib = u$ . 7 — 11. Указание. Выразите  $\cos z$  и  $\sin z$  через  $e^{iz}$  и  $e^{-iz}$ . 12. Луч  $u + iv = r(\cos y + i\sin y)$ , где  $r > 0$ , а  $y$  — фиксированная мнимая часть переменной  $z$ .



# Содержание

Предисловие .....	3
<b>Глава 1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ</b>	
§ 1. Предел функции .....	5
§ 2. Непрерывность .....	16
§ 3. Непрерывность основных элементарных функций .....	24
§ 4. Непрерывность обратных функций .....	30
§ 5. Некоторые применения монотонности и непрерывности .....	36
<b>Глава 2. СФЕРА И ШАР</b>	
§ 1. Основные свойства сферы и шара .....	44
§ 2. Описанные сферы .....	50
§ 3. Сферы, касающиеся плоскостей .....	55
§ 4. Сферы, касающиеся прямых .....	62
<b>Глава 3. ПРОИЗВОДНАЯ</b>	
§ 1. Производное число, его геометрический и физический смысл .....	68
§ 2. Основные правила вычисления производной .....	74
§ 3. Производная сложной функции .....	82
<b>Глава 4. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ</b>	
§ 1. Изображение фигур с помощью проекций .....	86
§ 2. Координаты в пространстве .....	94
§ 3. Сложение и вычитание векторов .....	102
§ 4. Разложение векторов по составляющим .....	109
§ 5. Свободные векторы .....	120
<b>Глава 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ</b>	
§ 1. Теорема Лагранжа о среднем .....	126
§ 2. Основные этапы исследования функций .....	134
§ 3. Построение графиков функции .....	149
§ 4. Наибольшие и наименьшие значения .....	156
<b>Глава 6. МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ</b>	
§ 1. Скалярное произведение векторов .....	168
§ 2. Уравнение плоскости .....	176
§ 3. Угол между прямыми в пространстве .....	185
§ 4. Угол между плоскостями .....	190
§ 5. Угол между прямой и плоскостью .....	196
§ 6. Расстояние от точки до плоскости .....	200
§ 7. Уравнение сферы .....	205

## **Глава 7. УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫМИ**

§ 1. Первообразная .....	212
§ 2. Правила нахождения первообразных .....	219
§ 3. Простейшие уравнения с неизвестной функцией и её производными .....	224

## **Глава 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ**

§ 1. Граница и внутренность множества .....	236
§ 2. Пространственные тела и замкнутые плоские области .....	242
§ 3. Выпуклые тела .....	249
§ 4. Многогранники .....	256

## **Глава 9. ПЛОЩАДЬ И ОБЪЁМ. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

§ 1. Элементарные фигуры .....	264
§ 2. Мера Жордана .....	271
§ 3. Определённый интеграл .....	280
§ 4. Объёмы геометрических фигур в пространстве .....	292

## **Глава 10. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ**

§ 1. Формулы для подсчёта условных вероятностей .....	306
§ 2. Формула произведения вероятностей .....	310
§ 3. Формула полной вероятности и формула Байеса .....	315

## **Глава 11. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ**

§ 1. Периодические функции .....	321
§ 2. Функции с основным периодом .....	327

## **Глава 12. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА**

§ 1. Тригонометрическая форма комплексного числа .....	337
§ 2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме .....	343
§ 3. Извлечение корней из комплексных чисел .....	348
§ 4. Линейные функции комплексного переменного .....	355
§ 5. Формула Эйлера для мнимых показателей .....	363

Предметный указатель .....	370
----------------------------	-----

Ответы и указания .....	376
-------------------------	-----

*Учебное издание*  
**ФГОС**  
Инновационная школа

**Козлов Валерий Васильевич,  
Никитин Александр Александрович,  
Белонос Владимир Сергеевич,  
Мальцев Андрей Анатольевич,  
Марковичев Александр Сергеевич,  
Михеев Юрий Викторович,  
Фокин Михаил Валентинович**

**МАТЕМАТИКА**  
**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА,  
ГЕОМЕТРИЯ**

Учебник для 11 класса  
общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Под редакцией академика РАН *В.В. Козлова*  
и академика РАО *А.А. Никитина*

Редактор *И.А. Мещерякова*  
Художественный редактор *В.В. Тырданова*  
Рисунки *Е.А. Бреславского*  
Корректор *Г.А. Голубкова*  
Вёрстка *Л.Х. Матвеевой*



Подписано в печать 08.06.20. Формат 70×90/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 29,25. Тираж 1000 экз. Заказ № 99-06/20.  
Изд. № 16300

ООО «Русское слово — учебник».  
115035, Москва, Овчинниковская набережная, д. 20, стр. 2.  
Тел.: (495) 969-24-54, (499) 689-02-65  
(отдел реализации и интернет-магазин).

Вы можете приобрести книги в интернет-магазине:  
[www.russkoe-slovo.ru](http://www.russkoe-slovo.ru)  
e-mail: [zakaz@russlo.ru](mailto:zakaz@russlo.ru)

Отпечатано в ООО «Центр полиграфических услуг «Радуга».  
Тел.: (495) 252-75-10.  
<http://www.raduga-print.ru>

ISBN 978-5-533-01649-0



9

785533|016490|