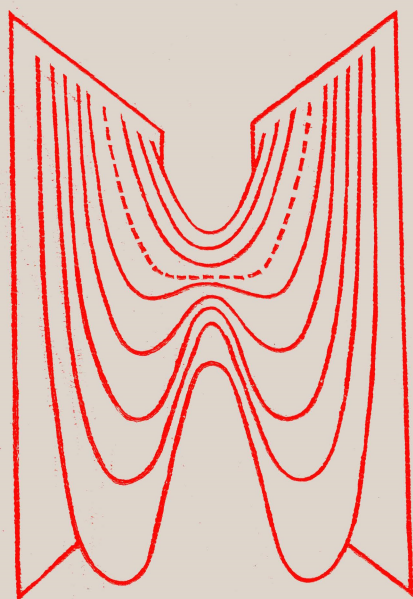


В. Хорстхемке
Р. Лефевр

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ПЕРЕХОДЫ



ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ПЕРЕХОДЫ

~

Springer Series in Synergetics

Editor: Hermann Haken

Volume 15

W. Horsthemke, R. Lefever

Noise-Induced Transitions

Theory and Applications
in Physics, Chemistry, and Biology

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984

В. Хорстхемке
Р. Лефевр

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ПЕРЕХОДЫ

Теория и применение
в физике, химии и биологии

Перевод с английского
Ю. А. Данилова
и канд. физ.-мат. наук В. И. Емельянова

под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, проф. Д. Н. Зубарева
и д-ра физ.-мат. наук А. С. Михайлова



Москва «Мир» 1987

ББК 22.317
X 82
УДК 531 + 531.19

Хорстхемке В., Лефевр Р.

X 82 Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии: Пер. с англ.— М.: Мир, 1987.— 400 с., ил.

Книга известных зарубежных ученых В. Хорстхемке (США) и Р. Лефевра (Бельгия) посвящена эффектам, связанным с воздействием внешних шумов на поведение динамических систем различной природы. Приводится краткое и ясное изложение основных положений современной математической теории случайных процессов, на которой базируется теория индуцированных шумов переходов.

Для физиков, химфизиков и биофизиков, занимающихся исследованием сильно неравновесных открытых систем, а также для специалистов по математической экологии.

X $\frac{1704020000-267}{041(01)-87}$ 60—87, ч. 1

ББК 22.317

Редакция литературы по физике и астрономии

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1984

All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo

© перевод на русский язык, «Мир», 1987

Предисловие редакторов перевода

Предлагаемая читателю книга, опубликованная в серии «Синергетика» в издательстве «Шпрингер», посвящена эффектам, связанным с воздействием внешних шумов на поведение динамических систем различной природы. Ее авторы — профессор Свободного университета Брюсселя Рене Лефевр и сотрудник Центра статистической физики (г. Остин, США) Вернер Хорстхемке — признанные специалисты в области статистической теории сильно неравновесных процессов в физических, химических и биологических системах. Хотя вопросы, относящиеся к влиянию шумов на поведение динамических систем, уже неоднократно обсуждались в литературе, в последнее время в этой области были получены новые, весьма интересные результаты. Как оказалось, внешние шумы способны не только приводить к флуктуациям в характеристиках динамической системы, что вполне очевидно, но и вызывать качественную перестройку ее режима — вести к появлению новых стационарных состояний, возникновению незатухающих периодических осцилляций и т. п. Весь этот класс явлений объединяется в понятии индуцированных шумом переходов. Книга В. Хорстхемке и Р. Лефевра представляет собой первую и весьма удачную попытку дать последовательное изложение теории индуцированных шумом переходов и рассказать о ее разнообразных приложениях в задачах физики, химии и биологии.

Во введении авторы обсуждают взаимосвязь индуцированных шумом неустойчивостей и переходов с явлениями самоорганизации — образования регулярных упорядоченных структур в сильно неравновесных открытых системах. Как известно, процессы возникновения и перестройки таких структур служат аналогами фазовых переходов в равновесных системах. В книге подчеркивается, что фактором, обуславливающим перестройку кинетического режима сильно неравновесной открытой системы, может являться не только детерминированное внешнее воздействие, но и случайные флуктуации в свойствах окружающей среды, с которой взаимодействует рассматриваемая открытая система. Таким образом, существует важный класс эффектов — неравновесные фазовые переходы, индуцированные внешним шумом.

Теория индуцированных шумом переходов базируется на современной математической теории случайных процессов. Большое место в книге (гл. 2—5) уделено изложению основных положений теории вероятностей, марковских диффузионных процессов и стохастических дифференциальных уравнений. От имеющейся литературы, посвященной изучению этих вопросов, книгу В. Хорстхемке и Р. Лефевра выгодно отличают доступность и большая ясность изложения. Авторы не перегружают свое изложение деталями математических доказательств, но в то же время сохраняют уровень строгости, позволяющий затронуть самые современные результаты теории случайных процессов. Это математическое введение, ориентированное на решение конкретных задач, представляет большую ценность. В особенности хотелось бы отметить очень четкое разъяснение областей применимости и сущности различий интерпретаций стохастических дифференциальных уравнений по Ито и по Стратоновичу. Всякий раз, когда дельта-коррелированный «белый» шум в стохастическом дифференциальном уравнении является идеализацией случайного процесса с очень малым, но все же конечным временем корреляции, необходимо использовать интерпретацию Стратоновича.

После изложения математического аппарата следует его приложение к изучению индуцированных шумом переходов в различных системах. Вначале рассмотрена ситуация, когда флуктуации в свойствах окружения являются быстрыми и могут быть моделированы дельта-коррелированным по времени случайным процессом, т. е. «белым шумом» (гл. 6 и 7). Среди интересных примеров, обсуждаемых в этих разделах, можно выделить параметрическое возбуждение осциллятора внешним шумом, индуцированную шумом оптическую бистабильность, влияние флуктуаций внешних параметров (в частности, освещенности) на кинетику химических реакций, воздействие флуктуаций внешних условий на устойчивость экологических сообществ и др.

В гл. 8 и 9 анализируется влияние на поведение динамических систем со стороны «цветного» шума, т. е. таких флуктуаций в свойствах окружающей среды, которые обладают конечным временем корреляции, сравнимым с характерными собственными временами динамической системы. Здесь вновь подробно и в доступной форме обсуждаются детали математического аппарата, приспособленного для исследования этих вопросов. После математического обсуждения авторы приводят примеры применения изложенных методов к решению различных важных в практическом отношении задач. Среди них можно отметить изучение неустойчивостей в нематических жидких кристаллах, анализ моделей генетической динамики биологических сообществ, а также подробное исследование воздействия электрических шумов на проводимость биологических мембран.

В целом, книга В. Хорстхемке и Р. Лефевра служит удачным примером «синергетического» междисциплинарного подхода. Его особенность — в выделении типичных моделей, охватывающих сразу довольно широкий круг задач различной природы, и в исследовании этих моделей с привлечением современных методов теоретической физики.

Книга В. Хорстхемке и Р. Лефевра будет безусловно полезна для физиков, занятых исследованиями сильно неравновесных открытых систем, а также для специалистов из смежных областей — биофизики, химической физики и математической экологии. Вероятно, знакомство с книгой будет интересно и математикам, работающим в области теории вероятностей и случайных процессов.

Перевод выполнили Ю. А. Данилов (предисловие, гл. 1—6, приложение) и канд. физ.-мат. наук В. И. Емельянов (гл. 7—10).

*Д. Н. Зубарев
А. С. Михайлов*

Предисловие

Исследование фазовых переходов принадлежит к числу наиболее увлекательных областей физики. Первоначально его рамки ограничивались изучением фазовых переходов в равновесных системах, но за последние два десятилетия исследование вышло далеко за свои классические пределы. Поведение сильно неравновесных систем стало привлекать все большее внимание и превратилось в бурно развивающееся и весьма продуктивное поле деятельности для физиков, химиков и биологов. Проведенные исследования позволили выработать единое представление о законах, управляющих процессами самоорганизации физико-химических и биологических систем. Значительным достижением явилось распространение понятия фазового перехода на неустойчивости, присущие только открытым нелинейным системам. Понятие фазового перехода оказалось плодотворным применительно не только к неравновесным неустойчивостям, известным уже лет восемьдесят (вспомним хотя бы некоторые гидродинамические неустойчивости), но и к неустойчивостям, открытым сравнительно недавно в квантовых оптических системах (лазерах), в химических системах (реакции Белоусова — Жаботинского) и в биологических системах. Понятие фазового перехода находит ныне применение и за пределами естественных наук — в экономике и социологии.

В предлагаемой вниманию читателя монографии мы покажем, что понятие фазового перехода допускает дальнейшее обобщение. Оно распространяется на класс явлений перехода, которые присущи только неравновесным системам в случайно флуктуирующей среде. Иначе говоря, для таких систем свойства среды не постоянные во времени, как это обычно предполагается при изучении неравновесных явлений, а подвержены случайным временным вариациям, известным под названием внешнего шума. Такие явления перехода составляют многообещающую область исследований, так как вопреки всему, что подсказывает интуиция, случайный характер среды индуцирует более высоко организованное (более тонко структурированное) поведение системы. Этот новый тип неравновесных переходов мы назвали *пере-*

ходами, индуцированными шумом, чтобы подчеркнуть существенно важную роль шума. Переходы, индуцированные шумом, возможны только при условии, если среда в той или иной мере случайна. Весьма замечательно, что в отличие от широко распространенного взгляда на порядок и случайность как на взаимоисключающие противоположности, они в действительности находятся в отношении симбиоза. Существование переходов, индуцированных шумом, со всей определенностью ставит нас перед необходимостью переоценки роли случайности в явлениях природы.

В нашей монографии излагается формализм для описания нелинейных явлений в случайной среде и подробно перечисляются наиболее важные особенности переходов, индуцированных шумом. Теоретический формализм для случая чрезвычайно быстрого шума изложен в гл. 1, 3 и 6. Такой шум соответствует среде с очень короткой памятью. В этом случае вполне допустимо и полезно рассматривать предел нулевой памяти. Это — идеализация так называемого белого шума. В гл. 6 мы используем ее при обсуждении переходов и критических точек, индуцированных шумом. Здесь же рассмотрены стационарные и зависящие от времени свойства и особенности переходов, индуцированных шумом. В гл. 2, 4 и 5 излагается математическая подоплека нашего формализма. Эти главы включены нами для того, чтобы придать изложению законченный характер и облегчить читателю, не являющемуся специалистом по теории вероятностей, знакомство с современной математической литературой по теории случайных процессов, без которой невозможно дальнейшее продвижение в исследовании переходов, индуцированных шумом. Мы полностью разделяем взгляды Дуба, задавшего в одной из своих работ [4.2, с. 352] целью показать, что «использование строгих методов не только способствует прояснению исходных предположений, но и упрощает формальные построения». Действительно, теория нелинейных систем, параметрически связанных со средой, в прошлом изобиловала неоднозначностями и темными местами именно из-за отсутствия строгих методов. Основной математический аппарат для адекватного и в то же время ясного обсуждения систем с параметрическим шумом и переходов, индуцированных шумом, излагается в гл. 2, 4 и 5. Читатель, для которого аспекты предлагаемого формализма, носящие более математический характер, не представляют особого интереса, может пропустить эти главы с тем, чтобы возвращаться к ним по мере надобности. В гл. 7—9 развитый формализм применяется к конкретным системам — представительным примерам, заимствованным из физики (электрические цепи, оптическая бистабильность, нематические жидкие кристаллы, турбулентность в сверхтекучем ^4He), химии (фотохимические реак-

ции, реакция Бриггса — Раушера) и биологии (динамика популяций, генетика, клеточные мембраны). Мы приводим также экспериментальные данные по переходам, индуцированным шумом, и обсуждаем некоторые предлагаемые нами новые эксперименты. На этом рассмотрение предельного случая — белого шума — завершается, и в гл. 8 и 9 мы распространяем наш формализм на среды с ненулевой памятью, т. е. на шум с ненулевым временем корреляции. Мы моделируем их с помощью так называемого цветного шума. Гл. 8 посвящена особой его разновидности — цветному шуму типа Орнштейна — Уленбека, т. е. гауссовскому марковскому процессу, а гл. 9 — дихотомическому, или двоичному, марковскому шуму — процессу с двумя состояниями, известному также под названием случайного телеграфного сигнала.

Теория переходов, индуцированных шумом, и тем более их экспериментальное изучение делают лишь первые шаги. Мы надеемся, что наша книга будет способствовать дальнейшему развитию новой области и убедит читателя в том, насколько далекими от действительности могут оказаться основанные на интуитивных соображениях представления о той роли, которую может играть шум в нелинейных системах.

Считаем своим приятным долгом выразить свою признательность всем участникам многочисленных плодотворных дискуссий, которые мы имели за последние годы с коллегами по второму отделению физической химии Свободного университета в Брюсселе, и в первую очередь П. Аллену, П. Боркмансу, Л. Бренигу, Ж. Л. Денюбургу, Г. Дьюэлу, М. Малек-Мансуру, Г. Николису, Дж. У. Тернеру, К. Ван ден Бруку и Д. Вальграфу. Мы хотели бы особенно поблагодарить проф. И. Пригожину за постоянную поддержку и поощрение нашей работы. Немало полезного для себя мы почерпнули из сотрудничества с проф. Л. Арнольдом (Бременский университет), д-ром П. де Кеппером (Научно-исследовательский центр Поля Паскаля в Бордо), К. Р. Дёрингом (университет шт. Техас в Остине), проф. К. Китахарой (университет Шидзуока), д-ром Ж. К. Мишо (Тулузский университет) и проф. И. В. Штуки (Бернский университет). Всем мы очень признательны. Мы благодарны за полезные замечания и ценные обсуждения проф. А. С. Чи (Бейдзинский университет), проф. В. Эбелингу (Ростокский университет), проф. Р. Грэхэму (Эссенский университет), д-ру М. О. Хонглеру (Женевский университет), проф. С. Кабасиме (Токийский технологический институт), проф. Т. Курцу (университет шт. Висконсин в Мэдисоне), проф. Ф. Моссу (университет шт. Миссури в Сан-Луисе), д-ру Ж. К. Ру (Научно-исследовательский центр Поля Паскаля в Бордо), проф. Х. М. Санчо и М. Сан Мигуэлю (оба из Барселонского университета), проф. Х. Л. Суинни (университет шт.

Техас в Остине) и проф. Ф. Виштутца (Бременский университет).

Свою особую признательность мы выражаем проф. Г. Хакену, предложившему нам написать эту монографию и включившему ее в серию монографий и сборников по синергетике, выпускаемую издательством «Шпрингер».

Мы благодарны д-ру Г. Лотшу и сотрудникам издательства «Шпрингер» за заботу и внимание к рукописи нашей книги.

Нам хотелось бы также выразить нашу признательность Д. Ханкез и С. Дерюмо за перепечатку рукописи, а также П. Кине, выполнившему все рисунки и взявшему на себя техническую помощь при подготовке рукописи к печати.

Нашу работу поддерживали: фонд «Studienstiftung des deutschen Volkes», бельгийское правительство (Actions de Recherche Concertée no. 76/81113), Сольвеевский международный институт физики и химии, министерство энергетики США (DE-ASO5-81ER10947), НАТО (исследовательский контракт № 12582) и Национальный фонд изучения рака.

Остин, Брюссель
август 1983

*В. Хорстхемке
Р. Лефевр*

1.1. Детерминистический и случайный аспекты макроскопического порядка

Под наукой часто понимают поиск неизвестных чудодейственных законов, которые таятся за неисчерпаемым разнообразием природы. Многие глубоко убеждены в том, что явления природы при всей их изменчивости и сложности подчиняются небольшому числу фундаментальных законов и что стоит лишь познать эти законы, как все станет простым и ясным. Именно это убеждение так прекрасно выразил Иоганн Кеплер [1.1], которому принадлежит следующие строки: «Ум человеческий никогда не будет испытывать недостатка в свежей пище — столь велико разнообразие явлений природы и столь обильны эти скрытые небесами сокровища, особенно в том, что касается порядка».

Порядок, о котором говорит Кеплер, тесно связан с глубоко детерминистической концепцией мироздания. Ее сторонники видели высшую задачу науки в поиске законов, позволяющих точно предсказывать события, которые на первый взгляд кажутся не поддающимися определению, например солнечные и лунные затмения или появление комет. Динамика Ньютона увенчала этот поиск грандиозным триумфом, в результате чего детерминистическая концепция законов природы стала основой методологии всего естествознания. Детерминизм, о котором идет речь, исходит из предположения о материальном происхождении явлений природы. Он постулирует, что за любым явлением, сколь бы загадочным оно ни было, кроются чисто материальные причины, которые рано или поздно будут обнаружены. Кроме того, детерминистическая концепция исходит из постулата о совершенной организации природы. Согласно этому постулату, в законах, которым подчиняются явления природы, нет места столь «неточно подогнанным» деталям, как элементы вероятностного или случайного характера. После того как открытия астрономов-наблюдателей подтвердили точность и красоту небесной механики, была отброшена всякая мысль о том, что случайные процессы (даже если речь идет о самых сложных системах) могут играть существенную роль в физическом мире и их необходимо принимать во внимание.

В еще большей степени детерминистическую концепцию укрепили первые успехи естественных наук. Такие законы, вносящие порядок и ясность в нагромождение огромного количества экспериментальных данных, как закон кратных отношений Дальтона, которому следуют элементы в химических соединениях, или закон Бойля — Мариотта, которому подчиняются сжатие и расширение газов при постоянной температуре, самым убедительным образом подтвердили правоту тех, кто считал, что за сложностью физико-химических процессов кроется отнюдь не произвол. Тем самым было показано, что физика и химия, как и небесная механика, подчиняются строго детерминистическим принципам.

Идея о том, что детерминистические принципы во всех областях знания служат своего рода ключами понимания и прогресса, была доминирующей в развитии науки на протяжении всего XIX в. Достижения естественных наук рассматривались как универсальная модель для любой области человеческой деятельности, еще не свободной от эмпиризма. Со всей определенностью это выражено в ответе Лапласа одной особе, выразившей удивление по поводу внесенного Лапласом предложения о допущении докторов медицины в Академию наук (в то время медицина не считалась наукой): по мнению Лапласа избрание докторов медицины в Академию следовало бы разрешить просто для того, чтобы те «были среди ученых». За последующие 40 лет медицина явно продвинулась в направлении лапласовского детерминизма, что дало Клоду Бернару повод заметить [1.2, с. 116]: «Все явления жизни строго детерминированы, поэтому-то и существует биологическая наука». С отставанием на несколько десятилетий те же идеи проникли и в социальные науки. Дюркгейм [1.3] ставил знак тождества между наукой и детерминизмом. Мысль о том, что человеческие сообщества подчиняются законам природы и образуют «естественное царство» была для него эквивалентна допущению о выполнимости для человеческих сообществ «принципа детерминизма», который к тому времени был незыблемо установлен в так называемых точных науках.

Тем не менее с современных позиций ясно, что полный отказ от случайности, сыгравший столь важную роль в XIX в., не обоснован. Ощутимый удар по классическому детерминизму был нанесен, когда в ходе исследования атомных и субатомных свойств вещества были обнаружены принципиально неустраняемые неопределенности, что привело к формулировке новой — квантовой — механики. Но даже независимо от открытий на микроуровне незыблемость детерминистических позиций была поколеблена и по другим причинам, связанным с проблемами, которые возникли в ходе исследования свойств вещества непосредственно на макроскопическом уровне. Одной из наиболее старых проблем

макроскопической физики, не утративших актуальность и поныне, является выяснение смысла энтропии и необратимости, которую призвана описывать энтропия. Сделав дерзкий шаг, повергший в смятение многих из наиболее именитых современников, Больцман предложил интерпретацию энтропии, в которой законы динамики дополнялись соображениями, связанными с понятием случайности. Последние было принято рассматривать как дополнительные приближения, вводимые из-за того, что проблема многих тел не может быть проинтегрирована точно. Имеются все основания полагать, что эта традиционная точка зрения нуждается в пересмотре. Действительно, все новые доводы свидетельствуют в пользу представления о том, что источником необратимости является динамика, а не иллюзия, обусловленная неточностью наших знаний о состоянии системы. Показано, что в эволюции *классических* динамических систем *внутренняя* стохастичность сосуществует с полностью детерминистическими законами динамики [1.4—7] (обзоры см. в работах [1.8—10]). Более точно то же утверждение можно сформулировать следующим образом: в то время как движение отдельных частиц по траекториям детерминировано в самом полном значении этого слова, движение областей фазового пространства, т. е. пучков траекторий, обретает стохастические свойства.

С необратимостью связана и другая проблема, в которой стохастическими элементами вряд ли можно пренебречь: конструктивная роль необратимых процессов в образовании крупномасштабных молекулярных образований, известных под названием диссипативных структур. Наиболее удивительная особенность этой проблемы, ставящая перед исследователями один из наиболее трудных вопросов, — глубокое различие между поведением материи на макроскопическом уровне и ее поведением на микроскопическом уровне. Каким образом становится возможной пространственно-временная когерентность химических диссипативных структур, лазерных лучей или ячеек Бенара? Каким образом может спонтанно возникнуть и самоподдерживаться столь дальний макроскопический порядок, несмотря на молекулярный хаос и внутренние флуктуации? ¹⁾ Столь же глубокое различие мы обнаруживаем в процессах самоорганизации, происходящих в биологических системах. Процессы метаболизма по существу представляют собой химические превращения. Ясно, что в подобных превращениях элемент случайности весьма велик. Дело в том, что в живых клетках число молекул, участвую-

¹⁾ В дальнейшем мы будем называть *внутренними флуктуациями* все элементы стохастичности, непосредственно возникающие из многих степеней свободы, участвующих в процессах и взаимодействиях на микроскопическом уровне системы.

ших в метаболических превращениях, часто очень мало. Тем не менее метаболизм протекает без сбоев, с необычайной точностью. Например, он с поразительной надежностью производит молекулы белков. Последовательность аминокислот в белках и пространственная структура этих гигантских молекул настолько специфичны, что вероятность их случайного образования практически равна нулю.

Другая грань конструктивной роли необратимых процессов и резкого различия между порядком и случайностью открывается перед нами, если мы рассмотрим в качестве примера механизм биологической эволюции. Со времен Дарвина принято считать маловероятным, что биосфера является тем *статическим*, гармонично детерминированным миром, который некогда открылся Кеплеру, созерцавшему звездное небо. Биологические виды и даже предбиологические макромолекулярные соединения [1.11, 12] являются самоорганизующимися системами. Они непрестанно «становятся», т. е. пребывают в состоянии возникновения, которое существенно зависит от случайных событий. Случайно и независимо от направления эволюции создается обширный банк наследственных генетических вариаций. Этот банк служит бесценной сырьевой базой для эволюции. Именно в нем эволюция находит благоприятные вариации, частота которых в популяции последовательно возрастает и стабилизуется точными, однозначно определенными законами передачи наследственных признаков. Нетрудно видеть, что отличительная особенность эволюционной теории, заведомо не имевшая аналогов в физических науках в те времена, когда создавалась эволюционная теория, придает случайным событиям необычайно важное значение. Мутации играют роль случайного двигателя прогресса. Однако мутации приводят и к гораздо более важным и далеко идущим последствиям, поскольку именно такие случайные события наугад выбирают один из нескольких возможных путей эволюции. По общепринятому ныне мнению исход эволюции биосферы не определен однозначно. Если бы жизнь на какой-нибудь другой планете развивалась в тех же условиях, в каких происходила эволюция живого на Земле, то мы вполне готовы к тому, что формы жизни могли бы быть совершенно иными (не исключено даже, что в основе их лежала бы совершенно другая химия). По общему мнению при надлежащих условиях возникновение жизни неизбежно. В этом смысле жизнь — явление физическое, материальное, детерминированное. Однако из сказанного отнюдь не следует, что жизнь предсказуема. Наоборот, на более современном языке можно было бы сказать, что в процессе развития жизнь непрестанно осуществляет случайный выбор одного из многих (быть может, даже бесконечно многих) возможных сценариев. Предсказать достоверно, какого именно сценария будет

придерживаться эволюция в данной единичной реализации процесса, решительно невозможно.

Некоторые исследователи и поныне считают, что в теории Дарвина случайности придается чрезмерно большое значение [1.13]. Они пытаются установить более сильную зависимость между биологической изменчивостью и условиями окружающей среды. Согласно традиционным представлениям, мутации и другие случайные аспекты эволюции настолько глубоко связаны со специфическими особенностями живого состояния материи, что являются неотъемлемым свойством живого состояния. Именно этому обстоятельству в большинстве случаев приписывают различия между эволюцией биосферы и физического (неорганического) мира. Ныне ситуация претерпевает изменения. За последние годы стали гораздо лучше понятны механизмы самоорганизации в физических науках, и возникла новая оценка роли случайности в явлениях природы. Некоторые из наиболее существенных достижений в этом направлении мы рассмотрим подробнее в разд. 1.2, а пока нам хотелось бы в общих чертах наметить очередность идей, к которым привели эти успехи. Новые результаты показали, что макроскопический мир гораздо менее детерминирован, т. е. предсказуем в классическом смысле, чем можно было ожидать. Выяснились совершенно новые аспекты стохастичности, требующие глубокой переоценки роли и значения случайных явлений в природе.

Во-первых, было обнаружено, что механизмы самоорганизации в сильно диссипативных системах гораздо сложнее, чем в консервативных системах равновесного типа. В окрестности состояния устойчивого термодинамического равновесия поведение диссипативной системы легко предсказуемо, если известно, что в этой области система обладает единственным аттрактором — термодинамической ветвью. Наоборот, вдали от термодинамического равновесия та же система может обладать поразительно сложной цепью бифуркаций. Тем самым неизбежно возрастает важность таких случайных элементов, как внутренние флуктуации. Влияние случайных элементов становится решающим в актах выбора, которые производит в ходе эволюции система, между многочисленными областями притяжения или диссипативными структурами, возникающими в результате бифуркаций [1.14, 15]. При изменении внешнего параметра (примерно так, как это происходит в ходе биологической эволюции) могут разворачиваться различные сценарии: в зависимости от случайных флуктуаций в каждый момент времени система «посетит» одни аттракторы и обойдет стороной другие. Стоит отметить, что такая чувствительность к флуктуациям встречается уже в простейших самоорганизующихся гидродинамических системах. Известно, например, что в системе Бенара, параметры которой кон-

тролируются с минимальной экспериментальной погрешностью, два тождественных по постановке эксперимента протекают непредсказуемым образом по различным сценариям [1.16].

Во-вторых, удар по традиционным представлениям относительно свойств макроскопического мира был нанесен той легкостью, с которой сценарии эволюции детерминированных макроскопических систем (например, систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями) порождают нерегулярные аperiодические решения, называемые хаотическими или турбулентными. Такие решения, полученные одновременно с развитием неравновесной теории устойчивости, вызвали потрясение в физических и биологических науках: новые режимы разительно отличались от сценария, предложенного Л. Д. Ландау для объяснения гидродинамической турбулентности, а именно возбуждения бесконечного числа частотных мод в непрерывной системе. В первом альтернативном сценарии, предложенном Рюэлем и Такенсом [1.17], использованы только три частоты. «Шумное» поведение в этом сценарии было связано со странным аттрактором, возникшим после трех последовательных бифуркаций рождения цикла. Характерной особенностью странного аттрактора является чувствительная зависимость от начальных условий: соседние траектории разбегаются экспоненциально со временем [1.18—21]. Нельзя не удивляться тому, что странный аттрактор, порождающий турбулентный режим, может существовать уже в системах столь малой размерности, а именно в системах, описываемых тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка.

Простые детерминированные системы не только оказались способными (вопреки наивным ожиданиям) генерировать *внутренний шум*. Было показано также, что возможны и другие маршруты, ведущие к хаосу не только через последовательность бифуркаций Хопфа¹⁾. Были описаны по крайней мере два главных альтернативных сценария: переход к турбулентности через перемежаемость [1.22] и через удвоение периода [1.23—28] (более поздние обзоры на эту тему см. в работах [1.29, 30]). Следует также отметить, что, когда управляющий параметр диссипативной системы изменяется непрерывно и систематически, хаос не обязательно является «предельным» типом поведения, возникающим после того, как будут исчерпаны более «когерентные» режимы на бифуркационных диаграммах. Например, в модели Лоренца, служащей приближенным описанием неустойчивости Бенара [1.31], хаотические области чередуются с регу-

¹⁾ Бифуркацию рождения предельного цикла из сложного фокуса в отечественной литературе принято называть бифуркацией Андронова — Хопфа. — *Прим. ред.*

лярными (во времени) режимами [1.32]. Так же ведет себя (как было показано недавно) и генератор ван дер Поля с периодической вынуждающей силой [1.33]. Аналогичным свойством обладает и реакция Белоусова — Жаботинского [1.34—36]. Все новые и новые экспериментальные данные подтверждают, что сценарии через перемежаемость и удвоение периода правильно отражают некоторые существенные особенности гидродинамической [1.37—42] и химической турбулентности [1.35, 43—45].

Изучение самоорганизации в неравновесных системах, связанных с флуктуирующими средами, стало третьим основным стимулом к переоценке роли случайности. Именно проблемам самоорганизации в таких системах и посвящена наша книга. За любой нашей попыткой взглянуть на природу «детерминистическими глазами» кроется наивное интуитивное убеждение в тривиальности влияния флуктуаций в среде (под которыми обычно подразумевают *быстрые* флуктуации). В подтверждение правильности своих взглядов сторонники этого убеждения приводят следующие доводы. (1) Быстрый шум усредняется, и макроскопическая система по существу приспосабливает свое состояние к средним условиям в среде. (2) Стохастическая вариабельность условий в среде приводит к расплыванию, или размазыванию, состояния системы вокруг среднего состояния. Флуктуации являются помехами, они оказывают дезорганизующее действие, но в конечном счете их роль вторична. Такого рода интуитивные представления были выработаны на рассмотрении определенного типа связи между системой и окружающей ее средой. Удивительно, однако, что поведение нелинейной системы в среде с шумом, как правило, противоречит подобным интуитивным представлениям. Проведенные за последние годы систематические теоретические и экспериментальные исследования показали, что в общем случае поведение систем значительно отличается от нарисованной выше простой картины. В широком классе явлений природы случайный характер среды, несмотря на свое, казалось бы, дезорганизующее действие, способен индуцировать гораздо более богатое разнообразие режимов, чем те, которые возможны при соответствующих детерминированных условиях. Как ни странно, но усиление стохастической вариабельности среды может приводить к структурированию нелинейных систем, не имеющему детерминированного аналога. Еще более замечательно то, что переходы от одной структуры к другой по своим свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам и переходам, встречающимся в неравновесных системах при детерминированных внешних воздействиях, таким, как, например, неустойчивость Бенара и лазерный переход. Понятие фазового перехода было обобщено на переходы последнего типа около десяти лет назад, поскольку некоторые свойства, характеризующие

равновесный фазовый переход, были обнаружены и в этих явлениях [1.14, 46—52] (см. также работы обзорного характера [1.53—56]).

Как мы покажем в нашей книге, можно сделать еще один шаг и распространить понятие фазового перехода на новый класс неравновесных явлений перехода, индуцированных случайными свойствами среды. Новый тип переходов мы назвали неравновесными фазовыми переходами, индуцированными шумом, или, короче, переходами, индуцированными шумом. Выбором такого названия мы стремились подчеркнуть, что новый класс явлений перехода тесно связан с классическими равновесными фазовыми переходами и с открытыми не столь давно неравновесными фазовыми переходами. Однако выбранное нами название отнюдь не означает, что переходы, индуцированные шумом, обладают в точности такими свойствами, как равновесные переходы. Уже детерминированные неравновесные условия приводят к более широкому диапазону переходов с такими новыми возможностями, как переход к незатухающему периодическому поведению, известному как предельный цикл. Для нового класса явлений перехода, которым посвящена наша монография, более важно то, что новые состояния, порождаемые индуцированными шумом переходами, несут на себе «несмываемое пятно» своего турбулентного происхождения. Они являются творениями шума, и как таковые на первый взгляд чужды нашим глубоко укоренившимся детерминистическим концепциям порядка ¹⁾.

Явление переходов, индуцированных внешним шумом, лежит в русле идей, коренным образом изменивших классические представления о соотношении между детерминированным и случайным поведением. Эти идеи по существу опровергли наши интуитивные представления о роли флуктуаций. И хотя для индуцированных шумом переходов ситуация не столь ясна и прозрачна, как в случае классических равновесных и неравновесных фазовых переходов, она отнюдь не является непредсказуемой и не-

¹⁾ Идея о том, что случайные факторы, не учитываемые в обычной теории Дарвина, играют важную роль в эволюции, начинает обретать под собой почву и за пределами физических наук. Анализируя возможные причины пермской катастрофы, в результате которой около 225 миллионов лет назад с лица Земли исчезло около 80 % обитавших тогда видов животных, Гулд [1.57, с. 349] приходит к заключению, которое звучит, как своеобразный ответ Иоганну Кеплеру: «Вполне возможно, что случайность не является лишь адекватным описанием сложных случаев, в которых дать точное описание нельзя. Вполне возможно, что так устроен сам мир, и многие происходящие в нем события не обусловлены какими-либо причинами, понимаемыми в традиционном значении этого слова. Наше бессознательное убеждение в том, что такое невозможно, по-видимому, отражает лишь наши надежды и предубеждения, наше отчаянное стремление разобраться в видимой стороне сложного, запутанного мира, но не в том, как действует природа».

регулярной. Понятия и концепции, разработанные для описания классических переходов (и по существу исходящие из детерминистической концепции природы), могут быть распространены и на явления, в которых существенную роль играет шум, и приспособлены к описанию таких явлений. Тем самым становится возможным теоретическое исследование переходов, индуцированных шумом, и, что еще важнее, открывается перспектива их экспериментального изучения. Индуцированные шумом переходы — наблюдаемые физические явления, существование которых подтверждается различными экспериментами на физико-химических системах. Они не являются более теоретической фикцией, и самый факт их существования оказал сильное влияние на наше понимание самоорганизации в макроскопических системах. Как мы уже говорили, именно переходы, индуцированные шумом, привели к переоценке роли случайности в явлениях природы.

Наша монография написана по следующему плану. Дабы представить класс явлений индуцированных шумом переходов в надлежащей перспективе, мы в следующих разделах кратко обсудим переходы порядок — беспорядок в условиях детерминированной среды и влияние на них внутренних флуктуаций. Затем мы перейдем к переходам, индуцированным шумом, и прежде всего займемся проблемой моделирования макроскопических систем в флуктуирующей среде. Для того чтобы придать нашей монографии законченность, мы приводим краткое (но, хотелось бы надеяться, ясное) изложение математического аппарата, необходимого для адекватного рассмотрения нелинейных систем, возмущаемых внешним шумом. Затем дается четкое и конструктивное определение переходов, индуцированных шумом. Их свойства подробно исследуются для сред с гауссовским белым шумом и двух типов цветного шума. Затем мы подробно описываем три эксперимента, в которых наблюдались индуцированные шумом переходы, предлагаем новые эксперименты из области физики, химии и биологии и обсуждаем на конкретных примерах роль и значение индуцированных шумом переходов в явлениях природы.

1.2. От кристаллов до диссипативных структур

Переходы порядок — беспорядок всегда рассматривались в физических науках для детерминированных сред, т. е. сред со свойствами, постоянными или периодическими во времени. Именно такие условия неизменно принимались в ходе развития термодинамики и статистической механики. Они соответствуют упрощенному подходу, при котором основное внимание уделяется отслеживанию логических связей. Такой подход соответствовал

общей предрасположенности к умалению значения случайности среды. Случайность воспринималась как синоним несовершенства. Ее надлежало всячески исключать из экспериментов. В теории случайность могла быть лишь источником излишних осложнений, затемняющих первозданную красоту процессов самоорганизации материи

Таким образом, до сих пор в макроскопической физике среды с детерминированными стационарными свойствами всегда рассматривались как нечто очевидное. В этом разделе мы напомним некоторые важные результаты, полученные в рамках такого подхода. Позднее это поможет нам более ясно оценить новизну и нетрадиционность, приносимые индуцированными шумами переходами.

1.2.1. Макроскопическое описание самоорганизации в постоянной среде

Многие из наиболее распространенных макроскопических систем могут быть описаны с помощью набора параметров состояния $\{X_i\}$, удовлетворяющих эволюционным уравнениям вида

$$\partial_t X(r, t) = f_\lambda(X(r, t)), \quad (1.1)$$

где $X(r, t)$ и $f_\lambda(X(r, t))$ — векторы, компонентами которых являются соответственно параметры состояния X_i и функциональные зависимости, выражающие локальную эволюцию компонент X_i во времени t и пространстве r . Параметрами состояния X_i могут быть, например, температура, электрический потенциал, поле скоростей или химический состав. Функционалы, как правило, содержат частные производные по пространственным переменным и нелинейны, например, из-за химических реакций в системе или явлений переноса (таких, как конвекция в гидродинамике). Они могут также зависеть от некоторого набора управляющих параметров λ (констант скоростей, коэффициентов диффузии, фиксированных концентраций некоторых химических соединений и т. д.).

Для того чтобы задача (1.1) была хорошо поставлена, значения управляющих параметров и граничные условия, поддерживаемые на границе S системы, должны быть известны. Граничные условия обычно бывают либо условиями Дирихле, задающими значения $\{X_i^S\}$ параметров состояния на поверхности, либо условиями Неймана, задающими значения потоков на поверхности $\{n \nabla X_i^S\}$ (n — вектор нормали к поверхности).

Управляющие параметры λ (или их подмножество) и граничное условие, наложенное на систему, воспроизводят воздействие на нее внешнего мира. Как уже упоминалось, до сих пор при исследовании явлений самоорганизации обычно принима-

лось упрощающее предположение о том, что среда постоянна во времени¹⁾. Ясно, что такое предположение требует постоянства во времени всех управляющих параметров λ и граничных условий. В этом случае проблема возникновения в системе упорядоченного режима может быть исследована следующим образом. Поскольку среда постоянна, мы можем предположить, что существует по крайней мере одно не зависящее от времени решение $\{\bar{X}_i\}$ уравнения (1.1), т. е. тривиальное решение, для которого

$$f_\lambda(\bar{\mathbf{X}}) = 0, \quad (1.2)$$

которое мы примем за опорное состояние (оно соответствует тривиальному неорганизованному состоянию). Переход к упорядоченному режиму ассоциируется с идеей неустойчивости и нарушения симметрии: самоорганизация возникает, когда тривиальное решение $\bar{\mathbf{X}}$ становится неустойчивым и сменяется новым решением уравнения (1.1), обладающим более низкой симметрией. Простейший способ исследования такой возможности состоит прежде всего в проверке устойчивости опорного состояния относительно малых возмущений. Для этого необходимо положить

$$\mathbf{X}(r, t) = \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{x}(r, t), \text{ где } |x_i/\bar{X}_i| \ll 1 \quad (1.3)$$

и подставить в (1.1). Временная эволюция возмущения $\mathbf{x}(r, t)$ задается решением системы уравнений

$$\partial_t x_i = \sum_j A_{ij} x_j, \quad (1.4)$$

которая получается при линеаризации векторного уравнения (1.1). Коэффициенты A_{ij} не зависят от времени, так как линеаризация производилась в окрестности не зависящего от времени опорного состояния. Следовательно, система уравнений (1.4) допускает решения вида

$$x_i(r, t) = x_i^k(r) \exp(\omega_k t). \quad (1.5)$$

Эти решения \mathbf{x}^k должны удовлетворять наложенным на систему граничным условиям, но могут обладать более низкой симметрией, чем опорное состояние. Они являются не чем иным, как собственными векторами задачи на собственные значения (индекс k относится к допустимым волновым числам)

$$(\omega_k I - A) \mathbf{x}^k(r) = 0. \quad (1.6)$$

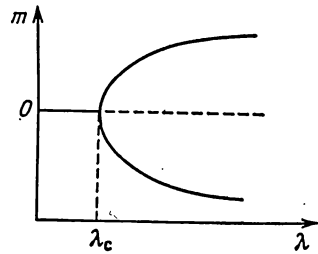
¹⁾ В дальнейшем в этой главе мы, говоря о детерминированной среде будем иметь в виду именно простейший случай, когда среда постоянна во времени. Среды, периодические во времени, изучены гораздо меньше [158, 59]

Значения $\text{Re}\{\omega_k\}$ определяют скорость, с которой эволюционируют возмущения параметров состояния. Как правило, время жизни возмущений в системе есть величина порядка

$$\tau_{\text{макро}} = |1/\text{Re}\{\omega_k\}|. \quad (1.7)$$

Это означает, что $\tau_{\text{макро}}$ можно назвать макроскопическим масштабом времени эволюции системы. Ясно, что если опорное состояние X асимптотически устойчиво, то все $\text{Re}\{\omega_k\}$ должны быть отрицательны. Следовательно, возникновение перехода можно определить просто исследуя поведение $\text{Re}\{\omega_k\}$ как функции значений управляющих параметров λ и наложенных на систему граничных условий. Для простоты предположим, что мы исследуем свойства системы, имея в своем распоряжении только один

Рис. 1.1. Бифуркационная диаграмма для фазового перехода второго рода. Параметр порядка m представлен как функция внешней связи λ . В критической точке λ_c опорное состояние становится неустойчивым (штриховая линия), и в закритической области возникают две новые устойчивые ветви решения.



управляющий параметр λ . В точке $\lambda = \lambda_c$, где по крайней мере одна из величин $\text{Re}\{\omega_k\}$ перестает быть отрицательной и становится положительной, время жизни флуктуаций в первом приближении стремится к бесконечности. Иначе говоря, релаксация флуктуаций *замедляется*. Такое значение λ_c называется *точкой бифуркации*. Это та точка, в которой одно или несколько новых решений векторного уравнения (1.1) соединяются с рассматриваемым опорным состоянием X^1). С каждым новым решением уравнения (1.1) принято связывать величину m (или *параметр порядка*), которая обращается в нуль в точке λ_c и служит мерой отклонения от опорного состояния, т. е. различия между концентрацией вещества на новой ветви решения и ее значением в опорном состоянии, амплитуды моды пространственных или временных колебаний и т. д. Нанося эти величины на график как функции от λ , мы построим так называемую *бифуркационную диаграмму*. Пример такой бифуркационной диаграммы для фазового перехода второго рода показан на рис. 1.1. При $\lambda < \lambda_c$ существует единственное асимптотическое решение. Оно устой-

¹⁾ Под новыми решениями мы понимаем здесь устойчивые или неустойчивые асимптотические режимы, к которым стремится система при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$. Переходные режимы нас не интересуют.

чиво и соответствует режиму, обладающему самой высокой симметрией, какая только совместима с наложенными на систему связями. В точке $\lambda = \lambda_c$ это решение становится неустойчивым, и в закритической области одновременно возникают новые ветви решения с более низкой симметрией. Такого рода бифуркация встречается в классических гидродинамических неустойчивостях, описанных Бенаром и Тейлором¹⁾. Она соответствует возникновению когерентной пространственной структуры конвективных ячеек в первоначально неупорядоченной жидкой фазе, когда наложенный на систему градиент температуры или угловой скорости достигает некоторого порогового значения. Аналогичная бифуркация часто встречается при возникновении пространственных, временных или пространственно-временных колебаний в химических и ферментативных системах. Хорошо известными примерами таких систем могут служить реакция Белоусова — Жаботинского или реакция с участием гликолитического фермента фосфофруктокиназы. В общем случае в фазовых переходах второго рода параметр порядка при $\lambda > \lambda_c$ возрастает как

$$(m = \text{const} \cdot (\lambda - \lambda_c)^{1/2}, \quad (1.8)$$

а время релаксации флуктуаций (в отличие от (1.7)) ведет себя в окрестности λ_c как

$$\tau_{\text{макро}} = \text{const}/|\lambda - \lambda_c|. \quad (1.9)$$

Помимо фазового перехода второго рода, типичная бифуркационная диаграмма которого показана на рис. 1.1, во всех разделах физических и биологических наук в сверхизобилии встречаются непрерывные переходы, аналогичные фазовым переходам первого рода. Такие переходы характеризуются существованием ветви решения, которая претерпевает бифуркацию в закритической области и является частью петли *гистерезиса*, изображенной на рис. 1.2. Когда внешний параметр λ непрерывно возрастает от нуля, параметр состояния X при $\lambda = \lambda'_c$ может скачком перейти с нижней ветви стационарных состояний *a* на верхнюю ветвь *б*. При последующем убывании параметра λ переход скачком с ветви *б* на ветвь *a* происходит при значении λ''_c , отличном от λ'_c .

В нашей монографии нам будет часто встречаться простейшая разновидность переходов первого рода, возможных в пространственно-однородных (хорошо перемешанных) системах. На языке теории катастроф она соответствует катастрофе типа сборки для однородных стационарных решений уравнения (1.2): если представить их как функции двух надлежаше выбранных

¹⁾ Обзоры по этим неустойчивостям см. в работах [1.40, 60].

управляющих параметров λ_1 и λ_2 , то эти состояния располагаются на поверхности, образующей сборку (рис. 1.3). Координаты $(\lambda_{1c}, \lambda_{2c}, X_c)$ точки, из которой начинается сборка, задают *критическую точку* системы.

Попытаться нарисовать сколько-нибудь полную картину всего, что известно о бифуркациях и явлениях самоорганизации, наблюдаемых даже в простейших природных и лабораторных системах, было бы непосильной задачей, далеко выходящей за

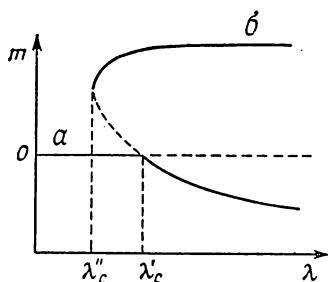


Рис. 1.2. Бифуркационная диаграмма для фазового перехода первого рода. В точке λ'_c подкритическая бифуркация приводит к рождению новой ветви решения. При $\lambda'_c < \lambda < \lambda''_c$ сосуществуют два локально устойчивых состояния — опорное состояние (кривая a) и новая ветвь решения (кривая b), разделенные неустойчивым пороговым состоянием.

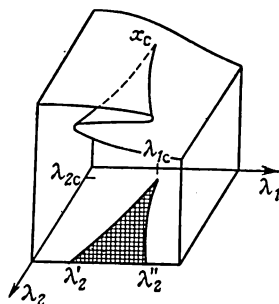


Рис. 1.3. Катастрофа типа сборки (полукубическая параболa с острием — точкой возврата).

рамки нашей книги, в особенности если учесть огромные успехи, достигнутые за последние десять лет во многих различных областях. Необходимые сведения читатель может почерпнуть в ряде книг, где приведены дальнейшие ссылки на оригинальные работы [1.14, 15, 40, 44, 54, 61—68]. Но существуют два аспекта организации макроскопических систем в постоянных средах, имеющие первостепенное значение и заслуживающие того, чтобы упомянуть их особо. Не упуская из виду эти аспекты, мы получаем возможность более правильно расставить акценты в той схеме, в рамках которой надлежит рассматривать индуцированные шумом переходы. В соответствии со сказанным мы посвящаем заключительную часть этого раздела вопросу о термодинамической интерпретации бифуркаций, а в разд. 1.2.2 приводим краткий анализ влияния внутренних флуктуаций на бифуркационные диаграммы.

До сих пор мы вводили механизмы самоорганизации и бифуркаций без учета зависимости этих явлений от интенсивности внешних связей, налагаемых на систему средой. Мы упоминали также о том, что в простейших примерах бифуркация происходит, когда тривиальное опорное состояние становится неустойчивым. Но, поскольку уравнения (1.1), вообще говоря, сильно нелинейны, при исследовании их в пространстве параметров обнаруживается целая иерархия других неустойчивостей. Именно с такими «каскадами» неустойчивостей связаны сложные режимы и существование множества сценариев, о которых упоминалось в разд. 1.1. Как мы уже подчеркивали там, разнообразие динамических режимов в макроскопической системе характерно для области, далекой от термодинамического равновесия. Наоборот, в пространстве параметров существует область, достаточно близкая к термодинамическому равновесию, в которой нелинейности, содержащиеся в уравнении (1.1), перестают играть роль независимо от того, какую систему мы изучаем. Динамические свойства *любой* макроскопической системы в этой области чрезвычайно упрощаются и перестают зависеть от выбора модели. Мы намеренно напоминаем здесь эти термодинамические результаты, поскольку на них особенно ясно видно четкое различие между двумя типами порядка в постоянной среде.

Прежде всего напомним ту ситуацию, с которой мы сталкиваемся в случае термодинамического равновесия. Если система находится в контакте с постоянной средой, которая к тому же пребывает в состоянии равновесия, т. е. не налагает на систему никаких ограничений в том, что касается вида потоков энергии или вещества, то может возникнуть только класс когерентной организации, известной под названием равновесных структур. Типичным примером является кристалл. Образование равновесных структур подчиняется универсальному механизму, который (по крайней мере качественно) хорошо понят. Этот механизм следует непосредственно из второго начала термодинамики. При постоянной температуре и постоянном объеме проблема сводится к поиску типа молекулярной организации, который минимизирует свободную энергию системы

$$F = E - TS,$$

где E — энергия, T — температура и S — энтропия. Самоорганизация при этом обусловлена конкуренцией между энергией и энтропией. При низких температурах система принимает конфигурацию, отвечающую минимуму энергии, даже если энтропия такой конфигурации мала, как в случае кристалла.

На протяжении последних 50 лет физики приложили немало усилий к тому, чтобы понять, как далеко удастся сохранить первозданную простоту и красоту законов самоорганизации в по-

стоянкой равновесной среде при переходе к явлениям самоорганизации в системах, испытывающих постоянное воздействие со стороны среды и поэтому лишенных возможности приблизиться к состоянию термодинамического равновесия. Интерес к исследованиям в этом направлении необычайно велик, так как многие из наиболее высокоорганизованных систем (например, биологические системы) находятся в средах, далеких от термодинамического равновесия.

Естественный подход к обобщению идей, объясняющих образование равновесных структур, на неравновесные ситуации состоит в изучении условий, при которых динамические свойства макроскопических систем могут быть описаны потенциальной функцией, играющей роль свободной энергии. Первый ответ на вопрос о том, как происходит самоорганизация в неравновесных системах, был получен в ходе развития линейной термодинамической теории необратимых процессов. Эта теория применима к системам, в которых налагаемые средой связи настолько слабы, что индуцируемые ими термодинамические силы лишь немного отличаются от своих нулевых равновесных значений. При таких условиях между скоростями необратимых процессов и термодинамическими силами существует линейная зависимость. Феноменологические коэффициенты пропорциональности, выражающие эту линейную зависимость, постоянны и удовлетворяют определенным условиям симметрии, известным под названием соотношений взаимности Онсагера, что обеспечивает существование некоторой функции состояния (производства энтропии P), всюду неотрицательной в пространстве параметров $\{X_i\}$, т. е.

$$P(\mathbf{X}) \geq 0, \quad (1.10)$$

и обладающей свойствами потенциала [1.69]. Неравенство (1.10) следует непосредственно из второго начала термодинамики. Оно выражает тот простой факт, что при отклонении системы от равновесного состояния, в котором по определению $P = 0$, необратимые процессы с необходимостью сопровождаются диссипацией энергии. Если среда удерживает систему от перехода в устойчивое равновесное состояние, то стационарные состояния, являющиеся его аналогом в неравновесной области, т. е. принадлежащие термодинамической ветви [1.70], соответствуют минимуму производства энтропии P . Действительно, справедливо соотношение

$$d_t P(\mathbf{X}) \leq 0, \quad (1.11)$$

где равенство выполняется лишь для стационарных состояний [1.69, 71, 72]. По теореме Ляпунова [1.73], из неравенств (1.10, 11) следует, что стационарные состояния термодинамической

ветви асимптотически устойчивы. Кроме того, свойства симметрии, гарантирующие, что $P(X)$ вблизи равновесного состояния является потенциальной функцией, позволяют в качестве «побочного продукта» доказать *монотонный* характер приближения к термодинамической ветви (во времени), т. е. исключить возможность возникновения хотя бы затухающих колебаний [1.74]. Подводя итог сказанному, можно утверждать, что как динамические, так и стационарные свойства макроскопических систем со слабыми связями, наложенными постоянной средой, качественно неотличимы от свойств равновесных состояний: никакой новый тип порядка при этом не возникает.

Для того чтобы стала возможной бифуркация от термодинамической ветви, потенциал должен утратить свойства, выражаемые неравенствами (1.10, 11). Такое нарушение свойств потенциала может произойти лишь на конечном расстоянии от термодинамического равновесия. Именно оно легло в основу понятия термодинамического порога самоорганизации. Суть этого важного результата выражает следующая теорема, сформулированная Гленсдорфом и Пригожиным [1.14].

Теорема. Рассмотрим однофазную открытую нелинейную систему, на которую наложены не зависящие от времени неравновесные граничные условия.

Стационарные состояния такой системы, принадлежащие конечной окрестности состояния термодинамического равновесия, асимптотически устойчивы и стремятся к нему монотонно во времени. Если расстояние от равновесия превышает некоторое критическое значение, то стационарные состояния *могут* стать неустойчивыми.

Таким образом, термодинамический порог самоорганизации достигается, когда термодинамическая ветвь претерпевает первую бифуркацию. В точке бифуркации динамика системы определяется существующими в системе нелинейностями. Когерентное поведение больших ансамблей атомов или молекул становится возможным и при благоприятных условиях приводит к образованию *диссипативных структур*. Можно сказать также, что за термодинамическим порогом самоорганизации мы вступаем в область синергетики: огромное число степеней свободы макроскопических систем резко сокращается. Миллиарды и более молекул оказываются «подчинены», если воспользоваться терминологией Хакена [1.54], небольшому числу мод.

1.2.2. Внутренние флуктуации

В описанные выше механизмы самоорганизации не были включены флуктуации. Подход был вполне детерминистическим: внешние флуктуации не принимались во внимание, поскольку

свойства среды предполагались строго постоянными, а внутренние флуктуации, хотя они и неизбежны, считались пренебрежимо слабыми. В нашей монографии мы хотим ослабить предположение о постоянстве среды и «с пристрастием» рассмотреть переходы, индуцированные случайно флуктуирующей средой. Свой подход нам хотелось сделать по возможности элементарным, поэтому мы стремились включать в описание внешние флуктуации, избегая учитывать без излишней надобности спонтанные внутренние флуктуации системы. Поскольку исходным пунктом в нашей теории служит векторное уравнение (1.1), применимостью этой модели нуждается в обосновании, тем более что она описывает неустойчивости в той области, где по определению чувствительность к внутренним флуктуациям повышается. Внутренние флуктуации составляют неотъемлемую часть кинетических процессов, посредством которых система эволюционирует. Именно поэтому существенно знать заранее, могут ли такие флуктуации изменить исход детерминистического описания, в частности привести к перестройке бифуркационной диаграммы.

Находясь под влиянием внутренних флуктуаций, система перестает пребывать в каком-то определенном состоянии. Она начинает совершать случайные блуждания в пространстве состояний, порождающие некоторое распределение значений параметров состояний. Следовательно, подходящей величиной для описания системы становится вероятность того, что параметры состояния принимают определенное значение. Для того чтобы найти эту вероятность и ее эволюцию во времени, в литературе используются три существенно различных метода (см. работу [1.75], где приведены дальнейшие ссылки). В рамках нашей монографии нет необходимости излагать эти методы подробно, тем более что все они приводят к одному и тому же результату, а именно к заключению о том, что внутренние флуктуации *не изменяют* локальных свойств устойчивости системы. В частности, внутренние флуктуации никак не сказываются на положении точки перехода¹⁾. Кроме того, все три метода находятся в полном качественном согласии в том, что касается поведения внутренних флуктуаций: в окрестности устойчивого макроскопического состояния амплитуды флуктуаций концентрации (если принять их за переменные) ведут себя как $1/V$, где V — объем системы. В критической точке эти флуктуации нарастают как величины порядка $V^{-1/2}$ [1.76]. Следовательно, в пределе макроскопически большой системы (в термодинамическом пределе при $V \rightarrow \infty$) они снова становятся пренебрежимо малыми, как в случае опорного состояния. Самое важное здесь то, что усиление внутрен-

¹⁾ Мы имеем в виду здесь пространственно-однородные системы — тот самый тип систем, рассмотрению которого в основном посвящена наша книга.

них флуктуаций в окрестности критической точки не влияет на положение этой точки и не вносит качественных изменений в детерминистическое описание. Но и это еще не все: оказывается, что экстремумы плотности вероятности, имеющей четко выраженные пики, в общем случае располагаются в непосредственной близости от решения детерминированной системы и совпадают с ним в пределе большой системы, т. е. при $V \rightarrow \infty$. Следовательно, получаемые в рамках детерминистического описания бифуркационные диаграммы остаются в силе в том смысле, что они описывают в основном поведение экстремумов плотности вероятности, соответствующих макроскопическим состояниям системы.

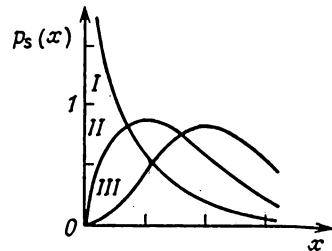
1.3. Внешний шум

В отличие от внутренних флуктуаций, которые для макроскопически больших систем пренебрежимо малы, флуктуации, обусловленные случайностью среды, весьма существенны. Основное различие между внутренними флуктуациями и внешним шумом состоит в том, что флуктуации среды ведут себя *не* как обратные степени характерного размера системы. Если принять во внимание ту важную роль, которую играет среда в поведении неравновесных систем, не приходится удивляться тому, что при определенных условиях влияние флуктуаций среды может перестать быть пренебрежимо малым. Как ни странно, но отдельные результаты в этом направлении стали время от времени появляться в литературе лишь за последние 25 лет, причем результаты чисто теоретических исследований из самых различных областей естествознания. Еще более странно, что эти результаты почти не привлекли к себе внимания. Такое «отсутствие резонанса», по-видимому, отчасти обусловлено несколько необычной манерой изложения результатов, а также тем, что они поступали в основном из разделов физики, лежащих вне ее основного ядра. Насколько нам известно, первое описание не пренебрежимо малого эффекта внешнего шума было дано в работе П. И. Кузнецова, Р. Л. Стратоновича и В. И. Тихонова [1.77] о воздействии электрических флуктуаций на ламповый генератор (цепи, представляющей интерес в радиофизике; см. также работу [1.78]). Авторы работы заметили, что при изменении интенсивности внешнего шума обнаруживаются два качественно различных типа поведения генератора (рис. 1.4). Если уровень внешнего шума высок, то амплитуда колебаний в основном равна нулю. Если же интенсивность шума падает ниже некоторого порогового значения, то амплитуда колебаний в основном находится вблизи своего детерминированного значения. Авторы ограничились единственным замечанием, отметив, что последний случай

более интересен. Аналогичный случай был отмечен также Р. Л. Стратоновичем и П. С. Ланда [1.79] в их работе о воздействии шумов на генератор другого типа, а также в книге Р. Л. Стратоновича [1.80]. Однако во всех названных нами работах открытое явление не было прокомментировано сколько-нибудь подробно, и это понятно, так как в то время еще не существовала теория неравновесных фазовых переходов, в рамках которой можно было бы по достоинству оценить всю важность новых явлений.

Через несколько лет эти явления были переоткрыты в совершенно ином контексте экологических систем. Рассматривая про-

Рис. 1.4. Примерный ход стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ амплитуды лампового генератора при трех значениях интенсивности внешних флуктуаций. При больших интенсивностях плотность вероятности $p_s(x)$ обращается в бесконечность при $x = 0$ (кривая I), в то время как при малых интенсивностях она находится вблизи детерминистического состояния (кривые II и III).



стую задачу о логистическом росте популяции, Мэй [1.81] пришел к выводу, что в флуктуирующей среде популяция погибла бы при любом среднем значении параметра мальтусовского роста, если флуктуации этого параметра достаточно сильны. Иначе говоря, точка перехода от выживания популяции к ее гибели (в рассмотренной Мэем простой модели такой переход происходит при детерминированных условиях, когда смертность в точности компенсирует рождаемость) начинает зависеть от дополнительного параметра, соответствующего дисперсии флуктуаций среды. Именно эта зависимость и приводит к смещению точки перехода. Приблизительно в то же время аналогичное явление было описано Ганом, Нитцаном, Ортолевой и Россом [1.82] для рождения предельного цикла в некоторой ферментативной колебательной системе.

Всем перечисленным выше системам, заимствованным из различных областей естествознания, присуща одна общая особенность: воздействие внешнего шума зависит от состояния системы. Речь идет не просто об аддитивном шуме, как в традиционном ланжевеновском подходе к описанию случайных явлений в физике. Шум во всех этих явлениях, ныне известный под названием мультипликативного шума, был впервые рассмотрен Кубо [1.83] в его стохастической теории формы линии (динамического сужения в явлениях магнитного резонанса). Кубо рассматривал линейную систему (случайно модулированный осциллятор), фи-

зической реализацией которой является прецессия спина в магнитном поле, содержащем случайную компоненту. Но в силу линейности задачи переходы, аналогичные описанным выше, обнаружены не были.

1.4. Неравновесные фазовые переходы, индуцированные шумом

Приведенная выше весьма разнородная по своему составу коллекция систем наводит на мысль о том, что в отличие от внутренних флуктуаций внешний шум может изменять свойства локальной устойчивости макроскопически больших систем. Точка перехода сдвигается в зависимости от внешнего шума. Как будет показано в нашей монографии, это общее явление для нелинейных систем, подверженных действию мультипликативного внешнего шума. Сдвиг бифуркационной диаграммы, по всей видимости, не столь удивителен, стоит лишь над ним хоть раз задуматься. Ведь как бы то ни было, предположение о том, что флуктуации, величина которых достигает порядка V^0 , а не V^{-1} , играют важную роль в окрестности точек перехода, весьма правдоподобно.

Однако основной движущей пружиной нашей работы является стремление продемонстрировать еще более глубокие и гораздо менее очевидные варианты макроскопического поведения нелинейных систем, индуцируемого внешним шумом. Неравновесные системы по самой своей природе тесно связаны со средой и зависят от нее, о чем уже говорилось в разд. 1.2. Естественно возникает вопрос: не может ли взаимодействие между *неравновесностью* системы и *случайностью* среды при определенных условиях приводить к резкой перестройке в поведении системы даже за пределами малой окрестности детерминированной точки потери устойчивости? Иначе говоря, может ли внешний шум приводить к более глубоким изменениям бифуркационных диаграмм, чем простой сдвиг в пространстве параметров? Тот же вопрос можно сформулировать и по-другому: всегда ли нелинейные системы, связанные с быстро флуктуирующей средой, подстраивают свое макроскопическое поведение под средние свойства среды или могут представиться случаи, когда система реагирует на случайность среды каким-то более активным образом, например, уходя в режим, запрещенный при детерминированных внешних условиях? На все эти вопросы следует дать утвердительные ответы. Установлено, что даже необычайно быстротечный полностью случайный внешний шум может вызывать глубокие изменения в макроскопическом поведении нелинейных систем: индуцировать новые переходы, совершенно неожиданные с точки зрения обычного феноменологического описания. Мы подробно изложим теоретические методы, используемые для ана-

лиза таких индуцированных шумом явлений, исследуем различные аспекты их феноменологии и обсудим, к каким последствиям они приводят для построения представительных модельных систем, заимствованных из физики, химии и биологии. Следующий раздел мы посвящаем первому обсуждению избранной нами процедуры моделирования.

1.5. Моделирование флуктуаций среды

Внешний шум вездесущ, поэтому при исследовании его воздействия на те или иные системы приходится рассматривать большое число весьма различных ситуаций. Приведем лишь несколько примеров: распространение волн в случайной среде, стохастическое ускорение частиц, обнаружение сигналов, оптимальное управление при наличии флуктуирующих связей и т. д. Как уже отмечалось, наша цель состоит в описании нового класса неравновесных фазовых переходов, а именно индуцированных шумом изменений макроскопического поведения нелинейных систем. Для того чтобы мы могли дать ясное и прозрачное описание интересующих нас явлений, выявить все наиболее существенные особенности индуцированных шумом переходов, не погрязая в то же время в трясине частностей и излишних осложнений, разумно сосредоточить внимание на тех типах систем и сред, в которых индуцированные шумом явления не затемнены другими осложняющими факторами. Исходя из этих соображений, мы остановили свой выбор на следующих системах.

1) Пространственно-однородные системы¹⁾. Такие системы являются удовлетворительным приближением широкого класса приложений, например, в тех случаях, когда перенос осуществляется быстро по сравнению с кинетикой «реакций» в системе или система искусственно поддерживается однородной (в химических системах однородность достигается принудительным перемешиванием). Такие системы принято называть нульмерными системами.

2) Макроскопически большие системы в термодинамическом пределе ($V \rightarrow \infty$, где V — характерный размер («объем») системы). Переходом к термодинамическому пределу удается избавиться от всякого рода осложнений, вызываемых другими источниками шума. Действительно, как показано в разд. 1.2.2, при описании макроскопически больших систем внутренние флуктуации допустимо считать пренебрежимо малыми. Было установлено, что хотя внутренние флуктуации в критической точке уси-

¹⁾ Исключение составляют рассмотренные в разд. 8.7 переходы в жидких кристаллах.

ливаются, детерминированное описание остается в силе¹⁾. Это означает, что в постоянной среде макроскопические параметры состояния (концентрации, температура и т. д.) могут быть адекватно описаны векторным детерминистическим феноменологическим уравнением (скоростей) вида (1.1). Уравнения (1.1) образуют прочную основу феноменологической теории влияния внешнего шума на макроскопическую систему.

3) Системы, допускающие удовлетворительное описание с помощью *одной* интенсивной переменной. Выбор этих систем основан на том, что точные аналитические решения, как правило, удастся получить лишь для одномерных систем. При исследовании переходов, индуцированных шумом, желательно по возможности избегать приближенных методов, так как даже малые возмущения могут приводить к качественной перестройке поведения системы (причем нередко режим, на который выходит система, противоречит интуитивным представлениям). Учитывая это, мы стремимся по крайней мере на первом этапе исследований устанавливать недавно открытые эффекты внешнего шума с помощью строгих процедур, ибо в противном случае справедливость полученных результатов была бы поставлена под сомнение различного рода нареканиями по поводу применимости приближенных схем. Разумеется, при любом описании реального мира определенные физические допущения и идеализации неизбежны. Тем не менее мы будем пользоваться только такими методами, применимость которых общепризнана, и всякий раз тщательно обсуждать те следствия, к которым они приводят. Разумеется, все полученные результаты подлежат экспериментальной проверке.

Определив класс систем, который мы намереваемся рассмотреть, сосредоточим теперь внимание на среде, в частности нас будет интересовать, каким образом моделировать ее стохастически изменяющиеся свойства. В отличие от внутренних флуктуаций стохастичность среды имеет не микроскопическое происхождение. Внешний шум часто проявляется в турбулентном, или хаотическом, состоянии окружающей среды и отражает зависимость внешних параметров от большого числа взаимосвязанных факторов среды. Вследствие этого флуктуации среды изменяются не пропорционально обратной степени характерного размера системы. Именно поэтому они не исчезают на макроско-

¹⁾ Важную роль для затронутого нами круга вопросов играет пространственная размерность системы. Приняв за отправной пункт нульмерное детерминированное описание, мы в дальнейшем предполагаем, что флуктуации не нарушают однородность системы. Известно, однако, что в этих случаях, когда приходится рассматривать неоднородные флуктуации, они могут определенным образом сказываться на природе или на положении точек перехода [1.84, 85].

пическом уровне описания системы. В лаборатории экспериментатор явно имеет возможность в определенных пределах управлять интенсивностью внешнего шума. При тщательной постановке эксперимента уровень шума может быть понижен, однако полностью избавиться от внешнего шума невозможно. С другой стороны, интенсивность флуктуаций среды можно контролируемым образом повысить, чтобы исследовать ее влияние на поведение системы. Это еще одно отличие внешнего шума от внутренних флуктуаций, делающее его гораздо более податливым «материалом» в руках экспериментатора.

Как бы то ни было, и в естественных, и в лабораторных системах внешний шум никогда не бывает строго равным нулю. В связи с этим возникает необходимость уточнить феноменологическое описание с тем, чтобы в него можно было включить эффекты стохастичности среды. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда между системой и окружающей ее средой нет обратной связи и среда не претерпевает систематической эволюции во времени. Первое допущение стандартно и по существу сводится к требованию, чтобы характерные размеры среды во много раз превышали характерные размеры системы. Второе допущение выполняется в большинстве приложений, по крайней мере на протяжении времени наблюдения за системой. Мы приняли его для того, чтобы четко отделить эффекты, обусловленные флуктуациями среды (изучению которых посвящена наша монография), от эффектов, обусловленных систематической эволюцией окружающей среды, например влияния периодических сезонных вариаций на природные системы.

Влияние среды на макроскопические свойства среды описывается на уровне феноменологического уравнения с помощью внешних параметров λ . Если система связана с флуктуирующей средой, то внешние параметры становятся один за другим случайными величинами. При двух принятых нами предположениях эти величины можно представить стационарными случайными процессами λ_t . Для дальнейшего удобно разложить λ_t на две части $\lambda + \xi_t$, где λ соответствует среднему состоянию среды, а ξ_t описывает флуктуации относительно среднего состояния. Ясно, что $E\{\xi_t\} = 0$ ¹⁾. Включение в феноменологическое описание внешнего шума приводит к следующему стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ):

$$\dot{X}_t = f_{\lambda_t}(X_t). \quad (1.12)$$

В весьма обширный класс феноменологических уравнений, встречающихся в приложениях, внешний параметр входит линейно. (Нелинейная зависимость от параметра рассмотрена в разд. 8.7

¹⁾ $E\{\}$ означает среднее значение случайной величины (см. гл. 2).

и гл. 9.) Рассмотрим пока лишь один флуктуирующий внешний параметр. Уравнение (1.12) при этом имеет вид

$$\dot{X}_t = h(X_t) + \lambda g(X_t) + \zeta_t g(X_t). \quad (1.13)$$

Следующий шаг в процедуре моделирования состоит в явной «привязке» вероятностных характеристик случайного процесса к физическим свойствам среды. Подробное обсуждение этой проблемы мы отложим до тех пор, пока не сформулируем ее более точно, позанимаясь необходимыми методами из теории вероятностей, но и сейчас вполне уместно сформулировать проблему на более эвристическом уровне, полагаясь на интуитивное понимание используемых вероятностных терминов. В некоторых случаях механизм, порождающий случайность среды, может быть точно указан. Именно так обстоит дело с лабораторными экспериментами по изучению влияния флуктуирующих внешних воздействий, в которых внешний шум контролируется экспериментатором. Но в большинстве случаев, особенно в естественных системах, ситуация, как правило, столь сложна, что вариации внешних параметров не могут быть приписаны какой-нибудь одной вполне определенной причине. Приходится довольствоваться экспериментальным наблюдением, согласно которому система «воспринимает» окружающую среду как источник шума. Оказывается, что в подобных ситуациях для задания случайного процесса ζ_t нет необходимости точно указывать источник флуктуаций среды. Действительно, рассмотрим два основных случая, охватывающих подавляющее большинство приложений.

1) *Неперывно изменяющиеся внешние параметры.* Как показывают экспериментальные наблюдения, в поразительно большом числе случаев значения внешнего параметра распределены по кривой, удовлетворительно описываемой хорошо знакомой колоколообразной кривой гауссовского распределения, известного также под названием нормального распределения. Распространенность нормального распределения следует из одной доказываемой в теории вероятностей важной и глубокой теоремы, получившей название центральной предельной теоремы. В большинстве случаев флуктуации внешних параметров обусловлены кумулятивным действием многочисленных факторов, определяющих состояние среды. Центральная предельная теорема утверждает, что при любом распределении вероятностей этих факторов, если они не слишком отличаются друг от друга и не слишком сильно коррелированы, флуктуации внешних параметров имеют гауссовское распределение. Более точную формулировку этой фундаментальной теоремы теории вероятностей, а также условия ее применимости читатель может найти в любом стандартном учебнике теории вероятностей [1.86, 87]. В свете центральной предельной теоремы «вездесущность» гауссов-

ского распределения в приложениях перестает быть столь удивительной. Временные свойства гауссовского внешнего шума мы рассмотрим в дальнейшем.

2) *Дробовой шум*. Ко второму важному классу внешних флуктуаций мы относим появление в среде вполне определенных дискретных событий в случайные моменты времени. Очень часто приемлемой моделью шума этого типа служит пуассоновский процесс, характеристики которого приведены во всех подробностях в работе [1.88]. Такого рода шум напоминает тот, который возникает от дробового эффекта в электронных лампах, поэтому обычно его принято называть дробовым шумом.

Два названных выше класса шумов охватывают большинство ситуаций, встречающихся в естественных системах. Ясно, что для построения удовлетворительной модели внешнего шума в большинстве ситуаций не требуется знать детальный механизм вариаций среды. Центральная предельная теорема теории вероятности утверждает, что в большинстве случаев поведение внешнего шума универсально. Это позволяет выбирать модели флуктуаций среды среди наиболее простых и важных классов случайных процессов: гауссовских и пуассоновских.

Рассмотрим теперь кратко временные свойства внешнего шума. Оказывается, что в достаточно широком классе приложений существует четкое разделение между временным масштабом макроскопической эволюции системы и временным масштабом флуктуаций среды. Внешний шум подвержен более быстрым временным вариациям, чем система. Среда очень быстро «забывает» о том, в каком состоянии она недавно находилась. А поскольку среда обладает очень «короткой» памятью (по сравнению с системой), то в физической литературе обычно совершают предельный переход к идеализации — среде без памяти. При всей внешней безобидности этого понятия оно весьма «коварно». Именно при рассмотрении сред без памяти мы вторгаемся на неизведанную территорию, где нас на каждом шагу подстерегают западни и ловушки, в которые рискует попасть неосторожный теоретик. Предельный переход к среде без памяти — операция весьма тонкая, таящая немало опасностей при неосмотрительном обращении с ней. Этот предельный переход мы с надлежащей осторожностью совершаем в разд. 3.2. Там же указаны и различного рода ловушки. Тот, кому повезет или кто сумеет, руководствуясь интуицией или как-нибудь иначе, преодолеть все трудности, станет обладателем сокровища, которое может обернуться и великим благом, и немалым бедствием: белого шума. Так принято называть случайный процесс, немедленно «забывающий» только что принятое значение. На более техническом языке это означает, что значения, принимаемые белым шумом в каждый момент времени, независимы. Процессы, обладающие

этим свойством, принято называть полностью случайными. Ясно, что они чрезвычайно нерегулярны, траектории их причудливо «скачут». Ситуация усугубляется тем, что при правильно выполненном предельном переходе интенсивность белого шума оказывается бесконечно большой, так как скачки происходят между минус и плюс бесконечностью. С одной стороны, интуитивно ясно, что полностью случайный процесс бесконечно большой интенсивности не оказывал бы на систему никакого влияния. С другой стороны, это означает, что белый шум представляет собой весьма странный объект, который вряд ли можно считать обычным случайным процессом. Для случайных процессов белый шум означает то же самое, что дельта-функция Дирака для детерминированных функций. Это обобщенный случайный процесс (см. приложение А) и обращаться с ним необходимо весьма осторожно. Так, бессмысленно производить над дельта-функцией какую-нибудь нелинейную операцию (например, возводить ее в квадрат).

Естественно возникает вопрос: можно ли придать какой-нибудь смысл дифференциальному уравнению типа (1.13), в правой части которого стоит белый шум? Крайняя нерегулярность белого шума означает, что производная по времени от X_t должна быть определена не в обычном смысле. Оказывается, однако, что всеми «неприятными» свойствами белого шума довольно часто можно пренебречь, если $g(X)$ — постоянная, т. е. если влияние внешнего шума не зависит от состояния системы. Если это так, то с уравнением (1.13) можно обращаться как с дифференциальным уравнением для обычных функций и при этом получать вполне осмысленные результаты. Но, вообще говоря, влияние внешнего шума зависит от состояния системы. Если это так, то белый шум умножается на функцию $g(X_t)$, которая также совершенно нерегулярна, и необходимо тщательно выяснить, какой смысл можно придать уравнению (1.13). Кое-какие основания для оптимизма все же имеются: если уравнению (1.13) можно придать хотя бы какой-нибудь смысл, то случайный процесс X_t на один порядок менее нерегулярен, чем белый шум: X_t был получен при интегрировании поданного на вход белого шума и поэтому должен был сгладиться. Способ, позволяющий преуспеть в придании вполне определенного смысла уравнению (1.13), состоит в замене этого уравнения эквивалентным интегральным уравнением¹⁾

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_\lambda(X_s) ds + \int_0^t g(X_s) \xi_s ds. \quad (1.14)$$

¹⁾ В дальнейшем белый шум всегда будет обозначаться символом ξ ; мы сохраним символ ζ , как в (1.13), для других видов шума

После того как задача сформулирована таким образом, вопрос сводится к непротиворечивому определению стохастического интеграла $\int g(X_s) \xi_s ds$. Условимся для простоты пока рассматривать только случаи непрерывно изменяющихся внешних параметров (именно этот случай занимает центральное место в нашей монографии). Тогда в каждый момент времени флуктуации будут нормально распределены. Такая часто встречающаяся разновидность белого шума называется гауссовским белым шумом. Естественно возникает вопрос: в каком смысле величина, совершающая скачки между минус и плюс бесконечностью, может иметь гауссовское распределение? На этот, а также на другие вопросы, возникающие в связи с необычными свойствами белого шума, мы дадим обстоятельный ответ в последующих главах, а пока ограничимся беглым изложением наиболее важных особенностей белого шума, чтобы читатель, не знакомый с этим понятием, мог прочувствовать его необычность.

Белый шум — понятие весьма полезное, если с должным почтением относиться к тем тонкостям, которые сокрыты в нем. Наивный подход к белому шуму, при котором он отождествляется с обычным случайным процессом, чреват большими опасностями и может приводить к бессмысленным результатам. Мы так упорно подчеркиваем необычные свойства белого шума отнюдь не потому, что нами движет математический педантизм и стремление к наведению математической строгости. Нам бы хотелось по возможности избежать смешения понятий и противоречий, столь характерных для литературы по системам с мультипликативным шумом, появившейся за последние два десятилетия. Основной источник всех недоразумений связан с определением

стохастического интеграла $\int g(X_s) \xi_s ds$. Проблема состоит в том, что хотя этому интегралу и тем самым СДУ (1.13) может быть придан некоторый смысл, несмотря на чрезвычайно нерегулярную природу белого шума, это может быть сделано *не единственным* способом именно потому, что белый шум столь нерегулярен. Трудность, о которой идет речь, не имеет ничего общего с существованием различных определений обычного интеграла (по Риману и по Лебегу): для того класса функций, для которого может быть определен и интеграл Римана, и интеграл Лебега, оба определения приводят к одному и тому же результату. Что же касается различия между двумя определениями стохастического интеграла, связанными с именами Ито и Стратоновича, то они приводят к различным результатам. Для того чтобы читателю было понятнее, о чем идет речь, а мы могли исподтишка бросить взгляд на то, что ожидает нас в дальнейшем, опишем на чисто качественном уровне, как Ито и Стратонович опре-

деляют интеграл $\int g(X_s) \xi_s ds$. Оба определения исходят из эвристического утверждения о том, что интегрирование гауссовского белого шума порождает броуновское движение, которое мы обозначим W_t (подробности см. в гл. 2). Стохастический интеграл может быть представлен в виде

$$\int g(X_s) \xi_s ds = \int g(X_s) dW_s,$$

после чего интеграл в правой части определяется, как в случае обычного интеграла, как предел аппроксимирующих его сумм. Определение Ито соответствует выбору интегральных сумм

$$\int g(W_s) dW_s = \lim \sum g(W_{t_{i-1}}) (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

а определение Стратоновича —

$$\int g(W_s) dW_s = \lim \sum g\left(\frac{W_{t_{i-1}} + W_{t_i}}{2}\right) (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

Единственное различие между ними состоит в выборе точки, в которой вычисляется значение функции g : Ито выбирает левую граничную точку $W_{t_{i-1}}$ элементарного интервала времени, а Стратонович отдает предпочтение середине интервала $(W_{t_{i-1}} + W_{t_i})/2$. Для обычного (детерминированного) интеграла

$$\int U(X) dX = \lim \sum U(\tilde{X}_i) (X_i - X_{i-1}),$$

в какой бы точке \tilde{X}_i ни вычислялось значение функции U , лишь бы $\tilde{X}_i \in [X_{i-1}, X_i]$, предел (значение интеграла) остается одним и тем же. Для стохастического интеграла это неверно из-за «дикого» поведения гауссовского белого шума: предел интегральных сумм зависит от того, в какой точке вычисляется значение подынтегральной функции. Определения Ито и Стратоновича приводят к различным значениям одного и того же интеграла (см. гл. 5). Например,

$$\text{Ито: } \int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_0^2) - t/2,$$

$$\text{Стратонович: } \int_0^t W_s dW_s = (W_t^2 - W_0^2)/2.$$

Разумеется, излишне говорить, что оба определения стохастического интеграла (Ито и Стратоновича) математически корректны

и могут быть положены в основу непротиворечивого исчисления. Тем не менее неединственность определения стохастического интеграла для белого шума смутила и поставила в тупик не одного ученого. Мортенсен не без основания писал в 1969 г. [1.89, с. 272]: «Хотя этот сюжет [исчисления Ито и Стратоновича] за последние два года обсуждался в ряде работ, по прочтении некоторых из них количество неясных мест не уменьшается, а увеличивается». Это замечание относится и к современной литературе по системам с шумом, быть может, даже в большей степени, чем прежде. Несмотря на четкие, тщательно продуманные работы Мортенсена и других авторов, всему кругу проблем по-прежнему недостает ясности. Не прекращаются попытки доказать неверность одного определения стохастического интеграла и установить другое как единственно «законное» и приемлемое в научных приложениях. Большинство возникающих недоразумений обусловлено тем, что слишком многие исследователи, работающие в интересующей нас области, не сознают особую природу белого шума — объекта необычного, но зато и открывающего необычайные перспективы. Они упорно закрывают глаза на то, что белый шум является обобщенным случайным процессом с совершенно иными свойствами, чем обычный случайный процесс. Широко распространено и такое мнение, будто значительная часть связанных с белым шумом тонкостей представляет интерес лишь для математиков, ставящих превыше всего безупречную строгость изложения, и не имеет особого значения для практических приложений. Сторонники такого мнения оказываются в довольно затруднительном положении, когда рано или поздно выясняется, что те самые математические «излишества», к которым они относились с таким предубеждением, приводят к весьма ощутимым практическим следствиям. Именно такая ситуация наблюдается ныне в исследовании систем, мультипликативно связанных с флуктуирующей средой. Для того чтобы быстро рассеять все недоразумения, в действительности требуется лишь минимальный уровень математической строгости и надлежащие меры предосторожности при обращении с характерными особенностями белого шума.

Итак, для того чтобы раз и навсегда закрыть двери перед неоднозначностями, неточностями и противоречиями, которыми изобилует в прошлом литература по шумам, мы излагаем в следующих главах некоторые основные понятия теории вероятностей, марковских диффузионных процессов и стохастических дифференциальных уравнений. В центре нашего внимания неизменно находятся практически важные понятия. Все математические тонкости, имеющие лишь второстепенное значение для нашего подхода, мы опускаем.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей является адекватной математической основой для решения проблемы влияния внешнего шума на нелинейные системы. Для того чтобы мы могли ясно изложить процедуру моделирования этих явлений, необходимо напомнить в этой главе на определенном уровне математической строгости некоторые основные понятия теории вероятностей и одновременно ввести обозначения. Мы приложим все старания, чтобы наше изложение было по возможности замкнутым, в особенности там, где речь идет о математических аспектах нашего подхода. Если читатель совершенно незнаком с теорией вероятностей и ощущает потребность восполнить пробел в своих знаниях, мы рекомендуем ему обратиться к работам [1.86(87, 2..1)] или к другим стандартным учебникам.

2.1. Вероятностное пространство и случайные величины

Основным понятием теории вероятностей является вероятностное пространство — упорядоченная тройка (Ω, \mathcal{A}, P) , состоящая из пространства элементарных событий Ω , поля событий \mathcal{A} и вероятностной меры P . В определении случайной величины участвуют только первые два элемента вероятностной тройки.

2.1.1. Пространство элементарных событий Ω и поле событий \mathcal{A}

Рассмотрим какой-нибудь эксперимент, исход которого не может быть предсказан достоверно, например выбор молекулы из баллона с газом или независимый выбор чашки Петри в эксперименте по изучению роста бактерий. Для того чтобы мы могли фиксировать все возможные исходы испытаний, условимся обозначать исход каждого испытания символом ω . В приведенных выше экспериментах он соответствовал бы «ярлыку, приклеенному» к каждой молекуле и чашке Петри. После того как символ ω введен, интересующий нас эксперимент может быть формально охарактеризован множеством всех возможных исходов (т. е. значений символа ω). Абстрагируясь от конкретных

примеров, мы получаем эвристическое обоснование следующего определения. Пространство элементарных событий Ω есть множество элементарных исходов, каждый из которых помечен символом ω : $\omega \in \Omega$. Число элементарных исходов может быть конечным, как в приведенных выше примерах, счетно или несчетно бесконечным.

Вторым элементом \mathcal{A} вероятностного пространства является σ -поле (или σ -алгебра) событий. Вопреки своему, возможно, несколько устрашающему названию, это очень простое, доступное для понимания понятие. Рассмотрим множество элементарных исходов, имеющих смысл или представляющих интерес в данном эксперименте. В приведенных выше примерах это могло бы быть множество всех молекул со скоростью меньше $(kT/m)^{1/2}$ или множество всех чашек Петри, содержащих популяции, которые состоят более чем из N бактерий. Такое подмножество A пространства элементарных событий Ω ($A \subset \Omega$) называется событием. Событие происходит, если элементарный исход ω принадлежит подмножеству A , т. е. если скорость молекулы $|v| < (kT/m)^{1/2}$ или число бактерий в выбранной чашке Петри больше N . По определению σ -поле \mathcal{A} есть множество всех событий, т. е. $A \in \mathcal{A}$. Множество \mathcal{A} заведомо меньше или равно множеству всех подмножеств пространства элементарных событий Ω , так называемому булиану, обозначаемому $\mathcal{P}(\Omega)$. Если пространство элементарных событий Ω конечно и содержит, например M элементов, то \mathcal{A} также содержит лишь конечное число элементов, не превышающее 2^M — числа элементов множества $\mathcal{P}(\Omega)$. Множество \mathcal{A} событий вполне естественно обладает следующими свойствами.

1) Оно содержит достоверное событие:

$$\Omega \in \mathcal{A}. \quad (2.1)$$

(Если выполнить эксперимент, то он завершится одним из возможных исходов.)

2) Оно содержит невозможное событие, а именно пустое множество \emptyset :

$$\emptyset \in \mathcal{A}. \quad (2.2)$$

(Если выполнить эксперимент, то он не может не завершиться одним из возможных исходов.)

3) Если A — событие, то его дополнение $\bar{A} = \Omega - A$ также есть событие, т. е.

$$\text{если } A \in \mathcal{A}, \text{ то } \bar{A} \in \mathcal{A}. \quad (2.3)$$

4) Если A и B — события, то их объединение и пересечение также события, т. е.

$$\text{если } A, B \in \mathcal{A}, \text{ то } \begin{cases} A \cup B \in \mathcal{A}, \\ A \cap B \in \mathcal{A}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Любое множество \mathcal{A} подмножеств пространства элементарных событий Ω , удовлетворяющее условиям (2.1—4), называется полем. Для практических целей удобно, чтобы объединение счетного множества событий также принадлежало множеству \mathcal{A} , т. е. чтобы выполнялось условие

$$\text{если } A_n \in \mathcal{A}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ то } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}. \quad (2.5)$$

Разумеется, условие (2.5) автоматически выполняется для пространств элементарных событий, содержащих лишь конечное число M элементарных исходов. В этом случае \mathcal{A} также содержит лишь конечное число элементов. Если же Ω содержит бесконечно много элементарных исходов, то условие (2.5) необходимо вводить специально, и поле событий, удовлетворяющее этому дополнительному свойству, и есть то, что принято понимать под σ -полем. В приведенном выше примере с ростом бактерий число чашек Петри конечно, и наиболее естественным выбором σ -поля является множество всех подмножеств пространства элементарных событий Ω .

Часто приходится рассматривать некоторое множество событий $\{A_i | i \in J\}$. Наименьшая σ -алгебра \mathcal{G} , содержащая это множество (т. е. такая, что $A_i \in \mathcal{G}$ при всех i), называется σ -полем, порожденным событиями $\{A_i\}$. По существу это не что иное, как σ -алгебра, возникающая при повторном применении операций (2.3—5) к множеству событий $\{A_i | i \in J\}$. Мы будем обозначать σ -алгебру \mathcal{G} символом $\sigma\{A_i\}$ или $\mathcal{A}\{A_i\}$.

2.1.2. Случайные величины

Случайная величина X есть функция, действующая из пространства элементарных событий Ω в некоторое пространство состояний. В дальнейшем мы будем выбирать в качестве последнего множество вещественных чисел или какое-нибудь подмножество этого множества, т. е. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Однако не всякая вещественнозначная функция может быть случайной величиной: для этого требуется, чтобы такая функция обладала свойством

$$A = \{\omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Если ввести понятие обратного отображения X^{-1} , определив его как

$$X^{-1}(B) = \{\omega \mid X(\omega) \in B\}, \quad B \subset \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

то условие (2.6) можно представить в виде

$$A = X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

О вещественнозначной функции $X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей требованию (2.6), говорят также, что она *измерима* относительно σ -поля \mathcal{A} . Это означает, что подмножество A пространства элементарных событий, состоящее из всех тех элементарных исходов ω , для которых $X(\omega)$ меньше некоторого произвольного вещественного числа x , есть событие. Необходимо тщательно отличать случайную величину, обозначенную через X , и значение, принимаемое ею на определенном элементе x пространства Ω (значение, принимаемое случайной величиной, является элементом пространства состояний). Если любое подмножество пространства элементарных событий Ω есть событие, т. е. \mathcal{A} совпадает с множеством всех подмножеств $\mathcal{P}(\Omega)$ пространства Ω , то любая вещественнозначная функция может быть выбрана за случайную величину: условие (2.8) выполняется автоматически. Именно такая ситуация часто встречается в тех случаях, когда пространство элементарных событий конечно, как в приведенных выше примерах. Если пространство элементарных событий Ω несчетно бесконечно, то, вообще говоря, не имеет смысла рассматривать каждое его подмножество как событие. Такое пространство Ω в некотором смысле слишком «велико»: оно содержит весьма экзотические подмножества, которые было бы неразумно называть событиями. Забегая немного вперед, скажем, что было бы невозможно задать вероятность для каждого элемента булеана $\mathcal{P}(\Omega)$, т. е. для каждого подмножества пространства элементарных событий Ω . Более подробно этот тонкий вопрос разобран, например, в [1.86, 87].

Выбор условия (2.8) в качестве отличительной особенности случайной величины основан на следующих соображениях. Предположим, что наше основное пространство элементарных событий недоступно напрямую наблюдению и вся информация о нем может быть получена только с помощью функции $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Именно такая ситуация обычно встречается во многих приложениях: функцию X можно считать каким-нибудь измерительным прибором. Тогда пространство состояний \mathbb{R} можно принять за новое пространство элементарных событий для величины X . События в \mathbb{R} естественно определяются интервалами: $B = [x, y]$, $x, y \in \mathbb{R}$. Эти интервалы, если над ними производить операции взятия теоретико-множественного объединения, пересечения и

дополнения, порождают некоторое σ -поле, обозначаемое символом \mathcal{B} и известное под названием борелевского σ -поля. Последнее естественно связано с пространством состояний \mathbb{R}^1). Для того чтобы породить борелевское σ -поле, достаточно использовать только интервалы типа $(-\infty, x]$. Разумеется, разумно потребовать, чтобы любое событие X в пространстве \mathbb{R} соответствовало какому-то событию в основном пространстве элементарных событий Ω : в противном случае «измерительный прибор» X давал бы ложную информацию. Именно для этого и введено условие (2.8). Оно гарантирует, что для любого события $B \in \mathcal{B}$ в пространстве состояний найдется соответствующее событие в основном пространстве элементарных событий, т. е. что прообраз события B также является событием. В условии (2.8) достаточно рассматривать только события вида $B_x = (-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, так как борелевское σ -поле \mathcal{B} порождено ими (о чем уже упоминалось). Следовательно, если условие (2.8) выполнено, то $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ при всех $B \in \mathcal{B}$. Разумеется, некоторая информация может оказаться утерянной: не всякое событие в основном пространстве элементарных событий может быть «обнаружено измерительным прибором X ». На более строгом математическом языке это означает, что, вообще говоря, не всякое событие $A \in \mathcal{A}$ представимо в виде $A = X^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}$. Именно поэтому σ -поле, порожденное всеми множествами вида $X^{-1}([-\infty, x])$ $x \in \mathbb{R}$, и обозначенное $\mathcal{A}(X)$, вообще говоря, является лишь подполем поля событий \mathcal{A} , т. е. $\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{A}$.

В приведенном выше примере с баллоном газа простой случайной величиной является скорость $|v|$ молекулы газа в данный момент времени, если $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Так как число элементарных исходов конечно, в качестве σ -поля событий можно выбрать множество всех подмножеств пространства элементарных событий, и такой выбор, как отмечалось выше, вполне естествен. Условие (2.8) выполняется в этом случае автоматически. Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию. Пусть σ -поле на этот раз не совпадает с множеством всех подмножеств пространства элементарных событий. Вместо $\mathcal{P}(\Omega)$ выберем следующее несколько искусственное σ -поле $\mathcal{A} = \{\emptyset, A_l, A_r, \Omega\}$, где A_r — множество всех молекул, для которых скалярное произведение $v \cdot \hat{x}$ положительно, A_l — дополнение множества A_r , т. е. множество всех молекул, для которых скалярное произведение $v \cdot \hat{x}$ отрицательно или равно нулю (\hat{x} — единичный произвольно направленный вектор). Нетрудно видеть, что в этом случае $|v|$ уже не случайная величина. Действительно, множество молекул, скорость

¹⁾ Борелевское σ -поле \mathcal{B} может служить примером множества, мощность которого строго меньше мощности множества всех подмножеств пространства элементарных событий.

которых меньше некоторого значения u , т. е. $\{\omega \mid |\nu|(\omega) \leq u\}$, не совпадает, вообще говоря, ни с \emptyset , ни с A_r , ни с A_l , ни с Ω .

Аналогичный пример для эксперимента по изучению роста бактерий состоит в следующем. В большом числе чашек Петри посеяны бактерии кишечной палочки, в одной половине — штамм B , в другой — штамм C . Пространством элементарных событий в этом случае является множество чашек Петри. Элементарное событие происходит, когда экспериментатор производит непредвзятый, т. е. случайный, выбор какой-нибудь из чашек Петри. Так как число элементарных исходов и в этом примере конечно, рассмотрим естественный выбор σ -поля событий, т. е. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Пусть N — число бактерий, имеющихся в данный момент времени в выбранной чашке Петри, независимо от того, к какому штамму они принадлежат. Ясно, что в этом случае условие (2.8) выполнено, и N — случайная величина. Наоборот, если за σ -поле событий \mathcal{A} выбрать $\{\emptyset, A_B, A_C, \Omega\}$, где A_B — множество всех чашек Петри с бактериями штамма B , A_C — множество остальных чашек Петри с бактериями штамма C , то число бактерий в чашке Петри уже не является случайной величиной. Действительно, множество $\{\omega \mid N(\omega) \leq x\}$ не совпадает, вообще говоря, ни с \emptyset , ни с A_B , ни с A_C , ни с Ω .

Приведенные примеры показывают, что пространство элементарных событий Ω и σ -поле \mathcal{A} являются существенными частями в определении случайной величины. В заключение этого раздела приведем несколько странно звучащее высказывание о том, что в случайной величине нет ничего случайного. Как изящно сформулировал эту мысль Чен [1.86, с. 75], «элементом случайности в $X(\omega)$ можно было бы назвать выборочную точку ω , выбираемую «случайным образом» ... Но коль скоро ω выбрана, величина $X(\omega)$ полностью определена, и в ней нет больше ничего неоднозначного, неопределенного или случайного».

2.1.3. Вероятностная мера P

Обратимся теперь к третьему элементу P вероятностного пространства $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$, которому мы до сих пор не уделяли должного внимания, поскольку он не входит в определение случайной величины. Здесь P — мера частоты появления события A , т. е. то, что мы интуитивно понимаем под вероятностью. На более точном математическом языке P — функция, отображающая σ -поле \mathcal{A} на интервал $[0, 1]$, т. е. $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$. Заметим, что функция P определена на σ -поле \mathcal{A} , а не на пространстве элементарных событий Ω , т. е. вероятность определена для событий A , а не только для элементарных исходов ω . Это различие становится существенным, если Ω содержит несчетное множество

элементов. В этом случае вероятность того, что происходит именно элементарное событие ω , часто строго равна нулю. Следовательно, основой разумного определения вероятности должно быть σ -поле событий. По определению P обладает следующими свойствами:

$$P(\emptyset) = 0, \quad (2.9)$$

$$P(\Omega) = 1, \quad (2.10)$$

$$\text{если } A_n \in \mathcal{A}, \quad A_n \bigcap_{n \neq m} A_m = \emptyset, \quad \text{то } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \quad (2.11)$$

Такая функция множества P называется вероятностной мерой. Три свойства (2.9—11) отражают на математическом языке наши интуитивные представления о вероятностях: то, что невозможное событие \emptyset имеет нулевую вероятность, достоверное событие Ω имеет вероятность, равную единице, и вероятность объединения взаимно исключающих событий получается (разумеется, на интуитивном уровне) суммированием вероятностей отдельных событий. Третье условие требует, чтобы это свойство сохранялось и для счетного объединения взаимно исключающих событий. В конкретных приложениях мера P , входящая в вероятностное пространство, получается либо с помощью априорных соображений, либо выводится из длинной серии испытаний, в которой определяется относительная частота события A . (В частотной интерпретации вероятности существуют математические тонкости, в которые нам не хотелось бы здесь вдаваться.)

Как бы то ни было, мы, следуя Арнольду [2.2, с. 4], хотели бы подчеркнуть, что «предмет теории вероятностей состоит не в определении вероятностной меры P основного пространства элементарных событий Ω , а в вычислении новых вероятностей по данным». В частности, вероятность событий борелевского σ -поля, связанного с пространством состояний \mathbb{R} случайной величины $X(\omega)$, может быть выражена непосредственно через вероятность P событий σ -поля \mathcal{A} вероятностного пространства (Ω, \mathcal{A}, P) . Действительно, рассмотрим случайную величину $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Функция X осуществляет, так сказать, перенос вероятностной меры P из основного пространства элементарных событий Ω на пространство состояний \mathbb{R} . Если B — наблюдаемое событие в пространстве состояний, т. е. если $B \in \mathcal{B}$, то его вероятность можно определить из соотношения

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in B\}). \quad (2.12)$$

Тем самым вероятностная мера определена на пространстве состояний. Определение имеет смысл, поскольку отличительное свойство случайной величины как раз и состоит в том, что $X^{-1}(B)$ — событие в основном вероятностном пространстве. Та-

ким образом, вероятность определена для подмножества $X^{-1}(B)$ пространства элементарных событий Ω . Это проливает дополнительный свет на требование (2.8). Рассмотрим вещественнозначную функцию $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, не наделенную свойством (2.8). Тогда существует событие $B' \in \mathcal{B}$, такое, что $Z^{-1}(B') \notin \mathcal{A}$. Иначе говоря, измерительный прибор Z зафиксировал событие, для которого невозможно определить вероятность, так как оно не соответствует никакому событию в основном пространстве элементарных событий: так как $Z^{-1}(B') \notin \mathcal{A}$, вероятность $P(Z^{-1}(B'))$ не определена. Ясно, что такого рода ситуация нежелательна: Z не является надлежаще измеримой величиной. Приведенный пример подтверждает, что требование (2.8) абсолютно необходимо для разумного понятия случайной величины. В противном случае было бы невозможно построить жизнеспособную теорию.

2.1.4. Функция распределения

Вероятностная мера P_X на \mathcal{B} индуцирована случайной величиной и называется распределением случайной величины. В силу структуры множества \mathcal{B} достаточно, как и в (2.8), рассматривать только события типа $B_x = (-\infty, x]$. Для вещественнозначной случайной величины распределение P_X полностью определяется функцией распределения $F_X(x)$:

$$F_X(x) = P(\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

(В дальнейшем мы будем опускать индекс X , указывающий случайную величину, к которой относится функция F , если сокращенная запись не будет приводить к каким-нибудь недоразумениям.) Из определения (2.13) нетрудно вывести, что функция распределения обладает следующими свойствами:

- 1) $F(-\infty) = 0$,
- 2) $F(+\infty) = 1$,
- 3) $F(x)$ — возрастающая непрерывная справа ¹⁾ функция.

Справедливо и обратное утверждение: всякая функция, удовлетворяющая трем условиям (2.14), может выступать в роли функции распределения некоторой случайной величины.

Используя распределение (функцию), мы можем дополнить пространство состояний с заданным на нем σ -полем \mathcal{B} до вероятностного пространства $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$. Если нас интересует только величина X , то мы могли бы забыть об основном пространстве элементарных событий (Ω, \mathcal{A}, P) , принять за новое простран-

¹⁾ $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x + \varepsilon) = F(x)$; $\varepsilon \downarrow 0$ означает, что величина ε положительна и стремится к нулю.

ство элементарных событий упорядоченную тройку $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ и интерпретировать случайную величину как тождественное ото-бражение

$$X: (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X), \quad X(x) = 1(x) = x. \quad (2.15)$$

Не стремясь к особой строгости, мы могли бы сказать, что вещественнозначная случайная величина есть величина, характеризующаяся изменяющейся по определенному закону вероятностью, а именно функцией распределения. Именно с такой ситуацией мы обычно встречаемся в практических приложениях, когда основное вероятностное пространство неизвестно или недоступно. Однако с теоретической точки зрения использование вероятностного пространства дает очень большие преимущества, в особенности когда приходится иметь дело более чем с одной случайной величиной $X_i, i = 1, \dots, n$ (например, при рассмотрении вопросов сходимости). В таких случаях при использовании одной и той же вероятностной меры теоретические соображения становятся значительно более прозрачными: различные распределения P_{X_i} становятся при таком подходе преобразованиями вероятностной меры P различными случайными величинами. Именно поэтому даже в чисто практических приложениях обращение к неизвестному основному вероятностному пространству (Ω, \mathcal{A}, P) часто бывает полезным, позволяя значительно упростить весь ход рассуждений.

В приложениях особое значение имеют случайные величины двух типов. К первому типу относятся случайные величины, соответствующие тем физическим величинам, которые по самой своей природе могут принимать только дискретные значения (таково, например, число бактерий в чашке Петри). Ко второму типу принадлежат случайные величины, соответствующие непрерывно изменяющимся физическим величинам (например, концентрациям). Дискретные случайные величины характеризуются тем, что их функция распределения возрастает скачком лишь в счетном числе точек и остается постоянной между ними. В интересующих нас приложениях чаще всего будут встречаться непрерывные случайные величины, для которых плотность вероятности $p(x)$ определяется соотношением

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx', \quad (2.16)$$

или, что эквивалентно, существует $p(x) = \partial_x F(x)$. Грубо говоря, $p(x)dx$ есть вероятность того, что $X(\omega)$ принимает значение, лежащее в бесконечно малой окрестности точки x :

$$\begin{aligned} p(x)dx &= P(\{\omega \mid X(\omega) \in (x, x+dx)\}) = \\ &= P(X \in (x, x+dx)) = P(d\omega). \end{aligned} \quad (2.17)$$

В дальнейшем большинство определений и выражений приводятся в таком виде, какой они принимают для случайных величин с плотностями вероятности. Приведенные результаты допускают непосредственное обобщение на случай дискретных величин.

2.1.5. Моменты и экстремумы

Функция распределения или плотность вероятности полностью характеризует (с вероятностной точки зрения) случайную величину X . Но столь полная информация не всегда необходима: часто бывает достаточно лишь некоторых численных характеристик случайной величины. Почетное место среди таких характеристик занимают так называемые моменты. Первый момент, обычно известный как среднее значение, или математическое ожидание, равен взвешенной сумме состояний случайной величины (каждое состояние входит в сумму с весом, равным вероятности, с которой реализуется состояние). Подчеркнем, однако, что случайная величина X и вероятность P определены на двух различных объектах: X задана на пространстве элементарных событий Ω , P — на σ -поле \mathcal{A} . В связи с этим необходимо сказать несколько слов об интегрировании по вероятностному пространству (Ω, \mathcal{A}, P) . Начнем с рассмотрения случайных величин особенно простого вида: так называемых случайных ступенчатых функций

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}(\omega), \quad (2.18)$$

где I_A — индикатор, или характеристическая функция, множества A , т. е.

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases} \quad (2.19)$$

События A_i , $A_i \in \mathcal{A}$ не пересекаются, т. е. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$,

и покрывают все пространство: $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Ступенчатая функция проста, так как принимает конечное множество различных значений. Вводя для математического ожидания специальное обозначение $E\{X\}$, естественно определить его следующим образом:

$$E\{X\} = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i). \quad (2.20)$$

В дальнейшем нам будет более удобна другая запись математического ожидания:

$$E\{X\} = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega). \quad (2.21)$$

В качестве следующего шага рассмотрим случайную величину $X \geq 0$. Существует возрастающая последовательность X_n случайных ступенчатых функций, таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \text{ и} \quad (2.22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP = m \leq \infty, \quad (2.23)$$

где m — среднее значение (ясно, что в общем случае m — вещественное число). Предельное значение m не зависит от частной последовательности, поэтому на вполне «законных» основаниях мы можем определить математическое ожидание как

$$E\{X\} = \int_{\Omega} X dP = m = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP. \quad (2.24)$$

Если X — произвольная случайная величина, то, разложив ее на положительную и отрицательную части

$$X = X^+ - X^-, \quad X^+ = X I_{\{X \geq 0\}}, \quad X^- = -X I_{\{X < 0\}},$$

определим

$$E\{X\} = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X^+ dP - \int_{\Omega} X^- dP. \quad (2.25)$$

Для вещественнозначных случайных величин математическое ожидание, как нетрудно видеть, может быть вычислено с помощью индуцированного распределения ¹⁾

$$m \equiv E\{X\} = \int_{\mathbb{R}} x dF(x), \quad (2.26)$$

и если существует плотность вероятности, то

$$E\{X\} = \int_{\mathbb{R}} xp(x) dx. \quad (2.27)$$

Аналогичным образом определяются и моменты более высокого

¹⁾ $\int_{\mathbb{R}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx.$

порядка. Так, r -й момент (r — положительное целое число: $r \in \mathbb{N}$) равен

$$E\{X^r\} = \int_{\Omega} X^r(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x^r dF(x) = \quad (2.28)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^r p(x) dx. \quad (2.29)$$

Последнее равенство выполняется только в том случае, если плотность вероятности $p(x)$ существует. Относительно моментов заметим, что вопреки довольно распространенному мнению знание всех моментов $E\{X^r\}$ не всегда достаточно для однозначного определения плотности вероятности $p(x)$ [2.3, с. 166].

В общем случае справедлива следующая теорема о преобразовании. Пусть $Y = h(X)$ — случайная величина, где $h(x)$ — неслучайная функция ($h(x)$ не зависит от ω). Тогда

$$E\{Y\} = \int_{\Omega} h(X(\omega)) dP(\omega) = \quad (2.30)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) p(x) dx. \quad (2.31)$$

В то время как нулевой момент существует всегда, а именно:

$$1 = P(\Omega) = \int_{\Omega} dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x) dx, \quad (2.32)$$

высшие моменты могут обращаться в бесконечность. Мерой интенсивности флуктуаций, так сказать «случайности» случайной величины, служит ширина плотности вероятности, или средняя величина отклонений от среднего значения плотности. Средне-квадратичное отклонение, или дисперсия, случайной величины определяется по формуле

$$\sigma^2 = E\{(\delta X)^2\} = E\{(X - m)^2\} = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 dF(x), \quad (2.33)$$

т. е. вторым центральным моментом. Общее определение центральных моментов имеет следующий вид:

$$E\{(\delta X)^r\} = E\{(X - m)^r\}. \quad (2.34)$$

Если σ^2 — мера ширины плотности вероятности, то третий центральный момент характеризует асимметрию, или «перекос», случайной величины. Если флуктуации симметричны относительно среднего значения, то

$$E\{(\delta X)^{2k+1}\} = 0; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Другой не менее важной характеристикой плотности вероятности (или вероятности в случае дискретных случайных величин) служат число и расположение ее экстремумов x_m :

$$\partial_x p(x)|_{x=x_m} = 0. \quad (2.36)$$

(В случае дискретных случайных величин $p(v_m) = p(v_m - 1)$.)
Максимумы

$$\partial_{xx} p(x)|_{x=x_m} < 0 \quad (2.37)$$

являются так называемыми наиболее вероятными состояниями. Такие состояния преимущественно наблюдаются в серии экспериментов. Заметим, что, как видно из определений (2.36, 37), свойство быть наиболее вероятным состоянием является *локальным*. Такие состояния более вероятны, чем состояния в некоторой их окрестности. Никаких глобальных утверждений относительно наибольшего значения плотности вероятности на пространстве состояний из определений (2.36, 37) не следует.

Рассмотрим несколько поучительных примеров.

Гауссовское распределение. Говорят, что случайная величина имеет гауссовское, или нормальное, распределение, если ее плотность вероятности определяется выражением

$$p(x) = [(2\pi)^{1/2} \sigma]^{-1} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.38)$$

Для нормальной случайной величины X существует специальное обозначение: $N(m, \sigma^2)$. В нем в явном виде указано, что, как нетрудно проверить,

$$E\{X\} = m, \quad (2.39)$$

$$E\{(\delta X)^2\} = \sigma^2. \quad (2.40)$$

Из соотношения (2.38) непосредственно следует, что гауссовская случайная величина полностью определяется двумя своими первыми моментами. Действительно, для центральных моментов получаем

$$E\{(\delta X)^r\} = \begin{cases} 0, & r \geq 1 \text{ нечетно,} \\ (r-1)!! \sigma^r, & r \geq 2 \text{ четно}^1). \end{cases} \quad (2.41)$$

Гауссовская плотность вероятности симметрична относительно своего среднего значения. Все моменты существуют (см. (2.41)), так как экспоненциальная функция убывает быстрее, чем возрастает любая степень x . Гауссовское, или нормальное, распределение играет важную роль в приложениях, о чем уже упоминалось в гл. 1, и занимает центральное место в теории вероят-

¹⁾ $(r-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (r-1)$

ностей, как о том свидетельствует центральная предельная теорема.

Пуассоновское распределение. Говорят, что случайная величина X , принимающая только неотрицательные целые значения, имеет пуассоновское распределение, если

$$P[X = v] = p(v) = \frac{m^v}{v!} \exp(-m), \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Из обозначений видно, что

$$E\{X\} = \sum_{v=0}^{\infty} v \frac{m^v}{v!} \exp(-m) = m. \quad (2.43)$$

В то время как гауссовское распределение характеризуется двумя параметрами (средним значением m и дисперсией σ^2), пуассоновское распределение полностью определяется (как видно из (2.42)) своим средним значением. Дисперсия пуассоновского распределения равна его среднему значению:

$$\sigma^2 = E\{(\delta X)^2\} = \sum_{v=0}^{\infty} (v - m)^2 \frac{m^v}{v!} \exp(-m) = m. \quad (2.44)$$

Для высших моментов имеем

$$E\{X^r\} = \sum_{k=0}^r S(r, k) m^k, \quad (2.45)$$

где $S(r, k)$ — числа Стирлинга второго рода. Пуассоновское распределение играет для дискретных случайных величин такую же важную роль, какую играет для непрерывных случайных величин гауссовское распределение.

В приведенных выше примерах вероятность (плотность вероятности) имеет лишь один экстремум — максимум, который совпадает с средним значением. Такая ситуация является скорее исключением, чем правилом: если вероятность распределена асимметрично, то среднее значение заведомо не совпадает с наиболее вероятным. Кроме того, случайная величина, конечно же, может иметь несколько наиболее вероятных значений. С прикладной точки зрения существование нескольких максимумов в распределении вероятности представляет большой интерес, поскольку отражает наличие определенной структуры в флуктуациях величины X . Важность экстремумов обусловлена тем, что в присутствии флуктуаций они являются адекватным параметром порядка для равновесных и неравновесных фазовых переходов. В гл. 6 мы еще вернемся к этому вопросу и рассмотрим его более подробно.

2.1.6. Совместные случайные величины

Рассмотрим теперь две случайные величины X и Y :

$$\begin{aligned} X &: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}), \\ Y &: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Функция их совместного распределения $F_{XY}(x, y)$ задается формулой

$$F_{XY}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]. \quad (2.47)$$

Это определение имеет смысл, так как

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \mid X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} = \\ &= \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \cap \{\omega \mid Y(\omega) \leq y\} = A_x \cap A_y \end{aligned}$$

есть наблюдаемое событие (действительно, по определению A_x и A_y — элементы σ -поля \mathcal{A} и поэтому $A \in \mathcal{A}$ в силу (2.4)). Функция $F_{XY}(x, \infty)$ называется частичным распределением случайной величины X , а функция $F_{XY}(\infty, y)$ — частичным распределением случайной величины Y . Нетрудно проверить, что $F_{XY}(x, \infty) = F_X(x)$ и $F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y)$. Для того чтобы не перегружать последующее изложение, мы будем рассматривать только такие случайные величины, для которых существует совместная плотность вероятности $p(x, y)$:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{XY}(x', y') dx' dy', \quad (2.48)$$

или

$$p_{XY}(x, y) = \partial_x \partial_y F_{XY}(x, y).$$

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если их совместная плотность вероятности факторизуется:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y). \quad (2.49)$$

Ковариацией двух случайных величин называется смешанный второй момент

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= E\{(X - m_X)(Y - m_Y)\} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x - m_X)(y - m_Y) p_{XY}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ясно, что если случайные величины X и Y независимы, то

$$\sigma_{XY} = 0. \quad (2.51)$$

Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из $\sigma_{xy} = 0$ еще не следует, что $p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y)$. Две случайные величины, удовлетворяющие условию (2.51) (более слабо, чем следует из сделанного замечания, чем условие (2.49)), называются *некоррелированными*. Все введенные выше понятия без труда обобщаются на случай n случайных величин X_1, \dots, X_n .

2.1.7. Условные вероятности

В приложениях часто встречается интересная задача, связанная с вычислением вероятности наступления события A при условии, что факт наступления другого события B достоверно известен. Такая вероятность называется *условной* и обозначается $P(A|B)$. Если события A и B независимы, что по аналогии с (2.49) мы запишем как

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad (2.52)$$

то должно выполняться равенство $P(A|B) = P(A)$ ¹⁾. В простейшем случае условная вероятность определяется как

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (2.54)$$

Заметим, что это определение имеет смысл, только если $P(B) \neq 0$. Ясно, что при заданном событии B величина $P(A|B)$ есть вероятностная мера на σ -поле \mathcal{A} . Следовательно, условное математическое ожидание случайной величины X , обозначаемое $E\{X|B\}$, определяется как

$$E\{X|B\} = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega|B). \quad (2.55)$$

Принимая во внимание определение условной вероятности (2.54), мы можем записать (2.55) в виде

$$E\{X|B\}P(B) = \int_B X(\omega) P(d\omega). \quad (2.56)$$

Этого элементарного определения оказывается не всегда достаточно для наших целей: условная вероятность и условное математическое ожидание определены лишь относительно событий, наступление которых имеет ненулевую вероятность. Однако часто приходится рассматривать условия, при которых некоторое событие имеет нулевую вероятность (таково, например, событие,

¹⁾ Попутно заметим, что два σ -поля \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 называются независимыми, если

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1 \quad \text{и} \quad \forall A_2 \in \mathcal{A}_2. \quad (2.53)$$

состоящее в том, что непрерывная случайная величина принимает в точности заданное значение \tilde{x} : $P(X = \tilde{x})$). Если плотность вероятности существует, то

$$P(X \in [\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon]) = \int_{\tilde{x} - \varepsilon}^{\tilde{x} + \varepsilon} p(x) dx \approx p(\tilde{x}) \cdot 2\varepsilon, \quad (2.57)$$

откуда мы заключаем, что $P(X = \tilde{x}) = 0$. Вторая, возможно, более важная причина; по которой нам хотелось бы иметь более общее понятие условной вероятности, состоит в следующем. В простейшем случае условная вероятность определяется относительно *одного* заданного события. Часто одиночность события бывает ограничительной, и условную вероятность требуется находить относительно некоторой совокупности событий, отражающей наши знания, накопленные за несколько экспериментов. Забегая немного вперед, можно сказать, что поиск удовлетворительной формализации такого важного понятия, как марковский процесс, был обусловлен необходимостью рассмотрения условной вероятности и условного математического ожидания относительно истории процесса. Эта история естественно задается совокупностью событий, наступивших в прошлом. Для того чтобы продемонстрировать на простом примере понятие условности относительно множества событий, рассмотрим эксперимент, задаваемый вероятностным пространством (Ω, \mathcal{A}, P) и случайной величиной X . Мы можем выбрать, в частности, эксперимент по изучению роста бактерий и численности их популяции или баллон с газом и скорость молекул. Предположим, что, произведя определенное число измерений или наблюдений, мы установили наступление некоторой совокупности событий $\{A_i\}$. Под- σ -поле \mathcal{C} , порожденное событиями $\{A_i\}$, т. е. $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, есть именно та информация, которую можно извлечь из событий $\{A_i\}$. Опираясь на эту информацию, экспериментатор должен строить оценки и прогнозы относительно характера случайных величин X . Разумеется, экспериментатор воспользуется имеющейся в его распоряжении информацией, чтобы наилучшим образом предсказать характер наблюдаемых случайных величин X . Иначе говоря, наш экспериментатор аппроксимирует случайную величину X другой случайной величиной Y , содержащей всю ранее накопленную информацию. Какими свойствами должна обладать случайная величина Y ? Во-первых, Y должна быть случайной величиной относительно известного σ -поля \mathcal{C} , т. е. Y должна быть \mathcal{C} -измеримой:

$$Y^{-1}(B) \in \mathcal{C} \quad \text{при всех} \quad B \in \mathcal{B}. \quad (2.58)$$

Заметим, что X , вообще говоря, является случайной величиной не относительно под- σ -поля \mathcal{C} , а лишь относительно полного

σ -поля \mathcal{A} . Иначе говоря, существует такое $B \in \mathcal{B}$, что $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, но $X^{-1}(B) \notin \mathcal{C}$. В этом проявляется тот факт, что реальная случайная величина X , как правило, содержит больше информации о системе, чем случайная величина Y , построенная по уже произведенным измерениям. Во-вторых, случайная величина Y , служащая оценкой случайной величины X , заведомо должна давать ту же информацию, которую дает ограничение реальной случайной величины на наблюдаемую совокупность событий. На точном математическом языке это записывается так:

$$\int_{A_i} Y(\omega) P(d\omega) = \int_{A_i} X(\omega) P(d\omega), \quad \forall A_i \in \mathcal{C}. \quad (2.59)$$

Важная теорема из теории меры (так называемая теорема Радона — Никодима, точную формулировку которой приводить здесь было бы излишне, почему мы ее и опускаем) утверждает существование случайной величины Y , обладающей двумя свойствами — (2.58) и (2.59). Кроме того, эта случайная величина Y почти наверное единственна. Это означает, что для любой другой случайной величины \tilde{Y} , обладающей теми же двумя свойствами, выполняется равенство

$$P(\{\omega | Y(\omega) = \tilde{Y}(\omega)\}) = 1. \quad (2.60)$$

Термины «почти наверное» (п. н.) и «с вероятностью, равной единице», на протяжении всей книги мы будем использовать как синонимы. Такая случайная величина Y называется условным математическим ожиданием случайной величины X при условии \mathcal{C} и обозначается

$$Y = E\{X | \mathcal{C}\}. \quad (2.61)$$

По аналогии с (2.55), можно было бы полагать, что (2.61) удастся записать в виде

$$Y = E\{X | \mathcal{C}\} = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega | \mathcal{C}). \quad (2.62)$$

Но если в элементарном случае $P(A|B)$ — вероятность на \mathcal{A} при заданном событии B , то в общем случае вопрос о том, что следует понимать под условной вероятностью, более тонкий, и выполнение равенства (2.62) требует более тщательного обсуждения. Мы еще вернемся к нему после того, как обсудим наиболее существенные особенности условных математических ожиданий.

Условные вероятности — частный случай условных математических ожиданий. Действительно, в элементарном случае спра-

ведливо равенство

$$P(A|B) = E\{I_A|B\}. \quad (2.63)$$

По аналогии с ним запишем в общем случае соотношение

$$P(A|\mathcal{C}) = E\{I_A|\mathcal{C}\}. \quad (2.64)$$

Заметим, что при заданном событии A условная вероятность есть *случайная* величина относительно \mathcal{C} . Она удовлетворяет, как следует непосредственно из (2.59), равенству

$$\int_{A_i} P(A|\mathcal{C}) P(d\omega) = P(A \cap A_i), \quad \forall A_i \in \mathcal{C}. \quad (2.65)$$

Приведем теперь краткий перечень некоторых важных свойств условных математических ожиданий. Все утверждения об этих свойствах выполняются почти наверное.

$$1) E\{E\{X|\mathcal{C}\}\} = E\{X\}. \quad (2.66)$$

$$2) \text{ Если } X \geq 0, \text{ то} \\ E\{X|\mathcal{C}\} \geq 0. \quad (2.67)$$

$$3) \text{ Если величина } X \text{ измерима относительно } \mathcal{C}, \text{ то} \\ E\{X|\mathcal{C}\} = X. \quad (2.68)$$

На «словесном уровне» это означает, что если случайная величина содержит не больше информации, чем может быть извлечено из экспериментов, то ее наилучшей оценкой является она сама.

$$4) \text{ Линейность: если } E\{X\} < \infty, E\{Y\} < \infty, \text{ то} \\ E\{aX + bY|\mathcal{C}\} = aE\{X|\mathcal{C}\} + bE\{Y|\mathcal{C}\} \quad (a, b — постоянные). \quad (2.69)$$

$$5) \text{ Если } X \text{ и } \mathcal{C} \text{ независимы, т. е. } \sigma(X) \text{ и } \mathcal{C} \text{ независимы, то} \\ E\{X|\mathcal{C}\} = E\{X\}. \quad (2.70)$$

$$6) \text{ Если } \mathcal{C}_1 \text{ и } \mathcal{C}_2 \text{ являются под-}\sigma\text{-полями } \sigma\text{-поля } \mathcal{A}, \text{ такими,} \\ \text{что } \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}, \text{ то} \\ E\{E\{X|\mathcal{C}_2\}|\mathcal{C}_1\} = E\{E\{X|\mathcal{C}_1\}|\mathcal{C}_2\} = E\{X|\mathcal{C}_1\}. \quad (2.71)$$

Условное математическое ожидание относительно \mathcal{C}_1 оказывается более сильным, так как σ -поле \mathcal{C}_1 меньше и налагает более ограничительные требования.

Обратимся теперь снова к условным вероятностям. Заметим, что условная вероятность $P(A|\mathcal{C})$ есть не что иное, как случайная величина $P(A|\mathcal{C})(\omega)$, и определена для всех $A \subset \mathcal{A}$ лишь почти наверное, т. е. с точностью до события с нулевой вероят-

ностью. Так как это исключительное событие может зависеть от A , величину $P(\cdot | \mathcal{C})(\omega)$ ¹⁾, вообще говоря, нельзя рассматривать как вероятность на σ -поле \mathcal{A} при заданном $\omega \in \Omega$. Тем не менее в ряде случаев такая интерпретация проходит. К счастью, нам понадобятся именно такие случаи. Для них справедлива следующая теорема.

Теорема [2.2, 4]. Пусть X — случайная величина. Введем условную вероятность

$$P(X \in B | \mathcal{C}) = P(\{\omega | X(\omega) \in B\} | \mathcal{C}), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Тогда существует функция — ее не без умысла мы обозначим $P_X(B | \mathcal{C})(\omega)$, — обладающая следующими свойствами:

1) при заданном $\omega \in \Omega$ величина $P_X(\cdot | \mathcal{C})(\omega)$ есть вероятность на \mathcal{B} ,

2) при заданном событии B величина $P_X(B | \mathcal{C})(\cdot)$ есть вариант $P(X \in B | \mathcal{C})$.

Это означает, что $P_X(B | \mathcal{C})(\cdot)$ является случайной величиной относительно \mathcal{C} и (ср. (2.65))

$$\int_{A_i} P_X(B | \mathcal{C})(\omega) P(d\omega) = P(A_i \cap [X \in B]), \quad \forall A_i \in \mathcal{C}. \quad (2.72)$$

Тем самым функция $P_X(B | \mathcal{C})(\omega)$ однозначно определена с точностью до события с нулевой вероятностью из \mathcal{C} , и это событие не зависит от B . Величина $P_X(B | \mathcal{C})$ называется условным распределением вероятности для X , заданным \mathcal{C} . Если $E\{g(X)\} < \infty$, то

$$E\{g(X) | \mathcal{C}\} = \int g(x) P_X(dx | \mathcal{C})(\omega). \quad (2.73)$$

Подчеркнем, что условное математическое ожидание $E\{g(X) | \mathcal{C}\}$ есть случайная величина относительно \mathcal{C} (о чем еще раз напоминает указанная в (2.73) явная зависимость от ω).

Рассмотрим теперь более подробно условные величины того класса, которые особенно важны для нашей теории, — условные величины относительно случайной величины. Действительно, в гл. 1 мы уже говорили о том, что в приложениях состояние системы или среды обычно описывается случайной переменной, а не точными значениями макроскопических переменных. Мы часто будем сталкиваться с задачей получения оценок и той или иной информации о системе по величинам, о которых известно, что они зависят от среды и описываются данной случайной ве-

¹⁾ Точка \cdot вместо аргумента означает, что этот аргумент принимает любые значения из соответствующего пространства.

личной. Именно поэтому мы рассмотрим теперь частный случай, когда σ -поле \mathcal{C} порождено случайной величиной (обозначим ее, например, через Z), т. е.

$$\mathcal{C} = \sigma\{A \mid A = Z^{-1}(B), \quad B \in \mathcal{B}\} = \sigma(Z).$$

и запишем

$$E\{X \mid \mathcal{C}\} = E\{X \mid Z\}. \quad (2.74)$$

Эта случайная величина, т. е. условное математическое ожидание относительно заданной случайной величины Z , имеет особенно простой вид. Напомним, что по определению $E\{X \mid Z\}$ — случайная величина относительно $\sigma(Z)$. Это означает, что $E\{X \mid Z\}$ измерима относительно $\sigma(Z)$, т. е. $E\{X \mid Z\}^{-1}(B) \in \sigma(Z)$ при всех $B \in \mathcal{B}$. Последнее свойство позволяет нам воспользоваться изящной теоремой [2.4], облегчающей вычисление $E\{X \mid Z\}$. Эта теорема утверждает: если случайная величина измерима относительно $\sigma(Z)$, то она представима в виде измеримой функции от Z . Применительно к условному математическому ожиданию $E\{X \mid Z\}$ эта теорема утверждает, что $E\{X \mid Z\} = h(Z)$. Иначе говоря, значение $E\{X \mid Z\}$ полностью определено значением, принимаемым Z на ω . Функция h почти наверное однозначно определена. Неоднозначность возникает только на множестве N образов случайной величины Z , которые встречаются с нулевой вероятностью $P[Z \in N] = 0$. Здесь h — вещественнозначная функция, определенная на вещественной прямой, т. е. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что позволяет нам записать

$$E\{X \mid Z = z\} = h(z). \quad (2.75)$$

Соотношение (2.75) придает точный смысл математическому ожиданию случайной величины X при условии, что случайная величина Z принимает значение z . Это типичный пример условия, встречающегося для непрерывных переменных, вообще говоря, с нулевой вероятностью. Применяя полученные результаты к условной вероятности $P(X \in B \mid Z)$, мы получаем возможность выразить условное распределение через почти наверное однозначную функцию Q :

$$P_X(B \mid \mathcal{C})(\omega) = Q_X(B \mid Z(\omega)). \quad (2.76)$$

Это позволяет нам записать равенство

$$P(X \in B \mid Z = z) = Q_X(B \mid z), \quad (2.77)$$

задающее при заданном значении z вероятность на \mathcal{B} . Если $Q_X(\cdot \mid z)$ имеет плотность, т. е. если

$$Q_X(B \mid z) = \int_B p(x \mid z) dx, \quad (2.78)$$

то эта плотность называется плотностью условной вероятности случайной величины X при условии, что $Z = z$. Если частичная плотность вероятности

$$p_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} p_{XZ}(x, z) dx$$

положительна, то $p(x|z)$ определяется просто как

$$p(x|z) = \frac{p_{XZ}(x, z)}{p_Z(z)}. \quad (2.79)$$

2.2. Случайные процессы

В гл. 1 мы уже говорили о том, что реальные среды во времени изменяются случайным образом. Моделировать такие изменения можно, используя для описания мгновенного состояния среды случайную величину. В результате мы получаем семейство случайных величин, индексом которого служит временной параметр t . В свою очередь флуктуации среды индуцируют случайные вариации в состоянии системы. И в этом случае временную эволюцию системы можно описывать семейством случайных величин, представляющих мгновенные состояния системы.

2.2.1. Определения

Семейство случайных величин, индексом которого служит временной параметр t , называется случайным (или стохастическим) процессом. Более точно определение формулируется так: семейство $\{X_t; t \in \theta\}$ вещественнозначных случайных величин, т. е. $X_t: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, называется случайным процессом (или случайной функцией) с множеством θ допустимых значений индекса t и множеством состояний \mathbb{R} . В дальнейшем индексным параметром будет время и индексным множеством θ будет либо вещественная прямая \mathbb{R} , либо (если процесс начинается с $t = 0$) неотрицательная полупрямая. Случайные процессы мы условимся обозначать X_t , а детерминированные функции времени — символом $X(t)$. Заметим, что случайная величина, как уже говорилось, есть функция, отображающая пространство элементарных событий в вещественные числа. Следовательно, случайный процесс можно рассматривать как функцию двух аргументов: индекса t и элементарного события ω , т. е. как $X_t(\omega)$. Если мы зафиксируем первый аргумент, время, и разрешим ω принимать любые значения из пространства элементарных событий, то, по определению, $X_t(\cdot)$ — случайная величина. Если же мы зафиксируем ω , т. е. выберем элементарное событие, соответствующее одиночному наблюдению случайного процесса, и разрешим параметру t принимать любые значения из множества θ .

то $X_t(\omega)$ — вещественнозначная функция на временной оси (или каком-то ее интервале). Такая функция $X_t(\omega)$ называется реализацией, или выборочной траекторией, случайного процесса X_t . Для того чтобы продемонстрировать эти понятия на примерах, рассмотрим снова эксперимент по изучению роста бактерий. Численность X_t колоний бактерий — случайный процесс. Если экспериментатор выбирает некоторый момент времени t' и определяет число бактерий в различных чашках Петри, то мы сталкиваемся с первой ситуацией, т. е. $X_{t'}(\cdot)$ — случайная величина. С другой стороны, если он выбирает случайным образом одну чашку Петри, т. е. $\omega \in \Omega$, и прослеживает эволюцию находящейся в ней популяции бактерий, то мы имеем второй случай, а наш экспериментатор получает реализацию, или выборочную траекторию, случайного процесса X_t .

Как было показано в разд. 2.1.4, случайная величина характеризуется функцией распределения, а пара случайных величин — совместной функцией распределения. Случайный процесс, будучи семейством случайных величин, характеризуется иерархией функций распределения

$$F(x, t) = P[X_t \leq x],$$

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = P[X_{t_1} \leq x_1; X_{t_2} \leq x_2], \dots, \quad (2.80)$$

где $t, t_1 \in \theta$ и $x, x_i \in \mathbb{R}$. Эта система функций распределения естественно обладает следующими двумя свойствами.

1) Симметрия: если i_1, \dots, i_n — любая перестановка чисел $1, \dots, n$, то

$$F(x_{i_1}, t_{i_1}; \dots; x_{i_n}, t_{i_n}) = F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n). \quad (2.81)$$

2) Совместность: если $m < n$ и $t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n \in \theta$, то

$$F(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m; \infty, t_{m+1}; \dots; \infty, t_n) = F(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m), \quad (2.82)$$

т. е. низшие члены иерархии могут быть получены из высших. Для плотностей вероятности, определяемых соотношением

$$F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} dx'_n p(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n), \quad (2.83)$$

условие совместности соответствует исключению переменных $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ путем интегрирования по ним:

$$p(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m) = \int_{\mathbb{R}} dx'_{m+1} \dots \int_{\mathbb{R}} dx'_n p(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m; \dots; x'_n, t_n). \quad (2.84)$$

Фундаментальная теорема А. Н. Колмогорова устанавливает, что верно и обратное утверждение: для любой иерархии функций распределения, удовлетворяющей условиям симметрии (2.81) и совместности (2.82), существует вероятностное пространство (Ω, \mathcal{A}, P) , на котором определен случайный процесс X_t , имеющий функции данной иерархии своими функциями распределения. Теорема Колмогорова позволяет нам принять следующее соглашение: если основное вероятностное пространство явно не указано (как это будет обычно в дальнейшем), а приведена лишь иерархия функций распределения, то мы всегда будем считать, что произведен так называемый канонический выбор, т. е.

$\Omega = \mathbb{R}^\theta$: совокупность всех вещественнозначных функций $\omega(\cdot)$, определенных на интервале θ .

Так как любая вещественнозначная функция может принадлежать пространству Ω , элементы пространства элементарных событий могут вести себя самым причудливым образом. Пространство элементарных событий необходимо выбрать поэтому столь большим, чтобы оно «вмещало» все вещественнозначные случайные процессы, сколь бы нерегулярными они ни были. Класс вещественнозначных функций, не являющихся реализациями рассматриваемого случайного процесса, мы исключаем, приписывая всем входящим в него функциям нулевую вероятность.

Каноническому выбору \mathbb{R}^θ пространства элементарных событий Ω соответствует борелевское σ -поле $\mathcal{A} = (\mathcal{B})^\theta$, порожденное $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, где $B_t \in \mathcal{B}$, n — произвольное число.

$X_t(\omega) = \omega(t)$ = значение функции ω в точке t .

Канонический выбор является обобщением перехода к новому пространству элементарных событий (2.15) на случайные процессы. Отличительная особенность канонического выбора состоит в том, что элементарные события совпадают с реализациями случайного процесса.

2.2.2. Сепарабельность

Два случайных процесса X_t и \tilde{X}_t называются эквивалентными если $P[X_t = \tilde{X}_t] = 1$ при любом $t \in \theta$. Если случайные процессы X_t и \tilde{X}_t эквивалентны, то \tilde{X}_t называется вариантом процесса X_t , и наоборот, и оба процесса имеют одну и ту же иерархию функций распределения. Из этого, однако, *не следует*, будто реализации эквивалентных процессов также совпадают. В частности, аналитические свойства траекторий (такие, как непрерывность и дифференцируемость) могут существенно отличаться. Объясняет-

ся это тем, что траектории случайного процесса X_t можно произвольным образом изменить на множестве временных точек, имеющем нулевую вероятность, не нарушив при этом свойство $P[X_t = \tilde{X}_t] = 1$. Рассмотрим следующий простой стандартный (хотя и несколько искусственный) пример [1.88, 2.2]. Пусть τ — случайная переменная, ее пространство состояний — интервал $[0, 1]$, на котором она распределена равномерно, т. е.

$$P[\tau(\omega) \in (a, b)] = b - a, \quad \text{где } 0 \leq a \leq b \leq 1. \quad (2.85)$$

Зададим случайные процессы X_t и \tilde{X}_t на том же вероятностном пространстве, положив по определению

$$X_t(\omega) \equiv 0, \quad t \geq 0, \quad (2.86)$$

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} 1, & t = \tau(\omega), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В переводе на обычный язык это означает, что случайный процесс X_t равен нулю при любых t , а случайный процесс \tilde{X}_t получается из X_t , если последний изменить лишь в одной случайно выбранной временной точке, а именно положить реализацию, обозначенную ω , равной единице при $t = \tau(\omega)$. Так как случайная величина τ (момент времени, когда производится изменение) равномерно распределена на интервале $[0, 1]$, вероятность того, что она примет любое заданное значение $t \in [0, 1]$, разумеется, равна нулю, т. е. $P[\tau = t] = 0$. Из этого следует, что $P[X_t = \tilde{X}_t] = 1$, т. е. что два случайных процесса X_t и \tilde{X}_t эквивалентны. Но если случайный процесс X_t непрерывен, то этого нельзя сказать о случайном процессе \tilde{X}_t . В дальнейшем мы всегда будем выбирать «хороший» вариант случайного процесса, чтобы избежать таких нежелательных свойств, какими обладает случайный процесс \tilde{X}_t в приведенном выше примере. Математики говорят в таких случаях о «выборе сепарабельного варианта», который всегда существует. Тем не менее для последующих приложений абстрактное математическое определение сепарабельности не слишком полезно. Поэтому нам остается лишь ограничиться замечанием о том, что «хорошие» варианты случайных процессов всегда существуют, и мы надеемся, что они описывают реальные системы.

2.2.3. Непрерывность

Более интересный вопрос состоит в том, позволяет ли знание иерархии функций распределения делать выводы о существовании (или несуществовании) сепарабельного варианта с почти наверное непрерывными траекториями. О случайном процессе говорят, что он имеет почти наверное непрерывные траектории,

если

$$P(\{\omega | X_s(\omega) \text{ — непрерывная функция на } \theta\}) = 1. \quad (2.87)$$

Ответ на этот вопрос дает критерий Колмогорова, гарантирующий существование такого варианта, если для любых $s, t \in \theta$

$$E\{|X_t - X_s|^a\} \leq \gamma |t - s|^{1+\beta}, \quad (2.88)$$

где α, β, γ — некоторые положительные числа.

Имея это в виду, перечислим кратко различные смыслы, в которых можно понимать непрерывность случайного процесса.

1. Случайный процесс X_t непрерывен в среднем квадратичном, если для любого момента времени t

$$\lim_{s \rightarrow t} E\{|X_s - X_t|^2\} = 0. \quad (2.89)$$

2. Случайный процесс X_t непрерывен по вероятности, если для любого t и любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \rightarrow t} P\{|X_s - X_t| > \varepsilon\} = 0. \quad (2.90)$$

3. Случайный процесс X_t непрерывен почти наверное, если для любого t

$$P(\{\omega | \lim_{s \rightarrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega)\}) = 1. \quad (2.91)$$

Заметим, что ни из одного из трех условий (особенно из последнего) отнюдь не следует непрерывность траекторий случайного процесса. Различие между условиями (2.87) и (2.91) состоит в том, что в последнем условии подмножество $A_0 \subset \Omega$, определенное как

$$A_0 = \{\omega | \lim_{s \rightarrow t} X_s(\omega) \neq X_t(\omega)\}$$

и имеющее нулевую вероятность ($P(A_0) = 0$), хотя оно не обязательно пустое, может быть неодинаковым в различные моменты времени. В качестве примера рассмотрим случайный процесс, задаваемый соотношением (2.86). Он удовлетворяет трем условиям (2.89—91), но, как не трудно видеть,

$$P\{\omega | \tilde{X}(\omega) \text{ — разрывная функция}\} = 1.$$

Действительно, подмножество A_0 заведомо зависит от t , а именно: $A_0 = \{\omega | \tau(\omega) = t\}$. В общем случае случайный процесс непрерывен в среднеквадратичном, по вероятности или почти наверное, если вероятность того, что его выборочная траектория прерывает разрыв в некоторый точно указанный момент времени, равна нулю, как в (2.86).

2.2.4. Стационарность

Случайный процесс называется стационарным (в строгом смысле), если все его конечномерные плотности вероятности инвариантны относительно сдвигов по времени, т. е.

$$p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = p(x_1, t_1 + t; \dots; x_n, t_n + t). \quad (2.92)$$

В частности, из стационарности случайного процесса следует, что его одномерная плотность вероятности вообще не зависит от времени:

$$p(x, t) = p_s(x). \quad (2.93)$$

Следовательно, математическое ожидание (если оно существует) стационарного случайного процесса постоянно:

$$E\{X_t\} = \int_{\mathbb{R}} xp(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} xp_s(x) dx = m. \quad (2.94)$$

Что касается его двумерной плотности вероятности $p(x_1, t_1; x_2, t_2)$, то она зависит лишь от разности времени $t_2 - t_1$:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, x_2; t_2 - t_1). \quad (2.95)$$

Соответственно ковариация (часто называемая в теории случайных процессов корреляционной функцией) $C_X(t, s)$, определяемая по формуле (2.50) как

$$E\{\delta X_{t_1} \delta X_{t_2}\} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (x_1 - m)(x_2 - m) p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2, \quad (2.96)$$

также зависит лишь от $t_2 - t_1$:

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(|t_2 - t_1|) \quad (\text{если } C_X \text{ существует}). \quad (2.97)$$

Случайный процесс, обладающий свойствами (2.94) и (2.97), с $E\{X_t^2\} < \infty$, но не обязательно удовлетворяющий условию (2.92), называется стационарным в широком смысле. (Утверждение о том, будто класс случайных процессов, стационарных в широком смысле, «больше» класса строго стационарных случайных процессов, неверно, так как для последних математическое ожидание не обязательно конечно.)

Теперь мы уже располагаем всем необходимым для того, чтобы ввести три простых случайных процесса, играющие важную роль в теории вероятностей и имеющие первостепенное значение при моделировании флуктуирующей среды.

2.3. Броуновское движение: винеровский процесс

Броуновское движение сыграло заметную роль в теории случайных явлений как в физике, так и в математике. Это быстрое, не прекращающееся ни на миг, сильно нерегулярное движение небольшой частицы, находящейся во взвешенном состоянии в жидкости. Основные особенности броуновского движения, экспериментально установленные в прошлом веке, сводятся к следующему:

- 1) более мелкие частицы движутся быстрее;
- 2) уменьшение вязкости жидкости также приводит к более быстрому движению;
- 3) при нагревании жидкости движение становится более интенсивным;
- 4) движение происходит безостановочно, траектории столь нерегулярны, а детали их столь мелки, что касательные к траекториям не существуют, т. е. скорость броуновской частицы не определена.

Немало объяснений столь необычного явления было выдвинуто прежде, чем Эйнштейн понял истинные причины безостановочных блужданий броуновской частицы и дал первую теоретическую интерпретацию броуновского движения: хаотическое движение взвешенной частицы поддерживается ее столкновениями с молекулами окружающей среды.

Вследствие теплового движения молекул окружающей жидкости броуновская частица претерпевает за короткий временной интервал огромное число соударений — порядка 10^{21} в секунду [2.5]. Так как частица гораздо тяжелее молекул жидкости, действие каждого соударения в отдельности пренебрежимо мало. Но, поскольку число непрестанно происходящих соударений велико, возникает наблюдаемое в микроскоп эффективное движение. Важно подчеркнуть также, что каждое соударение происходит независимо от остальных. Принимая во внимание все эти факты, мы приходим к математической модели броуновского движения, широко известной под названием винеровского процесса. Изложим теорию этого процесса, имеющего фундаментальное значение для дальнейшего, более подробно. Будем рассматривать движение броуновской частицы лишь в одном пространственном измерении, т. е. на прямой. Поскольку пространственные компоненты движения независимы, обобщение на случай n -мерного броуновского движения происходит автоматически.

Пусть W_t — смещение броуновской частицы из некоторой произвольной начальной точки при $t = 0$. Стандартный винеровский процесс удовлетворяет начальному условию

$$W_0 = 0. \quad (2.98)$$

Иерархия плотностей вероятности задается формулами

$$p(x, t) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-x^2/2t) \equiv n(x, t), \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ p(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m) &= n(x_1, t_1) n(x_2 - x_1, t_2 - t_1) \dots \\ & \dots n(x_m - x_{m-1}, t_m - t_{m-1}). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Винеровский процесс является гауссовским процессом. Он удовлетворяет определяющему условию, согласно которому все конечномерные плотности вероятности гауссовские, т. е. имеют вид

$$p_G(z) = [(2\pi)^n \det C]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} (z - m)^{tr} C^{-1} (z - m)\right], \quad (2.101)$$

где $z^{tr} = (z_1, \dots, z_n)$, $m^{tr} = (m_1, \dots, m_n)$, C — положительно определенная матрица $n \times n$.

Винеровский процесс имеет стационарные *независимые приращения*. Это одно из наиболее важных свойств винеровского процесса. Говорят, что случайный процесс X_t имеет независимые приращения, если случайные величины $(t_1 < \dots < t_n) X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы. Ясно, что плотность вероятности приращения $W_t - W_s$ винеровского процесса равна $n(\Delta x, t - s)$, т. е. $N(0, t - s)$. Так как эта величина зависит только от $t - s$, она инвариантна относительно сдвигов по времени, из чего следует стационарность приращений. Совместная плотность вероятности приращений $W_{t_1}, W_{t_2 - t_1}, \dots, W_{t_n - t_{n-1}}$ факторизуется вследствие специфических особенностей формул для плотностей вероятности (2.100). Следовательно, по определению (2.49) случайные величины $W_{t_1}, W_{t_2 - t_1}, \dots, W_{t_n - t_{n-1}}$ не зависят.

Эти свойства винеровского процесса (гауссовское распределение и независимые приращения) самым непосредственным образом связаны с характерными особенностями броуновского движения. Именно поэтому случайный процесс W_t можно считать удовлетворительной математической моделью броуновского движения. Действительно, как ясно из сказанного выше относительно причин не прекращающегося ни на миг хаотического движения броуновской частицы, смещение броуновской частицы представляет собой сумму очень большого числа независимых бесконечно малых смещений, обусловленных ее соударениями с молекулами жидкости. Памятуя о центральной предельной теореме, мы вправе ожидать, что смещение броуновской частицы имеет гауссовское распределение. Кроме того, смещения за не-

¹⁾ $E\{z^{tr}\} = m^{tr}$, $E\{(z - m)(z - m)^{tr}\} = C$.

перекрывающиеся интервалы времени должны быть статистически независимы, так как они обусловлены независимыми соударениями. Стационарность смещения отражает равновесность жидкости.

Сам по себе винеровский процесс нестационарен, поскольку, как следует из (2.99), $p(x, t + u) \neq p(x, t)$. Математическое ожидание и корреляционная функция винеровского процесса соответственно равны

$$E\{W_t\} = 0, \quad (2.102)$$

$$E\{W_t, W_s\} = \min(t, s). \quad (2.103)$$

Среднеквадратичное смещение броуновской частицы

$$E\{W_t^2\} = t \quad (2.104)$$

возрастает во времени не более чем линейно. Такая скорость роста характерна для пространственной диффузии и была впервые теоретически получена Эйнштейном. Тем самым винеровский процесс W_t не является стационарным и в широком смысле. Его траектории являются почти наверное непрерывными функциями — особенность, которой непременно должна обладать любая модель движения броуновской частицы. (Точнее говоря, должен существовать «хороший», т. е. сепарабельный, вариант с почти наверное непрерывными траекториями. Ясно, что только такой вариант является приемлемой моделью броуновского движения. Это замечание иллюстрирует сказанное ранее о выборе «хорошего» варианта, имеющего физический смысл.) Из (2.41) непосредственно следует, что

$$E\{(W_t - W_s)^4\} = 3(t - s)^2. \quad (2.105)$$

Последнее означает, что критерий Колмогорова выполняется, причем $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$.

Хотя траектории винеровского процесса являются с вероятностью единица непрерывными функциями, сам винеровский процесс весьма «нерегулярен», как и подобает модели броуновского движения. С вероятностью единица *его выборочные траектории нигде не дифференцируемы*, т. е. скорость броуновской частицы не определена, и имеют бесконечную длину на любом конечном временном интервале [2.1, с. 238; 2.6, с. 52]. (Эти особенности винеровского процесса являются, разумеется, идеализациями, но они отражают тот факт, что траектории реальной броуновской частицы необычайно мелки и не могут быть прослежены в деталях. Траектория, изображенная на рис. 2.1, позволяет составить примерное представление об этих свойствах винеровского процесса.) Мы не будем приводить строгое доказательство первого утверждения, а лишь заметим, что в любой за-

данный момент времени плотность вероятности разностного отношения $(W_{t+h} - W_t)/h$, как следует из (2.100), имеет распределение $N(0, 1/h)$. Ясно, что в пределе при $h \rightarrow 0$ это гауссовское распределение расходится. Иначе говоря, разностное отношение не сходится с положительной вероятностью к конечной случайной величине в заданный момент времени.

Так как второе свойство траектории винеровского процесса W_t будет в дальнейшем играть важную роль, докажем в явном виде, что эти траектории имеют почти наверное бесконечную

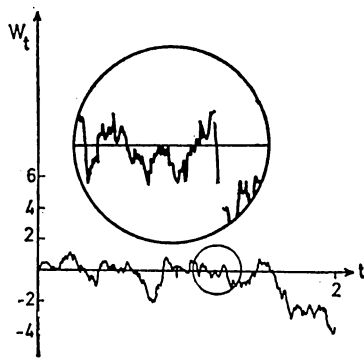


Рис. 2.1. Типичная траектория винеровского процесса, полученная при $\sigma^2 = 1$. Значения, отложенные по оси абсцисс и ординат, разделены соответственно на 10^2 и 10^5 . Хотя выборочные траектории непрерывны, они нигде не дифференцируемы и имеют бесконечную длину на конечном временном интервале.

длину на любом интервале времени $[s, t]$. Для этого мы сначала установим следующий результат, представляющий и самостоятельный интерес:

$$\text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 = t - s. \quad (2.106)$$

Здесь $s = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t$ — последовательность точек разбиения интервала $[s, t]$, таких, что величина шага $\delta_n = \max (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Среднеквадратичный предел мы условимся обозначать qm-lim. По определению

$$X = \text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} X_n, \quad \text{если} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E\{(X_n - X)^2\} = 0. \quad (2.107)$$

Для того чтобы доказать соотношение (2.106), рассмотрим выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left\{ \left[\sum_{k=1}^n (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - (t - s) \right]^2 \right\} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$$

и покажем, что оно сходится к нулю. Производя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} V_n &= E \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 (W_{t_l} - W_{t_{l-1}})^2 \right\} - \\ &- 2(t-s) E \left\{ \sum_{k=1}^n (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \right\} + (t-s)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n E \{ (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^4 \} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \sum_{l=1}^n E \{ (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \} \times \\ &\times E \{ (W_{t_l} - W_{t_{l-1}})^2 \} - 2(t-s) \sum_{k=1}^n E \{ (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \} + (t-s)^2 \end{aligned}$$

(мы воспользовались здесь тем, что W_t имеет независимые приращения). Подставляя

$$E \{ (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 \} = t_k - t_{k-1},$$

$$E \{ (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^4 \} = 3(t_k - t_{k-1})^2$$

из (2.104) и (2.105), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^n 3(t_k - t_{k-1})^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n \sum_{l=1}^n (t_k - t_{k-1})(t_l - t_{l-1}) - \\ &- 2(t-s) \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) + (t-s)^2 = 2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (t_k - t_{k-1})(t_l - t_{l-1}) - 2(t-s)^2 + (t-s)^2 = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 + \left(\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \right)^2 - (t-s)^2 = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 \leq 2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \delta_n \leq 2(t-s) \delta_n. \end{aligned}$$

Правая часть последнего неравенства действительно сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Тем самым соотношение (2.106) можно считать доказанным. Если последовательность точек разбиения выбрана таким образом, что $\sum \delta_n < \infty$, то (2.106) сходится почти наверное, или, что то же самое, с вероятностью единица. Величина X называется пределом почти наверное последовательности X_n , если

$$P(\{\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 0. \quad (2.108)$$

Для сходимости $X_n \rightarrow X$ почти наверное достаточно, чтобы существовало число $q > 0$, для которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\{|X_n - X|^q\} < \infty. \quad (2.109)$$

Из приведенного выше доказательства ясно, что

$$E\left\{\left[\sum_{k=1}^n (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 - (t-s)\right]^2\right\} \leq 2(t-s)\delta_n.$$

Если $\sum \delta_n < \infty$, то неравенство (2.109) выполняется с $q = 2$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [W_{t_k}(\omega) - W_{t_{k-1}}(\omega)]^2 = t-s \quad (\text{почти наверное}). \quad (2.110)$$

Рассмотрим теперь разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $t_k^{(n)} = s + (t-s)k/2^n$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n$. Так как $\delta_n = (t-s)/2^n$ и, следовательно, $\sum \delta_n < \infty$, соотношение (2.110) выполняется. Это означает, что левая часть неравенства

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2^n} [W_{t_k}(\omega) - W_{t_{k-1}}(\omega)]^2 \leq \\ & \leq \max_{k=1, \dots, 2^n} |W_{t_k}(\omega) - W_{t_{k-1}}(\omega)| \sum_{k=1}^{2^n} |W_{t_k}(\omega) - W_{t_{k-1}}(\omega)| \end{aligned} \quad (2.111)$$

для почти всех ω , т. е. для почти всех траекторий, сходится к конечному значению $t-s$ (в полном соответствии с (2.110)). Так как винеровский процесс имеет почти наверное непрерывные траектории, мы заключаем, что для почти каждого ω , т. е. с вероятностью единица, должно выполняться равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} [W_{t+h}(\omega) - W_t(\omega)] = 0.$$

Следовательно, первый множитель в правой части неравенства (2.111) сходится к нулю с вероятностью единица, в силу чего второй множитель в правой части того же неравенства должен расходиться с вероятностью единица: в противном случае мы пришли бы к неравенству $P[t-s \leq 0 \cdot a = 0] > 0$, т. е. к заведомому противоречию. Иначе говоря, почти любая траектория винеровского процесса W_t имеет бесконечную длину на (произвольном) конечном интервале времени $[s, t]$. В этой математической модели броуновского движения броуновская частица проходит бесконечный (по длине) путь за *любой* конечный интервал времени. Мы уже говорили о том, что эта особенность винеровского процесса обусловлена математической идеализацией и

представляет собой своего рода цену, которую приходится платить за описание временной эволюции смещения броуновской частицы с помощью математической модели, обладающей столь простыми и привлекательными свойствами. Но как ни высока эта цена, «товар» стоит того, ибо, как показывают эксперименты, описанная выше модель дает очень хорошее приближение к реальности.

2.4. Броуновское движение: процесс Орнштейна — Уленбека

Если в качестве модели броуновского движения, т. е. случайного процесса, описывающего положение броуновской частицы, выбран винеровский процесс, то мгновенная скорость частицы в такой модели остается неопределенной. Более того, мгновенная скорость бесконечна, так как траектории винеровского процесса W_t нигде не дифференцируемы. Этого можно избежать, если за основную случайную величину выбрать, как это сделали Уленбек и Орнштейн [2.7], скорость броуновской частицы. Рассмотренный этими авторами случайный процесс получил название процесса Орнштейна — Уленбека. Положение броуновской частицы в модели Орнштейна — Уленбека определяется путем интегрирования, а не задано непосредственно, как в винеровском процессе. Исходным пунктом в модели броуновского движения Орнштейна — Уленбека является разложение силы, действующей на взвешенную в жидкости частицу, на две части: систематическую (трение $-\alpha v_t$) и случайную F_t , обусловленную не прекращающимися ни на миг толчками молекул окружающей жидкости:

$$m\dot{v}_t = -\alpha v_t + F_t. \quad (2.112)$$

Так как средний эффект столкновений с молекулами жидкости учтен в члене, описывающем трение, то предположение о том, что имеет нулевое среднее значение, вполне правдоподобно. Как уже говорилось, F_t есть сумма большого числа независимых бесконечно малых вкладов. Имея в виду центральную предельную теорему, мы будем считать, что случайная составляющая F_t имеет гауссовское распределение. Кроме того, поскольку F_t обусловлена многочисленными столкновениями легких молекул с гораздо более тяжелой броуновской частицей, правдоподобно предположить, что F_t изменяется в гораздо более мелком «быстром» временном масштабе, чем v_t . Разделив обе части уравнения на m , запишем его в виде

$$\dot{v}_t = -\gamma v_t + \xi_t. \quad (2.113)$$

Если предположить, что ξ_t имеет короткую, но ненулевую память, то (2.113) можно интерпретировать как систему обычно-

венных дифференциальных уравнений для траекторий и, следовательно, решать «потраекторно». Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в гл. 8. Как бы то ни было, наивный подход к уравнению (2.113) вряд ли таит в себе особые «опасности», поскольку речь идет о линейной задаче. Решение уравнения (2.113) представимо в виде

$$v_t = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t \zeta_s e^{\gamma(s-t)} ds. \quad (2.114)$$

Линейный оператор переводит гауссовский процесс в гауссовский процесс. В частности, интеграл от гауссовского процесса есть снова гауссовский процесс [2.1, с. 161 и далее]. Следовательно, v_t — гауссовский процесс, если начальное условие v_0 — гауссовская случайная величина, независимая от F_t (или постоянная). Напомним, что гауссовские процессы полностью характеризуются математическим ожиданием, или средним значением, и корреляционной функцией. Для v_t эти функции соответственно имеют вид

$$E\{v_t\} = E\{v_0\} e^{-\gamma t} + \int_0^t E\{\zeta_s\} e^{\gamma(s-t)} ds = E\{v_0\} e^{-\gamma t}, \quad (2.115)$$

$$E\{v_t, v_{t+\tau}\} = e^{-\gamma(2t+\tau)} E\{v_0^2\} + \int_0^t \int_0^{t+\tau} e^{\gamma(s-t)} e^{\gamma(t'-t-\tau)} E\{\zeta_s \zeta_{s'}\} ds ds'. \quad (2.116)$$

Ясно, что по самой физике задачи ζ_t должен быть стационарным процессом, т. е.

$$E\{\zeta_s \zeta_{s'}\} = \varphi(s - s'). \quad (2.117)$$

Кроме того, поскольку ζ_t изменяется в гораздо более быстром временном масштабе, чем v_t , функция φ должна иметь резкий пик в окрестности нуля и быстро спадать к нулю при $|s - s'| < 0$.

Если $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \equiv \sigma^2$, то для ковариации скорости мы получаем выражение

$$\begin{aligned} E\{(v_t - E\{v_t\})(v_{t+\tau} - E\{v_{t+\tau}\})\} &= \\ &= e^{-\gamma(2t+\tau)} E\{(\delta v_0)^2\} + (\sigma^2/2\gamma) (e^{2\gamma t} - 1) e^{-\gamma(2t+\tau)}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Если v_0 имеет распределение $N(0, \sigma^2/2\gamma)$, то v_t — стационарный (по крайней мере в широком смысле) гауссовский процесс с $E\{v_t\} = 0$ и

$$E\{v_t v_s\} = (\sigma^2/2\gamma) \exp(-\gamma|t - s|).$$

Определим теперь случайный процесс Орнштейна — Уленбека как процесс, задаваемый следующей иерархией плотностей вероятности:

$$p(x, t) = \left(\frac{2\pi\sigma^2}{2\gamma} \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2/2\gamma} \right), \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} p(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \\ = p(x_1) p(x_2, x_1; t_2 - t_1) \dots p(x_n, x_{n-1}; t_n - t_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.120)$$

где

$$\begin{aligned} p(y, x; \Delta t) = \\ = [2\pi(\sigma^2/2\gamma)] (1 - e^{-2\gamma \Delta t})^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y - xe^{-\gamma \Delta t})^2}{(\sigma^2/2\gamma)(1 - e^{-2\gamma \Delta t})} \right]. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Так называемый процесс Орнштейна — Уленбека X_t удовлетворяет уравнению (2.113), если ξ_t — гауссовский белый шум. Пока мы еще не располагаем всем необходимым математическим аппаратом, чтобы установить этот факт на доказательном уровне, и вернемся к затронутой нами проблеме в гл. 5. По определению процесс Орнштейна — Уленбека (процесс ОУ), как и винеровский процесс, является гауссовским. Процесс ОУ разделяет с винеровским процессом еще одно общее свойство: его траектории также почти наверное непрерывны. Поскольку в гл. 4 мы докажем это утверждение попутно в более общем контексте, нам не хотелось бы приводить сейчас сколько-нибудь подробно его доказательство с помощью критерия Колмогорова. Процесс ОУ отличается от винеровского процесса двумя важными особенностями.

1) Процесс ОУ, как видно непосредственно из формул (2.119, 120), стационарен (в строгом смысле). Его математическое ожидание равно нулю:

$$E\{X_t\} = 0, \quad (2.122)$$

а его корреляционная функция экспоненциально убывает:

$$E\{X_t X_s\} = (\sigma^2/2\gamma) \exp(-\gamma |t - s|). \quad (2.123)$$

2) Процесс ОУ не имеет независимых приращений. Более того, его приращения даже не являются некоррелированными. Для того чтобы убедиться в этом, выберем $t > s > u > v$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} E\{(X_t - X_s)(X_u - X_v)\} = \\ = E\{X_t X_u\} + E\{X_s X_v\} - E\{X_t X_v\} - E\{X_s X_u\} = \\ = (\sigma^2/2\gamma) (e^{-\gamma |t-u|} + e^{-\gamma |s-v|} - e^{-\gamma |t-v|} - e^{-\gamma |s-u|}). \end{aligned} \quad (2.124)$$

Это выражение, вообще говоря, отлично от нуля. Следовательно, изменения скорости броуновской частицы коррелированы и тем

более статистически зависимы на неперекрывающихся временных интервалах.

Рассмотрим теперь проинтегрированный процесс Орнштейна — Уленбека

$$Y_t = \int_0^t X_s ds, \quad (2.125)$$

описывающий положение броуновской частицы, начинающей двигаться при $t = 0$ из начала координат: $Y_0 = 0$. (Интегрирование подразумевается потраекторным, т. е.

$$Y_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega) ds \quad (\text{почти наверное}).$$

Величина Y_t вполне определена, так как $X_s(\omega)$ с вероятностью единица — непрерывная функция от s .) Нетрудно видеть, что

$$E\{Y_t\} = E\left\{\int_0^t X_s ds\right\} = \int_0^t E\{X_s\} ds = 0. \quad (2.126)$$

Для корреляционной функции мы получаем

$$\begin{aligned} E\{Y_t Y_s\} &= E \int_0^t \int_0^s X_u X_v du dv = \int_0^t \int_0^s E\{X_u X_v\} du dv = \\ &= \int_0^t \int_0^s \frac{\sigma^2}{2\gamma} \exp(-\gamma|u-v|) du dv = \quad (\text{см. 2.123))} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\gamma} \left[\int_0^t du \int_0^u dv e^{-\gamma|u-v|} + \int_0^t du \int_u^s dv e^{-\gamma|v-u|} \right] = \quad (t < s) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\gamma} \left[\int_0^t dv \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma u} (e^{\gamma u} - 1) - \int_0^t du \frac{e^{\gamma u}}{\gamma} (e^{-\gamma s} - e^{-\gamma u}) \right] = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\gamma^2} \left[\int_0^t du (1 - e^{-\gamma u}) - \int_0^t du (e^{-\gamma s} \cdot e^{\gamma u} - 1) \right] = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\gamma^2} \left[t + \frac{1}{\gamma} (e^{-\gamma t} - 1) - \frac{e^{-\gamma s}}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) + t \right] = \\ &= \frac{\sigma^2}{\gamma^2} t + \frac{\sigma^2}{2\gamma^3} [e^{-\gamma t} - 1 + e^{-\gamma s} - e^{-\gamma(s-t)}]. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Как уже упоминалось, интеграл от гауссовского процесса есть снова гауссовский процесс. Следовательно, Y_t полностью харак-

теризуется своим средним (2.126) и своей корреляционной функцией (2.127). Мы видим, что винеровский процесс как модель броуновского движения в пространстве положений вновь возникает в пределе при $\sigma \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, если $\sigma^2/\gamma^2 = \text{const}$ (для стандартного винеровского процесса $\sigma^2/\gamma^2 = 1$). Таким образом, винеровский процесс является адекватным описанием броуновского движения в пределе при сильном трении и интенсивном шуме.

2.5. Пуассоновский процесс

Винеровский процесс и процесс Орнштейна — Уленбека могут служить двумя примерами случайных процессов, моделирующих непрерывно изменяющиеся физические величины и имеющих поэтому согласующиеся с гладкими зависимостями почти наверное непрерывные траектории. Обратимся теперь к другой крайности — величинам, изменяющимся только дискретными шагами. Основным примером для этого класса и в известном смысле дискретным аналогом винеровского процесса является пуассоновский процесс. Он указывает, сколько раз происходит интересующее нас событие за интервал времени от 0 до t . Каждая выборочная функция имеет вид неубывающей ступенчатой функции, т. е. пуассоновский процесс *не имеет* почти наверное непрерывных траекторий. Ясно, что по определению все траектории при $t = 0$ выходят из нуля, т. е.

$$v_0 = 0. \quad (2.128)$$

Пуассоновский процесс v_t находит применение при моделировании радиоактивного распада частиц, числа повреждений хромосом при разрушающем облучении, числа вызовов, поступающих на телефонную станцию от абонентов, числа посетителей предприятия общественного обслуживания и т. д. Во всех этих примерах число событий, происходящих на интервале времени $[s, t]$ с хорошим приближением можно считать не зависящим от того, сколько событий произошло на предыдущем не перекрывающемся с $[s, t]$ интервале $[u, v]$. Пуассоновский процесс, как и его непрерывный аналог винеровский процесс W_t , имеет независимые приращения. Точнее говоря, иерархия вероятностей пуассоновского процесса определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} P(i, t) &= [(\lambda t)^i / i!] e^{-\lambda t}, \quad i = 0, 1, \dots, \\ P(j, t) &= 0, \quad j = -1, -2, \dots^1), \end{aligned} \quad (2.129)$$

¹⁾ Полагая $P(j, t) = 0$, мы получаем возможность записать в компактном виде вероятность последовательности из n событий (как это сделано в формуле (2.130)). В противном случае нам пришлось бы использовать цепочку неравенств типа $i_2 > i_1, \dots, i_n > i_{n-1}$.

$$P(i_1, t_1; \dots, i_n, t_n) = \\ = p(i_1, t_1) p(i_2 - i_1, t_2 - t_1) \dots p(i_n - i_{n-1}, t_n - t_{n-1}). \quad (2.130)$$

Структура этой иерархии, как видно с первого взгляда на (2.99, 100), полностью совпадает со структурой аналогичной иерархии для винеровского процесса. Единственное отличие состоит в том, что гауссовское распределение заменено пуассоновским. Независимые приращения пуассоновского процесса так же, как и приращения винеровского процесса, стационарны. В то же время сам пуассоновский процесс в полной аналогии с винеровским процессом не стационарен даже в широком смысле, так как

$$E\{v_t\} = \lambda t, \quad (2.131)$$

$$E\{\delta v_t \delta v_s\} = \lambda \min(t, s). \quad (2.132)$$

Из (2.129) и независимости приращений следует: вероятность того, что на интервале $(t, t + h)$ произойдет один или несколько прыжков, равна

$$P_{\text{прыжк}}(h) = 1 - \exp(-\lambda h), \quad (2.133)$$

где при $h \rightarrow 0$ вероятность (2.133) также стремится к нулю. Иначе говоря, вероятность того, что в любой заданный момент времени t пуассоновский процесс претерпевает по крайней мере один скачок, равна нулю. Из (2.91) следует, что пуассоновский процесс почти наверное непрерывен. (Нетрудно видеть, что условия (2.89, 90) также выполнены.) Необходимо, однако, подчеркнуть, что пуассоновский процесс в отличие от винеровского не имеет почти наверное непрерывных траекторий. Тем более траектории пуассоновского процесса не являются почти наверное дифференцируемыми функциями.

Три основных элемента характеризуют случайный процесс: характер пространства состояний, множество допустимых значений индексного параметра θ и функциональная зависимость между случайными переменными $\{X_t\}$. До сих пор мы по существу рассматривали лишь первых два элемента случайных процессов, используемых как математические модели флуктуаций среды. Множество допустимых значений параметра θ во всех случаях тривиально: это не что иное, как ось времени. Что касается пространства состояний, то мы проводили различие между непрерывно изменяющимися и дискретными внешними параметрами. Опираясь на центральную предельную теорему, можно утверждать, что моделью непрерывно изменяющихся внешних параметров может быть случайный процесс с гауссовским распределением вероятности. В качестве основных примеров гауссовских случайных процессов мы рассмотрели в предыдущей главе два способа описания движения броуновской частицы: винеровский процесс и процесс Орнштейна — Уленбека.

Обратимся теперь к третьему элементу — функциональной зависимости между случайными величинами, которые образуют случайный процесс, используемый в качестве модели флуктуаций среды. Об этом кратко и на весьма эвристическом уровне уже упоминалось в разд. 1.5. Мы обратили там внимание читателя на существующее в широком классе приложений резкое разграничение временных масштабов, а именно на то, что состояние среды изменяется во много раз быстрее, чем макроскопическое состояние системы. Столь сильное различие временных масштабов привело нас к рассмотрению случайных процессов с чрезвычайно короткой памятью, после чего мы весьма естественно перешли к понятию белого шума — полностью случайного процесса, принимающего при любых t независимые значения. Наше обсуждение поневоле было чисто качественным и весьма беглым, поскольку довольно скоро выяснилось, что оно затрагивает довольно тонкие вопросы. Было подчеркнуто, что наивный подход чреват немалыми опасностями и что с белым шумом следует обращаться с должным почтением к его необычным свойствам. В этой главе мы приступаем к созданию того математического аппарата, который понадобится нам, чтобы

благополучно преодолеть все ловушки и опасные места, о которых вскользь упоминалось в разд. 1.5. В частности, будет подробно рассмотрен переход от реального шума с короткой памятью к идеализации — белому шуму с нулевой памятью. Мы изложим во всех деталях свойства белого шума и объясним, почему он имеет столь большое значение в теории внешнего шума.

3.1. Корреляционная функция и спектр шума

В качестве первого шага к ясной и четкой формулировке избранного нами подхода к моделированию флуктуаций среды нам необходимо придать количественный характер понятию быстрого внешнего шума. Начнем с поиска характеристик, определяющих временные масштабы системы и среды [3.1]. Напомним, что системы рассматриваемого нами типа удовлетворяют феноменологическим уравнениям типа

$$\dot{X}(t) = h(X(t)) + \lambda g(X(t)) = f_{\lambda}(X(t)). \quad (3.1)$$

Обозначим через $\tau_{\text{макро}}$ характерное время макроскопической (временной) эволюции системы. Как и в разд. 1.2.1, мы будем, вообще говоря, отождествлять $\tau_{\text{макро}}$ с временем релаксации системы к опорному стационарному состоянию \bar{X} , найденному в средних условиях среды. Более точно \bar{X} определяется следующим образом:

$$h(\bar{X}) + E\{\lambda_t\} g(\bar{X}) = 0, \quad (3.2)$$

а величину $\tau_{\text{макро}}$ мы находим, проводя анализ устойчивости по линейному приближению (1.4—7). В рассматриваемом случае это дает

$$\omega(\bar{X}) = \partial_X f_{\lambda}(X)|_{X=\bar{X}}. \quad (3.3)$$

Следовательно, характерное макроскопическое время есть время релаксации системы

$$\tau_{\text{макро}} = |1/\omega(\bar{X})|. \quad (3.4)$$

В некоторых приложениях более подходящим оказывается уточненный вариант определения величины $\tau_{\text{макро}}$, учитывающий и нелинейные эффекты.

Мерой быстроты случайных флуктуаций среды служит время корреляции $\tau_{\text{корр}}$. Образно говоря, $\tau_{\text{корр}}$ — это время памяти случайного процесса, и определяется оно для стационарного (в строгом или широком смысле) процесса как

$$\tau_{\text{корр}} = \frac{1}{C(0)} \int_0^{\infty} C(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Нетрудно понять, в чем состоит рациональное зерно этого определения. Интеграл в правой части равен площади, заключенной под графиком нормированной корреляционной функции $\tilde{C}(\tau) = E\{\delta X_t \delta X_{t+\tau}\} / E\{\delta X_t^2\}$; $\tilde{C}(\tau) \leq 1$ и $\tilde{C}(0) = 1$. Интуитивно можно было бы сказать, что у процесса долгая память, если $C(\tau)$ (или $\tilde{C}(\tau)$) убывает медленно (площадь, заключенная под графиком $\tilde{C}(\tau)$, велика). С другой стороны, для процесса с короткой памятью $C(\tau)$ (или $\tilde{C}(\tau)$) убывает быстро, вследствие чего площадь, заключенная под графиком $\tilde{C}(\tau)$, мала. Нормированную корреляционную функцию используют для того, чтобы иметь возможность сравнивать процессы с различными значениями дисперсии.

Нетрудно видеть, что для часто встречающегося случая экспоненциально убывающей корреляционной функции (например, для процесса Орнштейна — Уленбека (2.123))

$$C(\tau) = C(0) \exp(-\gamma\tau) \quad (3.6)$$

определение (3.5) приводит к аналогичному результату

$$\tau_{\text{корр}} = \gamma^{-1}. \quad (3.7)$$

Быстро флуктуирующая среда характеризуется тем, что время корреляции $\tau_{\text{корр}}$ случайного процесса λ_t много меньше характерного макроскопического времени $\tau_{\text{макро}}$ системы:

$$\tau_{\text{корр}} \ll \tau_{\text{макро}}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим теперь альтернативную характеристику функциональной зависимости между случайными величинами $\{X_t\}$. В основе ее лежит тот приводимый нами без доказательства факт, что любой стационарный процесс может быть представлен в виде суперпозиции колебаний с частотой ν , случайной амплитудой и фазой. Так называемый частотный спектр $S(\nu)$ является в таком представлении мерой среднего квадрата энергии, вносимой колебанием с частотой ν в процесс X_t . Как будет показано, $S(\nu)$ есть не что иное, как преобразование Фурье корреляционной функции, и, следовательно, содержит ту же информацию о процессе, что и корреляционная функция. Тем не менее может случиться так, что в зависимости от конкретного приложения получить одну функцию будет быстрее и легче, чем другую, или одна функция окажется более удобной для того, чтобы охарактеризовать функциональную зависимость $\{X_t\}$ от времени.

Повторим теперь эти утверждения, сформулировав их на точном математическом языке [2.3, 3.2а, 3.3]. Пусть X_t — стационарный (в широком смысле) случайный процесс с нулевым средним значением: $E\{X_t\} = 0$. (Если $E\{X_t\} = m \neq 0$, то вместо X_t

рассмотрим $\delta X_t = X_t - m$.) Тогда X_t представим в виде «суммы» гармонических колебаний $\exp(i\nu t)$ с случайными амплитудой и фазой, задаваемыми дифференциалом dZ_ν комплекснозначного случайного процесса Z_ν :

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu t} dZ_\nu. \quad (3.9)$$

Иначе говоря, процесс X_t можно записать в виде интеграла Фурье с случайными коэффициентами. Это утверждение известно под названием теоремы о спектральном разложении. Процесс Z_ν представляет собой случайный процесс с вещественной прямой \mathbb{R} в качестве множества допустимых значений параметра θ и комплексной плоскостью \mathbb{C} в качестве пространства состояний. Кроме того, Z_ν обладает некоррелированными приращениями с нулевым средним значением, т. е.

$$1) E\{Z_\nu - Z_{\nu'}\} = 0, \quad (3.10)$$

$$2) E\{(Z_\nu - Z_{\nu'}) \overline{(Z_\mu - Z_{\mu'})}\} = 0 \quad (3.11)$$

для неперекрывающихся интервалов $[\nu, \nu']$ и $[\mu, \mu']$,

$$3) E\{(Z_\nu - Z_{\nu'}) \overline{(Z_{\bar{\nu}} - Z_{\bar{\nu}'})}\} = \int_{\nu'}^{\nu} S(\bar{\nu}) d\bar{\nu} \quad (3.12)$$

(черта сверху означает комплексное сопряжение).

Интеграл в (3.9) — частный случай более общего интеграла $\int_{\mu'}^{\mu} \varphi(\nu) dZ_\nu$, где $\varphi(\nu)$ — *нестручая* функция на \mathbb{R} . Этот интеграл определяется как

$$\int_{\mu'}^{\mu} \varphi(\nu) dZ_\nu = \text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varphi(\nu_{i-1}^{(n)}) (Z_{\nu_i^{(n)}} - Z_{\nu_{i-1}^{(n)}}), \quad (3.13)$$

где $\{\nu_i^{(n)}\}$ — разбиение интервала $[\mu', \mu]$ с шагом, стремящимся к нулю. Нетрудно видеть, что интеграл (3.13) обладает следующими свойствами:

$$1) E\left\{\int_{\mu'}^{\mu} \varphi(\nu) dZ_\nu\right\} = 0, \quad (3.14)$$

$$2) E\left\{\int_{\mu'}^{\mu} \varphi(\nu) dZ_\nu \overline{\int_{\mu'}^{\mu} \psi(\nu) dZ_\nu}\right\} = \int_{\mu'}^{\mu} \varphi(\nu) \overline{\psi(\nu)} S(\nu) d\nu. \quad (3.15)$$

Используя эти свойства, нетрудно показать, что корреляционная функция $C(\tau)$ под действием преобразования Фурье переходит в частотный спектр $S(\nu)$, и наоборот:

$$\begin{aligned} C(\tau) &= E\{X_\tau X_0\} = E\{X_\tau \bar{X}_0\} = \\ &(\text{так как } X_t \text{ — вещественнозначный случайный процесс}) \\ &= E\left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-i\nu\tau} dZ_\nu \int_{\mathbb{R}} \overline{dZ_\nu}\right\} = \int_{\mathbb{R}} e^{i\nu\tau} S(\nu) d\nu \end{aligned} \quad (3.16)$$

(при переходе к последнему равенству мы воспользовались свойством (3.15)). Тем самым наше утверждение доказано. В силу хорошо известного свойства преобразования Фурье узкий частотный спектр $S(\nu)$ соответствует медленно убывающей широкой корреляционной функции $C(\tau)$. Верно и обратное утверждение: широкий частотный спектр соответствует быстро убывающей корреляционной функции. Следовательно, быстрые внешние флуктуации $\tau_{\text{корр}} \ll \tau_{\text{макро}}$, имеющие широкий частотный спектр с эффективной шириной полосы $\nu_{\text{пол}}$, задаваемой соотношением

$$\nu_{\text{пол}} = \frac{1}{S(0)} \int_0^\infty S(\nu) d\nu, \quad (3.17)$$

во много раз превосходящей характерную частоту системы:

$$\nu_{\text{пол}} \gg \omega(\bar{X}). \quad (3.18)$$

Среды, в которых находятся естественные системы, как правило, удовлетворяют условию (3.18). Нетрудно понять, с чем связано это свойство систем, встречающихся в природе. Как уже говорилось, внешний шум может быть проявлением турбулентного, или хаотического, состояния: внешний параметр зависит от бесчисленного множества взаимодействующих между собой факторов окружения, и это взаимодействие приводит к возбуждению большого числа гармонических мод, что не может не сказаться на временном поведении системы. Таким образом, в широком классе приложений флуктуации среды происходят чрезвычайно быстро (в смысле неравенств (3.8) или (3.18)). Кроме того, оказывается, что именно этот случай широкополосного внешнего шума особенно удобен для рассмотрения с математической точки зрения. Имея в виду все эти соображения, мы сочли уместным начать анализ воздействия внешнего шума на нелинейные системы с предельного случая чрезвычайно быстрых флуктуаций среды.

3.2. Белый шум

Если $\tau_{\text{корр}} \ll \tau_{\text{макро}}$, то трудно удержаться от искушения перейти к пределу $\tau_{\text{корр}} = 0$. Основания для подобной идеализации сводятся к следующему. Память среды весьма коротка по сравнению с памятью системы. И естественно ожидать, что в макроскопической системе любые эффекты, связанные с памятью среды, будут едва ощутимы. Следовательно, если мы будем считать, что отличные от нуля, но чрезвычайно короткие (по своей протяженности во времени) корреляции просто равны нулю, то такое предположение не должно приводить ни к каким качественным изменениям в макроскопическом поведении системы. В свою очередь неизменность качественной картины поведения системы означает, что система допускает адекватное описание с помощью случайного процесса, принимающего в каждый момент времени *независимое значение*, т. е. так называемого полностью случайного процесса. Однако при переходе к пределу $\tau_{\text{корр}} = 0$ необходимо соблюдать известную осторожность, о чем мы уже говорили в разд. 1.5. Если мы осуществляем предельный переход к процессу с независимыми значениями, просто устремляя к нулю время корреляции, то при этом мы не только пренебрегаем эффектами памяти, но и одновременно избавляемся от *любох* эффектов флуктуаций среды. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим гауссовский процесс с экспоненциально убывающей корреляционной функцией, а именно процесс Орнштейна — Уленбека (ОУ)¹⁾. По формуле (3.16) частотный спектр процесса ОУ определяется выражением

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\nu\tau} C(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\nu\tau} (\sigma^2/2\gamma) e^{-\gamma|\tau|} d\tau = \\ &= (\sigma^2/2\pi) (\nu^2 + \gamma^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Корреляционная функция процесса ОУ, как следует из (3.7), имеет вид

$$\tau_{\text{корр}} = \gamma^{-1}, \quad (3.20)$$

¹⁾ Для большей ясности и конкретности изложения мы будем в дальнейшем рассматривать в явном виде только случай внешнего параметра с нормальным распределением. По причинам, о которых говорилось выше, именно этот случай чаще всего встречается в приложениях и поэтому занимает центральное место в нашей работе. Экспоненциально убывающие корреляционные функции в вопросах, связанных с корреляциями, встречаются так же часто, как нормальное распределение в вопросах, связанных с вероятностью. «Вездесущность» экспоненциально убывающих корреляционных функций (как и нормального распределения) имеет под собой глубокую основу: фундаментальную теорему из теории случайных процессов (так называемую теорему Дуба), к которой мы еще вернемся в гл. 4 и 8.

поэтому предел $\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$ соответствует $\gamma \rightarrow \infty$. Из формулы (3.19), как нетрудно видеть, мы заключаем, что в этом пределе средний квадрат энергии, вносимой колебаниями с частотой ν в процесс ОУ X_t , равен нулю, т. е.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} S(\nu) = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Таким образом, уменьшение времени корреляции $\tau_{\text{корр}}$ без изменения других характеристик процесса, например дисперсии $C(0)$, в конечном счете приводит к ситуации, в которой случайные вариации среды не оказывают вообще никакого воздействия на систему просто потому, что в этом пределе общий приток энергии

$$S = 2 \int_0^{\infty} S(\nu) d\nu = \sigma^2/2\gamma = C(0) \text{ равномерно распределяется по}$$

бесконечно большому числу частот. Простота предельного перехода $\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$ обманчива. Он таит в себе нечто большее, чем простой отказ от учета эффектов памяти. По существу речь идет о пределе *без шума*. Иногда это обстоятельство упускают из виду, и тогда некоторые авторы приходят к заключению, что при очень быстрых флуктуациях ($\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$) система становится нечувствительной к флуктуациям среды и эволюционирует вполне детерминированным образом. Эти авторы обосновывают свой вывод ссылкой на то очевидное соображение, что в результате предельного перехода $\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$ в среде почти не остается случайности, на которую могла бы реагировать система.

Если нам все же необходимо заменить внешний шум с короткой памятью эквивалентным идеализированным шумом с нулевой памятью, то в свете сказанного выше надлежащий предельный переход состоит в сочетании убывания $\tau_{\text{корр}}$ с адекватным возрастанием интенсивности флуктуаций. Как показывает выражение (3.19), предел оказывается конечным, если σ^2 обращается в бесконечность согласованным с $\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$ образом, т. е. так, чтобы постоянной была величина σ^2/γ^2 , а не дисперсия $\sigma^2/2\gamma$. Заметим, что именно в этом пределе проинтегрированный процесс ОУ сходится к винеровскому процессу (см. формулу (2.127)!). Особая важность этого замечания станет понятной позже. В пределе при $\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$, $\sigma^2 \rightarrow \infty$ (но $\sigma^2/\gamma^2 = \text{const} = \bar{\sigma}^2$) частотный спектр процесса ОУ сходится к

$$S(\nu) = \bar{\sigma}^2/2\pi, \quad (3.22)$$

т. е. к полностью плоскому спектру. В том же пределе корреляционная функция процесса ОУ имеет вид

$$C(\tau) = \bar{\sigma}^2 \delta(\tau). \quad (3.23)$$

Здесь $\delta(\tau)$ означает дельта-функцию Дирака. Она не является обычной функцией, а принадлежит классу так называемых обобщенных функций¹⁾ и определяется только своими свойствами под знаком интеграла, а именно:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\tau) \delta(\tau) d\tau = \varphi(0) \quad (3.24)$$

для любой непрерывной функции $\varphi(\tau)$. Грубо говоря, δ -функцию можно охарактеризовать тем, что она равна нулю всюду, кроме $\tau = 0$, где она обращается в бесконечность, причем

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\tau) d\tau = 1. \quad (3.25)$$

Наглядно δ -функцию можно представить себе, как предел гауссовских плотностей, дисперсия которых стремится к нулю:

$$\delta(\tau - s) = \lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi} \sigma)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\tau - s)^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.26)$$

Как видно из соотношений (3.22, 23), δ -коррелированный процесс имеет плоский спектр. Это свойство легло в основу названия *белый шум*, закрепившегося за случайными процессами рассматриваемого типа: в их спектре энергия равномерно распределена по всем частотам, как в спектре белого света. Процесс ОУ является гауссовским процессом, и предельный переход не нарушает это свойство. Именно поэтому в результате предельного перехода при $\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$ процесс ОУ переходит в процесс, известный под названием гауссовского белого шума и обозначаемый в дальнейшем $\tilde{\sigma}\xi_t$ (где ξ_t — стандартный гауссовский белый шум с $E\{\xi_t\} = 0$ и $E\{\xi_t \xi_{t+\tau}\} = \delta(\tau)$). Гауссовский белый шум — процесс чрезвычайно нерегулярный. Он непрерывно совершает самые непредсказуемые скачки, его траектории нигде не дифференцируемы.

Естественно возникает вопрос: существуют ли другие типы белого шума, помимо гауссовского? На этот вопрос мы можем с уверенностью ответить утвердительно. Весь класс белых шумов ныне полностью известен [3.26]. Более того, охарактеризовать белый шум совсем не трудно. Отличительная особенность белого шума состоит в том, что это полностью случайный процесс, т. е. в каждый момент времени принимает независимое значение и имеет бесконечно большую дисперсию. Иначе говоря, любой случайный процесс, корреляционная функция которого

¹⁾ Обобщенные функции иногда называют также распределениями (в смысле Лорана Шварца). Однако, чтобы не смешивать их с распределениями вероятности, мы к такой терминологии прибегать не будем.

пропорциональна δ -функции Дирака, может быть назван белым шумом. Нетрудно получить все возможные белые шумы. Рассмотрим случайный процесс V_t со стационарными независимыми приращениями, например винеровский процесс W_t или пуассоновский процесс v_t . Тогда при достаточно малом h и $t > s$ случайные величины $(V_{t+h} - V_t)/h$ и $(V_{s+h} - V_s)/h$ независимы. Это свойство должно сохраняться и в пределе при $h \rightarrow 0$, если последний определить надлежащим образом. Напрашивается мысль: нельзя ли рассматривать белый шум как производную по времени некоторого случайного процесса со стационарными независимыми приращениями? Гауссовский белый шум был бы производной по времени винеровского процесса, а дифференцирование пуассоновского процесса дало бы в том же духе пуассоновский белый шум. Но, как уже говорилось выше, из-за того, что (см. (2.104))

$$E\{\Delta W_t^2\} = E\{(W_{t+h} - W_t)^2\} \sim h \quad (3.27)$$

и

$$E\{\Delta v_t^2\} = E\{(v_{t+h} - v_t)^2\} \sim h, \quad (3.28)$$

дисперсия разностного отношения $\Delta W_t/h$ (или $\Delta v_t/h$) стремится к бесконечности. Это обстоятельство часто формулируют, утверждая, что винеровский и пуассоновский процессы не дифференцируемы в среднеквадратичном. Мы знаем также, что оба процесса имеют почти наверное траектории, которые не дифференцируемы, т. е. и винеровский и пуассоновский процессы не дифференцируемы и потраекторно. Оказывается, что эти случайные процессы не дифференцируемы ни в каком обычном смысле. Выход из затруднения указывают соображения, которыми мы воспользовались при рассмотрении процесса ОУ. Напомним, что в том же пределе, в каком процесс ОУ X_t сходится к гауссовскому белому шуму $\bar{\sigma}\xi_t$, т. е. в пределе

$$X_t \rightarrow \bar{\sigma}\xi \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \infty, \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad \sigma^2/\gamma^2 = \bar{\sigma}^2,$$

проинтегрированный процесс ОУ $Y_t = \int_0^t X_s ds$ сходится к винер-

ровскому процессу: $Y_t \rightarrow \bar{\sigma}W_t$ (см. с. 79). Это свидетельствует о том, что гауссовский белый шум должен быть связан с винеровским процессом операцией дифференцирования. Так как корреляционная функция гауссовского белого шума является не обычной, а обобщенной функцией, это наводит на мысль о том, что случайные процессы с независимыми приращениями, не дифференцируемые ни в каком обычном смысле, должны быть диф-

ференцируемыми в каком-то обобщенном смысле. Используя теорию обобщенных случайных процессов, определяемых по аналогии с обобщенными функциями [3.2в], можно показать, что строгое определение общего белого шума возможно. Было установлено (и это важно), что существует взаимно-однозначная зависимость между процессами типа белого шума и обычными процессами с стационарными независимыми приращениями, а именно: «белый шум $= (d/dt)$ (процесс с стационарными независимыми приращениями)» [3.3, с. 159]. Последние процессы полностью известны [3.3, с. 159], что позволяет считать полностью известными и все возможные белые шумы. Понятие обобщенного случайного процесса более подробно изложено в приложении А, где также приводится явное доказательство того, что

$$\xi_t = \dot{W}_t \quad (3.29)$$

в смысле обобщенных функций.

Хотя гауссовский белый шум столь сильно нерегулярен, он необычайно полезен при моделировании быстро флуктуирующих явлений. Это неудивительно, если учесть его свойства: отсутствие непрерывных траекторий, бесконечная полная энергия

$$S = 2 \int_0^{\infty} (\bar{\sigma}^2/2\pi) d\nu = \infty \quad (\text{несмотря на то что, разумеется, белый}$$

шум не встречается в природе). Однако, исследуя спектры теплового шума в электрическом сопротивлении, силы, действующие на броуновскую частицу, или флуктуации климата, существующие помимо периодичностей астрономического происхождения, мы убеждаемся в том, что белый шум является очень хорошим приближением. Все эти примеры подтверждают полезность идеализации «белый шум» в приложении к естественным системам. Во всяком случае, частоты во много раз более высокие, чем характерная частота системы, не должны особенно влиять на макроскопические свойства системы, действующей в силу инерции как своего рода фильтр низких частот. Для практических целей шумы с очень большой эффективной шириной полосы должны быть неотличимы от белого шума. (Экспериментальное подтверждение этого утверждения приведено в гл. 7, строгое теоретическое обоснование дается в гл. 8.) Так как $\nu_{\text{пол}} = \pi/2\tau_{\text{корр}}$, то сказанное представляет собой не более чем парафразу известного факта: допустимость перехода к пределу белого шума при $\tau_{\text{корр}} \ll \tau_{\text{макро}}$.

Приведенные соображения — последний штрих в разработанной нами схеме моделирования макроскопических систем, находящихся в быстро флуктуирующей среде. В идеализации δ -кор-

релированного внешнего шума такая система описывается СДУ вида

$$\dot{X}_t = h(X_t) + \lambda g(X_t) + \sigma g(X_t) \xi_t = \quad (3.30)$$

$$= f_\lambda(X_t) + \sigma g(X_t) \xi_t \quad (3.31)$$

(черту над σ , означающую интенсивность гауссовского белого шума, мы опустим).

Гл. 4 и 5 посвящены главным образом основным свойствам СДУ (3.31), но сначала мы хотели бы обсудить те последствия, к которым приводит идеализация белого шума. Какие преимущества дает пренебрежение малыми эффектами окружающей среды? Прежде всего, отбросив эти эффекты, мы получаем объект с весьма хитроумными свойствами, не принадлежащий к классу обычных случайных процессов. Для простоты предположим, что мы рассматриваем ситуацию вполне обычную: состояние системы в момент времени t по результатам точных измерений есть x . Относительно внешнего параметра λ_t известно лишь его распределение вероятности, например λ_t может иметь гауссовское распределение. Отвлечемся на миг и рассмотрим более реалистичский шум, чем белый: пусть ξ_t будет, например, процессом ОУ. Через короткое время h в будущем состояние системы будет определяться величиной

$$X_{t+h} = x + f_\lambda(x)h + \sigma g(x)\xi_t h. \quad (3.32)$$

Разумеется, было бы очень удобно, если бы стохастическая эволюция системы в будущем была предсказуема на основе только той информации, которой мы располагаем в настоящий момент времени t относительно состояния x системы и условий в среде (вся эта информация содержится в вероятности значений ξ_t). На более строгом математическом языке вероятность того, что система будет находиться в некоторый будущий момент времени $t+h$ в состоянии y , должна зависеть только от состояния x системы в настоящее время и от стационарной вероятности (плотности вероятности) $P_s(z)$, описывающей среду, но не от предстории. Такая ситуация является самым непосредственным стохастическим аналогом детерминированной ситуации, когда решение $X(t)$ уравнения (3.1) полностью определено, если задано начальное условие $X(0)$. Указанное свойство является словесным описанием отличительной особенности марковского процесса. Прежде чем переходить к строгому определению этого важного класса случайных процессов, заметим, что система может обладать указанным выше свойством только при условии, если среда полностью характеризуется одномерной плотностью вероятности $p_s(z)$, а не бесконечной иерархией n -мерных плотностей вероятности, как в общем случае. Единственным классом

процессов, для которых это условие выполняется, являются процессы с независимыми значениями в каждый момент времени, поскольку для полностью случайных процессов

$$p(z_1, t_1; \dots; z_n, t_n) = \prod_{i=1}^n p_s(z_i). \quad (3.33)$$

Такой результат отнюдь не является неожиданным: если бы у среды была конечная память, то информация о прошлом способствовала бы более точному предсказанию будущей стохастической эволюции системы. Эти эвристические соображения вплотную подводят нас к правдоподобному предположению относительно того, что система является марковской в том и только в том случае, если внешние флуктуации белые. Пока мы еще не в состоянии сформулировать свою гипотезу в виде математической теоремы. Напомним, что белый шум — чрезвычайно нерегулярный процесс, не обладающий непрерывными траекториями. Разложение в ряд Тейлора (3.32), призванное определить состояние системы в момент времени $t + h$, вполне может оказаться не имеющим смысла. Иначе говоря, так как среда немедленно забывает, в каком состоянии она находилась в предыдущее мгновение, едва ли ξ_t будет иметь какое-то отношение к состоянию системы в некоторый момент времени $t + h$. Таким образом, для гауссовского белого шума эта ситуация оказывается еще более деликатной, и анализ ее требует большой осторожности. Кроме того, как уже подчеркивалось в разд. 1.5, необходимо тщательно следить за тем, в каком смысле надлежит понимать СДУ (3.30) и утверждение о том, что « X_t — решение уравнения (3.30)». Для тех читателей, кто не желает оставаться в неведении до тех пор, пока не станет ясен исход строгого математического анализа, скажем, что справедлива следующая математическая теорема: процесс X_t , удовлетворяющий уравнению (3.31), является марковским в том и только том случае, если внешний шум ξ_t белый. Эта теорема объясняет, почему так важна и чем так привлекательна идеализация «белый шум». Если система, связанная с флуктуирующей средой, может быть описана марковским процессом, то мы сразу получаем в свое распоряжение целый арсенал математических средств, разработанных для анализа таких случайных процессов. Мы видим, что наши оптимистические надежды на успешное преодоление трудностей, с которыми сталкивается анализ влияния внешнего шума на нелинейные системы, имеют под собой известное основание. Но если бы система допускала описание только с помощью немарковского процесса, то шансы на успех были бы самые незначительные. Методы работы с немарковскими процессами того типа, который встречается в приложениях, разработаны пока да-

леко не достаточно. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. 8 и 9.

Заметим, что произведение двух обобщенных функций или любая другая нелинейная операция над обобщенными функциями не могут быть определены по принципиальным теоретическим причинам. Следовательно, в СДУ (3.31) внешний белый шум должен входить непременно линейно. В противном случае уравнение (3.31) не имело бы смысла. Как уже упоминалось, для широкого класса приложений феноменологическое уравнение типа (3.31) действительно линейно по внешнему параметру λ . Если зависимость $f(x)$ от λ нелинейна, то в большинстве случаев оказывается возможно перейти к пределу белого шума. Получающееся при этом СДУ с членом, описывающим случайную силу, *линейно* по λ . Этот случай мы подробно рассмотрим в гл. 8.

Глава 4

МАРКОВСКИЕ ДИФфуЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

В гл. 3 мы на эвристическом уровне показали, что состояние X_t системы может быть представлено марковским процессом в том и только том случае, если внешний шум белый. В этой главе мы впервые определим марковские процессы с должной математической строгостью. Затем мы сосредоточим внимание на подклассе марковских процессов, имеющих почти наверное непрерывные траектории и поэтому особенно важных для наших приложений. Действительно, во многих приложениях по причинам физического характера желательно, чтобы траектории и флуктуирующих внешних параметров и переменных, описывающих состояние системы, обладали этим свойством, т. е. были непрерывны. Например, даже если температура химического реактора сильно флуктуирует, можно тем не менее ожидать, что концентрации реагирующих веществ останутся гладкими функциями, не претерпевающими разрывов во времени. В дальнейшем, если противоположное особо не оговорено, мы всегда будем выбирать внешние шумы с непрерывными траекториями. Вопрос, который остается невыясненным, состоит в том, гарантируется ли при таком выборе непрерывность траекторий случайных величин, описывающих состояние системы, эволюция которых во времени зависит от внешнего шума. Так как эти величины удовлетворяют дифференциальному уравнению, ответ на интересующий нас вопрос заведомо утвердительный, если внешний шум не белый. В случае белого внешнего шума ответ не столь очевиден. Но, если переход к идеализации «белый шум» полезен, при таком переходе должно сохраняться по крайней мере такое свойство, как непрерывность траекторий случайного процесса X_t . Дифференцируемость утрачивается, что мы обсудим ниже. В гл. 5 мы покажем, что система с гауссовским белым шумом действительно может быть описана марковским процессом с почти наверное непрерывными траекториями. Именно поэтому мы уделим особое внимание таким процессам в этой главе.

4.1. Марковские процессы: определение

Сформулируем еще раз нестрогое «словесное» определение марковского процесса, которое мы использовали в разд. 3.2. Случайный процесс X_t называется марковским, если при условии, что известно текущее состояние процесса X_t , любая дополнительная информация относительно его предыстории полностью несущественна для предсказания последующей эволюции процесса. Иначе говоря, если известно настоящее, то прошлое и будущее (условно) независимы.

Для точного математического определения марковского свойства, или марковости, нам необходимо сформулировать понятие «поведение случайного процесса в прошлом» в операционных математических терминах. История X_t состоит, очевидно, из событий, происшедших «до сих пор». Иначе говоря, поведение системы в прошлом характеризуется совокупностью событий, связанных с процессом X_t , т. е. множеством

$$\{X_\tau^{-1}(B), \tau \in [t_0, s], B \in \mathcal{B}\} = \\ = \{A \mid A = \{\omega \mid X_\tau(\omega) \in B\}, \tau \in [t_0, s], B \in \mathcal{B}\}. \quad (4.1)$$

Обозначим наименьшее σ -поле, содержащее эту совокупность событий, через $\mathcal{A}[t_0, s]$. Заметим, что σ -поле $\mathcal{A}[t_0, s]$ единственно и содержит полную информацию о поведении случайного процесса X_t в прошлом. Это следует непосредственно из его определения (4.1). $\mathcal{A}[t_0, s] \subset \mathcal{A}$ — наименьшее под- σ -поле, относительно которого *все* случайные величины $X_t, t \in [t_0, s]$ измеримы. В переводе на точный математический язык приведенное выше «словесное» определение марковского процесса гласит:

случайный процесс $\{X_t, t \in \theta\}$, где $\theta \in [t_0, t] \subset \mathbb{R}$, называется марковским процессом, если при всех $t_0 \leq s \leq t \leq T$ и всех $B \in \mathcal{B}$ с вероятностью единица выполняется марковское свойство

$$P(X_t \in B \mid \mathcal{A}[t_0, s]) = P(X_t \in B \mid X_s). \quad (4.2)$$

Заметим, что в левой части равенства (4.2) стоит условная вероятность относительно прошлого самого процесса, а в правой — относительно случайной переменной X_s , т. е. настоящего состояния процесса. В интервале времени от t_0 до t процесс эволюционирует свободно, никаких внешних условий на него не налагается. Нетрудно понять, что σ -поле $\mathcal{A}[t_0, s]$ порождено событиями вида $\{\omega \mid X_{s_1}(\omega) \in B_1, \dots, X_{s_n}(\omega) \in B_n\}$, где $t_0 \leq s_1 < \dots < s_n \leq s$ и $B_i \in \mathcal{B}$. Следовательно, условие, эквивалентное марковскому свойству (4.2), задается иерархией равенств

$$P(X_t \in B \mid X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = P(X_t \in B \mid X_{t_n}) \quad (\text{почти наверное}) \quad (4.3)$$

при $n \geq 1$, $t_0 \leq t_1 < \dots, < t_n < t \leq T$ и $B \in \mathcal{B}$.

Те же соображения, исходя из которых мы ввели условные вероятности (2.76), позволяют утверждать, что условное распределение $Q_{X_t}(B|X_s)$ существует для условной вероятности $P(X \in B|X_s)$. Это условное распределение представимо в виде

$$Q_{X_t}(B|X_s) = P(B, t|X_s, s), \quad (4.4)$$

где $P(B, t|x, s)$ — функция четырех аргументов $s, t \in \theta$ ($t \geq s$) и $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}$. Она обладает следующими четырьмя свойствами.

1) Равенство

$$P(B, t|X, s) = P(X_t \in B|X_s)$$

выполняется с вероятностью единица. (Напомним, что условная вероятность — случайная переменная.)

2) Из общих свойств условных вероятностей и условных распределений (см. гл. 2) следует, что $P(\cdot, t|x, s)$ — вероятность на \mathcal{B} при фиксированных s, t и x .

3) $P(B, t|\cdot, s)$, есть \mathcal{B} -измеримая функция.

Все три приведенные выше свойства присущи всем без исключения условным распределениям (см. разд. 2.1.7) и не несут в себе ничего специфического для марковского процесса. Что же касается четвертого свойства, то оно характерно именно для марковского процесса:

$$4) P(B, t|x, s) = \int_{\mathbb{R}} P(B, t|z, t') P(dz, t'|x, s) \quad (4.5)$$

при $t_0 \leq s \leq t' \leq t \leq T$ и $B \in \mathcal{B}$. Соотношение (4.5) известно под названием уравнения Колмогорова — Чепмена. Оно следует непосредственно из марковского свойства (4.2):

$$\begin{aligned} P(B, t|X_s, s) &= P(X_t \in B|X_s) = \\ &= P(X_t \in B | \mathcal{A}[t_0, s]) = \quad (\text{марковость}) \\ &= E\{I_B(X_t) | \mathcal{A}[t_0, s]\} = \\ &= E\{E\{I_B(X_t) | \mathcal{A}[t_0, s]\} | \mathcal{A}[t_0, t']\} = \end{aligned}$$

(мы воспользовались свойством (2.71) условных математических ожиданий, так как если $t' \geq s$, то $\mathcal{A}[t_0, t'] \supset \mathcal{A}[t_0, s]$)

$$\begin{aligned} &= E\{E\{I_B(X_t) | \mathcal{A}[t_0, t']\} | \mathcal{A}[t_0, s]\} = \quad (\text{см. (2.71)}) \\ &= E\{P(X_t \in B | \mathcal{A}[t_0, t']) | \mathcal{A}[t_0, s]\} = \\ &= E\{P(X_t \in B | X_{t'}) | \mathcal{A}[t_0, s]\} = \quad (\text{марковость}) \\ &= E\{P(B, t|X_{t'}, t') | \mathcal{A}[t_0, s]\} = \\ &= E\{P(B, t|X_{t'}, t') | X_s\} = \quad (\text{марковость}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(B, t|z, t') P(dz, t'|X_s, s). \quad (2.73) \end{aligned}$$

В дальнейшем основной интерес для нас будут представлять марковские процессы, гладкие в том смысле, что для них существует плотность вероятности. С этого момента мы будем рассматривать случай, когда

$$P(B, t|x, s) = \int_B p(y, t|x, s) dy, \quad (4.6)$$

и назовем величину $p(y, t|x, s)$ плотностью вероятности перехода ¹⁾. Если $t = s$, то $p(y, s|x, s) = \delta(y - x)$. По формуле (2.79) плотность вероятности перехода определяется выражением

$$p(y, t|x, s) = \frac{p(y, t; x, s)}{\int_R p(y, t; x, s) dy} = \frac{p(y, t; x, s)}{p(x, s)}, \quad (4.7)$$

если плотность $p(x, s)$ положительна. Переписывая уравнение Колмогорова — Чепмена для плотности, получаем

$$p(y, t|x, s) = \int_R p(y, t|z, t') p(z, t'|x, s) dz. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) означает, что для марковского процесса переход из состояния (x, s) в состояние (y, t) может быть осуществлен в два приема: во-первых, переход из состояния x в данный момент («настоящее») в произвольное состояние z в некоторое промежуточное время t' и, во-вторых, «суммирование» переходов из всех возможных промежуточных состояний в состояние y в момент времени t .

Вместе с одномерной плотностью вероятности плотность вероятности перехода полностью характеризует процесс X_t . Справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} p(y_n, t_n; \dots; y_1, t_1) &= \\ &= p(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}) p(y_{n-1}, t_{n-1} | y_{n-2}, t_{n-2}) \times \dots \\ &\dots \times p(y_2, t_2 | y_1, t_1) p(y_1, t_1). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Оно показывает следующее: чтобы охарактеризовать марковский процесс, отнюдь не обязательно определять бесконечную иерархию плотностей вероятности, — для этого достаточно знать первых два члена иерархии $p(y, t)$ и $p(y, t|x, s)$. Из иерархий плотностей вероятности случайных процессов из примеров, приведенных в гл. 2, ясно, что все эти процессы марковские. Класс

¹⁾ Функция $P(B, t|x, s)$, которая должна также удовлетворять условию $P(B, s|x, s) = I_B(x)$, называется вероятностью перехода марковского процесса X_t .

случайных процессов с независимыми значениями в каждый момент времени, т. е.

$$p(y_n, t_n; \dots; y_1, t_1) = \prod_{i=1}^n p(y_i, t_i), \quad (4.10)$$

тривиально марковский. Такие процессы мы будем в дальнейшем называть сингулярными марковскими процессами.

Необходимо отчетливо понимать, что в общем случае марковское свойство допускает корреляцию в различные моменты времени и несингулярные марковские процессы обладают ненулевым временем корреляции. В этом смысле марковские процессы образуют простейший нетривиальный класс случайных процессов. Встречающееся время от времени в литературе утверждение о том, что марковские процессы — это случайные процессы без памяти, есть не более чем «вольность речи». Лишь в том случае, если условная вероятность рассматривается относительно настоящего состояния, задаваемого случайной величиной X_s , память о прошлом не существует по определению. Для несингулярного стационарного марковского процесса плотность вероятности перехода не факторизуется:

$$\begin{aligned} p(y, t; x, s) &= p(y, t | x, s) p(x, s) = \\ &= p(y, t - s | x, 0) p_s(x) \neq p_s(y) p_s(x), \end{aligned} \quad (4.11)$$

поэтому корреляционная функция, вообще говоря, отлична от нуля при всех $\tau = t - s > 0$. Марковский процесс принято называть *однородным* (во времени), если плотность его вероятности перехода удовлетворяет соотношению

$$p(y, t | x, s) = p(y, t - s | x, 0) = p(y, \tau | x). \quad (4.12)$$

Однородный марковский процесс стационарен (в строгом смысле), если $p(x, t) = p_s(x)$.

Поводом для рассмотрения марковских процессов послужили наши эвристические соображения о том, что решение стохастического дифференциального уравнения должно обладать марковским свойством. Воспользуемся тем, что в смысле обобщенных функций гауссовский белый шум есть производная от винеровского процесса, и, формально умножив (3.31) на dt , получим

$$dX_t = f_\lambda(X_t) dt + \sigma g(X_t) dW_t. \quad (4.13)$$

Отложим до следующей главы подробное обсуждение строгого математического смысла такого уравнения, а также вопроса о том, в каком смысле мы понимаем утверждение, что X_t есть решение уравнения (4.13). Пока же ограничимся замечанием, что в таком виде СДУ выглядит заведомо более привлекательно, чем в виде (3.31), поскольку в него входят только обыч-

ные случайные процессы (термин «обычный» в данном случае противоположен по смыслу термину «обобщенный»). Это все-таки надежда на то, что при решении СДУ (4.31) нам удастся избежать обращения к теории обобщенных случайных процессов.

4.2. Марковские диффузионные процессы: определение

Предположим, что в момент времени t процесс X_t находится в состоянии x . Вид СДУ (4.13) наводит на мысль о том, что в некотором смысле приращение ΔX_t процесса X_t по крайней мере на очень малом интервале времени задается соотношением

$$\Delta X_t = f_\lambda(x) \Delta t + \sigma g(x) \Delta W_t. \quad (4.14)$$

Вводя обозначения $a = f_\lambda(x)$ и $\sqrt{D} = \sigma g(x)$, мы можем записать соотношение (4.14) в виде

$$\Delta X_t = a \Delta t + \sqrt{D} \Delta W_t. \quad (4.15)$$

Оно выглядит как уравнение броуновского движения с коэффициентом диффузии D в потоке со скоростью a . Но в данном случае обе величины a и \sqrt{D} зависят от положения «броуновской частицы». Более точно наше утверждение можно было бы сформулировать следующим образом: локально по времени, т. е. на малых интервалах времени, где $X_t \approx x = \text{const}$, эволюция случайной величины X_t , описывающей состояние процесса, напоминает движение броуновской частицы с коэффициентом диффузии $\sigma^2 g^2(x)$ в жидкости со скоростью потока $f_\lambda(x)$. Выясним, имеет ли смысл определить класс марковских процессов, представимых локально во времени в виде винеровского процесса с систематической компонентой (или, более общо, марковских процессов, обладающих локально структурой произвольного процесса с стационарными независимыми приращениями [4.1]).

По очевидным причинам такие марковские процессы известны под названием диффузионных процессов. Они характеризуются тремя свойствами. Во-первых, диффузионный процесс должен иметь почти наверное непрерывные траектории. Это свойство выражается следующим математическим требованием. Пусть X_t — марковский процесс с плотностью вероятности $p(y, t | x, s)$. Тогда а) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \varepsilon} p(y, t | x, s) dy = 0. \quad (4.16)$$

Условие (4.16) означает, что за короткий интервал состояние процесса X_t не может измениться сильно, т. е.

$$P[|X_t - X_s| > \varepsilon | X_s = x] = o(t - s). \quad (4.17)^1$$

Условие (4.16) гарантирует почти наверное непрерывность траекторий марковского процесса [3.3, с. 188, теорема III. 5.3]. Прежде чем переходить к рассмотрению двух остальных характерных свойств диффузионного процесса, обсудим несколько подробнее некоторые следствия, к которым приводит условие (4.16). Хотя оно и гарантирует непрерывность траекторий, оно же утверждает, что траектории диффузионного процесса извилисты: они ведут себя не менее причудливо, чем траектории винеровского процесса. Разумеется, этого можно было ожидать в свете сказанного. Из условия (4.16) следует по крайней мере существование ненулевой вероятности того, что «скорость» процесса X_t , т. е. производная от траектории по времени, бесконечна. В противном случае вероятность $P[|X_t - X_s| > \varepsilon | X_s = x]$ была бы тождественно равна нулю при $t \neq s$, но достаточно малой разности $t - s$, а не только при $o(t - s)$. Столь извилистые траектории необходимы для того, чтобы подлинно случайный процесс был марковским. Если говорить нестрого, то можно сказать, что случайные процессы с более гладкими, т. е. дифференцируемыми, траекториями не могут обладать марковским свойством, так как гладкость делает невозможной (условную) независимость прошлого и будущего. Единственным исключением, т. е. единственными марковскими процессами с непрерывными и дифференцируемыми траекториями, являются детерминированные процессы, определяемые уравнением

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) \quad (4.18)$$

с начальным условием $X_{t_0} = C$. Случайный элемент здесь только один: начальное состояние C [1.65, 2.2].

Следующие два определяющих свойства диффузионного процесса по существу выражают лишь, что среднее значение и дисперсия смещений броуновской частицы в потоке пропорциональны t . Как показывают приведенные выше соображения, этими же свойствами обладают локально во времени приращення процесса X_t при условии $X_s = x$. Точная математическая формулировка этих требований сводится к следующему.

б) Для любого положительного числа ε существует функция $f(x, t)$ (называемая переносом), такая, что

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t - s} \int_{|y - x| \leq \varepsilon} (y - x) p(y, t | x, s) dy = f(x, s). \quad (4.19)$$

¹⁾ Функция $u(t)$ есть $o(t)$, если $\lim_{t \rightarrow 0} [u(t)/t] = 0$.

в) Для любого положительного числа ε существует функция $g(x, s)$ (называемая диффузией), такая, что

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 p(y, t | x, s) dy = g^2(x, s). \quad (4.20)$$

Марковский процесс, удовлетворяющий условиям «а», «б» и «в», называется диффузионным процессом.

В двух условиях («б» и «в») используются усеченные моменты, так как сами моменты могут и не существовать. Однако в большинстве практических приложений выполняется следующее условие.

а') Существует положительное число δ , такое, что

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}} |y-x|^{2+\delta} p(y, t | x, s) dy = 0. \quad (4.21)$$

Иначе говоря, момент более высокого, чем второй (не обязательно целого), порядка при условии $X_s = x$ убывает быстрее, чем $t-s$, т. е.

$$E\{|X_t - X_s|^{2+\delta} | X_s = x\} = o(t-s). \quad (4.22)$$

Тогда тем более должно выполняться соотношение

$$\begin{aligned} o(t-s) &= \int_{|y-x| > \varepsilon} |y-x|^{2+\delta} p(y, t | x, s) dy = \\ &= \varepsilon^{2+\delta} \int_{|y-x| > \varepsilon} \frac{|y-x|^{2+\delta}}{\varepsilon^{2+\delta}} p(y, t | x, s) dy > \\ &> \varepsilon^{2+\delta} \int_{|y-x| > \varepsilon} p(y, t | x, s) dy. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Тем самым доказано, что условие «а» выполняется. Соотношение (4.21) является достаточным условием для того, чтобы марковский процесс X_t имел почти наверное непрерывные траектории. По аналогии с неравенством (4.23) получаем из (4.21):

$$\begin{aligned} &\int_{|y-x| > \varepsilon} |y-x| p(y, t | x, s) dy \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{1+\delta}} \int_{\mathbb{R}} |y-x|^{2+\delta} p(y, t | x, s) dy = o(t-s), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} &\int_{|y-x| > \varepsilon} (y-x)^2 p(y, t | x, s) dy \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^\delta} \int_{\mathbb{R}} |y-x|^{2+\delta} p(y, t | x, s) dy = o(t-s). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Таким образом, если выполняется условие «а», то в признаках «б» и «в» диффузионного процесса вместо усеченных моментов можно использовать полные, так как из неравенств (4.24, 4.25) мы видим, что интегрирование по $|y - x| > \varepsilon$ дает вклад только в члены порядка меньшего порядка по сравнению с $t - s$. Иначе говоря, вместо условий «б» и «в» мы можем рассматривать следующие.

б') Существует функция $f(x, s)$, такая, что

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}} (y-x) p(y, t|x, s) dy = f(x, s). \quad (4.26)$$

в') Существует функция $g(x, s)$, такая, что

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{\mathbb{R}} (y-x)^2 p(y, t|x, s) dy = g^2(x, s). \quad (4.27)$$

Условия «а'», «б'» и «в'» достаточны для того, чтобы марковский процесс X_t был диффузионным процессом. Если X_t — однородный (по времени) марковский процесс, т. е. $p, (y, t|x, s) = p, (y, t-s|x)$, то перенос f и диффузия g^2 — функции, не зависящие от времени.

Условие «в'» можно записать так:

$$E\{(X_t - X_s) | X_s = x\} = f(x, s)(t-s) + o(t-s); \quad (4.28)$$

отсюда ясно виден смысл переноса. Это не что иное, как систематическая эволюция системы при условии, что в момент времени s она находится в состоянии x . Для дисперсии приращений при условии $X_s = x$ получаем

$$\begin{aligned} E\{[(X_t - X_s) - E\{(X_t - X_s) | X_s = x\}]^2 | X_s = x\} &= \\ &= E\{(X_t - X_s)^2 | X_s = x\} - E\{(X_t - X_s) | X_s = x\}^2 = \\ &= g^2(x, s)(t-s) + o(t-s) - f^2(x, s)(t-s)^2 + o(t-s) = \\ &= g^2(x, s)(t-s) + o(t-s). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Тем самым показано, что определение «в'» задает локальную дисперсию относительно систематического движения *при условии* $X_s = x$. На первый взгляд кажется удивительным, что в определение диффузионного процесса (4.16, 19, 90) входят только первых два (усеченных) дифференциальных момента, а именно: $\lim_{t \downarrow s} (1/(t-s)) E\{(X_t - X_s)^v | X_s = x\}$, $v=1, 2$, плотности вероятности перехода и не содержится никакого упоминания о моментах более высокого порядка. Связано это со следующей особенностью приведенного выше определения: оно утверждает, что X_t локально выглядит как процесс $at + \sqrt{D} W_t$, т. е. как винеровский процесс, систематическая компонента которого имеет гауссовское

распределение. Как показано в разд. 2.1.5, характерной особенностью гауссовского распределения является то, что оно полностью определяется своими первыми двумя моментами. Казало бы, отсюда следует, что диффузионные процессы, поскольку они уже определены своими первыми двумя дифференциальными моментами, непременно должны быть гауссовскими процессами. Однако такое заключение *ошибочно*. Не вдаваясь в излишние подробности, можно сказать, что диффузионные процессы являются гауссовскими лишь локально, но, как правило, не глобально. Более того, в некотором смысле почти все диффузионные процессы негауссовские (разд. 4.4). Существует лишь *один* марковский процесс, который является гауссовским и принадлежит классу диффузионных процессов. Это процесс Орнштейна — Уленбека, рассмотрению которого мы посвящаем следующий раздел.

4.3. Еще раз о процессе Орнштейна — Уленбека. Теорема Дуба

Докажем утверждение, приведенное в конце разд. 4.2. Для этого мы сначала убедимся в том, что процесс ОУ принадлежит к классу диффузионных процессов, а затем покажем, что только он является стационарным гауссовским процессом. Нетрудно проверить, что процесс ОУ удовлетворяет условиям «а'», «б'» и «в'». Плотность вероятности перехода процесса ОУ определяется по формуле (2.121)

$$p(y, t | x, s) = p(y, t - s | x) = \\ = (2\pi\tilde{\sigma})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\{y - x \exp[-\gamma(t-s)]\}^2}{\tilde{\sigma}}\right), \quad (4.30)$$

где

$$\tilde{\sigma} = (\sigma^2/2\gamma) \{1 - \exp[-2\gamma(t-s)]\}.$$

Следовательно,

$$E\{(X_t - X_s) | X_s = x\} = E\{(X_t - x) | X_s = x\} = \\ = x \exp[-\gamma(t-s)] - x = \\ = -x\gamma(t-s) + o(t-s); \quad (4.31)$$

$$E\{(X_t - X_s)^2 | X_s = x\} = E\{X_t^2 | X_s = x\} - 2E\{X_t X_s | X_s = x\} + x^2 = \\ = \tilde{\sigma} + x^2 \exp[-\gamma(t-s)] \{\exp[-\gamma(t-s)] - 2\} + x^2 = \\ = \sigma^2(t-s) + o(t-s) \quad (4.32)$$

и

$$\begin{aligned}
E\{(X_t - X_s)^4 | X_s = x\} &= E\{[X_t - xe^{-\gamma(t-s)} + x(e^{-\gamma(t-s)} - 1)]^4 | X_s = x\} = \\
&= E\{(X_t - xe^{-\gamma(t-s)})^4 | X_s = x\} + 6E\{(X_t - xe^{-\gamma(t-s)})^2 | X_s = x\} \times \\
&\times x^2(e^{-\gamma(t-s)} - 1)^2 + x^4(e^{-\gamma(t-s)} - 1)^4 = \\
&= 3\sigma^2 + 6\sigma^2 x^2(e^{-\gamma(t-s)} - 1)^2 + x^4(e^{-\gamma(t-s)} - 1)^4 = o(t-s), \quad (4.33)
\end{aligned}$$

т. е. условие «а'» выполняется при $\delta = 2$. Вторая часть нашего утверждения состояла в том, что процесс ОУ является единственным стационарным гауссовским диффузионным процессом. Класс гауссовских марковских процессов полностью известен. Он характеризуется теоремой Дуба [4.2]. Пусть X_t — стационарный несингулярный марковский процесс, такой, что для произвольных моментов времени s и t ($t \neq s$) совместная плотность вероятности величин X_s и X_t гауссовская. Тогда существует постоянная $\gamma > 0$, такая, что при $t_1 < \dots < t_n$ величины X_{t_1}, \dots, X_{t_n} имеют совместное гауссовское распределение и корреляционная функция определяется выражением

$$C(t-s) = (\sigma^2/2\gamma) \exp[-\gamma(t-s)]. \quad (4.34)$$

Напомним, что гауссовский процесс полностью характеризуется средним значением и корреляционной функцией. Это показывает, что с точностью до аддитивной постоянной процесс ОУ является единственным стационарным гауссовским диффузионным процессом.

4.4. Обратное уравнение Колмогорова и уравнение Фоккера — Планка

Покажем теперь, что класс (стационарных) диффузионных процессов гораздо шире. Действительно, условия «а», «б» и «в» допускают и негауссовское поведение. Замечательная особенность диффузионных процессов состоит в том, что их плотность вероятности перехода, не будучи гауссовской, тем не менее *полностью* определяется *первыми двумя дифференциальными моментами*. Для того чтобы доказать это, мы выведем *только из условий «а», «б» и «в»* эволюционное уравнение для $p(y, t|x, s)$. Разумеется, общим эволюционным уравнением для плотности вероятности перехода марковского процесса является уравнение Колмогорова — Чепмена (4.8). Однако для нахождения $p(y, t|x, s)$ оно малоприспособно, так как нелинейно по плотности вероятности перехода. Мы покажем в дальнейшем, что в случае диффузионного процесса уравнение Колмогорова — Чепмена может быть преобразовано в линейное дифференциальное уравнение с частными производными для $p(y, t|x, s)$.

Начнем с вывода одного вспомогательного результата [4.1, с. 32], который весьма важен и сам по себе. Пусть перенос $f(x, s)$ и диффузия $g(x, s)$ — непрерывные функции, а $v(x)$ — ограниченная непрерывная функция, такая, что

$$u(x, s) = E \{v(X_t) | X_s = x\} = \int_{\mathbb{R}} v(y) p(y, t | x, s) dy \quad (4.35)$$

имеет непрерывные частные производные $\partial_x u(x, s)$ и $\partial_{xx} u(x, s)$. Тогда частная производная $\partial_s u(x, s)$ существует и $u(x, s)$ удовлетворяет уравнению

$$-\partial_s u(x, s) = f(x, s) \partial_x u(x, s) + \frac{1}{2} g^2(x, s) \partial_{xx} u(x, s) \quad (4.36)$$

с граничным условием

$$\lim_{s \uparrow t} u(x, s) = v(x). \quad (4.37)$$

Уравнение (4.36) играет важную роль в теории диффузионных процессов, поэтому будет уместно привести здесь его подробный вывод. Кроме того, в ходе вывода станут ясны некоторые следствия из условий «а», «б» и «в», определяющих отличительные особенности диффузионного процесса. Рассмотрим моменты времени s_1 и s_2 , удовлетворяющие неравенствам $s_1 \leq s \leq s_2 \leq t$. Тогда по определению (4.35) функции $u(x, s)$ она удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \Delta u &\equiv u(x, s_1) - u(x, s_2) = \int_{\mathbb{R}} v(y) p(y, t | x, s_1) dy - \\ &- \int_{\mathbb{R}} v(y) p(y, t | x, s_2) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(y) \left[\int_{\mathbb{R}} p(y, t | z, s_2) p(z, s_2 | x, s_1) dz \right] dy - \\ &- \int_{\mathbb{R}} v(y) p(y, t | x, s_2) dy \int_{\mathbb{R}} p(z, s_2 | x, s_1) dz = \end{aligned}$$

(преобразуя первое слагаемое, мы воспользовались уравнением Колмогорова — Чепмена (4.8), а второе слагаемое умножили на единицу, записанную несколько необычным способом)

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} u(z, s_2) p(z, s_2 | x, s_1) dz - \int_{\mathbb{R}} u(x, s_2) p(z, s_2 | x, s_1) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}} [u(z, s_2) - u(x, s_2)] p(z, s_2 | x, s_1) dz. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Разлагая пространство состояний на две части, получаем

$$\Delta u = \int_{|z-x| \leq \varepsilon} [u(z, s_2) - u(x, s_2)] p(z, s_2 | x, s_1) dz + \\ + \int_{|z-x| > \varepsilon} [u(z, s_2) - u(x, s_2)] p(z, s_2 | x, s_1) dz \equiv J_1 + J_2.$$

Оценим сначала слагаемое J_2 . Так как функция $v(x)$ по предположению ограничена, функция $u(x, s)$ «наследует» это свойство, т. е. $\sup_x |u(x, s_2)| < \infty$, что позволяет записать для J_2 неравенство

$$J_2 \leq 2 \sup_z |u(z, s_2)| \int_{|z-x| > \varepsilon} p(z, s_2 | x, s_1) dz,$$

и по условию «а» (соотношение (4.16)) мы получаем оценку

$$J_2 = o(s_2 - s_1). \quad (4.39)$$

Воспользуемся теперь разложением в ряд Тейлора и запишем первое слагаемое J_1 в виде

$$J_1 = \int_{|z-x| \leq \varepsilon} \left[u'(x, s_2)(z-x) + \frac{1}{2} u''(x, s_2)(z-x)^2 + \right. \\ \left. + r_\varepsilon(x, z, s_2) \right] p(z, s_2 | x, s_1) dz. \quad (4.40)$$

Остаточный член $r_\varepsilon(x, z, s_2)$ удовлетворяет неравенству

$$|r_\varepsilon(x, z, s_2)| \leq |z-x|^2 o_\varepsilon, \quad (4.41)$$

где

$$o_\varepsilon = \sup_{|z-x| \leq \varepsilon} |\partial_{xx} u(x + \vartheta(x-z), s_2) - \partial_{xx} u(x, s_2)|,$$

$$0 < \vartheta < 1 \text{ и } o_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Воспользуемся теперь двумя другими условиями, входящими в определение диффузионного процесса, т. е. условиями (4.19, 20), и получим

$$\Delta u = \left[f(x, s) \partial_x u(x, s_2) + \frac{1}{2} g^2(x, s) \partial_{xx} u(x, s_2) + R_\varepsilon \right] (s_2 - s_1) + \\ + o(s_2 - s_1), \quad (4.42)$$

где $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{s_2 \downarrow s_1} R_\varepsilon = 0$ (см. оценку (4.41)). После деления правой и левой частей в (4.42) на $(s_2 - s_1)$ и перехода к пределу при $s_2 \downarrow s_1$, $s_1 \uparrow s$ и $\varepsilon \downarrow 0$ получаем уравнение (4.36).

Напомним, что

$$u(x, s) = \int_{\mathbb{R}} v(y) p(y, t | x, s) dy.$$

Это позволяет представить уравнение (4.36) в виде ¹⁾

$$\int_{\mathbb{R}} v(y) \left[\partial_s p(y, t | x, s) + f(x, s) \partial_x p(y, t | x, s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g^2(x, s) \partial_{xx} p(y, t | x, s) \right] dy = 0,$$

из которого (так как $v(y)$ — произвольная функция) следует, что плотность вероятности перехода диффузионного процесса удовлетворяет уравнению в частных производных

$$-\partial_s p(y, t | x, s) = f(x, s) \partial_x p(y, t | x, s) + \\ + \frac{1}{2} g^2(x, s) \partial_{xx} p(y, t | x, s). \quad (4.43)$$

Уравнение (4.43), так же как и уравнение (4.36), известно под названием обратного уравнения Колмогорова (ОУК). Прилагательное «обратное» входит в название этого уравнения потому, что вариация берется как бы относительно начального состояния x и начального момента времени s . Конечное состояние (y, t) входит в решение ОУК как параметр. Не претендуя на строгость, можно сказать, что ОУК дает решение задачи, в которой диффузионный процесс X_t должен начаться в момент времени s , чтобы в момент времени t перейти в заданное состояние y . Такая задача играет в большинстве приложений лишь весьма незначительную роль. Заметным исключением из общего правила является генетика, в которой нередко представляет интерес переход системы в заданное конечное состояние, например закрепление в популяции мутанта какого-то гена [4.3]. Но в целом основной вопрос состоит в том, каким образом система эволюционирует из настоящего в будущее, поэтому желательно было бы иметь «прямое» эволюционное уравнение, решение которого зависело бы от параметра (x, s) . Выводом такого прямого уравнения мы сейчас и займемся. Для этого нам понадобится следующее соотношение, вытекающее непосредственно из уравнения (4.36):

$$\lim_{s_2 \downarrow s_1: s_1 \uparrow \cdot} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{\mathbb{R}} [u(z) - u(x)] p(s, z_2 | x_1, s_1) dz = \\ = \lim_{s_2 \downarrow s_1: s_1 \uparrow \cdot} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{\mathbb{R}} [u(z) p(z, s_2 | x_1, s_1) dz - u(x)] = \\ = f(x, s) \partial_x u + \frac{1}{2} g(x, s) \partial_{xx} u. \quad (4.44)$$

¹⁾ Мы предполагаем, что производные плотности вероятности перехода $p(y, t | x, s)$ существуют и что операция дифференцирования перестановочна с операцией интегрирования.

Для получения его достаточно заметить, что в выводе обратного уравнения Колмогорова (4.36) ничто не изменится, если в соотношении (4.38) мы начнем с функции u , не зависящей от временного аргумента s . Этим обстоятельством мы и воспользуемся для получения следующего фундаментального результата — вывода прямого уравнения диффузионного процесса.

Если условия (4.16, 19, 20) выполняются равномерно по x , то плотность вероятности перехода $p(y, t|x, s)$ диффузионного процесса X_t удовлетворяет уравнению

$$\partial_t p(y, t|x, s) = -\partial_y f(y, t) p(y, t|x, s) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g^2(y, t) p(y, t|x, s), \quad (4.45)$$

если входящие в него производные от плотности существуют и непрерывны. Вывод прямого уравнения (4.45) производится следующим образом [4.1]. Пусть $v(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная тождественно нулю вне некоторого ограниченного интервала. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbb{R}} p(y, t|x, s) v(y) dy &= \\ &= \lim_{t_1 \uparrow t; t_2 \downarrow t} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{\mathbb{R}} p(y, t_2|x, s) - p(y, t_1|x, s) v(y) dy = \\ &= \lim_{t_1 \uparrow t; t_2 \downarrow t} \int_{\mathbb{R}} p(y, t_1|x, s) \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{\mathbb{R}} p(z, t_2|y, t_1) v(z) dz - v(y) \right] dy. \end{aligned}$$

[Для вывода этого соотношения мы воспользовались уравнением Колмогорова — Чепмена для преобразования первого члена в правой части первого равенства:

$$\int p(y, t_2|x, s) v(y) dy = \iint p(y, t_2|z, t_1) p(z, t_1|x, s) v(y) dy dz,$$

и переобозначили переменные $y \leftrightarrow z$:

$$I = \iint p(z, t_2|y, t_1) p(y, t_1|x, s) v(z) dz dy.]$$

Используя соотношение (4.44), преобразуем правую часть выражения для $\partial_t \int p(y, t|x, s) v(y) dy$ к виду

$$\int p(y, t|x, s) \left[f(y, t) \partial_y v(y) + \frac{1}{2} g^2(y, t) \partial_{yy} v(y) \right] dy.$$

Интегрируя полученное соотношение по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \partial_t p(y, t | x, s) v(y) dy = \\ = \int_{\mathbb{R}} dy v(y) \left[-\partial_y f(y, t) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g^2(y, t) \right] p(y, t | x, s). \end{aligned}$$

Все граничные члены обращаются в нуль, так как функция $v(y)$ тождественно равна нулю вне некоторого ограниченного интервала. Прямое уравнение (4.45) следует из выведенного нами соотношения, если учесть, что $v(y)$ — произвольная функция. Это эволюционное уравнение для $p(y, t | x, s)$, как и обратное уравнение Колмогорова, линейно по плотности вероятности перехода в отличие от уравнения Колмогорова — Чепмена, из которого выводятся оба этих уравнения. В математической литературе оно получило название прямого уравнения Колмогорова, так как вариация в нем берется относительно «будущего» состояния y и временного аргумента t . В физической литературе за ним закрепилось название уравнение Фоккера — Планка (УФП). ОУК и УФП показывают, что марковский диффузионный процесс действительно полностью определяется двумя первыми дифференциальными моментами: ОУК и УФП являются дифференциальными уравнениями в частных производных для плотностей вероятностей перехода с коэффициентами, зависящими от дрейфа f и диффузии g^2 . Следовательно, плотность вероятности перехода как решение ОУК или УФП полностью и однозначно определяется двумя первыми дифференциальными моментами при определенных условиях регулярности на f и g^2 . Именно это удивительное свойство делает понятие диффузионного процесса столь мощным.

Умножая правую и левую части УФП (4.45) на одномерную плотность вероятности $p(x, s)$ и интегрируя по x , мы получаем одномерную плотность вероятности $p(y, t)$ диффузионного процесса, которая также удовлетворяет уравнению типа (4.45):

$$\partial_t p(y, t) = -\partial_y f(y, t) p(y, t) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g^2(y, t) p(y, t). \quad (4.46)$$

Разумеется, обратное утверждение *неверно*: если *одномерная* плотность вероятности $p(y, t)$ некоторого случайного процесса удовлетворяет уравнению вида (4.46), то это еще отнюдь не означает, что процесс марковский [4.4]. Если диффузионный процесс однороден по времени, т. е. $p(y, t | x, s) = p(y, t - s | x, 0) = p(y, \tau | x)$, то, как уже отмечалось, дрейф и диффузия не зависят от времени. Кроме того,

$$\partial_t p(y, t | x, s) = \partial_\tau p(y, \tau | x) \quad (4.47)$$

и

$$\partial_s p(y, t | x, s) = -\partial_\tau p(y, \tau | x). \quad (4.48)$$

Для однородных по времени марковских процессов ОУК и УФП (при замене τ на t) принимают следующий вид:

$$\text{ОУК: } \partial_t p(y, t | x) = f(x) \partial_x p(y, t | x) + \frac{1}{2} g^2(x) \partial_{xx} p(y, t | x), \quad (4.49)$$

$$\text{УФП: } \partial_t p(y, t | x) = -\partial_y f(y) p(y, t | x) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t | x). \quad (4.50)$$

В дальнейшем нас будут интересовать главным образом однородные по времени диффузионные процессы, так как одно из наших основных предположений относительно среды состоит в том, что ее вариации не содержат систематической компоненты.

Выпишем теперь УФП и ОУК для двух примеров диффузионного процесса, с которыми нам уже приходилось встречаться. Броуновское движение $\sqrt{D} W_t$ — диффузионный процесс по простой (чтобы не сказать тривиальной) причине: диффузионными процессами по определению называются такие случайные процессы, которые локально по времени выглядят как винеровский процесс. В этом простом примере УФП и ОУК совпадают и сводятся к классическому уравнению диффузии (теплопроводности)

$$\partial_t p(w, t | w_0) = \frac{1}{2} D \partial_{ww} p(w, t | w_0). \quad (4.51)$$

Решение этого уравнения хорошо известно и определяется по формуле (2.99). Для процесса ОУ те же два уравнения представимы (с помощью соотношений (4.31, 32)) в виде

$$\text{ОУК: } \partial_t p(v, t | v_0) = -\gamma v \partial_v p(v, t | v_0) + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{vv} p(v, t | v_0), \quad (4.52)$$

$$\text{УФП: } \partial_t p(v, t | v_0) = \partial_v \gamma v p(v, t | v_0) + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{vv} p(v, t | v_0). \quad (4.53)$$

Нетрудно проверить, что решение обоих уравнений может быть найдено по формуле (2.121).

4.5. Теорема Павулы

В заключение этой главы, посвященной марковским процессам, подчеркнем еще раз, что диффузионные процессы полностью определяются уже двумя первыми дифференциальными моментами их вероятности перехода вместе с таким свойством, как почти наверное непрерывные траектории. При завершении строгого определения диффузионного процесса мы неоднократно

обращали внимание на то, что дифференциальные моменты более высокого порядка при этом никак не используются. В этом нетрудно убедиться, проследив шаг за шагом вывод обратного уравнения Колмогорова (4.36), ОУК (4.43) и УФП (4.45). Разумеется, ситуация, с которой мы здесь сталкиваемся, выдержана целиком в духе идей, позволивших нам прийти к условиям «а», «б» и «в», а именно представления о том, что диффузионные процессы — это марковские процессы, выглядящие локально по времени как гауссовский процесс с независимыми приращениями, т. е. как $ct + \sqrt{D} W_t$ (броуновская частица в потоке с постоянной скоростью). В таком процессе все моменты более высокого порядка, чем второй, по порядку величины сравнимы с $o(t)$. В этой связи возникает вопрос: можно ли определить какие-нибудь новые классы марковских процессов, если потребовать, например, чтобы выполнялись следующие условия (по аналогии с достаточными условиями «а'», «б'» и «в'» для диффузионного процесса).

1) При $n \leq v$ существует функция $A_n(x, s)$, такая, что

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E \{ (X_t - X_s)^n | X_s = x \} = A_n(x, s) \neq 0. \quad (4.54)$$

2) При любом $n > v$

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} E \{ (X_t - X_s)^n | X_s = x \} = 0. \quad (4.55)$$

УПФ для таких процессов имело бы вид

$$\partial_t p(y, t | x, s) = \sum_{n=1}^v \frac{(-1)^n}{n!} \partial_y^n A_n(y, t) p(y, t | x, s), \quad (4.56)$$

как видно из следующих рассуждений. Пусть $v(y)$ — бесконечно дифференцируемая функция, тождественно равна нулю вне некоторого ограниченного интервала. Тогда, используя уравнение Колмогорова — Чепмена, мы получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} dy v(y) h^{-1} [p(y, t+h | x, s) - p(y, t | x, s)] = \\ & = h^{-1} \int_{\mathbb{R}} dy v(y) \int_{\mathbb{R}} dz p(y, t+h | z, t) p(z, t | x, s) - \\ & - h^{-1} \int_{\mathbb{R}} dy v(y) p(y, t | x, s). \end{aligned}$$

Используя разложение в ряд Тейлора

$$v(y) = v(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_z^n v(z) (y - z)^n$$

и переходя к пределу $h \rightarrow 0$, преобразуем полученный результат к виду

$$\int_{\mathbb{R}} dy v(y) \partial_t p(y, t | x, s) = \int_{\mathbb{R}} dy \sum_{n=1}^v \frac{1}{n!} A_n(y, t) p(y, t | x, s) \partial_y^n v(y),$$

откуда при интегрировании по частям последнего выражения получаем уравнение (4.56).

К сожалению, любой класс марковских процессов, удовлетворяющих наложенным нами условиям, при $v \geq 3$ оказывается *пустым*: предложенное определение логически противоречиво, и уравнение (4.56) не является прямым уравнением марковского процесса. Нетрудно указать пробел в определении и в выводе УФП (4.56): из соотношения (4.55), разумеется, следует, что условие «а'» (4.21) выполняется при $\delta = v + 2$ (или $v + 1$, если v нечетно). Кроме того, из соотношения (4.54) тривиально следует, что условия «б'» и «в'» также выполняются. Это означает, что марковский процесс, определяемый (4.54, 55), является диффузионным и его плотность вероятности перехода удовлетворяет УФП (4.45). Но тогда при $v \geq 3$, таком, что дифференциальные моменты порядка $n > v$ тождественно равны нулю, все дифференциальные моменты $A_n(x, s)$ тождественно равны нулю при $n > 2$. Павула [4.5, 6] дал изящное прямое доказательство этого утверждения, используя лишь неравенство Коши — Буняковского — Шварца для математических ожиданий.

Теорема Павулы. Если существует четное $\mu > 3$, такое, что $A_\mu(x, s) \equiv 0$, то $A_n(x, s) = 0$ при всех $n \geq 3$.

Поскольку теорема Павулы не привлекла к себе должного внимания, мы воспроизведем здесь полностью ее доказательство. Пусть $n \geq 3$ есть целое нечетное число. Тогда из неравенства

$$\begin{aligned} & |E\{(X_t - X_s)^n | X_s = x\}| = \\ & = \left| E\left\{ (X_t - X_s)^{\frac{n-1}{2}} (X_t - X_s)^{\frac{n+1}{2}} \middle| X_s = x \right\} \right| \leq \\ & \leq (E\{(X_t - X_s)^{n-1} | X_s = x\})^{1/2} (E\{(X_t - x)^{n+1} | X_s = x\})^{1/2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

следует, что

$$A_n^2(x, s) \leq A_{n-1}(x, s) A_{n+1}(x, s). \quad (4.58)$$

Аналогично при четном n мы приходим к неравенству

$$A_1^2(x, s) \leq A_{n-2}(x, s) A_{n+2}(x, s). \quad (4.59)$$

Полагая $n = r - 1$, $r + 1$ в (4.58) и $n = r - 2$, $r + 2$ в (4.59), где r — целое четное число, получаем

$$\begin{aligned} A_{r-2}^2(x, s) &\leq A_{r-4}(x, s) A_r(x, s), \quad r \geq 6, \\ A_{r-1}^2(x, s) &\leq A_{r-2}(x, s) A_r(x, s), \quad r \geq 4, \\ A_{r+1}^2(x, s) &\leq A_r(x, s) A_{r+2}(x, s), \quad r \geq 2, \\ A_{r+2}^2(x, s) &\leq A_r(x, s) A_{r+4}(x, s), \quad r \geq 2. \end{aligned} \quad (4.60)$$

С помощью этих четырех неравенств мы можем построить цепочку дифференциальных моментов до сколь угодно большого n вверх и до $n = 3$ вниз и убедиться в том, что если существует четное $\mu > 3$, при котором $A_\mu(x, s) = 0$, то $A_n(x, s) \equiv 0$ при любом $n \geq 3$. Возвращаясь к попытке построить классы марковских процессов, задаваемые условиями (4.54, 55), можно утверждать, что существуют только два таких класса: во-первых, класс диффузионных процессов, для которых все дифференциальные моменты, начиная с третьего порядка, тождественно равны нулю, и, во-вторых, класс, характеризующийся тем, что *все* дифференциальные моменты *четного порядка* не равны тождественно нулю.

4.6. Негауссовский белый шум

Главу 4 мы хотим завершить кратким замечанием о системах, возмущаемых негауссовским белым шумом. В разд. 3.2 мы уже упоминали о том (и даже пояснили на интуитивном уровне), что случайный процесс ξ_t является белым шумом в том и только том случае, если ξ_t — производная (в смысле обобщенных функций) от однородного по времени процесса с независимыми приращениями. В гл. 4 мы рассмотрели только гауссовский белый шум, представимый в виде производной от винеровского процесса. Именно это обстоятельство послужило основанием для определения класса марковских процессов (диффузионных процессов), которые локально во времени выглядят как винеровский процесс плюс систематическая компонента, т. е. $at + \sqrt{D} W_t$. Диффузионные процессы характеризуются тем, что $u(x, s) = \int_{\mathbb{R}} v(y) p(y, t | x, s) dy$ удовлетворяет обратному уравнению (4.36).

Действуя в том же духе, мы могли бы рассмотреть класс марковских процессов, локально представимых в виде пуассоновского процесса. Более общо мы могли бы выбрать любой однородный по времени процесс с независимыми приращениями. Так

как самый общий белый шум есть производная от такого однородного по времени процесса с независимыми приращениями, всякая система, возмущаемая любой разновидностью белого шума, может быть описана марковским процессом указанного выше типа. Так как винеровский процесс, грубо говоря, — единственный однородный по времени процесс с независимыми приращениями, обладающий почти наверное непрерывными траекториями, марковские процессы интересующего нас типа не имеют, вообще говоря, непрерывных траекторий (подробности см. в [4.1, 7]). Случайные процессы такого типа находят применение при описании систем, возмущаемых дробовым шумом, и часто используются, например, в теории нейронной активности [4.8—10]. Эти же процессы позволяют моделировать внутренние флуктуации [4.11].

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Излагая в предыдущей главе основы теории марковских процессов, мы мотивировали свой выбор эвристическими соображениями, суть которых сводится к тому, что временная эволюция параметра состояния X_t системы, связанной со случайной средой, является марковской в том и только том случае, если внешний шум белый. Вид феноменологического уравнения с гауссовским белым шумом (особенно уравнения (4.13)) наводит на мысль о выделении особого класса марковских процессов — так называемых диффузионных процессов. Представимость сред с гауссовским белым шумом диффузионными процессами будет полностью обоснована, если нам удастся показать, что понятию решения стохастического дифференциального уравнения может быть придан строгий математический смысл и что марковский процесс действительно удовлетворяет условиям (4.16, 19, 20), как это следует на эвристическом уровне из «уравнения в дифференциалах» (4.13). В этой главе мы подробно изложим теорию стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича и укажем тесную связь СДУ с диффузионными процессами.

5.1. Стохастические интегралы: первое знакомство

При работе с уравнениями типа (3.31) необходимо соблюдать величайшую осторожность. Действительно, с первого взгляда видно, что X_t наследует весьма нерегулярные особенности поведения гауссовского белого шума ξ_t и заведомо не может считаться обычной функцией. Тем не менее надежда избежать общей теории случайных процессов все же остается, если воспользоваться тем, что ξ_t — производная в смысле обобщенных функций от винеровского процесса, и записать уравнение (3.31) в виде (4.13). Действительно, в уравнение (4.13) входят только обычные процессы. Разумно поэтому ожидать, что понятие « X_t есть решение уравнения (4.13)» удастся сформулировать в рамках теории обычных случайных процессов, если функция $g(x)$ достаточно «гладкая», как обычно бывает в приложениях. Имен-

но для этого и служит теория стохастических дифференциальных уравнений, развитая в работах Дуба [5.1], Ито [5.2, 4] и Стратоновича [5.3]. Изложим основные «составные части» и результаты этой теории. Вместо того чтобы рассматривать уравнение (4.13) в дифференциальном виде

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma g(X_t)dW_t, \quad (5.1)$$

удобно записать его в эквивалентном интегральном виде

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \sigma \int_0^t g(X_s)dW_s. \quad (5.2)$$

(В разд. 5.1 мы будем часто полагать $\sigma = 1$, так как в соображениях чисто математического характера интенсивность белого шума несущественна.)

Таким образом, проблема придания точного математического смысла СДУ (5.1) трансформируется в проблему точного определения того, что следует понимать под каждым из двух интегралов в (5.2). Смысл первого интеграла вполне очевиден: так как дифференциал dX_t содержит дифференциал dW_t винеровского процесса, то в каком бы смысле ни существовало решение уравнения (5.1), процесс X_t должен был бы быть по крайней мере столь же нерегулярным, как винеровский процесс, но не мог быть более нерегулярным. Это означает, что траектории процесса X_t почти наверное нигде не дифференцируемы, но непрерывны, если f и g — гладкие функции. Этого достаточно, чтобы первый из интегралов можно было понимать как обычный интеграл (в смысле Римана) для любой траектории, т. е.

$$\int_0^t f(X_s(\omega))ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(X_{\tau_i^{(n)}}(\omega))(s_i^{(n)} - s_{i-1}^{(n)}), \quad (5.3)$$

где значение подынтегральной функции вычисляется в точке $\tau_i^{(n)}$, принадлежащей интервалу $[s_{i-1}^{(n)}, s_i^{(n)}]$, но в остальном произвольной. Более сложен вопрос о том, как надлежит понимать второй интеграл в (5.2) — от винеровского процесса. Как было показано в разд. 2.3, траектории винеровского процесса столь извилисты, что они почти наверное имеют бесконечную длину на любом конечном интервале времени. В интересующих нас случаях функция $g(X_t)$ во втором интеграле порождает, как правило, столь же извилистые траектории, как и винеровский процесс. Выше мы уже приводили эвристические доводы, по которым процесс X_t наследует характерные свойства винеровского процесса W_t . Грубо говоря, подынтегральное выражение во втором

интеграле (5.2) на один порядок более «нерегулярно», чем в первом интеграле. Нерегулярности случайных процессов $g(X_t)$ и W_t взаимно усиливаются. Это обстоятельство приводит к весьма пагубным последствиям при интерпретации второго интеграла.

Рассмотрим простой стандартный пример:

$$\int_0^t W_s dW_s = ? \quad (5.4)$$

Если бы этот интеграл можно было интерпретировать как обычный интеграл Римана, то ответ на вопрос гласил бы:

$$\int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2). \quad (5.5)$$

Разумеется, формула (5.5) справедлива лишь в том случае, если выполняются все условия, входящие в определение интеграла Римана. Рассмотрим интегральные суммы

$$S_n = \sum_{i=1}^n W_{\tau_i^{(n)}} (W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}}), \quad (5.6)$$

где $\{t_0 = t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t\}$ — последовательность точек разбиения интервала $[t_0, t]$, причем точки

$$\tau_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}] \quad (5.7)$$

в остальном произвольны. Если интегральные суммы S_n сходятся при все более мелких разбиениях, т. е. при $\delta_n = \max_i (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) \rightarrow 0$, к одной и той же случайной величине S независимо от выбора точек $\tau_i^{(n)}$, в которых вычисляются значения подынтегрального выражения, то интеграл Римана существует и совпадает с пределом интегральных сумм S . Если бы нам удалось установить, что

$$\text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2) \quad (5.8)$$

при любом выборе точек $\tau_i^{(n)}$, то тем самым было бы доказано равенство (5.5). Заметим, что если $\text{qm-lim } X_n = X$ и $\text{qm-lim } Y_n = Y$, то $\text{qm-lim } (X_n + Y_n) = X + Y$. Учитывая это, ин-

тегральные суммы удобно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (W_{t_{i-1}} + W_{t_i} + W_{t_{i-1}} - W_{t_i})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \\
 &+ \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{\tau_i}) + \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 + \\
 &+ \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{\tau_i}) + \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \\
 &= S_1^{(n)} + S_2^{(n)} + S_3^{(n)} + S_4^{(n)}, \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

где для простоты обозначений мы отбросим верхний индекс n у t_i и τ_i . Ясно, что

$$\text{qm-lim } S_1^{(n)} = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2), \tag{5.10}$$

а с учетом равенства (2.106) получаем для второго слагаемого

$$\text{qm-lim } S_2^{(n)} = -\frac{1}{2} (t - t_0). \tag{5.11}$$

Для вычисления предела третьего слагаемого оценим $E\{S_3^{(n)2}\}$:

$$\begin{aligned}
 E\{S_3^{(n)2}\} &= E\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{\tau_i})(W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}}) \times \right. \\
 &\times (W_{t_j} - W_{\tau_j}) \Big\} = \sum_{i=1}^n E(W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})^2 E\{W_{t_i} - W_{\tau_i}\}^2 + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E\{W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}}\} E\{W_{t_i} - W_{\tau_i}\} E\{W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}}\} \times \\
 &\times E\{W_{t_j} - W_{\tau_j}\} =
 \end{aligned}$$

(так как винеровский процесс W_t имеет независимые приращения)

$$= \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1})(t_i - \tau_i) \leq \delta_n (t - t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{5.12}$$

Следовательно,

$$\text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} S_2^{(n)} = 0,$$

и среднеквадратичный предел трех первых слагаемых существует и *не зависит* от выбора точек $\tau_i^{(n)}$. Что же касается среднеквадратичного предела последнего слагаемого, то он зависит от выбора точек $\tau_i^{(n)}$:

$$\text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \left[S_3^{(n)} - \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}) \right] = 0. \quad (5.13)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} E \left\{ \left[S_4^{(n)} - \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}) \right]^2 \right\} &= \sum_{i=1}^n E \{ (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})^4 \} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E \{ (W_{\tau_j} - W_{t_{j-1}})^2 (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})^2 \} - \\ &- 2 \sum_{i=1}^n E \{ (W_{\tau_i} - W_{t_{i-1}})^2 \} \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}) + \left[\sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}) \right]^2 = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (\tau_i - t_{i-1}) (\tau_j - t_{j-1}) - \\ &- 2 \left[\sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}) \right]^2 = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1})^2 \leq 2\delta_n (t - t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Комбинируя соотношения (5.10—13), получаем

$$\text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \left[S_n - \sum_{i=1}^n (\tau_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) \right] = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2} (t - t_0). \quad (5.14)$$

Этот результат со всей очевидностью показывает, что предел интегральных сумм зависит от выбора точек $\tau_i^{(n)}$, в которых вычисляются значения подынтегрального выражения, так как $\lim \sum_{i=1}^n (\tau_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})$ может принимать *любое* значение из интервала $[0, t - t_0]$ в зависимости от конкретного выбора точек $\tau_i^{(n)}$. Следовательно, интеграл (5.4) и тем более интеграл

$$\int G(W_s) dW_s, \quad (5.15)$$

нельзя понимать как обычный интеграл Римана. Вместе с тем тот же простой пример (5.4) позволяет не только наглядно представить себе трудности, возникающие при работе со стохастическими интегралами типа (5.15) из-за извилистости траекторий винеровского процесса W_t , но и указывает способ их преодоления. Действительно, рассмотренный нами пример показывает, что невозможно удовлетворить требованию, входящему в определение интеграла Римана, о произвольном выборе точек $\tau_i^{(n)}$, в которых вычисляется значение подынтегрального выражения в интегральных суммах S_n . Неоднозначность в определении стохастического интеграла (по крайней мере для рассмотренного выше примера (5.4)) исчезает, если выбор точек $\tau_i^{(n)}$ зафиксирован раз и навсегда. Разумеется, сделать выбор нужно так, чтобы стохастический интеграл обладал хорошими свойствами. Например, при

$$\tau_i^{(n)} = (1 - \alpha) t_{i-1}^{(n)} + \alpha t_i^{(n)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{число } \alpha \text{ задано}) \quad (5.16)$$

получаем

$$\sum_{i=1}^n (\tau_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) = \alpha \sum_{i=1}^n (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) = \alpha (t - t_0). \quad (5.17)$$

Остановившись на этом выборе, мы находим по формуле (5.14)

$$\text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2) + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) (t - t_0). \quad (5.18)$$

Применительно к приложениям неисчерпаемое множество различных определений интеграла представляется весьма печальным следствием идеализации «белый шум». Однако в действительности дело обстоит не так плохо, как это могло бы показаться. Хотя при любом выборе параметра α мы приходим к математически корректному определению стохастического интеграла (5.4), большинство из таких интегралов не обладают требуемыми свойствами и поэтому не могут быть выбраны за основу стохастического «интегрального исчисления». По существу имеются только два разумных выбора параметра α : $\alpha = 0$ и $\alpha = 1/2$. При $\alpha = 1/2$ сохраняются обычные правила интегрального исчисления, т. е. восстанавливается соотношение

$$\int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2). \quad (5.19)$$

Если внешний шум описывается более реалистическим случайным процессом, чем гауссовский белый шум, например процессом ОУ, то классические правила интегрального исчисления остаются в силе. Как уже упоминалось, СДУ можно рассматри-

вать как ансамбль обычных («детерминированных») дифференциальных уравнений. (К этому мы еще вернемся в начале гл. 8.) Но коль скоро СДУ с белым шумом есть предел при $\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$ СДУ с более реалистичским случайным процессом в качестве шума, то определение стохастического интеграла при $\alpha = 1/2$ можно считать достаточно обоснованным. Следовательно, вычисление значений подынтегрального выражения в середине интервалов $\tau_i = (t_{i+1} + t_i)/2$ по крайней мере косвенно подкрепляется с точки зрения приложений. С математической точки зрения более привлекателен выбор $\alpha = 0$. При таком выборе максимально используется важное свойство винеровского процесса: независимость приращений. Действительно, если точки τ_i , в которых мы вычисляем значения подынтегрального выражения, совпадают с левыми концами интервалов, т. е. $\tau_i = t_{i-1}$, то $G(W_{\tau_i})$ и $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ независимы. Интуитивно ясно, что это наделяет стохастический интеграл при $\alpha = 0$ хорошими (с точки зрения теории вероятностей) свойствами. Более того, если внешний шум *по-настоящему белый*, то $\alpha = 0$ — единственно разумный выбор с физической точки зрения. В среде с подлинно белым шумом мгновенные флуктуации не должны коррелировать с состоянием системы в тот же момент времени. В пользу выбора $\alpha = 0$ свидетельствует еще одно обстоятельство. Напомним, что, когда мы вводили определение диффузионного процесса, то выбор условий «а», «б» и «в» нам пришлось обосновывать ссылкой на уравнения

$$X_{s+h} - X_s = f_\lambda(x)h + \sigma g(x)(W_{s+h} - W_s) \quad (5.20)$$

для приращений X_t при условии $X_s = x$. Это показывает, что выбор $\tau_i = t_{i-1}$ был бы особенно удобен для достижения *простой* взаимосвязи между решениями стохастических дифференциальных уравнений и диффузионными процессами. Единственное неудобство, связанное с выбором $\alpha = 0$, состоит в том, что такой выбор приводит к необычному результату

$$\int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2} (t - t_0). \quad (5.21)$$

Но подобный «упрек» нельзя считать серьезным. Классические правила интегрального исчисления не обладают какой-либо самостоятельной ценностью, лишь по причинам исторического характера мы не знаем исчислений с другими правилами. Приведенные выше соображения ясно показывают, что вычисление значений подынтегрального выражения в точках, совпадающих с левыми концами интервалов, имеет большие преимущества, когда речь заходит об интегральных суммах для стохастических

интегралов. И действительно, основанное на таком выборе точек τ_i и введенное Ито в 1950 г. [5.4] определение стохастического интеграла является основным в обширной математической литературе. Другой разумный выбор ($\tau_i = (t_{i+1} + t_i)/2$) использовал Р. Л. Стратонович, предложивший в 1966 г. свое определение стохастического интеграла [5.3]. По причинам, ясным из приведенных выше соображений, определение Стратоновича используется главным образом в физической литературе. Вопрос о том, какое из этих двух математически корректных определений стохастического интеграла более адекватно в конкретном приложении, — это вопрос о построении адекватной модели. Мы подробно рассмотрим его после того, как оба определения стохастического интеграла — по Ито и по Стратоновичу — будут сформулированы и станет ясно, к каким следствиям приводит каждое из них, т. е. после того, как будет заложена основа для содержательного и строгого обсуждения проблемы. Несмотря на ряд четких и вполне вразумительных работ [1.89, 5.5], в литературе по этому вопросу имеется много неясного, между тем как решение проблемы просто и легко достижимо, если с должным почтением относиться к точному смыслу различных определений. Оказывается, что интеграл Ито обладает прекраснейшими математическими свойствами и что любой стохастический интеграл, полученный при другом выборе α , можно представить в виде суммы соответствующего интеграла Ито и обычного интеграла Римана. Тем самым интеграл Ито идеально подходит для построения стохастического интегрального исчисления. Учитывая это, мы начнем с точного определения интеграла Ито для широкого класса случайных процессов G_t и изложения его основных свойств. Затем мы сосредоточим внимание на интеграле Стратоновича и обсудим различия и взаимосвязь между интегралами Ито и Стратоновича.

5.2. Интеграл Ито

Прежде всего точно укажем класс случайных процессов G_t , для которых может быть определен интеграл Ито. Заметим, что в примере из разд. 5.1 между выбором $\alpha = 0$ и $\alpha = 1/2$ имеются два различия: (1) при $\alpha = 0$ для вычисления $W_{\tau_i}^{(n)}$ необходимо знать винеровский процесс W_t лишь до момента времени s , $s \in [t_{i-1}, t_i]$ (в действительности достаточно знать W_t даже до t_{i-1}); (2) $W_{\tau_i}^{(n)}$ независимы от $[W_{t_i}^{(n)} - W_{t_{i-1}}^{(n)}]$.

Абстрагируясь от конкретного примера и обобщая эти два свойства, мы приходим к рассмотрению класса случайных процессов G_t без упреждения. Грубо говоря, процессы без упреж-

дения характеризуются тем, что G_t известен из предистории винеровского процесса вплоть до момента времени t и не зависит от будущего винеровского процесса, т. е. G_t не зависит от приращений $W_{t+s} - W_t$ винеровского процесса [$s \in (0, \infty)$].

Понятие случайного процесса без упреждения может быть формализовано следующим образом. Рассмотрим предисторию винеровского процесса, т. е. под- σ -поле $\mathcal{M}[t_0, t]$, задаваемое соотношением

$$\mathcal{M}[t_0, t] = \sigma\{W_\tau, t_0 \leq \tau \leq t\}.$$

Обозначим через \mathcal{F}_t под- σ -поле

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{C, \mathcal{M}[t_0, t]\},$$

где C — случайная величина, не зависящая от винеровского процесса. Позднее она послужит начальным условием для нашего СДУ. Заметим, что \mathcal{F}_t образуют семейство возрастающих под- σ -полей, т. е. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ при $s < t$. Будущее винеровского процесса также может быть описано с помощью под- σ -поля \mathcal{M}_t^+ , задаваемого соотношением

$$\mathcal{M}_t^+ = \sigma\{W_{t+s} - W_t; 0 \leq s \leq \infty\}.$$

Так как C не зависит от винеровского процесса и W_t имеет независимые приращения, под- σ -поля \mathcal{F}_t и \mathcal{M}_t^+ независимы. Случайный процесс G_t называется процессом без упреждения относительно \mathcal{F}_t , если G_t измерим относительно \mathcal{F}_t при всех $t \in \theta$. Иначе говоря, G_t — случайная величина не только относительно полного σ -поля \mathcal{A} основного вероятностного пространства, но и остается случайной величиной, даже если от \mathcal{A} перейти к под- σ -полю \mathcal{F}_t событий, связанных только с предисторией винеровского процесса. Это означает, что G_t можно представить в виде функции или функционала от винеровского процесса вплоть до момента времени t . Например, $G_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$ — процесс без упреждения, а $\tilde{G}_t = \max_{s \leq 2t} W_s$ — случайный процесс с упреждением.

Интеграл Ито определяется для всех процессов без упреждения с квадратично-интегрируемыми траекториями, т. е. удовлетворяющих условию

$$\int_{t_0}^t G_s(\omega)^2 ds < \infty.$$

Этот интеграл понимается в обычном смысле (как интеграл Лебега или Римана). Следуя традиционному подходу, определим сначала интеграл Ито для простого класса функций без упреждения, а именно для кусочно-постоянных ступенчатых функций.

Пусть G_t — случайный процесс без упреждения, такой, что существует разбиение $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ (t_i — неслучайные точки), для которого

$$G_t(\omega) = G_{t_{i-1}}(\omega) \quad \text{при } t \in [t_{i-1}, t_i] \quad \text{и всех } \omega \in \Omega. \quad (5.22)$$

Тогда G_t называется ступенчатой функцией на $[t_0, t]$. Положим по определению

$$\int_{t_0}^t G_s dW_s = \sum_{i=1}^n G_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}). \quad (5.23)$$

Эта величина обладает обычным свойством линейности

$$\int_{t_0}^t (aG_s^{(1)} + bG_s^{(2)}) dW_s = a \int_{t_0}^t G_s^{(1)} dW_s + b \int_{t_0}^t G_s^{(2)} dW_s, \quad (5.24)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ и $G_s^{(1)}, G_s^{(2)}$ — ступенчатые функции без упреждения. Нетрудно видеть, что если $E\{|G_t|\} < \infty$ при $t_0 \leq s \leq t$, то

$$E \left\{ \int_{t_0}^t G_s dW_s \right\} = 0. \quad (5.25)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} E \left\{ \int_{t_0}^t G_s dW_s \right\} &= E \left\{ \sum_{i=1}^n G_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n E \{ G_{t_{i-1}} \} E \{ (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \}, \end{aligned}$$

так как $G_{t_{i-1}}$ не зависит от $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ (G_t — функция без упреждения), а поскольку $E\{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\} = 0$, то тем самым равенство нулю математического ожидания (5.25) доказано. Подчеркнем, что из равенства (5.25) отнюдь не следует равенство $E\{G_t\} = 0$! Аналогично можно показать, что

$$E \left\{ \left(\int_{t_0}^t G_s dW_s \right)^2 \right\} = \int_{t_0}^t E \{ G_s^2 \} ds. \quad (5.26)$$

Определение интеграла Ито для произвольного случайного процесса без упреждения G_t основано на том, что такие процессы могут быть со сколь угодно малой погрешностью аппроксимированы ступенчатыми функциями. Справедлива следующая

теорема. Пусть G_t — случайный процесс без упреждения с

$$\int_{t_0}^t E \{G_s^2\} ds < \infty. \quad (5.27)$$

Тогда существует последовательность ступенчатых функций $G_t^{(n)}$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t E \{(G_s^{(n)} - G_s)^2\} ds = 0, \quad (5.28)$$

т. е. при $n \rightarrow \infty$ «расстояние» между G_t и $G_t^{(n)}$ стремится к нулю. Именно эта аппроксимация ступенчатыми функциями и используется для определения интеграла Ито в общем случае. Можно показать, что

$$\text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t G_s^{(n)} dW_s \quad (5.29)$$

существует и *не зависит* от того, какая конкретная последовательность ступенчатых функций $G_t^{(n)}$ была выбрана для аппроксимации G_t . Это означает, что если $\tilde{G}_t^{(n)}$ — другая последовательность функций без упреждения, удовлетворяющих условию (5.28), то

$$\text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t G_s^{(n)} dW_s = \text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \tilde{G}_s^{(n)} dW_s. \quad (5.30)$$

Следовательно, интеграл Ито от G_t разумно определить как

$$\int_{t_0}^t G_s dW_s = \text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t G_s^{(n)} dW_s. \quad (5.31)$$

Ясно, что свойства (5.24—26) переносятся и на предел (5.31). Более того, интеграл Ито можно определить и для тех случайных процессов без упреждения, которые не удовлетворяют условию (5.27). Однако сходимость при этом надлежит понимать в более слабом смысле — лишь по вероятности, а не в среднеквадратичном:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \int_{t_0}^t G_s^{(n)} dW_s - \int_{t_0}^t G_s dW_s \right| \right] = 0. \quad (5.32)$$

Для интеграла Ито с такой сходимостью мы введем специаль-

ное обозначение:

$$\int_{t_0}^t G_s dW_s = \text{st-lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t G_s^{(n)} dW_s. \quad (5.33)$$

Если случайный процесс без упреждения G_t имеет почти наверное непрерывные траектории, то аппроксимирующие ступенчатые функции $G_t^{(n)}$ могут быть выбраны следующим специальным образом:

$$G_t^{(n)} = \sum_{i=1}^n G_{t_{i-1}} I_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \quad (5.34)$$

т. е.

$$\int_{t_0}^t G_t dW_t = \text{st-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n G_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}), \quad (5.35)$$

и если выполняется неравенство (5.27), то

$$\int_{t_0}^t G_t dW_t = \text{qm-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n G_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}). \quad (5.36)$$

Итак, если случайный процесс без упреждения G_t имеет почти наверное непрерывные траектории, то интеграл Ито может быть определен как предел (по вероятности или в среднеквадратичном) интегральных сумм, в которых значения подынтегрального выражения вычисляются в точках τ_i , совпадающих с левыми концами интервалов разбиения: $\tau_i = t_{i-1}$.

Пусть Y_t — случайный процесс, задаваемый соотношением

$$Y_t(\omega) = \int_{t_0}^t G_s(\omega) dW_s(\omega). \quad (5.37)$$

Тогда «хорошие» свойства интеграла Ито могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) Y_t — случайный процесс без упреждения;
- 2) Y_t имеет почти наверное непрерывные траектории;

- 3) если $\int_{t_0}^t E\{G_s^2\} < \infty$ при $t \in \mathbb{R}$, то

$$E\{Y_t\} = 0 \quad (5.38)$$

и

$$E\{Y_t Y_s\} = \int_{t_0}^{\min(t, s)} E\{G_u^2\} du; \quad (5.39)$$

$$4) E\{Y_t | \mathcal{F}_s\} = Y_s.$$

Последнее свойство известно как свойство мартингала. Мартингалы (так же как и марковские процессы) образуют класс случайных процессов, особенно хорошо изученных с математической точки зрения. В последние годы они приобрели большое значение. Подробности относительно связей между мартингалами и диффузионными процессами см. в работе [5.6].

Единственное, что может вызывать определенное беспокойство при первом знакомстве с интегралом Ито — его «неординарность». Мы уже упоминали о том, что интеграл Ито не «подчиняется» правилам обычного интегрального исчисления. Но, как уже говорилось, удобство правил — не более чем вопрос привычки. Для того чтобы объяснить основное правило интегрального исчисления Ито, заменяющее правило дифференцирования сложных функций в обычном математическом анализе, полезно ввести понятие стохастического дифференциала. Соотношение (5.37) можно записать кратко следующим образом:

$$dX_t(\omega) = G_t(\omega) dW_t(\omega). \quad (5.40)$$

Это частный вид стохастического дифференциала. Поскольку все приведенные выше соображения продиктованы нашим намерением придать точный смысл дифференциалу (5.1), рассмотрим более общий случайный процесс X_t , задаваемый соотношением

$$X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t F_s(\omega) ds + \int_{t_0}^t G_s(\omega) dW_s(\omega), \quad (5.41)$$

где X_{t_0} — случайная величина, независимая от $W_s - W_{t_0}$, $s \geq t_0$, а F_s (как и G_s) — заданный случайный процесс без упреждения. Кроме того, процесс F_s должен удовлетворять условию

$$\int_{t_0}^t |F_s(\omega)| ds < \infty, \quad \text{т. е. первый интеграл в (5.40) может быть}$$

интерпретирован как обычный интеграл Римана для траекторий. Что же касается второго интеграла, то это — интеграл Ито. Но тогда X_t , задаваемый соотношением (5.41), — случайный процесс без упреждения. Он имеет почти наверное непрерывные траектории и при $t_0 \leq s \leq t \leq T$ удовлетворяет соотношению

$$X_t = X_s + \int_s^t F_{s'} ds' + \int_s^t G_{s'} dW_{s'}. \quad (5.42)$$

Такой случайный процесс по определению имеет *стохастический дифференциал*

$$dX_t = F_t dt + G_t dW_t. \quad (5.43)$$

Рассмотрим теперь стохастический процесс Z_t , который является функцией от случайного процесса X_t :

$$Z_t = u(t, X_t), \quad (5.44)$$

где $u(t, x)$ — вещественнозначная функция с непрерывными производными $\partial_t u$, $\partial_x u$ и $\partial_{xx} u$. *Правило Ито* утверждает, что случайный процесс Z_t имеет стохастический дифференциал

$$dZ_t = \left[\partial_t u(t, X_t) + F_t \partial_x u(t, X_t) + \frac{1}{2} G_t^2 \partial_{xx} u(t, X_t) \right] dt + G_t \partial_x u(t, X_t) dW_t. \quad (5.45)$$

Грубо говоря, это означает, что в разложении функции $u(t, x)$ в ряд Тейлора необходимо удерживать члены второго порядка, так как из предельного соотношения (2.110) мы получаем равенство

$$“(dW_t)^2 = dt”.$$

Правило Ито позволяет построить непротиворечивое исчисление стохастических дифференциалов, которое в дальнейшем мы будем называть дифференциальным исчислением Ито.

5.3. Стохастические дифференциальные уравнения Ито и диффузионные процессы

Исчисление Ито образует фундамент той схемы, в рамках которой выражению (5.1) можно придать точный математический смысл. Заметим, что при заданных t и x функции f и g в (5.1) *неслучайны*. Случайность входит в (5.1) лишь косвенно, через случайный процесс X_t . В дальнейшем мы будем рассматривать стохастические дифференциалы только такого вида. Для нашей цели — описания систем в среде с гауссовским белым шумом — их вполне достаточно. Стохастический дифференциал вида

$$dX_t = f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dW_t, \quad X_{t_0} = C, \quad (5.46)$$

где f и g — вещественнозначные гладкие функции, называется СДУ Ито с начальным условием C (C — случайная величина, независимая от $W_s - W_{t_0}$ при всех $s \geq t_0$). Случайный процесс X_t есть решение СДУ (5.46) на интервале времени $[t_0, T]$, если:

- 1) X_t — случайный процесс без упреждения;
- 2) функции $F_t(\omega) = f(t, X_t(\omega))$, $G_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$ (в силу

свойства 1 они также без упреждения) с вероятностью единица удовлетворяют неравенствам

$$\int_{t_0}^T |F_t(\omega)| dt < \infty, \quad \int_{t_0}^T G_t^2(\omega) dt < \infty$$

(из определения интеграла Ито следует, что это условие обеспечивает однозначность правой части СДУ (5.46));

3) с вероятностью единица при любом $t \in [t_0, T]$ выполняется равенство

$$X_t = C + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dW_s. \quad (5.47)$$

Из свойства 2 случайного процесса (5.37) нетрудно заключить, что X_t имеет почти наверное непрерывные траектории. (Если говорить точно, то существует вариант случайного процесса X_t , траектории которого почти наверное непрерывны. Именно его мы и будем рассматривать в дальнейшем.) Итак, мы достигли желаемого — сумели придать точный математический смысл феноменологическим уравнениям (3.31) и (4.13), моделирующим систему в чрезвычайно быстро флуктуирующей среде. Исследуем теперь основные свойства случайного процесса X_t , задаваемого СДУ Ито. Разумеется, мы надеемся, что X окажется диффузионным процессом. Но, прежде чем мы сможем утверждать это со всей определенностью, необходимо удостовериться в существовании и единственности решения СДУ (5.46).

5.3.1. Существование и единственность решений

В большинстве приложений встречаются автономные СДУ, т. е. СДУ с f и g , не зависящими явно от времени. Для автономных СДУ доказаны следующие весьма общие теоремы о существовании и единственности решений [5.7]. Если $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции (сокращенно это принято обозначать так: $f, g \in C^1(\mathbb{R})$), то СДУ

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) dW_t, \quad X_{t_0} = C \quad (5.48)$$

имеет единственное решение, существующее вплоть до некоторого случайного времени взрыва η , где $t_0 < \eta \leq \infty$. Условия на f и g выполняются почти во всех приложениях: как правило, f и g — многочлены и поэтому $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. К задаче о том, как определить время взрыва η и, в частности, установить, что с вероятностью единица $\eta = \infty$, т. е. взрыва не будет, мы еще вернемся в дальнейшем. Пока заметим лишь, что обычно в мате-

матической литературе принято накладывать на f и g так называемое условие роста

$$f^2(t, x) + g^2(t, x) \leq K^2(1 + x^2), \quad (5.49)$$

выполняющееся при некоторой положительно постоянной K для всех $x \in \mathbb{R}$. Поскольку из него следует, что f и g возрастают не более чем линейно по x , условие роста слишком ограничительно для приложений. Но если все же оно выполняется, то $\eta = \infty$ с вероятностью единица.

5.3.2. Марковское свойство решений

Пусть функции f и g такие, что существует единственное решение X_t СДУ Ито (5.48) с начальным условием $X_{t_0} = C$. Соотношение (5.42) позволяет представить решение X_t уравнения (5.48) в виде

$$X_t = X_s + \int_s^t f(X_u) du + \int_s^t g(X_u) dW_u \quad (5.50)$$

при $s \geq t_0$. В обозначениях $X_t(C, t_0)$, позволяющих в явном виде указывать начальное условие, соотношение (5.50) означает, что

$$X_t(C, t_0) = X_t(X_s, s), \quad t \geq s. \quad (5.51)$$

Подчеркнем еще раз, что C , вообще говоря, случайная величина. Это существенно, например, если мы хотим получить стационарный случайный процесс как решение СДУ. При таком подходе необходимо исходить из начального условия, распределенного в соответствии с стационарной плотностью вероятности процесса X_t . Если бы решение СДУ было марковским, то марковость была бы достаточным условием выбора начального условия C для того, чтобы X_t был стационарным случайным процессом. Возникает вопрос: обладают ли СДУ Ито марковским свойством? Соотношение (5.50) убедительно показывает, что ответ на вопрос должен быть утвердительным. Примем за исходный случайный процесс $X_t(C, t_0)$, удовлетворяющий СДУ Ито с начальным условием C при $t = t_0$. Предоставление процессу X_t возможности свободно эволюционировать эквивалентно выбору в более поздний момент времени s в качестве начального значения случайной величины X_s , в которую X_t переходит из $X_{t_0} = C$. Иначе говоря, если случайный процесс известен в момент времени s , т. е. если известна случайная величина X_s , то для предсказания поведения решения СДУ Ито в будущем не нужна никакая информация о прошлом. Это позволяет нам утверждать, что если решение СДУ Ито (5.48) единственно, то общее свойство (5.42) СДУ Ито должно гарантировать марковское свойство решений. Справедлива следующая теорема. Если

решение X_t СДУ Ито существует и единственно, то X_t — марковский процесс и его переходная функция $P(B, t|x, s)$ определяется соотношением

$$P(B, t|x, s) = P(X_t \in B | X_s = x) = P(X_t(x, s) \in B), \quad (5.52)$$

где $X_t(x, s)$ — (единственное) решение, удовлетворяющее начальному условию $X_s = x$. Важная особенность соотношения (5.52) состоит в том, что переходная функция определяется безусловной вероятностью. Вероятность найти случайный процесс $X_t(C, t_0)$ в момент времени t в множестве B при условии, что в некоторый промежуточный момент времени s он принимает значение x , равна вероятности того, что процесс $X_t(x, s)$, исходящий в момент времени s из начального состояния x , в момент времени t окажется в множестве B . В свете сказанного выше ясно, что сформулированная нами теорема верна. Строгое доказательство весьма непросто и требует удивительно изощренной техники. Поэтому мы продолжим изложение теории стохастических дифференциальных уравнений Ито, а краткий обзор наиболее существенных идей строгого доказательства марковского свойства отложим до приложения Б.

5.3.3. Уравнения Ито и уравнение Фоккера — Планка

Так как решение СДУ Ито имеет почти наверное непрерывные траектории, можно ожидать, что X_t — не только марковский, но и диффузионный процесс. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, удовлетворяет ли X_t условиям «а'», «б'» и «в'», а именно условиям (4.21, 26 и 27). Однако такая проверка довольно трудоемка, поэтому проверить, что X_t — диффузионный процесс, удобнее другим способом. Маккину [5.7] принадлежит наиболее изящное и прямое доказательство того, что плотность вероятности перехода случайного процесса X_t существует и удовлетворяет УФП. Этого, разумеется, достаточно для того, чтобы установить диффузионный характер решения СДУ (5.48). Приступаем к изложению изящного доказательства Маккина (несколько уменьшив его общность: мы предполагаем, что $\eta = \infty$ с вероятностью единица (для наших целей этого вполне достаточно)).

Пусть X_t — решение СДУ (5.48), в котором $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют более сильному условию бесконечной дифференцируемости¹⁾ (класс бесконечно дифференцируемых функций при-

¹⁾ Оно также выполняется в большинстве приложений. Для полноты упомянем, что бесконечная дифференцируемость лишь достаточное, но отнюдь не необходимое условие для того, чтобы решение СДУ Ито было диффузионным процессом. В частности, из вывода УФП видно, что существуют диффузионные процессы, с которыми нельзя сопоставить УФП.

нято обозначать $C^\infty(\mathbb{R})$). Тогда плотность вероятности перехода $p(y, t|x, s)$ существует и удовлетворяет УФП. Доказательство проводится следующим образом.

Пусть $v(x, t)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая по x и t функция, равная тождественно нулю вне некоторого ограниченного интервала $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$, т. е.

$$v(x, t) = 0, \text{ если } x \notin [x_1, x_2] \text{ или } t \notin [t_1, t_2], \quad t_1 > 0. \quad (5.53)$$

Функция v , обладающая таким свойством, называется функцией с компактным носителем (или финитной функцией). Так как f и g не зависят от времени, процесс однороден по времени, и, не ограничивая общности, мы выбираем $t_0 = 0$ и $X_0 = x$.

Рассмотрим далее случайный процесс

$$Y_t = v(X_t, t). \quad (5.54)$$

Правило Ито (5.45) позволяет вычислить стохастический дифференциал процесса Y_t :

$$dY_t = dv(X_t, t) = \left[\partial_t v(X_t, t) + f(X_t) \partial_x v(X_t, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g^2(X_t) \partial_{xx} v(X_t, t) \right] dt + g(X_t) \partial_x v(X_t, t) dW_t. \quad (5.55)$$

Эквивалентное интегральное представление имеет вид

$$v(X_{t'}, t') - v(X_0, 0) = \int_0^{t'} \left[\partial_t v(X_t, t) + f(X_t) \partial_x v(X_t, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g^2(X_t) \partial_{xx} v(X_t, t) \right] dt + \int_0^{t'} g(X_t) \partial_x v(X_t, t) dW_t. \quad (5.56)$$

Так как $v(x, t)$ — функция с компактным носителем, она обладает следующими свойствами:

- 1) $v(x, 0) = 0$;
 - 2) $v(x, \infty) = 0$;
 - 3) $\int_0^\infty E \{ (g(X_t) \partial_x v(X_t, t))^2 \} dt < \infty.$
- (5.57)

Соотношения (5.57) позволяют воспользоваться свойством интеграла Ито (5.38) и заключить, что

$$E \left\{ \int_0^\infty g(X_t) \partial_x v(X_t, t) dW_t \right\} = 0. \quad (5.58)$$

Устремляя t' к бесконечности и переходя к математическому ожиданию, получаем

$$\int_0^{\infty} E \left\{ \left[\partial_t v(X_t, t) + f(X_t) \partial_x v(X_t, t) + \frac{1}{2} g^2(X_t) \partial_{xx} v(X_t, t) \right] \right\} dt = 0. \quad (5.59)$$

Если вероятность перехода $P(B, t | X_s, x)$ процесса X_t , удовлетворяющего СДУ (5.48) с $f(x)$, $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, имеет плотность, то математическое ожидание допускает запись с помощью $p(y, t | x, 0)$:

$$\int_0^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}} dy p(y, t | x, 0) \left[\partial_t v(y, t) + f(y) \partial_y v(y, t) + \frac{1}{2} g^2(y) \partial_{yy} v(y, t) \right] = 0.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}} dy v(y, t) \left[-\partial_t p(y, t | x, 0) - \partial_y f(y) p(y, t | x, 0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t | x, 0) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Граничные члены обращаются в нуль, так как функция $v(y, t)$ имеет компактный носитель. Поскольку в рассматриваемом случае она произвольна, из соотношения (5.60) следует, что

$$\partial_t p(y, t | x, 0) = -\partial_y f(y) p(y, t | x, 0) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t | x, 0), \quad (5.61)$$

т. е. что плотность вероятности перехода случайного процесса X_t удовлетворяет УФП. Это утверждение справедливо, если процесс X_t обладает гладкой, т. е. дважды дифференцируемой, плотностью вероятности перехода $p(y, t | x, 0)$, — обстоятельство, требующее проверки. По лемме Вейля [5.7] из соотношения (5.59) также следует существование бесконечно дифференцируемой плотности вероятности перехода $p(y, t | x, 0)$. Мы видим таким образом, что приведенный выше вывод УФП покоится на прочном математическом фундаменте. Следовательно, X_t — диффузионный процесс. Доказательство Маккина самым неожиданным образом вскрывает тесную связь между решениями СДУ Ито и диффузионными процессами. В свете приведенного выше упрощенного варианта этого доказательства не будет преувеличением сказать, что УФП для X_t — прямое следствие из правила Ито. Если взглянуть на это правило с новой точки зрения, то оно перестает быть экзотическим и становится вполне есте-

ственным, по существу описывая, как изменяется УФП при замене переменных.

Заметим без доказательства, что если f и g явно зависят от времени, то СДУ определяет диффузионный процесс при условии, что помимо обычных требований существования и единственности решения обе функции непрерывны по t . Это позволяет при сравнительно слабых (если иметь в виду приложения) ограничениях на f и g установить результат, имеющий фундаментальное значение: решения СДУ и диффузионные процессы являются одним и тем же классом стохастических процессов. Это означает, что любой марковский процесс с почти наверное непрерывными траекториями, удовлетворяющими условиям (4.16, 19, 20), отнюдь не ограничительными в приложениях, может быть описан СДУ Ито вида

$$dX_t = f(X_t, t)dt + \sigma g(X_t, t)dW_t. \quad (5.62)$$

Стохастическое дифференциальное уравнение (5.62) обладает одной важной особенностью: оно всегда *линейно по dW_t* . Это свидетельствует о том, что помимо чисто технической причины (невозможности определить произведение двух функций) существует глубокая внутренняя причина, по которой СДУ (3.31) линейно относительно гауссовского белого шума ξ_t . Аналогичное утверждение справедливо и для более общих марковских процессов, кратко рассмотренных в конце гл. 4. Резюмируя, можно сказать, что линейность СДУ по белому шуму и марковское свойство неотделимы.

5.4. Стохастический интеграл Стратоновича

Рассмотрим теперь другое определение стохастического интеграла, играющее заметную роль в специальной литературе, — определение, предложенное Стратоновичем. Привлекательность интеграла Ито обусловлена его замечательными математическими свойствами, в особенности тесной связью между СДУ Ито и диффузионными процессами. Успех интеграла Стратоновича объясняется тем, что он очень точно соответствует потребностям моделирования физических систем. Этот вопрос мы обсудим подробнее после того, как будет дано строгое определение интеграла Стратоновича, а пока лишь бегло очертим ситуацию. Интеграл Ито подразумевает, что между случайным процессом X_t и случайной силой ξ_t в тот же момент времени t нет никакой зависимости. Выбор левых концов интервалов разбиения в качестве точек, в которых вычисляются значения подынтегрального выражения, как бы максимально использует тот факт, что винеровский процесс имеет независимые приращения. Хотя предложенное Ито определение стохастического интеграла, как уже

упоминалось, является единственно разумным, когда нам приходится иметь дело с подлинным белым шумом, не следует забывать о том, что во многих приложениях белый шум — не более чем идеализация рассматриваемых реальных систем¹⁾. СДУ с белым шумом возникает в результате некоторого предельного перехода, о чем мы уже говорили. Исходной является ситуация, в которой шум имеет малое, но тем не менее отличное от нуля время корреляции. Это «короткая», но ненулевая память шума приводит к зависимости между случайным процессом X_t и случайной силой ξ_t в тот же момент времени t . Мы уже неоднократно говорили о том, что предельный переход от реального шума к идеализации «белый шум» необходимо производить осторожно, чтобы, грубо говоря, сохранить влияние внешнего шума. Мы надеемся, что следы зависимости между X_t и ξ_t должны остаться и в пределе белого шума. Как мы увидим, интеграл Стратоновича учитывает именно такую корреляцию между системой и внешним шумом. Он получается как своего рода предел белого шума для задачи с реальным шумом. Ясно, что перед нами проблема моделирования: какое СДУ и, следовательно, какой случайный процесс X_t наиболее адекватно описывают систему в идеализации «белый шум» для среды с чрезвычайно быстрыми флуктуациями.

5.4.1. Определение интеграла Стратоновича и его связь с интегралом Ито

Прежде чем мы продолжим обсуждение всего круга вопросов, необходимо дать точное определение интеграла Стратоновича (по существу мы следуем Арнольду [2.2]). До сих пор мы рассматривали только скалярные случайные процессы. Но, как станет вскоре ясно, для того чтобы вывести СДУ Стратоновича для скалярного процесса, нам понадобится определение интеграла для двумерного векторного процесса. Связано это с тем, что интегральные суммы интеграла Стратоновича имеют небольшое упреждение. Для того чтобы аппроксимировать величину $G(X_s)$ при $s \in [t_{i-1}, t_i]$, входящую в интегральную сумму, недостаточно знать винеровский процесс вплоть до момента времени s . Необходимо знать, как процесс ведет себя в будущем, поскольку $X_{t_i^{(n)}} = (X_{t_i} + X_{t_{i-1}})/2$.

¹⁾ Например, в биологических приложениях (в частности, в экологии насекомых с непрерывающимися поколениями) наиболее адекватным нередко оказывается описание с дискретным временем. Если время корреляции флуктуаций в среде много меньше времени жизни поколения, то внешний параметр допустимо моделировать с помощью случайного процесса, принимающего для каждого поколения независимые значения. Это и есть самый «настоящий» дискретный белый шум.

Пусть Y_t — двумерный диффузионный процесс ¹⁾, т. е. $Y_t = \text{col}(Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)})$, с вектором переноса $f(Y)$ и матрицей диффузии $B(Y)$. Пусть, далее, $H(x)$ — двумерная вещественнозначная векторная функция с непрерывными частными производными $\partial_{x_i} H(x)$, $i = 1, 2$, такая, что

$$\int_{t_0}^t E \{ |H^{\text{tr}}(Y_s) f(Y_s)| \} ds < \infty \quad (5.63)$$

и

$$\int_{t_0}^t E \{ |H^{\text{tr}}(Y_s) \tilde{B}(Y_s) H(Y_s)| \} ds < \infty. \quad (5.64)$$

Тогда предел

$$\int_{t_0}^t H^{\text{tr}}(Y_s) \circ dY_s = \text{qm-lim}_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n H^{\text{tr}} \left(\frac{Y_{t_{i-1}} + Y_{t_i}}{2} \right) (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}), \quad (5.65)$$

где $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ — разбиение интервала $[t_0, t]$ с $\delta_n = \max(t_i - t_{i-1})$, называется стохастическим интегралом в смысле Стратоновича. С интегралом Ито, определяемым в данном случае как

$$\int_{t_0}^t H^{\text{tr}}(Y_s) dY_s = \text{qm-lim}_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n H(Y_{t_{i-1}}) (Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}), \quad (5.66)$$

¹⁾ Определение n -мерного диффузионного процесса $Y_t = \text{col}(Y_t^{(1)}, \dots, Y_t^{(n)})$ строится как прямое обобщение одномерного марковского процесса, обладающее следующими свойствами:

а) $\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} p(y, t | x, s) dy = 0;$

б) существует вещественнозначная функция $f(s, x) \in \mathbb{R}^n$, такая, что

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) p(y, t | x, s) dy = f(s, x);$$

в) существует $n \times n$ -матрица $\tilde{B}(s, x)$, такая, что

$$\lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)(y-x)^{\text{tr}} p(y, t | x, s) dy = \tilde{B}(s, x).$$

Здесь $|y|^2 = \sum y_i^2$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n , y^{tr} — транспонированный вектор y .

интеграл Стратоновича связан формулой

$$\int_{t_0}^t \mathbf{H}^{\text{tr}}(\mathbf{Y}_s) \circ d\mathbf{Y}_s = \int_{t_0}^t \mathbf{H}^{\text{tr}}(\mathbf{Y}_s) d\mathbf{Y}_s + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{t_0}^t \partial_{x_k} \mathbf{H}_j^{\text{tr}}(\mathbf{B})_{jk} ds. \quad (5.67)$$

В этом нетрудно убедиться, если разложить $\mathbf{H}^{\text{tr}}[(\mathbf{Y}_{t_{i-1}} + \mathbf{Y}_{t_i})/2]$ в ряд Тейлора относительно $\mathbf{H}^{\text{tr}}(\mathbf{Y}_{t_{i-1}})$ и воспользоваться определением матрицы диффузии.

Для того чтобы определить стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича, положим

$$\int_{t_0}^t G(X_s) \circ dW_s \equiv \int_{t_0}^t (0, G(X_s)) \circ \begin{pmatrix} dX_s \\ dW_s \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

В дальнейшем мы будем отличать интеграл Стратоновича от интеграла Ито по значку \circ между подынтегральным выражением и dW_t . О случайном процессе X_t , задаваемом соотношением

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(X_s) ds + \sigma \int_{t_0}^t g(X_s) \circ dW_s, \quad (5.69)$$

мы будем говорить, что он удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению Стратоновича

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t. \quad (5.70)$$

СДУ Ито для двумерного диффузионного процесса $(X_t, W_t)^{\text{tr}}$ имеют вид

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) dW_t, \quad (5.71)$$

$$dW_t = dW_t,$$

или в матричных обозначениях,

$$\begin{pmatrix} dX_t \\ dW_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(X_t) \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma g(X_t) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t \\ dV_t \end{pmatrix}, \quad (5.72)$$

где V_t — «немой» (т. е. не входящий в конечный результат) винеровский процесс. Для матрицы диффузии \mathbf{B} получаем

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma g(x) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma g(x) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 g^2(x) & \sigma g(x) \\ \sigma g(x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

Следовательно, в интересующем нас случае формула преобразования (5.67) дает

$$\int_{t_0}^t \sigma g(X_s) \circ dW_s = \int_{t_0}^t \sigma g(X_s) dW_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^t g'(X_s) g(X_s) ds, \quad (5.74)$$

откуда мы получаем, что СДУ Ито

$$dX_t = \left[f(X_t) + \frac{\sigma^2}{2} g'(X_t) g(X_t) \right] dt + \sigma g(X_t) dW_t \quad (5.75)$$

эквивалентно СДУ Стратоновича (5.70): оба СДУ имеют одно и то же решение. Перечислим основные следствия, вытекающие из формулы преобразования.

1) От интерпретации СДУ по Стратоновичу к интерпретации СДУ по Ито всегда можно перейти, прибавляя $\sigma^2 g' g dt/2$. Обратный переход также всегда возможен и осуществляется путем вычитания $\sigma^2 g' g dt/2$.

2) СДУ Стратоновича (5.70) определяет диффузионный процесс с переносом $f + \sigma^2 g' g/2$ и диффузией g^2 (это следует из (5.75)).

3) В случае аддитивного шума, т. е. при $g(x) = \text{const}$, не существует различия между интегралом Ито и интегралом Стратоновича.

4) В случае мультипликативного шума, т. е. при $g(x) \neq \text{const}$, когда влияние случайной силы зависит от состояния процесса, корреляция между процессом X_t и случайной силой W_t , заложенная в интеграле Стратоновича, приводит к систематическому вкладу в эволюцию случайного процесса X_t . Этот вклад порождает индуцированный шумом перенос $\sigma^2 g' g/2$. Выписанный член известен под названием ложного переноса, так как он не входит в феноменологическое уравнение. Однако ничего ложного в нем нет: он приводит к физическим следствиям.

5) В исчислении Стратоновича сохраняется правило дифференцирования сложной функции обычного математического анализа. В этом нетрудно убедиться, если формулой преобразования (5.75) воспользоваться в приложении В.

5.4.2. Ито или Стратонович: руководство для вконец запутавшихся создателей математических моделей

Как уже упоминалось, преимущество интеграла Стратоновича состоит в том, что он позволяет непосредственно моделировать корреляции между случайной средой и системой. В идеализации «белый шум» такого рода корреляции — след стохастической зависимости между состоянием системы и флуктуациями среды, когда у последних имеется ненулевое время корреляции. Действительно, X_t зависит от предыстории среды ($X_t = F[\lambda + \xi_s, t_0 \leq s \leq t]$) и если корреляционная функция $C(\tau) = E\{\xi_s \xi_{s+\tau}\}$ не равна нулю при всех $\tau > 0$, то X_t и ξ_t — зависимые случайные величины. Однако при всех других выборах точек t_i (в которых вычисляются значения подынтегрального выражения), от

личных от выбора Ито, возникает корреляция между процессом и внешним шумом. Выбор Стратоновича самым непосредственным образом моделирует физическую ситуацию, о чем, в частности, свидетельствует то, что только определение стохастического интеграла по Стратоновичу согласуется с привычными правилами математического анализа. Впервые это было установлено теоремой Вонга и Закай [5.8]. Мы не приводим их доказательства, поскольку ссылаемся на теорему в основном по причинам приоритетного характера. Результат Вонга и Закай будет получен гораздо более простым способом и при более общих предположениях в гл. 8, где окрестность белого шума исследуется методом возмущений, идея которого заимствована из работы Бланкеншипа и Папаниколау [5.9].

Теорема Вонга — Закай. Пусть $W_t^{(n)}$ — последовательность случайных процессов, непрерывных, с ограниченной вариацией имеющих непрерывную производную и сходящихся почти наверное равномерно к винеровскому процессу W_t . Тогда при некоторых слабых предположениях относительно f и g решения СДУ

$$dX_t^{(n)} = f(X_t^{(n)}) dt + \sigma g(X_t^{(n)}) dW_t^{(n)}, \quad (5.76)$$

где все интегралы допустимо понимать как обычные интегралы Римана, сходятся почти наверное равномерно к решению следующего СДУ Ито:

$$dX_t = \left[f(X_t) + \frac{\sigma^2}{2} g'(X_t) g(X_t) \right] dt + \sigma g(X_t) dW_t. \quad (5.77)$$

По правилу преобразования (5.75) уравнению (5.77) эквивалентно СДУ Стратоновича

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t. \quad (5.78)$$

Это означает, что если выбрать в качестве исходного феноменологическое уравнение с реальным шумом приведенного выше вида, т. е.

$$\dot{X}_t^{(n)} = f(X_t^{(n)}) + \sigma g(X_t^{(n)}) \dot{W}_t^{(n)} \quad (5.79)$$

и перейти к пределу белого шума, т. е. к СДУ

$$\dot{X}_t = f(X_t) + \sigma g(X_t) \dot{W}_t, \quad (5.80)$$

то последнее можно интерпретировать как СДУ Стратоновича¹⁾.

¹⁾ Реальный шум, встречающийся в приложениях, представим в виде винеровского $\dot{W}_t^{(n)}$. Но, как уже говорилось, в гл. 8 мы покажем, что теорема Вонга и Закай справедлива для широкого класса реалистических небелых шумов.

Для практических целей во многих приложениях удобно переходить от СДУ Стратоновича к СДУ Ито вида (5.77). Основное преимущество варианта Ито (5.77) стохастического дифференциального уравнения (5.80) состоит в том, что в этом варианте непосредственно видны характеристики диффузионного процесса X_t , посредством которого мы моделируем систему, связанную с чрезвычайно быстро флуктуирующей системой. Действительно, перенос состоит из феноменологической части $f(x)$ и переноса $\sigma^2 g'g/2$, индуцированного шумом (последний член указывает на то, что в флуктуирующей среде систематическое движение изменяется и в том случае, если шум лишь приближенно белый). Диффузия определяется тем членом феноменологического уравнения, который умножается на флуктуирующий параметр.

Необычность ситуации, возникшей в связи с тем, что теория дифференциальных уравнений с случайными коэффициентами типа белого шума может быть построена на основе различных определений стохастических интегралов, возникающих при решении таких уравнений, привела к весьма продолжительной дискуссии в физической литературе относительно того, какое из определений правильно. Возникла большая путаница. У нас создалось впечатление, что многие авторы были введены в заблуждение допущением (часто неявным) о том, будто классические правила математического анализа обладают особой внутренней ценностью, между тем как в действительности эти правила внутренне ничем не выделены. Часто интегралу Стратоновича отдают предпочтение как «правильному», а интеграл Ито отвергают как «неправильный», ссылаясь на принцип инвариантности относительно «преобразования координат» $y = u(x)$. Необходимо четко понимать, что принцип, о котором идет речь, относится к инвариантности вида СДУ относительно нелинейного преобразования системы. Хотя СДУ Стратоновича действительно выдерживает преобразование $y = u(x)$, именно эта разновидность инвариантности не представляет особого интереса для физики. По существу за такой инвариантностью кроется лишь хорошо известный факт, состоящий в том, что исчисление Стратоновича согласуется с обычными правилами классического математического анализа. Относительно преобразования $y = u(x)$, где функция u осуществляет взаимно-однозначное отображение x в y , должны быть инвариантны только вероятности, например:

$$p(y, t) dy = p(x, t) dx, \quad (5.81)$$

а такую инвариантность, разумеется, гарантируют и исчисление Стратоновича, и исчисление Ито¹⁾.

¹⁾ Кроме того, для нелинейных систем существуют своего рода естественные переменные, а именно физические величины, которые могут быть изме-

Изложенная выше теория интегралов Ито и Стратоновича ясно показывает неправомерность самой постановки вопроса о том, какой из двух интегралов «правильный»: оба интеграла приводят к *непротиворечивой* теории СДУ. Проблема состоит в том, как интерпретировать получающееся в результате предельного перехода СДУ с белым шумом, или, если несколько перефразировать вопрос, в выяснении того, какие коэффициенты диффузионного процесса наиболее адекватно моделируют описываемую систему. Для определения наиболее подходящего коэффициента дрейфа и диффузии процесса необходимо привлекать физические соображения. При таком подходе становится ясным надуманный характер проблемы выбора между интегралом Ито и интегралом Стратоновича (к аналогичному выводу пришел ван Кампен [5.10]): диффузионный процесс допускает описание и по Ито, и по Стратоновичу. Спор о том, какому из двух определений надлежит отдать предпочтение, был четко проанализирован Язвинским [5.11, с. 140]: «Высказывалось мнение, будто интегралом Стратоновича следует пользоваться потому, что он проще «в обращении», так как подчиняется привычным правилам математического анализа. Интуитивно это обстоятельство очень привлекательно, но не имеет отношения к делу. В действительности все результаты относительно интеграла Стратоновича доказаны с использованием теории Ито. Сам по себе интеграл Стратоновича не обеспечивает более глубокого понимания физической сути решаемой задачи, но при определенных условиях позволяет более прямо моделировать физический процесс». И далее: «Наиболее важно то, что интеграл Ито определен для гораздо более широкого класса функций, чем интеграл Стратоновича».

Ясно, что основная проблема состоит *не в том*, какое из двух определений стохастического интеграла правильно, а в том, *как мы моделируем реальные системы с помощью диффузионных процессов*. Если в качестве исходного мы выбираем феноменологическое уравнение, в котором флуктуирующие параметры аппроксимированы гауссовским белым шумом, то самым подходящим диффузионным процессом является процесс, определяемый предложенной Стратоновичем интерпретацией СДУ.

С другой стороны, для широкого класса биологических и дру-

жены (концентрация, напряжение в электрической цепи и т. д.) и отражают нелинейную динамику системы. Нелинейное преобразование к новым «нестественным» переменным, маскирующим нелинейности системы, имеет с точки зрения физики не слишком большую ценность. В качестве примера рассмотрим популяцию, численность которой возрастает по закону Мальтуса $\dot{X} = \lambda X$, т. е. $X(t) = X(0)\exp(\lambda t)$. Для такой популяции вряд ли может служить «утешением» то, что $\ln X(t)$ возрастает со временем («взрывается») всего лишь линейно.

гих систем, например популяций насекомых с неперекрывающимися поколениями, за исходное удобнее выбрать описание с дискретным временем типа

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + f(X_{t_{i-1}})\Delta t + \sigma g(X_{t_{i-1}})Q_{t_{i-1}}, \quad (5.82)$$

где $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ при всех i и Q_{t_i} — гауссовские независимые случайные величины с

$$E\{Q_{t_i}\} = 0 \quad (5.83)$$

и

$$E\{Q_{t_i}^2\} = \Delta t. \quad (5.84)$$

Если рассматриваемые времена велики по сравнению с временем жизни поколения Δt , то допустимо перейти к пределу непрерывного времени:

$$\dot{X}_t = f(X_t) + \sigma g(X_t) \dot{W}_t. \quad (5.85)$$

Из асимметрии разностного уравнения (5.82) по времени ясно, что в этом случае наиболее адекватен диффузионный процесс, определяемый интерпретацией СДУ (5.85) по Ито. Таким образом, при выборе наилучшей диффузионной модели реальной системы перед нами открываются два пути. Если стохастическое дифференциальное уравнение получено как предел белого шума уравнения с реальным шумом, то мы выбираем интерпретацию Стратоновича. Если же СДУ соответствует пределу непрерывного времени в задаче с дискретным временем, то мы отдаем предпочтение интерпретации Ито. И в том и в другом случае решающим критерием правильности выбора служит сопоставление аналитических результатов с экспериментальными данными. Не существует универсальных общезначимых теоретических причин, по которым одной из интерпретаций СДУ следовало бы отдать предпочтение перед другой.

5.5. Классификация границ диффузионного процесса

Наша основная стохастическая модель, описывающая влияние чрезвычайно быстрых флуктуаций среды, строится на представлении временной эволюции системы с помощью диффузионного процесса с определенным коэффициентом переноса f и определенным коэффициентом диффузии $\sigma^2 g^2$. Оба коэффициента однозначно заданы феноменологическим уравнением для «скорости изменения» процесса (1.13). Коэффициент переноса задается либо первым членом в правой части уравнения (1.13), т. е. совпадает с детерминированной эволюцией при данном значении внешнего параметра $\lambda + \zeta_t$ в каждый момент времени,

либо содержит помимо него перенос, индуцированный шумом. Как мы уже объясняли выше, диффузионный процесс с коэффициентами f и $\sigma^2 g^2$ всегда можно представить с помощью следующего уравнения Ито¹⁾:

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) dW_t. \quad (5.86)$$

В физических приложениях пространство состояний случайного процесса X_t редко совпадает с вещественной прямой \mathbb{R} . Процесс часто бывает ограничен каким-нибудь подмножеством вещественной прямой, в большинстве случаев множеством неотрицательных вещественных чисел \mathbb{R}_0^+ (так бывает, например, когда x — переменная типа концентрации). Возникает вопрос: что происходит, когда диффузионный процесс достигает границ своего пространства состояний? (Если достигаемая граница равна плюс или минус бесконечности, то говорят, что процесс взрывается.) Ниже мы будем предполагать, что пространством состояний диффузионного процесса X_t служит интервал $[b_1, b_2]$, один или оба конца которого могут обращаться в бесконечность: $|b_i| = \infty$. Кроме того, мы будем считать, что $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию Липшица на любом замкнутом подынтервале $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ открытого интервала (b_1, b_2) . Иначе говоря, существует постоянная K , такая, что неравенство

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq K|x - y| \quad (5.87)$$

выполняется при любых $x, y \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$. Неравенство (5.85) выполняется (достаточное условие), если функции f и g непрерывно дифференцируемы, т. е. при том же условии, которое гарантирует существование и единственность решения СДУ (5.48) вплоть до некоторого случайного «момента взрыва» η (см. с. 129). Таким образом, мы можем утверждать, что вплоть до случайного момента времени η , когда случайный процесс X_t впервые достигает одной из границ, существует единственное решение, которое является диффузионным процессом. Разумеется, самыми лучшими диффузионными процессами мы вправе называть такие, которые никогда не достигают границ своего пространства состояний. Такой процесс «не ощущает» границ, последние никак не влияют на решение СДУ. В этом случае граничные условия можно не накладывать, более того, наложить их просто невозможно. Такие границы называются недостижимыми, и если оба конца b_1 и b_2 недостижимы, то с вероятностью единица $\eta = \infty$ и единственное решение СДУ (5.48) существует на (b_1, b_2) при любых t . Недостижимые границы встречаются двух типов.

¹⁾ В дальнейшем, если специально не оговорено, мы всегда будем понимать СДУ как уравнение Ито.

1) Так называемые естественные границы характеризуются тем, что, даже если $t \rightarrow \infty$, они достижимы лишь с нулевой вероятностью. Пусть β — точка вблизи такой границы, например вблизи конца b_1 . Пусть диффузионный процесс X_t при $t=0$ находится в состоянии $x_0 \in (b_1, \beta)$. Граница b_1 по определению называется естественной, если X_t с вероятностью единица достигает точки β раньше, чем границы b_1 . Отсюда, разумеется, следует, что X_t никогда не достигает границы: если процесс X_t , достигнув точки β , возвращается в интервал (b_1, β) , то с вероятностью единица он достигнет еще раз точки β раньше, чем границы b_1 . Характер границ, как нетрудно догадаться, определяется поведением переноса и диффузии вблизи границы. И действительно, классификация границ основана на интегрируемости некоторых функций, составленных из f и g . Аналитически условие того, что граница b_i естественная, записывается следующим образом: функция

$$\phi(x) = \exp\left(-\int_{\beta}^x \frac{2f(z)}{\sigma^2 g^2(z)} dz\right) \quad (5.88)$$

неинтегрируема в окрестности границы. Например, граница b_1 естественная, если

$$L_1(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \phi(x) dx \quad (5.89)$$

обращается в бесконечность, или $L_1(b_1) = \infty \Leftrightarrow b_1$ естественна.

2) Другой тип поведения диффузионного процесса вблизи недостижимой границы сводится к следующему. Если процесс X_t находится при $t=0$ в состоянии $x_0 \in (b_1, \beta)$, то он либо покидает интервал (b_1, β) за конечное время τ_{x_0} причем всегда через правую точку, либо никогда не покидает этот интервал, и тогда $X_t \rightarrow b_1$ при $t \rightarrow \infty$. Такая граница называется притягивающей. Она характеризуется тем, что

$$L_1(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \phi(x) dx < \infty \quad (5.90)$$

и

$$\begin{aligned} L_2(b_1) &= \int_{b_1}^{\beta} \frac{1}{\sigma^2 g^2(y)} \int_{b_1}^y \exp\left(-\int_{\beta}^x \frac{2f(z)}{\sigma^2 g^2(z)} dz\right) dx \times \\ &\times \exp\left(\int_{\beta}^y \frac{2f(z)}{\sigma^2 g^2(z)} dz\right) dy \end{aligned} \quad (5.91)$$

обращаются в бесконечность, т. е.

$L_1(b_i) < \infty$, $L_2(b_i) = \infty \Leftrightarrow b_i$ — притягивающая.

Если не выполняется ни равенство $L_1(b_i) = \infty$, ни равенство $L_2(b_i) = \infty$, то с ненулевой вероятностью некоторые траектории диффузионного процесса X_t достигают границы b_i пространства состояний за конечное время. В этом случае процесс ощущает присутствие границы, и поведение диффузионного процесса определяется не только переносом и диффузией, но и граничными условиями, которые, вообще говоря, должны быть наложены. Различаются следующие основные типы налагаемых граничных условий:

а) *поглощение* (достигнув границы b_i , диффузионный процесс остается там);

б) *отражение* (достигнув границы b_i , диффузионный процесс непрерывно или мгновенно возвращается в интервал (b_1, b_2) (так называемое мгновенное отражение) или остается в течение некоторого положительного времени на границе (так называемое отражение с запаздыванием));

в) *отражение с отскоком* (достигнув границы b_i , диффузионный процесс скачком возвращается в случайную точку внутри интервала (b_1, b_2)).

Различные комбинации этих основных условий позволяют получать более сложные краевые условия.

Достижимые границы, для которых $L_1(b_i) < \infty$ и $L_2(b_i) < \infty$, также подразделяются на два подкласса. В первом подклассе процессы характеризуются таким переносом и такой диффузией, что процессу X_t становится тем труднее достигать точки β внутри интервала (b_1, b_2) , чем ближе он подходит к границе. На математическом языке это означает: если в момент времени $t = 0$ процесс X_t находится в состоянии $x_0 \in (b_1, \beta)$, то вероятность того, что X_t достигнет точки β за конечное время, стремится к нулю, когда x_0 стремится к b_1 . Таким образом, граница действует как поглощающая граница. С такой границей совместимы только условия типа 1 и 3. Только их мы и можем наложить на процесс. Аналитически условие того, что b_1 — поглощающая граница, можно записать в виде равенства

$$L_3(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \frac{1}{g^2(y)} \frac{1}{\phi(y)} dy = \infty, \quad (5.92)$$

т. е.

b_1 — поглощающая $\Leftrightarrow L_1 < \infty$, $L_2 < \infty$, $L_3 < \infty$.

Если все три величины L_1 , L_2 и L_3 конечны для рассматриваемой границы, то граница называется регулярной. В случае

регулярной границы мы можем накладывать любые условия. Для удобства приводим ниже классификацию возможных случаев.

Граница:

естественная $L_1 = \infty$ без граничных условий
 притягивающая $L_1 < \infty$, $L_2 = \infty$ без граничных условий
 поглощающая $L_1 < \infty$, $L_2 < \infty$, $L_3 = \infty$ граничное условие 1 или 3
 регулярная $L_1 < \infty$, $L_2 < \infty$, $L_3 < \infty$ любое граничное условие

Точка b называется внутренней границей диффузионного процесса X_t , если либо $g(b) = 0$, либо $|f(b)| = \infty$. Из определения величин L_1 , L_2 и L_3 ясно, что любая граница b , если она не внутренняя, должна быть регулярной. Действительно, для невнутренней границы существует окрестность, в которой вследствие непрерывности коэффициентов переноса и диффузии $|f(x)| < \infty$ и $g(x) > 0$. Отсюда мы заключаем, что в той же окрестности $\phi(x)$ — ограниченная строго положительная функция, и ни одна из величин L_1 , L_2 и L_3 не может обращаться в бесконечность.

Приведенная выше схема классификации границ и граничных условий принята в советской математической литературе [5.12]. В дальнейшем мы будем называть ее классификацией Гихмана — Скорохода (ГС). Существует другая схема, получившая широкое распространение в литературе. Она была введена Феллером [1.87]. (Обзоры см. в работах [5.13, 14].) Терминология и классификация свойств границы в схеме Феллера (Ф) несущественно отличаются от приведенных в схеме ГС. Для обсуждения сходства и различия этих двух схем условимся обозначать их соответственно буквами ГС и Ф.

- 1) Естественная граница ГС может быть естественной границей Ф и впускающей границей Ф.
- 2) Притягивающая граница ГС есть одновременно и естественная граница Ф.
- 3) Поглощающая граница ГС есть выпускающая граница Ф.
- 4) Регулярная граница ГС есть регулярная граница Ф.

Единственное расхождение (если отвлечься от различий в терминологических названиях одних и тех же типов поведения) между классификациями ГС и Ф возникает при рассмотрении недостижимых границ. Граница b_i называется естественной границей Феллера, если функции

$$h_2(x) = g^{-2}(x) \left(\exp \frac{2}{\sigma^2} \int_{x_0}^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du \right) \int_{x_0}^x \phi(z) dz, \quad x_0 \in (b_1, b_2), \quad (5.93)$$

и

$$h_1(x) = \phi(x) \int_{x_0}^x g^{-2}(z) \left(\exp \frac{2}{\sigma^2} \int_{g^2(u)}^z \frac{f(u)}{g^2(u)} du \right) dz, \quad x_0 \in (b_1, b_2), \quad (5.94)$$

неинтегрируемы вблизи b_i .

Граница b_i называется впускающей границей Феллера, если $L_1(b_i) = \infty$

и функция $h_2(x)$ интегрируема вблизи b_i .

Впускающая граница Φ характеризуется тем, что она недостижима изнутри пространства состояний и что любая вероятность, первоначально заданная на этой границе, «втекает» в открытый интервал (b_1, b_2) . Иначе говоря, если диффузионный процесс при $t = 0$ находится в некотором состоянии на впускающей границе Φ , то он быстро переходит внутрь пространства состояний и никогда более не возвращается к границе. Естественная граница Φ также недостижима изнутри пространства состояний, но в отличие от впускающей границы Φ любая вероятность, первоначально заданная на естественной границе Φ , навсегда оказывается «привязанной» к этой границе. Ясно, что диффузионный процесс не может начинаться из состояния, принадлежащего естественной границе Φ .

В дальнейшем мы будем в основном придерживаться схемы ГС, поскольку она более полно и точно соответствует нашим целям, чем схема Φ . Инициалы авторов схемы мы часто будем опускать, если это не будет приводить к недоразумениям. Всякое обращение к схеме Φ будет указано явно. Таким образом, всякое упоминание об «анонимной» классификации границ и граничных условий подразумевает классификацию Гихмана — Скорохода.

НЕРАВНОВЕСНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ

Итак, мы располагаем, наконец, всем математическим аппаратом, необходимым для ответа на вопрос о поведении нелинейных макроскопических систем в флуктуирующей среде. Поэтому для удобства читателя уместно кратко напомнить и резюмировать наиболее существенные особенности нашего подхода.

Мы рассматриваем системы, моделируемые феноменологическим уравнением типа

$$\dot{X} = f_{\lambda}(X), \quad (6.1)$$

где X — величина, характеризующая состояние системы, а λ — внешний параметр, зависящий от состояния среды. Предположения, при которых уравнение (6.1) дает достаточно адекватное описание, подробно обсуждены в гл. 1. Для того чтобы учесть флуктуации среды, мы заменяем параметр λ в феноменологическом уравнении стационарным случайным процессом $\lambda_t = \lambda + \sigma \xi_t$, где внешний шум ξ_t имеет нулевое среднее значение и интенсивность σ^2 . Подробное обсуждение свойств окружающей среды см. в гл. 1. Для описания быстрых флуктуаций среды мы приняли для ξ_t идеализацию белого шума, т. е. $\lambda_t = \lambda + \sigma \xi_t$. Эта идеализация была постоянным источником путаницы и неразберихи в литературе. Во избежание различного рода неоднозначностей и разночтений, которыми изобиловали в большинстве случаев более ранние теории мультипликативного внешнего белого шума, мы обстоятельно и подробно со всей математической строгостью обсудили предельный переход к белому шуму и следствия, простирающиеся из него для описания нелинейных систем в флуктуирующих средах. Было показано, что системы, связанные с быстро флуктуирующей средой, можно моделировать марковскими процессами, которые являются решениями стохастических дифференциальных уравнений. Два понятия, необходимые для удовлетворительной формализации этого факта, а именно понятия диффузионного процесса в СДУ Ито или Стратоновича, подробно обсуждены в двух предыдущих главах. Основной итог, к которому мы пришли, состоял в следующем: системы типа (6.1) с функцией $f_{\lambda}(X)$, линейной по внешнему пара-

метру (случай, охватывающий широкий класс приложений), т. е.
 $f_\lambda(X) = h(X) + \lambda g(X),$

допускают при действии быстрого внешнего шума моделирование с помощью диффузионного процесса с дифференциальными моментами, равными соответственно $f(X)$ и $\sigma^2 g^2(X)$ или $f(X) + \sigma^2 g'(X)g(X)/2$ и $\sigma^2 g(X)$. Иначе говоря, в основу описания таких систем может быть положено СДУ Ито

$$dX_t = [h(X_t) + \lambda g(X_t)] dt + \sigma g(X_t) dW_t \quad (6.2)$$

или СДУ Стратоновича

$$dX_t = [h(X_t) + \lambda g(X_t)] dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t. \quad (6.3)$$

Уравнение Фоккера — Планка (УФП), определяющее эволюцию плотности вероятности перехода $p(y, t|x, s)^1$, имеет вид в случае Ито

$$\partial_t p(y, t|x) = -\partial_y f_\lambda(y) p(y, t|x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t|x), \quad (6.4)$$

в случае Стратоновича

$$\begin{aligned} \partial_t p(y, t|x) = & -\partial_y \left[f_\lambda(y) + \frac{\sigma^2}{2} g'(y) g(y) \right] p(y, t|x) + \\ & + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t|x). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Используя эту процедуру моделирования, исследуем теперь, может ли внешний шум изменить макроскопическое поведение нелинейных систем, и если может, то каким именно образом.

6.1. Стационарное решение уравнения Фоккера — Планка

Так как флуктуации среды допускают моделирование с помощью стационарного случайного процесса (см. разд. 1.5), можно ожидать, что в общем случае система, испытывающая воздействие внешнего шума, по истечении достаточно большого интервала времени выходит на стационарный режим. Стационарное поведение в данном случае означает, что при $t \rightarrow \infty$ в системе устанавливается плотность вероятности $p_s(x)$, форма которой не изменяется со временем: вероятность найти систему в окрестности определенного состояния x перестает зависеть от времени. Но, разумеется, траектории $X_t(\omega)$ не стремятся к стационарной траектории $x(\omega)$; состояние системы продолжает флуктуировать, оно изменяется от одного момента времени к

¹⁾ Процессы однородны по времени. Плотность условной вероятности $p(y, t+s|x, s)$ зависит только от разности времен.

другому. Тем не менее флуктуации системы таковы, что X_t и $X_{t+\tau}$ имеют одинаковую плотность вероятности $p_s(x)$.

В дальнейшем мы определим стационарную плотность вероятности $p_s(x)$, которая характеризует стационарное поведение системы, находящейся под воздействием внешнего белого шума, и обсудим ее основные свойства. В частности, нас будут интересовать любые изменения в макроскопическом поведении системы, вызываемые флуктуациями среды. Плотность вероятности $p_s(x)$ — стационарное решение УФП, которое можно записать в виде

$$\partial_t p(x, t | x_0, 0) + \partial_x J(x, t | x_0, 0) = 0, \quad (6.6)$$

где

$$J(x, t | x_0, 0) = \dot{f}(x) p(x, t | x_0, 0) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x g^2(x) p(x, t | x_0, 0).$$

Величину J можно интерпретировать как поток вероятности. Уравнение (6.6) становится при этом уравнением непрерывности, выражающим сохранение вероятности. Стационарное УФП выражается в уравнение

$$\partial_x J_s(x) = 0. \quad (6.7)$$

Из него следует, что стационарный поток вероятности постоянен на пространстве состояний $[b_1, b_2]$:

$$J_s(x) = \text{const} \quad \text{при} \quad x \in [b_1, b_2].$$

В стационарном случае в пространстве состояний для вероятности нет ни источников, ни стоков. Поток вероятности внутри пространства состояний равен потоку через границы, который мы обозначим J :

$$J = J_s(x) = J_s(b_1) = J_s(b_2).$$

Таким образом, стационарная плотность вероятности $p_s(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\dot{f}(x) p_s(x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_x g^2(x) p_s(x) = -J. \quad (6.8)$$

Для того чтобы решить уравнение (6.8), введем вспомогательную функцию $q(x) = g^2(x) p_s(x)$. УФП перейдет при этом в уравнение

$$\partial_x q(x) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{\dot{f}(x)}{g^2(x)} q(x) - \frac{2}{\sigma^2} J,$$

решение которого, как нетрудно видеть, имеет вид

$$q(x) = N \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_x^{\infty} \frac{\dot{f}(u)}{g^2(u)} du \right) - \frac{2J}{\sigma^2} \int_x^{\infty} \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_z^{\infty} \frac{\dot{f}(u)}{g^2(u)} du \right) dz.$$

Таким образом, для стационарной плотности вероятности мы получаем

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_x^{\infty} \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) - \frac{2}{\sigma^2 g^2(x)} J \int_x^{\infty} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_z^{\infty} \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) dz. \quad (6.9)$$

Постоянная интегрирования N определяется из условий нормировки, а величина J как поток вероятности на границе пространства состояний зависит от характера границы. Если граница естественная (или регулярная с мгновенным отражением в качестве граничного условия), то не существует потока вероятности из пространства состояний, и поэтому $J=0$. В дальнейшем мы всегда будем рассматривать ситуации, в которых это условие выполнено. Тогда

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_x^{\infty} \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right). \quad (6.10)$$

Для того чтобы величина (6.10) была стационарной плотностью вероятности, ее необходимо нормировать, т. е. выбрать

$$N^{-1} = \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_x^{\infty} \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) dx < \infty. \quad (6.11)$$

Если одна из границ притягивающая, поглощающая или регулярная, а в качестве граничного условия на ней выбрано поглощение, то $p_s(x) \equiv 0$ при $x \in (b_1, b_2)$, т. е. мы получаем тривиальное решение стационарного УФП (6.7). Мы будем говорить и в этом случае, что (регулярная) стационарная плотность вероятности не существует.

Нетрудно видеть, что для диффузионного процесса с дрейфом $f + \sigma^2 g'g/2$ и диффузией $\sigma^2 g^2$, т. е. для процесса, соответствующего СДУ Стратоновича

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t, \quad (6.12)$$

стационарная плотность вероятности (границы предполагаются такими, что $J=0$) имеет вид

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_x^{\infty} \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right). \quad (6.13)$$

Резюмируя, можно сказать, что стационарное поведение системы, описываемой СДУ

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) dW_t, \quad (6.14)$$

определяется функцией

$$p_s(x) = Ng^{-\nu}(x) \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_x^{\cdot} \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right), \quad (6.15)$$

если $J = 0$ и $p_s(x)$ нормируема. Показатель $\nu = 1$ в (6.15) соответствует интерпретации СДУ (6.14) по Стратоновичу, $\nu = 2$ — интерпретации того же уравнения по Ито. Может случиться, что интерпретация СДУ по Ито допускает стационарное решение, а интерпретация по Стратоновичу не допускает или наоборот, так как формулы для $p_s(x)$ отличаются на множитель $g^{-1}(x)$. Всякий раз, когда между вариантами Ито и Стратоновича возникает такого рода расхождение, его следует воспринимать как своеобразный «сигнал опасности». Как правило, он свидетельствует о том, что модель, используемая для описания системы, имеет некоторые опасные или патологические особенности (например, функция g не является непрерывно дифференцируемой, как в случае $g(x) \sim \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$). В любом случае, если существует качественное различие в стационарном поведении между интерпретациями СДУ по Ито и Стратоновичу, при обосновании процедуры моделирования необходимо соблюдать особую осторожность. Во всех обсуждаемых ниже приложениях качественного различия между СДУ Ито и СДУ Стратоновича не существует. Разумеется, способность модели порождать СДУ, «грубое» относительно перехода от интерпретации Ито к интерпретации Стратоновича, — качество весьма желательное.

Предположим теперь, что диффузионный процесс, задаваемый интерпретируемым в смысле Ито СДУ (6.14), допускает стационарное решение, строго положительное внутри пространства состояний, т. е. $p_s(x) > 0$ при всех $x \in (b_1, b_2)$. Это означает, в частности, что пространство состояний (b_1, b_2) случайного процесса X_t не делится на два или более интервала, не сообщающиеся между собой. Следовательно, независимо от того, в какой точке x_0 пространства состояний находится процесс X_t при $t = 0$, он будет бесконечно много раз возвращаться в окрестность любой точки $x \in (b_1, b_2)$. Для этого, в частности, требуется, чтобы внутри пространства состояний флуктуации нигде не обращались в нуль, т. е. чтобы при всех $x \in (b_1, b_2)$ выполнялось неравенство $g(x) > 0$. При этих условиях решение

$p(x, t)$ уравнения Фоккера — Планка сходится к $p_s(x)$ при $t \rightarrow \infty$. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий функционал от $p(x, t)$:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_{b_1}^{b_2} dx p(x, t) \ln [p(x, t)/p_s(x)] = \\ &= \int_{b_1}^{b_2} dx p(x, t) \{ \ln [p(x, t)/p_s(x)] + p_s(x)/p(x, t) - 1 \} \geq 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

который неотрицателен при любых t , так как $\ln(1/y) \geq 1 - y$ при $y > 0$ ¹⁾.

Неравенство (6.16) переходит в равенство только при $y = 1$, т. е. при $p(x, t) = p_s(x)$. Покажем теперь, что

$$\dot{\phi} \equiv d_t \phi(t) \leq 0. \quad (6.17)$$

Функционал ϕ , обладающий свойствами (6.16, 17) и обращающийся в нуль вместе с первой производной ($\phi = 0$ и $\dot{\phi} = 0$) в том и только том случае, если $p(x, t) = p_s(x)$, называется функционалом Ляпунова. По хорошо известной теореме из существования функционала Ляпунова следует глобальная асимптотическая устойчивость стационарного состояния. На более физическом языке $\phi(t)$ есть не что иное, как \mathcal{H} -функция для УФП, а неравенство (6.17) соответствует \mathcal{H} -теореме. Докажем теперь, что $\dot{\phi}(t)$ монотонно убывает. Тем самым будет доказано, что любое решение УФП при $t \rightarrow \infty$ стремится к $p_s(x)$, если $p_s(x) > 0$ при $x \in (b_1, b_2)$.

Продифференцируем соотношение (6.16) по времени и воспользуемся тем, что одномерная плотность вероятности удовлетворяет УФП:

$$\dot{\phi} = \int dx \left[-\partial_x f(x) p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} g^2(x) p(x, t) \right] \ln [p(x, t)/p_s(x)].$$

Так как мы рассматриваем только процессы без потока через границу, граничные члены, как уже отмечалось выше, равны

¹⁾ Неравенство (6.16) выписывается без труда, если вспомнить, что

$$\int_{b_1}^{b_2} [p_s(x) - p(x, t)] dx = 0, \quad \forall t, \quad \text{так как} \quad \int_{b_1}^{b_2} p(x, t) dx = 1.$$

нулю. Интегрируя по частям, мы получаем

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &= \int dx p(x, t) \left[f(x) \partial_x + \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) \partial_{xx} \right] \ln [p(x, t)/p_s(x)] = \\
 &= \int dx p(x, t) \left[f(x) \frac{p_s(x)}{p(x, t)} \cdot \partial_x \frac{p(x, t)}{p_s(x)} + \right. \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) \cdot \partial_x \frac{p_s(x)}{p(x, t)} \cdot \partial_x \frac{p(x, t)}{p_s(x)} + \\
 &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) \frac{p_s(x)}{p(x, t)} \cdot \partial_{xx} \frac{p(x, t)}{p_s(x)} \right] = \\
 &= \int dx \left[f(x) p_s(x) \cdot \partial_x \frac{p(x, t)}{p_s(x)} + \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) p_s(x) \cdot \partial_{xx} \frac{p(x, t)}{p_s(x)} \right] - \\
 &\quad - \int dx \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) \frac{p_s^2(x)}{p(x, t)} \left(\partial_x \frac{p(x, t)}{p_s(x)} \right)^2. \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

Первый интеграл равен нулю, в чем нетрудно убедиться, выполнив интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}
 &\int dx \frac{p(x, t)}{p_s(x)} \left[-\partial_x f(x) p_s(x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} g^2(x) p_s(x) \right] = \\
 &= \int dx \frac{p(x, t)}{p_s(x)} \partial_t p_s(x) = 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $\dot{\phi}$ сводится к второму интегралу в (6.18), подинтегральное выражение которого заведомо неотрицательно. Этим доказательство неравенства (6.17) завершается. Из выражения (6.18) видно, что $\dot{\phi} = 0$ в том и только том случае, если

$$\partial_x [p(x, t)/p_s(x)] = 0, \quad \text{т. е.} \quad p(x, t) = \text{const} \cdot p_s(x). \quad (6.19)$$

Так как в правой и левой частях равенства (6.19) стоят плотности вероятности, нормированные на единицу, то постоянная в правой части равна единице. Из соотношений (6.16, 17) нетрудно вывести следствие, о котором мы уже говорили выше: если диффузионный процесс X_t при $t=0$ имеет плотность вероятности, отличающуюся от стационарной, то при $t \rightarrow \infty$ она стремится к стационарной. Действительно, функционал $\phi(t)$ строго положителен и монотонно убывает со временем, так как $\dot{\phi} < 0$. Отсюда следует, что $\phi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а так как $\dot{\phi} = 0$ в том и только том случае, если $p(x, t) = p_s(x)$, мы приходим к равенству $\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) = p_s(x)$.

Более того, можно показать, что если стационарная плотность вероятности существует и диффузионный процесс X_t при $t=0$ начинается с нее, то X_t — эргодический процесс. Этому

утверждению можно придать точный смысл. Справедлива следующая теорема: если интеграл (6.11) конечен, то для интегрируемых функций с вероятностью единица выполняется равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X_t(\omega)) dt = \int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) p_s(x) dx = E\{\varphi(X)\}. \quad (6.20)$$

Это означает, что математическое ожидание стационарного диффузионного процесса X_t может быть определено по наблюдению лишь одной произвольной траектории процесса — взятием средней по времени, задаваемой левой частью соотношения (6.20). Более того, таким же способом может быть найдена и стационарная плотность вероятности. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим характеристическую функцию I_x^e интервала $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, т. е.

$$I_x^e(z) = \begin{cases} 1, & z \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon], \\ 0, & z \notin [x - \varepsilon, x + \varepsilon]. \end{cases} \quad (6.21)$$

Эргодическая теорема утверждает, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_x^e(X_t(\omega)) dt = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_s(z) dz \quad (\text{почти наверное}). \quad (6.22)$$

Соотношение (6.22) означает, что произведение $p_s(x)dx$ равно доле времени, которое произвольная траектория диффузионного процесса проводит в бесконечно малой окрестности состояния x .

6.2. Окрестность детерминированного поведения: аддитивный и малый мультипликативный шум

Рассмотрим теперь нелинейную макроскопическую систему, которая достаточно долго была связана со средой, для того чтобы выйти на стационарное состояние. Если среда не изменяется, то стационарные состояния системы определяются нулями правой части детерминированного феноменологического уравнения

$$\dot{X} = h(X) + \lambda g(X). \quad (6.23)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что детерминированная система (6.23) устойчива, понимая под устойчивостью ограниченность решения $X(t)$ (оно нигде не обращается в бесконечность). В переводе на точный язык это означает: для каждого $x_0 \in (b_1, b_2)$ существует постоянная $C < \infty$ (вообще говоря, зависящая от λ), такая, что

$$\forall t: |X(t)| \leq C, \quad (6.24)$$

если $X(0) = x_0$. Неравенство (6.24) выполняется, если существует число $K > 0$, такое, что

$$\begin{aligned} h(x) + \lambda g(x) &< 0 \quad \text{при всех } x > K, \\ h(x) + \lambda g(x) &> 0 \quad \text{при всех } x < -K. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Если X — величина типа концентрации, которая должна быть неотрицательной, то правая часть уравнения (6.23) должна удовлетворять условию

$$h(0) + \lambda g(0) \geq 0 \quad \text{при всех } \lambda. \quad (6.26)$$

Если обе границы b_1 и b_2 конечны, то мы требуем, чтобы условия $h(b_1) + \lambda g(b_1) \geq 0$ и $h(b_2) + \lambda g(b_2) \leq 0$ выполнялись при всех λ . Решение дифференциального уравнения первого порядка с одной зависимой переменной представляет собой монотонную функцию времени, так как при каждом X «скорость» \dot{X} принимает одно и только одно вполне определенное значение. Таким образом, из неравенства (6.24) следует, что уравнение (6.23) допускает по крайней мере одно устойчивое состояние. Если детерминированное феноменологическое уравнение допускает более одного стационарного состояния, то устойчивые и неустойчивые состояния чередуются. Если существуют два или более устойчивых стационарных состояния, то пространство состояний подразделяется на непересекающиеся области — так называемые «области притяжения» различных устойчивых состояний. В этом очень легко убедиться, если записать феноменологическое уравнение в виде

$$\dot{X} = -\partial_X V_\lambda(X), \quad \text{где } V_\lambda(x) = - \int^x [h(z) + \lambda g(z)] dz \quad (6.27)$$

называется потенциалом уравнения (6.23). Ясно, что стационарные состояния определяются экстремумами потенциала $V_\lambda(x)$, а нормальные моды $\omega(\bar{X})$ при анализе устойчивости по линейному приближению — уравнением

$$\omega(\bar{X}) = -\partial_{XX} V_\lambda(\bar{X}). \quad (6.28)$$

Следовательно, устойчивые стационарные состояния соответствуют минимумам, а неустойчивые — максимумам потенциала $V_\lambda(x)$. Представим себе, что x — координата шарика, который движется с весьма большим трением по «ландшафту», задаваемому потенциалом $V_\lambda(x)$. В зависимости от начального положения шарик скатывается в одну из долин, т. е. в один из минимумов потенциала $V_\lambda(x)$. Находясь на дне долины, шарик останется там, даже если на него будут действовать бесконечно малые возмущения. Действительно, до тех пор пока возмущения не вынудят его преодолеть потенциальный барьер, разделяющий

две долины, он всегда будет возвращаться к состоянию покоя в локальном минимуме потенциала. С другой стороны, если шарик покоится на вершине горы, то он никогда не вернется в прежнее состояние покоя, если его подвергнуть действию возмущений, даже если те бесконечно малы.

Но вернемся к нашей основной задаче и попытаемся выяснить, как изменяется под действием флуктуирующей среды стационарное поведение системы. «Состояние» системы определяется случайной величиной. Для того чтобы мы могли описывать детерминированное и стохастическое стационарное поведение в единых терминах, условимся считать, что в детерминированном случае система описывается вырожденной случайной величиной вида

$$X(\omega) = \bar{X}_i, \text{ если } X(0)(\omega) \in A(\bar{X}_i),$$

где $A(\bar{X}_i)$ — область притяжения i -го стационарного состояния. Если придерживаться интерпретации случайной величины (2.15), то $X(\omega)$ характеризуется своим распределением вероятности. В детерминированном случае стационарная «плотность вероятности» состоит из дельтообразных пиков, сосредоточенных на стационарном состоянии \bar{X} . Вес этих дельта-пиков задается тем, как изначально приготовлена система. Внешний шум оказывает дезорганизующее действие: дельта-пики уширяются. Если обратиться к приведенному выше примеру с шариком и горным ландшафтом, то можно сказать, что внешние флуктуации вынуждают шарик совершать небольшие колебания в окрестности положения равновесия и тем самым приводят к расплыванию распределения вероятности: шарик может находиться в несколько большей окрестности экстремума. Если бы ландшафт был «безликим», плоским, то шарик под действием внешних флуктуаций совершал бы нечто вроде броуновского движения. Но в действительности мы имеем противодействующую систематическую силу, возвращающую шарик на дно долины. Равновесие достигается в том случае, когда эти две силы компенсируют друг друга. Можно ожидать следующего стационарного поведения: плотность вероятности достигает максимума в точке с координатой, соответствующей минимуму потенциала, и несколько размазана в ее окрестности в зависимости от интенсивности внешнего шума. Если существует более чем один минимум и отсутствует эффективная верхняя грань внешних флуктуаций, то можно ожидать многомодовую плотность вероятности с пиками, соответствующими различным локальным минимумам потенциала. Действительно, если внешний шум имеет, как мы предполагаем, гауссовское распределение, то флуктуации становятся тем менее вероятными, чем выше их интенсивность, но даже для произвольно больших флуктуаций вероятность не

строго равна нулю, а лишь очень мала. Если подождать достаточно долго, то такая флуктуация перебросит шарик через потенциальный барьер из одной долины в другую. В том случае, когда барьер очень высок, а дисперсия внешнего шума мала, время ожидания такой флуктуации может оказаться астрономически большим. Но если мы всерьез устремим время ожидания к бесконечности (а этот предельный переход необходим для того, чтобы найти стационарное распределение плотности вероятности), то сильная флуктуация, сколь бы ни велика была ее амплитуда, непременно произойдет, и шарик побывает (причем бесконечно много раз) во всех долинах потенциала. Из приведенных выше соображений ясно, что нарисованную нами картину можно ожидать только в том случае, если либо действие внешнего шума не зависит от состояния системы, либо дисперсия шума очень мала, вследствие чего система проводит большую часть времени в минимумах и переходит от одного минимума в другой относительно быстро. С точностью до этого ограничения возникает достаточно общая картина. Состояние системы, т. е. случайная величина, либо как функция, задающая отображение пространства элементарных событий Ω в пространство состояний $[b_1, b_2]$, либо (если воспользоваться интерпретацией случайной переменной (2.15)) как вид соответствующего распределения вероятности определяется «взаимодействием» между динамикой системы и внешними флуктуациями.

Рассмотрим сначала случай, когда интенсивность белого шума чрезвычайно мала, т. е. $\sigma^2 \ll 1$. Положив по определению

$$U(x) = \int \frac{f(u)}{g^2(u)} du,$$

мы можем записать выражение (6.15) в виде

$$\begin{aligned} p_s(x) = N \exp \left[\frac{2}{\sigma^2} U(\bar{x}_m) \right] \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left[U(x) - U(\bar{x}_m) - \frac{\nu \sigma^2}{2} \ln g(x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Здесь \bar{x}_m — положение наибольшего максимума функции $U(x)$, по предположению лежащей внутри пространства состояний (b_1, b_2) :

$$U(x) < U(\bar{x}_m) \quad \text{при} \quad x \neq \bar{x}_m.$$

Если σ^2 стремится к нулю и $x \neq \bar{x}_m$, то второй множитель становится экспоненциально малым, поэтому основной вклад в стационарную плотность вероятности дает окрестность порядка σ^2 главного максимума функции $U(x)$. Такого рода ситуации мо-

гут быть проанализированы методом быстрейшего спуска [6.1]. После несколько громоздких вычислений получаем

$$E\{X\} = \bar{x}_m + \frac{\sigma^2}{2U''(\bar{x}_m)} \left(\frac{1}{2} \frac{U''''(\bar{x}_m)}{U''(\bar{x}_m)} - \frac{g'(\bar{x}_m)}{g(\bar{x}_m)} \right) + O(\sigma^4) \quad (6.30)$$

и

$$E\{\delta X^2\} = -\frac{2\sigma^2}{U''(\bar{x}_m)} + O(\sigma^4). \quad (6.31)$$

Если внешний шум аддитивный, т. е. $g(x) = \text{const} = c$, то

$$U(x) = -\frac{1}{c^2} V_\lambda(x), \quad (6.32)$$

и наибольший из максимумов функции U и плотности вероятности $p_s(x)$ совпадает с положением самой глубокой потенциальной «ямы» по всем σ^2 , т. е. $\bar{x}_m = \bar{x}$ (наибольший максимум и дно самой глубокой ямы не смещены относительно друг друга). В этом случае даже анализа на основе одного лишь детерминированного описания оказывается вполне достаточно, чтобы решить, какое из локально устойчивых состояний наиболее устойчиво, т. е. для какого из локально устойчивых состояний неравенство $V(\bar{x}_m) < V(x)$ выполняется при всех $x \neq \bar{x}_m$. Все остальные локально устойчивые состояния называются метастабильными. Если же действие внешнего шума зависит от состояния системы, т. е. если мы имеем дело с мультипликативным шумом, то

$$U(x) \neq -\frac{1}{c^2} V_\lambda(x), \quad (6.33)$$

и детерминированное стационарное состояние, порождающее наибольший максимум функции $U(x)$, не обязательно совпадает с самой глубокой потенциальной «ямой» в детерминистическом описании. Между этими фактами и данными относительно внутренних флуктуаций в макроскопически больших, но конечных системах имеется тесная аналогия [6.2]. Она свидетельствует о том, что критерий абсолютной устойчивости для детерминированных стационарных состояний явно зависит от природы воздействующих на систему случайных возмущений. Абсолютная устойчивость и точка сосуществования фаз, т. е. точка в фазовом пространстве, в которой два пика плотности вероятности $p_s(x)$ имеют одинаковую высоту, не могут быть определены на основе одного лишь детерминистического описания. Это обстоятельство подчеркивал еще Ландауэр [6.3].

6.3. Явления перехода в флуктуирующей среде

Проанализировав предельный случай шума чрезвычайно малой интенсивности σ^2 , перейдем теперь к исследованию стационарного поведения макроскопических систем при шуме произвольной интенсивности. В частности, нас будут интересовать явления перехода под действием внешнего шума. В этой связи возникают по крайней мере два вопроса: что следует понимать под переходом в макроскопической системе, взаимодействующей со случайной средой, и каким образом можно детектировать такой переход? Явление неравновесных фазовых переходов в системе с детерминированными внешними связями ныне хорошо известно и было рассмотрено в гл. 1. Поведение нелинейной системы как функции внешнего параметра лучше всего описывать с помощью соответствующей бифуркационной диаграммы. В определенном диапазоне значений внешних параметров стационарные состояния претерпевают только количественные изменения (или остаются инвариантными). Но при некоторых критических значениях внешних параметров происходят качественные изменения в виде неравновесного фазового перехода второго и первого рода (см. гл. 1). Если внешние связи флуктуируют, то стационарное состояние системы описывается, как было показано выше, подлинно случайной величиной. По аналогии с детерминированной ситуацией вполне естественно сказать, что переход происходит всякий раз, когда стационарное состояние системы претерпевает качественное изменение, или, говоря не строго, качественно изменяется случайная величина. Этому утверждению можно придать более строгий смысл, если вспомнить, что случайная величина есть функция, отображающая пространство элементарных событий в пространство состояний. *Переход происходит* в той самой точке пространства параметров, в число которых входят среднее значение внешнего шума, его дисперсия, время корреляции и т. д., *где характер функции, задающей отображение пространства элементарных событий Ω в пространство состояний $[b_1, b_2]$, качественно изменяется.* Если принять интерпретацию случайной величины как отображения (2.15), то это соответствует качественному изменению распределения вероятности, характеризующего случайную величину. В нашем случае распределение вероятности определяется по формуле (6.15), задающей точное выражение для стационарной плотности вероятности системы с гауссовским белым шумом. Каким образом мы можем обнаружить такое качественное изменение? Рассуждая на эвристическом уровне, мы будем руководствоваться детерминированной ситуацией и попытаемся естественным образом распространить используемые там критерии на стохастический случай. Такой способ действия оказы-

ваются оптимальным. В детерминированном случае неравновесный фазовый переход происходит в точке, в которой претерпевает качественные изменения потенциал $V_\lambda(x)$ (см. (6.27)), например изменяется число локальных экстремумов. Этот факт был точно сформулирован в рамках так называемой теории катастроф [6.4, 5]. На нашем унифицированном языке это означает, что любое такое изменение приводит к качественной перестройке (вырожденной) случайной величины, описывающей стационарное поведение. Таким образом, экстремумы стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ весьма естественно рассматривать как показатели, «сигнализирующие» о переходе в стохастическом случае. [На переходы, связанные с изменениями природы границы, эти показатели не реагируют (разд. 6.4).] Такой выбор критерия «фазового перехода» является не только наиболее прямым обобщением детерминированных понятий, но и наиболее оптимальным по сравнению с другими вариантами, которые приходят на ум в стохастическом случае, например моментами распределения. Последние не относятся к числу надежных «индикаторов» качественных изменений случайной величины по ряду причин. Во-первых, моменты не всегда однозначно определяют распределение вероятности [2.3, с. 166]. Во-вторых, если говорить на более физическом языке, при усреднении теряется огромное количество информации. Для того чтобы проиллюстрировать это утверждение на типичном примере, рассмотрим зависящее от времени уравнение Гинзбурга — Ландау, часто используемое для описания равновесных критических явлений [6.6]:

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^3) dt + \sigma dW_t.$$

В детерминированном случае ($\sigma = 0$) критическая точка соответствует $\lambda = 0$. При отрицательных λ система имеет только одно стационарное состояние $\bar{x} = 0$, т. е. потенциал $V_\lambda(x)$ имеет лишь один минимум. При положительных λ точка $\bar{x} = 0$ становится максимумом потенциала $V_\lambda(x)$, у которого, кроме того, появляются два минимума в точках $\bar{x} = \pm(\lambda)^{1/2}$, т. е. система имеет два устойчивых и одно неустойчивое стационарное состояние. В стохастическом случае, соответствующем здесь аддитивному шуму, стационарное поведение системы описывается случайной величиной с плотностью вероятности

$$p_s(x) = N \exp[-V_\lambda(x)/\sigma^2].$$

Ясно, что и в стохастическом случае качественное изменение стационарного состояния происходит при $\lambda = 0$. Этот переход четко прослеживается в поведении экстремумов стационарной плотности вероятности $p_s(x)$. Что же касается моментов, то по ним обнаружить переход невозможно. В частности, первый мо-

мент остается равным *нулю* даже при положительных значениях λ . Ясно, что макроскопическим состояниям или фазам системы соответствует не среднее значение, а максимумы стационарной плотности вероятности $p_s(x)$.

Приведенный нами пример подтверждает, что самое непосредственное обобщение детерминированных понятий на стохастический случай дает наилучшие результаты. Качественное изменение стационарного состояния однозначно отражается на экстремумах плотности вероятности. Единственным исключением является переход от вырожденной к подлинно случайной величине. В этом случае наилучшим индикатором перехода служит дисперсия. Во избежание возможных недоразумений подчеркнем, что мы не сосредотачиваем все внимание на экстремумах плотности вероятности $p_s(x)$, т. е. на наиболее вероятных значениях. В частности, мы отнюдь не утверждаем, что максимумы определяют стационарное распределение вероятности. Внешний шум имеет макроскопическую природу и не мал по сравнению с внутренними флуктуациями, что, естественно, приводит к расширению переходной зоны и уширению пиков, но не исключает возможность экспериментального наблюдения. Ввиду важности этого момента повторим еще раз, что при естественном и непосредственном обобщении детерминированных понятий *переход происходит в том случае, если стационарное состояние системы, описываемое случайной величиной, претерпевает качественные изменения*. (В последующих главах мы убедимся в том, что определение физично и операционно, т. е. определяемые таким образом переходы экспериментально наблюдаемы.) Экстремумы стационарной плотности вероятности с этой точки зрения позволяют отслеживать такое качественное изменение. *Число и положение* экстремумов плотности вероятности $p_s(x)$ в стохастическом случае и потенциала $V_\lambda(x)$ в детерминированном случае являются наиболее характерными отличительными особенностями стационарного поведения системы.

Вместе с тем нельзя не отметить, что экстремумы плотности вероятности $p_s(x)$ имеют с физической точки зрения более существенное значение. Приведенные выше соображения относительно шумов малой интенсивности $\sigma^2 \ll 1$ показывают, что соответствующие состояния системы могут рассматриваться как продолжение детерминированных стационарных состояний. В пользу такой интерпретации свидетельствует тот факт, что диффузионный процесс X_t становится эргодическим, если плотность вероятности $p_s(x)$ нормируема. Как известно, из эргодичности процесса X_t следует, что произведение $p_s(x)dx$ равно доле времени, которое произвольная траектория диффузионного процесса проводит в бесконечно малой окрестности точки x . Следовательно, максимумы плотности вероятности $p_s(x)$ являются

состояниями, в окрестности которых система проводит относительно много времени. Именно эти состояния и наблюдаются преимущественно при проведении экспериментов или «полевых исследований». По аналогии с наглядной картиной движения частицы по «горному ландшафту», задаваемому потенциалом, максимумы плотности вероятности $p_s(x)$ соответствуют «долинам» потенциала. Минимумы плотности вероятности $p_s(x)$ — это состояния, которые системы покидают весьма быстро. Они соответствуют «вершинам» потенциала. Мы можем ввести «вероятностный» потенциал, записав стационарную плотность вероятности в виде

$$p_s(x) = N \exp[-2\mathcal{V}(x)/\sigma^2], \quad (6.34)$$

где

$$\mathcal{V}(x) = - \left[\int^x \frac{\dot{f}(z)}{g^2(z)} dz - \nu \frac{\sigma^2}{2} \ln g(x) \right]. \quad (6.35)$$

В случае аддитивного внешнего шума вероятностный потенциал $\mathcal{V}(x)$ и детерминированный потенциал $V_d(x)$ совпадают с точностью до несущественной постоянной. При этом экстремумы плотности вероятности в точности соответствуют долинам и вершинам ландшафта, задаваемого детерминированным потенциалом. Приведенные выше соображения позволяют обосновать, почему мы отождествляем экстремумы стационарной плотности вероятности с макроскопическими стационарными состояниями системы. Максимумы соответствуют устойчивым стационарным состояниям, минимумы — неустойчивым стационарным состояниям. Подчеркнем, что подобное отождествление экстремумов с стационарными состояниями «законно» лишь при условии, если поток вероятности J_s в стационарном состоянии обращается в нуль. Но как уже отмечалось выше, в рассматриваемых нами системах (а для приложений, как правило, важны только такие системы) встречаются границы, поток вероятности через которые равен нулю. Следовательно, J_s действительно тождественно равен нулю. Все это говорит о том, что проводимое нами отождествление экстремумов стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ с макроскопическими стационарными состояниями имеет под собой прочную основу. Как и в случае равновесных переходов и неравновесных переходов с внутренними флуктуациями, экстремумы плотности вероятности соответствуют фазам системы. Действительно, если стационарная плотность вероятности имеет только один максимум, то система флуктуирует относительно одного макроскопического состояния, т. е. существует в одной фазе. Если же стационарная плотность вероятности имеет два или более максимума, то система при одних и тех же внешних условиях может находиться в двух фазах. Вследствие

того, что внешний шум, вообще говоря, не является макроскопически малым, как внутренние флуктуации, между равновесными переходами и неравновесными переходами с внешними флуктуациями имеются кое-какие количественные различия. В случае внешнего шума картина менее четкая, хотя качественно она остается такой же, как и в случае внутренних флуктуаций. Пики, соответствующие фазам системы, шире почти дельтообразных пиков в случае внутренних флуктуаций. Несмотря на уширение пиков, фазы экспериментально наблюдаемы. Система переходит из одной фазы в другую быстрее, чем под действием внутренних флуктуаций.

Прежде чем переходить дальше, подведем краткий итог и перечислим наиболее существенные выводы из всего, что было сказано выше.

1) Фазовый переход происходит в том случае, когда качественно изменяется вид функциональной зависимости случайной величины, описывающей стационарное состояние системы.

2) Это качественное изменение наиболее непосредственно отражается в экстремумах стационарной плотности вероятности, за исключением того случая, когда переход обусловлен характером границы (разд. 6.4).

3) Физический смысл экстремумов не исчерпывается тем, что они являются наиболее подходящими индикаторами перехода: помимо этого, экстремумы соответствуют макроскопическим фазам системы. Экстремумы служат параметром порядка перехода.

Экстремумы стационарной плотности вероятности нетрудно найти из соотношения

$$[h(x_m) + \lambda g(x_m)] - v \frac{\sigma^2}{2} g(x_m) g'(x_m) = 0. \quad (6.36)$$

Это основное уравнение для анализа воздействия быстрого внешнего шума на стационарное поведение макроскопических нелинейных систем. Прежде чем переходить к обсуждению деталей, сделаем замечание по поводу различий между интерпретациями Ито и Стратоновича данного СДУ, описывающего систему. Если стационарная плотность вероятности существует в обоих вариантах (выше мы исходили из такого предположения и обсуждали именно его), то в том, что касается экстремумов $p_s(x)$ между интерпретациями Ито и Стратоновича, нет качественных различий, а имеется только количественное различие: фактор 2 в интенсивности белого шума. Основное уравнение (6.36) содержит два члена. Первый член (в квадратных скобках), если его положить равным нулю, соответствует уравнению для детерминированных стационарных состояний (6.23). Второй член описывает влияние внешнего шума. И здесь необходимо

проводить различие между двумя случаями: аддитивным ($g(x)=1$) и мультипликативным ($g(x)\neq 1$) шумом. Как мы уже упоминали, в случае аддитивного шума действие флуктуаций среды не зависит от состояния системы. Следовательно, экстремумы плотности вероятности $p_s(x)$ *всегда* совпадают с детерминированными стационарными состояниями независимо от интенсивности внешнего белого шума. В действительности мы получили более сильный результат: утверждение о том, что вероятностный и детерминированный потенциалы совпадают с точностью до постоянной. Аддитивный внешний шум не изменяет качественно стационарное поведение систем с одной переменной. Он вынуждает частицу колебаться в «долинах» задаваемого потенциалом горного ландшафта, но не влияет на сам потенциал. Следовательно, мы вправе ожидать, что внешний шум будет оказывать на систему дезорганизующее действие, приводя к расплыванию плотности вероятности $p_s(x)$ в окрестности детерминированных стационарных состояний.

Во втором случае — мультипликативного шума — действие флуктуаций среды зависит от состояния системы. Это означает, что не только частица совершает малые колебания в долинах задаваемого потенциала горного ландшафта, но и отдельные участки «местности» случайным образом поднимаются и опускаются. Если величина σ^2 достаточно мала, то корни уравнения (6.36) ни по числу, ни по положению не отличаются от детерминированных стационарных состояний, в чем мы уже убедились с помощью метода быстреего спуска. Внешний шум не достаточно силен для того, чтобы он мог вызвать качественные изменения потенциала: долины остаются долинами, а вершины гор — вершинами. Однако их относительная высота и глубина могут изменяться, и наиболее устойчивое состояние при мультипликативном шуме не обязательно совпадает с самой глубокой потенциальной ямой даже при $\sigma^2 \ll 1$, о чем уже говорилось выше. Но если интенсивность σ^2 шума возрастает, то рано или поздно наступает момент, когда второй член в уравнении (6.36) перестает быть пренебрежимо малым. Действительно, если интенсивность σ^2 шума достаточно велика, то экстремумы плотности вероятности $p_s(x)$ и *по числу, и по положению* могут существенно отличаться от детерминированного стационарного состояния, если $g(x)$ обладает надлежащей нелинейностью, например $f(x)=h(x)+\lambda g(x)$ — многочлен степени n , а $g'(x)g(x)$ — многочлен степени m , большей, чем n . То же утверждение можно сформулировать иначе: если интенсивность σ^2 превосходит некоторое пороговое значение, функциональная зависимость плотности вероятности $p_s(x)$, т. е. случайной величины, описывающей стационарное поведение системы, может резко измениться: происходит переход. В примере с горным ландшафтом, задавае-

мым потенциалом, мультипликативный шум может привести к образованию новых ям. Это означает, что помимо дезорганизующего действия, которое оказывает на систему и аддитивный шум, мультипликативный шум может приводить к возникновению новых состояний. Он может индуцировать новые неравновесные фазовые переходы, не предсказуемые в рамках обычного феноменологического описания. Эти переходы соответствуют ситуациям, в которых система более не приспосабливает свое макроскопическое поведение к средним свойствам среды, а реагирует на изменения среды более определенным и активным образом. Случайная величина, определяющая стационарное состояние системы, качественно весьма отличается от (вырожденной) случайной величины, соответствующей детерминированному состоянию. Так как этот новый класс неравновесных фазовых переходов обусловлен исключительно внешним шумом, мы будем называть их фазовыми переходами, индуцированными шумом, или, более кратко, *переходами, индуцированными шумом*. В этой и в последующих главах мы выясним специфические особенности таких переходов, исследуем, к каким последствиям они приводят в физико-химических и биологических системах, выйдем за рамки идеализации «белый шум» и проанализируем динамические свойства переходов, индуцированных шумом.

6.4. Система Ферхюльста в среде с белым шумом

Понятие переходов, индуцированных шумом, было введено на модели Ферхюльста [6.7], и, прежде чем переходить к изучению таких переходов на конкретных примерах, естественно сначала рассмотреть простейшую, хотя и нетривиальную систему.

Модель Ферхюльста первоначально предназначалась для описания роста биологической популяции, но со временем обнаружилось, что соответствующее модели феноменологическое уравнение

$$\dot{X} = \lambda X - X^2 \quad (6.37)$$

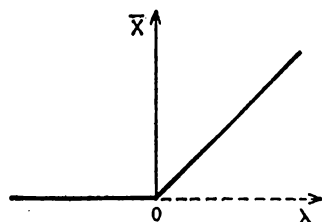
встречается во многих весьма различных областях. Для простоты и конкретности мы будем придерживаться стандартной интерпретации уравнения (6.37). Согласно ей, величина X характеризует численность биологической популяции, и ее физически приемлемое пространство состояний соответствует интервалу $[0, \infty)$. Мальтусовский параметр роста λ есть не что иное, как разность между рождаемостью и смертностью в популяции. Второй член — самоограничительный. Он выражает ограниченность ресурсов популяции (например, имеющийся на территории, за-

нимаемой популяцией, запас пищи сдерживает в остальном неограниченный рост популяции в детерминированной постоянной среде). Решение уравнения (6.37) имеет вид

$$X(t) = X(0) e^{\lambda t} \{1 + X(0) [(e^{\lambda t} - 1)/\lambda]\}^{-1}.$$

При $\lambda < 0$ уравнение (6.37) допускает только одно стационарное решение $\bar{x} = 0$, которое устойчиво. При $\lambda = 0$ это решение становится неустойчивым и претерпевает бифуркацию: от него отделяется новая ветвь стационарных состояний $\bar{x} = \lambda$. Новая ветвь отделяется от старой непрерывным, но недифференцируемым образом. Мы говорим поэтому, что в $\lambda = 0$ система претерпевает фазовый переход второго рода (рис. 6.1).

Рис. 6.1. Бифуркационная диаграмма физически приемлемых стационарных состояний \bar{x} в модели Ферхюльста. Сплошной линией показаны устойчивые состояния, штриховой — неустойчивые состояния.



В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда флуктуации среды протекают быстро по сравнению с величиной $\tau_{\text{макро}} = \lambda^{-1}$, определяющей макроскопический временной масштаб эволюции. Изменения в состоянии среды воздействуют на систему через внешний параметр λ . Действуя в духе гл. 1 и 3, мы предполагаем, что параметр λ можно представить в виде $\lambda_t = \lambda + \sigma \xi_t$, где λ — среднее значение, ξ_t — гауссовский белый шум, а σ характеризует интенсивность внешнего шума. Тем самым уравнение (6.37) заменяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^2) dt + \sigma X_t dW_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) dW_t. \quad (6.38)$$

Как было показано в гл. 5, выбор надлежащего диффузионного процесса для системы (6.38), т. е. процесса, соответствующего интерпретации Ито или Стратоновича СДУ (6.38), производится в зависимости от конкретной ситуации, которую требуется промоделировать. Мы будем в равной мере придерживаться обеих интерпретаций. В случае интерпретации Ито уравнение (6.38), соответствующее УФП для плотности вероятности $p(x, t)$ диффузионного процесса, имеет вид

$$\partial_t p(x, t) = -\partial_x [(\lambda x - x^2) p(x, t)] + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} x^2 p(x, t), \quad (6.39)$$

а в случае интерпретации Стратоновича —

$$\partial_t p(x, t) = -\partial_x \left[\left(\lambda_x - x^2 + \frac{\sigma^2}{2} x \right) p(x, t) \right] + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} x^2 p(x, t). \quad (6.40)$$

Как уже говорилось, физическое пространство состояний, которым должен быть ограничен диффузионный процесс, представляет собой неотрицательную вещественную полупрямую. Нетрудно видеть, что 0 и ∞ — внутренние границы процесса, так как $g(0) = 0$ и $f(\infty) = -\infty$. Из выражения (5.89) видно, что эти внутренние границы естественны, если при $\beta > 0$

$$L_1(0) = C \int_0^\beta x^{-(2\lambda/\sigma^2)-2+\nu} \exp(2x/\sigma^2) dx = \infty \quad (6.41)$$

и

$$L_1(\infty) = C \int_0^\infty x^{-(2\lambda/\sigma^2)-2+\nu} \exp(2x/\sigma^2) dx = \infty. \quad (6.42)$$

Условие (6.42) всегда выполняется, т. е. бесконечность является естественной границей при всех значениях λ и σ . Вероятность взрыва даже при $t \rightarrow \infty$ тем самым всегда равна нулю. С нижней границей — нулем — дело обстоит несколько сложнее. Из соотношения (6.41) видно, что нуль — естественная граница, если $\lambda > \sigma^2/2$ в интерпретации Ито и $\lambda > 0$ в интерпретации Стратоновича. В этом случае ни одна из двух внутренних границ не достижима, и поэтому на решение УФП не требуется накладывать какие-либо граничные условия. При $\lambda < 0$ (Стратонович) и $\lambda < \sigma^2/2$ (Ито) получаем

$$L_2(0) = \infty. \quad (6.43)$$

Следовательно, нуль — притягивающая граница¹⁾.

В этом разделе мы рассмотрим стационарное решение $p_s(x)$ УФП (6.39, 40). Оно определяется выражением

$$p_s(x) = N x^{(2\lambda/\sigma^2)-\nu} \exp\left(-\frac{2x}{\sigma^2}\right) \quad \text{при} \quad \begin{cases} \nu = 1 & (\text{Стратонович}) \\ \nu = 2 & (\text{Ито}). \end{cases} \quad (6.44)$$

¹⁾ То, что популяция никогда не достигает нижней (нулевой) границы за конечное время, обусловлено использованием при описании популяции непрерывной случайной величины. Ясно, что если численность популяции падает до исчезающе низкого уровня, то феноменологическое уравнение, основанное на идеализации непрерывности, утрачивает смысл. Указанную трудность можно преодолеть, определив вероятность вымирания популяции как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\varepsilon p(x, t) dx \quad \text{при} \quad 1 \gg \varepsilon > 0.$$

Нетрудно видеть, что величина $p_s(x)$ интегрируема на интервале $[0, \infty)$, т. е. стационарное решение существует в том и только том случае, если

$$2 \frac{\lambda}{\sigma^2} - \nu + 1 > 0,$$

т. е. если $\lambda > 0$ в интерпретации Стратоновича и $\lambda > \sigma^2/2$ в интерпретации Ито. Как и следовало ожидать, это совпадает с условием естественности границы $b_1 = 0$. Норма N определяется выражением

$$N^{-1} = \left[\left(\frac{2}{\sigma^2} \right)^{2(\lambda/\sigma^2) - \nu + 1} \right]^{-1} \Gamma \left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} - \nu + 1 \right). \quad (6.45)$$

Если стационарная плотность вероятности (6.44) не существует, то необходимо иметь в виду, что нуль — не только внутренняя граница, но и стационарная точка: при $x = 0$ перенос и диффузия одновременно обращаются в нуль. Так как нуль — притягивающая точка, вся стационарная «масса» вероятности должна быть сосредоточена в нуле. В терминах плотности вероятности это означает, что

$$p_s(x) = \delta(x) \quad \text{при} \quad \begin{cases} \lambda < 0 & (\text{Стратонович}) \\ \lambda < \sigma^2/2 & (\text{Ито}). \end{cases}$$

Как мы уже объясняли в предыдущем разделе, экстремумы плотности вероятности $p_s(x)$ являются наиболее подходящим индикатором перехода в стационарном поведении системы. Их допустимо отождествить с макроскопическими стационарными состояниями систем, и они являются параметрами порядка для неравновесных фазовых переходов. В модели Ферхюльста экстремумы плотности вероятности $p_s(x)$ совпадают с нулями уравнения

$$\lambda x_m - x_m^2 - \frac{\nu \sigma^2}{2} x_m = 0, \quad (6.46)$$

т. е. с

$$\begin{aligned} x_{m1} &= 0, \\ x_{m2} &= \lambda - \nu \sigma^2/2 \end{aligned} \quad (6.47)$$

(второй корень существует лишь при условии, если $\lambda > \nu \sigma^2/2$). Корень x_{m2} всегда максимум, а x_{m1} — максимум при $0 < \lambda < \nu \sigma^2/2$. Отсюда ясно, что во флуктуирующей среде модель Ферхюльста в отличие от детерминированного случая имеет две

точки перехода. Переход при $\lambda_s^{(1)} = 0$ (Стратонович) или $\lambda_1^{(1)} = \sigma^2/2$ (Ито) обусловлен природой границы в нуле. Другой переход при $\lambda_s^{(2)} = \sigma^2/2$ (Стратонович) или $\lambda_1^{(2)} = \sigma^2$ (Ито) соответствует резкому изменению распределения плотности вероятности, максимум которой приходится на ненулевую численность популяции. Резюмируя сказанное, можно утверждать, что плотность вероятности, общий ход которой представлен на рис. 6.2, характеризуется следующими особенностями.

1) Если $\lambda_s < 0$ ($\lambda_1 < \sigma^2/2$), то стационарная точка нуль устойчива.

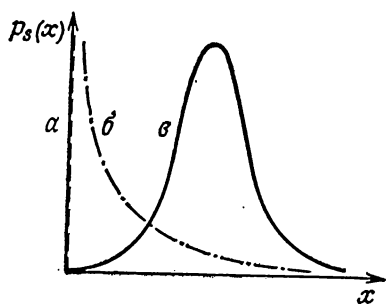


Рис. 6.2. Примерный ход стационарной плотности вероятности в модели Ферхюльста (при различных значениях интенсивности σ^2 внешнего шума). Кривая а: $\lambda_s < 0$ или $\lambda_1 < \sigma^2/2$; кривая б: $0 < \lambda_s < \sigma^2/2$ или $\sigma^2/2 < \lambda_1 < \sigma^2$; кривая в: $\lambda_s > \sigma^2/2$ или $\lambda_1 > \sigma^2$.

2) В точке $\lambda_s = 0$ ($\lambda_1 = \sigma^2/2$) происходит переход, так как при $\lambda_s > 0$ ($\lambda_1 > \sigma^2/2$) стационарная точка $x_0 = 0$ становится неустойчивой и возникает новая подлинно стационарная плотность вероятности.

3) В нуле стационарная плотность вероятности обращается в бесконечность, если $0 < \lambda_s < \sigma^2/2$ ($\sigma^2/2 < \lambda_1 < \sigma^2$), т. е. сохраняет часть свойств δ -функции. Хотя нуль не является более устойчивой стационарной точкой, он все же остается наиболее вероятным значением. В некотором смысле δ -функция начинает расплываться вправо, когда λ минует эту точку перехода.

4) Если параметр λ_s становится больше, чем $\sigma^2/2$ ($\lambda_1 > \sigma^2$), то характер распределения плотности снова резко изменяется. Следовательно, $\lambda_s = \sigma^2/2$ ($\lambda_1 = \sigma^2$) — вторая точка перехода. Из сказанного следует весьма замечательный вывод: переход в системе можно вызвать, поддерживая постоянным среднее состояние среды, но увеличивая или уменьшая интенсивность флуктуаций в среде. Именно такие переходы принадлежат к общему классу явлений, которые мы называем переходами, индуцированными шумом.

Интересно также исследовать, как ведут себя среднее значение и дисперсия численности популяции. В интерпретации Страто-

тоновича получаем

$$E\{X\} = \int_0^{\infty} x p_s(x) dx = \lambda, \quad (6.48)$$

$$E\{X^2\} = \int_0^{\infty} x^2 p_s(x) dx = \lambda^2 + \lambda \sigma^2/2, \quad (6.49)$$

$$E\{\delta X^2\} = E\{(X - E\{X\})^2\} = \lambda \sigma^2/2. \quad (6.50)$$

Хотя характер функциональной зависимости стационарной плотности вероятности от x изменяется при $\lambda_s = \sigma^2/2$ ($\lambda_l = \sigma^2$), это никак не сказывается на поведении среднего значения и дисперсии (результат вполне предвидимый в свете сказанного в разд. 6.3). Зависимость математического ожидания $E\{X\}$ от λ остается в точности такой же, как для устойчивого стационарного решения в детерминированной модели. В отличие от среднего значения и дисперсии экстремумы плотности вероятности позволяют обнаружить только вторую точку перехода, так как первая обусловлена изменением характера границы $b_1 = 0$, которая из притягивающей становится естественной. Зависимость экстремумов от λ можно рассматривать как своего рода модификацию детерминированной бифуркационной диаграммы, сводящую к сдвигу точки перехода из $\lambda = 0$ в $\lambda = \sigma^2/2$. Необходимо подчеркнуть, что второй переход совпадает с точкой, в которой величина $[E\{\delta X^2\}]^{1/2}$ равна математическому ожиданию $E\{X\}$. Это можно интерпретировать следующим образом: при $0 < \lambda < \sigma^2/2$ флуктуации доминируют над автокаталитическим ростом популяции, и вымирание остается наиболее вероятным, но уже не достоверным исходом. Нельзя не заметить, что хотя в действительности численность популяции никогда не падает до нуля, поскольку граница $b_1 = 0$ естественная, тем не менее значительная доля вероятностей «массы» сосредоточена в исчезающе малой окрестности нуля так, что функция распределения $F(x)$ выходит из нуля с вертикальной касательной. Таким образом, задаваемая выражением (6.43) вероятность вымирания популяции отлична от нуля. При $\lambda > \sigma^2/2$ автокаталитический рост «берет верх» над воздействием флуктуаций. В окрестности нуля это проявляется в том, что вероятность вымирания популяции падает до нуля и функция распределения выходит из нуля с горизонтальной касательной.

В среде с белым шумом модель Ферхюльста имеет, как мы видели, две точки перехода, характеризующиеся различными параметрами порядка. Во-первых, в модели Ферхюльста существует точка $\lambda_s = 0$ ($\lambda_l = \sigma^2/2$), в которой становится возможным настоящий рост. Этот переход соответствует изменению от вырожда-

денной случайной величины для стационарного поведения к подлинно случайной величине. Качественное изменение такого рода, обусловленное изменением характера границы $b_1 = 0$, которая из притягивающей становится естественной, естественнее всего отслеживается по моментам, в частности по дисперсии, характеризующей ширину распределения вероятности. Во-вторых, в модели Ферхюльста существует индуцированная шумом точка $\lambda_s = \sigma^2/2$ ($\lambda_1 = \sigma^2$), которая соответствует качественному изменению подлинно случайной величины и не связана с изменением характера границы. Вероятность вымирания популяции в этой точке резко падает до нуля. Второй переход можно интерпретировать как *индуцированный шумом сдвиг* детерминированного перехода — перехода от вымирания к выживанию при $\lambda = 0$. Заметим, что линеаризация уравнения Ферхюльста может описывать лишь первый переход, т. е. изменение характера границы $b_1 = 0$. Связано это с тем, что $b_1 = 0$ — не только граница, но и стационарная точка СДУ. Так как в стационарной точке диффузия обращается в нуль, стационарная точка всегда является внутренней границей. Потеря устойчивости стационарной точкой совпадает с изменением характера границы: та становится естественной границей [5.12]. Характер границы может быть распознан (в обоих случаях) с помощью анализа по линейному приближению. Что же касается второй точки перехода, то обнаружить ее по линеаризации модели Ферхюльста невозможно. Индуцированные шумом переходы, не связанные с изменением в характере границы, являются внутренне нелинейным явлением. Так как внешние флуктуации не макроскопически малы, т. е. не порядка $O(V^{-\alpha})$, состояние системы определяется взаимодействием всей нелинейной динамики и внешнего шума. Качественное изменение в подлинно случайной величине, описывающей стационарное поведение системы, включает в себя нелинейные эффекты и требует нелинейного подхода.

Индуцированный шумом переход приведенного выше типа, а именно сдвиг перехода, уже существующего на обычных детерминированных бифуркационных диаграммах, характеризуется тем, что может происходить при произвольно малых значениях интенсивности шума, если система достаточно близка к детерминированной точке потери устойчивости. То, что в действительности происходит не только сдвиг детерминированного перехода, а его распадение на два, обусловлено специфической особенностью модели Ферхюльста, а именно совпадением одной из границ (нулевой) при всех значениях λ и σ^2 со стационарной точкой СДУ. Нетрудно предсказать, что индуцированные шумом переходы типа сдвига должны быть весьма распространенным явлением в окрестности тех точек, в которых теряют устойчивость системы, подверженные действию мультипликативного бе-

лого шума. Такого рода переход, индуцированный шумом, представляет интерес, поскольку на нем с особой наглядностью видно, что знание одного лишь среднего состояния среды недостаточно для предсказания макроскопического поведения системы. Однако внешний шум, как мы сейчас покажем, может приводить к еще более глубоким изменениям в макроскопическом поведении нелинейных систем.

6.5. Чисто индуцированный шумом переход: критическая точка, индуцированная шумом, в модели генного отбора

6.5.1. Модель

Наиболее ярким примером качественного изменения макроскопических свойств под воздействием внешнего шума был бы такой, в котором индуцированный шумом переход происходит в системе, не способной претерпевать переходы в детерминированных условиях. Для того чтобы продемонстрировать чисто индуцированный шумом переход и обсудить его свойства, мы воспользуемся в этом разделе одной из простейших моделей, обладающих чисто индуцированными шумом переходами. Выбранная нами модель соответствует детерминированному феноменологическому уравнению

$$\dot{X} = \alpha - X + \lambda X(1 - X), \quad X \in [0, 1], \quad (6.51)$$

где X — параметр состояния, λ — параметр, характеризующий среду. Хотя первоначально эта модель была введена из чисто теоретических соображений Арнольдом, Хорстхемке и Лефевром [6.8], она не имеет искусственного характера и получает весьма реалистические интерпретации, в частности в области популяционной генетики. Эту интерпретацию и ее довольно сложное обоснование мы отложим до разд. 6.5.4. Условимся в дальнейшем для краткости называть модель (6.51) *генетической моделью*. Она находит приложения и в других областях. Начнем хотя бы с ее химической реализации, которая позволяет продемонстрировать с физико-химической точки зрения некоторые замечательные особенности чисто индуцированных шумом переходов. Рассмотрим следующую схему реакций:



Нетрудно видеть, что общее число частиц X и Y в реакции сохраняется:

$$\tilde{X}(t) + \tilde{Y}(t) = N = \text{const.} \quad (6.54)$$

Используя закон сохранения (6.54) и вводя безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{k_2 A^*}{k_2 A^* + k_4 B^*}, \quad \lambda = \frac{k_3 B + k_4 B^* - k_1 A - k_2 A^*}{k_2 A^* + k_4 B^*}, \quad (6.55)$$

мы без труда обнаруживаем, что временная эволюция доли частиц X от общего числа, т. е. параметра $\bar{X} = \bar{X}/N$, описывается

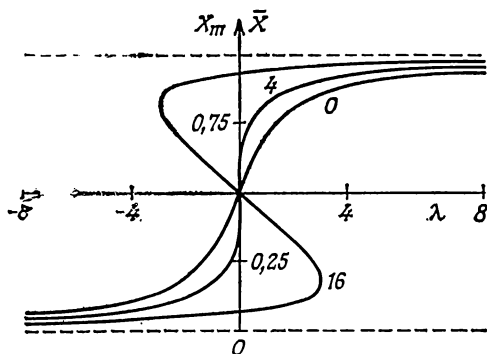


Рис. 6.3. Экстремумы стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ генетической модели как функция от λ при возрастающих значениях σ^2 . Кривая 0 (кривая переключения) соответствует детерминированному случаю. При всех значениях λ она однозначна. При $\sigma^2 = \sigma_c^2 = 4$ (интерпретация Стратоновича) ($x_m = 1/2$, $\lambda_c = 0$) — критическая точка, индуцированная шумом.

уравнением (6.51). Функциональная зависимость мультипликативного параметра λ от управляемых извне переменных A , B , A^* , B^* может быть определена в широких пределах, в принципе от $-\infty$ до $+\infty$.

Положим для простоты $\alpha = 1/2$. Тогда физический смысл имеет стационарное значение \bar{X} , определяемое выражением
$$\bar{X} = [\lambda - 1 + (\lambda^2 + 1)^{1/2}] / (2\lambda).$$

Оно задает взаимно-однозначное отображение интервала $(-\infty, +\infty)$ на интервал $[0, 1]$, в чем нетрудно убедиться, взглянув на рис. 6.3 (кривая 0). Как показывает анализ устойчивости по линейному приближению, в окрестности стационарного значения \bar{X} величина, обратная времени релаксации, $\tau_{\text{макро}}^{-1} \equiv \omega = -(1 + \lambda^2)^{1/2}$ отрицательна при всех λ . Кроме того, так как $\bar{X}(X) < 0$ при $X > \bar{X}$ и $\bar{X}(X) > 0$ при $X < \bar{X}$, эти стационарные

состояния асимптотически глобально устойчивы. С термодинамической точки зрения стоит заметить, что асимптотическая глобальная устойчивость стационарных состояний системы сохраняется при любой интенсивности связей, наложенных средой на систему. Иначе говоря, термодинамическая ветвь является единственной устойчивой ветвью стационарных состояний, возможных в детерминированной среде. При любых, даже очень больших, отклонениях реального значения отношения продукт/субстрат $(A^*B^*)/(AB)$ от его равновесного значения, определяемого законом действующих масс,

$$\left(\frac{A^*B^*}{AB}\right)_{\text{равн}} = \frac{k_1k_3}{k_2k_4} \quad (6.56)$$

со временем система неизменно эволюционирует к состояниям, принадлежащим термодинамической ветви. Система (6.52, 53) обладает желаемым свойством: в постоянной среде в ней не происходит потери устойчивости. Следовательно, любой переход, который может наблюдаться в ней в флуктуирующей среде, является чисто индуцированным шумом эффектом, соответствующим качественному изменению макроскопических свойств.

6.5.2. Критическая точка, индуцированная шумом

Пусть наша система связана со средой, в которой имеется шум, так, что внешний параметр λ становится флуктуирующим параметром. Традиционная интерпретация происхождения этих флуктуаций, принятая в химической литературе, состоит в том, что A и B — флуктуирующие величины, а A^* и B^* имеются в большом избытке, и их флуктуациями можно пренебречь, не внося при этом особых погрешностей. Предположим, что внешние флуктуации очень быстры, и запишем $\lambda_t = \lambda + \sigma \xi_t$. В результате у нас получится СДУ (в котором, не ограничивая общности, мы положили $\alpha = 1/2$)

$$dX_t = [1/2 - X_t + \lambda X_t(1 - X_t)] dt + \sigma X_t(1 - X_t) \circ dW_t, \quad (6.57)$$

которое мы будем интерпретировать в смысле Стратоновича. (Читатель может проверить, что интерпретация Ито уравнения (6.57) приводит качественно к тем же результатам. О различии в 2 раза по интенсивности шума мы уже упоминали.)

Из уравнения (5.75) следует, что СДУ Стратоновича (6.57) эквивалентно СДУ Ито

$$dX_t = \left[\frac{1}{2} - X_t + \lambda X_t(1 - X_t) + \frac{\sigma^2}{2} X_t(1 - X_t)(1 - 2X_t) \right] dt + \sigma X_t(1 - X_t) dW_t. \quad (6.58)$$

Как обычно, границы 0 и 1 пространства состояний являются, как и в модели Ферхюльста, внутренними границами для диффузионного процесса X_t , так как $g(0) = g(1) = 0$. Кроме того, как нетрудно проверить, используя аналитическое условие (5.89), что обе границы естественные (в смысле ГС) во всей области допустимых значений параметров λ и σ . Стационарная плотность вероятности диффузионного процесса, задаваемого СДУ (6.58), имеет вид

$$p_s(x) = Nx^{-1}(1-x)^{-1} \exp \left\{ \frac{2}{\sigma^2} \left[-\frac{1}{2x(1-x)} - \lambda \ln \left(\frac{1-x}{x} \right) \right] \right\} \quad (6.59)$$

и всегда нормируема на $[0, 1]$. Кроме того, при $\lambda = 0$ (в дальнейшем мы рассматриваем именно этот случай)

$$N = \frac{1}{2} \exp(2/\sigma^2) \cdot K_0^{-1}(2/\sigma^2),$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя. Исследуя вопрос о существовании переходов в системах с внешним шумом, мы следуем общей схеме, изложенной в разд. 6.3, т. е. рассматриваем поведение экстремумов стационарной плотности вероятности с тем, чтобы обнаружить любые качественные изменения в стационарном поведении системы. В нашей системе нет никаких переходов, связанных с изменением характера границы. Экстремумы x_m стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ могут быть вычислены по формуле (6.36), из которой получаем

$$\frac{1}{2} - x_m + \lambda x_m(1 - x_m) - \frac{\sigma^2}{2} x_m(1 - x_m)(1 - 2x_m) = 0. \quad (6.60)$$

Заметим, что степень многочлена (6.60) на единицу больше по сравнению со степенью многочлена, определяющего детерминированные стационарные состояния. Для простоты рассмотрим сначала случай $\lambda = 0$. Стационарное решение детерминированного феноменологического уравнения (6.51) есть величина

$$\bar{X} = 1/2. \quad (6.61)$$

В случае быстро флуктуирующей среды получаем из (6.60)

$$x_{m1} = 1/2, \quad x_{m\pm} = (1/2) [1 \pm (1 - 4/\sigma^2)^{1/2}]. \quad (6.62)$$

Таким образом, при $\sigma^2 > 4$ стационарная плотность вероятности имеет три экстремума, из которых $x_{m\pm}$ — максимумы. Детерминированное состояние $x_{m1} = 1/2$ (наиболее вероятное состояние) при $\sigma^2 < 4$ превращается в минимум (рис. 6.4). Возвращаясь к исходной схеме реакции, мы можем придать переходу следующий наглядный смысл (рис. 6.4): при $\sigma^2 \rightarrow 0$ в реакторе имеется одинаковое количество частиц X и Y . Это означает, что если частицы X и Y были бы разного цвета, например желтого и

синего, то реакционная смесь была бы зеленого цвета. Если величина σ^2 конечна, но ниже критического значения, то в реакторе нет в избытке ни частиц X , ни частиц Y , поэтому реакционная смесь имеет зеленоватый оттенок, который то появляется, то вновь исчезает. При закритических значениях дисперсии $\sigma^2 > \sigma_c^2 = 4$ реакционная смесь имеет либо синий, либо желтый цвет, причем пребывает в каждом состоянии одинаково долго. Ниже порога обмен частицами X и Y не сказывается на макроскопическом состоянии реактора. Наоборот, выше порога симметрия обмена частицами X и Y нарушается. Обмен частицами

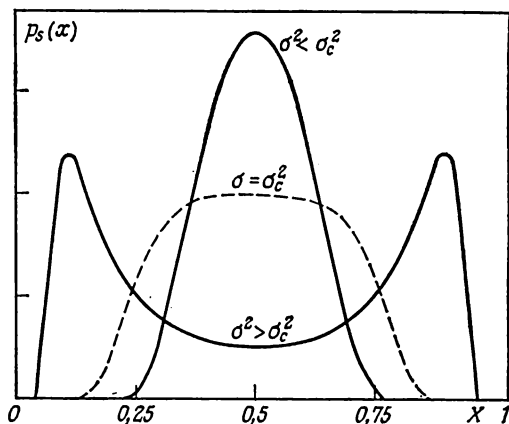


Рис. 6.4. Примерный ход стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ генетической модели при интенсивностях ниже, равной (штриховая линия) и выше критической σ_c^2 .

X и Y соответствует наблюдению двух хорошо различных макроскопических состояний.

В асимметричном случае $\lambda \neq 0$ ситуация качественно остается такой же. Даже его детерминированное стационарное решение лежит вблизи любой из двух границ пространства состояний, плотность вероятности всегда становится бимодальной, как только интенсивность σ^2 внешнего шума превосходит некоторое пороговое значение, возрастающее с увеличением $|\lambda|$. Таким образом, в генетической модели любой переход всегда является чисто шумовым эффектом. При $\lambda = 0$ переход мягкий. При $\sigma^2 = 4$ точка $x_{m1} = 1/2$ есть двойной максимум, а расстояние между x_{m+} и x_{m-} при $\sigma^2 \downarrow \sigma_c^2$ стремится к нулю, как $(\sigma^2 - \sigma_c^2)^{1/2}$. Это свидетельствует о том, что внешний гауссовский белый шум индуцирует критическое поведение в генетической модели с критической точкой в $\lambda = 0$, $x = 1/2$, $\sigma^2 = 4$. Такой вывод подтвер-

ждается поведением стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ в асимметричных случаях при $\lambda \neq 0$. При $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$) пик, соответствующий в детерминированном уравнении стационарному состоянию, движется к 1 (к 0) по мере увеличения σ^2 , и если σ^2 превышает некоторое пороговое значение $\sigma_{th}^2 (|\lambda|) > 4 = = \sigma_c^2$, то на конечном расстоянии от первоначального пика, вблизи другой границы пространства состояний, появляется второй пик. Если величина $\sigma^2 > 4$ постоянна, а параметр λ принимает любые вещественные значения, то ситуация напоминает фазовый переход первого рода, что видно из S-образной формы кривой для экстремумов стационарной плотности $p_s(x)$, например при $\sigma^2 = 16$ на рис. 6.3. Из нее следует, что $\sigma_c^2 =$ действительно является критическим значением дисперсии, при превышении которого возникает гистерезис экстремумов. Все перечисленные выше факты можно кратко резюмировать одним утверждением: экстремумы стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ претерпевают в верхней полуплоскости (λ, σ^2) катастрофу типа сборки с критической точки (острием клюва) в $(0, 4)$ (рис. 6.5).

Разумеется, это качественное изменение в стационарном состоянии системы можно связать с тем, что степень многочлена (6.60), задающего экстремумы плотности вероятности, увеличилась на единицу по сравнению с уравнением для детерминированных стационарных состояний. Такого рода качественные изменения становятся очень наглядными, если ввести стохастический потенциал. Ниже перехода этот потенциал имеет лишь одну долину и поэтому напоминает детерминированный потенциал. Шум оказывает лишь дезорганизующее действие, приводящее к расплыванию стационарной плотности вероятности. В точке перехода $\sigma_c^2 = 4$ дно, как показано на рис. 6.6, поднимается, и образуются две новые потенциальные ямы, так как границы 0 и 1 должны оставаться естественными границами. Это означает, что (в отличие от аддитивного шума) мультипликативный шум не только оказывает дезорганизующее действие, но и может стабилизировать новые макроскопические состояния в системе. Существование стохастического потенциала позволяет применять к анализу фазовых переходов, индуцированных шумом, теорию катастроф [6.9].

В заключение вернемся к химической интерпретации (6.52, 53) модели (6.51), позволяющей оценить оригинальность чисто индуцированного шумом перехода с термодинамической точки зрения. В детерминированных условиях общие термодинамические соображения ([1.14] и разд. 1.2) полностью исключают возможность любого бистабильного явления при равновесии в идеальной химической системе (в генетической модели

это соответствует случаю, когда отношение продукт/субстрат (A^*B^*/AB) совпадает с значением (6.56), вытекающим из закона действующих масс). Следует отметить, что в терминах «средних условий» среды этот результат получить невозможно. Если условие (6.56) заменить условием

$$\frac{E\{A^*\}E\{B^*\}}{E\{A\}E\{B\}} = \frac{k_1k_3}{k_2k_4}$$

на средние концентрации субстратов и продуктов, то при этом не возникнет ограничения, достаточно сильного для того, чтобы

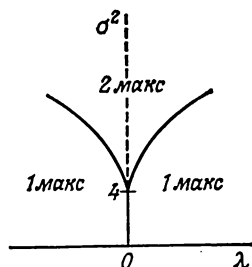
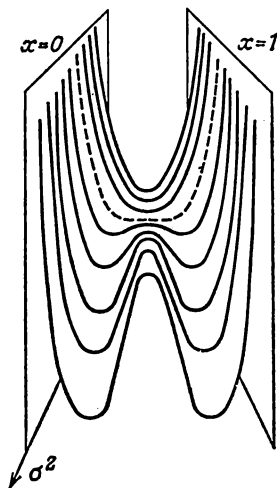


Рис. 6.5. Катастрофа типа сборки.

Рис. 6.6. Примерный ход стохастического потенциала $\mathcal{V}^s(x)$ при возрастающих значениях σ^2 и $\lambda = 0$. При $\sigma_2 = \sigma_c^2$ (штриховая линия) минимум при $x = 1/2$ становится плоским. При дальнейшем увеличении σ^2 этот минимум переходит в максимум, а минимумы $x_{m\pm}$, задаваемые соотношением (6.62), становятся более четко выраженными. Вблизи плоскостей $x = 0$ и $x = 1$ стохастический потенциал $\mathcal{V}^s(x)$ стремится к бесконечности, поскольку эти значения x являются естественными границами для X_t .



воспрепятствовать мультипликативному параметру λ , задаваемому соотношением (6.55), флуктуировать по всему пространству состояний $(-\infty, +\infty)$. Таким образом, даже в среде, удовлетворяющей *условию псевдоравновесия*, возможен индуцированный шумом переход, приводящий к бистабильности. На этом примере мы убеждаемся в правильности того неопровержимого вывода, что при изучении сред с быстрыми и интенсивными флуктуациями необходимо быть готовым к отказу от некоторых традиционных представлений: принято считать, что такие флуктуации вследствие быстроты усредняются и поэтому те физико-химические системы, в которых они действуют, по существу приспосабливаются к постоянному среднему состоянию среды. Если бы такое представление отражало истинное состояние дел,

то из условия псевдоравновесия следовало бы, что система в среднем находится в равновесии и никакие переходы в ней не происходят. Между тем, как показывает весьма наглядно предыдущий пример, в реальной физической ситуации все обстоит иначе.

6.5.3. Критические показатели для критического поведения, индуцированного шумом

Для того чтобы установить тесные связи описанных выше переходов, индуцированных шумом, с более классическими явлениями фазовых переходов, вычислим критические показатели новых переходов. Поскольку система пространственно однородна, воспользуемся теорией среднего поля. Для тех читателей, кто незнаком с классической теорией равновесных фазовых переходов, мы кратко напомним наиболее существенные результаты так называемой теории среднего поля в приложении Б.

Как уже упоминалось в разд. 6.3, параметр порядка для индуцированных шумом переходов соответствует экстремумам стационарной плотности вероятности, т. е. значениям, которыми «помечены» макроскопические фазы системы. Если говорить точно, то в генетической модели мы выбираем за параметр порядка $m = |x_m - \bar{x}|$. Такой выбор сопряжен лишь со сдвигом начала координат на $1/2$. Роль температуры T в данном случае играет интенсивность шума σ^2 . Аналогом приложенного внешнего поля h служит параметр, описывающий среднее состояние среды. В генетической модели это коэффициент отбора λ . Для того чтобы вычислить критический показатель β , мы должны найти зависимость m от σ^2 в окрестности $\sigma_c^2 = 4$. Из соотношения (6.62) получаем

$$m = \frac{1}{2} [(\sigma^2 - 4)/\sigma^2]^{1/2} - (\sigma^2 - \sigma_c^2)^{1/2} \quad \text{при} \quad \sigma^2 \geq \sigma_c^2. \quad (6.63)$$

Следовательно, показатель β принимает свое классическое значение: $\beta = 1/2$. Для того чтобы найти критический показатель δ , необходимо знать, как ведет себя m при малых λ , когда $\sigma^2 = \sigma_c^2$. Из соотношения (6.60) для $m = x_m - 1/2$ следует уравнение

$$-m + \lambda(1/4 - m^2) + \sigma^2 m(1/4 - m^2) = 0. \quad (6.64)$$

Перегруппировав члены, запишем уравнение (6.64) в виде

$$m^3 + \lambda m^2/\sigma^2 + (4 - \sigma^2)m/(4\sigma^2) - \lambda/4\sigma^2 = 0. \quad (6.65)$$

Подставляя $\sigma^2 = \sigma_c^2 = 4$, получаем из (6.65)

$$P \equiv m^3 + \frac{\lambda}{4} m^2 - \frac{\lambda}{16} = m^3 + a_2 m^2 + a_0 = 0.$$

Корни этого кубического уравнения равны соответственно

$$m_1 = (s_1 + s_2) - a_2/3,$$

$$m_{2,3} = -(1/2)(s_1 + s_2) - a_2/3 \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1 - s_2),$$

где

$$s_{1,2} = (2^{-5}\lambda - 3^{-3}2^{-6}\lambda^3 \pm u)^{1/3},$$

$$u = 2^{-5}\lambda(1 - 3^{-3}\lambda^2)^{1/2}.$$

При малых λ ($|\lambda| \ll 1$) величину u можно записать в виде

$$u = 2^{-5}\lambda(1 - 2^{-1}3^{-3}\lambda^2 + \dots).$$

В том же приближении, т. е. с точностью до величин порядка λ^3 ,

$$s_1 = [2^{-4}\lambda - 2^{-5}3^{-3}\lambda^3 + O(\lambda^4)]^{1/3},$$

$$s_2 = [O(\lambda^4)]^{1/3}.$$

С учетом этого мы получаем, наконец,

$$m_1 = [2^{-4}\lambda - 2^{-5}3^{-3}\lambda^3 + O(\lambda^4)]^{1/3} - 2^{-2}3^{-1}\lambda, \quad (6.66)$$

и критический показатель δ также принимает классическое значение: $\delta = 3$.

Для того чтобы вычислить γ , необходимо определить поведение «восприимчивости» $(\partial m / \partial \lambda)_{\lambda=0}(\sigma^2)$ как функцию от σ^2 в окрестности $\sigma_c^2 = 4$. Обозначая $\partial / \partial \lambda$ «крышкой», получаем из уравнения (6.65)

$$3m^2\hat{m} + m^2/\sigma^2 + 2\lambda m\hat{m}/\sigma^2 + (4 - \sigma^2)\hat{m}/(4\sigma^2) - 1/(4\sigma^2) = 0.$$

Полагая $\lambda = 0$ и учитывая, что $m^2 = 1/4 - 1/\sigma^2$ при $\lambda = 0$ и $\sigma^2 > \sigma_c^2$, преобразуем последнее выражение к виду

$$2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sigma^2}\right)\hat{m} + \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{4\sigma^2} = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}(\sigma^2) \equiv \hat{m} = \frac{2}{\sigma^2(\sigma^2 - 4)},$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}(\sigma^2) \sim (\sigma^2 - \sigma_c^2)^{-1}.$$

При $\sigma^2 < \sigma_c^2$ справедливо соотношение

$$\frac{4 - \sigma^2}{4\sigma^2} \hat{m} - \frac{1}{4\sigma^2} = 0,$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial m}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} (\sigma^2) \sim (\sigma_c^2 - \sigma^2)^{-1}.$$

Тем самым доказано, что $\gamma = \gamma' = 1$, т. е. все критические показатели чисто индуцированной шумом критической точки совпадают со своими классическими значениями. Это свидетельствует о том, что равновесные фазовые переходы, неравновесные фазовые переходы и переходы, индуцированные шумом, в действительности тесно связаны между собой. Имеется глубокое единство в фундаментальном явлении, а именно в свойстве быть фазовым переходом, и помимо уточняющих прилагательных «равновесные», «неравновесные» и «индуцированные шумом» никаких других различий между всеми этими разновидностями фазовых переходов нет.

6.5.4. Генный отбор в флуктуирующей среде

Для того чтобы завершить изложение нашей основной модели (6.51) чисто индуцированных шумом переходов, покажем, как ее можно использовать для описания полностью определенного механизма генетического отбора в популяционной динамике. Рассмотрим одну гаплоидную популяцию. Нас будет интересовать некий вполне конкретный локус в хромосоме, который могут занимать две аллели A и a . Число особей в популяции, обладающих генотипами A и a , обозначим соответственно N_A и N_a . Предполагается, что общее число особей в популяции $N = N_A + N_a$ поддерживается постоянным с помощью различных регуляторных механизмов: пищевого ресурса, хищников и т. д. Кроме того, предполагается, что численность популяции N достаточно велика и внутренними статистическими флуктуациями можно пренебречь (при малой численности популяции эти флуктуации становятся существенными).

Мы ограничимся рассмотрением популяций с непрерывающимися поколениями. Пусть Δt — продолжительность жизни одного поколения. Нас интересуют вариации частот $X = N_A/N$ и $(1 - X) = N_a/N$ двух аллелей в популяции от поколения к поколению. Эти частоты изменяются под влиянием двух факторов: естественного отбора, благоприятствующего аллелям, наиболее приспособленным к окружающей среде, и мутаций, преобразующих одну разновидность аллелей в другую. Рассмотрим случай, когда оба процесса протекают медленно и изменения, вызывае-

мые ими в каждом поколении, малы. При таких предположениях эффекты, производимые естественным отбором и мутациями, аддитивны [6.10, с. 150]. Если u_A и u_a — частоты мутаций за одно поколение из аллели A в аллель a и из аллели a в аллель A , то изменение в частоте аллели A определяется выражением

$$\Delta_{\text{мут}}X(t) = -u_A X(t) + u_a [1 - X(t)] = -(u_A + u_a) X(t) + u_a. \quad (6.67)$$

Лучшая приспособленность к окружающей среде одной аллели по сравнению с другой означает, что первая аллель имеет больший репродуктивный успех, т. е. большую скорость роста за поколение w :

$$N_A(t + \Delta t) = w_A N_A(t), \quad N_a(t + \Delta t) = w_a N_a(t), \quad (6.68)$$

где

$$w_A = 1 + s_t/2, \quad w_a = 1 - s_t/2,$$

s_t — коэффициент отбора за одно поколение. Изменение частоты вследствие естественного отбора определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ест. отб}}X_t &= \frac{N_A(t + \Delta t)}{N_A(t + \Delta t) + N_a(t + \Delta t)} - X(t) = \\ &= \frac{(1 + s_t/2) X(t)}{(1 + s_t/2) X(t) + (1 - s_t/2) [1 - X(t)]} - X(t) = \\ &= \frac{s_t X(t) - s_t X^2(t)}{1 - s_t/2 + s_t X(t)}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Общее изменение частоты аллели A при переходе от одного поколения к следующему выражается формулой

$$\begin{aligned} \Delta X(t) &= \Delta_{\text{мут}}X(t) + \Delta_{\text{ест. отб}}X(t) = \\ &= -(u_A + u_a) X(t) + u_a + s_t \frac{X(t) [1 - X(t)]}{1 - s_t/2 + s_t X(t)}, \end{aligned} \quad (6.70)$$

или (при малом коэффициенте отбора за поколение)

$$\begin{aligned} \Delta X(t) &= -(u_A + u_a) X(t) + u_a + \\ &+ s_t X(t) [1 - X(t)] [1 + s_t/2 - s_t X(t) + \dots]. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Если среда подвержена случайным изменениям, то коэффициент отбора за поколение s_t флуктуирует от поколения к поколению. Мы рассматриваем интервалы времени, большие по сравнению с временем жизни одного поколения Δt , но малые по сравнению с временным масштабом любой систематической эволюции среды. Следовательно, величину s_t допустимо моделировать с помощью стационарного случайного процесса. Мы обсудим здесь

простейший случай, когда флуктуации среды в одном поколении независимы от ее флуктуаций в другом поколении. В умеренных зонах такая модель дает хорошее согласие с реально наблюдаемыми климатическими флуктуациями. В принятых предположениях s_t — дискретный белый шум с

$$E\{s_t\} = s = \lambda \Delta t \quad (6.72)$$

и

$$E\{(s_t - s)(s_{t+i\Delta t} - s)\} = C(i\Delta t) = \sigma^2 \Delta t \delta_{i0}. \quad (6.73)$$

В соотношении (6.72) мы ввели скорость отбора λ . Пригодность аллели, как правило, зависит от множества факторов среды, поэтому s_t есть кумулятивный эффект большого числа малых аддитивных вкладов. Имея в виду центральную предельную теорему, мы можем предположить, что s_t — гауссовская величина. Используя скорости мутаций v_A и v_a , т. е. полагая

$$u_A = v_A \Delta t \quad \text{и} \quad u_a = v_a \Delta t, \quad (6.74)$$

запишем соотношение (6.71) в виде

$$\begin{aligned} \Delta X_t = & [-(v_A + v_a)X_t + v_a] \Delta t + \\ & + s_t X_t (1 - X_t) [1 + s_t/2 - s_t X_t + \dots]. \end{aligned} \quad (6.75)$$

В пределе непрерывного времени $\Delta t \rightarrow 0$ марковский процесс X_t сходится к диффузионному процессу. Для того чтобы охарактеризовать его, нам необходимо найти два первых дифференциальных момента. Перенос определяется по формуле

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{\Delta X_t | X_t = x\},$$

а диффузия — по формуле

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{\Delta X_t^2 | X_t = x\}.$$

Из соотношения (6.75) получаем

$$\begin{aligned} E\{\Delta X_t | X_t = x\} = & [-(v_A + v_a)x + v_a] \Delta t + \lambda \Delta t x (1 - x) + \\ & + \sigma^2 \Delta t x (1 - x) \left(\frac{1}{2} - x\right) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (6.76)$$

и

$$E\{\Delta X_t^2 | X_t = x\} = \sigma^2 \Delta t x^2 (1 - x)^2 + o(\Delta t). \quad (6.77)$$

Таким образом, изменения частоты аллели A в гаплоидной популяции, обусловленные процессами мутации и естественного

отбора в стационарной случайной среде, описываются СДУ Ито

$$dX_t = [v_a - (v_A + v_a)X_t + \lambda X_t(1 - X_t) + (\sigma^2/2)X_t(1 - X_t) \times \\ \times (1 - 2X_t)]dt + \sigma X_t(1 - X_t)dW_t. \quad (6.78)$$

Уравнение (6.78) описывает также изменения частоты аллели в диплоидной популяции в отсутствие доминантности, т. е. в том случае, когда свойства гетерозиготы Аа являются средним от соответствующих свойств гомозигот АА и аа [6.10, с. 148, 150]. Если скорости мутаций v_A и v_a равны, то уравнение (6.78) переходит в уравнение (6.57) при простом изменении масштаба времени. Интерпретируя результаты разд. 6.5.2 с генетической точки зрения, мы приходим к несколько неожиданным выводам. Даже если в среднем обе аллели одинаково пригодны ($\lambda = 0$) (в детерминированной среде в этом случае никакого отбора не происходило бы), в случайной среде при условии $\sigma^2 > 4$ следует ожидать преимущественно *лишь одну из аллелей*. Действительно, в случайной среде популяция будет находиться в каком-то одном из наиболее вероятных состояний x_{m+} или $x_{m-} = 1 - x_{m+}$ — экстремумов стационарной плотности вероятности случайного процесса (6.78). Иначе говоря, несмотря на отсутствие систематического давления отбора в ансамбле популяций (при достаточно большой интенсивности флуктуаций среды) будут доминировать сравнительно «бедные» популяции.

Вывод, к которому мы пришли, позволяет по-новому взглянуть на проблему влияния флуктуаций на сохранение полиморфизма протеинов. Считалось [6.11—16] (обзор см. в [6.17]), что случайные временные вариации в интенсивности отбора могут играть важную роль в механизме, лежащем в основе полиморфизма протеинов (Кимура и его единомышленники [6.18] придают первостепенное значение случайному отбору). В приведенной выше генетической модели в силу ее специфических свойств исход качественно очень сильно зависит от того, насколько интенсивно изменяется среда. Если стационарная плотность вероятности $p_s(x)$ допускает лишь один экстремум, т. е. если $\sigma^2 < 4$, то популяция эволюционирует со временем в основном в окрестности состояния $x = 1/2$, в которой полиморфизм действительно доминирует. Наоборот, при больших значениях σ^2 переход из одного максимума в другой т. е. из одного макроскопического стационарного состояния в другое, становится все менее вероятным. «Узкое место» между максимумами с возрастанием σ^2 сужается: при больших σ^2

$$p_s(1/2) = 2 \exp(-2/\sigma^2) K_0^{-1}(2/\sigma^2) \approx -2 \exp(-2/\sigma^2) / \ln(2/\sigma^2),$$

т. е. $p_s(1/2) \rightarrow 0$ при $\sigma^2 \rightarrow 0$. При больших σ^2 переход из одного пика в другой становится весьма редким событием: вероятность

того, что оно произойдет за время жизни десяти или даже ста поколений, ничтожно мала. Тем самым мы приходим к заключению, что возрастающая изменчивость среды способствует (по крайней мере в гаплоидных популяциях и диплоидных популяциях без доминантности) стабилизации одного из генотипов по сравнению с другим. Особенно поразительно, что, когда среднее состояние среды не нейтрально, т. е. $\lambda \neq 0$, подобный эффект может приводить к стабилизации генотипа, который в нормальных условиях считался «непригодным».

6.6. Эволюция во времени уравнений Фоккера — Планка: системы, приводимые к линейным

В предыдущих разделах мы подробно рассмотрели стационарное поведение нелинейных систем, связанных с флуктуирующей средой. В заключительной части этой главы нас будут интересовать переходные режимы таких систем. Иначе говоря, мы исследуем, как системы выходят на стационарное состояние из произвольного начального условия. Эта проблема значительно труднее, чем анализ стационарного поведения. В отличие от стационарного решения явных формул для зависящего от времени решения УФП, вообще говоря, не существует даже для систем с одной переменной.

Тем не менее зависящее от времени точное аналитическое решение СДУ нетрудно получить, когда коэффициенты переноса и диффузии — линейные функции своих аргументов. Поэтому при изучении переходных режимов имеет смысл попытаться выделить те нелинейные СДУ, которые с помощью взаимно однозначной замены переменной преобразуются в линейные СДУ, что позволяет получать для некоторых из систем такого класса точные зависящие решения соответствующего УФК в явном виде.

6.6.1. Преобразование к линейному СДУ

Из теории Гихмана и Скорохода [5.12] следует, что нелинейное СДУ (6.14) преобразуется в линейное СДУ

$$dY_t = (\alpha + \beta Y_t) dt + (\gamma + \vartheta Y_t) dW_t, \quad (6.79)$$

где α , β , γ и ϑ — вещественные постоянные, если

$$\frac{d}{dX} \left[\frac{\frac{d}{dX} [g(X) Z'(X)]}{Z'(X)} \right] = 0, \quad (6.80)$$

$$Z(X) = f(X)/g(X) - \frac{1}{2} g'(X). \quad (6.81)$$

Линеаризующее преобразование переменной имеет вид

$$Y = C \exp[\Phi B(x)], \quad (6.82)$$

где

$$\Phi = - \left\{ \frac{d}{dX} [g(X) Z'(X)] \right\} / Z'(X) \quad (6.83)$$

и

$$B(X) = \int \frac{dZ}{g(Z)}. \quad (6.84)$$

Если $\Phi = 0$, то

$$Y = \gamma B(X) + C, \quad (6.85)$$

где C — произвольная постоянная. Решение линейного СДУ (6.79) имеет вид

$$Y_t = \exp \left[\left(\beta - \frac{\Phi^2}{2} \right) t + \Phi W_t \right] \left\{ Y_0 + \int_0^t \exp \left[- \left(\beta - \frac{\Phi^2}{2} \right) s - \Phi W_s \right] \times \right. \\ \left. \times (\alpha - \Phi \gamma) ds + \int_0^t \exp \left[- \left(\beta - \frac{\Phi^2}{2} \right) s - \Phi W_s \right] \gamma dW_s \right\}. \quad (6.86)$$

Из явного вида решения (6.86) ясно, что для наших целей наиболее удобен случай $\Phi = 0$: в подклассе моделей, удовлетворяющих этому условию, W_t не входит в экспоненциальную функцию. Иначе говоря, при $\Phi = 0$ гауссовский винеровский процесс претерпевает только линейные преобразования. Следовательно, если Y_0 — гауссовская или неслучайная постоянная¹⁾, то Y_t — гауссовский процесс. Так как гауссовский процесс полностью определяется моментами $E\{Y_t\}$ и $E\{(Y_t - \delta Y_t)(Y_s - \delta Y_s)\}$, то с помощью обратного преобразования точные аналитические выражения для плотности вероятности перехода процессов Y_t и X_t могут быть найдены в явном виде.

6.6.2. Примеры: модели Ферхюльста и Хонглера

Нетрудно проверить, что модель Ферхюльста удовлетворяет условию (6.80). Преобразование $y = 1/x$ преобразует исходное уравнение в линейное СДУ²⁾:

$$dY_t = \left[\left(\frac{\nu}{2} \sigma^2 - \lambda \right) Y_t + 1 \right] dt + \sigma Y_t dW_t. \quad (6.87)$$

¹⁾ Напомним, что постоянная Y_0 должна быть независима от винеровского процесса (с. 128).

²⁾ Значение $\nu = 1$ соответствует интерпретации Стратоновича исходного уравнения Ферхюльста, значение $\nu = 2$ — интерпретации Ито.

Решение его имеет вид (см. формулу (6.86))

$$Y_t = \exp \left[\left(\frac{\nu-1}{2} \sigma^2 - \lambda \right) t + \sigma W_t \right] \times \\ \times \left\{ Y_0 + \int_0^t \exp \left[- \left(\frac{\nu-1}{2} \sigma^2 - \lambda \right) s - \sigma W_s \right] ds \right\}. \quad (6.88)$$

Модель Ферхюльста не принадлежит подклассу $\phi = 0$: винеровский процесс входит в экспоненциальную функцию. В результате гауссовский процесс претерпевает нелинейное преобразование, и решение (6.86) перестает быть гауссовским процессом. Это значительно затрудняет вычисление плотности вероятности перехода для Y_t и тем самым для X_t . Иначе говоря, решение (6.88) перестает быть удобным отправным пунктом для получения зависящего от времени решения УФП в модели Ферхюльста. Для того чтобы найти решение, приходится использовать различные методы. К этой проблеме мы вернемся в следующем разделе.

Но вернемся к прототипу системы с чисто индуцированными шумом переходами. Применяя условие (6.80) к генетической модели, мы обнаруживаем, что она не приводима к линейному СДУ. Тем не менее некоторые сведения о зависящих от времени свойствах генетической модели можно почерпнуть, анализируя следующую систему, предложенную Хонглером [6.19]:

$$dU_t = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{th}(2\sqrt{2} U_t) dt + \frac{\sigma}{4} \operatorname{sech}(2\sqrt{2} U_t) \circ dW_t. \quad (6.89)$$

Хотя ни один физико-химический процесс не может быть напрямую поставлен в соответствии с уравнением (6.89), тем не менее модель Хонглера обладает некоторыми особенностями, аналогичными свойствам генетической модели, а самое важное — индуцированной шумом критической точкой. Отмеченная аналогия неудивительна, поскольку модель Хонглера в определенном смысле близка к генетической модели. Разлагая гиперболические функции в окрестности нуля в ряд до членов второго порядка, получаем СДУ

$$dU_t = -U_t dt + \sigma(1/4 - U_t^2) \circ dW_t, \quad (6.90)$$

которое при простом сдвиге по координате $x = 1/2 + u$ переходит в СДУ (6.57) при $\lambda = 0$.

Анализ чисто индуцированной шумом критической точки, обнаруженной в генетической модели, показывает, что этот переход сопровождается только локальным изменением распределения стационарной плотности вероятности в окрестности точки $x = 1/2$. Вне этой окрестности, в частности вблизи естественных границ системы, переход не влияет на плотность вероятности.

Учитывая это, а также совпадение генетической модели и модели Хонглера в окрестности точки $x=1/2$, вряд ли следует удивляться тому, что и в модели Хонглера имеется переход, индуцированный шумом, аналогичного типа. Тем самым обретает правдоподобие утверждение о том, что динамика индуцированного шумом перехода в обеих моделях качественно схожа. Позднее эта гипотеза подтвердится. Уравнение (6.89) обладает приятным свойством: оно удовлетворяет условию (6.80). Преобразование

$$z = \text{sh}(2\sqrt{2}x) \quad (6.91)$$

переводит уравнение (6.79) в уравнение Орнштейна — Уленбека

$$dZ_t = -Z_t dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma dW_t. \quad (6.92)$$

Тем самым доказано, что модель Хонглера принадлежит подклассу $\Phi=0$. Как мы уже знаем, плотность вероятности перехода для процесса (6.92) задается выражением

$$p(z, t | z_0) = \left[2\pi \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2t}) \right]^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(z - z_0 e^{-t})^2}{\frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2t})} \right] \quad (6.93)$$

с начальным условием

$$p(z, 0 | z_0) = \delta(z - z_0).$$

Совершая обратное преобразование к исходной переменной, получаем

$$p(x, t | x_0) = p(z(x), t | z(x_0)) \left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{2\sqrt{2} \text{ch}(2\sqrt{2}x)}{\left[2\pi \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2t}) \right]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{[\text{sh}(2\sqrt{2}x) - \text{sh}(2\sqrt{2}x_0)e^{-t}]^2}{\frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2t})} \right]. \quad (6.94)$$

К формуле (6.94) мы вернемся в разд. 6.8 и подробно обсудим динамические свойства индуцированных шумом переходов.

6.7. Разложение плотности вероятности перехода по собственным функциям

6.7.1. Спектральная теория оператора Фоккера — Планка и задача Штурма — Лиувилля

В предыдущем разделе мы предприняли предварительную попытку собрать всю доступную информацию о переходных режимах нелинейных систем при наличии внешнего шума. Был выделен класс систем, для которых зависящие от времени решения

СДУ могут быть легко получены в явном виде. К этому классу принадлежит модель Ферхюльста, чего нельзя сказать о более интересной генетической модели. Но даже если зависящее от времени решение СДУ известно в явном виде, вычислить зависящее от времени решение УФП, т. е. плотность вероятности перехода, удастся лишь для подкласса моделей, к которому модель Ферхюльста не принадлежит. Таким образом, возникает настоятельная необходимость в более общем подходе к проблеме. Для наших целей достаточно рассмотреть ситуацию, когда стационарная плотность вероятности существует и единственна. Именно с ней мы сталкиваемся, в частности, когда границы либо естественны, либо регулярны с мгновенным отражением (в большинстве приложений встречаются границы именно этих двух типов). Поток вероятности через такие границы равен нулю, т. е.

$$\left[-\frac{\sigma^2}{2} \partial_x g^2(x) p(x, t) + f(x) p(x, t) \right]_{x=b_t} = 0. \quad (6.95)$$

Интересующие нас системы допускают описание с помощью однородного по времени диффузионного процесса, т. е. перенос и диффузия не зависят от времени. Это позволяет воспользоваться для решения УФП методом разделения переменных:

$$p(x, t | x_0) = \psi(x | x_0) \exp(-\mu t). \quad (6.96)$$

Для краткости обозначений мы будем в дальнейшем опускать условие на x_0 , относительно которого рассматривается вероятность. Подставляя (6.96) в УФП, получаем

$$-\mu \psi(x) = -\partial_x f(x) \psi(x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} g^2(x) \psi(x) \quad (6.97)$$

с граничными условиями

$$\left[-\frac{\sigma^2}{2} \partial_x g^2(x) \psi(x) + f(x) \psi(x) \right]_{x=b_t} = 0. \quad (6.98)$$

Ясно, что $\psi(x) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (6.97) при всех значениях μ . Это тривиальное решение. Что же касается нетривиальных решений, то уравнение (6.97), вообще говоря, допускает их не при всех значениях μ . Те значения параметра μ , при которых существует функция $\psi_\mu(x)$, не равная тождественно нулю в интервале (b_1, b_2) и удовлетворяющая уравнению (6.97) с граничным условием (6.98), называются собственными значениями, соответствующие им решения — собственными функциями, а множество всех собственных значений — спектром оператора. Таким образом, для того чтобы найти зависящее от времени решение УФП, мы должны решить задачу на собственные значения. В свою очередь корректная постановка задачи на соб-

ственные значения требует задания пространства допустимых для оператора функций. Решения УФП должны быть плотностями вероятности. Следовательно, при любых t они должны быть нормированы на единицу:

$$\int_{b_1}^{b_2} p(x, t) dx = 1.$$

Для этого функции, на которые действует оператор Фоккера — Планка, должны быть интегрируемы на пространстве состояний, т. е.

$$\int_{b_1}^{b_2} \psi(x) dx < \infty. \quad (6.99)$$

Пространство функций, удовлетворяющих условию (6.99), принято обозначать $L_1(b_1, b_2)$. Именно в этом пространстве мы и будем решать задачу на собственные значения [6.20].

Если бы задача на собственные значения ставилась для обратного уравнения Колмогорова, которое также может служить разумным подходом к исследованию переходных режимов, то подходящим пространством функций было бы пространство функций, непрерывных на интервале $[b_1, b_2]$, обозначаемое $C[a, b]$ [6.20]. Задача на собственные значения для УФП тесно связана с так называемой задачей Штурма — Лиувилля, которой посвящена обширная литература [6.21—24]. Уравнение второго порядка

$$[P(x) Y'(x)]' + Q(x, \mu) Y(x) = 0 \quad (6.100)$$

с граничными условиями

$$\alpha Y(b_1) + \beta Y'(b_1) = 0, \quad \gamma Y(b_2) + \delta Y'(b_2) = 0 \quad (6.101)$$

называется уравнением Штурма — Лиувилля. Коэффициенты $P(x)$ и $Q(x, \mu)$ — функции, непрерывные на интервале $[b_1, b_2]$, функция $P(x)$ положительна, а $Q(x, \mu)$ непрерывно зависит и от параметра μ ; α, β, γ и δ — вещественные постоянные. Применению теории Штурма — Лиувилля к диффузионным процессам посвящена работа [6.25]. Для того чтобы свести задачу на собственные значения для УФП к задаче Штурма — Лиувилля, положим

$$\psi(x) = \varphi(x) p_s(x). \quad (6.102)$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.97) и граничное условие (6.98), получаем

$$\begin{aligned} -\mu \varphi p_s = & -f' \varphi p_s - f p_s' \varphi - f p_s \varphi' + \\ & + \sigma^2 \left[\frac{1}{2} (g^2)'' \varphi p_s + (g^2)' \varphi' p_s + (g^2)' \varphi p_s' + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g^2 \varphi'' p_s + g^2 \varphi' p_s' + \frac{1}{2} g^2 \varphi p_s'' \right] = f p_s \varphi' + \frac{\sigma^2}{2} g^2 p_s \varphi'', \end{aligned} \quad (6.103)$$

так как

$$-\partial_x f p_s + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} g^2 p_s = 0 \quad \text{и} \quad p_s' = \left(-\frac{2g'}{g} + \frac{2}{\sigma^2} \frac{f}{g^2} \right) p_s.$$

Заметим, что (6.103)—обратное уравнение Колмогорова. Следовательно, УФП и ОУК имеют один и тот же спектр, и их собственные функции связаны простым соотношением (6.102). Записав правую часть уравнения (6.103) в виде $(\sigma^2/2) [g^2 p_s \varphi']'$, получаем окончательно:

$$\frac{\sigma^2}{2} [g^2 p_s \varphi']' + \mu p_s \varphi = 0 \quad (6.104)$$

с граничным условием (6.98)

$$g^2 p_s \varphi' |_{x=b_1, b_2} = 0. \quad (6.105)$$

Таким образом, мы свели исходное УФП к задаче Штурма—Лиувилля с

$$P(x) = \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) p_s(x), \quad (6.106)$$

$$Q(x, \mu) = \mu p_s(x), \quad (6.107)$$

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \beta = g^2(b_1) p_s(b_1), \quad \sigma = g^2(b_2) p_s(b_2). \quad (6.108)$$

Для дальнейшего важно еще раз подчеркнуть, что собственные функции уравнения Штурма—Лиувилля (6.104) совпадают с собственными функциями ОУК, но не УФП. Собственные функции УФП получаются при умножении на стационарную плотность вероятности (см. (6.102)). Так как спектры ОУК и УФП совпадают, рассмотрим сначала собственные значения задачи Штурма—Лиувилля. Из классической теории Штурма—Лиувилля [6.24, 25] известно следующее.

1) Если обе границы b_1 и b_2 конечны, то спектр чисто дискретный, т. е. собственные значения образуют счетное дискретное множество.

2) Если одна или обе границы бесконечны, то спектр может быть и непрерывным (включать в себя интервалы, сплошь заполненные собственными значениями).

3) Поскольку мы рассматриваем только такие случаи, в которых существует и единственная стационарная плотность вероятности, спектр всегда содержит по крайней мере одно невырожденное собственное значение: $\mu_0 = 0$. Оно соответствует стационарной плотности вероятности $\psi_0(x) = p_s(x)$, или $\varphi_0(x) = 1$. Собственное значение $\mu_0 = 0$ не вырождено, т. е. с точностью до мультипликативной постоянной при $\mu_0 = 0$ существует лишь одна нетривиальная собственная функция, так как стационарное решение УФП единственно.

4) Все собственные значения вещественны и неотрицательны.

Обратимся теперь к собственным функциям ОУК и УФП. Первые совпадают с собственными функциями уравнения (6.104), т. е. с $\varphi_\mu(x)$, вторые связаны с $\varphi_\mu(x)$ соотношением

$$\psi_\mu(x) = p_s(x) \varphi_\mu(x).$$

Используя результаты классической теории Штурма — Лиувилля, мы можем утверждать следующее. Если обе границы конечны, то собственные функции ОУК взаимно ортогональны с весом $p_s(x)$, т. е.

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(x) \varphi_{\mu_m}(x) \varphi_{\mu_n}(x) dx = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (6.109)$$

Следовательно, собственные функции УФП ортогональны с весом $p_s^{-1}(x)$ ($p_s^{-1}(x) = 1/p_s(x)$):

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s^{-1}(x) \psi_{\mu_m}(x) \psi_{\mu_n}(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (6.110)$$

Собственные функции можно нормировать, т. е. считать, что выполняются равенства

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(x) \varphi_{\mu_m}^2(x) dx = 1 \quad (6.111)$$

и

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s^{-1}(x) \psi_{\mu_m}^2(x) dx = 1. \quad (6.112)$$

Из классической теории Штурма — Лиувилля мы заключаем также, что собственные функции образуют полную систему в пространстве $L_2(b_1, b_2)$ с подходяще выбранным весом. Точный смысл этого утверждения раскрывают следующие две теоремы.

Теорема I. Если $u(x)$ — функция, квадратично-интегрируемая с весом $p_s(x)$ на интервале $[b_1, b_2]$, т. е. если

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(x) u^2(x) dx < \infty, \quad (6.113)$$

то $u(x)$ допускает разложение в ряд по собственным функциям ОУК, т. е.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Phi_{\mu_n}(x), \quad (6.114)$$

где

$$u_n = \int_{b_1}^{b_2} p_s(x) u(x) \Phi_{\mu_n}(x) dx = \int_{b_1}^{b_2} u(x) \Psi_{\mu_n}(x) dx. \quad (6.115)$$

Теорема II. Если $q(x)$ — функция, квадратично-интегрируемая с весом $p_s^{-1}(x)$ на интервале $[b_1, b_2]$, т. е. если

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s^{-1}(x) q^2(x) dx < \infty, \quad (6.116)$$

то $q(x)$ допускает разложение в ряд по собственным функциям УФП, т. е.

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \Psi_{\mu_n}(x), \quad (6.117)$$

где

$$q_n = \int_{b_1}^{b_2} p_s^{-1}(x) q(x) \Psi_{\mu_n}(x) dx = \int_{b_1}^{b_2} q(x) \Phi_{\mu_n}(x) dx. \quad (6.118)$$

Применяя эти результаты к зависящему от времени решению УФП, получаем

$$p(x, t | x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Psi_{\mu_n}(x) e^{-\mu_n t} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{\mu_n}(x_0) \Psi_{\mu_n}(x) e^{-\mu_n t} = \quad (6.119)$$

$$= p_s(x) \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{\mu_n}(x_0) \Phi_{\mu_n}(x) e^{-\mu_n t}, \quad (6.120)$$

если b_1 и b_2 конечны и

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s^{-1}(x) p(x, t | x_0)^2 dx < \infty. \quad (6.121)$$

Мы видим, что задача на собственные значения для УФП действительно тесно связана с задачей Штурма — Лиувилля, о чем уже говорилось выше, но вместе с тем эти задачи *не тождественны*. Уравнение Штурма — Лиувилля обычно рассматривается на надлежащим образом выбранном пространстве квадратично-интегрируемых функций. Что же касается УФП, то его решение, как мы уже подчеркивали выше, должно принадлежать пространству интегрируемых функций. Нет никаких причин, по которым решение УФП должно было бы удовлетворять неравенству (6.121), между тем как любое решение УФП удовлетворяет лишь неравенству

$$\int_{b_1}^{b_2} p(x, t | x_0) dx = 1 < \infty. \quad (6.122)$$

Таким образом, между классической задачей Штурма — Лиувилля и задачей на собственные значения для УФП имеется определенный разрыв. Без ответа остается вопрос, образуют ли собственные функции $\{\psi_{\mu_n} | n=0, 1, 2, \dots\}$ полную систему и в пространстве $L_1[b_1, b_2]$, т. е. допускает ли функция $q(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$\int_{b_1}^{b_2} |q(x)| dx < \infty, \quad (6.123)$$

разложение в ряд по собственным функциям $\psi_{\mu_n}(x)$:

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \psi_{\mu_n}(x). \quad (6.124)$$

(Заметим, что та же проблема возникает и для обратного уравнения, для которого подходящим пространством функций служит $C[b_1, b_2]$, а не L_2 .) Этот разрыв был восполнен Эллиоттом [6.20], получившим в действительности несколько более общий результат.

Теорема Эллиотта. Если ни одна из границ b_1 и b_2 не является естественной в смысле Феллера (см. стр. 146), то спектр чисто дискретный, совпадает со спектром оператора Штурма — Лиувилля, и собственные функции $\psi_{\mu_n}(x)$ обратного уравнения Колмогорова и собственные функции $\psi_{\mu_n}(x)$ уравнения Фоккера — Планка, полученные как собственные функции задачи Штурма — Лиувилля, образуют полную систему соответственно в пространствах $C[b_1, b_2]$ и $L_1(b_1, b_2)$.

Важно подчеркнуть, что теорема Эллиотта не предполагает конечности границ b_1 и b_2 . Требуется лишь, чтобы перенос $f(x)$,

и коэффициент диффузии $g(x)$ были дифференцируемы на интервале (b_1, b_2) и $g(x) > 0$ при $b_1 < x < b_2$. Как уже неоднократно отмечалось, в этой монографии мы рассматриваем только такие диффузионные процессы, которые удовлетворяют этим условиям.

6.7.2. Примеры: процесс Орнштейна — Уленбека и уравнение Ферхюльста

В качестве первого приложения спектральной теории оператора Фоккера — Планка мы рассмотрим броуновское движение в пространстве скоростей, т. е. процесс Орнштейна — Уленбека, задаваемый СДУ

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dW_t. \quad (6.125)$$

Здесь $b_1 = -\infty$, $b_2 = +\infty$, и обе границы, как нетрудно проверить, естественные по Феллеру. Это означает, что процесс Орнштейна — Уленбека не удовлетворяет условиям теоремы Эллиотта. СДУ (6.125) можно привести к безразмерному стандартному виду с помощью преобразования подобия по времени $t' = \lambda t$ и параметру состояния $y = (\sqrt{\lambda}/\sigma)x$. Переобозначая t' через t , получаем СДУ

$$dY_t = -Y_t dt + dW_t \quad (6.126)$$

и связанное с ним УФП

$$\partial_t p(y, t | y_0) = \partial_y y p(y, t | y_0) + \frac{1}{2} \partial_{yy} p(y, t | y_0). \quad (6.127)$$

Преобразование (6.102) приводит к следующей задаче на собственные значения (для ОУК):

$$-y d_y \Phi(y) + \frac{1}{2} \partial_{yy} \Phi(y) = -\mu \Phi(y). \quad (6.128)$$

Решениями этой задачи на собственные значения служат классические многочлены Эрмита

$$\Phi_{\mu_n} = H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y^2}) \quad (6.129)$$

с собственными значениями

$$\mu_n = n \quad (6.130)$$

и условиями ортогональности

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) dy = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \quad (6.131)$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} H_n^2(y) dy = \sqrt{\pi} 2^n n! = C_n^{-1}. \quad (6.132)$$

Таким образом, надлежаще ортонормированные собственные функции имеют вид

$$\varphi_n = \tilde{H}_n(y) = \sqrt{C_n} H_n(y). \quad (6.133)$$

Используя разложение (6.120), получаем спектральное представление для плотности вероятности перехода

$$p(y, t | y_0) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \tilde{H}_n(y_0) \tilde{H}_n(y). \quad (6.134)$$

По теореме Мелера [6.26], ряд в (6.134) суммируется, и мы получаем

$$p(y, t | y_0) = [\pi(1 - e^{-2t})]^{-1/2} \exp\left(-\frac{(y - y_0 e^{-t})^2}{1 - e^{-2t}}\right). \quad (6.135)$$

Выражение (6.135) совпадает с формулой (2.121) или (6.93). Это позволяет нам заключить, что разложение (6.134) является корректным спектральным представлением плотности вероятности перехода $p(y, t | y_0)$ и что собственные значения (6.130) и ортонормированные собственные функции (6.133) дают полное решение задачи на собственные значения для ОУК. Имея в виду масштабные преобразования по времени и параметру пространства состояний, мы можем считать доказанными следующие два утверждения.

1) Спектр процесса Орнштейна — Уленбека (6.125) чисто дискретный:

$$\mu_n = n\lambda. \quad (6.136)$$

Иначе говоря, спектр состоит из всех гармоник с частотой, кратной частоте λ процесса ОУ.

2) Собственные функции УФП имеют вид

$$\psi_n(x) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma^2} x^2\right) \tilde{H}_n\left(\frac{\lambda^{1/2}}{\sigma} x\right). \quad (6.137)$$

Этот пример показывает, что условие теоремы Эллиотта (ни одна из границ b_1 и b_2 не должна быть естественной в смысле Феллера) является достаточным, но не необходимым условием для чисто дискретного спектра.

В качестве второго примера рассмотрим простейшую модель с индуцированными шумом переходами — уравнение Ферхюльста. Как было показано в разд. 6.6.2, СДУ модели Ферхюльста приводится к линейному СДУ ($v = 1$)

$$dY_t = \left[\left(\frac{1}{2} v^2 - \lambda\right) Y_t + 1\right] dt + \sigma Y_t dW_t. \quad (6.138)$$

Производя масштабные преобразования $\tau = \sigma^2 t / 2$ по времени и $z^2 = \sigma^2 y / 2$ по параметру состояния, получаем

$$dZ_t = \left[\left(1 - \frac{2\lambda}{\sigma^2} \right) Z_t + 1 \right] d\tau + \sqrt{2} Z_t dW_\tau. \quad (6.139)$$

Полагая

$$\alpha = \frac{\lambda}{\sigma^2}, \quad (6.140)$$

запишем связанное с (6.139) УФП в виде

$$\partial_\tau p(z, \tau) = -\partial_z [1 - (2\alpha - 1)z] p(z, \tau) + \partial_{zz} z^2 p(z, \tau). \quad (6.141)$$

Воспользуемся теперь преобразованием (6.102) и сведем УФП (6.141) к задаче Штурма — Лиувилля

$$\left[\frac{z^2 z^{-2\alpha-1}}{2} e^{-z^{-1}} \varphi'(z) \right]' + \frac{\mu}{2} z^{-2\alpha-1} e^{-z^{-1}} \varphi(z) = 0 \quad (6.142)$$

с граничными условиями

$$\frac{1}{2} z^2 z^{-2\alpha-1} e^{-z^{-1}} \varphi'(z) \Big|_{z=0, \infty} = 0. \quad (6.143)$$

Как показал Вонг [6.25], решение этой задачи на собственные значения допускает $N + 1$ дискретных собственных значений $(\alpha - 1 \leq N < \alpha)$

$$\mu_n = n(2\alpha - n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (6.144)$$

и имеет непрерывную компоненту

$$\mu = \alpha^2 + \eta^2, \quad \eta \geq 0. \quad (6.145)$$

Следовательно, плотность вероятности перехода представима в виде

$$p(z, \tau | z_0) = z^{-(2\alpha+1)} e^{-z^{-1}} \left[\sum_{n=0}^N A_n e^{-n(2\alpha-n)\tau} \varphi_n(z_0) \varphi_n(z) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(\alpha^2+\eta^2)\tau} A(\eta) \varphi_\eta(z_0) \varphi_\eta(z) d\eta \right]. \quad (6.146)$$

(При выводе разложения (6.146) использованы соотношения ортогональности

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(z) \varphi_m(z) \varphi_n(z) A_n dz = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (6.147)$$

для дискретного спектра и

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(z) \varphi_\eta(z) \varphi_{\eta'}(z) A(\eta) dz = \delta(\eta - \eta') \quad (6.148)$$

для непрерывного спектра.)

Собственные функции $\varphi_n(z)$ дискретного спектра — ортогональные многочлены степени n :

$$\varphi_n(z) = (-1)^n z^{2\alpha+1} e^{z^{-1}} (d^n/dz^n) z^{2n-2\alpha-1} e^{-z^{-1}}. \quad (6.149)$$

Нормирующий множитель A_n определяется выражением

$$A_n = \frac{2(\alpha - n)}{\Gamma(2\alpha + 1 - n)} \cdot \frac{1}{n!}. \quad (6.150)$$

Собственные функции непрерывного спектра имеют вид

$$\varphi_\eta(z) = {}_2F_0(-\alpha - i\eta, -\alpha + i\eta, -z), \quad (6.151)$$

где ${}_2F_0$ — обобщенный гипергеометрический ряд [6.26]. Нормирующий множитель $A(\eta)$ определяется выражением

$$A(\eta) = \frac{\Gamma(-\alpha + i\eta) \Gamma(-\alpha - i\eta)}{\Gamma(i\eta) \Gamma(-i\eta)}. \quad (6.152)$$

Учитывая масштабное преобразование времени $\tau = \sigma^2 t/2$ и параметра состояния $z = \sigma^2 x^{-1}/2$, мы легко получаем собственные значения и собственные функции модели Ферхюльста [6.27]. В частности, спектр состоит из дискретной части

$$\mu_n = n \left(\lambda - n \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (6.153)$$

при $n = 0, 1, \dots, N$, где $(\lambda/\sigma^2) - 1 \leq N < \lambda/\sigma^2$, и непрерывной части

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2}{\sigma^2} + \sigma^2 \eta^2 \right). \quad (6.154)$$

Заметим, что существование непрерывной части спектра не противоречит теореме Эллиотта, так как $b_1 = 0$ — естественная граница в смысле Феллера. Отметим также, что поскольку теорема Эллиотта неприменима, остается пока открытым весьма деликатный вопрос о том, образуют ли собственные функции полную систему в $C_1[0, \infty)$ или функции $\psi_\mu = p_s(x) \varphi_n$ — в $L_1(0, \infty)$. К этой важной проблеме мы еще вернемся в конце этого раздела. Все результаты относительно собственных значений и собственных функций УФП для модели Ферхюльста могут быть получены и другим способом [6.28], а именно: решение задачи на собственные значения можно свести к решению уравнения Уиттекера с соответствующими граничными условиями. Действительно, полагая ¹⁾

$$\psi(x) = x^{(\lambda/\sigma^2) + (1/2)} e^{-(x/\sigma^2)} v\left(\frac{2}{\sigma^2} x\right), \quad (6.155)$$

¹⁾ И в этом случае мы ограничиваемся рассмотрением случая Стратоновича, т. е. $v = 1$.

находим, что функция $v(z)$, где $z = 2x/\sigma^2$, удовлетворяет уравнению Уиттекера

$$v''(z) + \left[\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - \frac{\lambda^2}{\sigma^4} + \frac{1}{4} \right) / z^2 + \left(\frac{\lambda}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \right) / z - \frac{1}{4} \right] v = 0. \quad (6.156)$$

Отбор собственных значений и собственных функций производится с помощью условий сходимости решения при $x \rightarrow \infty$ и нормировки

$$\int_0^\infty p_s^{-1}(x) \psi_n(x)^2 dx = 1$$

для дискретной части спектра и

$$\int_0^\infty p_s^{-1}(x) \psi_\mu(x) \psi_{\mu'}(x) dx = \delta(\mu - \mu')$$

для непрерывной. Получающийся при этом спектр совпадает с задаваемыми соотношениями (6.153, 154). Используя уравнение Уиттекера, мы находим, как и в методе Вонга, что функция $q(x)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty p_s^{-1}(x) q(x) dx < \infty,$$

может быть разложена в ряд по собственным функциям, т. е.

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \psi_{\mu_n}(x) + \int_0^\infty q_\eta \psi_\eta(x) d\eta.$$

Оба метода оставляют без ответа вопрос о том, образуют ли собственные функции обратного уравнения Колмогорова или уравнения Фоккера — Планка полную систему соответственно в $C_1[0, \infty)$ или $L_1(0, \infty)$. Для того чтобы выяснить это, рассмотрим (снова только в рамках интерпретации Стратоновича) функцию

$$\tilde{\psi} = p_s(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda - \sigma^2/2} \right). \quad (6.157)$$

Нетрудно проверить, что при $\lambda > \sigma^2/2$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty |\tilde{\psi}| dx < \infty,$$

т. е. $\tilde{\psi} \in L_1(0, \infty)$. С другой стороны, неравенство

$$\int_0^\infty p_s^{-1}(x) \tilde{\psi}^2 dx = \int_0^\infty p_s(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda - \sigma^2/2} \right)^2 dx < \infty$$

справедливо только при $\lambda > \sigma^2$. Подставляя $\tilde{\psi}$ в УФП, мы получаем (с учетом соотношений (6.102, 103))

$$\begin{aligned} & \{(\lambda + \sigma^2/2)x - x^2\} \partial_x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda - \sigma^2/2} \right) + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_{xx} \times \\ & \times \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda - \sigma^2/2} \right) = -(\lambda + \sigma^2/2)/x + 1 + \sigma^2/x = \\ & = -(\lambda - \sigma^2/2) [1/x - 1/(\lambda - \sigma^2/2)]. \end{aligned}$$

Кроме того, функция $\tilde{\psi}$ ортогональна собственной функции, соответствующей $\mu_0 = 0$, т. е. $p_s(x)$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty p_s^{-1}(x) p_s(x) \tilde{\psi} dx = \int_0^\infty p_s(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda - \sigma^2/2} \right) dx = \\ & = E \left\{ \frac{1}{x} \right\} - \frac{1}{\lambda - \sigma^2/2} = 1/(\lambda - \sigma^2/2) - 1/(\lambda - \sigma^2/2) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым доказано [6.29], что $\tilde{\psi}$, будучи элементом пространства допустимых функций для УФП, а именно $L_1(0, \infty)$, есть собственная функция, соответствующая собственному значению $\mu_1 = \lambda - \sigma^2/2$ до тех пор, пока $\mu_1 > 0$. Однако задача Штурма — Лиувилля или приведение к уравнению Уиттекера приводят к выводу, что $\mu_1 = \lambda - \sigma^2/2$ принадлежит спектру лишь при условии, если $\lambda > \sigma^2$, так как в противном случае функция ψ_1 неквадратично-интегрируема с весом $p_s^{-1}(x)$. Это означает, что задача на собственные значения, которую рассматривали Вонг, Шенцль и Бранд, тесно связана с задачей на собственные значения для УФП, но не тождественна ей. Вонг, Шенцль и Бранд получили соответствующие спектру собственные функции, которые образуют полную систему в пространстве функций, квадратично-интегрируемых с весом $p_s^{-1}(x)$, но не в пространстве $L_1(0, \infty)$. Таким образом, модель Ферхюльста может служить превосходной иллюстрацией значимости теоремы Эллиотта, позволяющей заполнять разрыв между двумя пространствами функций при условии, что ни одна из границ не является естественной в смысле Феллера. Приведенные выше соображения показывают также, что теорема Эллиотта, вообще говоря, не допускает обобщения на случай, когда одна или обе границы естественные в смысле Феллера.

6.8. Критическая динамика переходов, индуцированных шумом

Как равновесные, так и неравновесные фазовые переходы обладают той хорошо известной особенностью, что в окрестности критической точки динамический отклик системы становится замедленным. На более точном языке это означает, что некоторые возмущения обретают большое время жизни, или, что то же, релаксируют за макроскопический масштаб времени, который все более увеличивается. Именно это явление обычно имеют в виду, когда говорят о критическом замедлении. Выше мы уже видели, что индуцированные шумом переходы обладают характерными свойствами, присущими классическим равновесным и неравновесным фазовым переходам. Например, показатели, определяющие поведение величин в окрестности критической точки в генетической модели, совпадают с классическими критическими показателями. Естественно возникает вопрос: насколько далеко влияет внешний шум на динамику системы и, в частности, происходит ли вблизи индуцированных шумом критических точек критическое замедление?

Для того чтобы ответить на него, мы подробно исследуем в этом разделе динамическое поведение генетической модели, но начнем с анализа модели Ферхюльста. Если рассматривать только возмущения, квадратично-интегрируемые с весом $p_s^{-1}(x)$, то плотность вероятности $p(x, t)$ можно записать в виде спектрального представления только по тем собственным значениям и функциям, которые были получены Вонгом, Шенцлем и Брандом. Из соотношений (6.153, 154) следует, что собственные значения УФП могут зависеть от интенсивности шума σ . С увеличением σ собственные значения убывают. Таким образом, более высокий уровень шума приводит к более медленному затуханию возмущения допустимого типа. Следует подчеркнуть, однако, что, как впервые отметили Шенцль и Бранд [6.28], собственные значения не стремятся к нулю при приближении к индуцированному шумом переходу, если начальные возмущения принадлежат пространству $L_2(0, \infty, p_s^{-1})$. В связи с последним замечанием уместно сделать два замечания.

1) Как было показано в разд. 6.4, в точке индуцированного шумом фазового перехода в модели Ферхюльста качественное изменение в стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ соответствует скачку. При увеличении σ^2 значения $p_s(x)$ изменяются следующим образом:

$$p_s(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \sigma^2/2 < \lambda, \\ 2/\sigma^2 = 1/\lambda & \text{при } \sigma^2/2 = \lambda \text{ (двойной экстремум),} \\ \infty & \text{при } \sigma^2/2 > \lambda. \end{cases}$$

Хотя при $\lambda = \sigma^2/2$ точка $x = 0$ соответствует двойному экстремуму, характерная особенность критической точки (скачкообразное изменение значения стационарной плотности вероятности p_s) в большей мере напоминает (жесткие) фазовые переходы первого рода. Такие переходы не сопровождаются критическим замедлением в классических ситуациях как равновесной, так и неравновесной. Из сказанного выше ясно видно, что индуцированный шумом переход в модели Ферхюльста (или в родственных моделях $dX_t = (\lambda X_t - X_t^m) dt + \sigma X_t \circ dW_t$, $m > 2$) не укладывается в жесткие рамки классификации на основе классической схемы как фазового перехода второго рода, для которого характерно критическое замедление, или фазового перехода первого рода, при котором критическое замедление не происходит. Это еще раз подчеркивает, что переход в модели Ферхюльста является чисто шумовым эффектом и не имеет прямого детерминированного аналога. Особенность приведенных выше моделей, обусловившая чисто шумовую природу переходов в них, состоит в том, что стационарная точка и граничная точка совпадают. В результате вместо чистого сдвига детерминированного перехода происходят его *бифуркация и сдвиг*. Вследствие этих специфических свойств модели и точки индуцированного шумом перехода априори не существует причин, по которым в модели Ферхюльста следовало бы ожидать критического замедления. Оно составляет не более одного процента от чисто критической точки.

2) После столь длинного отступления о специфических особенностях модели Ферхюльста обратимся теперь ко второму замечанию относительно зависимости спектра УФП от шума. Следует подчеркнуть, что наблюдаемое в модели Ферхюльста замедление при увеличении интенсивности шума не может считаться общим свойством УФП. Ярким контрпримером тому может служить модель Хонглера: как показано в разд. 6.6.2, эта модель связана взаимно однозначным преобразованием с процессом ОУ при $\lambda = 1$. Следовательно, спектры модели Хонглера и соответствующего ей процесса ОУ совпадают. Иначе говоря, собственные значения УФП в модели Хонглера — целые неотрицательные числа. Такой спектр никак не зависит от интенсивности внешнего шума [6.30].

До сих пор мы рассматривали возмущения, принадлежащие только пространству $L_2(0, \infty, p_s^{-1})$. В этом случае спектр и соответствующая ему система собственных функций совпадают со спектром и собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля. Но, как упоминалось выше, задача Штурма — Лиувилля представляет собой, вообще говоря, лишь суженный вариант задачи на собственные значения для УФП, так как пространством

допустимых функций является $L_1(0, \infty)$, а не $L_2(0, \infty, p_s^{-1})$. Для полной общности начальные возмущения должны быть нормируемы.

Если $p(x, 0) \notin L_2(0, \infty, p_s^{-1})$, но

$$\int_0^\infty p(x, 0) dx < \infty,$$

то необходимо учитывать так называемые расходящиеся моды, например (6.157) [6.29]. Заметим, что эти моды соответствуют собственным функциям φ ОУК, которые неограниченны на $[0, \infty)$ (они расходятся в окрестности нуля). Если бы φ были ограничены, т. е. если бы $\varphi(x) < C$ при $x \in \mathbb{R}^+$, то

$$\int_0^\infty p_s^{-1}(x) \psi^2 dx = \int_0^\infty p_s^{-1}(x) p_s^2(x) \varphi^2(x) dx = \int_0^\infty p_s(x) \varphi^2(x) dx \leq C^2$$

и функции ψ принадлежали бы пространству $L_2(0, \infty, p_s^{-1})$. Таким образом, неограниченность функций φ — необходимый (но не достаточный) признак появления расходящейся моды. Для того чтобы полностью понять значение расходящихся мод, рассмотрим класс моделей

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^m) dt + \sigma X_t \circ dW_t, \quad m \geq 2. \quad (6.158)$$

Соотношение (6.13) позволяет записать стационарную плотность вероятности в виде

$$p_s(x) = N x^{(2\lambda/\sigma^2)-1} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2(m-1)} x^{m-1}\right). \quad (6.159)$$

При $\lambda > 0$ она нормируема, а при $0 < \lambda < \sigma^2/2$ расходится в точке $x = 0$. Таким образом, при $\lambda = \sigma^2/2$ во всех моделях существует та же точка индуцированного шумом перехода, которая имеется в модели Ферхюльста. Для того чтобы исследовать расходящиеся моды, удобно вывести эволюционное уравнение для $E\{X_t^{-m+1}\}$. Полагая $y = x^{-m+1}$, получаем

$$dY_t = (1-m)(\lambda Y_t - 1) dt + \sigma(m-1) Y_t \circ dW_t,$$

или

$$dY_t = (1-m) \left[\left(\lambda + \frac{1-m}{2} \sigma^2 \right) Y_t - 1 \right] dt + \sigma(m-1) Y_t dW_t,$$

поэтому

$$E\{\dot{Y}_t\} = (1-m) \left(\lambda + \frac{1-m}{2} \sigma^2 \right) E\{Y_t\} + m - 1. \quad (6.160)$$

Нетрудно видеть, что зависящее от времени решение уравнения (6.160) имеет вид

$$E\{Y_t\} = E\{Y_0\} \exp\left[(1-m)\left(\lambda + \frac{1-m}{2}\sigma^2\right)t\right] + 1/\left(\lambda + \frac{1-m}{2}\sigma^2\right). \quad (6.161)$$

Когда $\lambda > (m-1)\sigma^2/2$, величина $E\{X_t^{1-m}\}$ остается конечной при $t \rightarrow \infty$. Когда λ приближается к $(m-1)\sigma^2/2$, $E\{X_t^{1-m}\}_{t \rightarrow \infty}$ неограниченно возрастает, и «мода» $E\{X_t^{1-m}\}$ «затухает» все медленнее и медленнее, поскольку время затухания, как видно из (6.161), равно $[\lambda + (1-m)\sigma^2/2]$. Только в модели Ферхюльста с $m=2$ точка «критического замедления» для этой расходящейся моды совпадает с точкой индуцированного шумом перехода $\lambda = \sigma^2/2$ [6.29]. Во всех остальных моделях этот переход происходит при значениях λ , лежащих намного выше точки индуцированного шумом перехода. Критическое замедление в расходящейся моде обусловлено не качественным изменением в случайной величине, представляющей состояние системы, т. е. не качественным изменением в стационарной плотности вероятности, а тем, что расходящиеся моды содержат неограниченные функции. Сильный рост неограниченных функций в этих моделях вблизи нуля превосходит количественные изменения в стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ при изменении σ^2 и приводит к расходимости стационарного значения математического ожидания при уровне шума, вообще говоря, ниже точки перехода. Именно этой расходимостью, а не явлениями перехода в системе обусловлено «критическое замедление» для расходящихся мод. Отсюда следует непреложный вывод: моды, содержащие неограниченные функции, не должны использоваться при решении вопроса о том, существует ли в данной системе критическое замедление или не существует.

Влияние интенсивности внешнего шума на динамическое поведение модифицированной модели Ферхюльста ($m=3$) также было исследовано с помощью корреляционной функции стационарного состояния [6.31]. Для временной зависимости моментов с помощью метода вложения [6.32—34] были получены точные аналитические выражения. Оказалось, что повышение уровня шума приводит к снижению скорости затухания, но ни в корреляционной функции, ни в моментах в точке индуцированного шумом перехода критического замедления не наблюдалось. Подводя итог, можно сказать, что анализ спектра (включая расходящиеся моды) ограниченных моментов или корреляционной функции не дает никаких указаний относительно индуцированного шумом критического замедления, хотя зависимость динамического поведения от уровня шума, несомненно, имеется.

Этому вряд ли приходится удивляться, если, помимо того что индуцированный шумом переход в модели Ферхюльста не может быть непосредственно отождествлен с критической точкой, мы учтем то, о чем говорилось в разд. 6.3. Как подчеркивалось там, состояние системы описывается случайной переменной X_t . Именно с этой фундаментальной величиной, а не с моментами, даже не всегда характеризующими случайную величину, необходимо иметь дело. Распространенное мнение о том, будто моменты полностью характеризуют случайную величину, восходит к анализу систем с внутренними флуктуациями, которые макроскопически малы. Некритическое распространение понятий, развитых для описания малых ситуаций, на ситуации с внешним шумом чревато опасностью и препятствует подлинному пониманию всего круга явлений, связанных с внешним шумом. Если в системе имеются флуктуации, то единственным надежным отправным пунктом служит то тривиальное обстоятельство, что состояние системы описывается случайной величиной. В разд. 6.3 мы показали, что стационарный случай удается строго обосновать, опираясь на этот твердо установленный факт. Переход происходит при условии, если случайная величина — индикатор состояния системы, а не какая-то производная от нее величина (например, моменты) претерпевает качественное изменение. Это качественное изменение функциональной зависимости для отображения, действующего из пространства элементарных событий в пространство состояний, в силу принятого нами соглашения (2.15) эквивалентно качественному изменению в распределении вероятности. Как лучше отследить такое качественное изменение — вопрос, представляющий несомненный практический интерес. В разд. 6.3 мы показали, что по аналогии с детерминированным случаем это лучше всего делать, исследуя поведение экстремумов стационарной плотности вероятности $p_s(x)$. (Единственным исключением является переход от вырожденной к подлинно случайной величине, при котором в качестве наиболее подходящего параметра выступает дисперсия. Мы видели также, что экстремумы имеют особый физический смысл. Их можно отождествить с макроскопическими фазами системы и использовать для задания параметра порядка перехода (как было показано в разд. 6.5). Короче говоря, для того чтобы установить, наблюдается ли критическое замедление в индуцированных шумом критических точках, нам необходимо исследовать динамику случайной величины X_t , т. е. релаксацию одной функциональной зависимости к другой. По причинам, подробно изложенным в разд. 6.3 и повторенным выше, это удобнее всего делать, прослеживая динамику экстремумов. Неудивительно поэтому, что, как будет показано ниже, критическое замедление

является характерной, особенностью чисто индуцированных шумом критических точек.

Для большей ясности мы сначала продемонстрируем это явление на точно решаемой модели Хонглера. Из соотношения (6.94) непосредственно видно, что экстремумы плотности вероятности перехода $p(x, t|x_0)$ эволюционируют со временем, как корни уравнения

$$\operatorname{sh}[2\sqrt{2}x_m(t)] - \operatorname{ch}^2[2\sqrt{2}x_m(t)] \times \\ \times \{\operatorname{sh}[2\sqrt{2}x_m(t)] - e^{-t} \operatorname{sh}(2\sqrt{2}x_0)\} \frac{4}{\sigma^2} (1 - e^{-2t})^{-1} = 0. \quad (6.162)$$

Система Хонглера симметрична относительно $x=0$. Действительно, так как $f(x)$ — нечетная функция, $g(x)$ — четная функция, стационарная плотность вероятности $p_s(x)$ симметрична относительно $x=0$. Во избежание всяких ложных переходных эффектов мы начнем поэтому с распределения, симметричного относительно детерминированного стационарного состояния. Выберем для простоты (не ограничивая общности) δ -образный пик, сосредоточенный в точке $x=0$.

Левая часть уравнения (6.162) разлагается на два множителя, приводящие к условиям

$$\operatorname{sh}(2\sqrt{2}x_m(t)) = 0. \quad (6.163)$$

и

$$\operatorname{ch}^2[2\sqrt{2}x_m(t)] = \frac{\sigma^2}{4} (1 - e^{-2t}). \quad (6.164)$$

Из условия (6.163) мы заключаем, что $x_m(t) = 0$ всегда экстремум независимо от интенсивности шума и времени. Левая часть уравнения (6.164) всегда больше или равна единице. Следовательно, условие (6.164) может выполняться только при $t > t_c$, где

$$t_c = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{4}{\sigma^2} \right). \quad (6.165)$$

Как показано на рис. 6.7, t_c — критическое время, за которое пик при $x_m = 0$ становится плоским, т. е. двойным максимумом, а затем расщепляется на два пика с максимумами в точках

$$x_{m2,3} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arcch} \left(\frac{\sigma}{2} \sqrt{1 - e^{-2t}} \right). \quad (6.166)$$

Расщепление первоначально унимодального распределения — индуцированный шумом аналог хорошо известного в теории фазовых переходов первого рода явления разрешения особенностей типа точки возврата. Как видно из формулы (6.165), переход из унимодального режима в бимодальный занимает все больше и

больше времени, т. е. система все дольше остается в «неустойчивом» состоянии $x_m = 0$, когда σ^2 стремится к $\sigma_c^2 = 4$ сверху. Динамическое поведение случайной величины X_t в той мере, в какой оно отражается в динамике экстремумов, т. е. в параметре порядка, претерпевает критическое замедление в окрестности критической точки $\sigma_c^2 = 4$.

Мы ожидаем, что это поведение типично для любой модели с индуцированной шумом критической точкой. В частности, мы

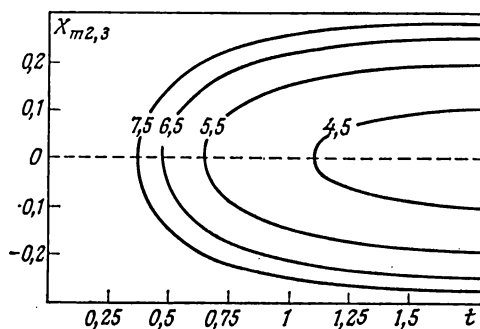


Рис. 6.7. График временной эволюции экстремумов $x_{m2/3}$ в модели Хонглера для указанных значений σ^2 . Когда σ^2 стремится к σ_c^2 сверху, критическое время t_c , за которое первоначальный пик при $x = 0$ распадается на два пика, стремится к бесконечности.

покажем сейчас, что такой же режим существует и в генетической модели, допускающей вполне наглядную физико-химическую или биологическую интерпретацию и обладающую индуцированной шумом критической точкой. В действительности мы докажем более общее утверждение: установим, что для широкого класса систем, которому принадлежит и генетическая модель, динамика случайной величины X_t , отражаемая экстремумами, претерпевает критическое замедление в окрестности индуцированной шумом критической точки. Системы, принадлежащие интересующему нас классу, обладают следующими свойствами.

1) Обе границы пространства состояний являются впускающими в смысле Феллера. То, что этим свойством обладает генетическая модель, будет проверено в связи с другой задачей в гл. 8.

2) Пространство состояний представляет собой либо конечный интервал, либо \mathbb{R} .

3) Перенос $f(x)$ обращается в нуль в середине \bar{x} пространства состояний и антисимметричен относительно \bar{x} , т. е. $f(x) = f(\bar{x} + u) = -f(\bar{x} - u)$.

4) Диффузия $g(x)$ симметрична относительно середины \tilde{x} пространства состояний, т. е. $g(x) = g(\tilde{x} + u) = g(\tilde{x} - u)$ ¹⁾.

Из последних двух условий мы заключаем, что любая плотность вероятности перехода, симметричная относительно середины пространства состояний, навсегда сохранит свою симметрию. Первое условие обеспечивает применимость теоремы Эллиотта. Следовательно, спектр во всем классе моделей чисто дискретный. Собственные значения и соответствующие им собственные функции определяются задачей Штурма—Лиувилля, и собственные функции образуют полную систему в пространстве $L_1(b_1, b_2)$. Из классической теории Штурма—Лиувилля [6.24] известно, что:

собственная функция $\varphi_n(x)$ соответствующая n -му собственному значению, имеет ровно n простых нулей в интервале (b_1, b_2) .

Отсюда следует, что все собственные функции $\varphi_{2m}(x)$ симметричны, а все собственные функции φ_{2m+1} антисимметричны относительно середины \tilde{x} . Это означает, что если система первоначально сосредоточена в середине \tilde{x} , то в разложение плотности вероятности перехода могут входить только четные собственные функции:

$$\rho(x, t | \tilde{x}) = \rho_s \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{2m}(\tilde{x}) \varphi_{2m}(x) e^{-\mu_{2m} t}. \quad (6.167)$$

Так как собственные значения образуют дискретную возрастающую последовательность [6.24]

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty,$$

мы можем записать для поведения системы в течение длительного времени

$$\rho(x, t | \tilde{x}) = \rho_s(x) [1 + \varphi_2(\tilde{x}) \varphi_2(x) e^{-\mu_2 t}]. \quad (6.168)$$

Таким образом, долговременная эволюция экстремумов определяется уравнением

$$\begin{aligned} \partial_x \rho(x, t | \tilde{x})|_{x=x_m(t)} = \\ = \left[\left(-\frac{vg'}{g} + \frac{2f}{\sigma^2 g^2} \right) \rho_s(x) [1 + \varphi_2(\tilde{x}) \varphi_2(x) e^{-\mu_2 t}] + \right. \\ \left. + \rho_s(x) \varphi_2(\tilde{x}) \varphi_2'(x) e^{-\mu_2 t} \right]_{x=x_m(t)} = 0, \end{aligned}$$

¹⁾ Из условий 3 и 4 следует, что индуцированный шумом перенос $\sigma^2 g g' / 2$ обладает такими же свойствами симметрии, как f . Следовательно, те же условия остаются в силе и в интерпретации Стратоновича.

или

$$\left[f(x_m(t)) - \frac{\nu\sigma^2}{2} g(x_m(t)) g'(x_m(t)) \right] [1 + \varphi_2(\tilde{x}) \varphi_2(x_m(t)) e^{-\mu_2 t}] + \\ + \frac{\sigma^2}{2} g^2(x_m(t)) \varphi_2(\tilde{x}) \varphi_2'(x_m(t)) e^{-\mu_2 t} = 0. \quad (6.169)$$

Учитывая, что перенос f антисимметричен относительно середины \tilde{x} , т. е. $f(\tilde{x}) = 0$, а диффузия g и φ_2 симметричны относительно \tilde{x} , т. е. $g'(\tilde{x}) = 0$ и $\varphi_2'(\tilde{x}) = 0$, получаем соотношения

$$f(x) - \frac{\nu\sigma^2}{2} g(x) g'(x) = (x - \tilde{x}) \tilde{k}(x), \\ \varphi_2'(x) = (x - \tilde{x}) \tilde{\varphi}_2'(x), \quad (6.170)$$

определяющие функцию \tilde{k} и $\tilde{\varphi}_2'$. Иначе говоря, свойства симметрии системы приводят к тому, что \tilde{x} остается экстремумом плотности вероятности перехода при всех σ^2 и t . Подставляя выражения (6.170) в (6.169), получаем

$$\tilde{k}(x_m(t)) [1 + \varphi_2(\tilde{x}) \varphi_2(x_m(t)) e^{-\mu_2 t}] + \\ + \frac{\sigma^2}{2} g^2(x_m(t)) \varphi_2(\tilde{x}) \tilde{\varphi}_2'(x_m(t)) e^{-\mu_2 t} = 0. \quad (6.171)$$

Для того, чтобы середина \tilde{x} стала в определенный момент времени $t = t_c$ критической точкой, она должна быть при $t = t_c$ по крайней мере двойным нулем уравнения (6.169). Тогда в силу симметрии модели \tilde{x} будет одновременно и тройным нулем, т. е. истинно критической точкой. Иначе говоря, критическое время t_c определяется по формуле

$$t_c = -\frac{1}{\mu^2} \ln \left\{ \frac{-\tilde{k}(\tilde{x})}{\varphi_2(\tilde{x}) \left[\tilde{k}(\tilde{x}) \varphi_2(\tilde{x}) + \frac{\sigma^2}{2} g^2(\tilde{x}) \tilde{\varphi}_2'(\tilde{x}) \right]} \right\}. \quad (6.172)$$

При приближении к индуцированной шумом критической точке сверху функция $\tilde{k}(x)$ стремится к нулю, так как при $\sigma^2 = \sigma_c^2$ середина \tilde{x}' должна быть тройным нулем уравнения $f - \nu\sigma^2 g g' / 2 = 0$. Таким образом, критическое время t_c неограниченно возрастает, если произведение $g^2(\tilde{x}) \varphi_2(\tilde{x}) \tilde{\varphi}_2'(\tilde{x})$ остается конечным и отличным от нуля при $\sigma^2 \downarrow \sigma_c^2$. Рассмотрим каждый из трех сомножителей в отдельности.

1) $g(x) > 0$ при $x \in (b_1, b_2)$.

2) $\varphi_2(x)$ имеет на (b_1, b_2) два простых нуля и симметрична относительно \tilde{x} , из чего следует, что $\varphi_2(\tilde{x}) \neq 0$ при любых значениях σ^2 .

3) Остается доказать, что третий сомножитель не стремится к нулю при $\sigma^2 \downarrow \sigma_c^2$. Иначе говоря, необходимо убедиться в том, что $\varphi_2(x)$ имеет лишь *простой* экстремум в точке $x = \tilde{x}$. Восполь-

зуемся методом Прюфера для уравнения Штурма — Лиувилля (6.100) [6.24]. Для этого введем своего рода «полярные координаты» ρ , ϑ , полагая

$$y(x, \mu) = \rho(x, \mu) \sin \vartheta(x, \mu) \quad (6.173)$$

и

$$P(x) y'(x, \mu) = \rho(x, \mu) \cos \vartheta(x, \mu), \quad (6.174)$$

где $y(x, \mu)$ — нетривиальное решение уравнения (6.100). Наши «полярные координаты» удовлетворяют системе уравнений

$$\rho'(x, \mu) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{P(x)} - Q(x, \mu) \right] \sin 2\vartheta(x, \mu) \rho(x, \mu), \quad (6.175)$$

$$\vartheta'(x, \mu) = \frac{1}{P(x)} \cos^2 \vartheta(x, \mu) + Q(x, \mu) \sin^2 \vartheta(x, \mu). \quad (6.176)$$

Заметим, что последнее уравнение содержит только «угол» $\vartheta(x, \mu)$. Коль скоро «угол» известен, «радиус» $\rho(x, \mu)$ нетрудно найти из уравнения (6.175):

$$\ln \rho(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{b_1}^x \left[\frac{1}{P(z)} - Q(z, \mu) \right] \sin 2\vartheta(x, \mu) dz. \quad (6.177)$$

Применяя метод Прюфера к нашей задаче, мы работаем с коэффициентами

$$P(x) = \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) p_s(x) \quad \text{и} \quad Q(x, \mu) = \mu p_s(x).$$

Заметим, что «радиус» $\rho(x, \mu)$ ограничен снизу и не может обращаться в нуль. Для собственных функций $\varphi_\mu(x)$ соотношение

$$\varphi'_\mu(x) = \left[\frac{\sigma^2}{2} g^2(x) p_s(x) \right]^{-1} \rho(x, \mu) \cos \vartheta(x, \mu) \quad (6.178)$$

справедливо при $x \in (b_1, b_2)$, так как g и $p_s(x)$ обращаются в нуль только на границах. Кроме того, g и p_s ограничены сверху и не могут обращаться в бесконечность. Из неравенств $g < \infty$, $p_s < \infty$ и $\rho(x, \mu) > 0$ мы заключаем, что

$$\varphi'_\mu(x) = 0$$

в том и только том случае, если

$$\cos \vartheta(x, \mu) = 0. \quad (6.179)$$

Следовательно, $\varphi'_{\mu_i}(\tilde{x}) = 0$ в том и только том случае, если

$$\vartheta(x, \mu_2) = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots \quad (6.180)$$

Учитывая это, нам остается лишь доказать, что \tilde{x} — простой нуль функции $\cos \vartheta(x, \mu^2)$. Соотношения

$$\frac{d}{dx} [\cos \vartheta(x, \mu_2)] = -\sin \vartheta(x, \mu_2) \vartheta'(x, \mu_2) \quad (6.181)$$

и

$$\sin \vartheta(\tilde{x}, \mu_2) = \pm 1 \quad (6.182)$$

позволяют преобразовать выражение для $\vartheta'(x, \mu_2)$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} \vartheta'(x, \mu_2) &= \left[\frac{\sigma^2}{2} g^2(\tilde{x}) p_s(\tilde{x}) \right]^{-1} \cos^2 \vartheta(\tilde{x}, \mu_2) + \\ &+ \mu_2 p_s(\tilde{x}) \sin^2 \vartheta(\tilde{x}, \mu_2) = \mu_2 p_s(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (6.183)$$

Так как $\mu_2 > \mu_1 > 0$ и $p_s(\tilde{x}) > 0$, производная от $\vartheta(x, \mu_2)$ не обращается в нуль в середине \tilde{x} интервала (b_1, b_2) . Отсюда, а также из соотношений (6.182 и 181) следует, что \tilde{x} — простой нуль для $\cos \vartheta(x, \mu_2)$ и $\varphi'_{\mu_2}(x)$. Тем самым доказано, что $\tilde{\varphi}'_2(\tilde{x}) \neq 0$

при всех значениях σ^2 . При стремлении к индуцированной шумом критической точке сверху ($\sigma^2 \downarrow \sigma_c^2$) функция $\tilde{k}(\tilde{x})$ стремится к нулю, а произведение $g^2(\tilde{x}) \varphi_2(\tilde{x}) \tilde{\varphi}'_2(x)$ — к отличному от нуля конечному значению, что приводит к расходимости при $t = t_c$. Это доказывает, что в широком классе систем с (чисто) индуцированным шумом критическими точками, как и в их классических аналогах, существует критическое замедление. Время, за которое происходит «расщепление пика», или «разрешение точки возврата», с уменьшением расстояния до критической точки стремится логарифмически к бесконечности.

Недавно Хонглер [6.35, 36] исследовал один точно разрешимый класс моделей, описывающих движение в ангармоническом притягивающем потенциале. В зависимости от значения детерминированного параметра этот потенциал имеет либо одну, либо две ямы, т. е. модели претерпевают детерминированную бифуркацию. Шум в моделях аддитивный и поэтому не влияет на детерминированный переход. Хонглер показал, что переход от унимодального к бимодальному режиму происходит при $t = t_c$, где t_c логарифмически зависит от детерминированного параметра бифуркации. Эти точные результаты относительно чисто индуцированного шумом разрешения точки возврата и соответствующего детерминированного перехода показывают, что оба явления имеют одни и те же характерные особенности.

Заметим, что существование в приведенном выше классе моделей критического замедления мы установили, опираясь лишь

на некоторые общие свойства, а именно на симметрию относительно критической точки и существование дискретного спектра (или дискретной ветви спектра). По теореме Эллиотта, последнее свойство тесно связано с характером границ. Грубо говоря, границы не должны играть особенно заметную роль, поскольку они не совпадают со стационарными точками системы. Все эти факты делают правдоподобным предположение о том, что критическое замедление принадлежит к весьма общим свойствам индуцированных шумом критических точек. Действительно, индуцированные шумом критические точки представляют собой локальные модификации плотности вероятности, а последняя всегда симметрична (по крайней мере локально) относительно критической точки \bar{x} . Таким образом, полученные выше результаты должны быть применимы к большинству систем, обладающих индуцированными шумом критическими точками.

Глава 7

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ, В ФИЗИКЕ, ХИМИИ И БИОЛОГИИ

Рассмотрение настоящей главы имеет в виду две цели. Во-первых, мы даем обзор экспериментов, проведенных с целью проверки теоретических предсказаний относительно фазовых переходов, индуцированных шумом. Во-вторых, рассматриваем несколько модельных систем, относительно которых твердо установлено, что они удовлетворительно описывают реальные системы. Влияние внешних флуктуаций на эти системы до сих пор не изучалось. Результаты этой главы дают, однако, многочисленные свидетельства в пользу такого исследования. Они показывают, что эксперименты, возможные в этих системах, и соответствующие экспериментальные аспекты фазовых переходов, индуцированных внешним шумом, могут быть предметом качественного и количественного анализа.

7.1. Фазовые переходы, индуцированные шумом, в параметрическом осцилляторе

В гл. 6 были рассмотрены две конкретные и простые модели, иллюстрирующие два типа фазовых переходов, индуцированных шумом: сдвиг детерминистической бифуркационной диаграммы, как это имеет место в модели Ферхюльста, и появление критических точек, отсутствующих при детерминированных внешних условиях, как это происходит в генетической модели. Теоретический формализм, описывающий влияние внешних флуктуаций на нелинейные системы, подобно всякой другой физической теории, был сформулирован в рамках естественных допущений и идеализаций, которые были детально обсуждены. Кратко напомним их.

- 1) Система рассматривается в термодинамическом пределе и является пространственно-однородной, т. е. внутренними флуктуациями можно пренебречь.
- 2) Состояние системы достаточно хорошо описывается одной переменной.
- 3) Время корреляции внешних флуктуаций пренебрежимо

мало, так что для их описания можно использовать приближение белого шума.

Все эти допущения кажутся разумными. Однако они приводят к совершенно удивительным, если не сказать противоречащим интуиции предсказаниям: шум — фактор дезорганизации — может создавать новые макроскопические состояния, если взаимодействие между системой и окружением является мультипликативным. Безусловно, весьма желательно иметь экспериментальные подтверждения этих предсказаний. Следуя духу гл. 6, сконцентрируем внимание на простой экспериментальной ситуации. Подобный подход оправдывается также методологическими соображениями: четкое подтверждение или опровержение существования теоретически предсказанных фазовых переходов, индуцированных шумом, проще всего получить в простых экспериментальных системах. Они должны выбираться, исходя из следующих условий. Соответствующая экспериментальная схема должна быть достаточно простой, а переменные состояния системы и характеристики внешнего шума легко регистрируемы. В этом смысле идеальными объектами представляются электрические контуры. В них может быть реализовано много различных нелинейных режимов, кроме того, они полностью удовлетворяют требованию экспериментальной простоты, а также допущениям 1 и 2. Что касается третьего условия, то оно может быть выполнено при использовании электронных генераторов шума, интенсивность которого постоянна до некоторого значения частоты и быстро спадает до нуля при превышении этого значения. Если это обрезавшее спектр значение частоты намного больше характерных частот системы, то такой шум можно считать белым шумом. Простой способ генерации такого «квазибелого» шума состоит в усилении теплового шума сопротивления. Интенсивность этого шума не изменяется в очень большой области частот. Таким образом, можно сделать вывод, что электрические контуры прекрасно соответствуют целям экспериментальной проверки существования фазовых переходов, индуцированных шумом. Неудивительно поэтому, что именно в этих системах были получены первые экспериментальные свидетельства в пользу существования таких явлений.

Экспериментальное изучение фазовых переходов, индуцированных шумом, было начато Кабасимой и Кавакубо с сотр. [7.1, 2]¹⁾. Предварительно эта группа изучала свойства неравновесных фазовых переходов в электрических контурах. Для исследования влияния внешнего белого шума на поведение элек-

¹⁾ Ранее близкие вопросы рассматривались в статьях [3*, 7*]. — *Прим. ред.*

трического контура Кабасима и др. [7.2] использовали вырожденный параметрический генератор, показанный на рис. 7.1. Его главные элементы — первичная и вторичная катушки, намотанные на две ферритовые тороидальные катушки. Токи в первичной и вторичной катушках равны соответственно I_1 и I_2 . Постоянный ток I_0 в дополнительном контуре служит для сдвига рабочей точки параметрического генератора в ту область, где в связи между магнитными потоками в сердечниках и токами

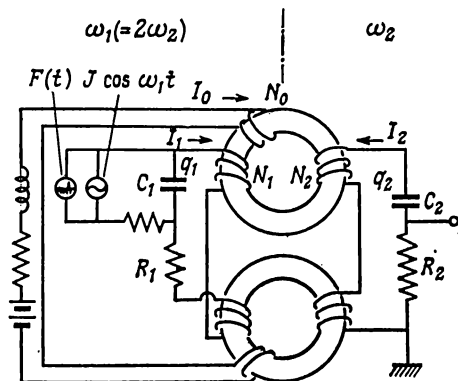


Рис. 7.1. Колебательный электрический контур, использованный Кабасимой с сотр. [7.2]. Внешний шум $F(t)$ возбуждает переменный ток $J \cos \omega_1 t$, подаваемый на первичную обмотку.

начинают сказываться нелинейности второго порядка. Переменный ток $J \cos \omega_1 t$, подаваемый на первичную катушку, служит накачкой, возбуждающей во вторичной обмотке субгармонические колебания на частоте $\omega_2 = \omega_1/2$ (в экспериментах Кабасимы и др. использовалась частота $\omega_1 = 50$ кГц). Кроме тока накачки на первичную обмотку мог подаваться случайный ток ξ_t (на рис. 7.1 он обозначен через $F(t)$). Его интенсивность оставалась постоянной в диапазоне частот от 0,01 до 100 кГц. Переменной, описывающей состояние системы, служила *медленно меняющаяся амплитуда* вторичного тока b . Записывая токи в первичной и вторичной катушках в виде

$$I_1(t) = \dot{a}(t) \sin(\omega_1 t + \phi(t)), \quad (7.1)$$

$$I_2(t) = b(t) \sin(\omega_2 t + \psi(t)), \quad (7.2)$$

Кабасима и др. отметили, что переменные, характеризующие первичный контур, можно адиабатически исключить. Это означает, что они изменяются гораздо быстрее соответствующих переменных вторичной обмотки и поэтому могут быть заменены своими стационарными значениями. Кроме того, при этих усло-

виях во вторичной обмотке происходит захват фазы. Фаза ψ быстро достигает своего стационарного значения 0 или π и далее не изменяется. В результате остается одно уравнение для медленно меняющейся амплитуды $b(t)$ тока $I_2(t)$:

$$\dot{b}(t) = \frac{2\mathfrak{N}}{\gamma_1} (f - f_{th}) b - \frac{2\mathfrak{N}^2}{\gamma_1} b^3, \quad (7.3)^1$$

где \mathfrak{N} — постоянная взаимодействия между двумя контурами, взятая со знаком минус, γ_1 и γ_2 — постоянные затухания в первичной и вторичной обмотках, $f = J/2\omega_1 C_1$ — интенсивность накачки, $f_{th} = \gamma_1 \gamma_2 / 2\mathfrak{N}$. Это уравнение аналогично модели Ферхюльста и отличается от нее лишь показателем степени в ограничивающем нелинейном члене. Это приводит к различиям в формах кривых переключения, но существенно не меняет бифуркационную диаграмму. Подобно модели Ферхюльста, это уравнение предсказывает наличие точки фазового перехода второго рода при $f = f_{th}$. Это видно из стационарного решения, для которого

$$b_1 = 0, \quad (7.4)$$

$$b_2 = \pm \mathfrak{N}^{-1/2} (f - f_{th})^{1/2}. \quad (7.5)$$

Кабасима и др. экспериментально показали, что при отсутствии шума стационарное поведение и динамика системы хорошо соответствуют предсказаниям, основанным на уравнении (7.3). Это говорит о том, что (7.3) адекватно описывает параметрический осциллятор. Экспериментальные значения амплитуды в токе $I_2(t)$ в отсутствие шума показаны светлыми кружками на рис. 7.2. Теоретическое значение задается формулами (7.4, 5) и представимо в виде

$$\bar{I}_2 = c (J - J_{th})^{1/2}. \quad (7.6)$$

Эта функция с соответствующей выбранной константой c показана на рис. 7.2. Видно, что когда амплитуда тока накачки превышает определенное пороговое значение J_{th} , во вторичной обмотке возникает осциллирующий ток. Если же амплитуда тока накачки слишком мала для того, чтобы возбудить субгармонические колебания, ток во вторичной обмотке флуктуирует относительно нулевого уровня. Флуктуации имеют гауссовское распределение везде, за исключением окрестности точки перехода. По мере приближения к порогу снизу дисперсия и время корреляции расходятся как $(J_{th} - J)^{-1}$.

¹⁾ Вывод уравнения (7.3) довольно длинен и для наших целей здесь не требуется (подробные выкладки см. в [7.2]).

Как изменится поведение параметрического осциллятора, если кроме тока накачки на первичный контур подается случайный ток? Как видно из (7.3), взаимодействие между двумя контурами носит мультипликативный характер. Это обусловлено тем, что амплитуда постоянного тока достаточно велика для того, чтобы индуцировать в сердечнике нелинейности второго порядка. Таким образом, необходимое условие фазового перехода, индуцированного шумом, выполнено. Поскольку уравнение (7.3) аналогично уравнению Ферхюльста, можно ожидать и

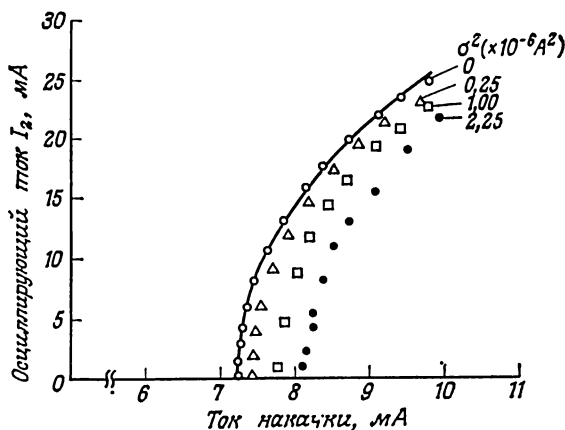


Рис. 7.2. Стационарные значения амплитуды тока I_2 как функции тока накачки при указанных значениях σ^2 . Сплошная кривая $I = 0,499(I - I_{th})^{1/2}$ хорошо соответствует экспериментальным результатам при отсутствии шума (кружки).

качественной аналогии в картинах фазового перехода. Действительно, уравнение (7.3) принадлежит классу обобщенных моделей Ферхюльста, рассмотренных в разд. 6.8 (см. (6.158)):

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^n) dt + \sigma X_t \circ dW_t. \quad (7.7)$$

(Если n нечетно, то модель по-прежнему имеет смысл, если вместо интервала $[0, \infty]$ в качестве пространства состояний выбирается действительная ось $(-\infty, \infty)$. Однако точка $x = 0$ является внутренней границей. Поэтому две полуоси не связаны друг с другом до тех пор, пока не добавляется хотя бы малый аддитивный шум.)

Было показано, что во всех этих моделях происходят качественно аналогичные фазовые переходы: переход в точке $\lambda = 0$, где в системе появляется истинная плотность вероятности, которая, однако, по-прежнему дает наиболее вероятное значение,

равное нулю, и второй переход в точке

$$\lambda = \sigma^2/2, \quad (7.8)$$

где наиболее вероятное состояние становится отличным от нуля. Экспериментальные результаты Кабасимы и др. для случая, когда к току накачки добавляется шумовой ток, полностью согласуются с этими теоретическими предсказаниями. Если флуктуирующий вторичный ток не содержит регулярной осциллирующей

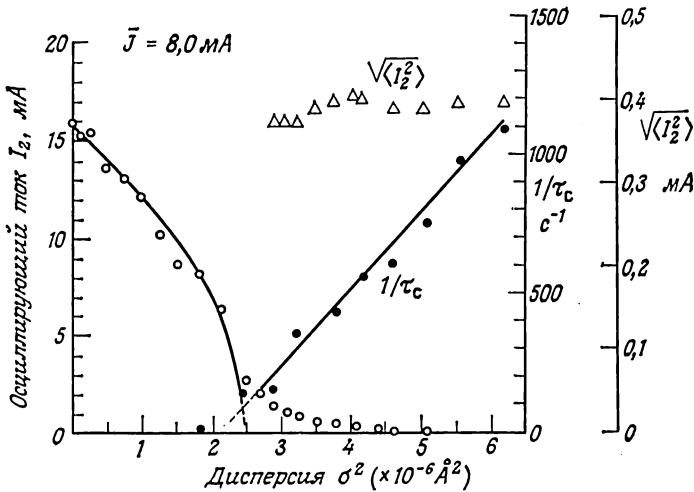


Рис. 7.3. Влияние шума на переход от осцилляторного поведения к неосцилляторному. (Кружки — осциллирующий ток; точки — обратное время корреляции; треугольники — корень квадратный из дисперсии флуктуирующего тока.)

щей компоненты, то максимальное значение его спектра интенсивности достигается в нулевой точке. С другой стороны, если наиболее вероятное состояние относится к току, имеющему осциллирующую компоненту, максимум спектра будет расположен на частоте этих осцилляций. На рис. 7.2 показаны эффективные значения осциллирующего тока, определенные по максимальным значениям спектра интенсивности выходного тока, при различных значениях интенсивности шума. В соответствии с предсказаниями порог появления колебаний сдвинут в сторону более высоких значений амплитуды тока накачки. Действительно, порог растет линейно с ростом σ^2 в полном согласии с (7.8). Если приближаться к критической точке сверху, т. е. уменьшать интенсивность шума от больших значений к этому пороговому значению, то в отличие от нешумового случая расхожимости дис-

персии осциллирующего тока не наблюдается. Время корреляции, однако, растет, как показано на рис. 7.3. Экспериментальные результаты говорят в пользу наличия критического замедления в корреляционной функции в противоречии с теоретическими предсказаниями Шенцле и Брандта [6.28], Грэхема и Шенцле [6.34], Фудзисаки и Гроссмана [6.31], Бреннинга и Баная [6.33], обсуждавшимися в разд. 6.8. В настоящий момент нельзя точно указать причину этого расхождения. Возможно, что уравнение (7.3) хотя и описывает удовлетворительно стационарное поведение в детерминистическом и стохастическом случаях,

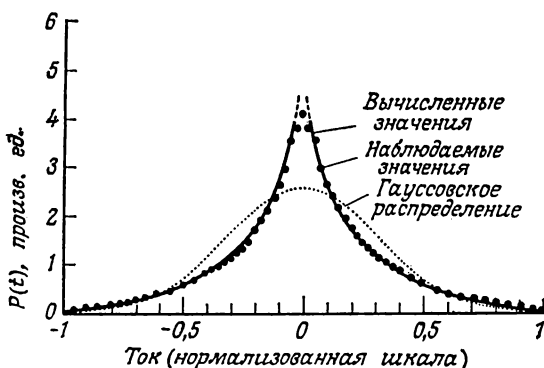


Рис. 7.4. Стационарная плотность вероятности флуктуирующего тока. Экспериментальные значения: $I = 8$ мА, $\sigma^2 = 3,22 \cdot 10^{-6}$ А². Вычисленные значения: $(f - f_{\text{th}})/\Re = 0,245$; $N(\lambda/\sigma^2) = 2,45$.

не может точно отразить некоторые динамические аспекты поведения параметрического осциллятора. Если интенсивность шума превосходит пороговое значение, то колебания во вторичном контуре исчезают и ток становится стохастическим (шумовым). Однако в отличие от допорогового флуктуационного тока в отсутствие внешнего шума этот шумовой ток является негауссовским. Пример стационарной плотности вероятности тока для этого случая показан на рис. 7.4. Для удобства сравнения на этом же рисунке показана также гауссовская плотность распределения с нулевым средним значением и той же самой дисперсией. Непрерывная кривая — это теоретическая плотность вероятности тока во вторичной обмотке, определяемая следующей формулой:

$$p(I) = \int_{-I}^{\infty} \frac{db}{\pi} \frac{p_s(b)}{(b^2 - I^2)^{1/2}}. \quad (7.9)$$

Здесь в соответствии с (6.159)

$$p_s(b) = Nb^{(|2\lambda/\sigma^2|-1)} \exp(-b^2/\sigma^2), \quad (7.10)$$

где $\lambda = (f - f_{th})/\mathfrak{N}$ и σ — интенсивность случайного тока, деленная на постоянную связи \mathfrak{N} . Получить формулу (7.9) для плотности вероятности можно следующим образом. Ток I_2 во вторичном контуре задается формулой

$$I_2 = b_t \sin \omega_2 t, \quad (7.11)$$

где b_t — диффузионный процесс со стационарной плотностью вероятности (7.10). Поскольку второй множитель быстро изменяется во времени, момент времени t можно рассматривать как случайную переменную в пространстве состояний $[-T/4, T/4]$ с однородной плотностью состояний в нем, т. е.

$$p(t) dt = \frac{\omega_2}{\pi} dt \quad \text{при} \quad t \in [-T/4, T/4], \quad (7.12)$$

где T — период колебаний, $T = 2\pi/\omega_2$. Поскольку плотность вероятности тока I_2 симметрична относительно нуля, достаточно определить ее на положительной полуоси. При $I \geq 0$ можно записать

$$p_s(I) = \int_0^\infty p(b_t \sin \omega_2 t = I | b_t = b) p_s(b) db. \quad (7.13)$$

Очевидно, что

$$p(b_t \sin \omega_2 t = I | b_t = b) = 0 \quad \text{при} \quad b < I \quad (7.14)$$

и в качестве нижнего предела в интеграле (7.13) вместо 0 можно взять значение I . Для определения первого множителя в подынтегральной функции надо найти плотность вероятности случайной переменной

$$x = a \sin \omega t, \quad (7.15)$$

где a — постоянная, а t — случайная переменная с плотностью вероятности (7.12) на интервале $[-T/4, T/4]$. Синус является взаимно-однозначной функцией, и, следовательно, вероятность сохраняется при преобразовании (7.15):

$$p(x) dx = p(t) dt. \quad (7.16)$$

Отсюда следует

$$p(x) = p(t(x)) \frac{dt(x)}{dx}, \quad (7.17)$$

где $t(x)$ — функция, обратная (7.15), именно

$$t = \frac{1}{\omega} \arcsin(x/a), \quad x \in [-a, a]. \quad (7.18)$$

Вычисляя непосредственно якобиан, получаем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\omega} (a^2 - x^2)^{-1/2}. \quad (7.19)$$

Таким образом, имеем

$$p(x) = \frac{1}{\pi} (a^2 - x^2)^{-1/2}, \quad (7.20)$$

т. е.

$$p(b_t \sin \omega_2 t = 1 | b_t - b) = \frac{1}{\pi} (b^2 - I^2)^{-1/2} \quad \text{при } b \geq I. \quad (7.21)$$

Отсюда следует формула (7.9).

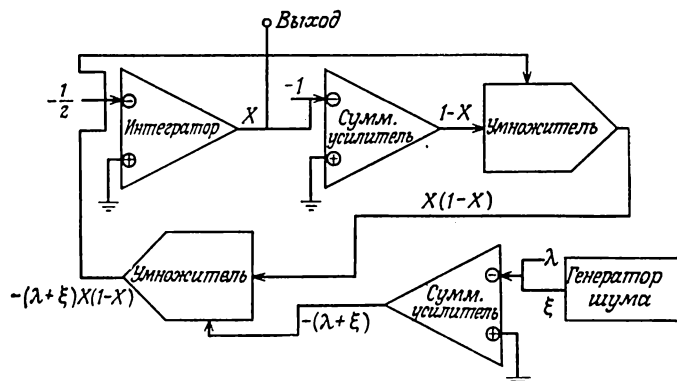


Рис. 7.5. Электрический контур, моделирующий генетическую модель [7.3].

Как можно видеть из рис. 7.4, стационарная плотность вероятности, определенная экспериментально, слегка отличается от теоретической, задаваемой формулой (7.9). Это расхождение легко объясняется наличием аддитивного внешнего шума [6.28]. Резюмируя, можно сказать, что хорошее согласие между экспериментальными и теоретическими результатами для параметрического осциллятора показывает, что фазовые переходы, индуцированные шумом, представляют собой реальное явление, а не просто артефакт, появляющийся как следствие приближения белого шума.

Для экспериментального изучения фазовых переходов второго типа, также индуцированных шумом (типичным их представителем является переход в генетической модели), Кабасима сконструировал электрический контур, состоящий из умножите-

лей и сумматоров [7.3]. Схема этого контура показана на рис. 7.5. На выходе из интегратора имеем

$$X_t = -\omega \int [X_t - 1/2 + (\lambda + \xi_t) X_t (1 - X_t)] dt, \quad (7.22)$$

где характерная частота контура $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$. Флуктуации на входе ξ_t задаются генератором шума и представляют собой гауссовский белый шум, интенсивность которого постоянна вплоть

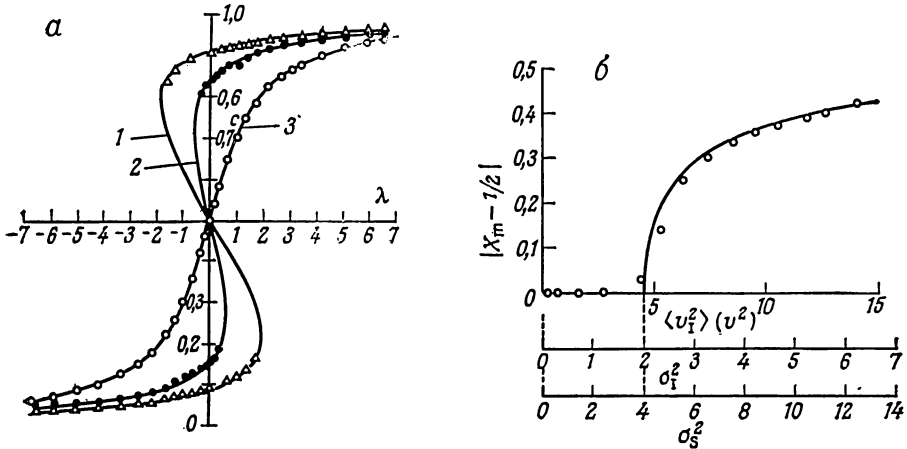


Рис. 7.6. а — Стационарные значения экстремумов плотности вероятности при фиксированных интенсивностях шума как функция λ . Кривая 1: $\sigma_S^2 = 12.5$; кривая 2: $\sigma_S^2 = 7.6$; кривая 3: $\sigma_S^2 = 0$ (значения σ_S^2 соответствуют интерпретации Стратоновича).

б — График зависимости экстремумов $x_{mp_s}(x)$ от интенсивности шума генератора $\langle v_n^2 \rangle$ (рис. 7.5) при $\lambda = 0$. Теоретические значения σ_1^2 и σ_2^2 интенсивности шума, соответствующие интерпретации по Ито и Стратоновичу, определены с помощью масштабов, указанных на рисунке.

до 500 Гц. С выходного интегратора сигнал через числовой аналоговый преобразователь подается на компьютер, который и выдает конечные результаты. Плотности вероятности измеряются при скорости выборки 4096 Гц. Экспериментальные результаты, представленные на рис. 7.6 и 7.7, хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями.

7.2. Фазовые переходы, индуцированные шумом, в открытых химических системах: реакция Бриггса — Раушера

При экспериментальном изучении неравновесных явлений помимо квантовооптических и гидродинамических систем важное место отводится химическим реакциям. Широкий интерес

привлекли к себе системы с автоколебаниями, или предельными циклами, чисто химической природы (в отличие от систем, где обратная связь осуществляется посредством температуры). Прототипом таких химических явлений является реакция Белоусова — Жаботинского [7.4—7]. Можно сказать, что в этой реакции были найдены практически все неравновесные эффекты: мульти-

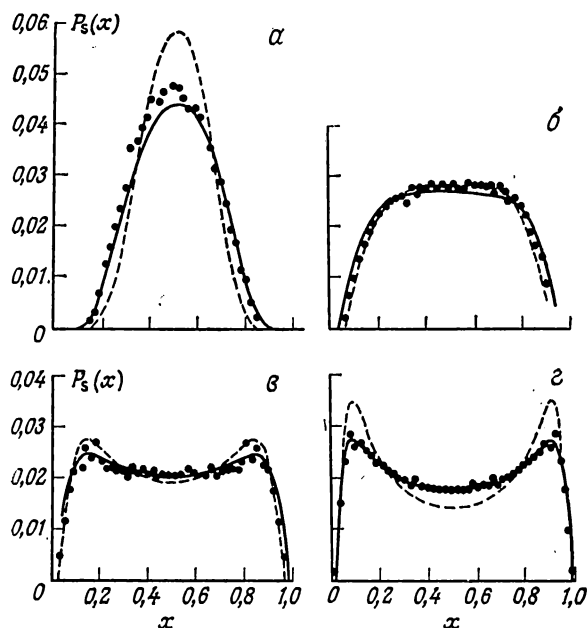


Рис. 7.7. Поведение стационарной плотности вероятности с ростом интенсивности шума. Штриховые линии — интерпретация по Ито, сплошные — по Стратоновичу. а: $\sigma_S^2 = 1.11$; б: $\sigma_S^2 = 3.88$; в: $\sigma_S^2 = 7.60$; г: $\sigma_S^2 = 12.5$.

стабильные состояния, предельные циклы, химические волны и, совсем недавно, переход к хаосу [1.35]¹⁾.

Колебательные химические реакции представляют интерес для экспериментальной проверки существования фазовых переходов, индуцированных шумом, в реальных физико-химических системах. Далее в этом разделе мы опишем эксперименты де Кеппера и Хорстхемке [7.8, 9] по изучению реакции Бриггса — Раушера (БР). В неравновесных условиях эта реакция

¹⁾ Эффекты качественной перестройки режима несколько иной каталитической реакции при флуктуирующих параметрах изучались в работе [2*]. — Прим. ред.

проявляет столь же разнообразное поведение, как и реакция Белоусова — Жаботинского. Хотя эта реакция и менее популярна, чем реакция Белоусова — Жаботинского, она также интенсивно изучалась [7.10] и, с нашей точки зрения, имеет определенные преимущества. В БР-реакции участвуют следующие основные реагенты: KIO_3 (иодат калия), H_2O_2 (пероксид водорода), HClO_4 (хлорная кислота), MnSO_4 (сульфат марганца), $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ (малоновая кислота).

Теоретический аппарат для описания фазовых переходов, индуцированных шумом, разработан для пространственно-однородных систем. Поэтому особый интерес представляют эксперименты по изучению БР-реакции в реакторе-смесителе с постоянной прокачкой (РСПП). В подобных экспериментах перечисленные выше реагенты накачиваются в реактор с постоянной скоростью из резервуаров, содержащих химические реагенты с определенной концентрацией. Перемешивание реагентов производится механическим способом в быстро вращающемся смесителе. Реактор снабжен устройствами, контролирующими постоянство объема реакции, а температура поддерживается постоянной с помощью термостата. Состояние химической системы описывается измеренными значениями переменных состояния, таких, как окислительно-восстановительный потенциал или оптическая плотность среды на заданной длине волны оптического излучения.

В РСПП реакция БР проявляет мультистабильное поведение, а также происходят переходы в колебательные режимы в зависимости от значений внешних параметров, таких, как концентрация химических реагентов, скорость потока, температура. Наиболее привлекательная черта реакции БР для наших целей — то, что она чрезвычайно чувствительна к свету в видимом диапазоне (имеется сильное оптическое поглощение в районе 460 нм). Эта сильная фоточувствительность БР-реакции объясняется тем, что свет на этой длине волны расщепляет молекулы I_2 , производимые в реакторе, на два чрезвычайно активных радикала I . С экспериментальной точки зрения это дает большое преимущество, поскольку:

1) изменения интенсивности света влияют на вещество в реакторе непосредственно, а не через какие-либо граничные эффекты. Именно к такой ситуации хорошо применим наш теоретический анализ. Кроме этого, как интуитивно ясно, флуктуации параметров, влияющих на объемные свойства системы, оказывают более сильное влияние на нее, чем какие-либо поверхностные эффекты. Использование этого обстоятельства позволяет рассчитывать на экспериментальный успех;

2) довольно легко сконструировать источник света с флуктуирующей интенсивностью, время корреляции флуктуаций которой мало по сравнению с макроскопическим временным масштабом системы.

По этим причинам изучение влияния быстрых флуктуаций интенсивности света на БР-реакцию представляется чрезвычайно привлекательным. Схема экспериментальной установки показана на рис. 7.8. Здесь S — источник белого света, а именно нить накала в лампе проектора, P — два поляроида, используемые

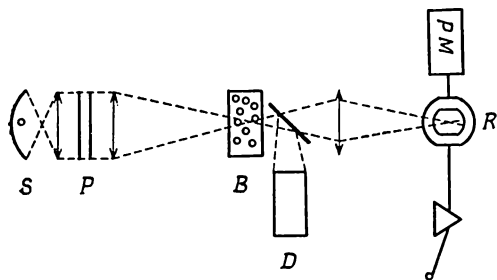


Рис. 7.8. Схема экспериментальной установки для изучения влияния флуктуирующего освещения на реакцию Бриггса — Раушера.

для изменения интенсивности света, В — генератор шума. Он представляет собой ящик с маленькими шариками из полистирола, хаотически движущимися в турбулентном воздушном потоке. Это устройство дает шум с почти гауссовским распределением с относительной дисперсией, равной 13 %. Корреляционная функция флуктуаций интенсивности представляет собой экспоненциально убывающую функцию с $\tau_{\text{корр}} \approx 0,05$ с. Это составляет примерно 1/20 от типичного значения характеристической постоянной времени в данной экспериментальной системе. Этот внешний шум, таким образом, можно рассматривать как квазибелый шум. Далее, D — детектор света, регистрирующий среднюю интенсивность света, и R — реактор-смеситель с постоянной прокачкой. Для фокусировки светового пучка в ящик В и реактор R используются линзы. Состояние вещества в реакторе регистрируется путем измерения окислительно-восстановительного потенциала; оптическое поглощение на длине волны 460 нм позволяет определить концентрацию I_2 в реакторе, а также его температуру. Температура реакции поддерживается постоянной с точностью, большей $0,1^\circ\text{C}$. Это исключало возможность того, чтобы какой-либо из переходов, обнаруженных в экспериментах, был обусловлен изменением температуры за счет нагрева при оптическом поглощении. (Чтобы в данных экспериментальных условиях вызвать фазовый переход, необходимо изменить температуру на $10\text{--}20^\circ\text{C}$.) Концентрации реагентов и скорость потока приведены на рис. 7.9.

Были проведены эксперименты двух основных типов в соответствии с тем, находилась ли система ниже или выше детерминистической критической точки, соответствующей появлению бистабильности. В первой серии экспериментов исследовалось бистабильное поведение в зависимости от интенсивности света. Основные результаты представлены на рис. 7.9. Сплошные линии описывают поведение системы, когда генератор шума вы-

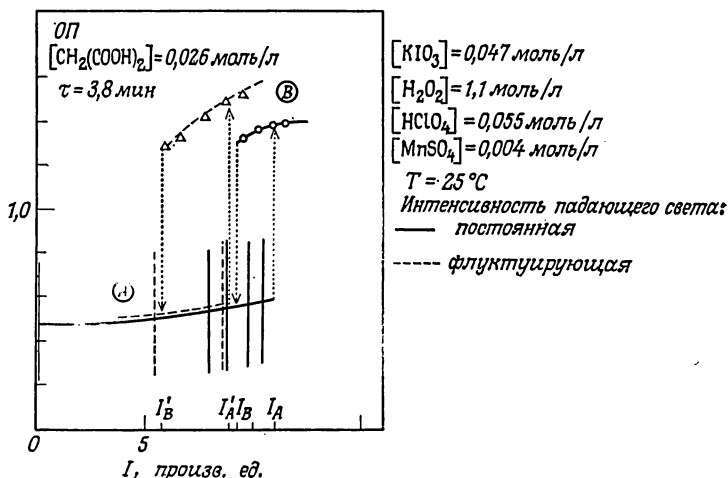


Рис. 7.9. Оптическая плотность (ОП) на длине волны 460 нм как функция интенсивности света I . Значения параметров, характеризующих систему, указаны на рисунке. A — низкая концентрация I_2 ; B — стационарное состояние с высокой концентрацией.

ключен, в то время как штриховые линии соответствуют наличию внешних флуктуаций (в этом случае I обозначает среднюю интенсивность падающего света).

Рассмотрим сначала результаты при отсутствии внешнего шума. На рисунке обозначены значения контролируемых параметров, например концентраций основных реагентов, температуры T реактора, времени обновления смеси в реакторе τ , скорости потока. Видно, что система обнаруживает бистабильное поведение в зависимости от интенсивности падающего света. Действительно, если интенсивность света сначала увеличивается, а затем уменьшается, то переменная состояния БР-системы описывает гистерезисную петлю. В определенной области интенсивностей одновременно существуют две ветви стационарных состояний. Отметим, что стационарные состояния на нижней ветви неустойчивы по отношению к варьированию рассмотренных выше внешних параметров и окружены устойчивым предельным

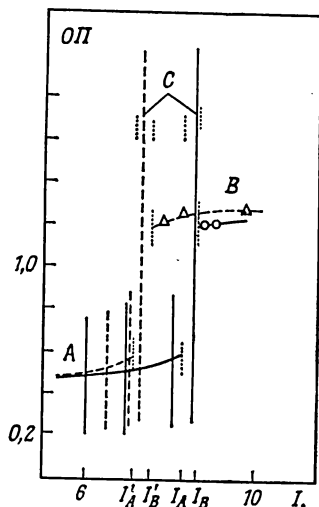
циклом, соответствующим временным, пространственно-однородным колебаниям концентраций реагентов. Следовательно, переход происходит между колебательным состоянием A с низкой концентрацией I_2 и стационарным состоянием B с высокой концентрацией I_2 (рис. 7.9). Эти две фазы различаются визуально. В состоянии A реагирующая смесь имеет коричневатую-желтую окраску, а в состоянии B — сине-фиолетовую. Как видно из рисунка, при детерминированных внешних параметрах¹⁾ химическая система находится в колебательном состоянии A , если реактор не освещается или освещается слабо²⁾. Вертикальные полоски на рис. 7.9 обозначают амплитуду предельного цикла. По мере увеличения интенсивности падающего света амплитуда колебаний почти не меняется, в то время как их период растет, пока интенсивность не достигнет критического значения I_A , при котором происходит спонтанный переход в состояние B ; смесь в реакторе при этом внезапно изменяет свой цвет от желтого к фиолетовому. Само собой разумеется, что после каждого изменения интенсивности I системе предоставляется достаточно времени, чтобы релаксировать в новое состояние. Если после этого интенсивность света уменьшается, то система остается в области B (с высокой концентрацией) и цвет реактора темно-фиолетовый. Таким образом, система находится в области бистабильности до тех пор, пока не достигается значение интенсивности I_B , когда происходит спонтанный переход в нижнее состояние A . Если выключить генератор шума, то наблюдается зависимость, показанная на рис. 7.9 штриховыми линиями. В случае флуктуирующей интенсивности света область бистабильности сдвигается в сторону низких (средних) интенсивностей настолько сильно, что оно *не перекрывается* с гистерезисной кривой детерминированной системы. Кроме того, ширина гистерезисной кривой $I'_B I'_A$ увеличивается примерно в 2 раза. Тот факт, что две области бистабильности отделены друг от друга, говорит о существовании фазовых переходов при значениях интенсивности света, лежащих между I'_A и I_B . При постоянной интенсивности света система совершает переходы, если включать или выключать шум. Действительно, при $I \in (I'_A, I_B)$ и $\sigma^2 = 0$ существует лишь состояние A , в то время как при $I \in (I'_A, I_B)$ и $\sigma^2 = 13\%$ существует лишь состояние B . Этот эффект служит первым экспериментальным доказательством существования фазовых переходов, индуцированных шумом, в сложных химических системах. Отметим также, что сдвиг и уширение гистерезисной

¹⁾ Внутренние флуктуации в нити накала малы и их влиянием можно пренебречь.

²⁾ Чтобы исключить влияние флуктуаций фонового освещения, эксперимент проводился в темной комнате.

кривой является нетривиальным результатом. Исходя из интуитивных соображений, можно было бы ожидать следующего поведения системы. Если средняя интенсивность I немного меньше I_A , то благодаря флуктуациям часть времени значение истинной интенсивности в действительности будет больше I_A и поэтому при наличии флуктуаций переход из A в B должен происходить раньше. Это в действительности и наблюдается. Однако эти же самые рассуждения можно провести и для перехода из B в A . Если I немного больше I_B , то благодаря флуктуациям значительную часть времени истинная интенсивность света будет мень-

Рис. 7.10. Оптическая плотность при 460 нм в случае полностью обратимого фазового перехода первого рода как функция интенсивности света I . Значения параметров те же, что и на рис. 7.9, но концентрация $(\text{CH}_2(\text{COOH})_2)_0$ равна 0,026 моль/л, $\tau = 3,3$ мин. A — простое колебательное состояние; B — стационарное состояние; C — сложное колебательное состояние.



ше, чем I_B , что должно приводить к фазовому переходу. Можно ожидать, таким образом, что ширина гистерезисной петли должна уменьшаться и что в случае наличия флуктуаций петля будет целиком заключена внутри детерминистической гистерезисной петли. Этого, однако, не наблюдается на эксперименте, что говорит о том, что наблюдаемые в БР-реакции фазовые переходы, индуцированные шумом, являются нетривиальным результатом взаимодействия между нелинейной системой и внешним шумом.

Второй тип экспериментов проводился при значениях внешних параметров, соответствующих состоянию ниже критической точки бистабильности (рис. 7.10). В этом случае при заданном значении интенсивности падающего света только одно состояние системы устойчиво. При изменении освещения простое колебательное состояние A переходит в стационарное состояние B через узкую область сложных колебаний C . Состояние C в опре-

деленном смысле является смешанным состоянием, составленным из состояний A и B . Можно сказать, что в состоянии C система совершает периодические переходы между колебательным состоянием A и стационарным состоянием B . При флуктуационном освещении наблюдается прежняя кривая переключения, снова несколько сдвинутая в область малых интенсивностей. Как видно из рис. 7.10, для значений I , заключенных между $I_{B'}$ и I_A , можно ожидать фазового перехода, индуцированного шумом, из колебательного состояния A в стационарное состояние B , и обратно. Это подтверждается экспериментально при $I=8$ (рис. 7.10) путем включения или выключения генератора шума при постоянной средней интенсивности света. Спустя несколько минут после переключения происходит спонтанный переход в другое состояние (время перехода, конечно, случайное).

Эти экспериментальные результаты по установлению существования неравновесных фазовых переходов, индуцированных шумом, в сложной химической системе представляются особенно важными ввиду того, что теоретические результаты гл. 6 были получены при использовании определенных идеализаций (как уже отмечалось выше). Прокомментируем некоторые из них более детально.

1) Явления, наблюдаемые в реакции Бриггса — Раушера, демонстрируют важность внешнего шума для макроскопического поведения сложных систем. Нам кажется, что эти результаты представляют значительный интерес для биологических систем (к этому вопросу мы еще вернемся).

2) В этих экспериментах, конечно, использовался «реальный» шум. Хотя время корреляции флуктуаций интенсивности было достаточно малым, так что внешний шум можно было рассматривать как квазibelый, очевидно, что это не был истинно белый шум. Экспериментальные результаты подтверждают аргументы гл. 3 в пользу замены внешнего шума с очень малым временем корреляции гауссовским белым шумом. Тот факт, что результаты, полученные для белого шума, действительно применимы качественно для случая шума с близкими свойствами, будет установлен аналитически в следующей главе.

3) Один из экспериментальных результатов по изучению реакции Бриггса — Раушера представляется нам удивительным. Как показано на рис. 7.9 и 7.10, состояние системы, подвергающейся действию света с флуктуирующей интенсивностью, так же хорошо определено, как и состояние детерминированной системы. По крайней мере для одной переменной состояния — концентрации I_2 — плотность вероятности имеет острые узкие пики, что противоречит теоретическим результатам по изучению модельных систем, полученным в гл. 6, и экспериментальным результатам Кабасимы и др., полученным при изучении электри-

ческих контуров. Кроме того, за время проведения всего эксперимента, когда каждое значение средней интенсивности получалось примерно в течение часа, не наблюдалось спонтанных переходов между двумя состояниями в области бистабильности. По нашему мнению, разумным объяснением этого факта является действие механизма зародышеобразования в данной системе с бистабильностью, индуцированной шумом. Благодаря интенсивному перемешиванию любые «капли», находящиеся в одном состоянии, дробятся в реагирующей смеси до того, как они дорастают до критического размера, необходимого для перехода системы в другое состояние. Таким образом, перемешивание стабилизирует два состояния и приводит к наличию узких пиков плотности вероятности. Такой механизм зародышеобразования отсутствует в электрических контурах, изученных Кабасимой и др., поскольку эти системы являются системами с нулевой размерностью. С теоретической точки зрения эти результаты показывают, что количественное описание фазовых переходов, индуцированных шумом в системах с ненулевой размерностью, требует учета в уравнениях пространственной зависимости, даже если в среднем система остается однородной. Для таких систем можно ожидать, что в общем случае теория среднего поля, основанная на СДУ, которое не учитывает возможность пространственной неоднородности, дает качественно хорошее описание фазовых переходов, индуцированных шумом. Однако флуктуации от пространственно-однородного состояния могут количественно изменить предсказания теории среднего поля, как это происходит в теории классических фазовых переходов в равновесных системах.

7.3. Оптическая бистабильность

Такие оптические системы, как лазер, интенсивно изучались как теоретически, так и экспериментально с точки зрения неравновесных фазовых переходов [1.46, 49, 54; 7.11—14]. Системы, подобные лазеру, являются также идеальными для изучения фазовых переходов в пространственно-однородных средах, индуцированных шумом, поскольку обычно можно пренебречь зависимостью электрического поля в резонаторе лазера от пространственных координат. Такие переменные можно удовлетворительно описывать глобальными переменными. В этом разделе мы рассмотрим, в частности, оптические приборы, обладающие бистабильными свойствами. Первое экспериментальное наблюдение оптической бистабильности было проведено при пропускании лазерного пучка через резонатор Фабри — Перо, заполненный парами натрия [7.15]. При этом было обнаружено, что при определенных условиях зависимость интенсивности прошедшего

света от интенсивности падающего света проявляет гистерезисный характер (рис. 7.11). С теоретической точки зрения такое бистабильное поведение может быть обусловлено двумя механизмами — нелинейным поглощением и нелинейной дисперсией [7.16]. В последующем мы рассмотрим лишь первый механизм, именно диссипативную (поглощательную) оптическую бистабильность. Следует отметить, что наблюдение чисто поглощательной бистабильности требует тщательного приготовления системы. В большинстве экспериментов эффекты нелинейной дисперсии преобладают над эффектами нелинейного поглощения.

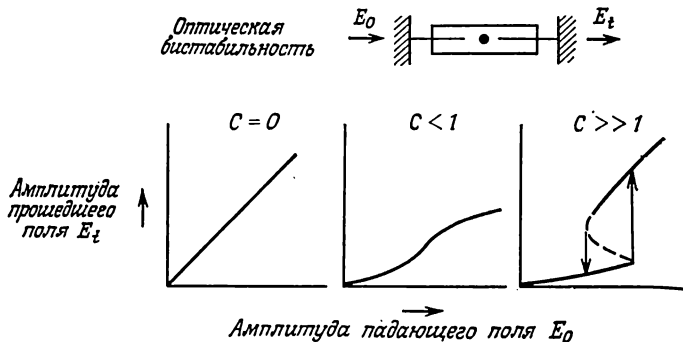


Рис. 7.11. Зависимость амплитуды прошедшей световой волны от амплитуды падающей волны в оптическом бистабильном устройстве при трех различных значениях кооперативного параметра c ; см. (7.29). Из [7.14].

Модель поглощательной оптической бистабильности, которая стала стандартной, впервые была введена в работе Бонифачо и Луджато [7.17]. Она представляет собой обобщение одномодовой лазерной модели с учетом действия внешнего когерентного поля (инжектированного лазерного пучка). Хотя целый ряд авторов учитывал влияние флуктуаций на бистабильность (см. обзор [7.14]), первое исследование фазовых переходов, индуцированных шумом в этой системе, было проведено в работе Булсары и др. [7.18].

В обычной модели поглощательной оптической бистабильности рассматривается газ двухуровневых атомов в резонаторе Фабри—Перо. На атомы действует некогерентная оптическая накачка и когерентный инжектируемый лазерный пучок. Предполагается, что длина цилиндрической полости резонатора L содержит целое число длин волн инжектируемого поля, т. е. резонатор идеально настроен на падающий лазерный пучок. Кроме того, предполагается, что частота лазерной волны в точности совпадает с резонансной частотой двухуровневых атомов.

Это предположение о точном резонансе между инжектируемым полем и резонатором и между этим полем и атомами обеспечивает отсутствие каких-либо дисперсионных эффектов. Используя обычные приближения одномодовой лазерной модели, можно адиабатически исключить атомные переменные и получить систему уравнений лишь для полного поля в резонаторе (для его амплитуды и фазы). Эта процедура справедлива для добротного резонатора; при этом предполагается, что некогерентный распад атомов происходит намного быстрее, чем затухание поля в пустом резонаторе. При этом условии атомы почти мгновенно подстраиваются под поле (атомы «подчиняются» полю [7.13]) и система описывается лишь переменными поля в резонаторе. Уравнение эволюции для амплитуды поля X задается в виде [7.19]

$$\dot{X} = Y \cos(\varphi - \varphi_0) - X - 2c \frac{X}{1 + X^2}, \quad (7.23)$$

а для фазы — в виде

$$\dot{\varphi} = -\frac{Y}{X} \sin(\varphi - \varphi_0). \quad (7.24)$$

Здесь Y — амплитуда инжектированного лазерного поля, φ_0 — его фаза. Кооперативный параметр c пропорционален инверсии заселенностей с обратным знаком: условие $c > 0$ означает, что инверсия (число атомов в верхнем состоянии минус число атомов в нижнем состоянии) отрицательна, что соответствует поглощению; случай $c < 0$ (положительная инверсия) соответствует стимулированному излучению. С уравнениями (7.23, 24) можно связать следующий потенциал:

$$V(X, \varphi) = \frac{1}{4} [X^2 - Y^2 - 2XY \cos(\varphi - \varphi_0) + 2c \ln(1 + X^2)],$$

в том смысле, что

$$\dot{X} = -2 \frac{\partial V}{\partial X}, \quad (7.25)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{2}{X^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (7.26)$$

Для $Y > 0$ детерминистические стационарные состояния определяются из уравнения

$$Y = X + 2c \frac{X}{1 + X^2}, \quad (7.27)$$

$$\varphi = \varphi_0. \quad (7.28)$$

Таким образом, инжектированный лазерный пучок навязывает свою фазу полю в резонаторе. При отходе от линии $\varphi = \varphi_0$ по-

тенциал быстро возрастает. Это указывает на то, что фаза меняется гораздо быстрее, чем амплитуда. Фаза поля в резонаторе быстро релаксирует к значению фазы инжектируемого лазерного пучка, т. е. происходит захват фаз. Поэтому фазовая переменная φ может быть адиабатически исключена, в результате чего мы приходим к уравнению для одной переменной

$$\dot{X} = Y - X - 2c \frac{X}{1 + X^2}. \quad (7.29)$$

В последующем мы ограничимся лишь случаем отсутствия некогерентной оптической накачки (или будем считать ее слабой, т. е. $c \geq 0$). Что касается стационарного поведения, описываемого формулой (7.29), то легко показать, что фазовый переход происходит при $c = 4$. Если кооперативный параметр $c < 4$, то существует лишь одно (устойчивое) стационарное состояние: для каждого значения интенсивности падающей волны существует лишь одно значение интенсивности прошедшей волны. Если кооперативный параметр больше критического значения, т. е. $c > 4$, то возникает гистерезис. В некоторой области интенсивностей падающего света существуют три стационарных состояния — два устойчивых и одно неустойчивое.

Как указывалось в [7.14, 19, 20], в данной задаче имеются различные источники внешнего шума, в частности флуктуации амплитуды падающего лазерного пучка Y и флуктуации кооперативного параметра c . Поскольку флуктуации первого типа соответствуют аддитивному шуму, который не изменяет детерминистическую бифуркационную диаграмму, то мы рассмотрим здесь только флуктуации второго типа. Флуктуации параметра c неизбежно будут происходить, поскольку спонтанное излучение (как квантовый шумовой процесс) приводит к случайному движению разности заселенностей в атомах. Если этот процесс является единственным источником внешнего шума, то значение σ очень мало (в выбранных здесь единицах $\sigma \sim 10^{-3}$) и изменение стационарного детерминистического поведения будет происходить лишь в очень малой окрестности детерминистической критической точки [7.19].

Имеются, однако, два дополнительных источника внешнего шума, именно флуктуации оптической накачки и флуктуации плотности атомов в резонаторе. Эти флуктуации хорошо контролируются экспериментально. Другими словами, к оптической бистабильной системе можно подводить внешний шум с заданными характеристиками. Ввиду преимуществ квантовых оптических систем, перечисленных в начале этого раздела, поглощательная оптическая бистабильность представляет собой весьма удобный объект для изучения неравновесных фазовых переходов, индуцированных шумом. В последующем, в духе на-

шего теоретического рассмотрения, мы будем предполагать, что на систему действует высокочастотный внешний шум, который вызывает флуктуации кооперативного параметра, описываемые гауссовским белым шумом. Оптическая бистабильность может быть смоделирована бифуркационным процессом, задаваемым решением следующего СДУ Стратоновича:

$$dX_t = \left(Y - X_t - 2c \frac{X_t}{1 + X_t^2} \right) dt + \sigma \frac{X}{1 + X_t^2} \circ dW_t. \quad (7.30)$$

Будем предполагать, что внешний шум не разрушает захвата фазы, и поэтому будем пренебрегать флуктуациями фазы поля. В том случае, которым мы интересуемся, — мультипликативный шум, обусловленный случайными изменениями кооперативного параметра c в отсутствие аддитивного шума — эта процедура оправдана, поскольку точка $\varphi = \varphi_0$ является устойчивой стационарной точкой СДУ с двумя переменными (X_t, φ_t) .

Уравнение (7.29) также встречается в биологических приложениях. Оно использовалось для моделирования некоторых особенностей респираторных процессов в культуре *Klebsiella aerogenes*. Влияние внешнего мультипликативного шума в этом плане изучалось в работе де ла Рубия и Веларде [7.21].

Чтобы выявить основные свойства индуцированных шумом фазовых переходов в этой системе, мы сразу же перейдем к уравнению для определения экстремумов стационарной плотности вероятности, которое, как легко проверить, существует и имеет вид

$$Y - X_m - 2c \frac{X_m^2}{1 + X_m^2} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{X_m}{1 + X_m^2} \left(\frac{1}{1 + X_m^2} - \frac{2X_m^2}{(1 + X_m^2)^2} \right) = 0, \quad (7.31)$$

или

$$Y - X_m - 2c \frac{X_m}{1 + X_m^2} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{X_m - X_m^3}{(1 + X_m^2)^3} = 0. \quad (7.32)$$

Чтобы выяснить характерные черты фазовых переходов, индуцированных шумом, рассмотрим кривую экстремумов, задаваемую функциональным соотношением:

$$Y = X + 2c \frac{X}{1 + X^2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{X - X^3}{(1 + X^2)^3}. \quad (7.33)$$

Чтобы существовала область бистабильности, функция $Y(X)$ должна быть немонотонной. Для производной функции, задаваемой формулой (7.33), имеем

$$Y' = 1 + 2c \frac{1 - X^2}{(1 + X^2)^2} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{1 - 8X^2 + 3X^4}{(1 + X^2)^4}. \quad (7.34)$$

Это выражение можно разбить на часть, соответствующую феноменологической кинетике, и часть, обусловленную внешним шумом,

$$Y'_{\text{детерм}} = 1 + 2c \frac{1 - X^2}{(1 + X^2)^2}, \quad (7.35)$$

$$Y'_{\text{стохаст}} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{1 - 8X^2 + 3X^4}{(1 + X^2)^4}. \quad (7.36)$$

При $X = 0$ имеем

$$X'(0) = 1 + 2c + \frac{\sigma^2}{2} > 0 \quad \text{при всех } \sigma^2, \quad (7.37)$$

если ограничиться случаем слабой накачки, когда $c > -1/2$. (Это условие исключает лазерную генерацию. При $Y = 0$ случай $c = -1/2$ соответствует лазерной генерации. Если накачка столь сильна, что $c < -1/2$, то резонатор излучает когерентный свет.) В соответствии с (7.34) бистабильность имеет место, если существует такая область, где $Y' < 0$. Детерминистическая критическая точка задается условием $c = 4$, $X_c = \sqrt{3}$, т. е. $Y'_{\text{детерм}}(\sqrt{3}) = 0$ при $c = 4$.

Корни уравнения $Y'_{\text{стохаст}} = 0$, как легко проверить, равны $X_1^s = 0,362$, $X_2^s = 1,592$. Как следует отсюда, $Y'_{\text{стохаст}}(\sqrt{3}) > 0$ при всех σ^2 . Это означает, что произвольно малый внешний шум подавляет детерминистическую критическую точку при $c = 4$. Детерминистическая бистабильность, конечно, не может быть разрушена при тех значениях c , когда $Y'_{\text{детерм}}(X_{1,2}^s) < 0$, поскольку это обеспечивало бы существование такого интервала, где $Y' < 0$ независимо от интенсивности шума. В то время как для $X_1^s = 0,362$ имеем

$$Y'(X_1^s) = Y'_{\text{детерм}}(X_1^s) = 1 + 2c \cdot 0,6783 > 0 \quad \text{при } c > -1/2, \quad (7.38a)$$

для другого корня получаем

$$Y'(X_2^s) = Y'_{\text{детерм}}(X_2^s) = 1 + 2c(-0,1228). \quad (7.38b)$$

Это выражение обращается в нуль и затем становится отрицательным при $c \geq 4,0704$. Таким образом, бистабильное поведение имеет место при произвольных значениях интенсивности шума, если $c \geq 4,0704$. Следовательно, данная бистабильность соответствует той, которая существует и при детерминированных внешних условиях. Действие же внешнего шума лишь сдвигает область бистабильности в сторону нескольких больших значений кооперативного параметра c .

Однако в этой системе происходит и фазовый переход, индуцированный исключительно шумом. Чтобы показать это, отметим, что при $X = 1$

$$Y'(1) = 1 - \sigma^2/8 \quad (7.39)$$

независимо от значений c . А значит, мы имеем следующее *достаточное* условие появления бистабильности, индуцированной шумом. Если интенсивность внешнего шума достаточно велика, именно $\sigma^2 > 8$, то имеются два максимума интенсивности прошедшего поля. Эта бистабильность существует независимо от значений кооперативного параметра. Она наблюдается даже при $c < 4$, т. е. представляет собой эффект, индуцированный исключительно шумом. Эта бистабильность отлична от явления детерминистического гистерезиса и проявляется через совместное действие феноменологической нелинейной кинетики и внешнего шума. Резюмируя, можно сказать, что оптическая бистабильность проявляет оба типа фазовых переходов, индуцированных шумом. Детерминистическая критическая точка подавляется сколь угодно малым шумом и сдвигается в сторону больших значений c . В то же время работает механизм индуцирования критической точки чисто шумовыми эффектами, что приводит к бистабильному поведению при *всех* значениях кооперативного параметра.

7.4. Переходы, индуцированные шумом, и проблема вымирания в системах хищник — жертва

При изучении динамики популяций часто возникает проблема определения предельного числа хищников, которое еще не представляет угрозы для выживания популяции жертв. Ответ на этот вопрос представляет фундаментальный интерес для задачи оптимального использования биологических ресурсов, в частности для выбора наилучшей стратегии при уборке урожая или вылове рыбы. Можно также иметь в виду и обратную задачу — уничтожение популяции жертв с помощью достаточно многочисленной популяции хищников. В этом аспекте с проблемой вымирания мы сталкиваемся не только в области биологического контроля вредителей, но и в медицинских науках. В частности, в эпидемиологии встает проблема изучения «равновесия» (по типу системы хищник — жертва), которое устанавливается между терапевтическим лечением и выживанием возбудителей инфекции. На уровне индивидуальных организмов качественно аналогичная проблема возникает при изучении действия механизма иммунной защиты против чужих и аномальных антигенов.

В перечисленных случаях мы имеем дело с системами, подвергающимися действию случайных изменений окружающей среды, интенсивность которых может быть весьма большой. Естественно поэтому обратиться к задаче о влиянии флуктуаций среды [1.81, 7.22—27] на поведение системы. Как мы видели, это влияние может качественно менять ситуацию. Даже в случае простой модели Ферхюльста (6.37) оно приводит к существенным изменениям в действии механизма перехода от роста к исчезновению популяции. В этом разделе мы снова рассмотрим влияние фазовых переходов, индуцированных шумом, на выживание популяции, концентрируя внимание прежде всего на биологических приложениях этих эффектов. Мы рассмотрим случаи, когда скорость уничтожения жертв хищниками флуктуирует, — процесс, который может быть описан следующим скалярным уравнением:

$$\dot{X} = \alpha + \lambda X \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \beta g(X). \quad (7.40)$$

Здесь X обозначает плотность числа жертв на данной территории. Предполагается, что эта плотность пространственно-однородна, так что пространственной зависимостью будем пренебрегать. Постоянная α учитывает постоянный источник роста X , например обусловленный иммиграцией. Второй член в правой части (7.40) — логистическая составляющая роста (по Фишеру) популяции X с рождаемостью λ , где K — постоянная (так называемая поддерживающая емкость среды). Уравнение в форме (7.40) применимо к ситуациям, когда популяция жертв эволюционирует медленнее, чем популяция хищников. В этом случае часто оказывается, что скорость уничтожения жертв хищниками является насыщающейся функцией численности популяции жертв X . Максимальная скорость уничтожения жертв в случае, когда популяция жертв гораздо более многочисленна, чем популяция хищников (т. е. $X \rightarrow \infty$), равна β . Типичным экологическим примером такой ситуации, для которого накоплен обширный материал наблюдений, является взаимодействие в системе еловый почкоед/лес в восточной части Северной Америки. Изучение свойств этой системы показывает, что функция $g(X)$ может быть выбрана в виде $g(X) = X^2/(1 + X^2)$. Эту систему при условии детерминированной среды исследовали Людвиг и др. [7.28].

В последующем мы детально обсудим случаи, когда $g(X) = X/(1 + X)$. Он соответствует системе хищник — жертва, в которой полное число хищников постоянно и хищники могут находиться лишь в двух состояниях: «охоты» и «отдыха». Помимо экологии такая модель находит применение и в других областях. Она дает точное описание основных этапов реакции между

иммунными цитотоксичными и опухолевыми клетками [7.29, 30]. В этой книге мы рассмотрим некоторые свойства этой модели.

7.4.1. Модель хищников с двумя состояниями

Рассмотрим популяцию хищников, обитающих на данной территории и питающихся особями популяции жертв X при следующих допущениях.

1) В отсутствие хищников окружающая среда неизменна для жертв, так что скорость роста их популяции описывается логистической функцией и имеет вид $\lambda(X(1 - X/K))$.

2) Характерные времена существенного изменения популяций хищников и жертв сильно различаются, так что число хищников, по крайней мере в среднем, остается строго постоянным на протяжении жизни одного поколения жертв.

3) Хищники могут находиться лишь в двух состояниях: либо в состоянии «охоты» на жертв, либо в состоянии «отдыха». Число хищников в каждом состоянии равно Y и Z соответственно. Хищник тратит в среднем время τ_H на охоту и время τ_R на отдых. Как это обычно имеет место, эти времена много меньше времени жизни одного поколения жертв, т. е. $\tau_H, \tau_R \ll \lambda^{-1}$.

При этих условиях взаимодействие хищников и жертв может быть изображено в виде замкнутой петли, описывающей переключение хищника с одного типа действий на другой:



(7.41)

Существенной особенностью, учитываемой моделью (7.41), является то, что деятельность хищников на данной территории формально аналогична поведению ферментов или катализаторов в химических реакциях: катализаторы постоянно преобразовывают реагенты в химической реакции, однако сами не исчезают в ней. Питаясь жертвами, постоянная популяция хищников производит аналогичный эффект. Этой аналогии можно придать количественный характер, если предположить, что взаимодействие между хищниками и жертвами описывается системой уравнений, подобных уравнениям химической кинетики:

$$\dot{X} = A - \lambda X(1 - X/K) - \frac{1}{\tau_H} XY, \quad (7.42)$$

$$\dot{Y} = -\frac{1}{\tau_H} XY + \frac{1}{\tau_R} Z, \quad \text{где } Y(t) + Z(t) \equiv E = \text{const.} \quad (7.43)$$

Первые два члена в правой части (7.42) описывают соответственно приток жертв вследствие иммиграции и их логистиче-

ский рост; последний член $-XY/\tau_H$ описывает скорость уничтожения жертв. Рассмотрим случай $\lambda^{-1} \gg \tau_H, \tau_R$. Предположим далее, что полная популяция хищников E мала по сравнению с популяцией жертв X , т. е. положим

$$\tau_H = \varepsilon \tau_H^*, \quad \tau_R = \varepsilon \tau_R^*, \quad Y = \varepsilon Y^*, \quad Z = \varepsilon Z^*, \quad (7.44)$$

где ε — малая величина, τ_H^*, τ_R^* — величины порядка λ^{-1} и Y^*, Z^* — величины порядка X . Подстановка (7.44) в (7.42, 43) дает

$$\dot{X} = A + \lambda X(1 - X/K) - \frac{1}{\tau_H^*} XY^*, \quad (7.45)$$

$$\varepsilon \dot{Y}^* = -\frac{1}{\tau_H^*} XY^* + \frac{1}{\tau_R^*} Z^*. \quad (7.46)$$

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ и исключая Y^* из (7.45), получаем окончательно уравнение эволюции X в форме (7.40)

$$\dot{X}^* = \alpha + X^*(1 - \theta X^*) - \beta \frac{X^*}{1 + X^*}, \quad (7.47)$$

где

$$\alpha = \frac{A\tau_R^*}{\lambda\tau_H^*}, \quad \beta = \frac{E}{\lambda\tau_H}, \quad \theta = \frac{\tau_H}{\tau_R K}, \quad X^* = \frac{\tau_R^*}{\tau_H^*} X. \quad (7.48)$$

Далее для простоты мы повсюду будем опускать значок *. Замечательной особенностью стационарных детерминированных решений (7.47) является то, что они могут описывать катастрофы типа сборки. Соответствующая критическая точка (α_c, β_c, X_c) определяется формулами

$$\alpha_c = \frac{(1 - \theta)^3}{27\theta^2}, \quad \beta_c = \frac{(1 + 2\theta)^3}{27\theta^2}, \quad X_c = \frac{1 - \theta}{3\theta}. \quad (7.49)$$

Как видно из (7.49), необходимым условием того, чтобы эта критическая точка имела физический смысл ($\alpha_c, X_c > 0$), является неравенство $\theta < 1$. Таким образом, стационарные решения \dot{X} как функции β (в области малых θ) всегда обладают свойством бистабильности (рис. 7.12, а). Эта область всегда может быть достигнута путем увеличения поддерживающей емкости территории K или уменьшения отношения τ_H/τ_R ; чем лучшим охотником является хищник, тем с большей вероятностью реализуется бистабильная ситуация. Другими словами, если популяция E весьма эффективно охотящихся хищников растет на данной территории, то популяция жертв уменьшается непрерывно только до значения β , соответствующего точке поворота на гистерезисной петле. При дальнейшем уменьшении происходит скачок и значение X резко падает к нижней ветви стационарных состояний. Если θ фиксировано при значении, меньшем единицы, то

возникновение области бистабильности зависит от значения скорости иммиграции α (рис. 7.12, б). Когда $\alpha = 0$, кривая \bar{X} имеет точку пересечения с линией $\bar{X} = 0$ при $\beta = 1$; в этом случае точка пересечения всегда является стационарным решением; точка $\bar{X} = 0$ устойчива при $\beta > 1$ и неустойчива в противном случае. Рост иммиграции на рассматриваемую территорию приводит к тому, что точка пересечения с $\bar{X} = 0$ уходит на бесконечность, что обуславливает исчезновение бистабильности.

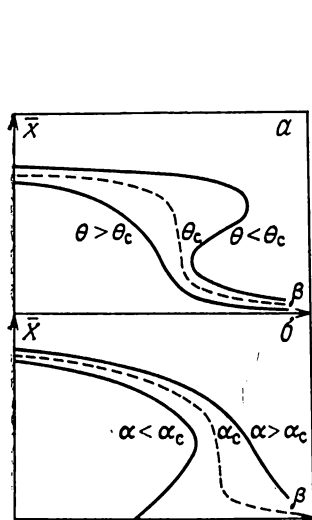


Рис 7.12. Зависимость стационарного значения \bar{X} в модели (7.47) от β . а — при фиксированном α и значениях θ , больших, равных и меньших θ_c ; б — при фиксированном θ ($\theta < 1$) и значениях α , меньших, равных и больших α_c .

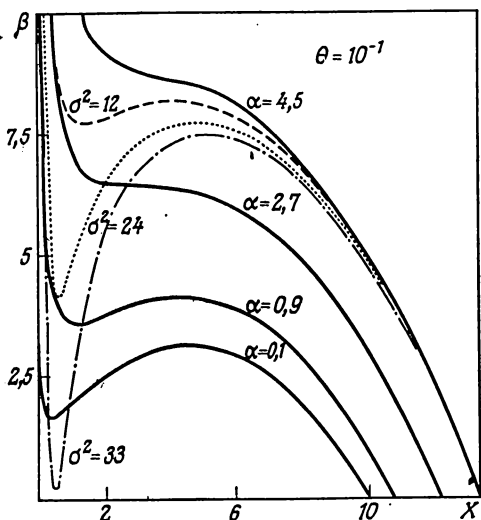


Рис. 7.13. Детерминированное стационарное состояние как функция β (решение уравнения (7.47)) при различных значениях σ^2 (сплошные кривые). Штриховые кривые — зависимость экстремумов $p_s(x)$, соответствующих случаю $\alpha = 4,5 > \alpha_c$ и указанным на рисунке значениям σ^2 .

Рассмотрим теперь поведение этой системы, когда флуктуации относительно среднего значения происходят достаточно быстро для того, чтобы можно было использовать приближение белого шума, т. е. положить $\beta_t = \beta + \sigma \xi_t$, где ξ_t — гауссовский белый шум [7.27, 31]. Детерминистическое кинетическое уравнение заменяется СДУ

$$dX_t = \left[\alpha + (1 - \theta X_t) X_t - \beta \frac{X_t}{1 + X_t} \right] dt + \sigma \frac{X_t}{1 + X_t} dW_t. \quad (7.50)$$

Интерпретируя его в смысле Ито, рассмотренным выше способом получаем стационарную плотность вероятности. Ее экстре-

мумы как функции от β при различных значениях дисперсии σ^2 показаны на рис. 7.13. Внешний шум дает два основных эффекта:

1) область бистабильности сдвигается в сторону более низких значений β ;

2) S-образный характер кривых усиливается при значениях параметров, превышающих детерминистическое критическое значение (7.49). Эти эффекты приводят к бистабильности. При увеличении σ у функции $p_s(x)$ появляются два максимума, даже если в детерминированном стационарном случае функция $p_s(x)$ однозначна при всех значениях β . Очевидно, что шум сдвигает точку детерминистического фазового перехода, что весьма похоже на то, что наблюдается при экспериментальном изучении БР-реакции. На рис. 7.14 показано поведение функции $p_s(x)$

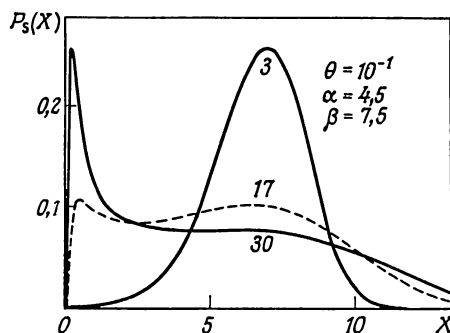


Рис. 7.14. Плотность вероятности при трех значениях дисперсии σ^2 .

при увеличении параметра σ^2 . При $\sigma^2 = 3$ распределение имеет один максимум вблизи детерминистического стационарного состояния. С ростом σ^2 в области малых x появляется и нарастает новый пик, в то время как пик в области больших x исчезает. Удивительно то, что этот эффект, способствующий уничтожению популяции жертв, наблюдается без изменения средней скорости уничтожения жертв. Интересно отметить, что наша модель предсказывает, что данное явление происходит, несмотря на очевидный и неизбежный недостаток рассмотрения с использованием приближения белого шума (ξ_i принимает отрицательные значения, что, несомненно, способствует росту популяции X , а не ее уничтожению). Следует поэтому ожидать, что в реальном случае, когда значения β_i положительны, исчезновение популяции происходит при значениях σ^2 , меньших, чем рассматриваемые здесь,

7.4.2. Клеточный иммунологический надзор: пример системы с двумя состояниями хищника

Хорошо известно, что большинство опухолевых клеток несут антигены, которые опознаются иммунной системой как чужие. Иммунный ответ на эти антигены осуществляется через иммунные клетки, такие, как Т-лимфоциты. В этой реакции могут принимать участие и другие, не относящиеся непосредственно к иммунной системе клетки (например, макрофаги или клетки-убийцы). Подобные клетки проникают в опухоль и развивают в ней цитотоксическую¹⁾ активность, направленную против опухолевых клеток. Динамика этого процесса в целом чрезвычайно сложна и здесь не будет рассматриваться (более детальное обсуждение см. в [7.29, 30, 32])²⁾. Мы сконцентрируем внимание на ситуациях, когда иммунную систему можно рассматривать как квазистационарную на больших временных интервалах, значительно превышающих среднее время между последовательными актами размножения опухолевых клеток. Тогда имеет смысл представить цитотоксические реакции между цитотоксическими клетками, проникшими в опухоль, и опухолевыми клетками в виде двухступенчатого процесса типа (7.41). Популяция цитотоксических клеток обозначается через Y (хищники), X — это популяция-мишень опухолевых клеток (жертвы), Z — численность комплексов, образованных присоединением Y к X . Процесс цитолиза (7.41) может быть точно описан уравнениями эволюции (7.42, 43). В табл. 7.1 приведены характерные значения констант $k_1 = \tau_H^{-1}$ и $k_2 = \tau_R^{-1}$, а также соответствующие значения параметра θ , который здесь равен k_1/k_2N , где N — максимальное число клеток в единице объема [7.29, 30, 32].

Таким образом, уравнение (7.47) можно рассматривать как феноменологическое уравнение, удобное для описания цитотоксических реакций, происходящих в какой-либо опухоли. В дальнейшем мы будем предполагать, что клеточное размножение является единственным источником опухолевых клеток, т. е. $\alpha = 0$.

Как видно из табл. 7.1, кинетические параметры, описывающие рассматриваемую цитотоксическую клетку, сильно изменчивы; кроме того, может значительно изменяться плотность числа этих клеток в опухоли. Разумно поэтому предположить, что в результате этой изменчивости параметр, описывающий эффективность цитотоксического процесса, будет флуктуировать. Возникает вопрос: как эта изменчивость повлияет на отторже-

¹⁾ То есть разрушающую клетку. — *Прим. ред.*

²⁾ По поводу математического моделирования процессов в иммунной системе см. также книгу [7*]. — *Прим. ред.*

Таблица 7.1. Приблизительные значения параметров для различных типов цитотоксических клеток

| Цитотоксическая клетка | k_1N (день ⁻¹) | k_2 (день ⁻¹) | θ |
|---|------------------------------|-----------------------------|----------|
| Т-клетка, сенсибилизированная к аллоантигенам ¹⁾ | 18 | 18 | 1 |
| Иммунные Т-клетки ²⁾ | 0,425 | 0,85 | 1—2 |
| Сингенные клетки ³⁾ | 1—6 | 0,6—3 | 0,1—3 |
| Сингенные активированные макрофаги ⁴⁾ | 0,1—0,4 | 0,2—0,7 | 0,5—5 |

¹⁾ Т-лимфоциты, которые производятся в организме животного, перенесшего пересадку опухолевых клеток от животного другой генетической линии, например другого вида. Поскольку гистологическая совместимость антигенов опухолевых клеток совершенно отлична от таковой в данном организме, то он откликается весьма сильной иммунной реакцией, которая здесь отражается тем фактом, что значения кинетических постоянных оказываются намного большими, чем для любых других типов цитотоксических клеток.

²⁾ Т-лимфоциты, полученные от исходного организма или путем пересадки опухоли животному той же генетической линии.

³⁾ Т-лимфоциты, полученные от исходного организма путем пересадки опухоли животному той же линии.

⁴⁾ Сингенные клетки (клетки-убийцы) и сингенные макрофаги получают при пересадке опухоли животным того же вида.

ние опухоли? Ясно, что при наличии флуктуаций скорости цитотоксического процесса подавление X -популяции может быть осуществлено при значениях β , которые в детерминистическом случае соответствуют прогрессирующему росту опухоли (более подробное обсуждение см. в [7.27]). Действительно, плотность вероятности стационарного состояния $p_s(x)$, соответствующая интерпретации по Ито уравнения (7.50) при $\alpha = 0$ ¹⁾, в области малых x имеет вид

$$p_s(x) = x^{\{1^2(1-\beta)/\sigma^2\}-2}. \quad (7.51)$$

Она обладает следующими свойствами.

1) Если $\beta < 1 - \sigma^2$, то распределение представляет собой интегрируемую функцию на интервале $[0, \infty)$, а стационарная точка $x_0 = 0$ является естественной границей. Наиболее вероятное значение x соответствует наличию популяции злокачественных клеток конечной численности. Распределение — одномодовое при любых значениях θ .

2) Точка $\beta = 1 - \sigma^2$ является точкой фазового перехода, в которой свойства плотности вероятности резко изменяются. При $1 - \sigma^2 < \beta < 1 - \sigma^2/2$ функция $p_s(x)$ по-прежнему интегрируема, но она расходится в точке x_0 , которая теперь соответствует

¹⁾ Предполагается, что имитация отсутствует. Кроме того, мы пренебрегаем другими возможными источниками роста X , такими, как превращение нормальных клеток в злокачественные при мутациях или под действием химических, физических или биологических факторов.

наиболее вероятному значению. Если $\theta < 1$, то распределение может иметь и другой пик, соответствующий конечному значению x . Условием устойчивости стационарной точки x_0 при возмущении ее со стороны больших значений (рассмотрением которых мы здесь ограничиваемся) является конечность величины

$$J = \int_0^{\delta} \exp \left\{ \int_u^{\delta} [2f(z)/g^2(z)] dz \right\} du. \quad \text{Это означает, что стационар-}$$

ная точка x_0 неустойчива при $\beta < 1 - \sigma^2/2$, а точка нуль является естественной границей в этой области параметров.

3) В точке $\beta = 1 - \sigma^2/2$ происходит фазовый переход типа мягкой моды. При $\beta > 1 - \sigma^2/2$ распределение перестает быть интегрируемым на интервале $[0, \infty)$, а стационарная точка x_0 устойчива. «Стационарная плотность» полностью сконцентрирована в окрестности нуля подобно δ -функции Дирака. Таким образом, хотя параметр β может быть меньше единицы, гибель X -популяции происходит с достоверностью. Резюмируя, можно сказать, что, хотя в этой модели возможна бистабильность, ее свойства, по крайней мере в отношении вопроса об уничтожении X -популяции, напоминают свойства модели Ферхюльста. Под влиянием флуктуаций среды исчезновение популяции происходит посредством той же самой последовательности фазовых переходов, которая имеет место вблизи нулевой границы носителя $p_s(x)$. Эти переходы происходят независимо от переходов типа критической точки, которые также могут происходить в данной модели. Мы снова сталкиваемся с эффектом, связанным с существованием точки бифуркации между двумя ветвями стационарных состояний при $\beta = 1$ в детерминистическом случае. Переход при $\beta = 1 - \sigma^2$, когда вместо пика при конечных значениях x внезапно появляется расхожимость $p_s(x)$ в точке $x = 0$, очевидно, представляет собой сдвиг этого детерминированного перехода под действием шума.

7.5. Химические системы под действием света

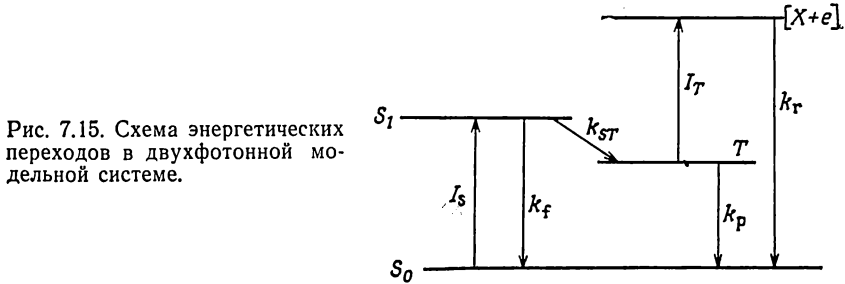
Фотохимические реакции играют первостепенную роль в биосфере земли. Спектр их разновидностей простирается от простых фотохимических процессов в верхней атмосфере, например $O_3 + h\nu \rightarrow O_2 + O$, до фотосинтеза в растениях. Постоянно изменяющиеся условия окружающей среды, например изменения облачности, вызывают флуктуации интенсивности падающего света. Интересно поэтому изучить возможные эффекты влияния этих флуктуаций на фотохимические системы. К счастью, фотохимические процессы оказываются весьма удобным объектом для экспериментального изучения влияния внешнего шума. Ин-

тенсивность падающего света — внешний параметр, который можно легко изменять экспериментально в значительных пределах. Кроме того, чувствительность к свету дает идеальную возможность практически пространственно-однородного возбуждения объема извне. Если освещаемый объем имеет достаточно малую толщину, то разумно считать, что интенсивность света внутри его постоянна. С другой стороны, интенсивность света является мультипликативным параметром в законе поглощения Ламберта — Бэра, поэтому следует ожидать, что флуктуации будут оказывать сильное влияние на систему. Экспериментальное подтверждение этому уже было получено в случае реакции Бриггса — Раушера. Однако эта реакция весьма сложна и механизм ее в деталях не известен. Экспериментальная система, рассмотренная в разд. 7.5.1, имеет преимущество перед реакцией Бриггса — Раушера в том отношении, что ее механизм хорошо понят. Это процесс термолюминесценции красителя флуоресцеина в стекле борной кислоты, представляющий собой один из примеров двухфотонных процессов. Они важны в фотобиологии, в частности, они лежат в основе биосинтеза. Данная система также имеет то преимущество, что ее неравновесными свойствами можно полностью управлять, изменяя поток энергии падающего света. Другими словами, это замкнутая система, которая не обменивается веществом с окружением. В последующих разделах мы изучим класс фототепловых систем, в которых при детерминированных условиях может возникать бистабильность благодаря совместным эффектам поглощения света в химической реакции и переноса тепла. Эта бистабильность может иметь место в самой простой химической системе, которую только можно вообразить, а именно в молекулярной реакции изомеризации. Кроме того, как и двухфотонная реакция, о которой шла речь выше, это — замкнутая неравновесная химическая система. Простота системы позволяет провести детальный теоретический анализ. Он показывает, что кроме сдвига детерминистических критических точек при действии шума (эффекта общего для систем, рассмотренных в разд. 7.4) имеется возможность появления нескольких точек фазовых переходов, индуцированных исключительно шумом, что может приводить, в частности, к появлению тристабильности.

7.5.1. Чувствительность двухфотонных систем к флуктуациям интенсивности света

Рассмотрим двухфотонный процесс, изображенный на рис. 7.15. Основное состояние является синглетным (S_0), S_1 — синглетное возбужденное состояние, T — долгоживущее триплетное состояние, X — фотоионизованное состояние. При поглоще-

нии одного фотона система переходит из S_0 в S_1 , затем либо релаксирует обратно в S_0 -состояние, либо переходит в триплетное состояние T . В этом состоянии она может поглотить второй фотон и перейти в фотоионизованное состояние X . Как триплетное, так и фотоионизованное состояния могут распадаться в основное состояние S_0 . Скорости поглощения первого и второго фотонов равны I_s и I_T . Когда время жизни $\tau_X = 1/k_r$ фотоиони-



зованных систем увеличивается, а время жизни триплетного состояния $\tau_T = 1/k_p$ уменьшается, то на кривой стационарного решения для функции X в зависимости от интенсивности света I_0 появляется гистерезисная петля. Это явление иллюстрируется рис. 7.16. Когда τ_X мало, то насыщение наступает при недостижимо больших интенсивностях I_0 (кривая А). По мере увеличения τ_X кривые, описывающие стационарные состояния системы, приобретают все более и более S-образный характер, так что нелинейное поведение, типичное для двухфотонных систем, становится все более очевидным (кривая В). Наконец, когда время τ_X становится очень большим, кривая X становится четко

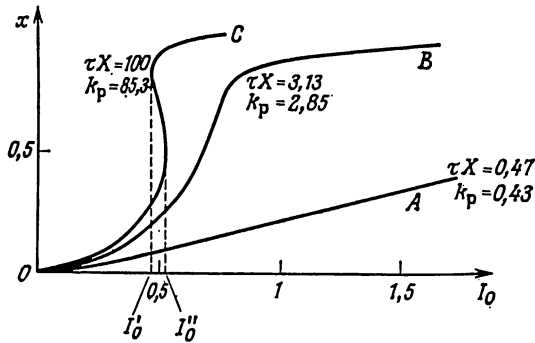


Рис. 7.16. Зависимость стационарных значений X в двухфотонной модели от интенсивности падающего света I_0 .

S-образной (кривая С). В переходной области $I'_0 < I_0 < I''_0$ существуют два устойчивых стационарных состояния, между которыми лежит неустойчивое состояние (более подробное количественное рассмотрение см. в [7.33, 34]).

Термолюминесценция флуоресцеина в стекле борной кислоты дает удобную экспериментальную модельную систему для изучения разновидности двухфотонного механизма реакции, описанной выше. Действительно, в этом эффекте происходит последовательное поглощение двух фотонов [7.35]. Его легко наблю-

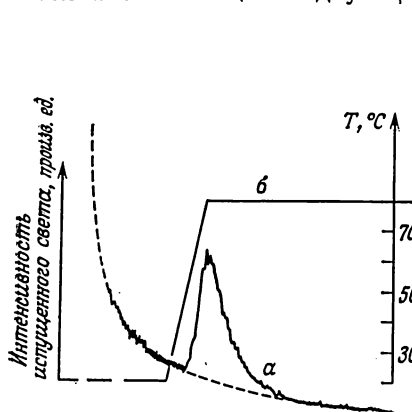


Рис. 7.17. *a* — Типичная кривая свечения флуоресцеина в стекле борной кислоты; *b* — изменение температуры. Площадь под кривой свечения пропорциональна эффективности термолюминесценции E .

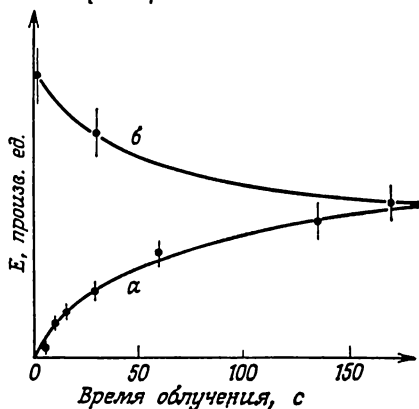


Рис. 7.18. Зависимость эффективности термолюминесценции E от времени облучения, $I_0 = 1,64 \cdot 10^6$ фот/с при 490 нм. *a* — до момента $t = 0$ система не облучалась; *b* — система предварительно облучена в течение 1 мин светом с $I_0 = 8,2 \cdot 10^{16}$ фот/с при 490 нм.

дать при комнатных температурах при использовании обычного светового источника [7.36]. Термолюминесценция представляет собой короткую вспышку света, вызываемую нагревом предварительно освещенного образца. Результаты измерений, проводимых при постоянном освещении, представлены на рис. 7.17—19. На рис. 7.17 показана типичная кривая изменения интенсивности испускаемого света после увеличения температуры. Относительная эффективность термолюминесценции E определяется изменением площади, ограниченной кривой свечения. После длительного освещения E стремится к стационарному значению, начиная либо с нулевых значений (кривая *a* на рис. 7.18), либо путем релаксации, если первоначально образец освещался светом с более высокой интенсивностью (кривая *b*). Далее, E является монотонно растущей функцией I_0 (рис. 7.19).

Как и ожидалось, при малых I_0 стационарное значение E растет по степенному закону, а при больших I_0 насыщается при значении, равном единице. Это нелинейное поведение согласуется с обычно постулируемым механизмом реакции термолюминесценции в стекле борной кислоты (рис. 7.20). Аналогия с двухфотонным процессом, изображенным на рис. 7.15, очевидна. Во время облучения молекулы красителя освобождают долгоживущие триплетные состояния, что является исходной точкой для двухфотонного процесса. Фотоионизация затем приводит к

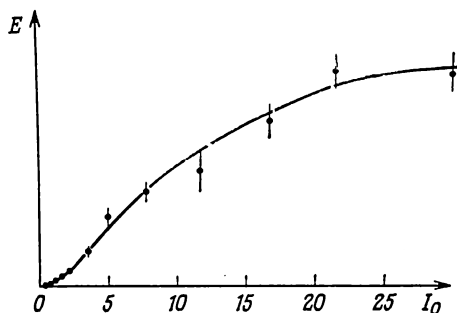


Рис. 7.19. Стационарная зависимость E от I_0 .

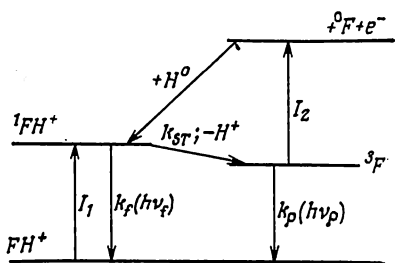


Рис. 7.20. Диаграмма энергетических уровней и переходов при термолюминесценции флуоресценца в стекле борной кислоты.

появлению свободных электронов с последующим образованием атомного водорода путем реакции соединения их с протонами борной кислоты. Тепловая рекомбинация фотоионизованных молекул с атомами водорода приводит к образованию возбужденных синглетных состояний, излучающих свет. Площадь под кривой свечения пропорциональна интенсивности света, испущенного в процессе нагрева. В результате фотоионизации, очевидно, возникают реагенты хемилюминесцентной реакции рекомбинации. Можно, таким образом, предположить, что при заданных экспериментальных условиях интенсивность излучаемого света пропорциональна степени фотоионизации, соответствующей концентрации катион-радикалов флуоресценца. Единственное различие между двухфотонной моделью и флуоресцентной термолюминесценцией заключается в том, что реакция рекомбинации $F^{\cdot+} + H \cdot \rightarrow {}^1FH^+$ входит как процесс первого порядка.

Чтобы исследовать отклик этой системы на флуктуации среды, влияющие на интенсивность падающего света, использовалась установка, совершенно аналогичная той, которая описана в разд. 7.2 при изучении реакции Бриггса — Раушера (подробнее, см. [7.34]). Водяной фильтр, внутри которого в турбулент-

ном потоке воды хаотично движутся тяжелые непрозрачные частицы, случайным образом прерывает падающий световой поток, генерируя таким образом требуемый оптический шум.

Основные экспериментальные результаты приведены на рис. 7.21, где показана зависимость относительного сдвига эффективности

$$\Delta E = (E_t - E_d)/E_d$$

от средней интенсивности света. Здесь E_t и E_d — соответственно интенсивности термолюминесценции, испускаемые после флуктуирующего и детерминированного освещения. Важный эффект

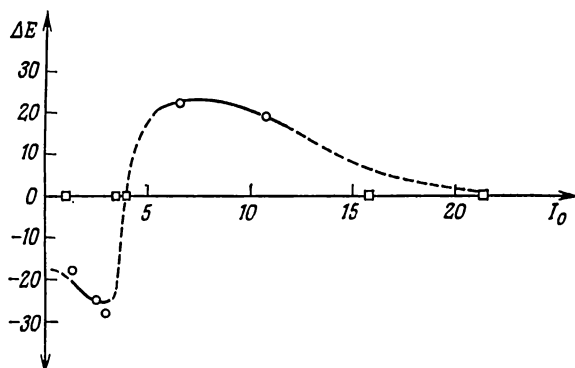


Рис. 7.21. Зависимость ΔE от I_0 .

имеет место при значениях интенсивности I_0 , соответствующих (при детерминированных условиях) области перехода на стационарной кривой, т. е. в окрестности точки перегиба. Изменение положения экстремумов в условиях освещения флуктуирующим светом по сравнению с детерминированными стационарными состояниями может достигать 20 %. При малых значениях I_0 (меньших 3 отн. ед.) эффективность термолюминесценции флуктуирующих систем понижается, в то время как в области больших интенсивностей (превышающих 6 отн. ед.) имеет место обратная ситуация. Другими словами, главный эффект флуктуаций заключается в укрупнении кривой в области перехода. В частности, насыщение перехода в высокоэнергетическое состояние (фотоионизованный краситель) достигается при меньших средних интенсивностях света. Такое поведение можно рассматривать как результат искажения стационарной кривой, которая как бы поворачивается вокруг точки перегиба. Этот результат может представлять большой интерес для практиче-

ской фотохимии и фотобиологии, где часто имеют дело с нелинейными откликами на изменение интенсивности света. Можно представить себе несколько возможных применений этого эффекта.

1) Выход энергии при преобразовании солнечной энергии в электрическую на солнечных электростанциях нелинейно зависит от потока солнечного света. Весьма вероятно, что под влиянием флуктуаций интенсивности света эта величина будет претерпевать макроскопические изменения. Чем сильнее нелинейность полного выхода, тем большего эффекта можно ожидать.

2) Теоретическое изучение процесса преобразования солнечной энергии в системах с водным фотолизом, проведенное недавно [7.37], показало, что в них можно ожидать нелинейного поведения. По-видимому, при этих условиях будет заметно и влияние флуктуаций возбуждающего света на макроскопические свойства таких солнечных преобразователей. Влияние внешнего шума не обязательно оказывается паразитным: например, в системах с рабочей точкой, расположенной выше точки перегиба, флуктуации будут увеличивать эффективность преобразования, а в системах, которые рассчитаны на работу при сравнительно низких интенсивностях, благодаря флуктуациям будет происходить уменьшение эффективности.

3) Особенно замечательно то, что фотосинтез, происходящий в сильно флуктуирующих условиях, как бы сопротивляется влиянию внешнего шума, ведя себя квазилинейным образом в области низких интенсивностей. При этих условиях влияние флуктуаций интенсивности света сильно уменьшается. В этом смысле внешний шум можно рассматривать как фактор эволюционного давления.

7.5.2. Фототермические системы под действием света

Основным этапом процесса, рассматриваемого в настоящем разделе, является реакция изомеризации или простой процесс диссоциации, в котором одна из компонент поглощает свет на заданной частоте и отдает поглощенную энергию системе в форме тепла [7.38—40]. Когда образование светопоглощающей компоненты происходит изотермическим образом, повышение температуры системы и процесс поглощения света могут быть связаны друг с другом положительной обратной связью: с повышением концентрации данной компоненты растет поглощение света и соответственно поднимается температура, так что химическое равновесие все больше и больше сдвигается в сторону преобладания активной компоненты. Мы проведем рассмотрение детерминистических свойств этих систем (в условиях детерми-

нированного освещения), следуя оригинальной работе Нитцана и Росса [7.38] (соответствующий эксперимент см. в [7.40]).

Рассмотрим замкнутую химическую систему, в которой протекает реакция изомеризации вида



которая связана с процессами поглощения света и безызлучательно релаксации с участием только одной компоненты А:



Сделаем следующие предположения:

1) характерный временной масштаб в (7.53) мал по сравнению с (7.52), т. е. процессы возбуждения А при поглощении фотона и релаксации А* мгновенно подстраиваются под концентрацию А, существующую в данный момент времени;

2) кинетические постоянные k_1 и k_2 зависят от освещения только через изменение температуры, вызванное этим освещением. Это допущение оправдано, если безызлучательные процессы происходят быстрее всех других процессов;

3) кинетические постоянные активационным образом зависят от температуры. Равновесная постоянная в (7.52) равна

$$k_1/k_2 = \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT} + \frac{\Delta S}{R}\right) = eK(T); \quad (7.54)$$

4) система пространственно-однородна;

5) поток тепла между системой и ее окружением зависит лишь от разности температур.

Тогда концентрация А и температура T внутри системы подчиняются следующей системе кинетических уравнений:

$$\dot{A} = -(k_1 + k_2)A + k_2a, \quad (7.55)$$

$$\dot{T} = \alpha I A - \beta(T - T_e) - \lambda \dot{A}, \quad (7.56)$$

где $a = A + B = \text{const}$. Внешняя температура равна T_e . Первых два члена в (7.56) описывают изменения температуры за счет обмена энергией с окружением посредством светового и теплового потоков. Интенсивность света равна I . Третий член в (7.56) описывает генерацию тепла при химической реакции. Здесь α , β , γ — постоянные пропорциональности, характеризующие рассматриваемую реакцию и экспериментальную установку. В последующем мы будем предполагать, что концентрация вещества А, определяемая из уравнения (7.55), быстро приходит в равновесие с (7.56), так что концентрация А выражается через температуру. Вводя безразмерные переменные

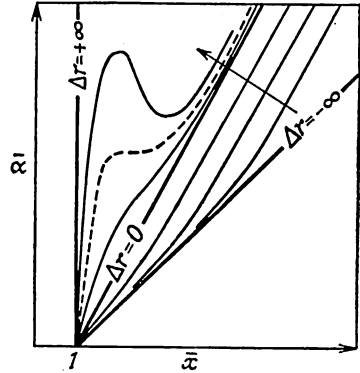
$$X = T/T_e, \quad \bar{a} = (\alpha I a)/\beta T_e, \quad \Delta r = -\Delta H/RT_e, \quad \tau = \beta t, \quad (7.57)$$

мы можем свести систему (7.55, 56) к уравнению с одной переменной

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{\bar{\alpha}}{1 + \varepsilon \exp(\Delta r/X)} - X + 1. \quad (7.58)$$

Стационарное решение этого уравнения как функция α показано на рис. 7.22. При $\Delta r < 0$ (т. е. в случае экзотермической реакции) стационарные кривые $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\bar{X})$ являются монотонными функциями \bar{X} . При увеличении интенсивности наклон кривых не-

Рис. 7.22. Зависимость $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{x})$ для стационарного состояния при фиксированном ε и увеличении Δr (как показано на рисунке стрелкой). Гистерезис имеет место лишь в области значений $0 < \Delta r_c < \Delta r < \infty$. Минимальное значение $\Delta r_c = 4$. Штриховая линия соответствует Δr_c .



прерывно растет от $(1 + \varepsilon \exp \Delta r)$ (при $\bar{X} = 1$) до значения $1 + \varepsilon$ (при $\bar{X} \rightarrow \infty$). При малых значениях $\bar{\alpha}$ и T_e имеем $d\bar{\alpha}/d\bar{X} > 0$ и $d^2\bar{\alpha}/d\bar{X}^2 > 0$ (при $\bar{X} > 1$). Значение $\Delta r = 0$ является точкой перехода, выше которой в интервале $[1, \infty)$ всегда существует значение X , при котором производная $d^2\bar{\alpha}/d\bar{X}^2$ меняет знак. В этой точке одновременно меняет свой знак и $d\bar{\alpha}/d\bar{X}$ при условии, что Δr и ε удовлетворяют равенствам

$$\varepsilon_c = [\Delta r_c \exp(2 - \Delta r_c)]/(\Delta r_c - 4), \quad (7.59)$$

$$X_c = \Delta r_c/(\Delta r_c - 2), \quad \bar{\alpha}_c = 4/(\Delta r_c - 4). \quad (7.60)$$

Если $\Delta H < 0$, то эта критическая точка достигается при уменьшении внешней температуры T_e . В этом детерминистическом анализе стационарных свойств важно то, что необходимым условием бистабильности независимо от значения ε является неравенство $\Delta r > 4$ (см. (7.59, 60)).

7.5.3. Стационарные свойства флуктуирующего светового источника

Будем теперь предполагать, что время корреляции флуктуаций интенсивности света исчезающе мало, т. е. что приближение белого шума оправданно [7.41]. Проинтерпретируем СДУ, со-

ответствующее (7.58), в смысле Ито¹⁾

$$dX_\tau = \{\bar{\alpha}[1 + \varepsilon \exp(\Delta r/X_\tau)] - X_\tau + 1\} d\tau + \bar{\sigma}[1 + \exp(\Delta r/X_\tau)] dW_\tau.$$

При нахождении стационарного решения связанного с СДУ уравнения ФП заметим, что реализация процесса X_τ должна быть ограничена полузамкнутым интервалом $[1, \infty)$. Легко проверить, что аналитическое условие того, что $X = \infty$ является естественной границей, удовлетворяется. Напротив, точка $X = 1$ не является естественной границей. Это следствие того факта, что она — не внутренняя граница задачи, и приближение белого шума приводит к появлению отрицательных реализаций I_t , не имеющих физического смысла. Мы уже сталкивались с этим «нежелательным» свойством гауссовского белого шума в модели цитотоксической реакции, рассмотренной в разд. 7.4. (Отметим, что во всех других моделях отрицательные значения внешнего параметра имеют физический смысл, и подобной проблемы не возникает.) Однако в этой модели носитель $p_s(x)$ ограничивается набором физически допустимых значений переменной состояния: хотя флуктуирующий параметр может стать отрицательным, тем не менее процесс X_t остается ограниченным физически допустимым интервалом $[0, \infty)$. В данном случае проблема более сложна: если X_τ принимает значения, меньшие единицы, то это означает, что носитель $p_s(x)$ более не совпадает с множеством физически допустимых значений переменной состояния. Появляется отличная от нуля вероятность, и в результате флуктуаций интенсивности света температура внутри системы окажется меньше температуры внешнего теплового резервуара. Это неприемлемо и, следовательно, надо искать средство для исправления такой ситуации. Этого можно достичь, выбирая меньшее из зол при наличии двух альтернативных возможностей. Первый путь — отказаться от гауссовского приближения. Плотность вероятности, которая обращается в нуль при отрицательных значениях, не приводит к каким-либо физически бессмысленным результатам. Однако этот радикальный шаг можно сделать лишь в крайнем случае. Как мы уже неоднократно повторяли, можно ожидать, что благодаря центральной предельной теореме в большинстве реальных систем с очень хорошей степенью точности применимо гауссовское распределение. При малых и средних величинах дисперсии по сравнению со средним значением внешнего параметра отрицательные значения появляются с малой, хотя и отличной от нуля вероятностью. Поэтому флуктуации внешних параметров, которые по

¹⁾ В случае интерпретации по Стратоновичу получаются качественно идентичные результаты: напомним, что при этом повсюду в выражениях для экстремумом p_s лишь заменяется σ^2 на $\sigma^2/2$.

природе своей положительны, можно удовлетворительно описывать гауссовским распределением. Лишь при очень больших значениях дисперсии это приближение становится проблематичным и роль нефизичных значений становится заметной. Однако эта проблема действительно здесь возникает, поскольку мы имеем дело с белым шумом, для которого, не строго говоря, дисперсия бесконечно велика. Это означает, что лучше было бы выбрать второй путь и отказаться от приближения белого шума. Однако при этом процесс X_τ становится немарковским. Поэтому такой путь кажется еще менее привлекательным. Если мы хотим сохранить гауссовский характер шума и марковский характер X_t и в то же время исключить нефизичные результаты, остается единственный путь, заключающийся в том, чтобы принять условие, что решение СДУ ограничено физически допустимым интервалом $[1, \infty)$. Этого можно достигнуть, если заставить процесс X_τ претерпевать запаздывающее отражение на границе $x = 1$. Это означает, что X_τ проводит определенное время на этой границе. Справедливость этого приближения можно оценить по величине плотности вероятности, аккумулированной на границе $x = 1$. Пока эта величина мала по сравнению с экстремумами плотности вероятности, принадлежащими носителю $[1, \infty)$, процесс X_τ представляет собой удовлетворительную модель физического процесса и мы можем быть уверены в том, что наблюдаемые явления не обусловлены принятыми граничными условиями.

С этим граничным условием стационарная функция распределения имеет вид [5.12; 7.4]

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ N^{-1} \left[1 + 2f(1) \int_1^x \frac{\phi(z)}{g^2(z)} dz \right], & \text{если } x \geq 1, \end{cases} \quad (7.61)$$

где

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \exp \int_1^z \frac{2f(z')}{g^2(z')} dz', \\ g(z) &= \bar{\sigma}/[1 + \varepsilon \exp(\Delta r/z)] \end{aligned} \quad (7.62)$$

и

$$N = 1 + 2f(1) \int_1^\infty \frac{\phi(z)}{g^2(z)} dz. \quad (7.63)$$

Плотность вероятности, соответствующая (7.61), равна

$$\rho_s(x) = \frac{\delta(x-1)}{N} + 2 \frac{f(1)}{N} \frac{\phi(x)}{g^2(x)}. \quad (7.64)$$

Первый член это δ -функция, взятая с весом $1/N$, она задает плотность вероятности нахождения процесса на границе $x=1$. Экстремумы x_m функции (7.64) в интервале $[1, \infty)$ можно получить обычным образом из (6.36). Выражая α в терминах x_m , имеем

$$\bar{\alpha} = [1 + \varepsilon \exp(\Delta r/x_m)](x_m - 1) + \bar{\sigma}^2 \frac{\Delta r}{x_m^2} \frac{\varepsilon \exp(\Delta r/x_m)}{[1 + \varepsilon \exp(\Delta r/x_m)]^2}. \quad (7.65)$$

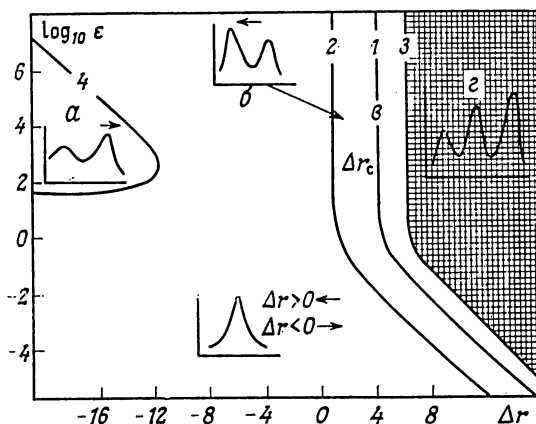


Рис. 7.23. Фазовая диаграмма на плоскости $\Delta r, \varepsilon$, показывающая области би- и тристабильности. При фиксированном значении ε пересечение первой линии при увеличении Δr ($\Delta r > 0$) соответствует точке перехода от одномодового распределения плотности вероятности к двухмодовому; переход происходит при условии, что σ_c^2 больше некоторого *конечного* значения. Δr_c — кривая детерминистических критических точек в случае, когда $\sigma^2 = 0$. В заштрихованной области распределение $p_s(x)$ трехмодовое. Когда интенсивность шума достаточно велика, бистабильность имеет место и при $\Delta r < 0$. Стрелки показывают направление движения пиков по мере увеличения интенсивности шума.

Рис. 7.23 и 7.24 демонстрируют условия, при которых кривые, задаваемые соотношением (7.65), допускают критическую точку, т. е. значения параметров $\Delta r, \varepsilon$ и $\bar{\sigma}^2$, при которых для физически допустимого значения x_m одновременно обращаются в нуль производные $d\bar{\alpha}/dx_m$ и $d^2\bar{\alpha}/dx_m^2$. Кривые на рис. 7.23 задают значения Δr и ε , при которых это условие выполняется. Фазовое пространство $(\Delta r, \varepsilon)$ подразделяется на четыре области:

1) В области *a* функция $p_s(x)$ имеет лишь один экстремум (помимо пика при $x=1$, который присутствует в любом случае) независимо от величины внешних флуктуаций, т. е. значения σ^2 .

2) В области b , несмотря на тот факт, что $\Delta r < 0$, плотность вероятности (7.64) имеет два пика в конечной области значений $\bar{\alpha}$ и $\bar{\sigma}^2$. Эта ситуация более детально показана на рис. 7.25, где приведены кривые экстремумов, определяемые (7.65), при зада-

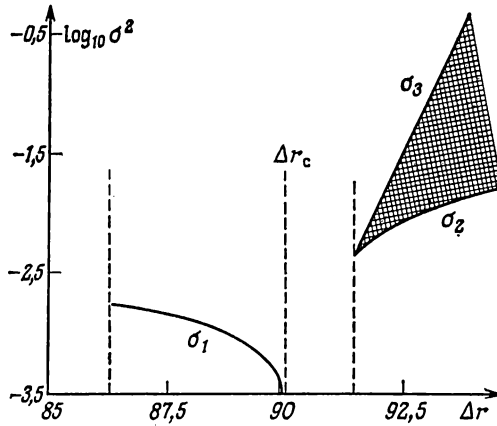


Рис. 7.24. Значения критических интенсивностей шума $\bar{\sigma}_c^2$ для переходов от одномодовых распределений плотности вероятности к двухмодовым (кривая σ_1) и переходов от двухмодового распределения плотности к трехмодовому (заштрихованная область, ограниченная кривыми σ_2 и σ_3). Значение $\epsilon = 6.34 \cdot 10^{-39}$.

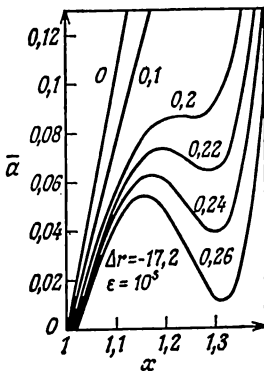


Рис. 7.25. Положение экстремумов $p_*(x)$ для случая бистабильности при $\Delta r < 0$. Кривые даны при различных значениях $\bar{\sigma}^2$.

нии двух параметров $(\Delta r, \epsilon)$ и различных значениях $\bar{\sigma}^2$. Гистерезис имеет место при $\bar{\sigma}^2 > 0,2$. Когда $\bar{\sigma}$ начинает превышать это значение, гистерезис становится все более и более заметным и одновременно сдвигается в сторону более низких значений $\bar{\alpha}$. Подчеркнем, что новый пик распределения, индуцированный

флуктуациями I_t , соответствует внутренним температурам, превышающим их значения в детерминированном случае.

3) В области ε кривая (7.65) проявляет гистерезис. Однако он обусловлен поведением пика вблизи $x=1$. Поскольку эта область содержит детерминистическую критическую кривую, задаваемую (7.60), она подразделяется на две области. Слева от кривой 1 (рис. 7.23) при детерминированных условиях гистерезис отсутствует. Когда значение ε фиксированно и Δr растет от кривой 2 к кривой 1, гистерезис появляется при условии, что $\bar{\sigma}^2$ больше некоторого критического значения (см. кривую σ_1 на рис. 7.24). Это значение стремится к нулю, когда Δr приближается к кривой 1 (σ_1 стремится к нулю как степень расстояния от детерминистической критической точки). Справа от кривой 1 эффект влияния флуктуаций усиливает явление гистерезиса, который существует уже при $\bar{\sigma}^2=0$, и сдвигает гистерезисную кривую в сторону больших значений $\bar{\alpha}$.

4) Область ε обладает свойствами, характерными лишь для флуктуирующих систем и которые не проявляются при каком бы то ни было детерминистическом рассмотрении. В области $\sigma_2 < \bar{\sigma}^2 < \sigma_3$ функция $p_s(x)$ может быть трехмодовой в зависимости от значений $\bar{\alpha}$ (рис. 7.24). Маловероятно, что это трехмодовое поведение является артефактом, обязанным своим появлением приближению гауссовского белого шума, использованного при рассмотрении. Действительно, сравнивая вероятность при $x=1$ с вероятностью в области двух максимумов в узком интервале $\Delta x=10^{-5}$, который в системе $\text{NO}_2\text{—N}_2\text{O}_4$ соответствует $\Delta T \sim 0,001$ К, находим, что первая, как и ожидалось, пренебрежимо мала по сравнению с последней при малых и средних значениях интенсивности шума (табл. 7.2). Это указывает

Таблица 7.2. Параметры плотности вероятности при различных значениях $\bar{\sigma}^2 (\Delta x = 10^{-5}, \varepsilon = 6,34 \cdot 10^{-30}, \Delta r = 92,9, \bar{\alpha} = 0,3)$

| $\bar{\sigma}^2$ | $p_s(1)\Delta x$ | $p_s(x_{m1})\Delta x$ | $p_s(x_{m2})\Delta x$ | $E(X)$ |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------|
| 0,008 | $9,35 \cdot 10^{-13}$ | $1,22 \cdot 10^{-3}$ | 6,74 | 1,297 |
| 0,01 | $7,58 \cdot 10^{-9}$ | $1,15 \cdot 10^{-1}$ | 5,63 | 1,297 |
| 0,013 | $9,84 \cdot 10^{-7}$ | 1,29 | 4,85 | 1,292 |
| 0,0198 | $2,5 \cdot 10^{-4}$ | 17,4 | 3,14 | 1,236 |
| 0,05 | $3,69 \cdot 10^{-2}$ | 75,1 | $3,83 \cdot 10^{-1}$ | 1,049 |

на то, что в экспериментах, где внешний шум принимает только положительные значения, будут получаться сходные результаты, если распределение имеет приблизительно колоколообразную

форму на положительной полуоси, а время корреляции шума достаточно мало.

Резюмируя, можно сказать, что в данной системе шум индуцирует три типа критических точек. Одна, соответствующая кривой 2 на рис. 7.23, представляет собой сдвиг детерминистической критической точки. Две другие, соответствующие кривым 3 и 4, описывают фазовые переходы, индуцированные одним лишь шумом, аналогичные фазовым переходам, индуцированным шумом, в генетической модели.

Глава 8

ВНЕШНИЙ ЦВЕТНОЙ ШУМ

Преимущество приближения белого шума, использованного в предыдущем разделе, заключается в том, что оно позволяет смоделировать временную эволюцию системы диффузионным процессом. Это дает возможность использовать мощный аппарат теории марковских процессов и получить благодаря этому точные аналитические результаты, описывающие поведение систем, находящихся под действием шума. Приближение белого шума представляет собой весьма удобный теоретический прием, хотя с математической точки зрения им надо пользоваться, как уже неоднократно подчеркивалось, с осторожностью. Кроме того, с физической точки зрения следует подчеркнуть, что время корреляции реального шума, сколь бы мало оно ни было, не равно строго нулю. Хотя кажется весьма возможным, что высокочастотный внешний шум можно удовлетворительно описать белым шумом (что подтверждается экспериментальными результатами, приведенными в гл. 7, где продемонстрировано прекрасное качественное согласие с предсказаниями, основанными на приближении белого шума), хотелось бы, чтобы эти интуитивные соображения и соответствующие результаты получили твердое математическое обоснование. Это и является одной из целей настоящей главы.

Основным вопросом, изучавшимся в гл. 3, был анализ перехода к пределу $\tau_{\text{корр}} \rightarrow 0$, так чтобы получающееся в результате состояние оставалось стохастическим, а также исследование свойств белого шума. На данной стадии развития теории фазовых переходов, индуцированных шумом, необходимо еще раз провести анализ перехода от случая реального шума к приближению белого шума. Теперь мы можем детально исследовать два вопроса.

1) Точное определение условий, при которых предсказания, основанные на идеализации белого шума, сохраняют свою силу в пределе исчезающе малых времен корреляции внешнего шума. Это существенно связано с вопросом об обоснованности приближения белого шума; справедливы ли результаты, полученные в

гл. 6, 7 относительно фазовых переходов, индуцированных шумом, и сохраняются ли они в качественной форме также и при использовании других приближений, близких к приближению белого шума?

2) Вопрос о количественных изменениях, к которым приводит наличие малых корреляционных времен внешнего шума.

Кроме рассмотрения этих двух вопросов, которые возникают при описании в терминах шума, близкого к белому шуму, желательно также обобщить наше рассмотрение и выйти за рамки случая высокочастотного внешнего шума. Хотя последний и соответствует широкому классу прикладных задач, очевидно, имеются ситуации, когда характеристические временные параметры системы и шума не отличаются сильно друг от друга. Для того чтобы провести общее рассмотрение фазовых переходов, индуцированных шумом, включающее также и эти случаи, необходимо провести систематическое исследование эффектов влияния корреляций. Это исследование и представляет главный предмет рассмотрения в этой главе и гл. 9.

8.1. Моделирование флуктуаций окружающей среды [дополнительное рассмотрение]

Любая попытка теоретического рассмотрения нелинейных систем, находящихся под действием реального внешнего шума, т. е. шума с отличным от нуля временем корреляции, сталкивается на первый взгляд с двумя трудностями. Во-первых, временная эволюция системы перестает быть марковской. Действительно, как было установлено в гл. 4 и 5, эволюция системы, подверженной действию внешнего шума, является марковской тогда и только тогда, когда шум — белый. Хотя потеря марковости и дает некоторые преимущества, например немарковские процессы имеют более гладкие реализации и, кроме этого, отпадает необходимость в использовании аппарата обобщенных стохастических процессов или специальных исчислений (типа Ито), однако недостатки намного превосходят достоинства немарковского описания. Теряются мощные методы теории марковских процессов, что делает трудным, если не невозможным получение точных результатов. Кроме этого, если в случае белого шума выбор приходится делать лишь между двумя возможностями — гауссовского или пуассоновского шума, то в случае реальных шумов возможностей выбора оказывается несравненно больше.

Выход из этой сложной ситуации может быть найден, если заметить, что немарковское поведение системы, конечно, не исключает возможность того, что шум, создаваемый окружаю-

щей средой, является марковским, хотя и не белым. Действительно, этот случай является хорошим приближением для большого класса реальных систем. В последующем, на внешний шум будет налагаться слабое ограничение, состоящее в том, что он должен быть марковским. Необходимо признать, что это не самый общий случай реального шума, однако можно ожидать, что он соответствует тем ситуациям, которые встречаются в приложениях по следующим двум причинам: 1) как мы увидим несколько позже, в этом случае реализации являются дифференцируемыми функциями; 2) система является немарковской и скоррелированной с окружением. Следовательно, существенные черты реальных систем можно удовлетворительно учесть, если модели флуктуирующей среды выбрать из класса марковских стохастических процессов. При этом мы убиваем двух зайцев сразу. Такой выбор позволяет по-прежнему работать в рамках теории марковских процессов и, таким образом, преодолеть первую трудность. Что же касается модели шума, то, как мы увидим, наш выбор радикально ограничивает возможности, оставляя в большинстве ситуаций лишь процесс Орнштейна — Уленбека в качестве подходящей модели.

Рассмотрим эти вопросы более подробно. Как уже отмечалось, процесс, описывающий эволюцию системы, сам по себе не является марковским. Зная состояние системы в данный момент времени, мы не можем предсказать полностью ее будущую стохастическую эволюцию. Дело обстоит так, потому что состояние среды в данный момент не известно, поскольку рассматривается лишь переменная состояния системы. Если, однако, внешний шум не белый, то предистория системы и состояние шума в данный момент скоррелированы. Следовательно, любая информация о прошлом системы уменьшает наше незнание состояния среды и улучшает наши предсказания о будущей эволюции системы. Другими словами, даже если известно состояние системы в настоящий момент времени, ее прошлое и будущее не являются стохастически независимыми. Они скоррелированы благодаря памяти окружающей среды. Это качественное обсуждение причин немарковского поведения ясно показывает, каким образом можно остаться в рамках марковского описания.

Рассмотрим двумерный процесс, описываемый переменной системы X_t и флуктуирующим параметром ζ_t . Хотя первая компонента процесса, взятая сама по себе, не является марковской, полный двумерный процесс является таковым при некоторых весьма мягких условиях, накладываемых на начальные условия, состоящих, например, в том, что начальное состояние системы не зависит от шума [8.1]. Интуитивно это можно понять следующим образом: знание состояния двумерного процесса в данный момент времени означает, что в этот момент известно состояние

системы и среды. Будущая эволюция системы зависит лишь от ее состояния и состояния среды в данный момент времени, которое является марковским. Это означает, что любое предсказание будущей стохастической эволюции двумерного процесса, основанное на информации о состоянии в данный момент, является наилучшим из всех возможных. Информация о прошлом системы не улучшает этого предсказания. Мы будем считать, что окружающая среда, помимо марковских свойств, обладает также и свойством эргодичности. Шум, вносимый таким окружением, мы будем называть *цветным*.

Имея все это в виду, возвратимся снова к рассмотрению второй трудности, о которой говорилось выше. Как отмечено в гл. 1, флуктуации окружения представляют собой суммарный эффект действия многих слабосвязанных факторов окружающей среды. Центральная предельная теорема дает тогда, что флуктуации внешнего параметра распределены по Гауссу. Это свойство внешнего шума, использованное в предыдущих главах, будет применяться и здесь. Весьма удобным является то обстоятельство, что эти свойства флуктуаций окружения (эргодичность, марковость и гауссовость) ограничивают широкий выбор возможных моделей *всего лишь* одной возможностью. Действительно, теорема Дуба, которая уже использовалась в гл. 4, утверждает, что регулярный стационарный гауссовский марковский процесс с необходимостью является ОУ-процессом.

Таким образом, можно сделать вывод, что для большинства приложений подходящей моделью цветного шума, вносимого окружающей средой, является ОУ-процесс. По этой причине, а также для определенности в этой главе при рассмотрении влияния цветного шума мы будем использовать ОУ-процесс. Однако различные результаты, которые будут получены в этой главе, справедливы и для более общих случаев шума, имеющего либо гауссовский характер (разд. 8.2), либо марковский характер (разд. 8.4). В соответствующих местах мы будем указывать на возможность обобщения результатов на эти классы стохастических процессов.

Даже в простом случае ОУ-процесса остается техническая трудность, которая делает невозможным точное вычисление плотности вероятности системы. Мы должны рассмотреть теперь два СДУ Ито¹⁾:

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) \zeta_t dt, \quad (8.1)$$

$$d\zeta_t = -\gamma \zeta_t dt + \sigma dW_t \quad (8.2)$$

¹⁾ Отметим, что диффузионная матрица постоянна и, следовательно, между интерпретациями по Ито и Стратоновичу не существует различия.

для парного процесса X_t, ξ_t . Как решение СДУ Ито, этот парный процесс является диффузионным процессом и его плотность вероятности представляет собой фундаментальное решение соответствующего УФП:

$$\partial_t p(x, z, t | x_0, z_0) = -\partial_x (f + zg) p(x, z, t | x_0, z_0) + \\ + \partial_z \gamma z p(x, z, t | x_0, z_0) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{zz} p(x, z, t | x_0, z_0). \quad (8.3)$$

Как хорошо известно, стационарная плотность вероятности, соответствующая уравнению ФП с двумя или более переменными, может быть определена только при ограничительных условиях, известных под названием детального баланса [8.2—4]. Уравнение (8.3) не удовлетворяет условию детального баланса, поскольку диффузионная матрица вырождена. Мы покажем, однако, что существует класс моделей, который не подчиняется принципу детального баланса, но для которого можно точно получить не только стационарную плотность вероятности, но даже и зависящую от времени плотность вероятностей переходов. Этот класс моделей будет рассмотрен в разд. 8.3. Их изучение послужит первым шагом в понимании поведения систем, находящихся под действием цветного шума. Однако физический смысл этого класса моделей недостаточно ясен. Поэтому, чтобы подойти к общей проблеме и ответить на вопросы, поставленные в начале этой главы, необходимо обратиться к приближенным методам. Это будет сделано в разд. 8.4, 5 и 6 для двух предельных случаев: 1) случая квазибелого шума (случай флуктуаций, быстрых по сравнению с характерным временем эволюции системы); 2) обратного предельного случая, когда время корреляции шума много больше характеристического времени системы. В разд. 8.7 будет рассмотрен случай нелинейного внешнего шума.

8.2. Некоторые общие вопросы теории дифференциальных уравнений с источниками цветного шума

Перед тем как начинать исследование эффектов влияния цветного шума, необходимо познакомиться с теоретическими методами, используемыми для описания подобных ситуаций. Следует поэтому сделать несколько замечаний по поводу СДУ с источниками цветного шума. Начнем со сравнения СДУ для \tilde{X}_t с источником небелого шума с соответствующим СДУ для \hat{X}_t с белым шумом

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = f(\tilde{X}_t) + \sigma g(\tilde{X}_t) \xi_t \rightarrow d\tilde{X}_t = f(\tilde{X}_t) dt + \sigma g(\tilde{X}_t) \xi_t dt, \quad (8.4)$$

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = f(\hat{X}_t) + \sigma g(\hat{X}_t) \xi_t \rightarrow d\hat{X}_t = f(\hat{X}_t) dt + \sigma g(\hat{X}_t) dW_t. \quad (8.5)$$

Различие между двумя типами СДУ выступает наиболее явно, если записать их в эквивалентной интегральной форме

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_{t_0}^t f(\tilde{X}_s) ds + \sigma \int_{t_0}^t g(\tilde{X}_s) \zeta_s ds, \quad (8.6)$$

$$\hat{X}_t = \hat{X}_0 + \int_{t_0}^t f(\hat{X}_s) ds + \sigma \int_{t_0}^t g(\hat{X}_s) dW_s. \quad (8.7)$$

Первый интеграл в правой части обоих уравнений не представляет никаких трудностей; его можно интерпретировать как обычный римановский интеграл. Напомним, что второй интеграл в (8.7) нельзя интерпретировать как обычный интеграл. Для его точного определения необходимо использовать исчисление Ито или Стратоновича. В отличие от этого второй интеграл в правой части (8.6) можно интерпретировать как обычный римановский интеграл. Дело обстоит так благодаря тому факту, что отличные от нуля корреляции внешнего цветного шума приводят к «гладким», например, непрерывным реализациям шума.

Белый шум — это обобщенный стохастический процесс со значениями, независимыми друг от друга в каждый момент времени. Если сравнивать его с обычными процессами, то можно сказать, что его реализация совершает резкие беспорядочные скачки с бесконечными разрывами в каждый момент времени. Интегрирование в (8.7) приводит к сглаживанию этой реализации, так что решение X_t представляет собой обычный стохастический процесс. Кроме этого, как мы видели в гл. 5, решение СДУ Ито (или Стратоновича) имеет почти наверное непрерывные реализации. Однако реализации X_t наследуют свойства винеровского процесса W_t , т. е., в частности, они почти наверное непрерывны, но повсюду не дифференцируемы. (Напомним, что этим свойством неаналитичности они обладают наряду со свойством марковости.) Это, конечно, означает, что (8.5) нельзя интерпретировать непосредственно как систему обычных дифференциальных уравнений, решение которых служит реализациями процесса X_t , т. е. как систему дифференциальных уравнений, для которых $\omega \in \Omega$.

Ситуация становится совершенно отличной в случае цветного шума. Если ζ_t в (8.4) — источник реального шума, который в отличие от белого шума ξ_t в (8.5) имеет почти наверное непрерывные реализации, то можно ожидать, что решение (8.6) благодаря сглаживающему эффекту интегрирования будет соответствовать процессу \tilde{X}_t с почти наверное дифференцируемыми реализациями. Таким образом, (8.4) можно вполне интерпретировать как систему обычных дифференциальных уравнений для

реализаций. Сформулируем это более точно. Говорят, что стохастический процесс X_t является R -решением (реализуемым решением) дифференциального уравнения со случайной правой частью

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, t), \quad (8.8)$$

если почти наверное реализации X_t подчиняются обыкновенному дифференциальному уравнению [8.5]

$$\frac{dX_t(\omega)}{dt} = f(X_t(\omega), t, \omega). \quad (8.9)$$

Отметим, что если для стохастического дифференциального уравнения вида (8.4) находится R -решение, то ансамбль реализаций не обязательно является стохастическим процессом. Более точно, если мы решаем систему ДУ

$$\frac{dX_t(\omega)}{dt} = f(X_t(\omega)) + \sigma g(X_t(\omega)) \zeta_t(\omega) \quad (8.10)$$

для каждого ω , то надо еще убедиться в том, что для каждого момента времени t определенная таким образом функция X_t , связывающая пространство элементарных событий Ω с пространством состояний $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, является случайной переменной величиной, т. е. удовлетворяет условию (2.8). Если это не так, то R -решение отсутствует, и событию, состоящему в том, что X_t принимает значения в определенном интервале, нельзя приписать никакой вероятности. Поэтому было бы бессмысленным говорить о том, что система с определенной вероятностью находится в данном состоянии. Однако тот факт, что никакого R -решения не существует, не исключает, конечно, возможности существования стохастического процесса X_t , который является решением СДУ в другом смысле. Примером такой ситуации служит случай белого шума, когда, очевидно, не существует R -решения, поскольку (8.4) нельзя интерпретировать как обычное СДУ, но исчисление Ито или Стратоновича придает СДУ (8.4) и его решению точный смысл. Отметим, что R -решение обыкновенного СДУ является решением в самом сильном смысле. Возможны также несколько более слабых определений решения СДУ, например в среднеквадратичном или вероятностном смысле [8.5], аналогичном различным возможностям определения непрерывности и дифференцируемости стохастического процесса. На этом мы закончим краткое рассмотрение некоторых теоретических аспектов, касающихся влияния внешнего шума на нелинейные системы.

8.3. Реальный внешний шум: класс решаемых моделей

Рассмотрим класс систем, описываемых обыкновенным СДУ

$$dX_t = -\alpha g(X_t) H(X_t) dt + \delta \sigma(X_t) \xi_t dt, \quad (8.11)$$

где ξ_t — эргодический, не обязательно марковский, случайный процесс со средним значением, равным нулю и

$$H(x) = \int_x^x dz/g(z). \quad (8.12)$$

Особенность этих систем состоит в том, что посредством преобразования

$$u = H(x) \quad (8.13)$$

мы получаем линейное СДУ

$$dU_t = -\alpha U_t dt + \sigma \xi_t dt. \quad (8.14)$$

Если ξ_t — почти наверное непрерывная выборочная траектория, то процесс

$$\begin{aligned} U_t(\omega) &= U_0(\omega) \exp[-\alpha(t-t_0)] + \int_{t_0}^t \xi_s(\omega) \exp(-\alpha(t-s)) ds = \\ &= U_0(\omega) \exp[-\alpha(t-t_0)] + Y_t(\omega) \end{aligned} \quad (8.15)$$

представляет собой единственное R -решение уравнения (8.14) с начальным условием U_0 в момент t_0 [8.5].

В принципе возможно получить из этого решения иерархию плотностей вероятностей для U_t , $p(u_1, t_1, \dots, u_n, t_n)$, и, следовательно, с помощью обратного преобразования от (8.13) — иерархию плотностей вероятностей и для исходного процесса X_t . В частности, можно определить зависящую от времени плотность вероятности $p(x, t)$ с начальным условием $p(x, t=t_0) = p_0(x)$. На самом деле, редко когда удастся выполнить эту программу, поскольку на этом пути встречаются непреодолимые технические трудности. Имеется однако один класс реальных шумовых процессов, для которых можно очень просто вычислить иерархию для U_t и X_t соответственно — это, безусловно, класс гауссовских процессов. Простота вычислений в этом случае проистекает из двух свойств гауссовских процессов:

- 1) гауссовские процессы полностью характеризуются средним значением и корреляционной функцией;
- 2) случайные переменные, получаемые в результате линейного преобразования совместных гауссовских случайных переменных, распределены по совместному гауссовскому распределению.

Второе свойство лежит в основе того факта (использовавшегося ранее; см. с. 76), что интеграл Y_t является гауссовским процессом, если ξ_t — гауссовский процесс. Таким образом, в соответствии с 1), для того чтобы полностью охарактеризовать случайный процесс Y_t , надо лишь вычислить $E\{Y_t\} = m_Y(t)$ и $E\{(Y_{t_1} - m(t_1))(Y_{t_2} - m(t_2))\} = C_Y(t_1, t_2)$.

В последующем мы будем интересоваться ситуацией, когда в начальный момент времени t_0 система приготавливается таким образом, что она находится в определенном состоянии x_0 . Это означает, что u_0 постоянна и, таким образом, стохастически независима от Y_t . Поэтому процесс U_t является также гауссовским и

$$E\{U_t\} = u_0 \exp[-\alpha(t - t_0)] + E\{Y_t\}, \quad (8.16)$$

$$C_U(t_1, t_2) = E\{(U_{t_1} - E\{U_{t_1}\})(U_{t_2} - E\{U_{t_2}\})\}. \quad (8.17)$$

Для гауссовского процесса Y_t имеем

$$E\{Y_t\} = \int_{t_0}^t E\{\xi_s\} \exp[-\alpha(t - s)] ds = 0, \quad (8.18)$$

поскольку $E\{\xi_s\} = 0$ и

$$C_Y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} C_\xi(\tau_1, \tau_2) \exp[-\alpha(t_1 - \tau_1)] \exp[-\alpha(t_2 - \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (8.19)$$

Отметим, что если известна корреляционная функция $C(\tau_1, \tau_2)$ внешнего шума, то можно определить зависящую от времени плотность вероятности и полную иерархию для U_t и, следовательно, для X_t . Эта процедура использует только гауссовский характер внешнего шума и ни в коей мере не предполагает наличие марковости. Результаты, таким образом, применимы к любому реальному гауссовскому шуму. Без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$. Напомним, что мы рассматриваем лишь ситуации, когда начальное условие u_0 *нестандартное*. Тогда зависящая от времени плотность вероятности имеет вид

$$p(u, t; u_0) = [2\pi C_Y(t, t)]^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(u - u_0 e^{-\alpha t})^2}{C_Y(t, t)}\right). \quad (8.20)$$

Используя обратное преобразование (8.13), мы получаем для исходной переменной x

$$p(x, t; x_0) = [2\pi C_Y(t, t)]^{-1/2} [g(x)]^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{[H(x) - H(x_0) e^{-\alpha t}]^2}{C_Y(t, t)}\right). \quad (8.21)$$

где $1/g(x)$ — якобиан преобразования (8.13). Отметим, что поскольку ни U_t , ни X_t не являются марковскими процессами, то

(8.20, 21) представляют собой не плотности вероятностей переходов, а одновременные плотности вероятностей, описывающие эволюцию системы, приготовленной первоначально в состоянии $x_0(u_0)$.

Учитывая его важность для приложений, мы рассмотрим конкретный случай внешнего цветного шума ξ_t , задаваемого стационарным ОУ-процессом с $N(0, \mu^2/2\gamma)$. Таким образом, корреляционная функция шума $C_\xi(\tau_1, \tau_2)$ задается экспоненциальной затухающей функцией

$$C_\xi(\tau_1, \tau_2) = \frac{\mu^2}{2\gamma} \exp(-\gamma |\tau_1 - \tau_2|). \quad (8.22)$$

Корреляционную функцию $C_Y(t_1, t_2)$ можно найти непосредственно из (8.19), положив $t_1 \geq t_2$:

$$C_Y(t_1, t_2) = \frac{\mu^2}{2\gamma} \frac{\exp[-\alpha(t_1 + t_2)]}{2\alpha(\alpha^2 - \gamma^2)} \cdot [-2\gamma e^{2\alpha t_2} + 2\gamma - 2\alpha e^{(\alpha-\gamma)t_1} + 2\alpha + 2\alpha e^{(\alpha-\gamma)t_1} e^{(\alpha+\gamma)t_2} - 2\alpha e^{(\alpha-\gamma)t_1}], \quad \alpha \neq \gamma \quad (8.23)$$

и

$$C_Y(t_1, t_2) = \frac{\mu^2}{2\gamma} \exp[-\alpha(t_1 + t_2)] \times \left(\frac{e^{2\alpha t_2}}{2\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{(t_1 - t_2)}{2\alpha} e^{2\alpha t_2} - \frac{(t_1 + t_2)}{2\alpha} \right), \quad \alpha = \gamma. \quad (8.24)$$

Положив $t_1 = t_2 = t$, для дисперсии Y_t получаем

$$C_Y(t, t) = \frac{\mu^2}{2\gamma} \left(\frac{1}{\alpha(\alpha + \gamma)} + \frac{e^{-2\alpha t}}{\alpha(\alpha - \gamma)} - \frac{2e^{-(\alpha+\gamma)t}}{\alpha^2 - \gamma^2} \right), \quad \alpha \neq \gamma, \quad (8.25)$$

$$C_Y(t, t) = \frac{\mu^2}{2\gamma} \left(\frac{1}{2\alpha^2} - \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha^2} - \frac{te^{-2\alpha t}}{\alpha} \right), \quad \alpha = \gamma. \quad (8.26)$$

На этом мы заканчиваем общее рассмотрение класса точно решаемых систем, определенных формулой (8.11), и обратимся к изучению частного примера из этого класса — модели Хонглера, которую мы уже рассматривали в случае белого шума (этот пример особенно интересен в связи с фазовыми переходами, индуцированными шумом). Рассмотрим

$$X_t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th}(2\sqrt{2} X_t) + \frac{\xi_t}{4 \operatorname{ch}(2\sqrt{2} X_t)}, \quad (8.27)$$

где ξ_t — стационарный ОУ-процесс, задаваемый СДУ Ито:

$$d\xi_t = -\gamma \xi_t dt + \mu dW_t. \quad (8.28)$$

Преобразование (8.13) соответствует здесь формуле $u(x) = \operatorname{sh}(2\sqrt{2}x)$ и дает линейное уравнение

$$dU_t = -U_t dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \xi_t dt. \quad (8.29)$$

Очевидно, что это уравнение имеет ту же структуру, что и соответствующее уравнение с источником белого шума, именно (6.29) в гл. 6. В соответствии с (8.21) одновременная плотность вероятности для решения (8.27) задается формулой

$$p(x, t; x_0) = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{ch}(2\sqrt{2}x)}{[2\pi C_Y(t, t)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{[\operatorname{sh}(2\sqrt{2}x) - \operatorname{sh}(2\sqrt{2}x_0)e^{-t}]^2}{C_Y(t, t)}\right), \quad (8.30)$$

где

$$C_Y(t, t) = \frac{\mu^2}{4\gamma} \left(\frac{1}{1+\gamma} + \frac{e^{-2t}}{1-\gamma} - \frac{2e^{-(1+\gamma)t}}{1-\gamma^2} \right), \quad \gamma \neq 1 \quad (8.31)$$

или

$$C_Y(t, t) = \frac{\mu^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - te^{-2t} \right), \quad \gamma = 1. \quad (8.32)$$

Здесь $p(x, t; x_0)$ имеет ту же функциональную зависимость от x , что и $p(x, t|x_0)$ в случае белого шума (6.94). Различие между двумя выражениями заключено в корреляционных функциях. Для стационарной плотности вероятностей

$$p_s(x) = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{ch}(2\sqrt{2}x)}{\left(2\pi \frac{\mu^2}{4\gamma(1+\gamma)}\right)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}^2(2\sqrt{2}x)}{\frac{\mu^2}{4\gamma(1+\gamma)}}\right] \quad (8.33)$$

отличие от случая белого шума сводится к тому, что интенсивность белого шума σ^2 заменяется на $\mu^2/\gamma(1+\gamma)$. Как и в случае белого шума, модель Хонглера обладает критической точкой, индуцированной шумом, в которой стационарная плотность вероятности изменяет свой характер с одномодового на двухмодовый. Напомним, что в случае белого шума критическое значение дисперсии, при котором происходит этот переход, равно $\sigma^2 = \sigma_c^2 = 4$. В случае цветного шума, очевидно, имеем

$$\frac{\mu^2}{\gamma(1+\gamma)} = 4 \rightarrow \mu^2 = 4\gamma(1+\gamma). \quad (8.34)$$

Вспомним, кроме того, что предел белого шума соответствует $\mu \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$, так что отношение μ^2/γ^2 остается конечным и равным σ^2 . Следовательно, результат для случая белого шума может быть переписан в виде

$$\sigma_c^2 = (\mu/\gamma)_c^2 = 4, \quad (8.35)$$

который надо сравнить с результатом для случая цветного шума, именно

$$(\mu/\gamma)_c^2 = 4 + (4/\gamma). \quad (8.36)$$

В этой частной модели эффект влияния отличных от нуля корреляций ($\gamma < \infty$) увеличивает то значение интенсивности шума, которого необходимо достичь для индуцирования перехода.

Исследуем теперь динамику экстремумов. Чтобы сравнить поведение со временем модели Хонглера, находящейся под действием цветного шума, со случаем белого шума, возьмем в качестве начального условия $x_0 = 0$. Из (8.30) получаем следующее уравнение, описывающее временную эволюцию экстремумов $x_m(t)$ плотности вероятности:

$$\text{sh}(2\sqrt{2}x_m(t))\left(1 - \frac{\text{ch}^2(2\sqrt{2}x_m(t))}{C_\gamma(t, t)}\right) = 0. \quad (8.37)$$

Очевидно, что точка $x_m = 0$ является экстремумом в любой момент времени t . Первоначально эта точка является максимумом. Если $\mu^2 > 4\gamma(1 + \gamma)$, то состояние $x = 0$ неустойчиво и конечное состояние $x_m = 0$ соответствует минимуму. Как и в случае белого шума, имеет место спиноидальный распад. Плотность вероятности при $x = 0$ становится «плоской» в определенный момент времени t_c , т. е. возникает критическая точка. Затем в окрестности $x = 0$ появляются два максимума, которые при $t \rightarrow \infty$ стремятся к своим стационарным значениям. В критический момент времени t_c точка $x_m = 0$ является тройным корнем. Это происходит тогда, когда дисперсия Y_t становится больше единицы. Таким образом, критический момент времени t_c определяется условием

$$C_\gamma(t_c, t_c) = 1. \quad (8.38)$$

8.4. Разложение плотности вероятности по параметру спектральной ширины

В разд. 8.3 мы получили некоторые предварительные результаты по влиянию отличных от нуля корреляций на фазовые переходы, индуцированные шумом. Эти результаты являются весьма общими. Они справедливы для любого типа реального шума при условии, что он гауссовский. Как мы уже неоднократно указывали, ссылаясь на центральную предельную теорему, этот случай соответствует широкому классу приложений. Подчеркнем еще раз, что шум не обязательно должен быть марковским.

Однако достоинство, заключающееся в произвольном характере природы шума, в значительной мере снижается благодаря тому, что системы, рассмотренные в разд. 8.3, имеют весьма частный вид. Действительно, физический смысл (8.11) остается неясным. Нам не известна какая-либо физико-химическая система, принадлежащая к этому классу. Хотя вышеприведенные результаты и представляют собой первый шаг на пути исследо-

вания сложной проблемы влияния цветного шума, из них нельзя сделать никаких общих выводов, поскольку они применимы лишь к весьма частному классу систем.

Требуется, таким образом, развить более общий подход к вопросу, поставленному в начале этой главы. В этом разделе мы установим применимость анализа в терминах белого шума для системы общего вида с одной переменной и определим те количественные изменения в явлении фазового перехода, индуцированного шумом, которые вносит наличие конечных, хотя и малых времен корреляции шума. Другими словами, мы исследуем случай шума, весьма близкого к белому. Здесь мы рассмотрим лишь цветной шум, в частности ОУ-процесс. Удобным свойством ОУ-процесса является то, что в большом числе приложений он служит наиболее подходящей моделью для описания скоррелированных флуктуаций окружения; кроме этого, подход, развитый ниже, оказывается в наилучшей степени приложим именно к ОУ-процессу. Подчеркнем, однако, что в принципе вся процедура, развитая ниже, может быть проведена и для любого марковского эргодического шума.

Чтобы исследовать поведение нелинейных систем в окрестности гауссовского белого шума, рассмотрим следующую систему СДУ:

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= [h(X_t^\varepsilon) + \lambda g(X_t^\varepsilon)] dt + \frac{\zeta_t}{\varepsilon} g(X_t^\varepsilon) dt = \\ &= f(X_t^\varepsilon) dt + \frac{\zeta_t}{\varepsilon} g(X_t^\varepsilon) dt, \quad x \in [b_1, b_2], \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$d\zeta_t = -\frac{\zeta_t}{\varepsilon^2} dt + \frac{\sigma}{\varepsilon} dW_t, \quad \zeta_0 N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad (8.40)$$

где по предположению функции $h(x)$ и $g(x)$ не зависят от ε . Очевидно, (8.40) определяет стационарный ОУ-процесс с плотностью вероятности

$$p_s(z) = \left(2\pi \frac{\sigma^2}{2}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\sigma^2/2}\right), \quad (8.41)$$

не зависящую от ε , и время корреляции

$$\tau_{\text{корр}} = \varepsilon^2. \quad (8.42)$$

Как видно из (8.42), масштабный множитель ε введен как мера «удаления» от случая белого шума. Действительно, как легко проверить, предел $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствует пределу белого шума, введенному в гл. 3. Чтобы это показать, рассмотрим спектральную плотность ОУ-процесса ζ_t , которая в соответствии с (3.19) задается лоренцевской функцией

$$S(\nu) = \frac{\sigma^2}{2\pi(\varepsilon^2\nu^2 + \varepsilon^{-2})}. \quad (8.43)$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ время корреляции $\tau_{\text{корр}}$ стремится к нулю, а спектральная ширина $\nu_\varepsilon = \varepsilon^{-2}$ (3.17) стремится к бесконечности. Поэтому спектральная функция перестает зависеть от частоты, но, очевидно, зануляется при всех конечных частотах. Это тот самый бесшумовой предел, с которым мы уже встречались в гл. 3 и который получается при устремлении времени корреляции к нулю без обращения внимания на интенсивность флуктуаций. Чтобы избежать перехода к бесшумовому пределу и получить правильный предел белого шума, надо соответствующим образом перенормировать интенсивность флуктуаций, что и делается с помощью введения множителя ε^{-1} в выражение для случайной силы. Тогда спектральная плотность источника $\varepsilon^{-1}\xi_t$ задается выражением

$$S^\varepsilon(\nu) = \frac{\sigma^2}{2\pi(\varepsilon^4\nu^2 + 1)}, \quad (8.44)$$

которое сходится к $\sigma^2/2\pi$ в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, использованная в (8.39, 40) перенормировка подходит для исследования окрестности гауссовского белого шума. Предел белого шума следует теперь из (8.39) при устремлении ε к нулю. Эту масштабную перенормировку можно понимать и с другой точки зрения, дополнительно поясняющей ее смысл. Рассмотрим систему

$$dX_t = f(X_t)dt + \bar{\xi}_t g(X_t)dt,$$

где $\bar{\xi}_t$ есть ОУ-шум, время корреляции которого равно единице измерения времени:

$$d\bar{\xi}_t = -\bar{\xi}_t dt + \sigma dW_t, \quad \bar{\xi}_0 N(0, \sigma^2/2).$$

Чтобы исследовать окрестность белого шума, т. е. флуктуации среды, быстрые на макроскопической временной шкале, естественно сделать шум более высокочастотным, рассматривая его на временном масштабе $t \rightarrow t/\varepsilon^2$, т. е. $\xi_t = \bar{\xi}_{t/\varepsilon^2}$. Кроме этого, амплитуду шума следует увеличить на множитель ε^{-1} , поскольку

$$S_\xi(\nu) = \int e^{it\nu} E\{\xi_t \xi_0\} dt = \varepsilon^2 S_{\bar{\xi}}(\varepsilon^2 \nu).$$

Общие правила исследования окрестности белого шума можно вывести из приведенных ранее соображений [5.9]. Рассмотрим систему общего вида

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t, \bar{\xi}_t)dt,$$

где g — известный (возможно, нелинейный) шум $\bar{\xi}_t$. Предположим, что для фиксированного x

$$E\{g(x, \bar{\xi}_t)\} = 0.$$

Это означает, что любой систематический эффект влияния внешнего шума, т. е. эффект влияния его среднего значения, которое может быть отличным от нуля, учтен в функции $f(X_t)$, так что g — чисто шумовой член. Тогда уравнение, описывающее влияние шума, близкого к белому шуму, имеет вид

$$dX_t^e = f(X_t^e) dt + \frac{1}{\varepsilon} g(X_t^e, \xi_t) dt, \quad (8.39a)$$

где $\xi_t = \bar{\xi}_{t/\varepsilon}$. Предел белого шума соответствует при этой масштабной перенормировке просто переходу $\varepsilon \rightarrow 0$. Случай нелинейного внешнего шума будет снова рассматриваться в разд. 8.7. Сейчас же мы возвратимся к рассмотрению парного процесса (X_t^e, ξ_t) , определенного формулами (8.39, 40).

Этот процесс является диффузионным процессом, поскольку он определен системой СДУ Ито (если X_t^e и ξ_t не зависят от W_t). Плотность вероятности переходов для него задается фундаментальным решением следующего УФП:

$$\partial_t p^e(x, z, t) = \left(\frac{F_1}{\varepsilon^2} + \frac{F_2}{\varepsilon} + F_3 \right) p^e(x, z, t), \quad (8.45)$$

где

$$F_1 = \partial_z z + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{zz}, \quad (8.46)$$

$$F_2 = -z \partial_x g(x), \quad (8.47)$$

$$F_3 = -\partial_x f(x). \quad (8.48)$$

Как обычно, сначала исследуем стационарное состояние системы. Поскольку (X_t^e, ξ_t) — это двумерный диффузионный процесс с вырожденной диффузионной матрицей, т. е. (8.39) для X_t^e не содержит членов dW_t , то в общем случае невозможно получить точные аналитические выражения для стационарного решения УФП, именно (8.45), или для плотности вероятности $p_s^e(x)$. Последняя же функция представляет главную цель нашего исследования, поскольку именно она описывает стационарное состояние системы. Сталкиваясь с невозможностью получения общего выражения для стационарного решения (8.45), мы должны прибегнуть к приближенной процедуре для исследования влияния шума, близкого к белому шуму. В нашей задаче имеется очевидный малый параметр — масштабный множитель ε , измеряющий степень отклонения шума от белого. Вид оператора Фоккера — Планка предполагает следующее разложение для плотности вероятностей переходов:

$$p^e(x, z, t) = p_0(x, z, t) + \varepsilon p_1(x, z, t) + \varepsilon^2 p_2(x, z, t) + \dots \quad (8.49)$$

и, в частности, для стационарной плотности вероятностей

$$p_s^e(x, z) = p_0(x, z) + \varepsilon p_1(x, z) + \varepsilon^2 p_2(x, z) + \dots \quad (8.50)$$

Это — разложение по корню квадратному из времени корреляции или по квадратному корню из обратной спектральной ширины. Стационарная плотность вероятности $p_s^e(x, z)$ должна быть нормирована во всех порядках по ε . Это означает, что

$$\int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{b_1}^{b_2} p_0(x, z) dx dz = 1 \quad (8.51)$$

и

$$\int_{z=-\infty}^{+\infty} \int_{b_1}^{b_2} p_k(x, z) dx dz = 0. \quad (8.52)$$

Очевидно, мы имеем

$$\int_{b_1}^{b_2} p^e(x, z) dx = p_s(z), \quad \forall \varepsilon, \quad (8.53)$$

поскольку стационарная плотность вероятности для ОУ-процесса ξ_t не зависит от ε (8.41), что дает более сильное условие

$$\int_{b_1}^{b_2} p_k(x, z) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.54)$$

Подставляя (8.50) в стационарное выражение (8.45) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\varepsilon^{-2}: F_1 p_0(x, z) = 0, \quad (8.55)$$

$$\varepsilon^{-1}: F_1 p_1(x, z) = -F_2 p_0(x, z), \quad (8.56)$$

$$\varepsilon^{k-2}: F_1 p_k(x, z) = -F_2 p_{k-1}(x, z) - F_3 p_{k-2}(x, z), \quad k = 2, 3, \dots \quad (8.57)$$

Отметим, что F_1 — это оператор Фоккера — Планка для ОУ-процесса ξ_t , который действует, конечно, лишь на вторую переменную z . Это означает, что плотность вероятности $p_s^e(x, z)$ факторизуется в низшем порядке теории возмущений. Другими словами, в низшем порядке по ε переменная, описывающая систему, и флуктуирующий параметр стохастически не зависят друг от друга в один и тот же момент времени

$$p_0(x, z) = p_0(x) p_s(z). \quad (8.58)$$

Очевидно, что такая ситуация преимущественно встречается в случае белого шума. Здесь $p_s(z)$ — стационарная плотность ве-

роятности шума ξ_t , задаваемая (8.41). Как видно из вышесказанного, функция $p_0(x)$ должна быть плотностью вероятностей и, в частности, удовлетворять условию

$$\int_{b_1}^{b_2} p_0(x) dx = 1. \quad (8.59)$$

Очевидно, что этого условия далеко не достаточно для определения $p_0(x)$. Это, однако, не означает, что наше допущение (8.50) относительно $p_s^e(x, z)$ не справедливо и что e не является правильным параметром разложения. Как мы вскоре увидим, функция $p_0(x)$ получается из условия разрешимости, накладываемого на уравнения более высокого порядка (8.56, 57). Эта ситуация встречается при разложении в ряды, с ней, например, приходится часто сталкиваться при проведении бифуркационного анализа. Удобно записать $p_k(x, t)$ в виде

$$\begin{aligned} p_k(x, z) &= p_s(z) r_k(x, z), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ r_0(x, z) &= r_0(x) = p_0(x). \end{aligned} \quad (8.60)$$

Формулы (8.56, 57) преобразуются к виду

$$F_1^+ r_1(x, z) = z \partial_x g(x) r_0(x) = I_1(x, z), \quad (8.61)$$

$$\begin{aligned} F_1^+ r_k(x, z) &= [z \partial_x g(x) r_{k-1}(x, z) + \partial_x f_x r_{k-2}(x, z)] = \\ &= I_k(x, z), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (8.62)$$

Чтобы получить (8.61, 62), мы использовали тот факт, что $p_s(z)$ является стационарным решением УФП (4.53) для ОУ-процесса, т. е. $F_1 p_s(z) = 0$. Далее F_1^+ есть обратный оператор Колмогорова для ОУ-процесса:

$$F_1^+ = -z \partial_z + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{zz}. \quad (8.63)$$

Собственные значения F_1^+ и F_1 совпадают, и, в частности, они имеют нулевые собственные значения. Таким образом, оператор, обратный к F_1^+ , получить невозможно и соответственно невозможно записать решения уравнений (8.61, 62) в виде $r_k(x, z) = F_1^{+^{-1}} I_k(x, z)$. Следовательно, (8.61, 62) должны удовлетворять условию разрешимости, известному как альтернатива Фредгольма. Чтобы доказать это и получить это условие, возьмем скалярное произведение от обеих частей (8.61, 62) с функцией $p_s(z)$:

$$\int_{\mathbb{R}} p_s(z) F_1^+ r_k(x, z) dz = \int_{\mathbb{R}} p_s(z) I_k(x, z) dz, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.64)$$

Обратный оператор Колмогорова является сопряженным к оператору Фоккера — Планка, если диффузионный процесс имеет естественные границы. Действие сопряженного оператора в данном случае означает интегрирование по частям. ОУ-процесс действительно имеет естественные границы, и мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}} p_s(z) F_1^+ r_k(x, z) dz = \int_{\mathbb{R}} r_k(x, z) F_1 p_s(z) dz = 0, \\ \text{поскольку } F_1 p_s(z) = 0. \quad (8.65)$$

Совместно с (8.64) это означает, что неоднородные члены I_{kxz} должны быть ортогональны нулевому пространству обратного оператора F_1^+ , что означает

$$\int_{\mathbb{R}} p_s(z) I_k(x, z) dz = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.66)$$

Это условие, известное как альтернатива Фредгольма, и является условием того, что (8.61, 62) обладает решением.

Теперь мы можем продолжить вычисление $p_s^e(x)$ систематическим образом. В порядке ε^{-1} альтернатива Фредгольма (8.66) тривиальным образом удовлетворяется

$$\int_{\mathbb{R}} p_s(z) z \partial_x g(x) r_0(x) dx = E\{\xi_t\} \partial_x g(x) r_0(x) = 0. \quad (8.67)$$

Из (8.61) следует, что общий вид $r_1(x, z)$ представляет собой сумму однородного решения (8.61), которое задается произвольной функцией $H_1(x)$, зависящей лишь от x и частного решения. Отметим, однако, что функция $H_1(x)$ должна быть совместной с условием нормировки (8.54). Частное решение (8.61), как легко видеть, равно $-I_1(x, z)$, следовательно, функция

$$r_1(x, z) = H_1(x) - I_1(x, z) \quad (8.68)$$

есть общее решение (8.61). На данный момент кажется, что мы лишь усложнили свою задачу. Мы имеем теперь две функции $r_0(x)$ и $H_1(x)$, которые требуют своего определения. Перейдем, однако, к следующему порядку по ε . В порядке ε^0 (8.62) имеет вид

$$F_1^+ r_2(x, z) = z \partial_x g(x) [H_1(x) - z \partial_x g(x) r_0(x)] + \partial_x f(x) r_0(x), \quad (8.69)$$

где мы выразили r_1 посредством (8.68). К счастью, в этом порядке альтернатива Фредгольма тривиально не выполняется, что дает возможность определить $r_0(x)$. Это приводит к следующему уравнению:

$$-\frac{\sigma^2}{2} \partial_x g(x) \partial_x(x) r_0(x) + \partial_x f(x) r_0(x) = 0, \quad (8.70)$$

или эквивалентному:

$$-\partial_x \left[f(x) + \frac{\sigma^2}{2} g'(x) g(x) \right] r_0(x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} g^2(x) r_0(x) = 0. \quad (8.71)$$

Здесь фигурирует оператор Фоккера — Планка, соответствующий трактовке (8.39) в терминах белого шума, т. е. это стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t. \quad (8.72)$$

Тот результат, что СДУ (8.72) следует интерпретировать в смысле Стратоновича, конечно, можно было ожидать в свете теоремы Вонга и Закаи, которая рассмотрена в гл. 5 [5.8]. Как установлено Бланкеншипом и Папаниколау [5.9], вышеприведенный результат, заключающийся в том, что СДУ Стратоновича (8.72) является пределом белого шума для (8.39), справедлив не только для ОУ-процесса, но и для очень широкого класса процессов с цветным шумом ζ_t , включая даже процессы со случайными прыжками. Техника, использованная ими для обобщения теоремы Вонга и Закаи, стимулировала развитие метода теории возмущений, представленного в данном разделе [8.6]. Поскольку функция $r_0(x)$ должна быть нормирована на единицу, она совпадает со стационарной плотностью вероятности p_s диффузионного процесса X_t , задаваемого (8.72): $p_s(x) \equiv r_0(x)$. Теперь низший порядок стационарной плотности распределения определен полностью. Как мы видели, для полного определения нулевого порядка разложения следует перейти ко второму порядку и рассмотреть соответствующую альтернативу Фредгольма. Оказывается, что и в общем случае для вычисления стационарной плотности вероятностей вплоть до k -го порядка следует использовать схему теории возмущений до $k+2$ порядка включительно. Используя полученные выше результаты, мы можем записать $r_1(x, z)$ в виде

$$r_1(x, z) = H_1(x) - \frac{2}{\sigma^2} \frac{f(x)}{g(x)} p_s(x) z. \quad (8.73)$$

Здесь функция $H_1(x)$ все еще не определена. Как уже отмечено, этот поправочный член порядка ε может быть полностью определен при вычислении до членов порядка ε^3 . Уравнение для второго поправочного члена имеет вид

$$F_1^+ r_2(x, z) = -z^2 \partial_x \left[\frac{2}{\sigma^2} f(x) p_s(x) \right] + z \partial_x [g(x) H_1(x)] + \partial_x f(x) p_s(x). \quad (8.74)$$

Общее решение (8.74) задается формулой

$$r_2(x, z) = \frac{z^2}{\sigma^2} \partial_x [f(x) p_s(x)] - z \partial_x [g(x) H_1(x)] + H_2(x), \quad (8.75)$$

где снова $H_2(x)$ — произвольная функция, зависящая лишь от x , которая, однако, должна быть совместной с условием нормировки (8.54). Теперь мы можем продолжить вычисления вплоть до порядка ϵ^3 и применить условие альтернативы Фредгольма к правой части (8.62) при $k = 3$. Это дает

$$-\frac{\sigma^2}{2} \partial_x [g(x) \partial_x g(x) H_1(x)] + \partial_x f(x) H_1(x) = 0. \quad (8.76)$$

Положив $H_1(x) = p_s(x) \tilde{H}_1(x)$, получаем, что

$$\frac{\sigma^2}{2} \partial_x [g^2(x) p_s(x) \partial_x \tilde{H}_1(x)] = 0 \quad (8.77)$$

и, таким образом,

$$\tilde{H}_1(x) = \frac{2C_1}{\sigma^2} \int^x \exp \left[-\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{\tilde{f}(u)}{g^2(u)} du \right] dx' + C_2 = C_1 G(x) + C_2, \quad (8.78)$$

где

$$\tilde{f}(u) = f(u) + \frac{\sigma^2}{2} g'(u) g(u), \quad (8.79)$$

а C_1, C_2 — постоянные. Условие нормировки (8.54), примененное к первому поправочному члену, дает

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(x) \left[\tilde{H}_1(x) - \frac{2}{\sigma^2} \frac{f(x)}{g(x)} z \right] dx = 0. \quad (8.80)$$

Последний интервал в (8.80) обращается в нуль для систем, имеющих внутренние недостижимые границы b_1, b_2 , поскольку

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(x) \frac{2}{\sigma^2} \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_{b_1}^{b_2} \partial_x [g(x) p_s(x)] dx = g(x) p_s(x) \Big|_{b_1}^{b_2}. \quad (8.81)$$

Это означает, что должно выполняться условие

$$\int_{b_1}^b p_s(x) \tilde{H}_1(x) dx = C_1 \int_{b_1}^{b_2} p_s(x) G(x) dx + C_2 = 0. \quad (8.82)$$

В приложениях обычно одна из границ b_1 и b_2 диффузионного процесса, описывающего систему, находящуюся под действием белого шума среды, является внутренней недоступной границей. Во всех модельных системах, рассмотренных в предыдущих главах, обе границы являются внутренними и недоступными, за исключением системы Нитцана — Росса, в которой нижняя граница регулярна и лишь верхняя граница естественная. Здесь мы ограничимся наиболее часто встречающимся в приложениях случаем. Схема теории возмущений будет сформу-

лирована явно лишь для систем, у которых обе границы являются естественными в смысле Гихмана — Скорохода (ГС). Это внимание к природе границ обусловлено тем фактом, что функция $H_1(x)$, задаваемая (8.78), связана с классификационным критерием L_1 . Действительно: $L_1(b_1) = H_1(b_1)$. Поскольку мы рассматриваем только системы с естественными границами, функция $H_1(x)$ расходится в b_i . Напомним, однако, что

$$p_s^e(x, z) = p_s(x) p_s(z) \left\{ 1 + \varepsilon \left[\dot{H}_1(x) - \frac{2}{\sigma^2} \frac{f(x)}{g(x)} z \right] + O(\varepsilon^2) \right\}. \quad (8.83)$$

Следовательно, как это очевидно уже из (8.80, 82) к нашему неудобству, важным оказывается не только поведение $H_1(x)$, но также и $p_s H_1(x)$. Расходимость $H_1(x)$ вблизи b_i не означает обязательно и наличия расходимости (8.82). Однако сравнение (8.82) с классификационной схемой Феллера показывает, что

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(x) G(x) dx = \infty, \quad (8.84)$$

если по крайней мере одна граница b_i также естественная в смысле Феллера. Рассмотрим особо важный случай, когда одна из границ, скажем b_1 , конечна. Тогда этот случай может быть сведен к случаю $b_1 = 0$ путем простого сдвига переменной от x к $x - b_1$. Для часто встречающегося случая, когда коэффициенты дрейфа и диффузии линейно стремятся к нулю вблизи этой границы, т. е. $f(x) = O(x)$ и $g(x) = O(x)$, легко проверить, что b_i является естественной границей в смысле Феллера, если она естественна в смысле Гихмана и Скорохода. Действительно, используя $f(x) = \bar{f}_1(x) + O(x^2)$ и $g(x) = x + O(x^2)$, имеем для $h_2(x)$ вблизи 0 следующее выражение:

$$\begin{aligned} h_2(x) &= x^{-2} \exp \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_{x/2}^x \frac{f_1 x'}{x'^2} dx' \right) \int \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2} \int \frac{f_1 z'}{z'^2} dz' \right) dz = \\ &= x^{(2f_1/\sigma^2)-2} \int z^{-(2f_1/\sigma^2)} dz = x^{-1}, \quad f_1 = \bar{f}_1 + \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned} \quad (8.85)$$

не интегрируемое вблизи нуля.

Важный результат, который остается, заключается в том, что если границы b_i диффузионного процесса X_t , задаваемого (7.72), являются естественными в смысле Гихмана и Скорохода, а по меньшей мере одна из них — в смысле Феллера, тогда интеграл в (8.82) расходится. Это означает, что постоянная C_1 должна равняться нулю и в свою очередь $C_2 = 0$. Это означает далее, что функция $H_1(x)$ тождественно равна нулю во всех тех системах, которые имеют по крайней мере одну естественную границу в смысле Феллера. Хотя это выполняется для большин-

ства модельных систем, рассмотренных до сих пор, т. е. таких, что $f(x) \sim x$ и $g(x) \sim x$ при малых x , генетическая модель является примечательным исключением. Действительно, как мы видели в гл. 5, границы, являющиеся естественными в смысле Гихмана — Скорохода, могут быть естественными и входными в смысле Феллера. Поскольку входные границы характеризуются тем, что любая вероятность, которая первоначально им приписывается, перетекает в интервал (b_1, b_2) , можно ожидать, что любая модель, в которой коэффициент дрейфа положителен (отрицателен) на нижней (верхней) границе и в которой диффузия зануляется на этой границе, обладает входной границей. Рассмотрим класс моделей, для которых $b_1 = 0$ (что может быть достигнуто простым сдвигом, если пространство состояний конечно или полубесконечно), $f(x) = f_0 + f_1 x + O(x^2)$ при $f_0 > 0$ и $g(x) = x + O(x^2)$. Очевидно, генетическая модель проявляет эти свойства вблизи $b_1 = 0$. Поскольку генетическая модель симметрична по отношению к $\tilde{x} = 1/2$ (разд. 6.8), то природа границы $b_2 = 1$ та же, что и b_1 . Ранее было установлено, что обе границы являются естественными в смысле Гихмана и Скорохода. Чтобы установить это в общем случае для вышеописанного класса моделей, рассмотрим $\phi(x)$ вблизи 0:

$$\begin{aligned}\phi(x) &\simeq \exp \left[-\frac{2}{\sigma^2} \int^x dx' (f_0 + f_1 x' + \dots) / x'^2 \right] = \\ &= \exp \left\{ -\frac{2}{\sigma^2} \left[-\frac{f_0}{x} + f_1 \ln x + O(x) \right] \right\} = \\ &= x^{(-2f_0/\sigma^2)} \exp \left[\frac{2f_0}{\sigma^2 x} + O(x) \right].\end{aligned}\quad (8.86)$$

Эта функция, очевидно, не интегрируема вблизи нуля. Чтобы показать, что граница $b_1 = 0$ является входной, мы должны установить интегрируемость $h_2(x)$ вблизи нуля:

$$\begin{aligned}h_2(x) &\simeq x^{-2} \exp \left[\frac{2}{\sigma^2} \left(-\frac{f_0}{x} + f_1 \ln x + f_2 x + \dots \right) \right] \times \\ &\times \int_{x_0}^x \exp \left[-\frac{2}{\sigma^2} \left(-\frac{f_0}{z} + f_1 \ln z + \dots \right) \right] dz.\end{aligned}\quad (8.87)$$

Сначала исследуем поведение $\int^x \phi(z)$ вблизи нуля:

$$\int_{x_0}^x z^{(-2f_0/\sigma^2)} \exp \left(\frac{2f_0}{\sigma^2} \frac{1}{z} \right) dz = - \int_{1/x_0}^{1/x} u^{(12f_0/\sigma^2 - 2)} \exp \left(\frac{2f_0}{\sigma^2} u \right) du, \quad (8.88)$$

$$\text{где } u = 1/z = - \int_{x/x_0}^1 x^{(2-[2f_1/\sigma^2])} v^{([2f_1/\sigma^2]-2)} \exp\left(\frac{2f_0}{\sigma^2} \frac{v}{x}\right) \frac{dv}{x}, \quad (8.89)$$

где $u = v/x$.

Нас интересует поведение $\int \phi(z) dz$ вблизи нуля, где $1/x$ велико, поэтому данный интеграл можно вычислить методом быстрого спуска. Имеем

$$\int_x^\infty \phi(z) dz \simeq x^{(1-[2f_1/\sigma^2])} \frac{\exp\left(\frac{2f_0}{\sigma^2} \frac{1}{x}\right)}{2f_0/\sigma^2 x} = \frac{\sigma^2}{2f_0} x^{(2-[2f_1/\sigma^2])} \exp\left(\frac{2f_0}{\sigma^2} \frac{1}{x}\right). \quad (8.90)$$

Следовательно, $h_2(x)$ вблизи нуля описывается выражением

$$h_2(x) \simeq x^{([2f_1/\sigma^2]-2)} \exp\left(-\frac{2f_0}{\sigma^2 x}\right) \cdot \frac{\sigma^2}{2f_0} x^{(2-[2f_1/\sigma^2])} \times \\ \times \exp\left(\frac{2f_0}{\sigma^2} \frac{1}{x}\right) = \frac{\sigma^2}{2f_0}. \quad (8.91)$$

Следовательно, функция $h_2(x)$ интегрируема вблизи нуля, т. е. $b_1=0$ является входной границей для моделей с $f(x)=f_0 + + O(x)$ и $g(x)=x + O(x^2)$. Отсюда следует, что если ни одна из границ b_1 и b_2 не является естественной в смысле Феллера, т. е. обе они входные, то интеграл в (8.82) существует

$$\int_{b_1}^{b_2} p_s(x) G(x) dx = \int_{b_1}^{b_2} h_2(x) dx = i < \infty. \quad (8.92)$$

В этом случае (8.82) означает

$$C_1 i + C_2 = 0. \quad (8.93)$$

Имеется, однако, второе условие, которому должна удовлетворять стационарная плотность вероятности $p_s^e(x, z)$ при любом z , именно $p_s^e(x, z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, если нуль является входной границей. Интуитивно это легко понять. При малых x имеем

$$dX_t = (f_0 + \bar{f}_1 X_t) dt + \frac{\zeta_t}{\varepsilon} X_t dt, \quad (8.94)$$

т. е. процесс движется из точки в интервал (x, b_2) при условии, что значения ζ_t не слишком отрицательны. Этот факт отражает то свойство входной границы, что любая вероятность, приписанная ей, уходит внутрь интервала. Кроме того, формула (8.94) показывает, что при любых t на границе $b_1=0$ не может скапливаться никакой вероятности, т. е. $p_s^e(x, z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, если

вероятность того, что шумовой процесс имеет монотонно уменьшающуюся неограниченную реализацию, равна нулю, как это имеет место для ОУ-процесса. Очевидно, что только те реализации шума, которые становятся все более отрицательными, по мере того как процесс X_t приближается к границе, могут приводить к появлению отличного от нуля значения стационарной плотности вероятности $p_s^e(x, z)$ на границе $b_1 = 0$. Этим соображениям можно придать точный смысл, если использовать теорию стохастических процессов, изложенную, например, в [8.1], и в частности аргументы контролируемости (метод трубок [6.8]). Однако, поскольку результат столь очевиден интуитивно, а точное изложение основных положений качественной теории заняло бы много места, мы не будем этого делать.

Тот факт, что должно быть выполнено условие $p_s^e(0, z) = 0$, означает, в частности, что $p_s(0)p_s(z) [1 + \varepsilon r_1(0, z)] = O(\varepsilon^2)$. Следовательно, величина $p_s(x) \times \tilde{H}_1(x)$ должна стремиться к нулю при $x \rightarrow 0$, поскольку $p_s(x)(2/\sigma^2)f(x)g^{-1}(x) \rightarrow 0$ на входной границе. Поскольку $h_2(x) \rightarrow \sigma^2/2f_0$ при $x \rightarrow 0$ (8.91), в дополнение к (8.93) имеем

$$C_1\sigma^2/2f_0 = 0. \quad (8.95)$$

Это означает, что $C_1 = 0$ и (8.93) дает $C_2 = 0$. Следовательно, мы можем сделать вывод, что также и для входной границы функция $\tilde{H}_1(x)$ должна тождественно обращаться в нуль. Общайший результат нашей схемы теории возмущений выражается в виде

$$\tilde{H}_1(x) \equiv 0. \quad (8.96)$$

Поправка первого порядка теперь полностью определена и имеет вид

$$r_1(x, z) = -\frac{2}{\sigma^2} \frac{f(x)}{g(x)} p_s(x) z. \quad (8.97)$$

Теперь мы полностью определили члены нулевого и первого порядка для совместной плотности вероятностей $p_s^e(x, z)$. Однако в действительности мы интересуемся плотностью вероятностей $p_s^e(x)$ для одной лишь переменной состояния

$$p_s^e(x) = \int_{\mathbb{R}} p_s^e(x, z) dz = \int_{\mathbb{R}} dz p_s(z) [p_s(x) + \varepsilon r_1(x, z) + O(\varepsilon^2)]. \quad (8.98)$$

Поскольку функция $r_1(x, z)$ пропорциональна z , поправка первого порядка в $p_s^e(x)$ тождественно равна нулю. По этой причине следует продолжить вычисления и определить $p_s^e(x)$ вплоть до порядка ε^2 . Отметим снова, что это требует рассмотрения

альтернативы Фредгольма в четвертом порядке по ε ($\sim \varepsilon^4$ для определения все еще не известной функции $H_2(x)$). Для определения в этом порядке альтернативы Фредгольма, необходимо знать функцию $r_3(x, z)$, которую можно найти непосредственно

$$r_3(x, z) = -\frac{z^3}{3\sigma^2} \partial_x [g(x) \partial_x f(x) p_s(x)] - z \partial_x [g(x) H_2(x) + \\ + g(x) \partial_x f(x) p_s(x) - \frac{2}{\sigma^2} \frac{f^2(x)}{g(x)} p_s(x)] + H_3(x). \quad (8.99)$$

Альтернатива Фредгольма в четвертом порядке тогда имеет вид

$$-\frac{\sigma^2}{4} \partial_x [g(x) \partial_x g(x) \partial_x f(x) p_s(x)] + \frac{\sigma^2}{2} \partial_x g(x) \times \\ \times \partial_x \left[\frac{2}{\sigma^2} \frac{f^2(x)}{g(x)} p_s(x) - g(x) H_2(x) - g(x) \partial_x f(x) p_s(x) \right] + \\ + \frac{1}{2} \partial_x f(x) \partial_x f(x) p_s(x) + \partial_x f(x) H_2(x) = 0. \quad (8.100)$$

Используя тот факт, что $p_s(x)$ задается в виде (6.13), и положив $H_2(x) = p_s(x) \tilde{H}_2(x)$, мы можем записать (8.100) в виде

$$\frac{1}{2} \left[f(x) - \frac{\sigma^2}{2} g(x) g'(x) \right] \partial_x f(x) p_s(x) - \frac{3}{4} \sigma^2 g^2(x) \partial_{xx} f(x) p_s(x) + \\ + g(x) \partial_x \frac{f^2(x)}{g(x)} p_s(x) - \frac{\sigma^2}{2} g^2(x) p_s(x) \tilde{H}_2'(x) - \\ - \frac{\sigma^2}{2} g(x) g'(x) \partial_x f(x) p_s(x) = \tilde{C}_1. \quad (8.101)$$

После интегрирования и преобразования имеем

$$\tilde{H}_2(x) = -\frac{2}{\sigma^2} \tilde{C}_1 \int \frac{dx}{g^2(x) p_s(x)} - \\ - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{p_s(x)} \partial_x f(x) p_s(x) \right] + \frac{1}{\sigma^2} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} + C. \quad (8.102)$$

По тем же самым причинам, что и ранее, по крайней мере постоянная \tilde{C}_1 должна равняться нулю. Действительно, если хотя бы одна граница b_i была естественной в смысле Феллера, то условие нормировки (8.54) снова нарушалось бы. В другом возможном случае, когда ни одна из границ не является естественной в смысле Феллера, но одна из них, скажем b_1 , является входной, то постоянная $\tilde{C}_1 = 0$, поскольку оказывается, что все остальные члены в $r_2(x, z)$ таковы, что $r_2(x, z) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b_1$. Таким образом, имеем

$$\tilde{H}_2(x) = \frac{1}{\sigma^2} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} - \frac{3}{2} \frac{1}{p_s(x)} \partial_x f(x) p_s(x) + C. \quad (8.103)$$

Второй поправочный член теперь имеет вид

$$r_2(x, z) = \frac{z^2}{\sigma^2} \partial_x [f(x) p_s(x)] + \\ + \left[\frac{1}{\sigma^2} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} - \frac{3}{2} \frac{1}{p_s(x)} \partial_x f(x) p_s(x) + C \right] p(z).$$

Постоянная C определяется из условия нормировки

$$\int_{b_1}^{b_2} r_2(x, z) dx = 0. \quad (8.104)$$

Для естественных границ имеем

$$\int_{b_1}^{b_2} (\partial_x f(x) p_s(x)) dx = f(b_2) p_s(b_2) - f(b_1) p_s(b_1) = 0.$$

Следовательно,

$$C = - \frac{1}{\sigma^2} \int_{b_1}^{b_2} p_s(x) \frac{f^2(x)}{g^2(x)} dx. \quad (8.105)$$

Таким образом, мы получаем в первом исчезающем порядке по ε следующее выражение для стационарной плотности вероятностей $p_s^\varepsilon(x)$ системы:

$$p_s^\varepsilon(x) = p_s(x) \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[C - f'(x) + f(x) \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{f^2(x)}{g^2(x)} \right] \right\} = \\ = p_s(x) \{ 1 + \varepsilon^2 (C - u(x)) \}. \quad (8.106)$$

Соответственно экстремумы $p_s^\varepsilon(x)$ можно сразу же найти как корни уравнения

$$\left[f(x_m) - \frac{\sigma^2}{2} g(x_m) g'(x_m) \right] \{ 1 + \varepsilon^2 [C - u(x_m)] \} - \\ - \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2} g^2(x_m) u'(x_m) = 0. \quad (8.107)$$

Как видно из структуры (8.107), положение и число экстремумов определяется в основном вкладом от белого шума, т. е. левым фактором в первом члене (8.107). Проведенное систематическое разложение в ряд по возмущению дает точные ответы на вопросы, поставленные в начале этой главы. Резюмируя, перечислим установленные нами факты.

1) Решение СДУ с цветным шумом слабо (в смысле распределения) сходится к решению соответствующего СДУ с белым шумом, причем это уравнение следует интерпретировать как

уравнение Стратоновича. Этот результат здесь был доказан для конкретного случая ОУ-шума. Очевидно, однако, что подобная теория возмущений может быть сформулирована для цветного шума любого типа. Единственное изменение, которое при этом необходимо произвести, заключается в замене оператора ФП, управляющего эволюцией ОУ-процесса, соответствующим оператором, управляющим временной эволюцией вероятности переходов эргодического марковского шумового процесса. Отметим далее, что разложение по возмущению легко обобщается также и на нестационарный случай заменой Z_3 на $F_3 - \partial_t$. Используя эти видоизменения, можно непосредственно установить, что в общем случае, в том числе и для нестационарного процесса с произвольным типом цветного шума, диффузионный процесс, задаваемый формулой (8.72), получается в пределе белого шума $\varepsilon \rightarrow 0$ [5.9]. Явное вычисление поправочных членов, однако, может столкнуться с двумя принципиальными техническими трудностями. Во-первых, если цветной шум отличен от ОУ-процесса, оператор ФП которого обладает весьма удобными свойствами (линейностью дрейфового члена и постоянством коэффициента диффузии), то редко представляется возможным решить (8.56, 57). Во-вторых, в нестационарном случае мы сталкиваемся с той проблемой, что в общем случае не известно решение нестационарной задачи. Тем не менее важным выводом из проведенного рассмотрения является то, что предсказания, делаемые на основе анализа в терминах идеализации белого шума, получаются для любого цветного шума в пределе малых времен корреляции. Другими словами, если для индуцирования фазовых переходов использовать шум, близкий к белому, то должны получаться качественно те же результаты, что и в случае белого шума. Таким образом, фазовые переходы, индуцированные шумом, не есть просто следствие применения идеализации белого шума, но представляют собой явления, характерные для систем, находящихся под влиянием быстрых внешних флуктуаций.

2) Помимо установления факта адекватности анализа в терминах белого шума, развитая теория возмущений дает также явные выражения, по крайней мере для важного случая ОУ-шума, для количественных поправок, обусловленных *конечностью времени корреляции шума*. Отметим, что теория возмущений строится как *систематическое* разложение по ε , т. е. по корреляционному времени или по обратной спектральной ширине, и поэтому, при желании, поправки могут быть определены с точностью до произвольного порядка. В заключение прокомментируем один технический момент разложения по теории возмущения: сходимости $p_s^\varepsilon(x)$ и $p_s(x)$ в общем случае неоднородны. На самом деле функция $H_2(x)$ расходится вблизи одной или обеих границ. Это означает, что следует быть осторожным в приме-

нии этих результатов в ε -окрестности этой границы. Это, однако, не противоречит нашему утверждению о том, что функция $H_1(x)$ должна тождественно обращаться в нуль даже для ϕ -входной границы. Доказательство этого вовсе не требует однородной сходимости, а всего лишь простой сходимости; в n -м порядке функция $p_s^\varepsilon(0)$ должна равняться нулю с возможной ошибкой порядка ε^{n+1} . Если $H_1(x) \neq 0$, то ошибка была бы порядка ε . Кроме того, благодаря неоднородности в сходимости, а также тому факту, что условие нормировки накладывается во всех порядках по ε , положительность функции распределения не обеспечивается во всех порядках по ε . Другими словами, в ε -окрестности границ функции распределения n -й порядок приближения для $p_s^\varepsilon(x)$ может быть слегка отрицательным, так что полная ошибка имеет порядок $O(\varepsilon^{n+1})$.

8.4.1. Модель Ферхюльста

Предполагая, что флуктуации параметра роста в модели Ферхюльста (6.37) задаются процессом ОУ в виде

$$\lambda_t = \lambda + \zeta_t/\varepsilon, \quad (8.108)$$

находим, что стационарная плотность вероятности определяется формулой

$$p^\varepsilon(x) = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{(2\lambda/\sigma^2)} \frac{x^{([2\lambda/\sigma^2]-1)}}{\Gamma\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2}\right)} \exp\left(-\frac{2x}{\sigma^2}\right) \left[1 + \varepsilon\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{(\lambda-x)^2}{\sigma^2}\right)\right]. \quad (8.109)$$

Уравнение для определения экстремумов имеет вид

$$\left[\left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)x - x^2\right]\left[1 + \varepsilon^2\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{(\lambda-x)^2}{\sigma^2}\right)\right] + \varepsilon^2 \frac{\sigma^2}{2} x^2 \left(1 + \frac{2(\lambda-x)}{\sigma^2}\right) = 0. \quad (8.110)$$

Очевидно, что $x=0$ является корнем этого уравнения при всех значениях параметров. При $\lambda = \sigma^2/2$ — это двойной корень. Таким образом, наличие корреляций во внешнем шуме не оказывает влияния на точку фазового перехода. Поскольку в (8.106) функция $p_s(x)$ фигурирует в виде сомножителя, то этот результат является общим свойством всех моделей, в которых фазовые переходы, индуцированные шумом, соответствуют изменению плотности вероятности вблизи одной из границ, т. е. переходу от расходящегося к нерасходящемуся типу поведения.

8.4.2. Генетическая модель

Когда коэффициент отбора λ в (6.51) флуктуирует в соответствии с выражением

$$\lambda_t = \xi_t / \varepsilon, \quad (8.111)$$

мы находим, что $p_s^e(x)$ задается формулой

$$p_s^e(x) = \frac{1}{2} \frac{\exp(2/\sigma^2)}{K_0(2/\sigma^2)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2 x(1-x)}\right) \left\{ 1 + \varepsilon^2 \left[1 - \frac{K_1(2/\sigma^2)}{K_0(2/\sigma^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{(1-2x^2)}{x(1-x)} \left(1 - \frac{1}{2\sigma^2(1-x)x} \right) \right] \right\}, \quad (8.112)$$

где K_0 и K_1 — модифицированные функции Бесселя. Отметим, что $p_s^e(x)$ симметрична относительно $x = 1/2$. Это означает, что точка $x = 1/2$ всегда является экстремумом. Как мы видели в гл. 6, в пределе белого шума флуктуации λ индуцируют переход типа сборки с критической точкой $\sigma_c^2 = 4$, $\lambda = 0$. Эта критическая точка соответствует тройному корню при $x = 1/2$ уравнения для экстремумов. Под влиянием корреляций шума критическая точка при $\lambda = 0$, $x = 1/2$ сдвигается к значению

$$\sigma^2/4 = [1 + \varepsilon^2(C + 2)]/[1 + \varepsilon^2(C + 3)]. \quad (8.113)$$

В первом порядке по ε^2 это дает

$$\sigma^2 = 4 - 4\varepsilon^2. \quad (8.114)$$

8.5. Приближение кривой переключения

В этом разделе мы рассмотрим противоположный предел, когда время корреляции внешнего шума велико по сравнению с характерным временем эволюции переменной состояния x . Масштабное преобразование для взятия этого предела, конечно, отличается от случая исчезающе малых корреляций. Для исследования влияния низкочастотного шума следует использовать следующий набор стохастических дифференциальных уравнений для парного процесса:

$$dX_t^e = [h(X_t^e) + \lambda g(X_t^e)] dt + \xi_t g(X_t^e) dt = f(X_t^e) dt + \xi_t g(X_t^e) dt, \quad (8.115)$$

$$d\xi_t = -\varepsilon^2 \xi_t dt + \varepsilon \sigma dW_t. \quad (8.116)$$

Корреляционная функция процесса ξ_t равна

$$C(t) = \frac{\sigma^2}{2} \exp(-\varepsilon^2 t), \quad (8.117)$$

а время корреляции задается выражением

$$\tau_{\text{кorr}} = 1/\varepsilon^2. \quad (8.118)$$

Спектральная плотность шумового процесса ξ_t определяется лоренцевской функцией

$$S^e(\nu) = \sigma^2 \frac{\varepsilon^2}{2\pi(\varepsilon^4 + \nu^2)}, \quad (8.119)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S^e(\nu) = \frac{\sigma^2}{2} \delta(\nu). \quad (8.120)$$

Стационарная форма уравнения Фоккера — Планка для парного процесса (X_t, ξ_t) имеет вид

$$\varepsilon^2 \left(\partial_z z + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{zz} \right) - \partial_x [f(x, \lambda) + zg(x)] p(x, z) = 0. \quad (8.121)$$

Влияние разложения стационарной плотности вероятности в форме (8.50) дает в низшем порядке по ε :

$$\partial_x [f(x, \lambda) + zg(x)] p_0(x, z) = 0. \quad (8.122)$$

Как легко проверить, это означает, что

$$p_0(x, z) = p_s(z) \delta(x - u(z)), \quad (8.123)$$

где функция $u(z)$ определена условием

$$f(u(z) + zg(u(z))) = 0. \quad (8.124)$$

Поскольку

$$\delta(u(z) - x) = |h'(u^{-1}(x))|^{-1} \delta(z - u^{-1}(x)), \quad (8.125)$$

то, интегрируя по шумовой переменной, для плотности вероятности системы в нулевом порядке мы получаем

$$p_0(x) (= p_s(u^{-1}(x)) |u^{-1}(x)|). \quad (8.126)$$

Здесь p_s — стационарная плотность вероятности процесса Орнштейна — Уленбека.

Это приближение называется приближением кривой переключения. Оно было введено с использованием более интуитивного рассмотрения в [6.8]. Вышеприведенная процедура, очевидно, соответствует адиабатическому исключению переменной состояния, т. е. система всегда находится в квазистационарном состоянии по отношению к мгновенному значению флуктуирующих параметров. Физическая картина при этом состоит в том, что поскольку шум изменяется намного медленнее, чем происходит эволюция системы, то последняя всегда находится в непосредственной окрестности кривой переключения. Это означает, что плотность вероятности системы должна задаваться плот-

ностью вероятности шума, преобразованного с помощью кривой переключения $\dot{f}(x) + zg(x) = 0$, как это действительно подтверждается формулой (8.126).

Поскольку процедура полностью аналогична разложению теории возмущений, проведенному в предыдущем разделе, и отличается лишь другим масштабным преобразованием, то поправочные члены более высокого порядка к плотности распределения могут быть систематически вычислены. Однако на практике вычисление встречается со следующими трудностями. Оператор низшего порядка в разложении по возмущению — это оператор, фигурирующий в уравнении непрерывности, описывающем детерминированное движение

$$\partial_x [f(x) + zg(x)]. \quad (8.127)$$

Этот оператор не обладает удобными для вычислений свойствами оператора Фоккера — Планка для ОУ-процесса, играющего основную роль в пределе белого шума. Действительно, поскольку (8.125) — это функция двух переменных, то совместная плотность вероятности $\rho_0(x, z)$ не факторизуется в низшем порядке. Кроме того, поскольку этот оператор не описывает эволюцию диффузионного процесса, а является оператором детерминированного движения, то в (8.123) следует использовать обобщенные функции типа δ -функции Дирака. Это приводит к тому, что явное вычисление поправочных членов более высокого порядка становится практически невыполнимой задачей.

8.6. Приближенный оператор эволюции для системы, взаимодействующей с цветным шумом

В разд. 8.4 мы установили возможность анализа систем в терминах белого шума и, изучив поведение составного процесса (X_t^e, ζ_t) в окрестности белого шума с помощью разложения плотности вероятности по теории возмущений, определили количественно те изменения, к которым приводят отличные от нуля корреляции внешнего шума. Эта систематическая процедура приближений по степеням времени корреляции была сформулирована в рамках марковской теории. Как разъяснено в начале этой главы, цена, которую надо заплатить за то, чтобы описывать системы, взаимодействующие с цветным шумом окружения, в терминах марковских процессов, заключается в расширении пространства состояний. Лишь парный процесс, состоящий из переменной состояния системы X_t и шума ζ_t , является марковским. В силу структуры оператора ФП для эволюции плотности вероятности парного процесса удобным способом исследования поведения системы в данном случае является теория

возмущений по параметру спектральной ширины. Однако существует и альтернативный путь исследования влияния цветного шума на нелинейные системы. Он состоит в определении приближенного оператора эволюции одновременной плотности вероятности немарковского процесса, описывающего систему.

Этот метод широко использовался в работах Санчо и Сан Мигуэля [8.7—10] при изучении поведения систем, находящихся под действием внешнего шума с отличными от нуля корреляциями. Отметим, что, в то время как в этом подходе удается избежать расширения пространства переменных, работать приходится вне рамок марковской теории. Поэтому для преодоления тех препятствий, с которыми сталкивается любое рассмотрение немарковских процессов, требуется использовать сложный математический аппарат. При определении приближенного оператора эволюции Санчо и Сан Мигуэль действительно используют довольно сложную технику (выходящую за рамки теории вероятностей).

Рассмотрим теперь основные черты этой немарковской приближенной процедуры. Для явного нахождения по крайней мере стационарного решения для приближенного оператора эволюции последний должен обладать определенными свойствами. Наиболее удобным был бы случай, когда этот оператор соответствовал оператору типа Фоккера — Планка, т. е. содержал бы производные первого и второго порядка с неотрицательными коэффициентами при ∂_{xx} . Это представляется удобным по двум причинам. Во-первых, это гарантирует положительность стационарного решения, которое можно тогда интерпретировать как плотность вероятности. Во-вторых, форма этого оператора известна явно, поскольку она задается также формулой (6.15) с подходящими граничными условиями. Оба этих достоинства в общем случае теряются, если в операторе фигурируют производные третьего и более высоких порядков. В таком случае оказывается невозможным не только гарантировать положительность решения, но и получить его в явном виде. Отметим, что оператор эволюции типа Фоккера — Планка совместим с немарковским характером процесса X_t , как это отмечалось Ханги и др. [4.4]. Этот оператор описывает временную эволюцию лишь одновременной плотности вероятностей $p(x, t)$, а не плотности вероятностей переходов. Как подчеркивалось в гл. 4, это свойство, т. е. то, что $p(x, t)$ подчиняется уравнению типа Фоккера — Планка, не означает, что процесс X_t обязательно обладает какими-либо марковскими свойствами. В последующем мы будем употреблять названия «оператор Фоккера — Планка» и «уравнение Фоккера — Планка» только для диффузионных процессов. Добавление же слова «типа» («типа оператора ...») мы будем производить при обозначении оператора или уравнения эволю-

ции одновременной плотности вероятности немарковского процесса.

Как показали Санчо и Сан Мигуэль, оказывается возможным получить оператор типа ФП в первом порядке теории возмущений по времени корреляции внешнего шума для случая системы с одной переменной, находящейся под действием ОУ-шума. Чтобы получить этот результат, рассмотрим СДУ

$$dX_t = [h(X_t) + \lambda g(X_t)] dt + \zeta_t g(X_t) dt, \quad (8.128)$$

где ζ_t — стационарный ОУ-процесс, задаваемый формулой

$$d\zeta_t = -\gamma \zeta_t dt + \gamma \sigma dW_t, \quad \zeta_0 N\left(0, \frac{\gamma \sigma^2}{2}\right). \quad (8.129)$$

Пусть детерминированные функции $h(x)$ и $g(x)$ таковы, что существует единственное R -решение уравнения (8.128) [8.5, 11]. Другими словами, существует стохастический процесс X_t , такой, что почти наверное

$$dX_t(\omega) = [h(X_t(\omega)) + \lambda g(X_t(\omega))] dt + \zeta_t(\omega) g(X_t(\omega)) dt$$

при начальном условии

$$P(X_t \in B) = E\{I_B(X_t)\}.$$

Считая, что $B = (-\infty, x)$, имеем

$$F(x, t) = \int_{\Omega} I_B(X_t(\omega)) dP(\omega) = \int_{\Omega} \left[\int_{-\infty}^x \delta(X_t(\omega) - x') dx' \right] dP(\omega).$$

Будем предполагать, что существует плотность

$$p(x, t) = \partial_x \int_{\Omega} \left[\int_{-\infty}^x \delta(X_t(\omega) - x') dx' \right] dP(\omega)$$

и что, по крайней мере формально,

$$p(x, t) = \int_{\Omega} \delta(X_t(\omega) - x) dP(\omega) = E\{\delta(X_t - x)\}.$$

Для первой производной от функции распределения имеем

$$\begin{aligned} \partial_t F(x, t) &= \partial_t \int_{\Omega} I_{(-\infty, x]}(X_t(\omega)) dP(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} I'_{(-\infty, x]}(X_t(\omega)) \dot{X}_t(\omega) dP(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} I'_{(-\infty, x]}(X_t(\omega)) [f(X_t(\omega)) + \zeta_t(\omega) g(X_t(\omega))] dP(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \int_{-\infty}^x -\partial_{x'} \delta(X_t(\omega) - x') [f(X_t(\omega)) + \zeta_t(\omega) g(X_t(\omega))] dx' dP(\omega) \end{aligned}$$

и, по крайней мере формально,

$$\partial_t p(x, t) = -\partial_x f(x) p(x, t) - \partial_x g(x) E\{\xi_t \delta(X_t - x)\}. \quad (8.130)$$

Этот же результат получается при использовании так называемого стохастического уравнения Лиувилля, основанного на лемме ван Кампена [8.12—15]. Проведенное выше рассмотрение является довольно формальным и, несомненно, требует дополнительного обоснования. Мы вернемся к этому вопросу позже. Отметим, что благодаря присутствию члена $E\{\xi_t \delta(X_t - x)\}$ (8.130) не является замкнутым уравнением для $p(x, t)$. Для того чтобы продвинуться дальше, нам надо использовать гауссовский характер цветного внешнего шума. Новиковым [8.16] (см. также [4.7]) была доказана следующая теорема для гауссовского случайного процесса. Пусть Z_t будет гауссовским процессом и $\Phi(Z_t)$ —функция Z_t , тогда

$$E\{Z_t \Phi(Z_t)\} = \int_0^t dt' C_Z(t, t') E\left\{\frac{\delta \Phi(Z_t)}{\delta Z_{t'}}\right\}, \quad (8.131)$$

где $\delta \Phi(Z_t)/\delta Z_{t'}$ обозначает функциональную производную. Очевидно, X_t является функцией от случайного процесса ξ_t . Применяя теорему Новикова к математическому ожиданию от произведения ξ_t и $\delta(X_t - x)$, получаем

$$\begin{aligned} \partial_t p(x, t) &= -\partial_x f(x) p(x, t) - \partial_x g(x) \int_0^t dt' C_\xi(t, t') E\left\{\frac{\delta [\delta(X_t - x)]}{\delta \xi_{t'}}\right\} = \\ &= -\partial_x f(x) p(x, t) + \partial_x g(x) \partial_x \int_0^t dt' C_\xi(t, t') E\left\{\delta(X_t - x) \frac{\delta X_t}{\delta \xi_{t'}}\right\}. \end{aligned} \quad (8.132)$$

Для того чтобы продвинуться дальше, требуется вычислить так называемую функцию отклика. Рассмотрим сначала линейный случай, т. е. $h(x) = \alpha x$ и $g(x) = 1$. Как мы видели в разд. 8.3, R -решение тогда задается в виде

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) e^{\alpha t} + \int_0^t [\lambda + \xi_s(\omega)] e^{\alpha(t-s)} ds. \quad (8.133)$$

Функция отклика задается выражением

$$\frac{\delta X_t}{\delta \xi_s} = e^{\alpha(t-s)}. \quad (8.134)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned}\partial_t p(x, t) &= -\partial_x f(x) p(x, t) + \partial_{xx} \int_0^t dt' C_\xi(t, t') e^{\alpha(t-t')} E\{\delta(X_t - x)\} = \\ &= -\partial_x f(x) p(x, t) + \partial_{xx} D(t) p(x, t).\end{aligned}\quad (8.135)$$

Если ξ_t — это ОУ-процесс, то очевидно, что

$$\begin{aligned}D(t) &= 1/2 \int_0^t dt' \gamma \sigma^2 \exp[(\alpha - \gamma)(t - t')] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\gamma \sigma^2}{\gamma - \alpha} [1 - \exp(\alpha - \gamma)t] \quad \text{при } \alpha \neq \gamma, \\ &= \frac{1}{2} \gamma \sigma^2 t \quad \text{при } \alpha = \gamma.\end{aligned}\quad (8.136)$$

Таким образом, для линейной задачи, т. е. при $f(x) = \alpha x + \lambda$ и $g(x) = 1$, существует точное уравнение типа Фоккера — Планка для одновременной плотности вероятности, если внешний цветной шум — гауссовский. Отметим, что этот результат справедлив для любого реального гауссовского шума, поскольку при выводе (8.135) мы не использовали требования марковости. Если шум гауссовский, то этот результат справедлив при любой форме корреляционной функции. Кроме того, из данного результата следует, что одновременная плотность вероятности для моделей, принадлежащих к классу точно решаемых моделей, описанных в разд. 8.3, подчиняется уравнению в точности фоккер-планковского типа. Действительно, особенностью этих моделей было то, что посредством преобразования $u = H(x)$ получалось линейное СДУ. В соответствии с полученным выше результатом при использовании этой новой переменной существует уравнение типа ФП и, переходя обратно к старой переменной, мы получаем

$$\partial_t p(x, t) = -\alpha \partial_x g(x) H(x) p(x, t) + D(t) \partial_x g(x) \partial_x g(x) p(x, t).\quad (8.137)$$

Мы снова видим, что единственным эффектом цветного шума в этих моделях по сравнению со случаем белого шума, является перенормировка коэффициента диффузии. В случае ОУ-шума величина σ^2 заменяется на выражение $\sigma^2(1 - \alpha/\gamma)^{-1}$, которое в пределе белого шума, соответствующего здесь $\gamma \rightarrow \infty$ (8.129), сходится, очевидно, к σ^2 .

В случае, отличном от линейного, оказывается, вообще говоря, невозможным явно вычислить функцию отклика $\delta X_t / \delta \xi_t$. Оказывается необходимым и в этом методе использовать приближенные вычисления для рассмотрения общего случая нели-

нейной системы, находящейся под действием внешнего цветного шума.

Как и в разд. 8.4, рассмотрим сначала случай, близкий к белому шуму. Соответствующим параметром малости является время корреляции $\tau_{\text{корр}} = \gamma^{-1}$. Если корреляции внешнего шума очень быстро затухают, то, как интуитивно ясно, главный вклад в функцию отклика получается из окрестности $t = t'$. Разлагая по степеням $(t - t')$, мы имеем

$$\frac{\delta X_t}{\delta \xi_{t'}} = \left. \frac{\delta X_t}{\delta \xi_{t'}} \right|_{t=t'} + \frac{d}{dt'} \left. \frac{\delta X_t}{\delta \xi_{t'}} \right|_{t=t'} (t - t') + \dots \quad (8.138)$$

Теперь основной задачей является вычисление функции отклика и ее производных при $t = t'$. Первая функция, как легко сообразить, равна

$$\left. \frac{\delta X_t}{\delta \xi_{t'}} \right|_{t=t'} = g(X_t), \quad (8.139)$$

в то время как выражение для второй менее очевидно —

$$\frac{d}{dt'} \left. \frac{\delta X_t}{\delta \xi_{t'}} \right|_{t=t'} = f(X_t) g'(X_t) - g(X_t) f'(X_t) = -g^2(X_t) [f(X_t)/g(X_t)]'. \quad (8.140)$$

Поскольку вычисление этих выражений требует использования определенной техники, именно обобщения формализма Мартина — Сиггия — Розе на динамику фоккер-планковского типа [8.17, 18], с которой читатель, возможно, не знаком и которая лежит вне рамок данной книги, мы опустим явные вычисления выражений (8.139, 140). Их можно найти в [8.7]. Для второй производной Санчо и Сан Мигуэль получили

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt'^2} \left. \frac{\delta X_t}{\delta \xi_{t'}} \right|_{t=t'} &= f(X_t)^2 \left[f(X_t) \left(\frac{g(X_t)}{f(X_t)} \right)' \right]' - \\ &- g^2(X_t) \left[g(X_t) \left(\frac{f(X_t)}{g(X_t)} \right)' \right]' \xi_t. \end{aligned} \quad (8.141)$$

В отличие от первых двух членов в разложении третий член зависит от шумового процесса. Это означает, что любое включение членов порядка $(t - t')^2$ или выше требует повторного использования теоремы Новикова. Поэтому сначала рассмотрим лишь члены порядка $(t - t')$ включительно, что соответствует разложению до членов первого порядка по $\tau_{\text{корр}}$, как это будет вскоре понятно. Подставляя разложение (8.138) в (8.132), по-

лучаем следующее уравнение эволюции:

$$\begin{aligned} \partial_t p(x, t) = & -\partial_x f(x) p(x, t) + \partial_x g(x) \partial_x \int_0^t dt' \frac{\gamma \sigma^2}{2} \exp[-\gamma |t - t'|] \times \\ & \times E \{ \delta(X_t - x) [g(X_t) + (fg' - gf')(t - t')] \} = \\ = & -\partial_x f(x) p(x, t) + \partial_x g(x) \partial_x \frac{\sigma^2}{2} (1 - e^{-\gamma t}) g(x) p(x, t) + \\ & + \partial_x g(x) \partial_x \frac{\gamma \sigma^2}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma^2} - \frac{te^{-\gamma t}}{\gamma} \right) (fg' - gf') p(x, t). \end{aligned} \quad (8.142)$$

Поскольку это приближение применяется в окрестности белого шума, т. е. в случае, когда $\tau_{\text{корр}} \ll 1$, или $\gamma \gg 1$, переходные процессы в правой части (8.142) быстро затухают и на временах $t \gg \gamma^{-1}$ имеем следующее уравнение типа ФП для одновременной плотности вероятности:

$$\partial_t p(x, t) = -\partial_x \left[f(x) + \frac{\sigma^2}{2} g'(x) v(x) \right] p(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} g(x) v(x) p(x, t) \quad (8.143)$$

где

$$v(x) = g(x) + \gamma^{-1} [f'(x) g(x) - g'(x) f(x)]. \quad (8.144)$$

Отметим, что этот оператор типа ФП вводит нефизичные границы и тем самым создает искусственное ограничение в пространстве состояний. Действительно, он определен в том смысле, что гарантируется неотрицательность его решения лишь для тех значений x , при которых $g(x) v(x) > 0$, т. е.

$$g^2(x) [1 + \gamma^{-1} g(x) (f(x)/g(x))'] > 0. \quad (8.145)$$

Таким образом, если второй сомножитель становится отрицательным на $[b_1, b_2]$, то пространство состояний должно быть ограничено интервалом, расположенным между нулями этого сомножителя. Очевидно, что эти искусственные границы приближаются к физическим границам в пределе белого шума. Эти нефизические границы возникают здесь по той же самой причине, по которой плотность вероятности при разложении по параметру спектральной ширины принимает малые отрицательные значения в окрестности физических границ, приводя к неоднородной сходимости на $[b_1, b_2]$. В отличие от разложения по параметру спектральной ширины вопрос об области применимости приближенного оператора эволюции (8.143) в данный момент остается открытым. Довольно трудно установить ее в общем случае, используя данный подход по следующим причинам: член с $d^2[\delta X_t]/d\xi_t'^2$ в разложении функции отклика содержит выражение, в котором шум фигурирует в качестве сомножителя: —

$g^2[g(f/g)']'\zeta_i$, см. (8.141). Таким образом, если приближенные вычисления продолжаютя до второго порядка по $\tau_{\text{корр}}$, то в общем случае не существует уравнения типа ФП. Это обусловлено тем фактом, что повторное применение теоремы Новикова приводит к появлению производных по x более высокого порядка. Член с ζ_i тождественно зануляется, и точное уравнение типа ФП существует тогда, когда система принадлежит к классу точно решаемых моделей, рассмотренных в разд. 8.3. Действительно, вторая производная от функции отклика в совпадающие моменты времени не зависит от ζ_i , если

$$g(x)[f(x)/g(x)]' = \text{const.} \quad (8.146)$$

Это означает, что

$$f(x) \sim g(x) \int \frac{dz}{g(z)},$$

что является характерной чертой выражения (8.11). В общем случае если продолжить приближенные вычисления до членов порядка $\tau_{\text{корр}}^2$, то оператор эволюции будет содержать производные третьего порядка. Это означает, что ограничение членами первого порядка по $\tau_{\text{корр}}$ приводит не только к отбрасыванию членов, умноженных на более высокие степени $\tau_{\text{корр}}$, но и членов, содержащих производные более высоких порядков. Эта проблема известна как проблема сингулярного возмущения. Опасность заключена в том, что члены $\tau_{\text{корр}}^2 \partial_{xxx}$ могут быть того же порядка, что и $\tau_{\text{корр}} \partial_{xx}$, поскольку очевидно, что одновременная плотность вероятности $p(x, t)$ зависит от $\tau_{\text{корр}}$. Однако если приближенный оператор ФП правильно описывает немарковский процесс X_t в первом порядке по $\tau_{\text{корр}}$, то плотность вероятности, определенная в (8.143), должна совпадать с (8.49), т. е. должна задаваться разложением по параметру спектральной ширины. Это разложение получается путем систематического разложения по $\tau_{\text{корр}}$, и, следовательно, область его применимости, так же как и величины ошибок, точно известна. Стационарное решение уравнения типа ФП (8.143) задается выражением

$$p_s^r(x) = N \frac{1}{v(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int dx \frac{f(x)}{g(x)v(x)}\right),$$

если ток вероятности через границы равен нулю. Хотя оператор типа ФП — (8.143) содержит члены лишь до первого порядка по $\tau_{\text{корр}}$, в стационарное решение входят члены произвольного высокого порядка по $\tau_{\text{корр}}$. Очевидно, что эти члены высокого порядка не играют существенной роли. Разложим поэтому $p_s^r(x)$ в ряд по степеням $\tau_{\text{корр}}$ и оставим лишь первый член этого раз-

ложения. Обозначая для простоты $\tau = \tau_{\text{корр}}$, имеем

$$\begin{aligned} p_s^\tau &= \frac{N}{g(x) + \tau(f'g - g'f)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int \frac{f}{g^2 + \tau g(f'g - g'f)}\right) = \\ &= (N_0 + \tau N_1 + \dots) \frac{1}{g} \left(1 - \tau \frac{f'g - g'f}{g} + \dots\right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int \frac{f}{g^2}\right) \left[1 - \frac{2}{\sigma^2} \tau \int \frac{f}{g} \left(\frac{f}{g}\right)' + \dots\right] = \\ &= N_0 \frac{1}{g} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int \frac{f}{g^2}\right) \left\{1 + \tau \left[N_1 - f' + \frac{fg'}{g} - \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{f}{g}\right)^2\right] + \dots\right\}. \end{aligned} \quad (8.147)$$

Это выражение действительно совпадает с формулой, полученной с помощью теории возмущений, разложением по малому спектральному параметру (8.106), т. е. в линейном по $\tau_{\text{корр}}$ приближении метод разложения по параметру спектральной ширины и немарковская приближенная схема Санчо и Сан Мигуэля эквивалентны. Отсюда следует, что использование приближенного оператора типа ФП дает в общем случае хорошее приближенное выражение (в первом порядке от $\tau_{\text{корр}}$) для стационарной плотности вероятностей немарковской системы. Этот результат апостериори оправдывает те процедуры, которые использовались при выводе выражения для оператора типа ФП. Провести сравнение при учете членов более высокого порядка оказывается невозможным. Оператор эволюции в этом случае отличается от фоккер-планковского типа, и функция $p_s^\tau(x)$ явно не вычисляется.

8.7. Нелинейный внешний шум

До сих пор мы имели дело с системами, в которых внешний параметр входит линейно в феноменологическое уравнение. Как видно из предыдущих глав, этот случай соответствует широкому классу приложений. С другой стороны, имеются, конечно, ситуации, когда состояние среды влияет на эволюцию системы нелинейным образом. В этой и последующей главах мы рассмотрим два таких случая, представляющие особый интерес, именно нематические жидкие кристаллы и нервные мембраны. Перед тем как перейти к частным модельным системам, рассмотрим общие вопросы теоретического описания систем, подвергающихся воздействию внешнего нелинейного шума.

8.7.1. Теоретические аспекты

Рассмотрим феноменологическое уравнение типа

$$\dot{X}(t) = h(X(t)) + \mu(\lambda) g(X(t)). \quad (8.148)$$

где μ — нелинейная функция от внешнего параметра λ . Чтобы учесть внешние флуктуации, мы в духе нашего обычного подхода заменяем постоянный внешний параметр стационарным стохастическим процессом $\lambda_t = \lambda + \xi_t$ и получаем СДУ

$$dX_t = [h(X_t) + \mu(\lambda + \xi_t) g(X_t)] dt. \quad (8.149)$$

Как уже отмечалось, по принципиальным причинам оказывается невозможным определить нелинейное преобразование от δ -функции Дирака или какой-либо иной обобщенной функции. Это означает, что бессмысленно пытаться перейти к приближению белого шума, полагая просто $\lambda_t = \lambda + \sigma \xi_t$. Смысл СДУ типа

$$\dot{X}_t = [h(X_t) + \mu(\lambda + \sigma \xi_t) g(X_t)] \quad (8.150)$$

и его решение никоим образом не могут быть определены. Эту проблему не решить заменой обычного исчисления соответствующим исчислением Ито или Стратоновича. По принципиальным математическим соображениям любая попытка рассмотрения СДУ, подобного (8.150), обречена на неудачу. С другой стороны, нелинейные операции над обыкновенными стохастическими процессами, например такими, как диффузионный процесс, математически хорошо определены, и СДУ (8.149) имеет смысл обыкновенного СДУ как оно понималось в разд. 8.2. В духе рассмотрения этой главы мы будем считать, что ξ_t — цветной шум. Независимо от того что оказывается невозможным математическое определение нелинейной функции от белого шума, остается фактом то, что в большинстве приложений окружение изменяется гораздо быстрее, чем интересующая нас система. Другими словами, время корреляции процесса ξ_t мало. То, что внешний шум действует на систему нелинейным образом, никоим образом не влияет на справедливость неравенства (3.8). Естественно поэтому попытаться по Стратоновичу определить соответствующий предел белого шума для СДУ (8.149). Прямой путь состоит в замене $\mu(\lambda + \xi_t)$ на $\mu(\lambda) + \xi_t$ и последующем переходе к приближению белого шума с записью $\tilde{\xi}_t = \sigma \xi_t$. Этот подход в применении к жидким кристаллам [8.19] дает следующее СДУ

$$dX_t = [h(X_t) + \mu(\lambda) g(X_t)] dt + \sigma g(X_t) \circ d\tilde{W}_t. \quad (8.151)$$

Эта процедура, однако, необоснованна. Если флуктуации среды распределены, например, по Гауссу, то обычно, как это показано в гл. 1, $\mu(X_t)$ не является гауссовским процессом. Замена $\mu(\lambda_t)$ на $\mu(\lambda) + \sigma \xi_t$ представляет собой произвольную процедуру, игнорирующую физику рассматриваемых систем. Между результатами, получаемыми на основе СДУ (8.151), и физической реальностью, для описания которой они и предназначаются, не

оказывается связи. В действительности подобные результаты могут вводить в заблуждение [8.10, 20].

Следуя рассмотрению разд. 8.1, рассмотрим снова конкретный случай, когда внешний шум ξ_t задается ОУ-процессом. Для исследования поведения системы, находящейся под действием высокочастотного внешнего шума, можно использовать метод разложения по параметру спектральной ширины (разд. 8.4), а также технику приближенного оператора эволюции (разд. 8.6). Последний метод был недавно использован Сан Мигуэлем и Санчо [8.9, 10] при исследовании проблемы квадратичного внешнего гауссовского шума. В последующем мы будем использовать лишь метод разложения по малому спектральному параметру, который, по нашему мнению, более подходит для рассмотрения СДУ типа (8.149). В данной ситуации оказывается, что этот метод систематического разложения по времени корреляции более прост и прозрачен. Определяя внешний шумовой процесс η_t формулой

$$\eta_t = \mu(\lambda + \xi_t) - E\{\mu(\lambda + \xi_t)\} = \mu(\lambda + \xi_t) - m(\lambda, \sigma^2), \quad (8.152)$$

мы можем записать (8.149) в виде

$$dX_t = [h(X_t) + m(\lambda, \sigma^2)g(X_t)]dt + g(X_t)\eta_t dt. \quad (8.153)$$

Делая ОУ-процесс более высокочастотным в соответствии с общей процедурой, обсуждавшейся в разд. 8.4, т. е. полагая

$$\eta_t^e = \eta_{t/\varepsilon^2} = \mu(\lambda + \xi_{t/\varepsilon^2}) - m(\lambda, \sigma^2), \text{ для того чтобы учесть то, что}$$

мы интересуемся малой окрестностью белого шума, совершенно аналогично (8.39) получаем

$$dX_t^e = [h(X_t^e) + m(\lambda, \sigma^2)g(X_t^e)]dt + \frac{1}{\varepsilon}g(X_t)\eta_t^e dt, \quad (8.154)$$

$$d\xi_t = -\frac{1}{\varepsilon^2}\xi_t dt + \frac{\sigma}{\varepsilon}dW_t. \quad (8.155)$$

Отметим, что для удобства вычислений время перенормировано, $t \rightarrow t/\tau_{\text{корр}}$, таким образом, чтобы исходная ширина цветного шума $\gamma = 1$. Парный процесс (X_t^e, ξ_t) является, конечно, диффузионным процессом и плотность вероятности переходов для него определяется из УФП типа (8.45), где теперь

$$F_1 = \partial_z z + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{zz}, \quad (8.156)$$

$$F_2 = -[\mu(\lambda + z) - m(\lambda, \sigma^2)]\partial_x g(x), \quad (8.157)$$

$$\begin{aligned} F_3 &= -\partial_x [h(x) + m(\lambda, \sigma^2)g(x)], \\ &= -\partial_x f(x). \end{aligned} \quad (8.158)$$

Дальнейшая процедура полностью аналогична линейному случаю. Записывая снова

$$p^e(x, z, t) = p^0(x, z, t) [1 + r_1(x, z, t) + \varepsilon^2 r_2(x, z, t) + \dots] \quad (8.159)$$

и повторяя выкладки разд. 8.4, получаем

$$F_1 p_0(x, z, t) = 0, \quad (8.160)$$

что, подобно (8.55), означает

$$p_0(x, z, t) = p_0(x, t) p_s(z). \quad (8.161)$$

Здесь $p_s(z)$ задается (8.41) и $p_0(x, t)$ определяется из альтернативы Фредгольма второго порядка по ε . Для первого порядка разложения по малому параметру имеем

$$F_1^+ r_1(x, z, t) = [\mu(\lambda + z) - m(\lambda, \sigma^2)] \partial_x g(x) p_0(x, t). \quad (8.162)$$

В этом порядке альтернатива Фредгольма, как и в линейном случае, тривиально удовлетворяется, поскольку

$$E\{\mu(\lambda + z) - m(\lambda, \sigma^2)\} = 0. \quad (8.163)$$

Решение (8.162) задается в виде

$$r_1(x, z, t) = H_1(x, t) - \tilde{\mu}(\lambda + z) \partial_x g(x) p_0(x, t),$$

где $\tilde{\mu}(\lambda + z)$ — частное решение уравнения

$$F_1^+ \tilde{\mu} = -[\mu(\lambda + z) - m(\lambda, \sigma^2)]. \quad (8.164)$$

Как будет показано ниже, $\tilde{\mu}$ легко вычисляется в тех приложениях, где μ задается, например, полиномом от z . Переходя к второму порядку теории возмущений, имеем

$$F_1^+ r_2(x, z, t) = [\mu(\lambda + z) - m(\lambda, \sigma^2)] \partial_x g(x) \times \\ \times [H_1(x, t) - \tilde{\mu} \partial_x g(x) p_0(x, t)] + (\partial_x f(x) + \partial_t) p_0(x, t). \quad (8.165)$$

Применение альтернативы Фредгольма к правой части дает следующее УФП для функции $p_0(x, t)$;

$$-\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \partial_x g(x) \partial_x g(x) p_0(x, t) + [\partial_x f(x) + \partial_t] p_0(x, t) = 0, \quad (8.166)$$

$$\text{где } \tilde{\sigma}^2 = 2 \int_{\mathbb{R}} dz p_s(z) [\mu(\lambda + z) - m(\lambda, \sigma^2)] \tilde{\mu}(\lambda + z). \quad (8.167)$$

Записывая УФП (8.166) в стандартном виде

$$\partial_t p_0(x, t) = -\partial_x \left[f(x) + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} g'(x) g(x) \right] p_0(x, t) + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \partial_{xx} g^2(x) p_0(x, t), \quad (8.168)$$

мы получаем, что в случае нелинейного внешнего шума соответствующий предел белого шума описывается следующим СДУ:

$$dX_t = [h(X_t) + m(\lambda, \sigma^2) g(X_t)] dt + \tilde{\sigma} g(X_t) \circ dW_t. \quad (8.169)$$

Отметим, что нелинейность внешнего шума имеет два следствия.

1) В дополнение к дрейфу, индуцированному шумом $-\tilde{\sigma}^2 g'(x) g(x)/2$, который присутствует также и в линейном случае, появляется дополнительная поправка к коэффициенту дрейфа, обусловленная тем, что при $\sigma^2 \neq 0$ $m(\lambda, \sigma^2) \neq \mu(\lambda)$. В общем случае лишь в пределе $\sigma^2 \rightarrow 0$ эти два выражения совпадают $m(\lambda, 0) = \mu(\lambda)$.

2) Интенсивность белого шума зависит от среднего значения внешнего параметра, как это видно из (8.167). Очевидно, что совершенно аналогично разд. 8.4, можно получить систематически поправочные члены более высокого порядка по сравнению с пределом белого шума (8.168). Применим наши общие результаты к конкретному случаю $\mu(\lambda) = \lambda^2$, который представляет интерес для приложений. После соответствующих вычислений получаем

$$\eta_t = \lambda^2 + 2\lambda\xi_t + \xi_t^2 - \lambda^2 - \sigma^2/2 = \quad (8.170)$$

$$= \xi_t^2 + 2\lambda\xi_t - \sigma^2/2, \quad (8.171)$$

$$m(\lambda, \sigma^2) = \lambda^2 + \sigma^2/2, \quad (8.172)$$

$$F_1^+ \tilde{\mu}(\lambda + z) = -(z^2 + 2\lambda z - \sigma^2/2), \quad (8.173)$$

что дает

$$\tilde{\mu}(\lambda + z) = \frac{1}{2}(z^2 + 4\lambda z - \sigma^2/2) \text{ и} \quad (8.174)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma^4}{2} + 4\lambda^2\sigma^2. \quad (8.175)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что система

$$\dot{X}(t) = h(X(t)) + \lambda^2 g(X(t)) \quad (8.176)$$

описывается в случае быстро флуктуирующего окружения диффузионным процессом, который подчиняется СДУ

$$dX_t = \left[h(X_t) + \left(\lambda^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) g(X_t) \right] dt + \left(\frac{\sigma^4}{2} + 4\lambda^2\sigma^2 \right)^{1/2} g(X_t) \circ dW_t. \quad (8.177)$$

Этот же результат получается при использовании техники приближенного оператора эволюции [8.10]. Отличительной чертой нелинейного шума является вклад

$$\frac{\sigma^2}{2} g(x) = E \{ \xi_t^2 \} g(x)$$

в коэффициент дрейфа, а также модификация интенсивности белого шума σ на фактор $(\sigma^2/2 + 4\lambda^2)^{1/2}$, зависящий от детерминированного значения внешнего параметра λ , а также от среднего значения флуктуаций, т. е. члены $\sigma^2/2 = E\{\xi_i^2\}$.

8.7.2. Переход Фредерикса в нематических жидких кристаллах

Нематический жидкий кристалл состоит из удлинённых молекул (стержней), которые в среднем ориентируются вдоль определённого направления. Этот дальний ориентационный порядок и ответствен за кристаллические свойства нематической фазы. Положения молекул в отличие от кристалла здесь не являются фиксированными. Это отсутствие дальнего трансляционного порядка обуславливает текучесть нематической фазы. Если нематический кристалл поместить между двумя параллельными пластинками, то направление преимущественной ориентации задается путем соответствующей обработки поверхностей пластин. Натирка поверхности вдоль определённого направления создаёт царапины, вдоль которых и ориентируются молекулы. Такое положение энергетически выгодно для молекул, находящихся вблизи поверхностей пластин. Дополнительная энергия, которую нужно затратить, чтобы вывести молекулы из состояния, в котором они параллельны царапинам, весьма значительна, так что направление директора вблизи поверхностей жестко определено [8.21]. (Директором называется вектор \mathbf{n} , который характеризует преимущественное направление ориентации молекул в данной точке пространства.) Благодаря вытянутой форме молекул влияние на них магнитного поля \mathbf{H} или электрического поля \mathbf{E} зависит от направления полей по отношению к директору. Например, восприимчивость χ_{\parallel} для поля \mathbf{H} , параллельного \mathbf{n} , больше восприимчивости χ_{\perp} для поля \mathbf{H} , перпендикулярного \mathbf{n} . Эта анизотропия

$$\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$$

приводит к дополнительному намагничиванию в направлении \mathbf{n} , что в свою очередь даёт магнитный вращающий момент [8.22]. Таким образом, приложенное внешнее магнитное или электрическое поле деформирует жидкий кристалл, другими словами, изменяет направление директора.

Рассмотрим более подробно схему, представленную на рис. 8.1. Пусть x — направление ориентации, задаваемое натертыми пластинками. Ось z перпендикулярна пластинкам, а ось y параллельна им. В отсутствие внешнего возмущения директор \mathbf{n} всего нематического слоя параллелен оси x . В дальнейшем будет удобно описывать направление преимущественной ориентации углом θ , который вектор \mathbf{n} образует с осью x . Если при-

ложенное магнитное поле \mathbf{H} направлено параллельно оси y , то возникает вращающий момент, который стремится сорентировать молекулы параллельно полю \mathbf{H} . Однако при соответствующей обработке поверхностей пластин направление директора вблизи них практически жестко фиксируется и магнитное поле не может его изменить [8.21], так что здесь директор остается параллельным оси x . Обозначая положение поверхности нижней пластины через $z = -d/2$, а верхней через $d/2 = z$, имеем

$$\theta(\pm d/2) = 0 \quad (8.178)$$

при всех значениях H . Таким образом, магнитному вращающему моменту противодействует упругий момент, возникающий бла-

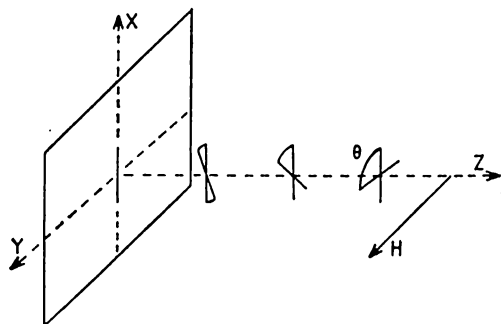


Рис. 8.1. Моде кручения: на стенке ($z = 0$) молекулы ориентированы параллельно оси x ; в объеме под действием магнитного поля, параллельного оси y , молекулы образуют угол θ с осью x . Угол θ увеличивается с ростом расстояния z от стенки и интенсивности магнитного поля.

годаря наличию преимущественного направления ориентации, а также момент, обусловленный силами вязкости, который всегда противодействует вращению директора. Баланс моментов приводит к равенству [8.23]

$$\lambda_1 \partial_t \theta = k_{22} \partial_{zz} \theta + \chi_a H^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (8.179)$$

где λ_1 — вращательная вязкость (нематик — анизотропные жидкости) и k_{22} — упругая постоянная, модуль кручения. Простота теоретического описания этой ситуации объясняется тем, что мы рассматриваем только деформации кручения. В отличие от случаев продольного и поперечного изгиба (рис. 8.2) центры тяжести молекул не перемещаются в пространстве, поэтому не надо принимать во внимание никаких потоков. Кроме этого, поскольку анизотропия мала, то магнитное поле остается постоянным поперек кристалла, и любыми изменениями магнитного поля, возникающими благодаря искажению структуры нематик, можно пренебречь.

Перед тем как перейти к изучению влияния флуктуирующего магнитного поля на нематический слой, необходимо познакомиться с результатами в детерминистическом случае. В стационарном состоянии

$$0 = k_{22} \partial_{zz} \theta + \chi_a H^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (8.180)$$

Очевидно, что $\theta(z) \equiv 0$ является решением уравнения (8.180), которое остается справедливым и при $H = 0$. Исследуем три-

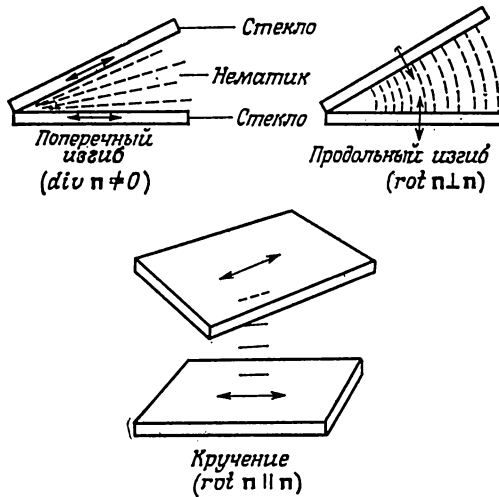


Рис. 8.2. Типы деформаций нематического кристалла. Рисунок показывает, как каждый тип деформации может быть получен путем соответствующих манипуляций со стеклянными пластинками [8.24].

виальное однородное стационарное решение $\theta(z) = 0$ на устойчивость при наличии магнитного поля. Как отмечено выше, $\theta(\pm \frac{d}{2}) = 0$ при всех значениях H . Таким образом, допустимы пространственно-неоднородные возмущения вида

$$\hat{\theta}(z, t) = \hat{\theta}_0 \exp(\omega_u t) \cos[(2\mu + 1)\pi z/d] \quad \mu = 0, 1, 2, \dots \quad (8.181)$$

где

$$|\hat{\theta}_0| \ll 1.$$

Подставляя (8.181) в (8.179) и учитывая, что

$$\sin \theta \cos \theta \approx \theta$$

при малых θ , получаем

$$\omega_u = (1/\lambda_1) [\chi_a H^2 - k_{22} (2\mu + 1)^2 (\pi^2/d^2)].$$

μ -я мода становится неустойчивой при $\omega_\mu \geq 0$, т. е. при

$$H^2 \geq (k_{22}/\chi_a) (\pi^2/d^2) (2\mu + 1)^2. \quad (8.182)$$

Это означает, что при

$$H_c^2 = (k_{22}/\chi_a) (\pi^2/d^2) \quad (8.183)$$

однородное состояние $\theta(z) \equiv 0$ становится неустойчивым по отношению к возмущениям вида $\cos \pi z/d$. Происходит переход, известный под названием *перехода Фредерикса*. При превышении критического значения H_c внешнее поле может повернуть директор в нематике от его первоначального направления, задаваемого пластинами. Состояние системы при этом становится пространственно-неоднородным. При $H_c < H < 3H_c$ неустойчива лишь низшая пространственная мода, которая и будет определять пространственную картину искажения нематика вблизи порога (8.183). Пренебрегая в этом случае высшими пространственными модами, мы можем записать

$$\theta(z, t) = \theta_m(t) \cos(\pi z/d). \quad (8.184)$$

Максимальная деформация, по соображениям симметрии, происходит при $z = 0$. При не слишком больших θ_m , т. е. в окрестности критической точки, (8.179) тогда дает

$$\lambda_1 \dot{\theta}_m(t) = -k_{22}(\pi^2/d^2) \theta_m(t) + \chi_a H^2 \left(\theta_m - \frac{1}{2} \theta_m^3 \right), \quad (8.185)$$

где

$$\sin \theta \cos \theta \approx \theta - \frac{1}{2} \theta^3 + \dots \quad (8.186)$$

Отметим, что (1.185) напоминает (обобщенное) уравнение Ферхюльста. Существенное различие заключается в том, что внешний параметр — магнитное поле H фигурирует в этом феноменологическом уравнении нелинейным образом.

В стационарном случае из (8.185) имеем

$$\theta_m = 0 \quad (8.187)$$

и

$$\theta_m = \pm [-k_{22}(\pi^2/d^2) + \chi_a H^2]^{1/2} \quad \text{при} \quad H \geq H_c.$$

Отметим, что пороговое значение поля зависит от размера системы,

$$H_c^2 \sim d^{-2}.$$

Уменьшение критического поля при увеличении толщины слоя легко понять: вращательный момент, индуцированный магнит-

ным полем, уравнивается упругим моментом, который обусловлен фиксацией директора двумя пластинами.

Поскольку диэлектрическая постоянная сильно анизотропна, то переход Фредерикса в нематике может быть также индуцирован приложением поперечного по отношению к слою электрического поля. Однако по сравнению со случаем магнитного поля в этом случае возникают два усложнения. Во-первых, электрическое поле в общем случае не однородно поперек слоя. Искажение нематического слоя приводит к появлению z -компоненты электрического поля $E(z)$. Лишь в пределе малых искажений, т. е. вблизи порога, поле $E(z)$ почти постоянно. Таким образом, в случае электрического поля, напряженность которого лишь незначительно отличается от пороговой, задача оказывается полностью аналогичной случаю магнитного поля и может быть описана уравнением, аналогичным (8.185). Чтобы выйти за пределы припороговой области, следует учесть неоднородность поля $E(z)$ и, кроме того, отличие случаев проводящего и диэлектрического нематиков. В первом случае переход Фредерикса может стать переходом первого рода с гистерезисом [8.22]. Ситуация еще более усложняется тем обстоятельством, что в этом случае могут происходить неустойчивости, индуцированные проводимостью [8.21].

После этого отступления по поводу влияния электрического поля приступим к изучению влияния флуктуаций магнитного поля на нематический слой и определим, каким образом это влияние видоизменяет переход Фредерикса. Внешний параметр, как уже говорилось, входит в данную задачу нелинейно — в (8.179) фигурирует квадрат магнитного поля. Поэтому здесь можно применить теоретические методы, развитые в предыдущем разделе. Ограничимся рассмотрением внешних флуктуаций не очень большой амплитуды (этот вопрос мы обсудим ниже). В этом случае остаются справедливыми те допущения, которые привели нас к уравнению (8.185), которое и будет служить в качестве отправной точки при изучении влияния внешнего шума на переход Фредерикса. По причинам, разъясненным ранее, мы снова представляем внешний шум ОУ-процессом. Тогда, перенормируя время $t \rightarrow \gamma t$ и вводя

$\alpha = \tau_{\text{корр}} k_{22} \pi^2 / \lambda_1 d^2$ а $\beta = \tau_{\text{корр}} \chi_a / \lambda_1$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_m &= -\alpha \theta_m + \beta (H + \xi_t)^2 \left(\theta_m - \frac{1}{2} \theta_m^3 \right) = \\ &= \left[-\alpha + \beta (H + \xi_t)^2 \right] \theta_m - \frac{1}{2} \beta (H + \xi_t)^2 \theta_m^3. \end{aligned} \quad (8.188)$$

В соответствии с результатами разд. 8.7.1, в частности формулами (8.176, 177), предел белого шума для (8.188) задается

формулой

$$d\theta_m = \left[-\alpha\theta_m + \beta \left(H^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\theta_m - \frac{1}{2} \theta_m^3 \right) \right] dt + \\ + \beta \left(\frac{\sigma^4}{2} + 4H'\sigma^2 \right)^{1/2} \left(\theta_m - \frac{1}{2} \theta_m^3 \right) \circ dW_t, \quad (8.189)$$

Как и в случае уравнения Ферхюльста, $\theta_m = 0$ является границей пространства состояний и стационарной точкой. Точнее пространство состояний $(-\pi/2, \pi/2)$ разбивается на две несвязанные половины внутренней границей $\theta_m = 0$. Стационарная точка теряет устойчивость одновременно с изменением природы границы, т. е. когда точка 0 становится естественной границей. Используя аналитическое условие (5.89)

$$L_1(0) = \infty.$$

находим, что решение $\theta_m = 0$ теряет устойчивость при

$$H^2 = H_c^2 - \sigma^2/2. \quad (8.190)$$

Этот результат можно было ожидать. Нелинейный шум изменяет значение внешнего параметра, который здесь возрастает от H^2 до $H^2 + \frac{\sigma^2}{2}$. Этот эффект тривиально связан с любым *нелинейным* шумом. Наш пример, когда присутствует поле H и шум с $E\{\xi_t^2\} = \sigma^2/2$, соответствует детерминистическому случаю, тогда H заменяется на $(H^2 + \sigma^2/2)^{1/2}$. Это объясняет понижение порога в соответствии с формулой (8.190). Отметим, что зависимость от размера кристалла отсутствует. Независимо от толщины слоя флуктуации магнитного поля уменьшают пороговое значение поля. Из формулы (8.190), казалось бы, следует, что стационарная точка $\theta_m = 0$, соответствующая однородному стационарному состоянию, может потерять устойчивость при приложении произвольно малого внешнего поля, если флуктуации (дисперсия) достаточно велики. Напомним, однако, что, как следует из детерминистического анализа на устойчивость, низшая пространственная мода становится определяющей лишь при условии $H_c < H < 3H_c$. Следовательно, формула (8.185), на которой основан наш анализ, перестает быть справедливой, когда внешний шум становится достаточно сильным, для того чтобы возбудить высшие пространственные моды. Интенсивность шума, при которой это происходит, лучше всего определить из анализа дифференциального уравнения в частных производных (8.179), или, эквивалентно, путем анализа иерархии уравнений для модовых амплитуд $\theta_{m\mu}(t)$. Обе эти задачи даже в случае, когда во второй из них ограничиться учетом лишь двух мод, аналитически не разрешимы на сегодняшней стадии развития

теории СДУ. Однако можно получить оценку сверху на интенсивность шума следующим образом. Если величина детерминированного магнитного поля лежит в окрестности значения H_c , то вероятность того, что $H + \xi_t$ превосходит $3H_c$, должна быть исчезающе малой. Это означает, что $H + 3\sigma < 3H_c$ при $\text{Prob}[(H + \xi_t) \leq 3H_c] = 0,99865$. По порядку величины мы получаем оценку

$$3\sigma < H_c \quad \text{или} \quad \sigma^2 < \sigma_1^2 \approx 0,1H_c^2 \quad (8.191)$$

как условие того, что шум не возбуждает высших мод.

Обратимся теперь к рассмотрению второй точки перехода, индуцированной шумом, когда наиболее вероятное значение θ_m становится отличным от нуля. Для экстремумов стационарной плотности вероятности получаем

$$\begin{aligned} & -\alpha\theta_m + \beta\left(H^2 + \frac{\sigma^2}{3}\right)\left(\theta_m - \frac{1}{2}\theta_m^3\right) - \\ & - \frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{\sigma^2}{2} + 4H^2\sigma^2\right)\left(1 - \frac{3}{2}\theta_m^2\right)\left(\theta_m - \frac{1}{2}\theta_m^3\right) = 0, \end{aligned} \quad (8.192)$$

$$\text{или } \theta_m = 0 \quad (8.193)$$

$$\begin{aligned} & \text{и } -\alpha + \beta\left(H^2 + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\theta_m^2\right) - \\ & - \frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{\sigma^4}{2} + 4H^2\sigma^2\right)\left(1 - \frac{3}{2}\theta_m^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\theta_m^2\right) = 0. \end{aligned} \quad (8.194)$$

Переход Фредерикса характеризуется тем фактом, что $\theta_m = 0$ является критической точкой, т. е. тройным корнем уравнения (8.192). Это имеет место при

$$-\alpha + \beta\left(H^2 + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{\sigma^4}{2} + 4H^2\sigma^2\right) = 0, \quad (8.195)$$

что дает

$$H^2 = \frac{1}{1 - 2\beta\sigma^2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta\sigma^4}{4} - \frac{\sigma^2}{2} \right) = \left(H_c^2 + \frac{\beta\sigma^4}{4} - \frac{\sigma^2}{2} \right) / (1 - 2\beta\sigma^2). \quad (8.196)$$

Отсюда следует, что переход исчезает, если интенсивность шума становится слишком большой, именно при

$$2\beta\sigma^2 = 1,$$

или

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\beta} = \frac{H_c^2}{2\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1 d^2}{k_{22} \pi^2 \tau_{\text{корр}}} H_c^2. \quad (8.197)$$

Напомним, что дисперсия σ^2 должна удовлетворять условию (8.191), в противном случае наше рассмотрение становится не-

справедливым, поскольку шум будет возбуждать высшие моды. Сравнивая оценку (8.191) с (8.197), мы видим, что σ_1^2 пропорциональна H_c^2 . В отличие от (8.191), однако, фактор пропорциональности зависит от толщины образца как d^2 . Этот фактор пропорциональности играет роль скорости затухания в детерминистическом случае. Если поле $H > H_c$ мгновенно выключается, то искажения в нематическом кристалле затухают с характерным временем

$$\tau_{\text{макро}} = (\lambda_1 d^2 / k_{22} \pi^2) (1 / \tau_{\text{корр}}) = \tau(0) / \tau_{\text{корр}}. \quad (8.198)$$

Согласно Чандрасекару [8.21], характерное время $\tau(0)$ для нематического слоя толщиной 25 мкм составляет примерно 0,1 с и быстро возрастает с увеличением толщины ($\tau(0) \sim d^2$). Чтобы предел белого шума имел бы физический смысл, спектральная ширина исходного цветного шума должна быть много больше «характеристической частоты» системы $\tau_{\text{макро}}^{-1}$, т. е. $\gamma \gg \tau(0)^{-1}$ или $\tau_{\text{корр}} \ll \tau(0)$. Лишь в случае выполнения этого условия можно заменить исходный цветной шум приближением белого шума, не меняя при этом качественно физику явления. Это значит, что в области применимости приближения белого шума величина $\sigma_1^2 = \tau(0) H_c^2 / 2 \tau_{\text{корр}}$ на несколько порядков больше величины $\sigma_1^2 \simeq 0,1 H_c^2$. Исчезновение переходов Фредерикса при $\sigma^2 = \sigma_1^2$ происходит в точке, которая лежит вне области применимости нашего теоретического описания на основе (8.188). При $\sigma^2 > \sigma_1^2$ можно ожидать возбуждения высших пространственных гармоник, что делает несправедливым уравнение (8.188) и, следовательно, результат (8.196). Из сказанного ясно, что справедливость неравенства $\tau_{\text{корр}} \ll \tau(0)$ и, таким образом, качество описания в терминах приближения белого шума зависит от спектральной ширины шума и размеров кристалла. При $\sigma^2 < \sigma_1^2 \ll \sigma_1^2$ мы имеем

$$H^2 = \left(H_c^2 + \beta \frac{\sigma^4}{4} - \frac{\sigma^2}{2} \right) [1 + 2\beta \sigma^2 + O(\sigma^4)] \simeq H_c^2 + \frac{\sigma^2}{2} (4\beta H_c^2 - 1) \quad (8.199)$$

$$= H_c^2 + \frac{\sigma^2}{2} \left(4 \frac{k_{22} \pi^2 \tau_{\text{корр}}}{\lambda_1 d^2} - 1 \right) = H_c^2 + \frac{\sigma^2}{2} \left(4 \frac{\tau_{\text{корр}}}{\tau(0)} - 1 \right). \quad (8.200)$$

$$H^2 = H_c^2 - \frac{\sigma^2}{2} + 2\sigma^2 \frac{\tau_{\text{корр}}}{\tau(0)} + O(\sigma^4). \quad (8.201)$$

Отметим, что эти формулы представляют собой приближение белого шума для задачи цветного шума, несмотря на то что в них явно фигурирует время корреляции (т. е. спектральная ширина). Сравнивая результат (8.201) с (8.190), можно сделать

вывод, что при описании в приближении белого шума случая цветного шума с большой спектральной шириной γ два перехода в модели Ферхюльста, первый — когда стационарная точка $\theta = 0$ становится неустойчивой, и второй — когда наиболее вероятное значение сдвигается в сторону от нуля, почти совпадают. Это происходит благодаря тому, что изменение коэффициента дрейфа, обусловленное членом $E\{\xi^2\}g(X_t) = (\sigma^2/2)g(X_t)$, превалирует над эффектами, возникающими благодаря мультипликативной природе шума. Это свойство нелинейного шума впервые было обнаружено Сан Мигуэлем и Санчо [8.10]. Оно также ответственно за тот факт, что любые размерные эффекты пренебрежимо малы для фазовых переходов, индуцированных шумом. Лишь малый поправочный член, содержащий $\tau(0)$, зависит от толщины образца.

Полученные выше теоретические предсказания могут быть проверены экспериментально при использовании флуктуирующего магнитного поля. В частности, это касается результата (8.196), а также отсутствия размерного эффекта в (8.201). Кроме этого, для дальнейшего продвижения в моделировании этой системы необходимы экспериментальные исследования случайного возбуждения высших пространственных мод. С нашей точки зрения, переход Фредерикса представляется весьма перспективной системой для теоретического и экспериментального изучения совместного влияния пространственной неоднородности и внешнего шума. Однако по историческим причинам экспериментальные исследования эффекта влияния шума на нематические слои были проведены с переходами более сложной природы, нежели переход Фредерикса. Эти эксперименты обсуждаются в следующем разделе.

8.7.3. Электрогидродинамические неустойчивости и внешний шум

Две японские группы [8.25, 26] провели эксперименты по изучению так называемых электрогидродинамических переходов в нематиках. Эти переходы, хотя и имеют некоторые общие черты с переходом Фредерикса, представляют собой более сложные явления, поскольку в них возникают потоки вещества. В этом смысле они аналогичны хорошо известной проблеме Рэлея — Бенара в тонком жидком слое, нагреваемом снизу [8.27—34].

Если к нематическому слою прикладывается переменное напряжение, то наблюдаются следующие переходы. Если при фиксированном значении частоты, достаточно низком для того, чтобы можно было работать в так называемом режиме проводимости [8.35], увеличивать амплитуду переменного напряжения, то при превышении критического значения напряжения V_c

состояние покоя жидкого кристалла становится неустойчивым. Возникает конвекция, при которой наблюдается образование цилиндрических структур, обусловленных двумерными потоками, как показано на рис. 8.3. В электрогидродинамике этот режим известен под названием домены Вильямса [8.36]. При дальнейшем возрастании электрического поля наблюдается последовательность различных потоковых структур, пока, наконец, не происходит переход к турбулентному течению (переход в режим «динамической рассеивающей моды») [8.35]. Различные потоковые режимы легко визуализируются благодаря анизотропии

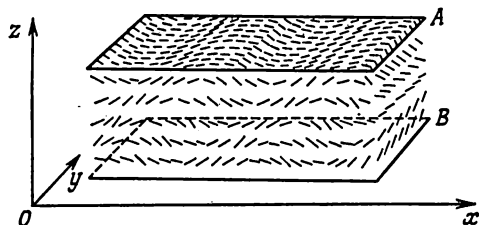


Рис. 8.3. Тип структур, наблюдаемых в режиме доменов Вильямса в нематическом слое, заключенном между двумя параллельными пластинами A и B и подверженном действию переменного напряжения (приложенного между A и B).

показателя преломления нематика. В режиме доменов Вильямса, например, темные и светлые полосы соответствуют цилиндрическим структурам.

В экспериментах Каи и др. [8.25] и Кавакубо и др. [8.26] исследовался эффект влияния внешнего шумового напряжения на переход в режим доменов Вильямса в нематике МББА. Частота переменного напряжения равнялась 25 Гц (в эксперименте Каи) и 50 Гц (Кавакубо). Внешний квазибелый шум V_i^n имел плоский спектр вплоть до 20 кГц (Каи) и до 5 кГц (Кавакубо). Более подробное описание эксперимента можно найти в оригинальных работах. Экспериментальные результаты двух групп совпадают и представлены на рис. 8.4.

Теоретические модели, использованные этими двумя группами, совершенно различны и будут рассмотрены отдельно. Электрогидродинамическое описание переходов в нематических кристаллах довольно сложно, поскольку они являются анизотропными жидкостями. Каи и др. утверждают, что в непосредственной окрестности критической точки потоками можно пренебречь. Ситуация тогда аналогична переходу Фредерикса, индуцированному электрическим полем. Оставляя лишь низшую пространственную моду

$$\theta = \theta_m \cos(\pi z/d) \cos(2\pi k_x x) \quad (8.202)$$

и учитывая действие вязких упругих и электрических вращательных моментов, Каи и сотр. получают следующее уравнение:

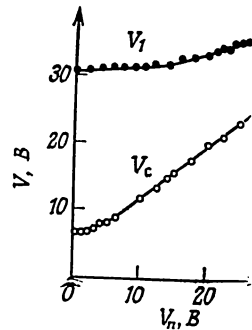
$$\dot{\theta}_m = \frac{\epsilon_a}{4\pi\gamma_1 d^2} (V^2 - V_c^2) \theta_m - \frac{\epsilon_a V^2}{6\pi\gamma_1 d^2} \theta_m^3. \quad (8.203)$$

Здесь θ — угол между директором и осью x , k_x — волновое число для x -направления, ϵ_a — анизотропная диэлектрическая проницаемость, γ_1 — анизотропная вязкость и

$$V_c^2 = (4\pi^3/\epsilon_a) (k_{11} + 4k_{33}k_x^2 d^2). \quad (8.204)$$

Как и ожидалось, уравнение (8.203) совершенно аналогично (8.185). Каи и др. [8.25] утверждают, что увеличение порогового

Рис. 8.4. Сдвиг критических точек, соответствующих возникновению доменов Вильямса V_c и переходу к турбулентности V_t , как функция интенсивности шума напряжения [8.25].



значения напряжения с ростом интенсивности шума может быть объяснено тем, что волновое число k_x и напряжение растут с ростом прикладываемой частоты. Внешний шум случайным образом возбуждает много различных цилиндрических структур с большими значениями волновых чисел, приводя к усилению мелкомасштабной конвекции и к повышению порогового значения V^2 . Эти рассуждения частично подтверждаются экспериментальными результатами Кавакубо и др. [8.26], которые измеряли спектральную плотность в пространстве волновых чисел. Сильный пик, соответствующий возникновению доменов Вильямса, лишь незначительно уширяется внешним шумом, но при этом сдвигается от $k_x = 415 \text{ см}^{-1}$ при $(E\{V_t^{n2}\})^{1/2} = 0$ к $k_x = 553 \text{ см}^{-1}$ при $(E\{V_t^{n2}\})^{1/2} = 9,92 \text{ В}$. Однако, как показывает анализ результатов¹⁾, увеличение k_x не может полностью объяснить увеличение порогового значения напряжения. Этот факт важен в свете нашего анализа перехода Фредерика. Мы обнаружили, что здесь существенную роль играет второй механизм, который

¹⁾ К сожалению, в экспериментальной работе приведены лишь три значения интенсивности шума.

уменьшает порог, именно индуцированный шумом переход, обусловленный совместным действием нелинейной динамики системы и внешнего шума. Этот механизм работает независимо от механизма изменения волновых чисел цилиндрических структур. Переписывая результаты, полученные для перехода Фредерикса, для данного случая и снова перенормируя время, имеем

$$a = \tau_{\text{корр}} \varepsilon_a / (2\pi\gamma_1 d^2),$$

$$\dot{\theta}_m = \frac{a}{2} [(V + \zeta_t)^2 - V_c^2] \theta_m - \frac{a}{3} (V + \zeta_t)^2 \theta_m^3, \quad (8.205)$$

и предел белого шума определяется формулой

$$d\theta_m = a \left[\frac{1}{2} \left(V^2 + \frac{\sigma^2}{2} - V_c^2 \right) \theta_m - \frac{1}{3} \left(V^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) \theta_m^3 \right] dt + \\ + a \left(\frac{\sigma^4}{2} + 4V^2 \sigma^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \theta_m - \frac{1}{3} \theta_m^3 \right) \circ dW_t. \quad (8.206)$$

Стационарная точка $\theta_m = 0$ становится неустойчивой при

$$V^2 = V_c^2 - (\sigma^2/2). \quad (8.207)$$

Это тривиальный шумовой эффект, уже обсуждавшийся в связи с переходом Фредерикса, и снова дисперсия σ^2 должна быть достаточно мала, чтобы можно было пренебречь возбуждением высших мод. Экспериментальные результаты Кавакубо показывают, что это действительно выполняется в экспериментах. Здесь k_x изменяется с изменением σ^2 , но измерения спектральной плотности ясно показывают, что возбуждается только одна пространственная мода: пик не уширяется внешним шумом, и окрестности критического значения перехода не наблюдается других пиков. Уравнение для определения экстремумов стационарной плотности вероятности имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(V^2 + \frac{\sigma^2}{2} - V_c^2 \right) \theta_m - \frac{1}{3} \left(V^2 + \frac{\sigma^2}{2} \right) \theta_m^3 - \\ - a \left(\frac{\sigma^4}{4} + 2V^2 \sigma^2 \right) \left(\frac{1}{2} - \theta_m^2 \right) \left(\frac{1}{2} \theta_m - \frac{1}{3} \theta_m^3 \right) = 0. \quad (8.208)$$

Условие порога получается, если учесть, что точка $\theta_m = 0$ должна быть тройным корнем

$$\frac{1}{2} \left(V^2 + \frac{\sigma^2}{2} - V_c^2 \right) - \frac{a}{4} \left(\frac{\sigma^4}{4} + 2V^2 \sigma^2 \right) = 0, \\ V^2 = \frac{V_c^2}{1 - a\sigma^2} + \left(\frac{a\sigma^4}{8} - \frac{\sigma^2}{2} \right) / (1 - a\sigma^2). \quad (8.209)$$

Как и в случае перехода Фредерикса, мы находим, что, для того чтобы возникла критическая точка, интенсивность шума должна быть меньше, чем σ_c^2 :

$$\sigma_c^2 = 2\pi\gamma_1 d^2 / \varepsilon_a. \quad (8.210)$$

Рассмотрение (8.203) показывает, что время релаксации при нулевом поле определяется выражением $\tau(0) = 4\pi\gamma d^2/(\epsilon_a V_c^2)$ и, таким образом,

$$a = 2\tau_{\text{корр}}/\tau(0) V_c^2. \quad (8.211)$$

При $\sigma^2 \ll \sigma_c^2$ мы имеем

$$V^2 \simeq V_c^2 - \sigma^2/2 + 2(\tau_{\text{корр}}/\tau(0))\sigma^2. \quad (8.212)$$

Как видно из (8.204), этот переход и в детерминистическом случае характеризуется зависимостью от размера образца. Однако при действии внешнего шума мы обнаруживаем явление, подобное тому, которое имеет место при переходе Фредерикса: эффект нелинейности шума доминирует над эффектом мультипликативности шума. И снова две точки перехода почти совпадают и размерные эффекты оказываются пренебрежимо малыми.

Кавакубо и др. основывают свое теоретическое объяснение на теории Дюбуа-Виолетта и др. [8.37] (см. также [8.21]) электрогидродинамической неустойчивости. Эта теория учитывает неоднородность электрического поля и образование пространственного заряда благодаря искажению слоя. Дюбуа-Виолетт и др. рассматривают ситуации, близкие к точке неустойчивости, и проводят линейный анализ на устойчивость. Состояние нематического слоя в этой теории описывается двумя переменными: плотностью пространственного заряда q и локальной кривизной линии молекулярного выстраивания $\psi = \partial\theta/\partial x$. Пренебрегая всеми нелинейными членами, они получают следующие уравнения:

$$\dot{q} = -q(t)/\tau - \sigma_H E \cos \omega t \cdot \psi(t), \quad (8.213)$$

$$\dot{\psi} = -E \cos(\omega t) (q(t)/\eta) - \lambda [A + E^2 \cos^2 \omega t] \psi(t). \quad (8.214)$$

Здесь τ — время диэлектрической релаксации пространственного заряда, $\sigma_H = \sigma_{\perp}(\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel} - \sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel})$ — проводимость Хельфриха, η — эффективная вязкость, λ и A — положительно определенные постоянные, определяемые диэлектрическими свойствами среды, электропроводностью, упругостью и вязкостью нематика. Внешнее переменное поле задается в виде $E \cos \omega t$. Кавакубо и др. используют (8.213, 214) в качестве исходной точки для анализа влияния квазibelого шумового напряжения. Описывая внешний шум ОУ-процессом, они заменяют в вышеприведенных уравнениях $E \cos \omega t$ на $E \cos \omega t + \xi_t$. Кривизна ψ изменяется в гораздо большем диапазоне, чем пространственный заряд q . В случае высокочастотного внешнего шума при $\tau_{\text{корр}} \ll \tau$ шум ξ_t усредняется и исчезает из (8.123) и ψ можно считать константой. Это

дает

$$q(t) = -\frac{\sigma_H E \tau \psi}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t). \quad (8.215)$$

Подставляя это выражение в (8.124) и усредняя по периоду, Кавакубо и др. получают

$$\dot{\psi} = \left[\left(\frac{\sigma_H \tau}{\eta (1 + \omega^2 \tau^2)} - \lambda \right) \frac{E^2}{2} - \lambda A - \lambda E \{ \xi_i^2 \} \right] \psi, \quad (8.216)$$

что дает следующее условие неустойчивости:

$$\frac{E^2}{2} > \frac{\lambda \eta (1 + \omega^2 \tau^2)}{\sigma_H \tau - \lambda \eta (1 + \omega^2 \tau^2)} (A + E \{ \xi_i^2 \}),$$

или, для напряжения, условие

$$V^2 > V_0^2 + \alpha E \{ V_i^2 \}, \quad (8.217)$$

где

$$V_0^2 = \frac{\lambda \eta (1 + \omega^2 \tau^2) A}{\sigma_H \tau - \lambda \eta (1 + \omega^2 \tau^2)} d^2,$$

$$V_i^2 = \xi_i d, \quad \alpha = \frac{\lambda \eta (1 - \omega^2 \tau^2)}{\sigma_H \tau - \lambda \eta (1 + \omega^2 \tau^2)}.$$

Отметим, что этот результат основан на линеаризованном описании системы. Как уже отмечалось для модели Ферхюльста в разд. 6.4, линейный анализ может описать лишь переход, обусловленный изменением характера границы. Таким образом, вышеприведенные результаты линеаризованного рассмотрения неустойчивостей проводимости могут относиться только к устойчивости стационарной точки $\psi = 0$, но не могут определять точку фазового перехода, индуцированную шумом, в которой наиболее вероятное значение ψ становится отличным от нуля. Формулу (8.217) следует, таким образом, сравнивать с (8.207), а не с (8.209) или (8.212). Как и в случае перехода Фредерикса, Кавакубо и др. [8.26] не обнаружили влияния размерных эффектов на потерю устойчивости стационарной точкой. Однако их модель с двумя переменными предсказывает увеличение порога с ростом дисперсии флуктуаций. Это, очевидно, согласуется с экспериментальными результатами. Для теоретического изучения второй точки перехода, индуцированной шумом, необходимо использовать нелинейный вариант теории Дюбуа-Виолетта и сотр. Благодаря тому что мы должны при этом иметь дело с нелинейным диффузионным процессом, описываемым двумя переменными, получить явные аналитические результаты не представляется возможным. Думается, однако, что подобный анализ вряд ли может существенно изменить теоретические предсказания линейного анализа. Поскольку нелинейность шума домини-

рует, то две точки перехода должны почти полностью совпадать (сдвиг между ними будет порядка $\tau_{\text{корр}}/\tau$, как и в двух предыдущих моделях).

8.8. Турбулентность и внешний шум

Каи и др. [8.25] изучали влияние внешнего шума не только на переход в режим доменов Вильямса, но также и на переход в режим «динамической рассеивающей моды», т. е. турбулентности. Их экспериментальные результаты представлены на рис. 8.4 кривой V_1 . Результат этого эксперимента весьма удивителен: в противоположность интуиции оказывается, что шум *затрудняет* переход в турбулентный режим. Внешний шум, т. е. стохастичность окружения, *стабилизирует* систему по отношению к переходу в состояние хаоса, т. е. состояние внутренней стохастичности. Этот результат выглядит еще более поразительным, если мы примем во внимание, что имеем дело с нелинейным шумом. Напомним, что $E\{V_1^2\} = V^2 + \sigma^2/2$, так что этот эффект, который тривиально связан с квадратичностью шума, должен был бы приводить к понижению порогового значения на величину $\sigma^2/2$ аналогично (8.190, 207). Таким образом, экспериментальные результаты ясно демонстрируют присутствие не тривиального, истинно шумового эффекта.

Для того чтобы оценить в полной мере значение этих результатов, рассмотрим кратко известные к настоящему времени факты относительно роли внешнего шума в различных механизмах перехода в состояние хаоса [1.29]. Из трех обычных механизмов только механизм Рюэлля — Такенса не чувствителен к действию (малого) шума. Этот удивительный результат был продемонстрирован Кифером [8.38]. Кифер доказал, грубо говоря, что для систем с аттрактором, удовлетворяющим аксиоме А, стационарная плотность вероятности системы, возмущаемой цветным внешним шумом, слабо сходится к инвариантной мере аттрактора, когда интенсивность шума стремится к нулю. Случай внешнего шума с конечной интенсивностью остается не исследованным, так же как и случай аттрактора, не подчиняющегося аксиоме А. Влияние шума на лоренцевский странный аттрактор изучалось численно [8.39]¹⁾. Результаты показывают, что здесь шум оказывает интуитивно ожидаемый эффект: он понижает порог перехода в режим турбулентности. Переход к хаосу через удвоение периода (сценарий Фейгенбаума) и через перемежаемость (сценарий Помо — Манневилля) чувствителен даже к малому шуму. И этого также можно было ожидать интуитивно. В сценарии Фейгенбаума большие периоды стираются, что при-

¹⁾ См. также [1*]. — Прим. ред.

водит к возникновению «бифуркационной щели» [8.40]. Подробное исследование влияния шума на системы с последовательностью удвоений периода, а именно на модель Ферхюльста и логистическую модель, можно найти [8.44]. Эти авторы также обнаружили, что поведение системы, находящейся под действием периодически изменяющегося детерминистического окружения, заметно отличается от такового при действии шумовой среды. Для систем, подчиняющихся сценарию Фейгенбаума, можно получить законы подобия, описывающие влияние внешнего шума в области возникновения хаоса [8.42, 43]. В системах, проявляющих перемежаемость, поведение влияния шумовых эффектов было исследовано Майер-Крессом и Хакеном [8.44], Эккманом и др. [8.45] и Хиршем и др. [8.46]. Длительность ламинарного интервала, т. е. время между двумя последовательными турбулентными вспышками, подчиняется закону подобия и уменьшается с увеличением интенсивности шума. Резюмируя, можно сказать, что в трех обычно используемых механизмах перехода к хаосу шум либо не оказывает влияния, либо оказывает ожидаемый эффект стимулирования перехода в режим турбулентности. Эти механизмы, следовательно, не дают даже качественного объяснения экспериментальных результатов Каи и сотр.

В отсутствие простой теоретической модели перехода в режим «динамической рассеивающей моды» в нематическом жидком кристалле кажется, что в данный момент трудно найти объяснение экспериментальным результатам Каи и др., которые противоречат интуиции. Однако ситуацию можно в какой-то мере прояснить, если сравнить данную систему с другой гидродинамической системой, для которой существует простая, но удовлетворительная феноменологическая теория перехода в турбулентное состояние, а именно с явлением теплового противотока гелия-II. Нарастание турбулентности, связанной с вихревыми нитями, очень хорошо описывается модифицированным уравнением Винена [8.47, 48]:

$$\dot{L} = Av \left(1 - \frac{\alpha}{d} L^{-1/2} \right) L^{3/2} - C\kappa L^2. \quad (8.218)$$

Здесь A , C — безразмерные постоянные ($\alpha \approx 1$), d — диаметр трубки, κ — квант циркуляции, v — скорость противотока и L — плотность числа вихревых нитей. Подробное обсуждение феноменологии уравнения Винена и удивительно хорошие результаты по описанию с его помощью турбулентности сверхтекучей жидкости можно найти в [8.48]. Естественно, что скорость противотока v является флуктуирующей величиной, и недавно Мосс и Велланд [8.49] использовали уравнение (8.218) для теоретического анализа влияния шума флуктуаций скорости противотока

на возникновение турбулентности. Они обнаружили замечательный результат, что шум затрудняет возникновение турбулентности. В завершение этого раздела мы изложим более детально их теоретический анализ, который приводит к тем же выводам, что и экспериментальные результаты Каи и др. Положив $v = v/v_c$ с $v_c = 4C\kappa\alpha/Ad$, $x = L/L(v_c)$, где $\bar{L}(v)$ — стационарное решение (8.218), $\tau = 4C\kappa(\alpha/d)^2 t$, мы получаем (8.218) в безразмерной форме

$$\frac{dX}{d\tau} = 2vX \left(X^{1/2} - \frac{1}{2} \right) + X^2. \quad (8.219)$$

Стационарными решениями этого уравнения являются $\bar{x}_1 = 0$ (линейно) устойчивое при всех $v > 0$ и $\sqrt{\bar{x}_{+/-}} = v[1 \pm \sqrt{1 - (1/v)}]$, которое существует при $v \geq 1$ и в котором \bar{x}_+ устойчиво, \bar{x}_- неустойчиво. Возникновение турбулентности происходит, таким образом, при $v = 1$, т. е. $v = v_c$. Мосс и Велланд рассматривают случай быстрых флуктуаций скорости противотока и принимают $v_t = \sigma + \sigma\xi_t$ (приближение белого шума). Это приводит к СДУ Стратоновича

$$dX_\tau = \left[2vX_\tau \left(X_\tau^{1/2} - \frac{1}{2} \right) - X_\tau^2 \right] d\tau + 2\sigma X_\tau \left(X_\tau^{1/2} - \frac{1}{2} \right) \circ dW_\tau. \quad (8.220)$$

Уравнение (8.220) имеет три внутренние границы, именно $b_1 = 0$ и $b_2 = 1/4$, где $g(x) = 0$, и $b_3 = \infty$, где $|f(x)| = \infty$. Однако средняя граница b_2 имеет искусственный характер. Как отмечают Мосс и Велланд, феноменология Винена не содержит никакого механизма появления отличной от нуля плотности нитей в первоначально свободной от завихренности сверхтекучей жидкости. Это совершенно естественно: (8.218) является детерминистическим уравнением, в то время как зарождение вихревых нитей в сверхтекучей жидкости, первоначально свободной от завихренности, представляет собой существенно случайное явление, вызываемое, например, колебаниями криостата. Мы можем смоделировать этот механизм введением второго независимого шумового источника и видоизменить (8.220), добавив в него малый аддитивный шумовый член

$$dX_\tau = \left[2vX_\tau \left(X_\tau^{1/2} - \frac{1}{2} \right) - X_\tau^2 \right] d\tau + 2\sigma X_\tau \left(X_\tau^{1/2} - \frac{1}{2} \right) \circ dW_\tau + \mu d\tilde{W}_\tau, \quad (8.221)$$

где W_τ и \tilde{W}_τ — независимые процессы Винера. (Другой подход к модифицированию (8.220) см. в [8.50].) Отметим, что это разрушает внутреннюю границу $b_2 = 1/4$ (а также $b_1 = 0$) и позволяет избежать сингулярностей, связанных с b_2 . Однако, поскольку новый шум аддитивен, он никоим образом не изменяет анализа Мосса и Велланда в отношении явления перехода.

Чтобы записать УФП, перейдем к уравнению Ито, эквивалентному (8.221)

$$dX_\tau = \left[2\nu X_\tau \left(X_\tau^{1/2} - \frac{1}{2} \right) - X_\tau^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 2X_\tau \left(X_\tau^{1/2} - \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times (3X_\tau^{1/2} - 1) \right] d\tau + 2\sigma X_\tau \left(X_\tau^{1/2} - \frac{1}{2} \right) dW_\tau + \mu d\tilde{W}_\tau. \quad (8.222)$$

Тогда уравнение ФП имеет вид

$$\partial_\tau p(x, \tau) = -\partial_x \left[2\nu x \left(x^{1/2} - \frac{1}{2} \right) - x^2 + \right. \\ \left. + \sigma^2 x \left(x^{1/2} - \frac{1}{2} \right) (3x^{1/2} - 1) \right] p(x, \sigma) + \\ + \frac{1}{2} \partial_{xx} \left[4\sigma^2 x^2 \left(x^{1/2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \mu^2 \right] p(x, \tau). \quad (8.223)$$

Здесь необходимо сделать одно замечание. Индуцированный шумом дрейф описывается выражением

$$\frac{1}{2} \sigma^2 g'g = \sigma^2 \left(3x^2 - \frac{5}{2} x^{3/2} + \frac{1}{2} x \right). \quad (8.224)$$

Таким образом, мы имеем

$$\dot{f} + \frac{1}{2} \sigma^2 g'g = (-1 + 3\sigma^2) x^2 + O(x^{2/3}),$$

т. е. индуцированный шумом дрейф модифицирует высшие члены в феноменологическом выражении для коэффициента дрейфа; множитель $(3\sigma^2 - 1)$ в этом выражении становится положительным при больших σ^2 . Ясно, что этого не было бы, если бы (8.221) интерпретировалось как уравнение Ито.

Эта модель оказывается чувствительной к смене интерпретации СДУ в отношении поведения плотности вероятности на бесконечности. В интерпретации Стратоновича, принимаемой здесь, граница $b_3 = \infty$ изменяет свой характер при $\sigma^2 = 1$ с естественного на регулярный; таким образом, невозможно обеспечить существование стационарной плотности вероятностей. В определенном смысле происходит индуцированный шумом «унос» вероятности. Этого, очевидно, не происходит, если (8.221) интерпретировать как уравнение Ито. С другой стороны, с физической точки зрения уравнения (8.219, 221) вряд ли справедливы при произвольно больших значениях x . Поэтому мы ограничиваем пространство состояний x интервалом $[0, x_{\max}]$, где x_{\max} — наибольшая плотность нитей, которая физически достигается в системе. В моделях, рассмотренных ранее, подобная процедура не нужна, поскольку стационарная плотность вероятности уменьшается по крайней мере экспоненциально всякий раз, когда $b_2 = \infty$ является верхней границей пространства состояний. Это

означает, что очень большие значения переменной состояния встречаются лишь с малой вероятностью. Фактически, поскольку эта вероятность экспоненциально мала, ее можно считать нулем для всех практических целей, поэтому в этих моделях переход к большим значениям x с физической точки зрения совершенно безопасен. Если бы имелась высокая, но конечная граница с мгновенным отражением, делающая вероятность крайне удаленных блужданий строго равной нулю, это не привело бы ни к каким изменениям в $p_s(x)$, кроме поправки в нормировочной постоянной для $p_s(x)$ на бесконечно малую величину. Однако данная модель не обладает этим свойством, т. е. $p_s(x)$ не уменьшается экспоненциально при $x \rightarrow \infty$. Поэтому мы рассмотрим (8.222) на $[0, x_{\max}]$ и используем условие мгновенного отражения на обеих границах. Стационарная плотность вероятностей и ее экстремумы можно определить из обычных выражений

$$p_s(x) = \mathcal{N}^2 \left[4\sigma^2 x^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \mu^2 \right]^{-1} \times \\ \times \exp \left(2 \int^x \frac{2\nu z \left(\sqrt{z} - \frac{1}{2} \right) - z^2 + \sigma^2 z \left(\sqrt{z} - \frac{1}{2} \right) (3\sqrt{z} - 1)}{4\sigma^2 z^2 \left(\sqrt{z} - \frac{1}{2} \right)^2 + \mu^2} dz \right), \quad (8.225)$$

где \mathcal{N}^2 определяется из условия $\int_0^{x_{\max}} p_s(x) dx = 1$, и

$$2\nu x_m \left(\sqrt{x_m} - \frac{1}{2} \right) - x_m^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 2x_m \left(\sqrt{x_m} - \frac{1}{2} \right) (3\sqrt{x_m} - 1) = 0. \quad (8.226)$$

Корни (8.226) равны

$$x_{m0} = 0 \quad \text{при всех } \sigma \quad \text{и} \quad \nu^2 \quad (8.227)$$

и

$$\sqrt{x_{m+/-}} = \frac{1}{3\sigma^2 + 1} \left(\nu + \frac{5}{4} \sigma^2 \pm \sqrt{\nu^2 - \frac{1}{2} \nu \sigma^2 + \frac{1}{16} \sigma^4 - \nu - \frac{\sigma^2}{2}} \right). \quad (8.228)$$

Легко проверить, что $x_{m0} = 0$ всегда минимум. Поэтому x_{m-} является минимумом, а x_{m+} — максимумом, если они существуют и находятся на интервале $[0, x_{\max}]$. Далее, значения $x_{m+/-}$ действительны, если

$$\nu^2 + \frac{1}{2} \nu \sigma^2 + \frac{1}{16} \sigma^4 - \nu - \frac{\sigma^2}{2} \geq 0$$

Это означает, что при заданном σ^2 имеется порог по ν , причем

$$\nu_{th} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \pm \sqrt{1 + 3\sigma^2} \right), \quad (8.229)$$

и, наоборот, при заданном v имеется порог по σ^2 :

$$\sigma_{th}^2 = 4(v + 1 \pm \sqrt{3v + 1}). \quad (8.230)$$

Переходя к пределу $\sigma^2 \rightarrow 0$ в (8.229), мы видим, что детерминистическому выражению для порога возникновения турбулентности отвечает знак плюс, так что

$$v_{турб}(\sigma^2) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{1 + 3\sigma^2} \right). \quad (8.231)$$

Это соответствует знаку минус в (8.230)

$$\sigma_{турб}^2(v) = 4(v + 1 - \sqrt{3v + 1}), \quad v \geq 1. \quad (8.232)$$

При $v > v_{турб}$ и σ^2 фиксированном (или при $\sigma^2 < \sigma_{турб}^2$ и v фиксированном) возникает сверхтекучая турбулентность. Формула (8.231) выражает результат, полученный в [8.49]: шум затрудняет наступление турбулентного режима. При малых интенсивностях шума, $\sigma^2 \ll 1$, имеем

$$v_{турб}(\sigma^2) \approx 1 + 2\sigma^2. \quad (8.233)$$

Кроме того, имеем, что критическая плотность вихревых нитей на пороге возникновения турбулентности уменьшается. При малых значениях σ^2

$$x_n^c \approx 1 - \frac{1}{4} \sigma^2. \quad (8.234)$$

Второй корень (8.229, 230) соответствует чисто шумовому явлению. Если $\sigma^2 \geq \sigma_+^2$, где

$$\sigma_+^2(v) = 4(v + 1 + \sqrt{3v + 1}), \quad (8.235)$$

то система становится турбулентной. Как видно из (8.235), это может произойти при любом значении v даже при $0 < v < 1$ ¹⁾. В предельном случае нулевой средней скорости противотока, равной нулю, например, турбулентность возникает, если интенсивность шума проходит пороговое значение $\sigma_+^2(0) = 8$. Это означает, что в дополнение к сдвигу детерминистической точки

¹⁾ Здесь $\sqrt{x_m(v_+^2)} \approx 0.4$, $0 < v < 1$, т. е. среднее расстояние между вихревыми нитями — $L^{-1/2}$ — несколько превышает диаметр трубки. Эффекты влияния стенок могут искажать эффект перехода, индуцированного шумом, так что в данный момент не ясно, можно ли его наблюдать экспериментально.

перехода к турбулентности, как это следует из (8.231), имеется также и переход в режим турбулентности, индуцированный в чистом виде шумом, который происходит при любых ν . Этот индуцированный шумом эффект был найден еще Моссом и Велландом. Флуктуационное уравнение Винена (8.222), таким образом, предсказывает очень интересные эффекты для теплового противотока гелия-II: при $\nu < 1$ турбулентность возникает при $\sigma^2 \geq \sigma_+^2(\nu)$. При $\nu \geq 1$ турбулентность начинается при $\sigma^2 < \sigma_{\text{турб}}^2(\nu)$ и $\sigma^2 > \sigma_+^2(\nu)$. Относительная ширина области, свободной от турбулентности, т. е. величина $|\sigma_+^2 - \sigma_{\text{турб}}^2|/\sigma_{\text{турб}}^2$ уменьшается как $1/\sqrt{\nu}$ при больших ν .

МАРКОВСКИЙ ДИХОТОМИЧЕСКИЙ ШУМ: ТОЧНО РЕШАЕМЫЙ СЛУЧАЙ ЦВЕТНОГО ШУМА

Как мы уже подчеркивали, в общем случае невозможно получить точное решение, например, для стационарной плотности вероятности системы, когда рассматривается шум произвольной формы. Дело обстоит так даже в довольно простом случае марковского гауссовского шума. Следовательно, общий случай внешнего цветного шума может быть рассмотрен лишь приближенными методами. Методы, развитые в гл. 8, позволяют исследовать два предельных случая — низкочастотного и высокочастотного внешнего шума. В частности, для последнего случая малых корреляционных времен в нашем распоряжении имеется метод разложения в ряд по теории возмущений. Этот метод использовался, чтобы показать, что фазовые переходы, индуцированные внешним шумом с малым временем корреляции, могут быть идентифицированы с переходами, исследованными в случае применения идеализации белого шума. Однако благодаря различию между двумя приближенными методами, используемыми для описания высокочастотного и низкочастотного шума, остается не ясным, каким образом переходы, предсказанные для случая «быстрого» шума, связаны с переходами, имеющими место в случае «медленного» внешнего шума. Желательно поэтому дополнить ту информацию, которая получается с помощью общих приближенных методов, информацией, полученной из изучения специальных классов внешнего цветного шума. Другими словами, полезно найти такие примеры цветного шума, которые позволяют для произвольной системы с одной переменной точно вычислить по крайней мере стационарную плотность вероятности при любом значении времени корреляции. Как говорилось выше, гауссовский шум не принадлежит к этому классу. Следует обратиться к случайным процессам с более простой структурой, и вполне естественным кандидатом оказывается марковский процесс с дискретным пространством состояний. Простейшим процессом такого типа является дихотомический марковский шум, известный так же, как случайный телеграфный сигнал. В данной главе мы покажем, что он действительно позволяет получить точные результаты и построить полную картину влияния корреляций.

9.1. Марковский дихотомический шум: математический формализм

Пространство состояний марковского дихотомического шума I_t состоит лишь из двух уровней $\{\Delta_-, \Delta_+\}$. Этот шум представляет собой однородный во времени марковский процесс и, следовательно, полностью характеризуется следующей плотностью вероятности:

$$P_{ij}(t) = \text{Prob}(I_t = i | I_0 = j), \quad ij \in \{\Delta_+, \Delta_-\}. \quad (9.1)$$

Временная эволюция шума задается прямым уравнением Колмогорова, известным в физической литературе под названием управляющего уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_{\Delta_+ - j}(t) \\ P_{\Delta_+ + j}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\Delta_+ - j}(t) \\ P_{\Delta_+ + j}(t) \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

где α и β — средние частоты перехода из Δ_+ в Δ_- и из Δ_- в Δ_+ . Легко показать, что собственные значения матрицы, фигурирующей в (9.2), равны

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\gamma, \quad (9.3)$$

где

$$\gamma = \alpha + \beta. \quad (9.4)$$

Таким образом, зависящее от времени решение управляющего уравнения (9.2) задается формулой

$$P_{ij} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{-\gamma t} & \alpha(1 - e^{-\gamma t}) \\ \beta(1 - e^{-\gamma t}) & \beta + \alpha e^{-\gamma t} \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Стационарная плотность вероятности равна

$$P_s(\Delta_+) = \frac{\beta}{\gamma}, \quad P_s(\Delta_-) = \frac{\alpha}{\gamma}. \quad (9.6)$$

Как обычно, мы предполагаем, что внешний шум представляет собой стационарный случайный процесс, так что формулу (9.6) следует рассматривать как начальное условие при рассмотрении дихотомического шума. Тогда среднее значение его равно

$$E(I_t) = \frac{1}{\gamma} (\alpha \Delta_- + \beta \Delta_+), \quad (9.7)$$

а корреляционная функция $C(t)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} C(t) &= E\{I_t I_0\} - (E\{I_t\})^2 = \sum_{ij} ij P_{ij}(t) P_s(j) - (E\{I_t\})^2 = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} (\Delta_+ - \Delta_-)^2 \exp(-\gamma t). \end{aligned} \quad (9.8)$$

Система, находящаяся под воздействием такого цветного шума, описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\dot{X}_t = h(X_t) + I_t g(X_t) \equiv f(X_t, I_t), \quad (9.9)$$

которое в детерминистическом случае сводится к

$$\dot{X}(t) = h(X(t)) + I g(X(t)), \quad (9.10)$$

где

$$I = E\{I_t\}.$$

Очевидно, что парный процесс (X_t, I_t) является марковским и, следовательно, подчиняется прямому уравнению Колмогорова для плотности вероятности переходов. Из особой структуры парного процесса $((X_t, I_t))$ является вырожденным парным процессом, компонента которого I_t флуктуирует независимо от X_t интуитивно ясно, что это уравнение должно состоять из следующих двух членов: одного, описывающего эволюцию X_t при фиксированном значении I_t ($I_t = \Delta_+$ или $I_t = \Delta_-$), и второго, содержащего матрицу (9.2), управляющую эволюцией I_t . Таким образом [9.1, 2],

$$\begin{aligned} \partial_t p(x, \Delta_-, t | u_0, i_0, 0) = & -\partial_x \{[h(x) + \Delta_- g(x)] \times \\ & \times p(x, \Delta_-, t | x_0, i_0, 0)\} - \beta p(x, \Delta_-, t | x_0, i_0, 0) + \\ & + \alpha p(x, \Delta_+, t | x_0, i_0, 0), \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_t p(x, \Delta_+, t | x_0, i_0, 0) = & -\partial_x \{[h(x) + \Delta_+ g(x)] \times \\ & \times p(x, \Delta_+, t | x_0, i_0, 0)\} - \alpha p(x, \Delta_+, t | x_0, i_0, 0) + \\ & + \beta p(x, \Delta_-, t | x_0, i_0, 0). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Исходным пунктом вывода этих двух уравнений является, как обычно, уравнение Чепмена—Колмогорова, которое для парного процесса (X_t, I_t) имеет вид

$$\begin{aligned} p(x, i, t+h | x_0, i_0, 0) = & \sum_j \int dy p(x, i, t+h | y, j, t) \times \\ & \times p(y, j, t | x_0, i_0, 0). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Для сокращения обозначений определим величину

$$p(x, i, t | 0) \equiv p(x, i, t | x_0, i_0, 0). \quad (9.14)$$

Чтобы не загружать изложение, проведем вывод для случая $i = \Delta_-$, т. е. для (9.11). Доказательство для (9.12), т. е. при $i = \Delta_+$, совершенно аналогично. Пусть $g(z)$ будет бесконечно дифференцируемая действительная функция с компактным носителем, т. е. она тождественно равна нулю за пределами опре-

деленного ограниченного интервала. Тогда из (9.13) с $i = \Delta_-$ следует, что

$$\begin{aligned} \int dx g(x) p(x, \Delta_-, t+h|0) &= \sum_j \int dy p(y, j, t|0) \times \\ &\times \left[\int dx g(x) p(x, \Delta_-, t+h|y, j, t) \right], \end{aligned}$$

где $j \in \{\Delta_-, \Delta_+\}$.

Вычитая из обеих частей $\int p(x, \Delta_-, t|0) g(x) dx$, получаем

$$\begin{aligned} &\int dx g(x) [p(x, \Delta_-, t+h|0) - p(x, \Delta_-, t|0)] = \\ &= \sum_j \int dy p(y, j, t|0) \left[\int dx g(x) p(x, \Delta_-, t+h|y, j, t) \right] - \\ &- \int dx g(x) p(x, \Delta_-, t|0). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Деля обе части на h и переходя к пределу $h \rightarrow 0$, получаем для левой части (9.15)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int dx g(x) [p(x, \Delta_-, t+h|0) - p(x, \Delta_-, t|0)] &= \\ &= \int dx g(x) \partial_t p(x, \Delta_-, t|0). \end{aligned} \quad (9.16)^1$$

Для вычисления правой части надо определить вероятность перехода $p(x, \Delta_-, t+h|y, j, t)$ при бесконечно малом h . Случайный телеграфный сигнал не зависит от X_t . Используя то, что по определению он является марковским процессом, мы имеем следующие вероятности переходов на малых временных интервалах для трех основных типов переходов, которые могут происходить:

$$1) j = \Delta_-, \text{ нет прыжка } \Delta_- \rightarrow \Delta_-, p_{\Delta_- \Delta_-}(h) = 1 - \beta h + o(h); \quad (9.17)$$

$$2) j = \Delta_+, \text{ в точности один прыжок } \Delta_+ \rightarrow \Delta_-, p_{\Delta_- \Delta_+}(h) = \alpha h + o(h); \quad (9.18)$$

3) два или большее число прыжков: $o(h)$,
 Нам надо рассмотреть только два первых случая, поскольку $\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0$. Если при рассмотрении случайного телеграф-

¹⁾ Мы предполагаем, как обычно, что производная $\partial_t p(x, \Delta_-, t|0)$ существует и непрерывна. Тогда допустима перестановка знаков интеграла и предельного перехода.

ного сигнала прыжок отсутствует и $X_t = y$ в момент времени t , тогда процесс X_t заканчивается в точке

$$x = y + f(y, \Delta_-)h + o(h)$$

в момент времени $t + h$. Это означает, что

$$p(x, \Delta_-, t + h | y, \Delta_-, t) = \delta(x - [y + f(y, \Delta_-)h]) (1 - \beta h) + o(h). \quad (9.19)$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда на интервале $[t, t + h]$ происходит лишь один скачок. Относительный промежуток времени v , в течение которого процесс совершает прыжок, однородно распределен на интервале $[0, 1]$ с точностью до членов основного порядка по h , т. е. $p(v) = 1 + o(h)$. Тогда начиная в момент времени t с точки y процесс X_t оказывается в момент времени $t + h$ на значении

$$x = y + vf(y, \Delta_+)h + (1 - v)f(y, \Delta_-)h + o(h).$$

Следовательно, мы получаем

$$p(x, \Delta_-, t + h | y, \Delta_+, t) = \delta(x - [y + vf(y, \Delta_+)h + (1 - v)f(y, \Delta_-)h]) \times \\ \times f(y, \Delta_-)h + o(h). \quad (9.20)$$

Пренебрегая снова членами порядка $o(h)$, для правой части (9.15) с помощью (9.19, 20), получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int dyp(y, \Delta_-, t | 0) \int dxg(x) \delta(x - [y + f(y, \Delta_-)h]) \times \right. \\ \times (1 - \beta h) + \int dyp(y, \Delta_+, t | 0) \int dxg(x) \delta(x - [y + vf(y, \Delta_+)h + \\ + (1 - v)f(y, \Delta_-)h]) ah - \int dxg(x) p(x, \Delta_-, t | 0) = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int dyp(y, \Delta_-, t | 0) g(y + f(y, \Delta_-)h) (1 - \beta h) + \right. \\ \left. + \int dyp(y, \Delta_+, t | 0) g(y + vf(y, \Delta_+)h + (1 - v)f(y, \Delta_-)h) ah - \right. \\ \left. - \int dxg(x) p(x, \Delta_-, t | 0) \right].$$

Разлагая $g(x)$ в ряд Тейлора, получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int dyp(y, \Delta_-, t | 0) [g(y) + f(y, \Delta_-)hg'(y) + o(h)] \times \right. \\ \times (1 - \beta h) + \int dyp(y, \Delta_+, t | 0) [g(y) + (vf(y, \Delta_+) + (1 - v)f(y, \Delta_-)) \times \\ \times f(y, \Delta_-)hg'(y) + o(h)] ah - \int dxg(x) p(x, \Delta_-, t | 0) \Big\}.$$

Поскольку члены порядка $o(h)$ не влияют на предел, можно ими пренебречь. Тогда получим

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \int dy p(y, \Delta_-, t|0) [-\beta h g(y) + f(y, \Delta_-) h g'(y)] + \right. \\ \left. + \int dy p(y, \Delta_+, t|0) g(y) \alpha h = \right. \\ = \int dy g(y) [-\beta p(y, \Delta_-, t|0) + \alpha p(y, \Delta_+, t|0) + \\ \left. + \int dy p(y, \Delta_-, t|0) f(y, \Delta_-) g'(y) \right]. \end{aligned}$$

Последний член интегрируется по частям; кроме того, примем во внимание, что $g(x)$ имеет компактный носитель, т. е. граничные члены обращаются в нуль. Переобозначим далее переменную интегрирования y и воспользуемся совместно вышеприведенным выражением для правой части и выражением (9.16) для левой части, тогда имеем

$$\begin{aligned} \int dx g(x) \partial_t p(x, \Delta_-, t|0) = \int dx g(x) [-\partial_x f(x, \Delta_-) p(x, \Delta_-, t|0) - \\ - \beta p(x, \Delta_-, t|0) + \alpha p(x, \Delta_+, t|0)]. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Поскольку $g(x)$ — произвольная функция, из (9.21) следует (9.11). Если в этом выводе поменять местами Δ_- и Δ_+ , а также α и β , то получим формулу (9.12).

Этим завершается доказательство того, что прямое уравнение Колмогорова для парного процесса (X_t, I_t) действительно задается выражениями (9.11, 9.12). Отметим, что при доказательстве нам не потребовалось условия того, что функция $f(x, i)$ должна быть линейной. В разд. 9.3 мы подробно рассмотрим случай феноменологического уравнения, нелинейного по внешнему параметру.

До сих пор мы занимались выводом уравнения эволюции совместной плотности вероятности переходов $p(x, i, t|x_0, i_0, 0)$ для парного процесса. Конечно, прямые уравнения Колмогорова (9.11, 12) справедливы также для безусловной совместной вероятности $p(x, i, t)$, как это легко видеть, проинтегрировав по начальным условиям. Однако мы интересуемся в действительности не совместной вероятностью для переменной состояния и флуктуирующего параметра, а плотностью вероятности одной переменной состояния X_t , т. е. функцией $p(x, t)$. Очевидно,

$$p(x, t) = p(x, \Delta_-, t) + p(x, \Delta_+, t). \quad (9.22)$$

Теперь, исходя из (9.11, 12), мы выведем уравнение эволюции для этой функции. Для этой цели удобно определить следую-

щую функцию:

$$q(x, t) \equiv \alpha p(x, \Delta_+, t) - \beta p(x, \Delta_-, t). \quad (9.23)$$

Тогда совместная плотность вероятности может быть записана в виде

$$p(x, \Delta_-, t) = \gamma^{-1}(\alpha p(x, t) - q(x, t)), \quad (9.24)$$

и

$$p(x, \Delta_+, t) = \gamma^{-1}(\beta p(x, t) + q(x, t)). \quad (9.25)$$

Прямые уравнения Колмогорова (9.11, 12) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \partial_t (\alpha p(x, t) - q(x, t)) = - \\ - \{\partial_x [h(x) + \Delta_- g(x)] \gamma^{-1} (\alpha p(x, t) - q(x, t))\} + q(x, t) \end{aligned} \quad (9.26)$$

и

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \partial_t (\beta p(x, t) + q(x, t)) = - \{\partial_x [h(x) + \Delta_+ g(x)] \gamma^{-1} (\beta p(x, t) + \\ + q(x, t))\} - q(x, t). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Складывая и вычитая (9.26, 27) и перегруппировывая члены, получаем следующие уравнения для $p(x, t)$ и $q(x, t)$ [$\tilde{I} = \gamma^{-1}(\beta \Delta_- + \alpha \Delta_+)$]:

$$\begin{aligned} \partial_t p(x, t) = - \partial_x \{[h(x) + I g(x)] p(x, t)\} + \\ + \gamma^{-1}(\Delta_- + \Delta_+) \partial_x g(x) q(x, t), \end{aligned} \quad (9.28)$$

$$\begin{aligned} \partial_t q(x, t) = - \{\partial_x [h(x) + \tilde{I} g(x)] + \gamma\} \times \\ \times q(x, t) + \alpha \beta \gamma^{-1}(\Delta_- - \Delta_+) \partial_x g(x) p(x, t), \end{aligned} \quad (9.29)$$

где $I = E\{I_t\}$. Естественно допустить, что в бесконечно удаленном прошлом процессы X_t и I_t были статистически независимы, т. е.

$$p(x, i, -\infty) = p(x, -\infty) p(i, -\infty) = p(x, -\infty) p_s(i), \quad (9.30)$$

и использовать это условие в качестве начального.

Из (9.23) имеем

$$\begin{aligned} q(x, -\infty) = p(x, -\infty) [\alpha p_s(\Delta_+) - \beta p_s(\Delta_-)] = \\ = p(x, -\infty) [\alpha \beta / \gamma - \beta \alpha / \gamma] = 0. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Формальное решение (9.29), подчиняющееся начальному условию, задается в виде

$$\begin{aligned} q(x, t) = \int_{-\infty}^t dt' \exp \{-[\gamma + \partial_x (h(x) + \tilde{I} g(x))] (t - t')\} \times \\ \times \alpha \beta \gamma^{-1} (\Delta_- - \Delta_+) \partial_x g(x) p(x, t'). \end{aligned} \quad (9.32)$$

где оператор ∂_x , а также этот оператор в экспоненте действуют на все функции, зависящие от x , стоящие справа от них. Подставляя это выражение в (9.28), получаем искомое замкнутое уравнение для $p(x, t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t p(x, t) = & -\partial_x [h(x) + Ig(x)] p(x, t) + \\ & + \alpha\beta\gamma^{-2}(\Delta_- - \Delta_+)^2 \partial_x g(x) \int_{-\infty}^{t'} dt' \exp\{-[\gamma + \partial_x(h(x) + \\ & + \tilde{I}g(x))](t - t')\} \partial_x g(x) p(x, t'). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Отметим, что это уравнение содержит производные функции $p(x, t')$ бесконечно высокого порядка, определяемые оператором $\exp(-\partial_x)$. Поскольку процесс X_t немарковский, как это ясно видно из интегрального ядра в (9.33), это согласуется со свойством, что процесс X_t обладает непрерывными реализациями. Из результатов предыдущих глав ясно, что случайный телеграфный сигнал $I_t^\varepsilon = (I_{t/\varepsilon} - I)/\varepsilon$, где

$$I = \gamma^{-1}(\alpha\Delta + \beta\Delta_+), \quad (9.34)$$

сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к пределу гауссовского белого шума с интенсивностью

$$\sigma^2 = 2\alpha\beta\gamma^{-3}(\Delta_+ - \Delta_-)^2. \quad (9.35)$$

Если $I = 0$, этот предел сводится к перенормировке

$$\alpha \rightarrow \alpha/\varepsilon^2, \quad (9.36)$$

$$\beta \rightarrow \beta/\varepsilon^2, \quad (9.37)$$

$$\Delta_\pm \rightarrow \Delta_\pm/\varepsilon. \quad (9.38)$$

Как было показано в последней главе, в пределе белого шума плотность вероятности $p(x, t)$ подчиняется УФП, соответствующему СДУ (8.72) в интерпретации Стратоновича. Этот результат можно непосредственно проверить в случае дихотомического марковского шума. Используя переобозначения (9.36—38), легко получаем, что ядро в интегральном операторе, учитывающее память системы, сводится к δ -функции в пределе

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} \frac{(\Delta_- - \Delta_+)^2}{\varepsilon^2} \exp\{-[\gamma/\varepsilon^2 + \partial_x f(x)](t - t')\} = \frac{\sigma^2}{2} \delta(t - t') \quad (9.39)$$

и (9.33) переходит в следующее УФП:

$$\begin{aligned} \partial_t p(x, t) = & -\partial_x f(x) p(x, t) + \alpha\beta\gamma^{-3}(\Delta_+ - \Delta_-)^2 \times \\ & \times \partial_x g(x) \partial_{xx} g(x) p(x, t) = -\partial_x \left[f(x) + \frac{\sigma^2}{2} g(x) g'(x) \right] p(x, t) + \\ & + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} g^2(x) p(x, t). \end{aligned} \quad (9.40)$$

Для вычисления стационарной плотности вероятности $p(x, t)$ (т. е. стационарного решения (9.33)) проще всего использовать снова (9.28, 27)

$$0 = -\partial_x \{[h(x) + Ig(x)] p_s(x)\} + \gamma^{-1} (\Delta_- - \Delta_+) \partial_x g(x) q_s(x), \quad (9.41)$$

$$0 = -\partial_x [h(x) + \Delta_+ g(x)] [\beta p_s(x) + q_s(x)] - \gamma q_s(x). \quad (9.42)$$

Из (9.41) следует, что

$$[h(x) + Ig(x)] p_s(x) + \gamma^{-1} (\Delta_+ - \Delta_-) q(x) q_s(x) = C. \quad (9.43)$$

Как говорилось в разд. 6.2, мы рассматриваем лишь системы, детерминистически устойчивые, т. е. решение $X(t)$ детерминистического уравнения $\dot{X} = h(X) + \lambda g(X)$ ограничено сверху конечным значением при всех t :

$$|X(t)| \not\rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty$$

(взрывная неустойчивость исключается). Если пространство состояний состоит из конечного интервала на действительной оси, то это тривиальный случай детерминистически устойчивой системы. Если пространство состояний не ограничено справа или слева, то, как мы уже знаем, необходимым и достаточным условием того, что система является детерминистически устойчивой, является то, что существует положительное K , возможно, зависящее от λ , такое, что

$$h(x) + \lambda g(x) < 0 \text{ при всех } x > K(\lambda) \quad (9.44)$$

или

$$h(x) + \lambda g(x) > 0 \text{ при всех } x < -K(\lambda). \quad (9.45)$$

Это означает, что для конечных значений $x(0)$ состояние системы находится с определенностью в интервале $[-K(\lambda), K(\lambda)]$ при стремлении момента времени t к бесконечности. Отсюда следует, что для детерминистически устойчивой системы совместная плотность вероятности $p_s(x, i)$ имеет компактный носитель. Это вполне очевидно, если пространство состояний конечно. Если же оно неограниченно, скажем справа (наиболее частый случай), то имеем

$$p_s(x, \Delta_-) \equiv 0 \text{ при всех } x > \max(K(\Delta_-), K(\Delta_+)), \quad (9.46)$$

$$p_s(x, \Delta_+) \equiv 0 \text{ при всех } x > \max(K(\Delta_-), K(\Delta_+)).$$

Для детерминистически устойчивых систем постоянная C в (9.43) равна нулю, поскольку мы всегда можем выбрать x так, что левая часть обращается в нуль. Следовательно, из (9.43) имеем

$$q_s(x) = -a[h(x) + Ig(x)] p_s(x)/g(x), \quad (9.47)$$

где положено

$$a^{-1} = \gamma^{-1} (\Lambda_+ - \Lambda_-).$$

Для производной $q_s(x)$ имеем ¹⁾

$$q'_s = \left[-a \frac{h'(x) + Ig'(x)}{g(x)} + a \frac{h(x) + Ig(x)}{g^2(x)} g'(x) \right] p_s(x) - \\ - a \frac{h(x) + Ig(x)}{g(x)} p'_s(x). \quad (9.48)$$

Подставляя $q_s(x)$ и $q'_s(x)$ в (9.42) и перегруппировывая члены, получаем следующее дифференциальное уравнение для $p_s(x)$:

$$p'_s(x) = \left[-\gamma \frac{h(x) + Ig(x)}{(h(x) + \Delta_+ g(x))(h(x) + \Delta_- g(x))} - \frac{h'(x) + \Delta_+ g'(x)}{h(x) + \Delta_+ g(x)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{g(x)} \frac{h(x) g'(x) - g(x) h'(x)}{h(x) + \Delta_- g(x)} \right] p_s(x).$$

Это уравнение можно записать в эквивалентной форме

$$p'_s(x) = \left\{ -\gamma \frac{h(x) + Ig(x)}{[h(x) + \Delta_+ g(x)][h(x) + \Delta_- g(x)]} - \ln' [h(x) + \Delta_+ g(x)] - \right. \\ \left. - \ln' [h(x) + \Delta_- g(x)] + \ln' g(x) \right\} p_s(x). \quad (9.49)$$

Уравнение (9.49) легко интегрируется и дает следующее выражение для стационарной плотности вероятности системы:

$$p_s(x) = N \frac{g(x)}{[h(x) + \Delta_+ g(x)][h(x) + \Delta_- g(x)]} \times \\ \times \exp \left(-\gamma \int^x \frac{h(z) + Ig(z)}{[h(z) + \Delta_+ g(z)][h(z) + \Delta_- g(z)]} dz \right). \quad (9.50)$$

Это выражение тождественно равно нулю за пределами носителя $U(\Delta_+, \Delta_-)$, который представляет собой замкнутый интервал или совокупность замкнутых интервалов, границы которых задаются устойчивыми стационарными состояниями, определяемыми из детерминистического уравнения

$$\dot{X} = h(X) + \lambda g(X)$$

при $\lambda = \Delta_-$ и $\lambda = \Delta_+$. Смысл носителя более подробно разъяснен на рис. 9.1. Экстремумы стационарной плотности $p_s(x)$ являются корнями уравнения

$$h(x_m) + Ig(x_m) + \frac{\Delta_+ \Delta_-}{\gamma} g'(x_m) g(x_m) + \frac{2}{\gamma} h'(x_m) h(x_m) - \\ - \frac{1}{\gamma} \frac{h^2(x_m)}{g(x_m)} g'(x_m) + \frac{1}{\gamma} h'(x_m) g(x_m) (\Delta_- + \Delta_+) = 0, \quad (9.51)$$

если они лежат внутри носителя U .

¹⁾ Производная по x в дальнейшем обозначается штрихом.

Для ясности изложения впредь мы ограничимся рассмотрением случая симметричного дихотомического шума (коротко — D -шума):

$$\Delta_+ = -\Delta_- = \Delta \quad (9.52)$$

и

$$\alpha = \beta = \gamma/2. \quad (9.53)$$

$$\alpha = \beta = \gamma/2$$

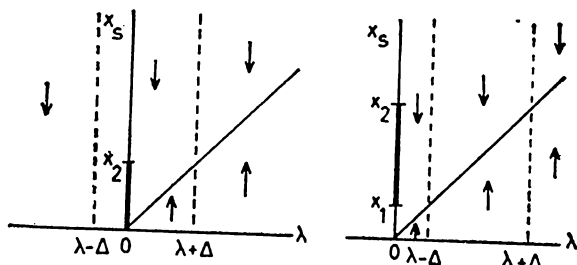


Рис. 9.1. Зависимость стационарных детерминированных значений x_s , описывающих стационарные состояния в модели Ферхюльста от λ . Пространство состояний для случайного процесса (X_t, I_t) (для состояний случая $\lambda - \Delta < 0$ и соответственно для $\lambda - \Delta > 0$) ограничено двумя штриховыми линиями; стрелками показано направление эволюции X_t . Носитель p_s обозначен на оси x_s жирным отрезком.

Уравнения (9.2, 7, 8) имеют вид в этом случае

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_{-\Delta, t} \\ p_{\Delta, t} \end{pmatrix} = \frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-\Delta, t} \\ p_{\Delta, t} \end{pmatrix}, \quad (9.54)$$

$$E\{I_t\} = 0 \quad (9.55)$$

и

$$C(t) = \Delta^2 \exp(-\gamma t). \quad (9.56)$$

Рассмотрим теперь СДУ

$$\dot{X}_t = h(X_t) + \lambda_t g(X_t), \quad (9.57)$$

где внешний параметр флуктуирует как симметричный случайный телеграфный сигнал относительно своего среднего значения λ , т. е.

$$\lambda_t = \lambda + I_t. \quad (9.58)$$

Снова определим

$$f_\lambda(x) \equiv h(x) + \lambda g(x) \quad (9.59)$$

(далее зависимость от λ явно не будет выписываться). Как легко получить из (9.50), стационарная плотность вероятности $p_s(x)$ для системы, находящейся под действием симметричного дихотомического шума, имеет вид

$$p_s(x) = N \frac{g(x)}{\Delta^2 g^2(x) - f^2(x)} \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \int dz \left(\frac{1}{f(z) - \Delta g(z)} + \frac{1}{f(z) + \Delta g(z)} \right) \right]. \quad (9.60)$$

Мы получили выражение, которое ранее вывел Павула с использованием так называемого обобщенного уравнения Фоккера — Планка для стационарной плотности вероятности (4.5, 9.3). Конечно же, корни уравнения $\Delta^2 g^2 - f^2 = -(f - \Delta g)(f + \Delta g)$ представляют собой, грубо говоря, границы носителя U . Пусть b_i обозначает нижнюю (соответственно верхнюю) границу этого множества, т. е.

$$\lambda \pm \Delta = -h(b_i)/g(b_i). \quad (9.61)$$

Тогда $p_s(x)$ в окрестности, скажем, нижней границы задается формулой

$$p_s(b_1 + \delta x) = N \frac{g(b_1 + \delta x)}{F_1(b_1 + \delta x) F_2(b_1 + \delta x)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{\gamma}{2} \int d\delta x \left(\frac{1}{F_1(b_1 + \delta x)} + \frac{1}{F_2(b_1 + \delta x)} \right) \right], \quad (9.62)$$

где

$$F_{1,2}(x) = f(x) \mp \Delta g(x). \quad (9.63)$$

Используя разложение в ряд Тейлора и удерживая только члены первого порядка по δx , имеем

$$p_s(b_1 + \delta x) \simeq \bar{N} \frac{1}{F'_1(b_1) \delta x} \exp \left(-\frac{\gamma}{2} \int d\delta x \frac{1}{F'_1(b_1) \delta x} \right),$$

если $F_2(b_1) \neq 0$ и $g(b_1) \neq 0$. После интегрирования окончательно получаем

$$p_s(b_1 + \delta x) \approx \bar{N} |\delta x|^{-([\gamma/2F'_1(b_1)] + 1)}. \quad (9.64)$$

Подобным же образом для другой границы носителя U

$$p_s(b_2 + \delta x) \approx \bar{N} |\delta x|^{-([\gamma/2F'_2(b_2)] + 1)}. \quad (9.65)$$

Для детерминистически устойчивой системы

$$F'_1(b_1) < 0, \quad F'_2(b_2) < 0, \quad (9.66)$$

поскольку границы U являются устойчивыми стационарными состояниями детерминистического уравнения при $\lambda - \Delta$ (или соответственно $\lambda + \Delta$). Таким образом, из (9.64, 65) следует, что

$$\int_U dx p_s(x) < \infty, \quad (9.67)$$

т. е. функция $p_s(x)$ является нормированной в случае детерминистически устойчивой системы. Кроме того, как следует из (9.64, 65), возле границы b_i стационарная плотность вероятности $p_s(x)$ ведет себя так:

1) расходится к бесконечности (но интегрируема), если

$$-\frac{\gamma}{2F'_i(b_i)} - 1 < 0; \quad (9.68)$$

2) обращается в нуль, имея бесконечную производную, если

$$0 < -\frac{\gamma}{2F'_i(b_i)} - 1 < 1; \quad (9.69)$$

3) обращается в нуль, имея нулевую производную, если

$$1 < -\frac{\gamma}{2F'_i(b_i)} - 1. \quad (9.70)$$

Отметим, что вышеприведенные формулы имеют место лишь в случае $F_j(b_i) \neq 0$ при $i \neq j$. В следующем разделе мы рассмотрим случай, когда это условие не выполняется. С физической точки зрения интересно отметить, что условия (9.68—70) того, что $p_s(x)$ расходится или обращается в нуль, имея вертикальный или горизонтальный наклон на границах несущего множества, могут быть связаны с линейным детерминистическим анализом на устойчивость относительно стационарных состояний b_i . Действительно, в соответствии с (3.4) обратное время релаксации $\tau^{-1}(b_i)$, определенное из этого анализа, равно $\tau^{-1}(b_i) = -F'_i(b_i)$. Поэтому условия (9.68, 69) могут быть записаны в виде

$$\tau(b_i) = -1/F'_i(b_i) < 2/\gamma, \quad (9.71)$$

$$2/\gamma < \tau(b_i) < 4/\gamma. \quad (9.72)$$

Как отмечено в начале этого раздела, α и β представляют собой средние частоты перехода из одного состояния в другое. Легко видеть, что для симметричного дихотомического шума, величина $2/\gamma$ равна среднему времени ожидания в одном из двух состояний. Таким образом, условие (9.68) означает, что только в том случае, когда время релаксации процесса X_i меньше среднего времени ожидания между переходами от одного уровня шума к

другому, процесс X_t может релаксировать к детерминистическому устойчивому состоянию b_i , являющемуся границей U , и проводить конечное время в его окрестности, вызывая расходимость $p_s(x)$ при $x = b_i$. Если время релаксации больше среднего времени ожидания между переходами, совершаемыми шумом, но не превосходит его более чем в 2 раза, процесс X_t аккумулирует еще достаточное количество вероятности в окрестности b_i , для того чтобы производная $p'_s(x)$ расходилась на границе.

Экстремумы $p_s(x)$ в случае симметричного дихотомического шума определяются из уравнения

$$\begin{aligned} f(x_m) - \frac{\Delta^2}{\gamma} g(x_m) g'(x_m) + \frac{2}{\gamma} f(x_m) f'(x_m) - \\ - \frac{1}{\gamma} f^2(x_m) \frac{g'(x_m)}{g(x_m)} = 0, \end{aligned} \quad (9.73)$$

если $g(x_m) \neq 0$ и $x_m \in U$. Это уравнение имеет очень интересную структуру. Приравнивание первого члена к нулю определяет детерминированное стационарное состояние. Как видно из (9.36—38), предел белого шума для симметричного дихотомического шума соответствует пределу $\Delta \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \infty$, такому, что $\Delta^2/\gamma = \sigma^2/2$. В этом пределе сохраняются лишь первых два члена. Это действительно дает уравнение для определения экстремумов, использованное в пределе белого шума (6.36), с $\gamma = 1$ в интерпретации Стратоновича. Этот пример является хорошей иллюстрацией теоремы Вонга и Закаи, а также общих результатов, представленных в гл. 8. Последние члены представляют собой поправки, возникающие благодаря отличному от нуля времени релаксации (γ конечно). Отметим, однако, что эти поправки не равны поправкам, полученным в гл. 8 для ОУ-шума. Это неудивительно, поскольку природа двух шумов весьма различна, несмотря на то что они имеют одну и ту же корреляционную функцию. Поскольку ОУ-процесс гауссовский, среднее значение и наиболее вероятное значение для него совпадают. Напротив, для D-шума среднее значение не лежит даже в пространстве состояний.

9.2. Фазовые диаграммы для переходов, индуцированных D-шумом

9.2.1. Модель Ферхюльста

Предположим, что флуктуации параметра λ в уравнении Ферхюльста задаются симметричным D-шумом

$$\lambda_t = \lambda + I_t, \quad (9.74)$$

и рассмотрим стохастическое уравнение

$$\dot{X}_t = \lambda X_t - X_t^2 + I_t X_t. \quad (9.75)$$

Ограничимся случаем, когда в отсутствие флуктуаций среды в системе возможен рост, т. е. $\lambda > 0$. Из выражений (9.60) получаем для стационарной плотности вероятности (9.1)

$$p_s(x) = N x^{(\gamma\lambda/(\Delta^2 - \lambda^2) - 1)} |x - (\lambda - \Delta)|^{-(\gamma/2(\Delta - \lambda) + 1)} \times \\ \times |x - (\lambda + \Delta)|^{(\gamma/2(\Delta + \lambda) - 1)}. \quad (9.76)$$

Носитель функции $p_s(x)$ задается интервалом

$$U = [\max(0, \lambda - \Delta), \lambda + \Delta]. \quad (9.77)$$

Из выражения (9.76) для стационарной плотности вероятности $p_s(x)$ получаем, что $\int_U dx p_s(x) < \infty$ для всех положительных λ .

Поведение стационарной плотности вероятности в окрестности границ U определяется формулами (9.68—70). Для верхней границы $x = \lambda + \Delta$ имеем

$$p_s(\lambda + \Delta) = \infty, \quad \Delta + \lambda > \gamma/2, \\ p_s(\lambda + \Delta) = 0, \quad p'_s(\lambda + \Delta) = \infty, \quad \gamma/4 < \lambda + \Delta < \gamma/2, \\ p_s(\lambda + \Delta) = 0, \quad p'_s(\lambda + \Delta) = 0, \quad \lambda + \Delta < \gamma/4. \quad (9.78)$$

При $\lambda - \Delta > 0$ нижняя граница задается выражением $x = \lambda - \Delta$, и мы имеем следующую ситуацию:

$$p_s(\lambda - \Delta) = \infty, \quad \lambda - \Delta > \gamma/2, \\ p_s(\lambda - \Delta) = 0, \quad p'_s(\lambda - \Delta) = \infty, \quad \gamma/4 < \lambda - \Delta < \gamma/2, \\ p_s(\lambda - \Delta) = 0, \quad p'_s(\lambda - \Delta) = 0, \quad \lambda - \Delta < \gamma/4. \quad (9.79)$$

При $\lambda - \Delta < 0$ нижняя граница задается условием $x = 0$. Поскольку $\bar{x} = 0$ является детерминистическим стационарным состоянием при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то $F_1(0) = F_2(0) = 0$ для $\lambda - \Delta < 0$, и формулы (9.68—70) нельзя использовать для рассмотрения $p_s(x)$ вблизи нижней границы носителя в этом случае. Используя непосредственно явное выражение (9.7), для $p_s(x)$ получаем

$$p_s(0) = \infty, \quad \text{если } \gamma\lambda + \lambda^2 < \Delta^2, \\ p_s(0) = 0, \quad p'_s(0) = \infty, \quad \text{если } \frac{\gamma}{2}\lambda + \lambda^2 < \Delta^2 < \gamma\lambda + \lambda^2, \\ p_s(0) = 0, \quad p'_s(0) = 0, \quad \text{если } \Delta^2 + \frac{\gamma}{2}\lambda + \lambda^2. \quad (9.80)$$

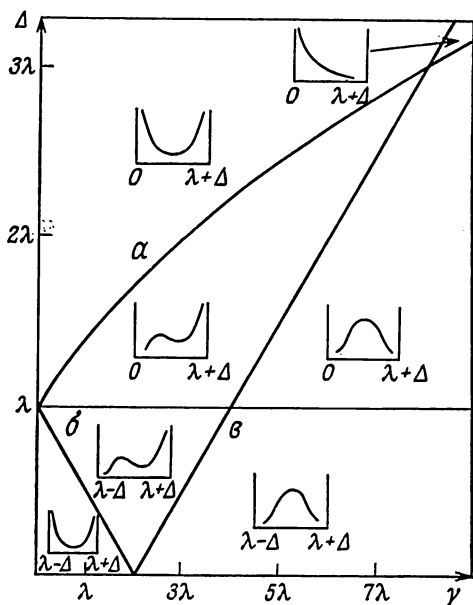
Чтобы более детально охарактеризовать стационарную плотность вероятности и изучить те изменения стационарного пове-

дения модели Ферхюльста, которые индуцируются D-шумом, определим экстремумы стационарной плотности вероятности, используя (9.73),

$$\lambda x_m - x_m^2 - \frac{\Delta^2}{\gamma} x_m + \frac{2}{\gamma} x_m (\lambda - x_m) (\lambda - 2x_m) - \frac{1}{\gamma} x_m (\lambda - x_m)^2 = 0. \quad (9.81)$$

В случае белого шума степень полинома не изменяется по сравнению с детерминистическим стационарным состоянием; фазо-

Рис. 9.2. Стационарное поведение X_t на фазовой диаграмме (Δ, γ) . Кривые a — g соответствуют условиям (9.80, 79, 78) соответственно. Показан вид функции $p_s(x)$ в различных областях, ограниченных этими кривыми.



вый переход обусловлен тем, что положение максимума сдвигается к точке $\lambda - \Delta^2/\gamma$ (6.47). D-шум приводит к дополнительным изменениям, поскольку два последних члена в (9.81), которые появляются благодаря конечности времени релаксации, увеличивают степень полинома на единицу. Корни (9.81) равны

$$x_0 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1}{6} [4\lambda + \gamma \pm ((2\lambda - \gamma)^2 + 12\Delta^2)^{1/2}]. \quad (9.82)$$

Анализ этого выражения совместно с формулами, описывающими поведение $p_s(x)$ вблизи границ носителя U (9.78—80), позволяет построить фазовую диаграмму для стационарных состояний системы Ферхюльста на (Δ, γ) -плоскости, которая приведена на рис. 9.2. Эта фазовая диаграмма показывает, что при

увеличении амплитуды внешнего шума Δ , либо при изменении его времени корреляции $\tau_{\text{корр}} = 1/\gamma$ система совершает серию переходов, которые при обычном феноменологическом описании отсутствуют. Случай шума, близкого к белому шуму, соответствует верхнему правому углу фазовой диаграммы. Здесь кривая a определяется зависимостью $\lambda = \sigma^2/2 - O(1/\gamma)$, т. е. если корреляционное время внешнего шума достаточно мало, то получаются в явном виде результаты анализа белого шума. Как видно из рис. 9.2, чтобы приближение белого шума давало удовлетворительное качественное описание стационарного состояния системы, подверженной действию шума окружения, требуется выполнение условия $\gamma \geq 10\lambda$, т. е. время корреляции должно быть меньше $1/10$ типичного макроскопического времени.

9.2.2. Генетическая модель

Исследуем теперь поведение генетической системы, подверженной действию внешнего D-шума [9.2]. Предположим, что симметричный дихотомический марковский процесс модулирует коэффициент отбора $\lambda_t = \lambda + I_t$. Тогда система описывается следующим СДУ:

$$\dot{X}_t = 1/2 - X_t + \lambda X_t(1 - X_t) + I_t X_t(1 - X_t). \quad (9.83)$$

Стационарная плотность вероятности $p_s(x)$ может быть, конечно, определена явно. Всю информацию, необходимую для построения фазовой диаграммы этой модели на (Δ, γ) -плоскости, можно получить из формул (9.68—70), описывающих поведение $p_s(x)$ вблизи границ U и экстремумов $p_s(x)$, определяемых из уравнения (9.73). Отметим, что формулы (9.68—70) можно для данной системы использовать в любом случае, поскольку функция, описывающая детерминистические стационарные состояния, однозначна при $-\infty < \lambda < \infty$, что означает $F_i(b_i) \neq 0$ при $i = j$. Рассмотрим сначала случай $\lambda = 0$, т. е. в среднем никаким аллелям не отдается предпочтения. Носитель U для $p_s(x)$ задается в этом случае решением уравнения

$$1/2 - x \pm \Delta x(1 - x) = 0, \quad (9.84)$$

т. е.

$$U = \left[\frac{1}{2\Delta} [\Delta + 1 - (\Delta^2 + 1)^{1/2}], \frac{1}{2\Delta} [\Delta - 1 + (\Delta^2 + 1)^{1/2}] \right]. \quad (9.85)$$

Поскольку очевидно, что при $\lambda = 0$ функция $p_s(x)$ симметрична относительно $x = 1/2$, изменение поведения вблизи обеих границ происходит одновременно. Достаточно поэтому рассмотреть верхнюю границу b_2 . В соответствии с условием (9.68) $p_s(x)$

изменяется от $p_s(b_2) = \infty$ к $p_s(b_2) = 0$ на линии

$$\gamma [2F'_2(b_2)]^{-1} = 1,$$

откуда

$$\gamma = 2(\Delta^2 + 1)^{1/2}. \quad (9.86)$$

На линии

$$-\gamma [2F'_1(b_2)]^{-1} = 2, \quad \text{т. е.} \quad \gamma = 4(\Delta^2 + 1)^{1/2}, \quad (9.87)$$

функция $p'_s(x)$ изменяется от $p'_s(b_2) = \infty$ к $p'_s(b_2) = 0$. Как уже говорилось, дополнительная информация о стационарном состоянии может быть получена из экстремумов $p_s(x)$. Формула (9.73) дает в случае $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} (1/2 - x_m)x_m(1 - x_m) - \frac{\Delta^2}{\gamma} x_m^2(1 - x_m)^2(1 - 2x_m) - \\ - \frac{2}{\gamma} x_m(1 - x_m)(1/2 - x_m) - \frac{1}{\gamma} (1/2 - x_m)^2(1 - 2x_m) = 0. \end{aligned} \quad (9.88)$$

Очевидно, что

$$x_0 = 1/2 \quad (9.89)$$

является корнем (9.88). Разделив (9.88) на $(1 - 2x_m)$, мы получаем полином четвертого порядка

$$-2 \frac{\Delta^2}{\gamma} x_m^4 + 4 \frac{\Delta^2}{\gamma} x_m^3 - \left(2 \frac{\Delta^2}{\gamma} + 1\right) x_m^2 + x_m - 1/2\gamma = 0. \quad (9.90)$$

Из того факта, что при $\lambda = 0$ функция $p_s(x)$ симметрична относительно $x_0 = 1/2$, следует, что корни (9.90), т. е. экстремумы $p_s(x)$, имеют вид

$$x_{2/3} = 1/2 \pm a, \quad x_{4/5} = 1/2 \pm b. \quad (9.91)$$

Стандартная форма (9.90) получается при делении на $-2\Delta^2/\gamma$. Тогда (9.90) можно переписать в виде

$$(x_m - 1/2 - a)(x_m - 1/2 + a)(x_m - 1/2 - b)(x_m - 1/2 + b) = 0. \quad (9.92)$$

Сравнение коэффициентов дает

$$1 + \gamma/2\Delta^2 = 3/2 - a^2 - b^2, \quad (9.93)$$

$$-\gamma/2\Delta^2 = -1/2 + a^2 + b^2, \quad (9.94)$$

$$1/4\Delta^2 = 1/16 - b^2/4 - a^2/4 + b^2a^2, \quad (9.95)$$

где (9.93, 94) линейно зависимы. Решая относительно b^2 , получаем

$$b_{\pm}^2 = [\Delta^2 - \gamma \pm (\gamma^2 - 4\Delta^2)^{1/2}]/4\Delta^2. \quad (9.96)$$

Очевидно, что величина a^2 должна равняться b^2 , что действительно выполняется, как это легко проверить. Далее, b^2 — действительная величина, если

$$\gamma \geq 2\Delta. \quad (9.97)$$

Это означает, что при $\gamma < 2\Delta$ стационарная плотность вероятности имеет лишь один экстремум в точке $x_0 = 1/2$. Это минимум, поскольку в соответствии с (9.86) $\rho_s(b_i) = \infty$ при $\gamma < 2(\Delta^2 + 1)^{1/2}$. Продолжая изучение свойств $\rho_s(x)$, цель которого состоит в построении фазовой диаграммы на (Δ, γ) -плоскости при $\lambda = 0$, обратимся к рассмотрению критических точек. Напомним, что при анализе случая белого шума точка $x_0 = 1/2$ является критической при $\lambda = 0$, если $\sigma^2 = 4$. Поэтому найдем условия, при которых точка x_0 является тройным корнем уравнения (9.88). Это означает, что $b^2 = 0$ и выполняется при

$$\Delta^2 = 2\gamma - 4 \quad \text{при} \quad \gamma > 2. \quad (9.98)$$

Поскольку в пределе белого шума $\Delta^2/\gamma = \sigma^2/2$, то приведенное выше условие означает

$$\sigma_c^2 = 4 - 8/\gamma = 4 - 8\tau_{\text{корр}}, \quad \tau_{\text{корр}} < 1/2. \quad (9.99)$$

Стоит упомянуть о том, что в гл. 8 разложение по $\tau_{\text{корр}}$ для случая шума Орнштейна — Уленбека при $0 \neq \tau_{\text{корр}} \ll 1$ дало следующий результат (см. ниже [8.7]):

$$\sigma_c^2 = 4(1 + \tau_{\text{корр}})^{-1} = 4 - 4\tau_{\text{корр}} + O(\tau_{\text{корр}}^2).$$

Хотя этим методом нельзя определить явно верхний предел для $\tau_{\text{корр}}$, формула (9.99) показывает, что наш результат, по-видимому, не зависит качественно от деталей природы цветного шума. Выражение (9.99) для критической дисперсии, которое, как мы хотим подчеркнуть, является точным результатом, очень интересно по двум причинам:

1) интенсивность σ^2 , необходимая для того чтобы индуцировать критическое поведение в системе, в которой при детерминистическом окружении неустойчивость отсутствует, уменьшается по мере увеличения корреляционного времени цветного шума;

2) имеется верхний предел для времени корреляции шума, при превышении которого критическое поведение исчезает. В этом случае верхний предел $\tau_{\text{корр}} = 0,5$ порядка макроскопического времени релаксации, которое при $\lambda = 0$ равно $\tau_{\text{макро}} = 1$.

Чтобы построить фазовую диаграмму, заметим, что на критической линии (9.98) второе решение для b^2 имеет вид

$$b^2 = \frac{2(\gamma - 4)}{4(2\gamma - 4)}. \quad (9.100)$$

Оно положительно при $\gamma > 4$ и обращается в нуль в точке $\gamma = 4$. Таким образом, в данной точке значение $x_0 = 1/2$ является 5-кратным корнем уравнения (9.88) для экстремумов функции $p_s(x)$ в случае $\lambda = 0$. Это весьма сильное указание на то, что в точке $\gamma = 4$, $\Delta = 2$ на критической линии что-то происходит. Действительно, численное решение общего уравнения для определения экстремумов $p_s(x)$, не использующее условие $\lambda = 0$, показывает, что в точке $\gamma = 4$, $\Delta = 2$ происходит бифуркация с появлением двух симметричных относительно $\lambda = 0$ ветвей критических точек с $|\lambda| \neq 0$.

Результат (9.100) означает, кроме того, что при $\lambda = 0$ стационарная плотность вероятности $p_s(x)$ имеет на критической линии $\Delta^2 = 2\gamma - 4$ в дополнение к тройному экстремуму при $x = 1/2$ еще по одному экстремуму слева и справа от критической точки, если точки $x = 1/2 \pm b$ лежат внутри носителя U . Поскольку это обстоятельство важно для всех корней уравнения (9.90), вычисленных посредством (9.96), получим теперь соответствующие условия. Используя совместно (9.85, 96), имеем, что $x_i \in U$ ($i = 2-5$), если $b^2 \geq 0$ и

$$\frac{1}{2\Delta} [\Delta^2 - \gamma \pm (\gamma^2 - 4\Delta^2)^{1/2}]^{1/2} \leq -\frac{1}{2\Delta} [1 - (1 - \Delta^2)^{1/2}].$$

Таким образом,

$$x_{2/3} = 1/2 \pm b_+ \in U, \quad \text{если} \quad (\gamma^2 - 4\Delta^2)^{1/2} \leq 2 + \gamma - 2(1 + \Delta^2)^{1/2}, \quad (9.101)$$

$$x_{4/5} = 1/2 \pm b_- \in U, \quad \text{если} \quad -(\gamma^2 - 4\Delta^2)^{1/2} \leq 2 + \gamma + 2(1 + \Delta^2)^{1/2}. \quad (9.102)$$

Поскольку, для того чтобы b^2 было действительным, γ должна подчиняться неравенству (9.97) и, кроме того, выполняется неравенство $2(1 + \Delta^2)^{1/2} - 2 \leq 2\Delta$, то правая часть (9.101, 102) неотрицательна. Это означает, что если корни $x_{4/5}$ существуют, то $x_{4/5} \in U$. С другой стороны, из неравенства (9.101) получаем, что если $x_{2/3}$ существуют, то $x_{2/3} \in U$, если

$$\gamma \leq 2(1 + \Delta^2)^{1/2}. \quad (9.103)$$

Это условие идентично (9.8), т. е. корни $x_{2/3} = 1/2 \pm b_+$ покидают несущее множество $p_s(x)$ на одной и той же линии, где значение стационарной плотности вероятности изменяется от $p_s(b_i) = 0$ к $p_s(b_i) = \infty$. Используя всю полученную нами информацию об экстремумах стационарной плотности вероятности, а также о ее поведении вблизи границ несущего множества U , мы можем построить фазовую диаграмму стационарного состояния генетической модели, находящейся под действием внешнего D-шума при $\lambda = 0$. Результат показан на рис. 9.3. Наиболее за-

мечательной ее чертой является то, что имеются не только переходы от одномодового поведения к двухмодовому, но также и область, хотя и малая, где $\rho_s(x)$ обладает двумя максимумами и тремя минимумами.

Рассмотрение различных областей этой диаграммы и особенностей перехода из одной области в другую приводит к выводу, что форма стационарной плотности вероятности определяется одновременным действием двух различных механизмов.

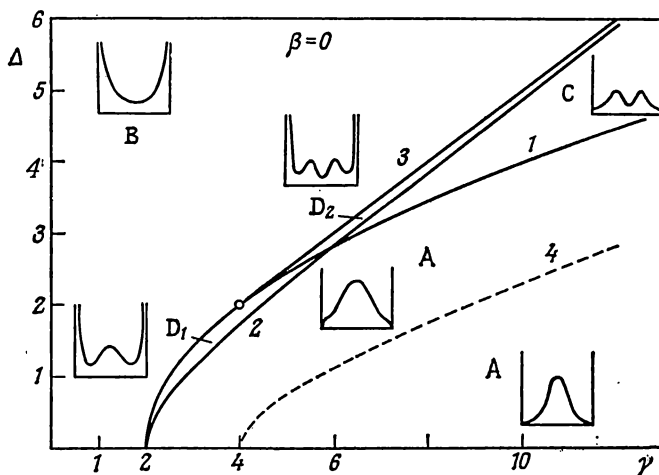


Рис. 9.3. Фазовая диаграмма (Δ, γ) , описывающая стационарное поведение генетической модели. 1: $\Delta^2 = 2\gamma - 4$; 2: $\gamma = 2(1 + \Delta^2)^{1/2}$; 3: $\gamma = 2\Delta$; 4: $\gamma = 4(\Delta^2 + 1)^{1/2}$. Показан вид $\rho_s(x)$ для различных областей A, B, C, D₁ и D₂, ограниченных этими кривыми.

Во-первых, имеется *механизм затухания пика*, общий для случаев аддитивного шума, фигурирующего в обычном ланжевеновском рассмотрении, и мультипликативного шума, рассматриваемого здесь. Этот механизм отражает тот факт, что случайность среды приводит к дезорганизации системы. Во-вторых, имеется *механизм расщепления пика*, характерный для мультипликативного шума и соответствующий фазовому переходу, индуцированному шумом. Области A и B характеризуются преобладанием механизма затухания пика. В области A, однако, поскольку время корреляции мало, система все еще подстраивается под среднее значение. Напротив, в области B у шума большое время корреляции и система имеет время для релаксации к «мгновенным» значениям внешних флуктуаций, т. е. с наибольшей вероятностью она находится вблизи детерминистического стационарного состояния, соответствующего $\lambda + \Delta$ и $\lambda - \Delta$. Это пове-

дение, конечно, характерно для D-шума — именно оно является следствием того факта, что пространство состояний шума состоит из конечного числа уровней. В этом смысле среда не является столь же случайной, как, скажем, в случае ОУ-процесса, для которого пространство состояний содержит континуум состояний. Как мы видели в гл. 8, в этом случае плотность вероятности не расходится на границе носителя, который в случае ОУ-процесса совпадает с физическим пространством состояний. В области С поведение плотности вероятностей определяется механизмом расщепления пика. Очевидно, что такое двухмодовое поведение не является компромиссом между двумя типами поведения в области А и В. Два максимума никогда не раздвигаются столь сильно, чтобы достигнуть границ носителя и привести там к расходимости $p_s(x)$. На самом деле функция $p_s(x)$ уже меняет свой характер с ограниченного на расходящийся, когда два максимума все еще находятся на конечном расстоянии от границ носителя. Этот переход наблюдается в области D, и, таким образом, может быть рассмотрен как компромисс между двумя типами поведения — С и В. Наиболее интересно отметить, что в «точке бифуркации» $\gamma = 4$, $\Delta = 2$, где $x_{m0} = 1/2$ является 5-кратным корнем и где возникают две симметричные ветви критических точек с $|\lambda| \neq 0$, происходит нечто похожее на обмен устойчивостями при детерминистических бифуркациях. Именно, когда γ находится слева от этой точки, критическое поведение обусловлено действием механизма затухания пика. Когда γ находится справа от этой точки, за индуцирование критической точки ответственен механизм расщепления пика.

9.2.3. Модель Хонглера

В завершение этого раздела кратко рассмотрим поведение модели Хонглера, которая, как уже говорилось в гл. 6, связана с генетической моделью. Используя СДУ

$$\dot{X}_t = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{th}(2\sqrt{2} X_t) + \frac{1}{4} \frac{I_t}{\operatorname{ch}(2\sqrt{2} X_t)}, \quad (9.104)$$

находим стационарную плотность вероятности

$$p_s(x) = N \operatorname{ch}(2\sqrt{2} x) \left[\frac{\Delta^2}{2} - \operatorname{sh}^2(2\sqrt{2} x) \right]^{(\gamma/2)-1}. \quad (9.105)$$

Ее носитель состоит из интервала

$$\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arcsch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \Delta\right), \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arcsch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \Delta\right) \right]. \quad (9.106)$$

Экстремумы (9.105) являются корнями уравнения

$$\operatorname{sh}(2\sqrt{2} x_m) = 0, \quad \text{т. е.} \quad x_{m1} = 0, \quad (9.107)$$

и

$$\frac{\Delta^2}{2} - \operatorname{sh}^2(2\sqrt{2}x_m) - 2(\gamma/2 - 1)\operatorname{ch}^2(2\sqrt{2}x_m) = 0. \quad (9.108)$$

Используя соотношение $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ из (9.108), получаем, что

$$\operatorname{ch}^2(2\sqrt{2}x_m) = -\frac{\Delta^2 + 2}{2(1 - \gamma)}. \quad (9.109)$$

Поскольку левая часть больше единицы, получаем, что точка $x_{m1} = 0$ является тройным корнем, если

$$\Delta^2 = 2\gamma - 4 \quad \text{при} \quad \gamma \geq 2. \quad (9.110)$$

Мы видим, что линия критических точек, индуцированных шумом в модели Хонглера, совпадает с линией в генетической модели (9.98, 99). Можно проверить, что экстремумы

$$x_{m2,3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arccch} \left(\frac{\Delta^2 + 2}{2(\gamma - 1)} \right)^{1/2} \quad (9.111)$$

лежат внутри несущего множества тогда и только тогда, когда $\gamma > 2$. (9.112)

Значение γ , при котором плотность вероятности расходится на границах носителя, задается формулой (9.68), которая в данном случае имеет вид

$$-F'(b_i) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\sqrt{2}b_i)} + 2\sqrt{2}\Delta \frac{\operatorname{sh}(2\sqrt{2}b_i)}{4\operatorname{ch}^2(2\sqrt{2}b_i)} = \gamma/2. \quad (9.113)$$

Подставляя выражение для b_i из (9.106), получаем

$$\gamma/2 = 1. \quad (9.114)$$

Тот факт, что (9.114) не зависит от Δ , отражает то свойство, что в модели Хонглера нормальная мода $\omega(\bar{x})$ не зависит от \bar{x} . Это частное свойство является общим для всех моделей, принадлежащих к классу, определенному в разд. 8.3.

Фазовая диаграмма модели Хонглера, показанная на рис. 9.4, состоит из трех областей и по сравнению с генетической моделью гораздо проще. Это хорошая иллюстрация того факта, что весьма близкие детерминистические модели дают заметно разные микроскопические отклики на внешний шум. В частности, на линии критических точек отсутствует точка, в которой механизм расщепления пика, работающий при больших значениях γ , сменялся бы механизмом затухания пика, определяющим поведение $p_s(x)$ при малых γ .

С другой стороны, для близких моделей Хонглера и генетической модели теперь можно сравнить влияние времени корреляции шума на положение точки фазового перехода, индуциро-

ванного шумом. Это проделано в табл. 9.1. Из нее видно, что рост времени корреляции шума может приводить либо к увеличению, либо к уменьшению значения σ_c^2 в зависимости от природы шума и определенных характеристик системы. Различие в поведении генетической модели и модели Хонглера в случае

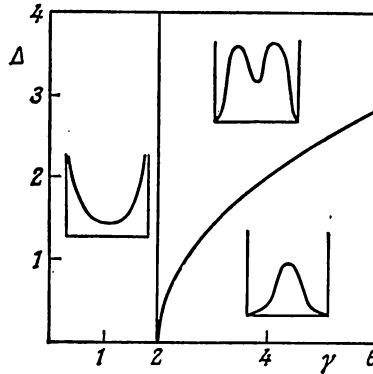


Рис. 9.4. Фазовая диаграмма (Δ, γ) модели Хонглера.

Таблица 9.1. Влияние $\tau_{\text{корр}}$ на критическую дисперсию σ_c^2

| Модель | ОУ-шум | Дихотомический |
|--------------|--|--|
| Генетическая | $\sigma_c^2 = 4 - 4\tau_{\text{корр}}$ | $\sigma_c^2 = 4 - 8\tau_{\text{корр}}$ |
| Хонглера | $\sigma_c^2 = 4 + 4\tau_{\text{корр}}$ | $\sigma_c^2 = 4 - 8\tau_{\text{корр}}$ |

ОУ-шума, по нашему мнению, обусловлено тем фактом, что последняя модель не обладает конечными асимптотами, к которым кривая переключения стремится при $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Это свойство и свойство совпадения усредненного состояния ОУ-шума с его наиболее вероятным состоянием, т. е. состоянием, в окрестности которого система проводит наибольшее время, делают, очевидно, более трудным переход к двухмодовому распределению, когда $\tau_{\text{корр}}$ возрастает. Эта интерпретация подтверждается тем фактом, что в случае дихотомического шума модель Хонглера ведет себя качественно подобно генетической модели. Это является следствием структуры дихотомического шума. Он всегда налагает условие конечности носителя $p_s(x)$ и, кроме того, при увеличении $\tau_{\text{корр}}$ он благоприятствует пребыванию реализаций X_t в окрестности точки $\bar{x}(\lambda \pm \Delta)$, поскольку для D-шума флуктуирующий параметр всегда находится в одном из своих экстремумов, т. е. $\lambda \pm \Delta$.

9.2.4. Дихотомическое периодическое силовое воздействие

В заключение этого раздела укажем на существенные различия между поведением генетической модели в присутствии дихотомического шума и ее отклика на регулярные изменения внешнего параметра, вызывающие периодические прыжки между хорошо определенными состояниями. Пусть $\lambda_t = \lambda_{t+nT}$ будет периодической функцией времени с периодом T , таким, что в течение каждого полупериода она принимает значение $+\Delta$ или $-\Delta$ (рис. 9.5). Очевидно, что с течением времени переменная

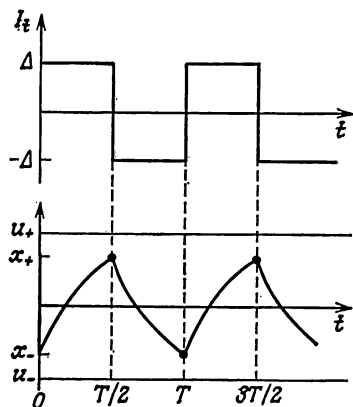


Рис. 9.5. Отклик генетической модели на периодическое воздействие.

состояния $X(t)$ будет приближаться вне зависимости от начальных условий к стационарному периодическому режиму с периодом T : $X(t) = X(t + nT)$. Сравним этот асимптотический режим, который представляет собой результат простейшего *детерминированного* силового воздействия извне, со стационарным режимом, возникающим под действием дихотомического марковского шума. Для этой цели введем «стационарную плотность вероятности» нахождения системы в интервале $(x, x + dx)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{p}_s(x) dx &= \frac{1}{T} \left| \frac{dt}{dx} \right| dx = \\ &= \frac{1}{T} \left(\left| \frac{dt}{dx} \right|_{\lambda=\Delta} + \left(\frac{dt}{dx} \right)_{\lambda=-\Delta} \right) dx = \\ &= \frac{1}{T} (1/|1/2 - x + \Delta x(1 - x)| + \\ &\quad + 1/|1/2 - x - \Delta x(1 - x)|) dx, \end{aligned}$$

и исследуем ее поведение как функцию Δ и T . Как и в случае дихотомического марковского шума, Δ — амплитуда прыжков

относительно среднего значения $\lambda = 0$, а T — аналог времени корреляции γ^{-1} .

Экстремумы x_m функции $\tilde{p}_s(x)$ находятся как корни уравнения

$$\left[2x_m(1 - x_m) + \frac{1}{2}(1 - 2x_m)^2 + 2\Delta^2 x_m^2(1 - x_m)^2 \right] (1 - 2x_m) = 0,$$

откуда немедленно следует, что $x_m = 1/2$ — единственное допустимое решение при всех значениях Δ и T . Далее, в отличие от того, что происходит в присутствии шума, вид экстремума (максимум или минимум) полностью не зависит ни от амплитуды силового воздействия Δ , ни от его периода T . Действительно, можно показать, что

$$\left. \frac{d^2 \tilde{p}_s(x)}{dx^2} \right|_{x=1/2} = \frac{64}{\Delta} \left(1 + \frac{4}{\Delta^2} \right)$$

всегда положительно определено: экстремум в точке $x_m = 1/2$ всегда является минимумом. Механизм расщепления пика, описанный выше, полностью исчезает. При всех значениях Δ и T детерминистическое стационарное состояние $x = 1/2$ «дестабилизируется», т. е. в точке $x = 1/2$ плотность вероятности наименьшая. Это, очевидно, происходит из-за того, что X_t и знак ее временной производной полностью следуют за скачками λ ; поскольку эти скачки дискретны, знак dX/dt с необходимостью должен изменяться при каждом скачке, так что гармоники шума не играют роли. По этой же причине несущее множество $\tilde{p}_s(x)$ с необходимостью меньше, чем (9.85). Легко видеть, что он ограничен областью $U' = [x_- = 1/2 - s, x_+ = 1/2 + s]$ (рис. 9,5 и 9,6), где

$$s = \frac{1}{2} \left\{ - \left(\frac{1+k}{k-1} \right) \left(\frac{\Delta^2 + 1}{\Delta^2} \right)^{1/2} - \left[\left(\frac{1+k}{k-1} \right)^2 \left(\frac{\Delta^2 + 1}{\Delta^2} \right) - 1 \right]^{1/2} \right\},$$

$$k = \exp[-(1 + \Delta^2)^{1/2} T/2].$$

При фиксированном значении интенсивности Δ чем быстрее меняется сила, тем меньше становится $\tilde{p}_s(x)$. Далее, переходы, соответствующие изменению поведения $\tilde{p}_s(x)$ вблизи границ U' , исключаются, поскольку всегда

$$\left. \frac{d\tilde{p}_s(x)}{dx} \right|_{x=x_+} > 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{d\tilde{p}_s(x)}{dx} \right|_{x=x_-} < 0.$$

В пределе $\Delta \rightarrow \infty$, $T^{-1} \rightarrow \infty$, таком, что $\Delta^2/T^{-1} = \text{const}$, носитель U' стремится к нулю, но тем не менее сохраняет свой двухмодовый характер. Поведение «плотности вероятности» $\tilde{p}_s(x)$ отражает тот факт, что в отличие от того, что происходит при действии дихотомического шума, этот предел является нешумовым. Из выражений для k и s ясно, что подходящей перенормировкой, которая сохраняет носитель постоянным в пределе бесконечно

быстрого изменения внешней силы ($T^{-1} \rightarrow \infty$), является предел $\Delta \rightarrow \infty$, такой, что $\Delta/T^{-1} = \text{const.}$

В заключение сделаем общие выводы: 1) функция $p_s(x)$ имеет двухмодовую форму и качественно не зависит от интен-

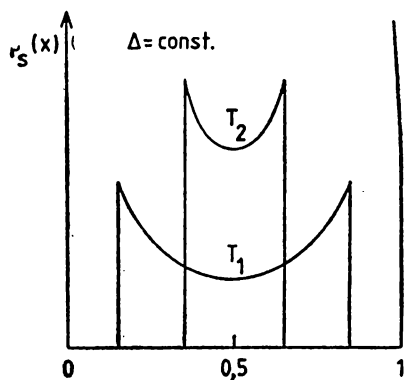


Рис. 9.6. Зависимость $\bar{p}_s(x)$ при $T_2 < T_1$.

сивности Δ и периода T ; 2) изменения параметров, характеризующих силовое воздействие, влияют только на носитель $U'(x_-, x_+)$.

9.3. Электровозбудимые мембраны

Электровозбудимые мембраны играют первостепенную роль в изучении сложных неравновесных явлений, протекающих в биологических системах. Именно их сложность делала до последнего времени невозможным количественное описание большинства биологических систем. Нервные мембраны — одно из немногих исключений в биологии; они были изучены количественно весьма подробно как в экспериментальном, так и в теоретическом плане. Одной из наиболее изученных систем является гигантский аксон кальмара. Диаметр его составляет приблизительно 500 мкм, что дает экспериментальные преимущества по сравнению с другими системами, поскольку в этот аксон гораздо легче вставить микроэлектроды, чтобы стимулировать или регистрировать его электроактивность. В понимании механизма действия электровозбудимых мембран большую роль сыграла работа Ходжкина и Хаксли [9.4] на гигантском аксоне кальмара, использовавшая метод фиксации напряжения (рис. 9.7 и 9.8). Они развили также успешное феноменологическое описание динамических свойств нервной мембраны, которое до сих пор занимает центральное место в электрофизиологии.

Суммируем кратко те экспериментальные факты относительно нервных мембран, которые нам понадобятся. Нервная

клетка состоит из сферического клеточного тела (сомы) и протяженных ответвлений, связывающих ее с другими нервными клетками. Один из отростков, сравнительно большой и длинный,

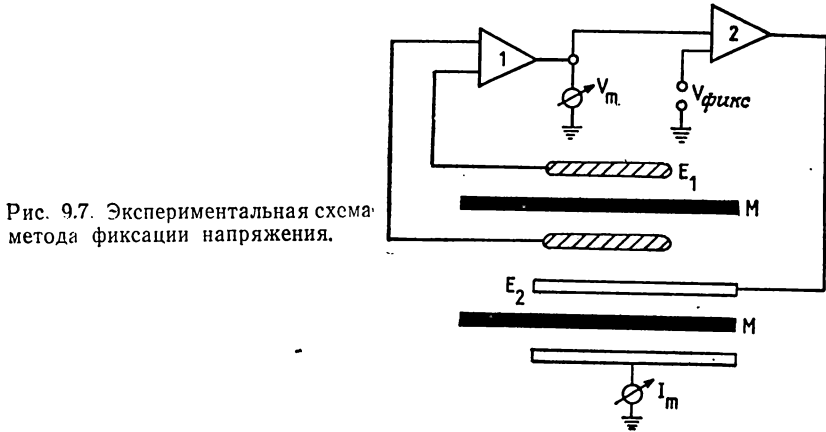


Рис. 9.7. Экспериментальная схема метода фиксации напряжения.

называется аксоном; он состоит из мембраны, заполненной электролитом (аксоплазмой) и погруженной в межклеточную жидкость. Мы рассмотрим здесь только те нервные мембраны, кото-

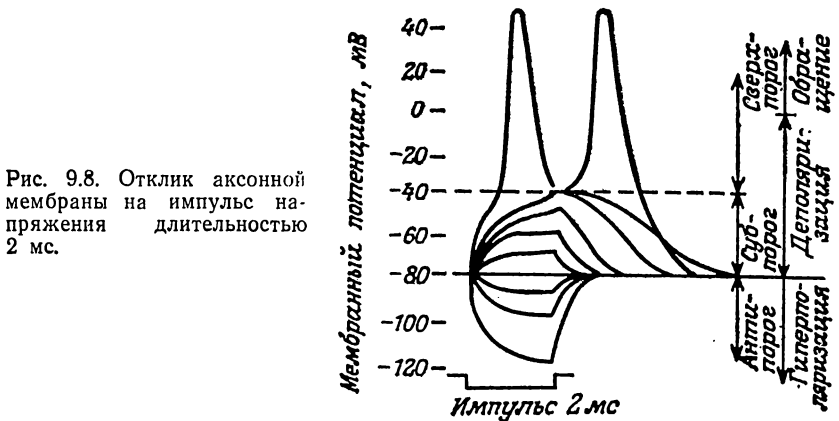


Рис. 9.8. Отклик аксонной мембраны на импульс напряжения длительностью 2 мс.

рые не окружены изолирующей оболочкой, т. е. так называемые немиелинизированные аксоны. Как показывает эксперимент, в равновесном состоянии или состоянии покоя между внутренней и внешней сторонами мембраны существует электрическая разность потенциалов. Внутри клетки потенциал отрицателен и равен приблизительно -70 мВ. Этот потенциал возникает благо-

даря различным составам аксоплазмы и межклеточной жидкости (рис. 9.9).

Потенциал покоя мембраны не соответствует потенциалу, при котором существует термодинамическое равновесие между концентрациями различных ионов в межклеточной жидкости и аксоплазме, причем разница наиболее велика для ионов натрия. Несмотря на диффузию ионов, поперек мембраны поддерживаются градиенты концентрации благодаря действию зависящего от энергии метаболического процесса — так называемого натриевого насоса. Этот процесс, регулирующий состав аксоплазмы и межклеточной жидкости, в значительной мере не зависит от

| <i>Внешняя область</i> | | <i>Внутренняя область</i> |
|------------------------|-----------------|---------------------------|
| Na^+ 460 | <i>Мембрана</i> | Na^+ 50 |
| K^+ 10 | | K^+ 400 |
| Cl^- 540 | | Cl^- 40-100 |

Рис. 9.9. Состав внутренней и внешней областей аксонной мембраны в ммоль/л.

электровозбуждения. Электровозбуждение происходит, если достигается определенное пороговое значение мембранного потенциала. Точнее, если мембранный потенциал сдвигается к большим значениям при приложении малого внешнего напряжения к нервной мембране, т. е. разность потенциалов между двумя сторонами мембраны уменьшается (так называемая деполяризация), то после снятия внешнего напряжения потенциал быстро возвращается к исходному значению. Малость возмущения означает то, что существует линейная связь между возмущением и деполяризацией. Эта линейная связь нарушается, когда возмущение достаточно велико, так что деполяризация превосходит некоторое определенное пороговое значение порядка 30—40 мВ. Тогда деполяризация продолжает расти нелинейно и быстро и мембранный потенциал достигает максимального значения, равного приблизительно +30 мВ, прежде чем возвратиться к значению потенциала покоя. Это возбуждение распространяется вдоль аксона. При этом говорят, что в нерве произошла генерация потенциала действия (рис. 9.8).

Механизм генерации потенциала действия был изучен Ходжином и Хаксли с использованием метода фиксации напряжения (простой обзор см. в [9.5]). Схема метода фиксации напряжения изображена на рис. 9.7. Мембранный потенциал V_m измеряется между заштрихованными электродами и на электронной схеме

сравнивается с потенциалом $V_{\text{фикс}}$, создаваемым поперек мембраны. Для компенсации любого отклонения V_m от $V_{\text{фикс}}$ используется усилитель 2, который создает ток поперек мембраны. Фиксация напряжения позволяет изучить отклик мембраны на внешнее фиксированное возмущение, отклоняющее мембранный потенциал от значения потенциала покоя. Как показали Ходжкин и Хаксли, механизм, который генерирует потенциал действия, обусловлен зависимостью ионной проницаемости мембраны от напряжения. Когда мембранный потенциал близок к потенциалу покоя, проводимость g нервной мембраны по отношению к ионам натрия очень мала. Однако, как только деполяризация превосходит пороговое значение, т. е. V_m достигает значения -30 мВ, проницаемость мембраны для ионов натрия возрастает взрывным образом. В результате ионы натрия переходят в аксоплазму и этот поток еще более увеличивает деполяризацию. Такой «автокаталитический» процесс протекает очень быстро на временах порядка миллисекунд и заканчивается, когда разность потенциалов приблизительно становится равной равновесному потенциалу атомов натрия. Эта вспышка, обусловленная изменением проницаемости для Na^+ , сопровождается двумя более медленными процессами, протекающими на временах 10 мс; причем один процесс уменьшает проницаемость для ионов натрия, а другой увеличивает проницаемость для ионов калия. Совместное действие этих двух процессов возвращает потенциал мембраны к состоянию покоя; потенциал действия «регенеративен». В настоящее время широко распространено мнение, что ионы натрия и калия проходят через определенные, специфичные каналы (так называемые натриевые и калиевые каналы). Ходжкин и Хаксли дали удовлетворительное количественное описание электрической возбудимости мембран. В следующем разделе мы используем их уравнения в качестве исходного пункта для теоретического анализа поведения нерва под действием марковского дихотомического шума. Выбор этого внешнего шума делается здесь по двум принципиальным причинам. Во-первых, это позволяет получить точные результаты для случая нелинейно флуктуирующего параметра при любом значении дисперсии и времени корреляции. Во-вторых, использование этого шума требует лишь незначительной модификации традиционной экспериментальной схемы фиксации потенциала.

До сих пор изучение шума в мембранах было ограничено исключительно случаем спонтанного внутреннего шума в этих системах, генерируемого, например, при прохождении ионов через каналы. Однако, как отмечено в гл. 1, этими внутренними флуктуациями можно пренебрегать при изучении макроскопических свойств аксоновых площадок, содержащих большое число ионных каналов. Мы покажем, что изучение шума внешнего

напряжения представляет интерес в связи с новыми явлениями, предсказанными в [9.6]. Кроме того, такое исследование представляло бы экспериментальную проверку уравнений Ходжкина — Хаксли в условиях, совершенно отличных от тех, для которых они были первоначально выведены.

9.3.1. Аксон Ходжкина — Хаксли и дихотомический шум напряжения

Экспериментальные результаты, полученные методом фиксации напряжения, привели Ходжкина и Хаксли к формулировке следующего феноменологического описания динамики нервной мембраны. Для описания процесса активации калия они вводят вспомогательную переменную n , которая подчиняется кинетическому уравнению

$$\dot{n} = \alpha_4(1 - n) - \beta_4 n, \quad n \in [0, 1], \quad (9.115)$$

где α_4 и β_4 — известные функции, зависящие от мембранного потенциала V (V в милливольтх), именно

$$\alpha_4 = \frac{V + 10}{100} \left[\exp \left(\frac{V}{10} + 1 \right) - 1 \right]^{-1},$$

$$\beta_4 = \exp(V/80)/8. \quad (9.116)$$

Проводимость ионов калия связана с вспомогательной переменной соотношением

$$g = \tilde{g}_K n^4. \quad (9.117)$$

Положив максимальное значение проводимости равным единице, получаем для временной эволюции проводимости калия

$$\dot{g} = 4\alpha_4(V_t)(g^{3/4} - g) - 4\beta_4(V_t)g. \quad (9.118)$$

Изменение проводимости натрия происходит благодаря процессам активации и дезактивации, которые описываются двумя вспомогательными переменными: m , описывающей активацию натриевого канала, и h , учитывающей его дезактивацию. Они подчиняются кинетическим уравнениям:

$$\dot{m} = \alpha_3(1 - m) - \beta_3 m, \quad m \in [0, 1],$$

$$\dot{h} = \alpha_1(1 - h) - \beta_1 h, \quad h \in [0, 1], \quad (9.119)$$

$$\alpha_3 = \frac{(V + 25)}{10} \left[\exp \left(\frac{V}{10} + \frac{5}{2} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (9.120)$$

$$\beta_3 = 4 \exp(V/18),$$

$$\alpha_1 = \frac{7}{100} \exp(V/20),$$

$$\beta_1 = \left[\exp \left(\frac{V}{10} + 3 \right) + 1 \right]^{-1}.$$

Проводимость натрия определяется формулой

$$g = \tilde{g}_{Na} m^3 h.$$

Активационные процессы для натрия и калия мы будем анализировать по отдельности. Другими словами, мы будем рассматривать лишь ситуации, когда нервные мембраны подвергаются действию химических или фармакологических агентов, блокирующих по отдельности либо натриевый, либо калиевый каналы. Экспериментально это можно реализовать следующим образом: 1) тетродотоксин блокирует натриевые каналы, оставляя функционирующими калиевые каналы [9.7]; 2) калиевые каналы блокируются тетраэтиламмонием [9.8]. Кроме того, нам хотелось бы избежать взаимодействия между процессами активации и дезактивации натрия. Поэтому будем предполагать, что мембрана подверглась действию проназы, которая подавляет процесс дезактивации [9.9]. Такие искусственные ситуации позволяют избежать серьезных трудностей, возникающих при анализе совокупного поведения и дают возможность изучать основные компоненты поведения мембран при электрическом возбуждении по отдельности, что по крайней мере существенно для последующей интерпретации отклика нервного волокна как целого на внешние флуктуационные воздействия. Далее, эти условия исключают любую детерминистическую неустойчивость. Пороговое поведение при этом невозможно при любых значениях мембранного потенциала. Это означает, что любой переход, индуцированный внешним шумовым напряжением, — чисто шумовой эффект. Поскольку процесс дезактивации натрия можно здесь не рассматривать, проводимость ионов натрия зависит лишь от m : $\tilde{g}_{Na} m^3$, и ее временная эволюция задается уравнением

$$\dot{g} = 3\alpha_3(V_t)(g^{2/3} - g) - 3\beta_3(V_t)g; \quad (9.121)$$

здесь максимальная проводимость нормирована на единицу.

Таким образом, проводимости натрия и калия подчиняются уравнению следующей общей формы:

$$\dot{g} = \nu\alpha_\nu(V_t)(g^{(\nu-1)/\nu} - g) - \nu\beta_\nu(V_t)g \equiv F(g, V_t), \quad (9.122)$$

$\nu = 4$ для K^+ и $\nu = 3$ для Na^+ .

Ниже мы проанализируем поведение этих проводимостей в случае, когда V_t является случайным процессом, флуктуирующим между двумя хорошо определенными значениями (рис. 9.10):

$$V_t = V + I_t, \quad (9.123)$$

причем I_t — это дихотомный марковский процесс с пространством состояний $\{\Delta, -\Delta\}$. Легко проверить, что в случае нелинейного D-шума стационарная плотность вероятности задается

выражением

$$p_s(g) = N \left(\frac{1}{F(g, V + \Delta)} - \frac{1}{F(g, V - \Delta)} \right) \times \\ \times \exp \left[\frac{\gamma}{2} \int^g dg' \left(\frac{1}{F(g', V + \Delta)} + \frac{1}{F(g', V - \Delta)} \right) \right]. \quad (9.124)$$

Носитель $p_s(g)$ задается формулой

$$U = [\bar{g}(V - \Delta), \bar{g}(V + \Delta)], \quad (9.125)$$

где $\bar{g}(V + \Delta)$ — стационарное решение (9.122), соответствующее значению потенциала, равному $V \pm \Delta$.

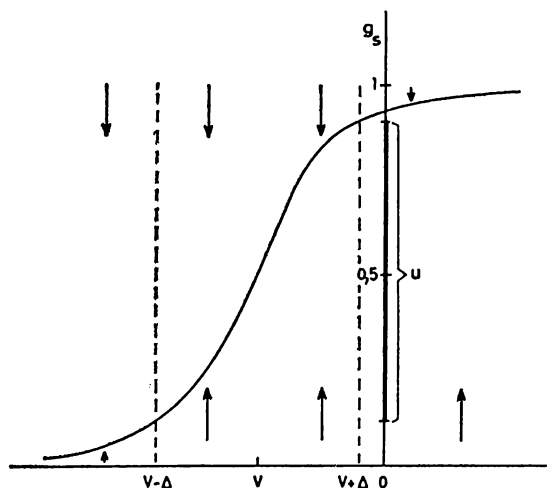


Рис. 9.10. Зависимость стационарной аксонной проводимости в детерминистическом случае от V (схематично). Пространство состояний случайного процесса (g_i, V_i) ограничено двумя штриховыми линиями. Стрелками показано направление эволюции g_i . Очевидно, что вся плотность вероятности при $t \rightarrow \infty$ будет сосредоточена внутри носителя U , обозначенного жирной линией на оси g_s .

Локальные экстремумы стационарной плотности вероятности являются корнями уравнения

$$- \left[F'(g, V + \Delta) + \frac{\gamma}{2} \right] \cdot F^2(g, V - \Delta) + \\ + \left[F'(g, V - \Delta) + \frac{\gamma}{2} \right] \cdot F^2(g, V + \Delta) = 0, \\ F' = \partial_g F(g, V). \quad (9.126)$$

Поведение плотности вероятности $p_s(g)$ вблизи границ носителя может изменять свой характер с расходящегося на нерасходящийся. Легко проверить, что плотность распределения вероятности расходуется у грани, когда обратное время корреляции γ удовлетворяет условию

$$2F'(\bar{g}(V \pm \Delta, V \pm \Delta)) > \gamma_{\pm}. \quad (9.127)$$

Здесь γ_+ относится к условию на верхней границе, γ_- — к условию на нижней границе. Когда условие (9.127) не выполнено, $p_s(g)$ обращается на границе в нуль. На основе этих формул можно теперь получить полное описание стационарных свойств аксона Ходжкина — Хаксли, находящегося под действием флуктуирующего напряжения в схеме фиксации напряжения.

9.3.2. Фазовые диаграммы для проводимости ионов натрия и калия в аксоне Ходжкина — Хаксли

Используя выражения для $F(g, V + \Delta)$, задаваемые условием (9.127), и соотношения (9.116, 117) для α и β , из (9.124) можно вычислить сразу стационарную плотность вероятностей для ионов натрия и калия. В случае калия имеем

$$\begin{aligned} p_s(g) = & N g^{-3/4} \{ \alpha (V - \Delta) - \alpha (V + \Delta) + [\alpha (V - \Delta) + \beta (V - \Delta) - \\ & - \alpha (V + \Delta) - \beta (V + \Delta)] g^{1/4} \} \times \\ & \times | \alpha (V + \Delta) - [\alpha (V + \Delta) + \beta (V + \Delta)] \\ & g^{1/4} |^{(\gamma/2) [\alpha (V + \Delta) + \beta (V + \Delta)] - 1} \times \\ & \times | \alpha (V - \Delta) - [\alpha (V - \Delta) + \beta (V - \Delta)] g^{1/4} |^{(\gamma/2) [\alpha (V - \Delta) + \beta (V - \Delta)] - 1}. \end{aligned}$$

Экстремумы этой функции задаются уравнением (9.126):

$$\begin{aligned} - \left[\alpha (V + \Delta) (3/4 - n) - \beta (V + \Delta) n + \frac{\gamma}{2} n \right] & [\alpha (V - \Delta) (1 - n) - \\ - \beta (V - \Delta) n]^2 + \left[\alpha (V - \Delta) (3/4 - n) - \beta (V - \Delta) n + \frac{\gamma}{2} n \right] & \times \\ \times [\alpha (V + \Delta) (1 - n) - \beta (V + \Delta) n]^2 = 0, \end{aligned}$$

$$n = g^{1/4}. \quad (9.128)$$

Стационарная плотность вероятности расходится на нижней границе несущего множества U , когда

$$\gamma_+ = 2 [\alpha (V + \Delta) + \beta (V + \Delta)],$$

и на верхней границе, когда

$$\gamma_- = 2 [\alpha (V - \Delta) + \beta (V - \Delta)].$$

Аналогичным образом можно получить и соответствующие выражения для случая натрия.

Используя эти выражения, можно построить фазовые диаграммы, которые наглядно показывают влияние, оказываемое на проводимости внешними флуктуациями напряжения с амплитудой Δ и корреляционным временем γ^{-1} . Среднее значение приложенного потенциала в случаях и калия, и натрия соответствует значению g , равному $1/2$ от соответствующей величины

в детерминистическом случае (рис. 9.10), что составляет $E\{V_i\} = -46,1$ мВ для калия и $E\{V_i\} = -38,4$ мВ для натрия.

На рис. 9.11 приведены результаты для случая калия. При заданном значении Δ плотность вероятности расходуется на верхней (нижней) границе носителя U , если γ лежит слева от γ_+ (γ_-). Этим учитывается существование областей А и D, в которых плотность вероятности имеет только один экстремум. В области

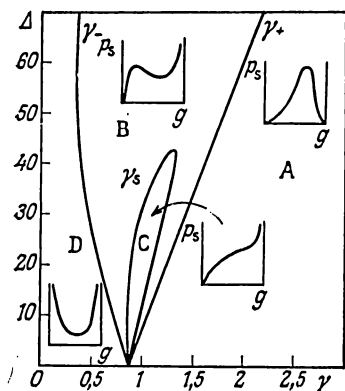


Рис. 9.11. Фазовая диаграмма в переменных (Δ, γ) для калиевой системы. Для K^+ средний потенциал равен $-46,1$ мВ. При детерминированных условиях это соответствует значению $g_K = 1/2$.

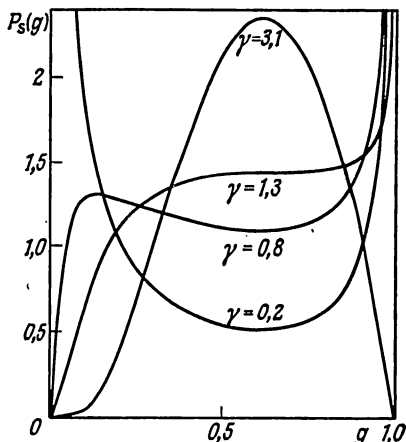


Рис. 9.12. Плотности вероятности для калиевой системы при указанных значениях γ , соответствующие областям А, В, С, D на рис. 9.11 и $\Delta = 40$ мВ. Носитель $U = (2,94 \cdot 10^{-2}, 0,904)$ однородно растянут до $(0, 1)$.

А экстремум является максимумом, а в области D — минимумом. Если величина Δ превосходит $42,5$ мВ и величина γ растет от нуля и пересекает линию γ_- , то $p_s[\bar{g}(V - \Delta)]$ обращается в нуль, так что плотность вероятности приобретает дополнительный экстремум, являющийся, конечно, максимумом. Когда он пересекает линию γ_+ , то исчезновение расхождений на верхней границе U приводит к исчезновению минимума. Если значение Δ меньше $42,5$ мВ, то плотность вероятности имеет седловую точку при $\gamma = \gamma_s$, в которой минимум и максимум из области В сливаются. В результате внутри γ_s имеется область C, в которой плотность вероятности монотонно возрастает от нижней к верхней границе носителя. На рис. 9.12 показано типичное поведение плотности вероятности $p_s(g)$ в каждой из этих областей. Влияние времени корреляции на положение экстремума показано на рис. 9.15, а при двух типичных значениях интенсивности

внешнего шума. Одно из них ниже порогового значения $\Delta \approx 42,5$ мВ, а другое — выше этого значения. Ниже порога, при условии что γ не лежит в области С (рис. 9.11), в окрестности $g = 0,5$ всегда имеется экстремум. Этот экстремум является минимумом слева от области С и максимумом справа от С. Положение второго экстремума, существующего в области В, сдвигается быстро в сторону увеличения аргумента с ростом γ от значений вблизи нижней границы носителя к значениям вблизи

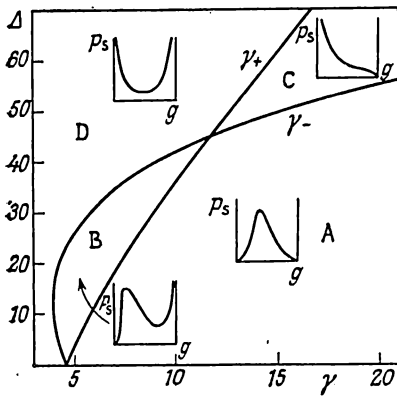


Рис. 9.13. Фазовая диаграмма (Δ , γ) для натриевой системы. Средний потенциал равен $-38,442$ мВ, что соответствует $g_{Na} = 1/2$ при детерминированных условиях.

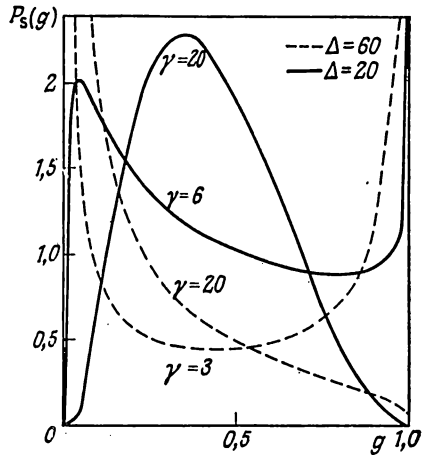


Рис. 9.14. Плотность вероятности для натриевой системы при значениях параметров, указанных на рисунке, из областей А, В, С рис. 9.13. Носитель $U = (3,599 \cdot 10^{-2}, 0,876)$ при $\Delta = 20$ и $U = (3,789 \cdot 10^{-8}, 0,993)$ при $\Delta = 60$ однородно растянут до $(0, 1)$.

верхней границы. При превышении порогового значения $\Delta = 42,5$ мВ минимум, который при малых значениях γ находится вблизи $g = 0,5$ быстро передвигается к верхней границе, которую он достигает при $\gamma = \gamma_+$. Максимум, появляющийся при $\gamma = \gamma_-$, приближается к значению $g = 0,5$ при $\gamma \rightarrow \infty$.

На рис. 9.13 приведены результаты для случая натриевой системы. Поскольку характерное время для натриевого канала намного меньше, чем для калиевого, как это видно из выражений для коэффициентов α_v и β_v , интересующая нас область сдвигается к более высоким значениям γ , т. е. в сторону более коротких времен релаксации. Замечательно то, что несмотря на сходство выражений для проводимостей ионов натрия и калия (отличающихся лишь степенью вспомогательной переменной v),

имеется существенное различие между фазовыми диаграммами на рис. 9.11 и 9.13. Это объясняется в основном тем, что для натриевой системы кривые γ_+ и γ_- пересекают друг друга при значении деполяризации, которое является физиологически допустимым; это обстоятельство имеет три следствия: 1) в противоположность тому, что происходит в K^+ -системе, область С на рис. 9.13, где $p_s(g)$ — монотонная функция, ограничена значениями Δ , превосходящими 45 мВ; 2) расходимость имеет место на нижней границе носителя, в то время как в случае кальция она имеет место на верхней границе; 3) область В, где имеются два экстремума, теперь занимает конечную область на (Δ, γ) -плоскости. Поведение плотности вероятности в каждой из этих областей показано на рис. 9.14. Хотя поведение плотности вероятности в области С (рис. 9.13) качественно идентично в обеих системах, важно подчеркнуть, что механизмы перехода в эту область коренным образом различаются в случаях натриевой или калиевой систем. В случае калиевой системы происходит мягкий переход, соответствующий локальному событию внутри носителя — слиянию двух экстремумов в седловую точку. Это явление не влияет на плотность вероятности вблизи границ носителя. В этом отношении эффект аналогичен индуцированным шумом переходам типа расщепления пика, описанного в моделях генетической, Хонглера и системе Нитцана — Росса. В отличие от этого в натриевой системе область С появляется посредством перехода жесткого типа, вызванного резким изменением поведения вблизи одной из границ.

Заметное отличие для случаев калиевого и натриевого каналов иллюстрируется дополнительно на рис. 9.15, где показано положение экстремумов $p_s(g)$ как функций γ при фиксированном Δ . Вне зависимости от значения Δ при малых γ всегда вблизи $g = 0,5$ имеется минимум. Он перемещается к верхней границе носителя и достигает ее при $\gamma = \gamma_+$. При $\gamma \geq \gamma_-$ положение дополнительного экстремума $p_s(g)$ (максимума), появляющегося на нижней границе, перемещается медленно к $g = 0,5$. Чем больше интенсивность шума, тем с меньшей скоростью происходит это приближение. Как можно было ожидать из вида фазовых диаграмм, две кривые перекрываются лишь при $\Delta < 45$ мВ. Результаты этого раздела — хорошая иллюстрация того факта, что системы с весьма похожим детерминистическим феноменологическим описанием могут совершенно различно реагировать на внешние флуктуации.

Некоторые особенности этих результатов весьма интересны с физиологической точки зрения. Во-первых, представляется, что существует связь между наличием области С и пороговой деполяризацией, способной к генерации потенциала действия: действительно, нижняя граница этой области в случае натрия

и соответственно верхняя граница в случае калия обычно соответствуют значениям порядка 40 мВ. Во-вторых, в областях, где плотность вероятности расходитсЯ лишь у одной границы носителя U , калиевая и натриевая системы ведут себя одинаковым образом ниже этого порогового значения Δ , т. е. оба канала находятся предпочтительно в открытом состоянии. Напротив, выше порога по Δ поведение натриевой системы меняется в том

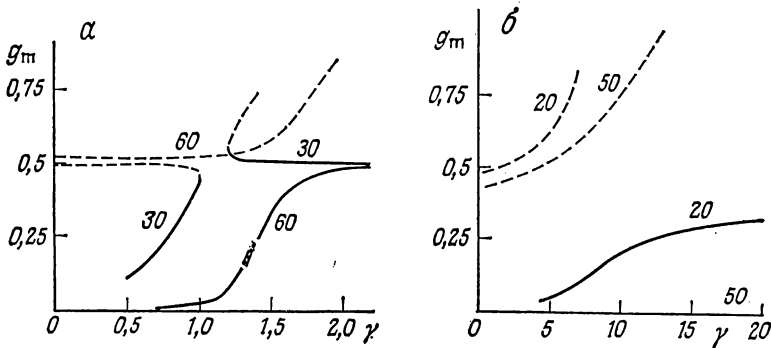


Рис. 9.15. *а* — Положение g_m экстремума $p_s(g)$ для калиевой системы как функция γ при двух типичных значениях амплитуды Δ . Штриховые линии — минимумы; сплошные — максимумы. *б* — Координата g_m экстремумов $p_s(g)$ для натриевой системы как функция γ при двух типичных значениях амплитуды Δ . При $\Delta = 50$ мВ единственный экстремум области D почти совпадает (при приведенных значениях γ) с нижней границей U . Однако при $\gamma \rightarrow \infty$ он приближается к детерминированному стационарному состоянию $g = 0,5$. Штриховые линии — минимумы; сплошные — максимумы.

смысле, что теперь *предпочтительным оказывается закрытый канал*. Это — сильное указание на то, что в полной системе Ходжкина — Хаксли, т. е. в системе, в которой нервная мембрана не подвергалась воздействию упомянутых выше химических или фармакологических агентов, внешний шум напряжения может изменить порог и характеристики генерации потенциала действия. В-третьих, по сравнению с генетической моделью, в которой при детерминированном окружении также отсутствует неустойчивость, фазовая диаграмма нервной системы менее сложна. Отсюда можно сделать вывод, что нервная система менее чувствительна к влиянию внешнего шума.

Обсудим кратко некоторые экспериментальные аспекты. Мы полагаем, что экспериментальное наблюдение предсказанных явлений возможно по следующим причинам: 1) дихотомический марковский шум с определенной амплитудой Δ и временем корреляции γ^{-1} можно генерировать с помощью простых электронных устройств; 2) типичное время переключения в эксперимен-

тах с фиксацией напряжения составляет микросекунды, в то время как типичный временной масштаб, связанный с проводимостью, — это 1—10 мс, так что корреляционное время шума может меняться в достаточно большом интервале (до $1/10$ или меньше от характеристического времени проводимости); 3) поскольку интересующие нас значения корреляционных времен меньше или порядка типичной длительности потенциала действия, средняя частота γ настолько велика, что эксперимент можно проводить достаточно долго и получить надежную статистику проводимости.

Чтобы сравнить наши теоретические предсказания непосредственно с экспериментальными результатами, необходимо исключить вклад от емкостных токов, которые возникают следом за каждым скачком потенциала. Известно также, что в нервных мембранах имеется ток утечки, который явно не учитывался в приведенном выше анализе. Это было оправдано, поскольку ток утечки не зависит от напряжения. Как следствие этого, ток утечки может принимать лишь два определенных значения, соответствующие значениям потенциала в условиях флуктуаций потенциала. Измеренные значения токов могут быть, таким образом, скорректированы путем вычитания компоненты утечки, соответствующей действительному значению потенциала.

В заключение данной главы отметим, что использование различных кинетических схем для описания нервной мембраны (например модели каналов с двумя состояниями [9.10—14] или модели, предполагающей кооперативные взаимодействия в мембране [9.15—17], которые довольно хорошо согласуются друг с другом и с моделью Ходжкина — Хаксли в случае детерминированных внешних условий), приводит к четко различающимся предсказаниям относительно поведения возбудимых мембран, находящихся под действием внешнего шума [9.6]. Следовательно, любое существенное отклонение реальных нервных мембран от аксона Ходжкина — Хаксли ясно проявилось бы при наличии флуктуаций среды. С экспериментальной точки зрения зондирование нервной мембраны внешним дихотомным шумом было бы, таким образом, удобным методом исследования ее молекулярных свойств, который позволил бы сделать выбор между различными кинетическими описаниями.

СИМБИОЗ ШУМА И ПОРЯДКА — ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как подчеркивалось в гл. 1, все системы в природе подвержены действию шума. Важность этого факта еще более возрастает, если принять во внимание те многочисленные эффекты, которые шум индуцирует в этих системах и о которых речь шла в предыдущих главах. Возникает вопрос: как далеко простирается влияние изменчивости окружения на макроскопические свойства систем? Чем более сложна система, тем больше источников шума и тем более сложен ответ на этот вопрос. Наилучшим примером такой ситуации является мозг. Он функционирует не только в условиях сильно изменяющегося сенсорного восприятия, но и при наличии большого числа внутренних источников стохастичности, таких, например, как случайные испускания импульсов нейронами. Этот поразительный симбиоз порядка и случайности существует и на другом уровне — в кооперативном поведении популяций насекомых. Для того чтобы выжить и приспособиться к флуктуациям источников пищи, сообщества насекомых должны проявлять значительную степень случайности в своем поведении при поисках пищи. С другой стороны, весьма сложные системы могут также находиться под действием довольно простых источников случайной изменчивости. Удивительно то, что даже существенные свойства сложных систем могут критически зависеть от флуктуирующих условий окружения. Например, у многих видов черепах пол эмбрионов не фиксирован генетически, а определяется прежде всего температурой инкубации яиц [10.1]. Изменение температуры всего на несколько градусов приводит к развитию мужских особей и наоборот. Ситуации, подобные приведенным здесь трем примерам, можно найти во многих других природных системах. Результаты, полученные в предыдущих главах, позволяют высказать предположение, что эффекты влияния шума являются фундаментальными для понимания поведения сложных природных систем. В противоположность интуитивному представлению внешний шум вполне может играть активную роль в процессах организации этих систем. Более точное теоретическое исследо-

вание этих вопросов станет возможным только после того, как будет сформулировано удовлетворительное феноменологическое описание столь сложных систем.

Однако уже для более простых экспериментально исследуемых систем возникают интригующие вопросы относительно роли шума в процессах их самоорганизации. Первым примером является роль внешнего шума для упорядоченных структур, возникающих в гидродинамических потоках. Конкретнее, как было отмечено в случае систем Бенара или Куэтта при больших аспектных отношениях турбулентное течение возникает уже тогда, когда числа Рэлея или Рейнольдса превосходят критические значения на поразительно малые величины [10.2—4]. Этот экспериментальный факт привел Гормана и др. [10.5] к вопросу: чем же определяется переход к хаосу при столь малых числах R — внутренними или внешними флуктуациями? Весьма интересно, что если в этом случае определяющую роль играют внешние флуктуации, то это будет демонстрацией того факта, что даже малый внешний шум может значительно изменить поведение нелинейной системы. Вопрос о связи турбулентности с внешним шумом исследовался теоретически в другой гидродинамической системе, именно в сверхтекучем гелии [8.49]. Было предсказано, что шум с конечной амплитудой задерживает начало турбулентности (разд. 8.8).

В данной книге рассматривались лишь системы, описываемые одной переменной. Это мотивировалось тем, что в случае двух или более переменных явные аналитические результаты можно получить лишь в исключительных случаях. Ограничение системами с одной переменной исключает, конечно, определенные эффекты, которые могут иметь место при фазовых переходах, индуцированных шумом. Например, новым эффектом, часто встречающимся в системах с двумя и более переменными, является возникновение автоколебаний. Влияние внешнего шума на эти колебания исследовалось Арнольдом и др. [10.11] в случае консервативных колебательных систем типа Лотки — Вольтерры. Было обнаружено, что существование стационарного решения принципиально зависит от того, содержит или нет спектр интенсивности шума собственные частоты системы Лотки — Вольтерры. Интересно, что при изучении модели окисления CO на поверхности платины де ла Рубия и др. [10.6] предсказали недавно, что цветной внешний шум может индуцировать предельный цикл. Мы ограничивались случаем одной переменной, а также предполагали (разд. 8.7), что система является пространственно-однородной, т. е. эффективная пространственная размерность ее равна нулю. Попытка выйти за рамки ограничения нулевой размерностью и изучить влияние внешнего шума на

пространственные структуры в системах с реакциями и диффузией была предпринята Михайловым [10.7—10.1¹).

В настоящее время область индуцированных шумом переходов развита лучше в теоретическом плане, нежели в экспериментальном. Хотя несколько экспериментов (описанных в гл. 7 и 8) качественно и подтверждают теорию, много еще остается сделать в экспериментальном плане. Мы надеемся, что данная книга окажет стимулирующее влияние на дальнейшее развитие экспериментальных исследований переходов, индуцированных шумом. В гл. 7—9 мы предложили несколько новых экспериментов. Системы, рассмотренные там, представляют возможность количественно сравнить теорию и эксперимент. Возможности эксперимента не ограничиваются лишь этими системами. Мы надеемся, что наша книга поможет специалистам в других областях найти ситуации, когда исследование влияния внешнего шума может оказаться полезным. Дальнейшее экспериментальное исследование роли внешнего шума желательно по двум причинам. Во-первых, оно поможет лучше понять возможности использования индуцированных шумом эффектов в сложных естественных системах. К этой категории относятся предложенные здесь эксперименты по электровозбудимым мембранам. Во-вторых, оно нужно для дальнейшего совершенствования и формулировки новых моделей. К этому классу экспериментов относятся эксперименты в лазерах и других квантово-оптических системах, в электрических контурах, с фотохимическими реакциями и в гидродинамических системах. Можно ожидать, что такие эксперименты дадут информацию о справедливости использования приближения белого шума, стационарном поведении систем, влиянии шума на хаос в системе и на пространственные структуры. Для двух последних вопросов идеальным объектом представляются нематические жидкие кристаллы.

Хотя теория влияния внешнего шума на системы с одной переменной кажется достаточно полной, сама область фазовых переходов, индуцированных шумом, является довольно молодой, и целый ряд вопросов остается открытым и не только с экспериментальной точки зрения. Мы надеемся, что данная книга послужит стимулом для дальнейшего изучения этих вопросов.

¹) Впервые индуцированный шумом фазовый переход в распределенной системе с диффузией был исследован в работе [4*]. Подробное изложение вопросов, связанных с индуцированными шумом неустойчивостями и фазовыми переходами в распределенных системах, можно найти в обзоре [5*] и монографии [6*]; см. также [8*]. — *Прим. ред.*

Приложения

А. ОБОБЩЕННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрим следующую экспериментальную ситуацию: некоторую зависящую от времени величину $f(t)$ требуется измерить в некоторый момент времени s , например, с помощью электронного устройства. Вследствие инерционности измерительный прибор реагирует на «входной сигнал» $f(t)$ не мгновенно, а с некоторым запаздыванием: в течение определенного интервала времени прибор производит усреднение. Если наш измерительный прибор линеен, то входной сигнал можно представить в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f(t) dt = \phi_f(\varphi), \quad (\text{A.1})$$

где $\varphi(t)$ — передаточная функция (характеристика прибора). Из приведенных выше замечаний ясно, что $\varphi(t)$ должна иметь пик при $t = s$, а затем быстро спадать до нуля. Чем «уже» $\varphi(t)$, тем лучше измерительный прибор. Ясно, что действие прибора сводится к сглаживанию входного сигнала $f(t)$. Следовательно, даже если $f(t)$ — весьма нерегулярный объект, интеграл и величина $\phi_f(\varphi)$ существуют. Это замечание позволяет понять, как надлежит обращаться с функциями, не существующими в обычном смысле, например с производной от траектории винеровского процесса: обобщенные функции могут быть определены по их действию на достаточно большом (в соответствии с решаемой задачей) классе обычных функций. Последнему утверждению можно придать точный смысл. Пусть $\varphi(t)$ — произвольная вещественнозначная бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, т. е. обращающаяся тождественно в нуль вне некоторого ограниченного интервала на оси времени. Обозначим пространство всех таких функций через $C_K^\infty(\mathbb{R})$. Под функционалом на $C_K^\infty(\mathbb{R})$ мы понимаем следующее. Если φ — функция, принадлежащая пространству $C_K^\infty(\mathbb{R})$, то $\phi(\varphi)$ — вещественное (или, вообще говоря, комплексное) число. Напри-

мер,

$$\phi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) g(t) dt \quad (\text{A.2})$$

с заданной непрерывной функцией $g(t)$ и

$$\phi(\varphi) = \varphi(s) \quad (\text{A.3})$$

— функционалы на $C_K^\infty(\mathbb{R})$. Они же могут служить примерами непрерывного линейного функционала. Напомним, что функционал ϕ называется линейным, если

$$\phi(a\varphi_1 + b\varphi_2) = a\phi(\varphi_1) + b\phi(\varphi_2), \quad (\text{A.4})$$

где a и b — вещественные (комплексные) числа. Функционал называется непрерывным, если из

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \quad \text{следует, что} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\varphi_n) = \phi(\varphi). \quad (\text{A.5})$$

Здесь $\varphi_n \rightarrow \varphi$, если $\varphi_n \equiv 0$ при $x \notin [t_1, t_2]$ независимо от n и если φ_n и их производные равномерно сходятся (в обычном смысле) к φ . Каждый непрерывный линейный функционал ϕ на $C_K^\infty(\mathbb{R})$ называется обобщенной функцией, или распределением (в смысле Л. Шварца). Мы не будем пользоваться вторым названием, чтобы не смешивать обобщенные функции с распределениями вероятности. Итак, обобщенная функция характеризуется множеством вещественных чисел $\phi(\varphi)$, $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$. Вторым примером обобщенной функции может служить непрерывный линейный функционал (A.3), т. е.

$$\phi(\varphi) = \varphi(s), \quad (\text{A.6})$$

соответствующий δ -функции Дирака $\delta(t-s)$. Формально его можно представить в виде интеграла

$$\phi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \delta(t-s) dt = \varphi(s). \quad (\text{A.7})$$

Обобщенные функции обладают одним свойством, делающим их особенно удобными в обращении: они имеют производные любого порядка, которые в свою очередь являются обобщенными функциями. Действительно, по образу и подобию правила интегрирования по частям производную от обобщенной функции $\dot{\phi}$ можно определить как

$$\dot{\phi}(\varphi) = -\phi(\dot{\varphi}). \quad (\text{A.8})$$

Аналогичным образом определяется и обобщенный случайный процесс. Каждой функции φ мы ставим в соответствие слу-

чайную величину $\phi(\varphi)$, т. е. $\phi(\varphi)$ — случайный процесс с пространством параметров $C_K^\infty(\mathbb{R})$ и пространством состояний \mathbb{R} . Кроме того, процесс $\phi(\varphi)$ с вероятностью единица линейен, т. е. почти наверное удовлетворяет условию (A.4). Кроме того, процесс $\phi(\varphi)$ должен быть непрерывен в следующем смысле: если последовательность φ_{in} , $i = 1, \dots, m$ сходится к φ_i при $n \rightarrow \infty$, то распределение вероятности для $(\phi(\varphi_{1n}), \dots, \phi(\varphi_{in}), \dots, \phi(\varphi_{mn}))$ сходится к распределению вероятности для $(\phi(\varphi_1), \dots, \phi(\varphi_i), \dots, \phi(\varphi_m))$. Обобщенный случайный процесс называется гауссовским, если для произвольных линейно независимых функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ случайные величины $(\phi(\varphi_1), \dots, \phi(\varphi_n))$ имеют гауссовское совместное распределение. Как и обычный гауссовский процесс, такой процесс полностью характеризуется функционалами среднего значения

$$E\{\phi(\varphi)\} = m(\varphi) \quad (\text{A.9})$$

и ковариацией

$$\text{Cov}(\phi) = E\{[\phi(\varphi) - m(\varphi)][\phi(\psi) - m(\psi)]\} = C(\varphi, \psi). \quad (\text{A.10})$$

Ясно, что производная от гауссовского обобщенного процесса есть снова гауссовский обобщенный процесс с

$$E\{\dot{\phi}(\varphi)\} = -m(\dot{\varphi}) \quad (\text{A.11})$$

и

$$\text{Cov}(\dot{\phi}) = -C(\dot{\varphi}, \dot{\psi}). \quad (\text{A.12})$$

Это позволяет доказать, что производная от винеровского процесса есть гауссовский белый шум. Действительно, любому обычному процессу X_t мы можем сопоставить обобщенный процесс ϕ_X по формуле

$$\phi_X(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) X_t dt. \quad (\text{A.13})$$

В частности, винеровскому процессу W_t соответствует обобщенный процесс

$$\phi_W(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t) W_t dt. \quad (\text{A.14})$$

Нетрудно видеть, что ϕ_W — гауссовский обобщенный процесс с $m_W(\varphi) = 0$,

$$(\text{A.15})$$

$$\begin{aligned}
 C_W(\varphi, \psi) &= E \left\{ \int_0^\infty \varphi(t) W_t dt \cdot \int_0^\infty \psi(s) W_s ds \right\} = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t) \psi(s) E \{W_t W_s\} dt ds = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t) \psi(s) \min(t, s) dt ds.
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Рассмотрим производную от обобщенного процесса $\phi_W(\varphi)$, соответствующего винеровскому процессу W_t :

$$\begin{aligned}
 E \{\dot{\phi}_W(\varphi)\} &= -m_W(\dot{\varphi}) = 0, \\
 E \{\dot{\phi}_W(\varphi) \dot{\phi}_W(\psi)\} &= E \{\dot{\phi}_W(\dot{\varphi}) \dot{\phi}_W(\dot{\psi})\} = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t) \dot{\psi}(s) \min(t, s) dt ds = \\
 &= \int_0^\infty dt \dot{\varphi}(t) \int_0^t ds \cdot s \dot{\psi}(s) + \int_0^\infty dt t \dot{\varphi}(t) \int_t^\infty ds \dot{\psi}(s) = \\
 &= \int_0^\infty dt \dot{\varphi}(t) \left[t \psi(t) - \int_0^t \psi(s) ds \right] + \int_0^\infty dt t \dot{\varphi}(t) [\psi(\infty) - \psi(t)] = \\
 &(\psi(\infty) = 0, \text{ так как } \psi \in C_K^\infty(\mathbb{R})) \\
 &= - \int_0^\infty dt \dot{\varphi}(t) \int_0^t \psi(s) ds = \varphi(\infty) \int_0^\infty \psi(s) ds - \varphi(0) \cdot 0 + \\
 &+ \int_0^\infty dt \varphi(t) \psi(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty dt ds \delta(t-s) \varphi(t) \psi(s).
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Следовательно, производная от винеровского процесса W_t есть обобщенный гауссовский процесс с нулевым средним

$$E \{\dot{W}_t\} = 0 \tag{A.18}$$

и δ -функцией Дирака в качестве корреляционной функции:

$$E \{\dot{W}_t \dot{W}_s\} = \delta(t-s). \tag{A.19}$$

Б. МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведем здесь наиболее важные этапы доказательства теоремы (5.52). Существенную роль играет измеримость процесса X_s относительно \mathcal{F}_s , т. е. $X_s^{-1}(B) \in \mathcal{F}_s$ при всех $B \in \mathcal{B}$. Семейство σ -полей \mathcal{F}_s возрастает: $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_s$ при $u < s$. Это означает, что все случайные величины X_u при $t_0 \leq u \leq s$ измеримы относительно \mathcal{F}_s . С другой стороны, по определению $X_u^{-1}(B) \in \mathcal{A}[t_0, s]$ при всех $t_0 \leq u \leq s$, всех $B \in \mathcal{B}$ и $\mathcal{A}[t_0, s]$ — наименьшем под- σ -поле, для которого это верно ($\mathcal{A}[t_0, s]$ — наименьшее под- σ -поле, относительно которого измеримы все случайные величины X_u , $t_0 \leq u \leq s$). Из этих свойств мы заключаем, что все элементы σ -поля $\mathcal{A}[t_0, s]$ принадлежат \mathcal{F}_s . Иначе говоря, \mathcal{F}_s содержит $\mathcal{A}[t_0, s]$: $\mathcal{F}_s \supset \mathcal{A}[t_0, s]$.

Таким образом, достаточно доказать, что вместо (4.2) выполняется более сильное условие

$$P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) = P(V_t \in B | X_s) \quad (\text{почти наверное}). \quad (\text{Б.1})$$

Для того чтобы доказать соотношение (Б.1), рассмотрим ограниченную измеримую функцию $h(x, \omega)$, такую, что $h(x, \cdot)$ — случайная величина, независимая от \mathcal{F}_s при любом заданном x . Для этого класса функций выполняются равенства

$$E\{h(X_s, \omega) | \mathcal{F}_s\} = E\{h(X_s, \omega) | X_s\} = H(X_s), \quad (\text{Б.2})$$

где $H(x) = E\{h(x, \omega)\}$. Доказательство этого факта носит весьма специальный характер и не позволяет сколько-нибудь продвинуться в понимании общей проблемы, поэтому мы его опускаем. Для того чтобы воспользоваться соотношением (Б.2), выберем

$$h(x, \omega) = I_B(X_t(s, x)(\omega)),$$

где $X_t(s, x)$ — (единственное) решение СДУ Ито с начальным условием $X_s = x$. Тогда $X_t(x, s)$ — функция приращений $W_{s+h} - W_s$ винеровского процесса. Так как в качестве начального условия выбрана неслучайная постоянная, $X_t(s, x)$ не зависит от \mathcal{F}_s . (Напомним, что \mathcal{F}_s и \mathcal{M}_s^+ независимы.) Следовательно, величина $h(x, \cdot) = I_B(X_t(s, x))$ также независима от \mathcal{F}_s , и, используя соотношение (5.42), т. е. $X_t = X_t(s, X_s(t_0, x_0)) = X_t(s, X_s)$, получаем: $h(X_s, \omega) = I_B(X_t)$.

Утверждение теоремы (5.52) следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} P(X_t \in B | \mathcal{F}_s) &= E\{I_B(X_t) | \mathcal{F}_s\} = E\{h(X_s, \omega) | \mathcal{F}_s\} = \\ &= E\{h(X_s, \omega) | X_s\} = E\{I_B(X_t) | X_s\} = P(X_t \in B | X_s). \end{aligned}$$

Кроме того, справедливы равенства

$$\begin{aligned} E\{I_B(X_t) | X_s\} &= E\{h(X_s, \omega) | X_s\} = H(X_s) = E\{h(x, \omega)\} |_{x=X_s} = \\ &= E\{I_B(X_t(s, x))(\omega)\} |_{x=X_s} = P(X_t(s, x) \in B) |_{x=X_s}. \end{aligned}$$

Тем самым соотношение для переходной функции доказано.

В. ИСЧИСЛЕНИЕ СТРАТОНОВИЧА СОГЛАСУЕТСЯ С ПРАВИЛАМИ ОБЫЧНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Пусть X_t — решение СДУ Стратоновича

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t \quad (\text{B.1})$$

и $U(x)$ — взаимно однозначная вещественнозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда процесс $Y_t = U(X_t)$ удовлетворяет СДУ Стратоновича

$$\begin{aligned} dY_t &= U'(X_t) f(X_t) dt + U'(X_t) \sigma g(X_t) \circ dW_t = \\ &= U'(U^{-1}(Y_t)) [f(U^{-1}(Y_t)) dt + \sigma g(U^{-1}(Y_t)) \circ dW_t]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Проще всего это можно доказать, если воспользоваться формулой преобразования (5.75) и правилом Ито. Из (5.75) следует, что уравнению (С.1) эквивалентно следующее СДУ:

$$dX_t = \left[f(X_t) + \frac{\sigma^2}{2} g'(X_t) g(X_t) \right] dt + \sigma g(X_t) dW_t.$$

Используя правило Ито (5.45), получаем уравнение

$$\begin{aligned} dY_t &= \left[U'(X_t) f(X_t) + U'(X_t) \frac{\sigma^2}{2} g'(X_t) g(X_t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} U''(X_t) \sigma^2 g^2(X_t) \right] dt + U'(X_t) \sigma g(X_t) dW_t, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

которое можно представить в виде СДУ

$$\begin{aligned} dY_t &= U'(U^{-1}(Y_t)) [f(U^{-1}(Y_t)) dt + \sigma g(U^{-1}(Y_t)) dW_t] + \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} U''(U^{-1}(Y_t)) g^2(U^{-1}(Y_t)) dt + \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} U'(U^{-1}(Y_t)) g'(U^{-1}(Y_t)) g(U^{-1}(Y_t)) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Для того чтобы получить эквивалентное СДУ Стратоновича, прочитаем уравнение (5.75) «в обратную сторону»:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2} U' (U^{-1} (Y_t)) g (U^{-1} (Y_t)) \cdot \frac{\partial}{\partial y} [U' (U^{-1} (y)) g (U^{-1} (y))] |_{y=Y_t} = \\ & = \frac{\sigma^2}{2} U' (U^{-1} (Y_t)) g (U^{-1} (Y_t)) \cdot [U'' (U^{-1} (Y_t)) U^{-1} (Y_t) g (U^{-1} (Y_t)) + \\ & + U' (U^{-1} (Y_t)) g' (U^{-1} (Y_t)) U^{-1} (Y_t)] = \frac{\sigma^2}{2} g (U^{-1} (Y_t)) \times \\ & \times [U'' (U^{-1} (Y_t)) g (U^{-1} (Y_t)) + U' (U^{-1} (Y_t)) g' (U^{-1} (Y_t))], \quad (B.5) \end{aligned}$$

так как $U' (U^{-1}) (y) \cdot U^{-1} (y) = 1$. Следовательно, (B.5) компенсирует второй член в (B.4), и Y_t удовлетворяет СДУ Стратоновича (B.2), что и требовалось доказать.

Г. КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ТЕОРИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Хотя теория среднего поля не согласуется с экспериментальными данными относительно равновесных критических точек именно потому, что пренебрегает пространственными флуктуациями и поэтому была заменена теорией ренормгруппы [6.6], она нередко позволяет получить хорошее описание неравновесных критических точек, по крайней мере в детерминированных условиях. Происходит это потому, что в неравновесных фазовых переходах, например в лазере или в хорошо перемешиваемых химических системах, пространственные флуктуации в действительности *не играют роли*. Хотя классическая теория среднего поля предсказывает одни и те же критические показатели для всех равновесных критических точек, таких, как критическая точка жидкость — газ, ферромагнитная критическая точка и т. д., все ее понятия лучше всего проиллюстрировать на переходе от парамагнетика к ферромагнетику. Параметром порядка для такого перехода является намагниченность образца m . Хорошо известно, что намагниченность обусловлена спином электронов в неполных атомных оболочках. Спины пребывают на наименьшем энергетическом уровне, если все они параллельны (следствие квантового явления, известного под названием «обменного эффекта»). Если температура образца равна нулю, то все спины параллельны, и существует конечная намагниченность — вещество ферромагнитно. Направление вектора намагниченности m не определено: в изотропном случае возможны все направления. С ростом температуры T тепловое движение нарушает идеальную выстроенность спинов. Но при не слишком высоких температурах существует заметная доля спинов, ориентированных в одном и том же направлении. Следовательно, намагниченность

хотя и уменьшится, но не до нуля. Когда же температура T достигнет так называемой критической температуры T_c , доля спинов, ориентированных параллельно, станет ничтожно малой, и намагниченность исчезнет: вещество станет парамагнитным. Мы видим, что при изменении температуры T происходит равновесный переход — возникает критическая точка. Это явление хорошо моделируется с помощью теории среднего поля, которая, несмотря на свои недостатки, качественно правильно описывает важные особенности критических точек. Для ферромагнитной критической точки теория среднего поля предсказывает следующее [6.6]. Спин каждого электрона находится в локальном магнитном поле h' , состоящем из двух частей: внешнего поля h , которое по предположению очень мало, и поля, порождаемого окружающими спинами. В предположении, что среднее значение m спина следует закону Кюри, получаем

$$m = ch'/T, \quad (\text{Г.1})$$

где c — постоянная. Краеугольным камнем теории среднего поля служит предположение о том, что окружающие спины зависят от среднего всех спинов, т. е.

$$h' = h + \mu(m). \quad (\text{Г.2})$$

Предполагая, что $\mu(m)$ допускает разложение в степенной ряд, приходим к формуле

$$h' = h + am - bm^3, \quad (\text{Г.3})$$

где a и b — постоянные, а коэффициенты при четных степенях m равны нулю вследствие симметрии. Комбинируя равенства (Г.1, 3), получаем

$$m \left(1 - \frac{ac}{T} + \frac{cb}{T} m^2 \right) = \frac{ch}{T}. \quad (\text{Г.4})$$

В отсутствие внешнего магнитного поля h критическая точка находится при $T = T_c = ca$ [$m = 0$ — тройной корень кубического уравнения (Г.4)].

Если наложить при $T = T_c$ слабое внешнее поле h , то

$$m = b^{1/3} h^{1/3}. \quad (\text{Г.5})$$

Так как в случае ферромагнетика намагниченность параллельна внешнему полю, постоянная b должна быть положительна. Определим теперь критические показатели и их значения такими, как их предсказывает теория среднего поля.

1. Показатель β : параметр порядка m как функция температуры T при нулевом внешнем поле.

При $h = 0$ и температуре T вблизи критической точки T_c намагниченность зависит от $T - T_c$ по степенному закону, т. е. $m \sim (T_c - T)^\beta$.

Показатель β , описывающий поведение параметра порядка вблизи критической точки, называется критическим показателем. Теория среднего поля предсказывает, что

$$m = \left(\frac{T_c - T}{cb} \right)^{1/2} \quad \text{при } T < T_c, \quad (\Gamma.6)$$

т. е. $\beta = 1/2$.

2. Показатель δ : параметр порядка как функция внешнего поля h при $T = T_c$. Намагниченность зависит от h по степенному закону

$$m \sim h^{1/\delta}. \quad (\Gamma.7)$$

Теория среднего поля предсказывает, что $\delta = 3$.

3. Показатель γ : магнитная восприимчивость $\chi = (\partial m / \partial h)_T$ при $h = 0$ как функция от T . Магнитная восприимчивость χ зависит от $T - T_c$ по степенному закону:

$$\chi \sim \begin{cases} (T - T_c)^{-\gamma}, & T > T_c, \\ (T_c - T)^{-\gamma'}, & T < T_c. \end{cases}$$

Теория среднего поля предсказывает, что

$$\chi = (\partial m / \partial h)_{h=0}(T) \sim \begin{cases} 1/(T_c - T), & T < T_c, \\ 1/(T - T_c), & T > T_c, \end{cases}$$

т. е. $\gamma = \gamma' = 1$.

Приведенные выше значения критических показателей $\beta = 1/2$, $\delta = 3$, $\gamma = \gamma' = 1$ известны как классические показатели.

ЛИТЕРАТУРА

Глава 1

- 1.1. *Kepler J.* *Mysterium Cosmographicum* (1609). Цитировано по кн.: *Sagan C.* *Cosmos*. — N. Y.: Random House, 1980, p. 45.
- 1.2. *Bernard C.* *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*. — Paris: Editions P. Beltond, 1966, p. 116.
- 1.3. *Durkheim E.* *Les formes élémentaires de la vie religieuse*. — Paris: Alcan, 1912.
- 1.4. *Moser J.* *Stable and Unstable Motions in Dynamical Systems*. — Princeton: University Press, 1973.
- 1.5. *Arnold V. I., Avez A.* *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. — N. Y.: Benjamin, 1968. [Имеется частичный перевод: *Арнольд В. И., Авец А. М.* Эргодические проблемы классической механики. — В кн.: *Дискретные и непрерывные динамические системы*. — Владивосток, 1981, с. 42—92.]
- 1.6. *Chirikov B. V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems. — *Phys Rep.*, 1979, 52, 263.
- 1.7. *Helleman R. H. G.* Self-generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics. — In: *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, vol. 5/Ed. by E. G. D. Cohen. — Amsterdam: North-Holland, 1980, p. 165.
- 1.8. *Prigogine I.* *From Being to Becoming*. — San Francisco: Freeman, 1980. [Имеется перевод: *Пригожин И.* От существующего к возникающему. — М.: Наука, 1985.]
- 1.9. *Prigogine I.* Entropy, Time and Kinetic Description. — In: *Order and Fluctuation in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*/Ed. by G. Nicolis, G. Dewel, J. W. Turner. — N. Y.: Wiley, 1981, p. 35.
- 1.10. *Prigogine I., Stengers I.* *La nouvelles alliance. Métamorphose de la science*. — Paris: Editions Gallimard, 1979. [Имеется перевод с американского издания 1984 г.: *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. — М.: Прогресс, 1986.]
- 1.11. *Eigen M.* Selforganization of matter and evolution of biological macromolecules. — *Naturwiss.*, 1971, 64, 541.
- 1.12. *Eigen M., Schuster P.* *The Hypercycle. A Principle of Natural Sciences*. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1979. [Имеется перевод: *Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. — М.: Мир, 1982.]
- 1.13. *Ho M. W., Saunders P. T.* Beyond neo-Darwinism — an epigenetic approach to evolution. — *J. Theor. Biol.*, 1979, 78, 573.
- 1.14. *Glansdorff P., Prigogine I.* *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. — N. Y.: Wiley, 1971. [Имеется перевод: *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — М.: Мир, 1973.]
- 1.15. *Nicolis G., Prigogine I.* *Self-Organization in Nonequilibrium Systems. From Dissipative Structure to Order Through Fluctuations*. — N. Y.: Wi-

- leu, 1977. [Имеется перевод: Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. — Мир, 1973.]
- 1.16. *Bergé P.* Experiments on Hydrodynamical Instabilities and the Transition to Turbulence. — In: Dynamical Critical Phenomena and Related Topics. Lecture Notes in Physics, vol. 104/Ed. by C. P. Enz. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: 1979, p. 288.
 - 1.17. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence. — Comm. Math. Phys., 1971, 20, 167. [Имеется перевод: Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности. — В кн.: Странные аттракторы. — М.: Мир, 1981, с. 117—151.]
 - 1.18. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow. — J. Atmos. Sci., 1963, 20, 130. [Имеется перевод: Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение. — В кн.: Странные аттракторы. — М.: Мир, 1981, с. 88—116.]
 - 1.19. *Rössler O. E.* An equation for continuous chaos. — Phys. Lett., 1976, A77, 397.
 - 1.20. *Rössler O. E.* Chaos and Strange Attractors in Chemical Kinetics. — In: Synergetics Far from Equilibrium. Springer Series in Synergetics, vol. 3/Ed. by A. Pacaut, C. Vidal. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1979, p. 107.
 - 1.21. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor. — Comm. Math. Phys., 1976, 50, 69.
 - 1.22. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. — Comm. Math. Phys., 1980, 74, 189.
 - 1.23. *Coullet P., Tresser C.* Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation. — J. Phys., 1978, C5, 25.
 - 1.24. *Feigenbaum M.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. — J. Stat. Phys., 1978, 19, 25.
 - 1.25. *Feigenbaum M.* The universal metric properties of nonlinear transformations. — J. Stat. Phys., 1979, 21, 669.
 - 1.26. *Feigenbaum M.* The transition to aperiodic behavior to turbulent systems. — Comm. Math. Phys., 1980, 77, 65.
 - 1.27. *Collet P., Eckmann J. P., Lanford O.* Universal properties of maps on an interval. — Comm. Math. Phys., 1980, 76, 211.
 - 1.28. *Collet P., Eckmann J. P., Koch H.* Period doubling bifurcations for families of maps on \mathbb{R}^n . — J. Stat. Phys., 1981, 25, 1.
 - 1.29. *Eckmann J. P.* Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. — Rev. Mod. Phys., 1981, 53, 643.
 - 1.30. *Ott E.* Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems. — Rev. Mod. Phys., 1981, 53, 655.
 - 1.31. *McLaughlin J. B., Martin P. C.* Transition to turbulence in a statistically stressed fluid system. — Phys. Rev., 1975, A12, 186.
 - 1.32. *Manneville P., Pomeau Y.* Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. — Physica, 1980, D1, 219.
 - 1.33. *Levi M.* Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations. — Mem. Am. Math. Soc., 1981, 244, 1.
 - 1.34. *Vidal C., Roux J. C., Bachelart S., Rossi A.* Experimental study of the transition to turbulence in the Belousov — Zhabotinsky reaction — Ann. NY Acad. Sci., 1980, 357, 377.
 - 1.35. *Roux J. C., Swinney H. L.* Topology of Chaos in a Chemical Reaction. — In: Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics/Springer Series in Synergetics, vol. 12/Ed. by C. Vidal, A. Pacault. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 38.
 - 1.36. *Turner J. S., Roux J. C., McCormick W. D., Swinney H.* Alternating periodic and chaotic regimes in a chemical reaction — experiment and theory. — Phys. Lett., 1981, A85, 9.
 - 1.37. *Ahlers G.* Low-temperature studies of the Rayleigh — Bénard instability and turbulence. — Phys. Rev. Lett., 1974, 33, 1185.

- 1.38 Gollub J. P., Swinney H. L. Onset of turbulence in a rotating fluid. — Phys. Rev. Lett., 1975, 35, 927.
- 1.39 Gollub J. P., Benson S. V. Many routes to turbulent convection. — J Fluid Mech., 1980, 100, 449.
- 1.40 Hydrodynamic Instabilities and Transition to Turbulence/Topics Appl. Phys. vol. 45/Ed. by H. L. Swinney, J. P. Gollub. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1978 [Имеется перевод: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Серия «Проблемы прикладной физики». — М.: Мир, 1984.]
- 1.41 Libchaber A., Maurer J. Une expérience de Rayleigh — Bénard de géométrie réduite; multiplication, accrochage et démultiplication de fréquence. — J Phys. Paris, 1980, C3, 51.
- 1.42 Bergé P., Dubois M., Manneville P., Pomeau Y Intermittency in Rayleigh — Benard convection. — J. Phys. Paris Lett., 1980, 41, L341.
- 1.43 Pomeau Y., Roux J. C., Rossi A., Bachelart S. et al., Intermittent behaviour in the Belousov — Zhabotinsky reaction. — J. Phys. Paris Lett., 1981, 42, L271.
- 1.44a. Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics/Springer Series in Synergetics, vol. 12/Ed. by C. Vidal, A. Pacault. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981.
- 1.44b. Vidal C., Bachelart S., Rossi A. Bifurcations en cascade conduisant à la turbulence dans le réaction de Belousov — Zhabotinsky. — J. Phys. Paris, 1982, 43, 7.
- 1.45 Hudson I. L., Mankin J., McCullough J., Lamba P. Experiments in Chaos in a Continuous Stirred Reactor. — In: Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics/Springer Series in Synergetics, vol. 12/Ed. by C. Vidal, A. Pacault — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 44.
- 1.46 Haken H. Laser Theory. Handbuch der Physik/Encyclopedia of Physics, vol. XXV/2c. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1970.
- 1.47 Haken H. Laser Theory. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Spinger, 1983.
- 1.48 Haken H. Introduction to Synergetics. — In: Synergetics. Cooperative Phenomena in Multi-Component Systems/Ed. by H. Haken. — Stuttgart. Teubner, 1973, p. 9.
- 1.49 Graham R. Phase-Transition-Like Phenomena in Laser and Nonlinear Optics. — In: Synergetics. Cooperative Phenomena in Multi-Component Systems/Ed. by H. Haken. — Stuttgart: Teubner, 1973, p. 71.
- 1.50 Graham R. The Phase Transition Concept and Coherence in Atomic Emission. — In: Progress in Optics, vol. 12/Ed. by E. Wolf. — Amsterdam: North-Holland, 1974.
- 1.51 Schlögl F. Chemical reaction models for nonequilibrium phase transition — Zs. Phys., 1972, 235, 147.
- 1.52 Nitzan A., Ortoleva P., Deutch J., Ross J. Fluctuations and transitions at chemical instabilities: the analogy to phase transitions. — J. Chem. Phys., 1974, 61, 1056.
- 1.53 Haken H. Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems. — Rev. Mod. Phys., 1975, 47, 67.
- 1.54 Haken H. Synergetics. An Introduction/Springer Series in Synergetics, vol. 1/2nd ed — Berlin, Heidelberg, N. Y.: 1977. [Имеется перевод: Ха-кен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.]
- 1.55 Graham R. Onset of Cooperative Behavior in Nonequilibrium Steady States. — In: Order and Fluctuations in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics/Ed. by G. Nicolis, G. Dewel, J. Turner. — N. Y.: Wiley, 1981, p. 235.
- 1.56 Walgraef D., Dewel G., Borckmans P. Nonequilibrium phase transitions and chemical instabilities. — Adv. Chem. Phys., 1982, 49, 311.
- 1.57 Gould S. J. The chance that shapes our ends. — New Sci., 1981, 89, 347.

- 1.58a. *Rosenblat S., Cohen D. S.* Periodically perturbed bifurcation I. Simple bifurcation. — Stud. Appl. Math., 1980, 63, 1.
- 1.58b. *Rosenblat S., Cohen D. S.* Periodically perturbed bifurcation II. Hopf bifurcation. — Stud. Appl. Math., 1981, 64, 143.
- 1.59. *Kath W. L.* Resonance in periodically perturbed Hopf bifurcation. — Stud. Appl. Math., 1981, 65, 95.
- 1.60. *Busse F. H.* Nonlinear properties of thermal convection. — Rep. Progr. Phys., 1978, 41, 1929; Transition to Turbulence in Rayleigh — Bénard Convection. — In: Hydrodynamic Instabilities and Transition to Turbulence/Topics Appl. Phys., vol. 45/Ed. by H. L. Swinney, J. P. Gollub. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 97. [Имеется перевод: *Буссе Ф. Г.* Переход к турбулентности в конвекции Рэлея — Бенара — В кн.: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Серия «Проблемы прикладной физики». — М.: Мир, 1984.]
- 1.61. Membranes, dissipative structures, and evolution/Ed. by G. Nicolis, R. Lefever. — Adv. Chem. Phys., 1975, 29.
- 1.62. Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions/Ed. by T. Riste. — N. Y.: Plenum, 1975.
- 1.63. Synergetics. Far from Equilibrium/Springer Series in Synergetics, vol. 3/Ed. by A. Pacault, C. Vidal. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1979.
- 1.64. Bifurcation theory and applications in scientific disciplines/Ed. by O. Gurel, O. E. Röessler. — Ann. NY Acad. Sci., 1979, p. 316
- 1.65. *Fife P. C.* Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems/Lecture Notes in Biomath., vol. 28. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: 1979.
- 1.66. *Keruevez J. P.* Enzyme Mathematics/Studies Math. and Its Applications, vol. 10. — Amsterdam: North-Holland, 1980
- 1.67. Nonlinear dynamics/Ed. by H. G. Helleman. — Ann. NY Acad. Sci., 1980, 357.
- 1.68. Order and Fluctuations in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics/Wiley Series Nonequilibrium Problems in the Physical Sciences and Biology, vol. 1/Ed. by G. Nicolis, G. Dewel, J. M. Turner. — N. Y.: Wiley, 1981.
- 1.69. *Prigogine I.* Modération et transformations irréversibles des systèmes ouverts. — Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg., 1945, 31, 600.
- 1.70. *Prigogine I.* Structure, Dissipation and Life. — In: Theoretical Physics and Biology/Ed. by M. Marois. — Amsterdam: North-Holland, 1969, p. 23.
- 1.71. *Prigogine I.* Etude thermodynamique des phénomènes irréversibles. — Liège: Desoer, 1947.
- 1.72. *Prigogine I.* Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. — N. Y.: Wiley, 1967. [Имеется перевод: *Пригожин И.* Введение в термодинамику неравновесных процессов. — М.: ИЛ, 1960.]
- 1.73. *Minorsky N.* Nonlinear Oscillations. — Huntington: Krieger, 1962.
- 1.74. *Prigogine I., Balescu R.* Phénomènes critiques dans la thermodynamique des processus irréversibles. — Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg., 1956, 42, 256.
- 1.75. *Malek Mansur M., Van den Broek C., Nicolis G., Turner J. W.* Asymptotic properties of Markovian master equations. — Ann Phys. (NY), 1981, 181, 283.
- 1.76. *Nicolis G., Turner J. W.* Stochastic analysis of a nonequilibrium phase transition: some exact results. — Physics, 1977, A89, 326.
- 1.77. *Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И.* Воздействие электрических флуктуаций на ламповый генератор. — ЖЭТФ, 1955, т. 28, в. 5, с. 509.
- 1.78. *Амиантов И. Н., Тихонов В. И.* Отклик нетипичных нелинейных элементов на нормально флуктуирующие входы. — Изв. Отдел. техн. наук АН СССР, 1956, 4, 33.

- 1.79 *Стратонович Р. Л., Ланда П. С.* Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением. — Изв. вузов. Радиофизика, 1959, т. 2, 1, с. 37.
- 1.80 *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
- 1.81 *May R. M.* Stability and Complexity in Model Ecosystems. — Princeton: University Press, 1973.
- 1.82 *Hahn H. S., Nitzan A., Ortoleva P., Ross J.* Threshold excitations, relaxation oscillations and effect of noise in an enzyme reactions. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1974, 71, 4067.
- 1.83 *Kubo R.* A Stochastic Theory of Line-Shape and Relaxation. — In: Fluctuation, Relaxation and Resonance in Magnetic Systems/Ed. by D. Ter Haar. — Edinburgh: Oliver and Boyd, 1962, p. 23.
- 1.84 *Brout R.* Phase Transitions. — N. Y.: Benjamin, 1965.
- 1.85 *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1982.
- 1.86 *Chung K. L.* Elementary Probability Theory with Stochastic Processes. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1979.
- 1.87 *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vols. 1 (3rd ed.), 2 (2nd ed.). — N. Y.: Wiley, 1968, 1971. [Имеется перевод: *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1984.]
- 1.88 *Karlin S., Taylor H. M.* A First Course in Stochastic Processes/2nd ed. — N. Y.: Academic, 1975.
- 1.89 *Mortensen R E* Mathematical problems of modeling stochastic nonlinear dynamic systems. — J. Stat. Phys., 1969, 1, 27.

Глава 2

- 2.1. *Kannan D.* An Introduction to Stochastic Processes. — N. Y.: North-Holland, 1979.
- 2.2. *Arnold L.* Stochastic Differential Equations: Theory and Application. — N. Y.: Wiley, 1974.
- 2.3. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
- 2.4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1977.
- 2.5. *Chandrasekhar S.* Stochastic problems in physics and astronomy. — Rev. Mod. Phys., 1943, 15, 1; перепечатано в кн.: Selected Papers on Noise and Stochastic Processes/Ed. by N. Wax. — N. Y.: Dover, 1954, p. 3. [Имеется перевод: *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. — М. ИЛ, 1947.]
- 2.6. *Hida T.* Brownian Motion. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1980.
- 2.7. *Uhlenbeck G E., Ornstein L. S.* On the theory of Brownian motion. — Phys. Rev., 1930, 36, 823.

Глава 3

- 3.1. *Horsthemke W* Nonequilibrium Transitions induced by External White and Coloured Noise. — In: Dynamics of Synergetics Systems. Springer Series in Synergetics, vol. 6/Ed. by H. Haken. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1980, p. 67.
- 3.2а *Розанов Ю. А.* Случайные процессы. — М.: Наука, 1972.
- 3.2б *Гельфанд И. М., Шилев Г. Е.* Обобщенные функции, вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
- 3.3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. — М.: Наука, 1971.

Глава 4

- 4.1. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 2. — М.: Наука, 1972.
- 4.2. Doob J. L. The Brownian movement and stochastic equations. — Ann. Math., 1942, 43, 351.
- 4.3. Maruyama T. Stochastic Problems in Population Genetics/Lecture Notes in Biomath., vol. 17. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1977.
- 4.4. Hänggi P., Thomas H., Grabert H., Talkner P. Note on time evolution of non-Markov processes. — J. Stat. Phys., 1978, 18, 155.
- 4.5. Pawula R. F. Generalization and extensions of the Fokker-Planck-Kolmogorov equations. — IEEE Trans. Inform. Theory, 1967, IT-13, 33.
- 4.6. Pawula R. F. Approximation of the linear Boltzmann equation by the Fokker — Planck equation. — Phys. Rev., 1967, 162, 186.
- 4.7. Hänggi P. Correlation functions and master equations of generalized (non-Markovian) Langevin equations. — Zs. Phys., 1978, B31, 407.
- 4.8. Tuckwell H. C. Synaptic transmission in a model for stochastic neural activity. — J. Theor. Biol., 1979, 77, 65.
- 4.9. Tuckwell H. C. Poisson Processes in Biology. — In: Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology/Springer Series in Synergetics, vol. 8/Ed. by L. Arnold, R. Lefever. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 162.
- 4.10. Holden A. V. Models of the Stochastic Activity of Neurons/Lecture Notes in Biomath., vol. 12. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: 1976.
- 4.11. Hänggi P., Shuler K. E., Oppenheim I. On the relations between Markovian master equations and stochastic differential equations. — Physica, 1981, A107, 143.

Глава 5

- 5.1. Doob J. L. Stochastic Processes. — N. Y.: Wiley, 1953. [Имеется перевод: Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956.]
- 5.2. Ito K. On a formula concerning stochastic differentials. — Nagoya Math. J., 1951, 3, 55.
- 5.3. Stratonovich R. L. A new representation for stochastic integrals and equations. — SIAM J. Control, 1966, 4, 362.
- 5.4. Ito K. Stochastic differential equations on a differentiable manifold. — Nagoya Math. J., 1950, 1, 35.
- 5.5. Gray A. H., Caughey T. K. A controversy in problems involving random parametric excitation. — J. Math. Phys., 1965, 44, 288.
- 5.6. Strook D. W., Varadhan S. R. S. Multidimensional Diffusion Processes. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1979.
- 5.7. McKean H. P. Stochastic Integrals. — N. Y.: Academic, 1969.
- 5.8. Wong E., Zakai M. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. — Ann. Math. Stat., 1965, 36, 1560.
- 5.9. Blankenship G., Papanicolaou G. C. Stability and control of stochastic systems with wide-band noise disturbances. — SIAM J. Appl. Math., 1978, 34, 347.
- 5.10. van Kampen N. G. Itô versus Stratonovich. — J. Stat. Phys., 1981, 24, 175.
- 5.11. Jazwinski A. H. Stochastic Processes and Filtering Theory. — N. Y.: Academic, 1970.
- 5.12. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наукова думка, 1968.
- 5.13. Bharucha-Reid A. T. Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. — N. Y.: McGraw-Hill, 1960.
- 5.14. Karlin S., Taylor M. A Second Course in Stochastic Processes. — N. Y.: Academic, 1981.

Глава 6

- 6.1 *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958.
- 6.2 *Nicolis G., Lefever R.* Comment on the kinetic potential and the Maxwell construction in nonequilibrium chemical phase transition. — *Phys. Lett.*, 1977, **A62**, 469.
- 6.3 *Landauer R.* Fluctuations in bistable tunnel diode circuits. — *J. Appl. Phys.*, 1962, **33**, 2209.
- 6.4 *Thom R.* Stabilité structurelle et morphogénèse. — Paris: Ediscience, 1973; Structural Stability and Morphogenesis. — Reading: Benjamin, 1975.
- 6.5 *Poston T., Stewart I.* Catastrophe Theory and Its Applications. — L.: Pitman, 1978. [Имеется перевод: *Постон Т., Стюарт Я.* Теория катастроф и ее приложения. — М.: Мир, 1980.]
- 6.6 *Ma S. K.* Modern Theory of Critical Phenomena. — Reading: Benjamin, 1976. [Имеется перевод: *Ма С. К.* Современная теория критических явлений. — М.: Мир, 1980.]
- 6.7 *Horsthemke W., Malek Mansour M.* The influence of external noise on nonequilibrium phase transitions. — *Zs. Phys.*, 1976, **B24**, 307.
- 6.8 *Arnold L., Horsthemke W., Lefever R.* White and coloured external noise and transition phenomena in nonlinear systems. — *Zs. Phys.*, 1978, **B29**, 867.
- 6.9 *Ebeling W.* Nonequilibrium transitions and stationary probability distributions of stochastic processes. — *Phys. Lett.*, 1978, **A68**, 430.
- 6.10 *Goel N. S., Richter-Dyn N.* Stochastic Models in Biology. — N. Y.: Academic, 1974.
- 6.11 *Karlin S., Lieberman U.* Random temporal variation in selection intensities: case of large population size. — *Theor. Popul. Biol.*, 1974, **6**, 355.
- 6.12 *Levikson B., Karlin S.* Random temporal variation in selection intensities acting on infinite diploid population: diffusion method analysis. — *Theor. Popul. Biol.*, 1975, **8**, 292.
- 6.13 *Gillepsie J. H.* Polymorphism in patchy environments. — *Am. Nat.*, 1974, **108**, 145.
- 6.14 *Gillepsie J. H.* The role of the environmental grain in the maintenance of genetic variation. — *Am. Nat.*, 1974, **108**, 831.
- 6.15 *Gillepsie J. H.* The role of migration in the genetic structure of populations in temporally and spatially varying environments II Island Models. — *Theor. Popul. Biol.*, 1976, **10**, 227.
- 6.16 *Gillepsie J. H., Langley C.* Multi-locus behavior in random environments I. Random Levene models. — *Genetics*, 1976, **82**, 123.
- 6.17 *Ewens W. J.* Mathematical Population Genetics/Biomathematics, vol. 9. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1979.
- 6.18 *Kimura M., Ohta T.* Theoretical Aspects of Population Genetics. — Princeton: University Press, 1971.
- 6.19 *Hongler M. O.* Exact time dependent probability density for a nonlinear non-Markovian stochastic process. — *Helv. Phys. Acta*, 1979, **52**, 280.
- 6.20 *Elliott J.* Eigenfunction expansions associated with singular differential operators. — *Trans. Am. Math. Soc.*, 1955, **78**, 406.
- 6.21 *Courant R., Hilbert D.* Methoden der mathematischen Physik, Bd. I. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1968. [Имеется перевод: *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т. 1. — М.: Гостехиздат, 1951.]
- 6.22 *Yosida K.* Lectures on Differential and Integral Equations. — N. Y.: Interscience, 1960.
- 6.23 *Coddington E. A., Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. — N. Y.: McGraw-Hill, 1955. [Имеется перевод: *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.]

- 6.24. *Hille E.* Lectures on Ordinary Differential Equations. — Reading: Addison-Wesley, 1969.
- 6.25. *Wong E.* The construction of a class of stationary Markoff processes. — Proc. Symp. Appl. Math., 1964, 16, 264.
- 6.26. *Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions, vols. 1, 2. — N. Y.: McGraw-Hill, 1953 [Имеется перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1, 2. — М.: Наука, 1973.]
- 6.27. *Prajneshu.* Time-dependent solution of the logistic model for population growth in random environment. — J. Appl. Prob., 1980, 17, 1083.
- 6.28. *Schenzle A., Brand H.* Multiplicative stochastic processes in statistical physics. — Phys. Lett., 1979, A69, 313; Phys. Rev., 1979, A20, 1628.
- 6.29. *Suzuki M., Kaneko K., Sasagawa F.* Phase transition and slowing down in nonequilibrium stochastic processes. — Prog. Theor. Phys., 1981, 65, 828.
- 6.30. *Horsthemke W.* Noise-Induced Transitions. — In: Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology/Springer Series in Synergetics, vol. 8/Ed. by L. Arnold, R. Lefever. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 116.
- 6.31. *Fujisaka H., Grossman S.* External noise effects on the fluctuation line width. — Zs. Phys., 1981, B43, 69.
- 6.32. *Brenig L., Fairen V.* Analytical approach to initial-value problems in nonlinear systems. — J. Math. Phys., 1981, 22, 649.
- 6.33. *Brenig L., Banai N.* Nonlinear dynamics of systems coupled with external noise: some exact results — Physica, 1982, D5, 208.
- 6.34. *Graham R., Schenzle A.* Carleman imbedding of multiplicative stochastic processes. — Phys. Rev., 1982, A25, 1731.
- 6.35. *Hongler M. O.* Diffusion in a class of double-well potentials — Exact results. — Phys. Lett., 1982, 91A, 396.
- 6.36. *Hongler M. O., Zheng W. M.* Exact solution for the diffusion in bistable potentials. — J. Stat. Phys., 1982, 29, 317.

Глава 7

- 7.1. *Kabashima S., Kawakubo T.* Observation of a noise induced phase transition in a parametric oscillator. — Phys. Lett., 1970, A70, 375.
- 7.2. *Kabashima S., Kogure S., Kawakubo T., Okada T.* Oscillatory to non-oscillatory transition due to external noise in parametric oscillator. — J. Appl. Phys., 1979, 50, 6296.
- 7.3. *Kaboshima S.* Observation of phase transition due to external fluctuations (не опубликовано).
- 7.4. *Tyson J. J.* The Belousov — Zhabotinskii Reaction/Lecture Notes in Biomath., vol. 10. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1976.
- 7.5. *Tyson J. J., Fife P. C.* Target patterns in a realistic model of the Belousov — Zhabotinskii reaction. — J. Chem. Phys., 1980, 73, 2224.
- 7.6. *Smoes M. L.* Chemical Waves in the Oscillatory Zhabotinskii System. A Transition from Temporal to Spatio-Temporal Organization. — In: Dynamics of Synergetic Systems/Springer Series in Synergetics, vol. 6/Ed. by H. Haken. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1980, p. 80. [Имеется перевод: Смоэс М. Химические волны в колебательной системе Жаботинского. Переход от временной организации к пространственно-временной. — В кн.: Синергетика. — М.: Мир, 1984, с. 139—163.]
- 7.7. *Winfree A.* The Geometry of Biological Time/Biomathematics, vol. 8. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1980.
- 7.8. *De Kepper P., Horsthemke W.* Etude d'une réaction chimique périodique. Influence de la lumière et transitions induites par un bruit externe. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1978, C287, 251.
- 7.9. *De Kepper P., Horsthemke W.* Experimental Evidence of Noise-Induced Transition in an Open Chemical System. — In: Synergetics Far from

- Equilibrium/Springer Series in Synergetics, vol. 3/Ed. by A. Pacault, C. Vidal. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1979, p. 61.
- 7.10. *De Kepper P.* Contribution à l'étude expérimentale de systèmes dissipatifs chimiques: réactions oscillantes de Briggs-Rauscher et de Belousov — Zhabotinskii/Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux, 1, 1978.
 - 7.11. *Graham R., Haken H.* Laser light — first example of a second-order phase transition far away from thermal equilibrium. — *Zs. Phys.*, 1970, 237, 31.
 - 7.12. *De Giorgio V., Scully M. O.* Analogy between the laser threshold region and a second-order phase transition. — *Phys. Rev.*, 1970, A2, 1170.
 - 7.13. *Haken H.* Generalized Ginzburg — Landau equations for phase transitions like phenomena in lasers, nonlinear optics, hydrodynamics and chemical reactions. — *Zs. Phys.*, 1975, B21, 105.
 - 7.14. *Arrechi F. T.* Experimental Aspects of Transition Phenomena in Quantum Optics. — In: *Order and Fluctuations in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*/Ed. by G. Nicolis, G. Dewel, J. W. Turner. — N. Y.: Wiley, 1981.
 - 7.15. *Gibbs H. M., McCall S. L., Venkatesan T. N. C.* Differential gain and bistability using a sodium-filled Fabry — Perot interferometer. — *Phys. Rev. Lett.*, 1976, 36, 1135.
 - 7.16. *Agarwal G. P., Carmichael H. J.* Optical bistability through nonlinear dispersion and absorption. — *Phys. Rev.*, 1979, A19, 2074.
 - 7.17. *Bonifacio R., Lugiato L. A.* Optical bistability and cooperative effects in resonance fluorescence. — *Phys. Rev.*, 1978, A18, 1129.
 - 7.18. *Bulsara A. R., Schieve W. C., Gragg R. F.* Phase transitions induced by white noise in bistable optical systems. — *Phys. Lett.*, 1978, A68, 294.
 - 7.19. *Gragg R. F.* Stochastic Switching in Absorptive Optical Bistability/Ph. D. Thesis. — Austin: University of Texas, 1981.
 - 7.20. *Arrechi F. T.* Transition Phenomena in Nonlinear Optics. — In: *Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology*/Springer Series in Synergetics, vol. 8/Ed. by L. Arnold, R. Lefever. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 222.
 - 7.21. *de la Rubia J., Velarde M. G.* Further evidence of a phase transition induced by external noise. — *Phys. Lett.*, 1978, A69, 304.
 - 7.22. *Levins R.* The effect of random variations of different types on population growth. — *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1969, 62, 1055.
 - 7.23. *Lewontin R. C., Cohen D.* On population growth in a randomly varying environment. — *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1969, 62, 1056.
 - 7.24. *Ludwig D.* Optimal harvesting of a randomly fluctuating resource I: application of perturbation methods. — *SIAM J. Appl. Math.*, 1979, 37, 166.
 - 7.25. *Ludwig D., Varah J. M.* Optimal harvesting of a randomly fluctuating resource II: numerical methods and results. — *SIAM J. Appl. Math.*, 1979, 37, 185.
 - 7.26. *White B. S.* The effect of a rapidly-fluctuating random environment on systems of interacting species. — *SIAM J. Appl. Math.*, 1977, 32, 666.
 - 7.27. *Lefever R., Horsthemke W.* Bistability in fluctuating environments. Implications in tumor immunology. — *Bull. Math. Biol.*, 1979, 41, 469.
 - 7.28. *Ludwig D., Jones D. D., Holling C. S.* Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest. — *J. Anim. Ecol.*, 1978, 47, 315.
 - 7.29. *Garay R. P., Lefever R.* A kinetic approach to the immunology of cancer: stationary state properties of effector-target cell reactions. — *J. Theor. Biol.*, 1978, 73, 417.
 - 7.30. *Lefever R., Garay R.* Local Description of Immune Tumor Rejection. — In: *Biostatistics and Cell Kinetics*/Ed. by A. J. Valleron, P. O. M. MacDonald. — Amsterdam: North-Holland, 1978, p. 333.
 - 7.31. *Horsthemke W., Lefever R.* Phase transition induced by external noise. — *Phys. Lett.*, 1977, A64, 19.

- 7.32a. *Lefever R.* Dynamics of Cell-Mediated Immune Response. — In: Dynamics of Synergetic Systems/Springer Series in Synergetics, vol. 6/Ed. by H. Haken. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1980, p. 205.
- 7.32b. *Lefever R.* Noise-Induced Transitions in Biological Systems. — In: Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology/Springer Series in Synergetics, vol. 8/Ed. by L. Arnold, R. Lefever. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 127.
- 7.33. *Micheau J. C., Boue S., Van der Donckt E.* Theoretical kinetic analysis of biphotonic processes: evidence for the unusual but feasible occurrence of multistationary states and chemical oscillations. — J. Chem. Soc. Faraday Trans. 2, 1982, 78, 39.
- 7.34. *Micheau J. C., Horsthemke W., Lefever R.* Sensitivity of biphotonic systems to light intensity fluctuations: experimental evidence in the thermoluminescence of fluorescein in boric acid glass. — J. Chem. Phys. (в печати).
- 7.35. *Lesclaux F., Ohayon S., Joussot-Dubien J.* Contribution à l'étude de la luminescence différée de colorants en milieu rigide. Photoionisation de la fluoresceine dans l'acide borique par un processus à deux photons. — Photochem. Photobiol., 1970, 11, 401.
- 7.36. *Walentynowicz E.* Thermoluminescence of fluorescein in boric acid glass. — Acta Phys. Pol., 1966, 29, 713.
- 7.37. *Dung M. H., Kozak J. J.* Analysis of mechanisms for the cyclic cleavage of water by visible light. — J. Photochem., 1981, 16, 121.
- 7.38. *Nitzan A., Ross J.* Oscillations, multiple steady states, and instabilities in illuminated systems. — J. Chem. Phys., 1973, 59, 241.
- 7.39. *Nitzan A., Ortoleva P., Ross J.* Symmetry breaking instabilities in illuminated systems. — J. Chem. Phys., 1974, 60, 3194.
- 7.40. *Creel C. L., Ross J.* Multiple stationary states and hysteresis in a chemical reactions. — J. Chem. Phys., 1976, 65, 3779.
- 7.41. *Lefever R., Horsthemke W.* Multiple transitions induced by light intensity fluctuations in illuminated chemical systems. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1979, 76, 2490.

Глава 8

- 8.1. *Arnold L., Kliemann W.* Qualitative Theory of Stochastic Systems. — In: Probabilistic Analysis and Related Topics, vol. 3/Ed. by A. Bharucha — Reid. — N. Y.: Academic, 1981.
- 8.2. *Graham R., Haken H.* Generalized thermodynamic potential for Markoff systems in detailed balance and far from thermal equilibrium. — Zs. Phys., 1971, 243, 289.
- 8.3. *Graham S., Haken H.* Fluctuations and stability of stationary nonequilibrium systems in detailed balance. — Zs. Phys., 1971, 141, 245.
- 8.4. *Graham S.* Stochastic Methods in Nonequilibrium Thermodynamics. — In: Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology/Springer Series in Synergetics, vol. 8/Ed. by L. Arnold, R. Lefever. — Berlin, Heidelberg, N. Y., Springer, 1981, p. 202.
- 8.5. *Bunke H.* Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern. — Berlin: Akademie, 1972.
- 8.6. *Horsthemke W., Lefever R.* A perturbation expansion for external wide band Markovian noise: application to transitions induced by Ornstein — Uhlenbeck noise. — Zs. Phys., 1980, B40, 241.
- 8.7. *Sancho J. M., San Miguel M.* External non-white noise and nonequilibrium phase transitions. — Zs. Phys., 1980, B36, 357.
- 8.8. *San Miguel M., Sancho J. M.* A coloured-noise approach to Brownian motion in position space. Corrections to the Smoluchowski equations. — J. Stat. Phys., 1980, 22, 605.

- 8.9. *San Miguel M., Sancho J. M.* Multiplicative Ornstein — Uhlenbeck Noise in Nonequilibrium Systems. — In: *Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology/Springer Series in Synergetics*, vol. 8/Ed. by L. Arnold, R. Lefever. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 137.
- 8.10. *San Miguel M., Sancho J. M.* Theory of nonlinear Gaussian noise. — *Zs. Phys.*, 1981, B43, 361
- 8.11. *Хасьминский П. Э.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
- 8.12. *van Kampen N. G.* Stochastic differential equations. — *Phys. Rep.*, 1976, 24, 171.
- 8.13. *Kubo R.* Stochastic Liouville equations. — *J. Math. Phys.*, 1963, 4, 174.
- 8.14. *Fox R. F.* Gaussian stochastic processes in physics. — *Phys. Rep.*, 1978, 48, 179.
- 8.15. *San Miguel M.* A class of exactly solvable Fokker Planck equations. — *Zs. Phys.*, 1979, B33, 307.
- 8.16. *Новиков Е. А.* Метод случайных сил в теории турбулентности. — *ЖЭТФ*, 1963, т. 44, вып. 6, 2159.
- 8.17. *Martin P. C., Siggia E. D., Rose H. A.* Statistical dynamics of classical systems. — *Phys. Rev.*, 1973, A8, 423.
- 8.18. *Garrido L., San Miguel M.* Response and correlation in Fokker — Planck dynamics. I and II. — *Progr. Theor. Phys.*, 1978, 59, 40, 55.
- 8.19. *Brand H., Schenzle A.* Comment on «Effect of white noise on electrohydrodynamic instabilities in nematics». — *J. Phys. Soc. Japan*, 1980, 48, 1382.
- 8.20. *Lefever R., Horsthemke W.* Critical Exponents of a Pure Noise Induced Transitions, Nonlinear Noise and Its Effect on Electrodynamical Transition in Nematics. — In: *Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics/Springer Series in Synergetics*, vol. 12/Ed. by C. Vidal, A. Pacault. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 120.
- 8.21. *Chandrasekhar S.* Liquid Crystals. — Cambridge: University Press, 1977. [Имеется перевод: *Чандрасекар С.* Жидкие кристаллы. — М.: Мир, 1980.]
- 8.22. *Deuling H. J.* Elasticity of nematic liquid crystals. — *Solid State Phys. Suppl.*, 1978, 14, 47.
- 8.23. *Guyon E.* Second-order phase transitions: models and analogies. — *Am. J. Phys.*, 1975, 43, 877.
- 8.24. *De Gennes P. G.* The Physics of Liquid Crystals. — Oxford: Clarendon, 1974 [Имеется перевод: *де Жен П.* Физика жидких кристаллов. — М.: Мир, 1977.]
- 8.25. *Kai S., Kai T., Takata M., Hirakawa K.* Effect of the white noise on electrohydrodynamic transitions in nematics. — *J. Phys. Soc. Japan*, 1979, 47, 1379.
- 8.26. *Kawakubo T., Yanagita A., Kabashima S.* External noise effect on the onset of Williams domain in nematic liquid crystals. — *J. Phys. Soc. Japan*, 1981, 50, 1451.
- 8.27. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. — Oxford: Clarendon, 1961.
- 8.28. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972.
- 8.29. *Koschmieder E. L.* Bénard convection. — *Adv. Chem. Phys.*, 1974, 26, 177.
- 8.30. *Palm E.* Nonlinear thermal convection. — *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1975, 7, 39.
- 8.31. *Normand C., Pomeau Y., Velarde M. G.* Convective instability: A physicist's approach. — *Rev. Mod. Phys.*, 1977, 49, 581.
- 8.32. *Busse F. H.* Nonlinear properties of thermal convection. — *Rep. Prog. Phys.*, 1978, 41, 1929
- 8.33. *Busse F. H.* Transition to Turbulence in Rayleigh — Bénard Convection. — In: *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*

- ce/Topics Appl. Phys., vol. 45/Ed. by H. L. Swinney, J. P. Gollub. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer, 1981, p. 97. [Имеется перевод: Буссе Ф. Г. Переход к турбулентности в конвекции Рэлея — Бенара. — В кн.: Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности./Серия «Проблемы прикладной физики». — М.: Мир, 1984, с. 124—168.]
- 8.34. Joseph D. D. Stability of Fluid Motions/Springer Tracts Nat. Philosophy, vols. 27, 28. — Berlin, Heidelberg, N. Y.: 1976 [Имеется перевод: Джозеф Д. Д. Устойчивость движений жидкости. — М.: Мир, 1981.]
- 8.35. Kai S., Hirakawa K. Successive transitions in electrohydrodynamic instabilities of nematics. — Suppl. Prog. Theor. Phys., 1978, 64, 212.
- 8.36. Williams R. Domains in liquid crystals. — J Chem. Phys., 1963, 39, 384.
- 8.37. Dubois-Violette E., de Gennes P. G., Parodi O. Hydrodynamic instabilities of nematic liquid crystals under a c. electric field. — J. Phys. Paris, 1971, 32, 305.
- 8.38. Куфер Ю. И. Некоторые теоремы о малых случайных возмущениях динамических систем. — УМН, 1974, т. 29, вып. 3, с. 205.
- 8.39. Zippelius A., Lucke M. The effect of external noise in the Lorentz model of the Bénard problem. — J. Stat. Phys., 1981, 24, 345.
- 8.40. Crutchfield J. P., Huberman B. A. Fluctuations and the onset of chaos. — Phys. Lett., 1980, A77, 407.
- 8.41. Mayer — Kress G., Haken H. The influence of noise on logistic model. — J. Stat. Phys., 1981, 26, 149.
- 8.42. Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J. Scaling for external noise at the onset of chaos. — Phys. Rev. Lett., 1981, 46, 933.
- 8.43. Shraiman B., Wayne C. E., Martin P. C. Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos. — Phys. Rev. Lett., 1981, 46, 935.
- 8.44. Mayer — Kress G., Haken H. Intermittent behavior of the logistic system. — Phys. Lett., 1981, A82, 151.
- 8.45. Eckmann J.-P., Thomas L., Wittwer P. Intermittency in the presence of noise. — J. Phys., 1981, A14, 3153.
- 8.46. Hirsch J. E., Huberman B. A., Scalapino D. J. Theory of intermittency. — Phys. Rev., 1982, A25, 519.
- 8.47. Vinen W. F. Nortex Lines in Liquid Helium II. — In: Progress Low Temperature Physics, vol. 3/Ed. by C. J. Gorter. — Amsterdam: North-Holland, 1961, p. 1.
- 8.48. Childers R. K., Tough J. T. Helium II thermal counterflow: temperature and pressure-difference data and analysis in terms of the Vinen theory. — Phys. Rev., 1976, B13, 1040.
- 8.49. Moss F., Welland G. V. Multiplicative noise in the Vinen equation for turbulent superfluid ^4He . — Phys. Rev., 1982, A25, 3389.
- 8.50. Brandt D., Moss F., Welland G. A new model for superfluid helium turbulence: yet another example of bistability (не опубликовано).

Глава 9

- 9.1. Kitahara K., Horsthemke W., Lefever R. Coloured-noise-induced transitions: exact results for external dichotomous Markovian noise. — Phys. Lett., 1979, A70, 377.
- 9.2. Kitahara K., Horsthemke W., Lefever R., Inaba Y. Phase diagrams of noise induced transitions. Exact results for a class of external coloured noise. — Prog. Theor. Phys., 1980, 64, 1233.
- 9.3. Pawula R. F. The probability density and level-crossings of first order nonlinear systems driven by the random telegraph signal. — Int. J. Control, 1977, 25, 283.

- 9.4 *Hodgkin A. Huxley A. F.* Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of *Loligo*. — *J. Physiol. London*, 1952, **116**, 449.
- 9.5 *Katz B.* Nerve, Muscle and Synapse. — N. Y.: McGraw-Hill, 1966.
- 9.6 *Horsthemke W., Lefever R.* Voltage-noise induced transitions in electrically excitable membranes. — *Biophys. J.*, 1981, **35**, 415.
- 9.7 *Narahashi J., Moore J. W., Scott W. R.* TTX blockade of sodium conductance increase in lobster giant axons. — *J. Gen. Physiol.*, 1969, **47**, 965.
- 9.8 *Tasaki J., Hagiwara S.* Demonstration of two stable potential states in squid giant axon under tetraethylammonium chloride. *J. Gen. Physiol.*, 1957, **40**, 851.
- 9.9 *Armstrong C. M., Bezanilla F., Rojas E.* Destruction of sodium inactivation in squid axons perfused with pronse. — *J. Gen. Physiol.*, 1973, **62**, 375.
- 9.10 *Conti F., Wanke E.* Channel noise in nerve membranes and lipid bilayers. — *Quart. Rev. Biophys.*, 1975, **8**, 451.
- 9.11 *Stevens C. F.* Study of membrane permeability changes by fluctuation analysis. — *Nature*, 1977, **270**, 391.
- 9.12 *de Goede J., Verveen A. A.* Electrical Membrane Noise; Its Origin and Interpretation. — In: *Electrical Phenomena at the Biological Membrane Level*/Ed. by E. Roux. — Amsterdam: Elsevier, 1977, p. 337.
- 9.13 *Begenisich I., Stevens C. F.* How many conductance states do potassium channels have? — *Biophys. J.*, 1975, **15**, 843.
- 9.14 *Sigworth F. J.* Sodium channels in nerve apparently have two conductance states. — *Nature*, 1977, **270**, 265.
- 9.15 *Changeux J. P., Thierry J., Tung Y., Kittel C.* On the cooperativity of biological membranes. — *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1967, **57**, 335.
- 9.16 *Blumenthal R., Changeaux J. P., Lefever R.* Membrane excitability and dissipative instabilities. — *J. Membr. Biology*, 1970, **2**, 351.
- 9.17 *Kijima H., Kijima S.* Cooperative response of chemically excitable membrane. — *J. Theor. Biol.*, 1978, **71**, 567.

Глава 10

- 10.1 *Bull J. J., Vogt R. T.* Temperature-dependent sex determination in turtles. — *Science*, 1979, **206**, 1186.
- 10.2 *Donnelly R. J., Park K., Shaw R., Walden R. W.* Early nonperiodic transitions in Couette flow. — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**, 987.
- 10.3 *Ahlers G., Behringer R. P.* Evolution of turbulence from Rayleigh-Bénard instability. — *Phys. Rev. Lett.*, 1978, **40**, 712.
- 10.4 *Ahlers G., Walden R. W.* Turbulence near onset of convection. — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**, 445.
- 10.5 *Gorman M., Reith L. A., Swinney H. L.* Modulation patterns, multiple frequencies, and other phenomena in circular Couette flow. — *Ann. NY Acad. Sci.*, 1980, **357**, 10.
- 10.6 *de la Rubia F. J., Garcia Sanz J., Velarde M. G.* Role of Multiplicative Nonwhite Noise in Nonlinear Surface Catalytic Reaction. — In: *Nonlinear Stochastic Problems*/Ed. by R. Bucy, J. M. F. Moura. — Dordrecht: Reidel, 1982.
- 10.7 *Mikhailov A. S.* Noise-induced phase transition in a biological system with diffusion. — *Phys. Lett.*, 1979, **A73**, 143.
- 10.8 *Mikhailov A. S.* Effects of diffusion in fluctuating media: a noise-induced phase transition. — *Zs. Phys.*, 1981, **B41**, 277.
- 10.9 *Михайлов А. С., Уноров И. В.* Индуцированный шумом фазовый переход и перколяционная задача для флуктуирующих сред с диффузией. — *ЖЭТФ*, 1980, т. 79, с. 1958.

- 10.10. *Mikhailov A. S., Uporov I. V.* Diffusion on the fluctuating random surface. — *Physica*, 1982, **A112**, 588.
- 10.11. *Arnold L., Horsthemke W., Stucki J. W.* The influence of external white noise on the Lotka — Volterra model. — *Biom. J.*, 1979, **21**, 451.

Литература, добавленная при переводе

- 1*. *Асташкина Е. В., Михайлов А. С., Толстопятенко А. В.* — Изв. вузов, Радиофизика, 1981, т. 24, с. 1035.
- 2*. *Быков В. И., Михайлов А. С., Упоров И. В.* — ЖФХ, 1981, т. 55, с. 505.
- 3*. *Иванов С. А., Романовский Ю. М.* — Радиотехника и электроника, 1963, № 8, с. 1397.
- 4*. *Михайлов А. С.* — ДАН СССР, 1978, т. 243, с. 786.
- 5*. *Михайлов А. С., Упоров И. В.* — УФН, 1984, т. 144, с. 79.
- 6*. *Полак Л. С., Михайлов А. С.* Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. — М.: Наука, 1983, гл. 6: Влияние флуктуаций внешних полей на кинетику неравновесных химических реакций.
- 7*. *Стратонович Р. Л., Романовский Ю. М.* — Научн. докл. высшей школы, 1983, № 3, с. 161; № 4, с. 110.
- 8*. *Mikhailov A. S., Schimansky-Geier L., Ebeling W.* — *Phys. Lett.*, 1983, v. 96A, p. 453.

Предметный указатель

- Адиабатическое исключение 289
Аксон *Ходжкина* — *Хаксли* 352—362
— — — свойства стационарные 357
Аллели 182—185
Альтернатива *Фредгольма* 276—279,
284, 288, 301
- Бистабильность оптическая 231—
237
Борелевское σ -поле 46, 65
Броуновское движение 69—79
- Вероятностная мера 48
Вероятностное пространство 42—63
Вероятность вымирания популяции
168
— условная 57
Взаимодействие в системе еловый
почкост/лес 238
Воздействие дихотомическое периоди-
ческое силовое 348—350
Возмущение сингулярное 297
Время взрыва 129
— корреляции 82
— характерное макроскопическое 82
Вязкость эффективная 315
- Генератор параметрический 216
Генетическая система под действием
D-шума 340
Гетерозиготы 185
Гистерезис 253, 257
Гомозиготы 185
- Граница *Гихмана* — *Скорехода* (ГС)
146, 147, 176, 280, 281
— естественная 146
— поглощающая 146
— притягивающая 146
— регулярная 146
— *Феллера* (Φ) 146, 147, 199, 201,
208, 280—282, 284
Границы достижимые 145
- Дельта-функция *Дирака* 38, 88, 89,
245, 290, 299, 367, 369
Диаграмма бифуркационная 23
— — для фазового перехода второго
рода 23
— — — — — первого рода 25
Динамика переходов, индуцирован-
ных шумом 202
- Директор 303
Дисперсия 219
Дифференциал стохастический 127
Доказательство *Маккина* 133
Домены *Вильямса* 312, 313
D-шум 347
- Жидкие кристаллы нематические
303—311
- Задача *Штурма* — *Лиувилля* 189—
196, 198, 203
Законы *Бойля* — *Мариотта* 13
— *Кюри* 373
— поглощения *Ламберта* — *Бэра* 246
Запаздывающее отражение на грани-
це 255

- Иммунная система 243
 Интеграл *Ито* 122—128, 135—138
 — — определение 125
 — *Лебега* 39, 123
 — *Римана* 39, 117, 120, 122, 123, 127
 — *Стратоновича* 122
 — — определение 135—138
 — — стохастический 134—142
 — *Фурье* 84
 Интенсивности шума критические 257
 Интенсивность испущенного света 248
 — падающего света постоянная 227
 — — — флуктуирующая 227
 — шума 223, 224

 Канонический выбор 65
 Катастрофа типа сборки 179
 Классификация границ *Гихмана* —
 Скорохода 146, 147
 — — *Феллера* 146
 — граничных условий *Гихмана* —
 Скорохода 146, 147
 — — — *Феллера* 146
 Клетка цитотоксическая 244
 Клетки сингенные 244
 Кристалл нематический 305
 Критерий *Колмогорова* 67, 71, 77
 Критическая точка, индуцированная шумом 175—180
 Культура *Klebsiella aerogenes* 235

 Лемма *ван Кампена* 293

 Мартингал 127
 Математическое ожидание 51
 Мембраны аксонной отклик 351
 — электровозбудимые 350
 Метод быстрого спуска 159
 — *Вонга* 200
 — *Прюфера*, уравнение *Штурма* —
 Лиувилля 211
 Механизм зародышеобразования 231
 — затухания пика 344
 — расщепления пика 344
 — *Рюзлля* — *Такенса* 317

 Многочлены *Эрмита* 196
 Мода динамическая рассеивающая 312
 Модели двухфотонные 247
 — математические 138—142
 — стохастические 80—93
 Моды расходящиеся 204
 Модель броуновского движения *Орнштейна* — *Уленбека* 75
 — генетическая 222, 288, 340—345
 — генного отбора 173—186
 — *Лоренца* 17
 — *Ферхюльста* 166, 167, 169, 170, 172, 176, 187—190, 203—205, 218, 238, 245, 287, 311, 316, 318, 334, 337—340
 — хищников с двумя состояниями 239
 — *Ходжкина* — *Хаксли* 362
 — *Хонгелера* 187—189, 203, 208, 269, 345—347
 Момент 53
 — дифференциальный 102
 — центральный 102

 Неравенство *Коши* — *Буняковского* 112
 Неустойчивости электродинамические 311
 Неустойчивость *Бенара* 17

 Область бистабильности 256
 — тристабильности 256
 Обратное уравнение *Колмогорова* (ОУК) 104—111, 197, 200, 204
 Оператор *Колмогорова* 277
 — *Фоккера* — *Планка* (ФП) 274, 275, 277, 278, 286, 290, 291, 292, 294—298
 — — — спектральная теория 196
 — эволюции типа *Фоккера* — *Планка* 291
 — — приближенный 290—298
 Осциллирующий ток 219

Осциллятор параметрический 220
Отбор генный 182—186

Параметр порядка 24

— роста мальтусовский 166

Параметры управляющие 21

Переход к хаосу при малых R в системах *Бенара* или *Куэтта* 364

— *Фредерикса* 303—314, 316

Переходы, индуцированные шумом 166

Плотность вероятности 50, 242

— — для системы калиевой 358

— — — — натриевой 359

— — параметры 258

— — перехода 97

— — при трех значениях дисперсии 242

— — разложение по собственным функциям 189—201

— — стационарная 31, 150, 163, 164, 170, 174, 177, 221, 224

— — — флуктуирующего тока 220

— — условной 63

— — частичная 63

— оптическая (ОП) 227, 229

Показатели критические 180

Полиморфизм протеинов 185

Порог термодинамический самоорганизации 28

Потенциал «вероятностный» 163

— действия 352

— стохастический 179

«Почти наверное» 59

Правило *Ито* 128

Приближение кривой переключения 289

Приращения независимые 70

Проводимость *Хельфриха* 315

Производство энтропии 27

Пространство элементарных событий 42—44

Процесс винеровский 70, 79, 80, 319, 323

— — траектория 72

— гауссовский 70, 76, 88

— диффузионный 128, 134, 221

— — классификация границ 142—147

— марковский 104

— *Орнштейна* — *Уленбека* (ОУ) 75, 79, 81, 86—88, 91, 103, 104, 196—203, 262, 263, 269, 272, 283, 289, 300, 303, 337

— пуассоновский 79, 80

— случайный 63—69

— стационарный 68

— стохастический 265, 266, 366—369

— цитотоксический 243

— эргодический 154

Процессы фотохимические 245

— случайные без упреждения 122

Распределение *Гаусса* 220, 299

— нормальное 54

— пуассоновское 55

Реактор-смеситель с постоянной прокачкой (РСПП) 225

Реакции фотохимические 245

Реакция *Белюсова* — *Жаботинского* 8, 18, 24, 224, 225

— *Бриггса* — *Раушера* (БР) 223—231, 242, 246, 249

— изомеризации 251

Резонатор *Фабри* — *Перо* 231, 232

Свободная энергия системы 26

Свойства стационарные флуктуирующего светового источника 253—259

Сдвиг перехода, индуцированный шумом 172

Сепарабельность 65, 66

σ -алгебра 44

σ -поле 44

Симбиоз шума и порядка 363—365

Система *Бенара* 364

— *Куэтта* 364

— *Лотки* — *Вольтерры* 364

— *Нитцана* — *Росса* 279

— *Ферхюльста* 163—173

— *Ходжкина* — *Хаксли* 361

- Системы двухфотонные 240
 — фототермические 251—253
 — химические под действием света 245—259
- Случайная величина вырожденная 157
- Случайные величины 42—63
- Смещение броуновской частицы среднеквадратичное 71
- Состояние детерминированное стационарное 241
- Состояния наиболее вероятные 54
- Спектральная ширина 271—288
- Спектр процесса *Орнштейна — Уленбека* (ОУ) 197
- уравнения *Фоккера — Планка* 203
- частотный 57
- шума 82—85
- Спектры модели *Хонглера* 203
- Среда флуктуирующая, генный отбор 182—186
- Среднее значение 52
- Стационарность 43
- Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) 39, 40, 91—93, 98, 99, 114, 130—134, 139, 152, 164, 167, 172, 175, 186, 187, 190, 231, 235, 241, 253—255, 264—267, 272, 274, 285, 294, 299, 300, 302, 320, 334
- — — *Ито* 122, 128—134, 137, 139, 142, 149, 152, 164, 167, 169, 179, 185, 264—266, 269, 274, 299, 320
- — — преобразование к линейному 186, 187
- — — *Стратоновича* 122, 138, 139, 140, 151, 152, 164, 167, 169, 175, 265, 266, 278, 299, 319, 320
- Структуры диссипативные 20, 21, 28
- Схема энергетических переходов 247
- Сценарий *Помо — Манневилля* 317
- *Фейгенбаума* 317
- Теорема *Вонга — Закаи* 139—142, 278, 337
- *Дуба* 103, 104, 263
- *Колмогорова* 65
- *Ляпунова* 27
- *Новикова* 293
- о спектральном разложении 81
- *Павулы* 110—113
- центральная предельная 36
- *Эллиота* 195, 196, 199, 201
- эргодическая 155
- Теория вероятностей, основные понятия 42
- *Дюбуа-Виолетта* 315, 316
- среднего поля 372
- *Штурма — Лиувилля* 191—193, 195
- Термолюминесценции эффективность 248, 249
- Термолюминесценция флуоресценца 248
- Типы деформаций нематического кристалла 305
- Т-клетка, сенсibilизированная 244
- Т-клетки иммунные 244
- Т-лимфоциты 244
- Точка бифуркации 23
- критическая 25
- Траектория выборочная 64
- Турбулентность 317—323
- Уравнение *Винена* 318, 323
- *Гинзбурга — Ландау* 161
- детерминированное кинетическое 241
- дифференциальное стохастическое *Ито* 129
- — — марковское, свойство решений 370, 371
- — — *Стратоновича* 157
- *Ито* 128—134, 320
- *Колмогорова* 329
- — обратное 107
- — *Чепмена* 96, 97, 104, 105, 108, 326
- *Орнштейна — Уленбека* 189
- стохастическое *Лиувилля* 293
- *Стратоновича* 286
- *Уиттекера* 199, 200
- *Ферхюльста* 172, 196, 218, 308

Уравнение Фоккера — Планка (УФП)
 104—112, 131—134, 149—155, 168,
 186—188, 190, 192, 193, 195, 198,
 200, 202, 203, 254, 264, 274, 275,
 291, 296, 297, 300, 301, 320, 331
 — Штурма — Лиувилля 192—195
 Уравнения дифференциальные стоха-
 стические 115—147
 — Ходжкина — Хаксли 354
 Условия Дирихле 21
 — Липшица 143

Фазовая диаграмма, генетическая мо-
 дель 344

— — для системы калиевой 358

— — — — натриевой 359

— — модели Хонглера 347

Фазовые переходы 223—231

— — второго рода 23, 24

— — неравновесные 32, 148

— — первого рода 25

Фиксация потенциала 353

Флуктуации внутренние 28—30

— окружающей среды, моделирова-
 ние 261—264

Флуктуирующая интенсивность света
 226

Формализм *Мартина—Сиггя — Розе*
 295

Фотоионизация 249

Функции Бесселя 176, 288

— — моделированные 288

— корреляционные 82—86

— собственные уравнения обратного
Колмогорова 193

— — — *Фоккера — Планка* 193, 197,
 199

Функционал *Ляпунова* 153

Функция корреляционная процесса
Орнштейна — Уленбека 86, 87

— отклика 293

— распределения 49—51

— — стационарная 255

— с компактным носителем 132

Хаос 17

Частицы броуновские 69, 71

Частоты аллели 184

Чашки *Петри* 47, 50

Числа *Рейнольдса* 364

— *Рэлея* 364

Чувствительность двухфотонных си-
 стем 246—251

Ширина полосы 85

Шума спектр 82—85

Шум белый 39, 41, 85—93, 135, 166—
 173, 222, 260, 265, 299, 302

— — гауссовский 88—90, 120, 223

— — — индуцирующий критическое
 поведение 177

— — интенсивность 158

— — негауссовский 113, 114

— влияние на переход 317

— — — пространственные структуры
 365

— — — хаос 365

— внешний 30—32, 317—323

— — аддитивный 155—159, 165

— — мультипликативный 155—159

— — нелинейный 298

— — реальный 267—271

— — цветной 259, 324

— — электродинамические неустой-
 чивости 311—317

— дихотомический марковский 324—
 362

— — напряжения 354—357

— дробовой 37—41

— *Орнштейна — Уленбека* 286

Электрический контур, моделирую-
 щий генетическую модель 222

Энтропия 26

Явления перехода в флуктуирующей
 среде 160—166

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Предисловие редакторов перевода | 5 |
| Предисловие | 8 |
| | |
| Глава 1. Введение | 12 |
| 1.1. Детерминистический и случайный аспекты макроскопического порядка | 12 |
| 1.2. От кристаллов до диссипативных структур | 20 |
| 1.2.1. Макроскопическое описание самоорганизации в постоянной среде | 21 |
| 1.2.2. Внутренние флуктуации | 28 |
| 1.3. Внешний шум | 30 |
| 1.4. Неравновесные фазовые переходы, индуцированные шумом | 32 |
| 1.5. Моделирование флуктуаций среды | 33 |
| | |
| Глава 2. Основные понятия теории вероятностей | 42 |
| 2.1. Вероятностное пространство и случайные величины | 42 |
| 2.1.1. Пространство элементарных событий Ω и поле событий \mathcal{A} | 42 |
| 2.1.2. Случайные величины | 44 |
| 2.1.3. Вероятностная мера P | 47 |
| 2.1.4. Функция распределения | 49 |
| 2.1.5. Моменты и экстремумы | 51 |
| 2.1.6. Совместные случайные величины | 56 |
| 2.1.7. Условные вероятности | 57 |
| 2.2. Случайные процессы | 63 |
| 2.2.1. Определения | 63 |
| 2.2.2. Сепарабельность | 65 |
| 2.2.3. Непрерывность | 66 |
| 2.2.4. Стационарность | 68 |
| 2.3. Броуновское движение: винеровский процесс | 69 |
| 2.4. Броуновское движение: процесс Орнштейна — Уленбека | 75 |
| 2.5. Пуассоновский процесс | 79 |
| | |
| Глава 3. Стохастические модели флуктуаций среды | 81 |
| 3.1. Корреляционная функция и спектр шума | 82 |
| 3.2. Белый шум | 85 |

| | |
|---|----------------|
| Глава 4. Марковские диффузионные процессы | 94 |
| 4.1. Марковские процессы: определение | 95 |
| 4.2. Марковские диффузионные процессы: определение | 99 |
| 4.3. Еще раз о процессе Орнштейна — Уленбека. Теорема Дуба | 103 |
| 4.4. Обратное уравнение Колмогорова и уравнение Фоккера — Планка | 104 |
| 4.5. Теорема Павулы | 110 |
| 4.6. Негауссовский белый шум | 113 |
| Глава 5. Стохастические дифференциальные уравнения | 115 |
| 5.1. Стохастические интегралы: первое знакомство | 115 |
| 5.2. Интеграл Ито | 122 |
| 5.3. Стохастические дифференциальные уравнения Ито и диффузионные процессы | 128 |
| 5.3.1. Существование и единственность решений | 129 |
| 5.3.2. Марковское свойство решений | 130 |
| 5.3.3. Уравнения Ито и уравнение Фоккера — Планка | 131 |
| 5.4. Стохастический интеграл Стратоновича | 134 |
| 5.4.1. Определение интеграла Стратоновича и его связь с интегралом Ито | 135 |
| 5.4.2. Ито или Стратонович: руководство для вконец запутавшихся создателей математических моделей | 138 |
| 5.5. Классификация границ диффузионного процесса | 142 |
| Глава 6. Неравновесные фазовые переходы, индуцированные шумом | 148 |
| 6.1. Стационарное решение уравнения Фоккера — Планка | 149 |
| 6.2. Окрестность детерминированного поведения: аддитивный и малый мультипликативный шум | 155 |
| 6.3. Явления перехода в флуктуирующей среде | 160 |
| 6.4. Система Ферхюльста в среде с белым шумом | 166 |
| 6.5. Чисто индуцированный шумом переход: критическая точка, индуцированная шумом, в модели генного отбора | 173 |
| 6.5.1. Модель | 173 |
| 6.5.2. Критическая точка, индуцированная шумом | 175 |
| 6.5.3. Критические показатели для критического поведения, индуцированного шумом | 180 |
| 6.5.4. Генный отбор в флуктуирующей среде | 182 |
| 6.6. Эволюция во времени уравнений Фоккера — Планка: системы, приводимые к линейным | 186 |
| 6.6.1. Преобразования к линейному СДУ | 186 |
| 6.6.2. Примеры: модели Ферхюльста и Хонглера | 187 |
| 6.7. Разложение плотности вероятности перехода по собственным функциям | 189 |
| 6.7.1. Спектральная теория оператора Фоккера — Планка и задача Штурма — Лиувилля | 189 |
| 6.7.2. Примеры: процесс Орнштейна — Уленбека и уравнение Ферхюльста | 196 |
| 6.8. Критическая динамика переходов, индуцированных шумом | 202 |

| | |
|--|------------|
| Глава 7. Фазовые переходы, индуцированные шумом, в физике, химии и биологии | 214 |
| 7.1. Фазовые переходы, индуцированные шумом, в параметрическом осцилляторе | 214 |
| 7.2. Фазовые переходы, индуцированные шумом, в открытых химических системах: реакции Бриггса — Раушера | 223 |
| 7.3. Оптическая бистабильность | 231 |
| 7.4. Переходы, индуцированные шумом, и проблема вымирания в системах хищник — жертва | 237 |
| 7.4.1. Модель хищников с двумя состояниями | 239 |
| 7.4.2. Клеточный иммунологический надзор: пример системы с двумя состояниями хищника | 243 |
| 7.5. Химические системы под действием света | 245 |
| 7.5.1. Чувствительность двухфотонных систем к флуктуациям интенсивности света | 246 |
| 7.5.2. Фототермические системы под действием света | 251 |
| 7.5.3. Стационарные свойства флуктуирующего светового источника | 255 |
| Глава 8. Внешний цветной шум | 260 |
| 8.1. Моделирование флуктуаций окружающей среды (дополнительное рассмотрение) | 261 |
| 8.2. Некоторые общие вопросы теории дифференциальных уравнений с источниками цветного шума | 264 |
| 8.3. Реальный внешний шум: класс решаемых моделей | 267 |
| 8.4. Разложение плотности вероятности по параметру спектральной ширины | 271 |
| 8.4.1. Модель Ферхюльста | 287 |
| 8.4.2. Генетическая модель | 288 |
| 8.5. Приближение кривой переключения | 288 |
| 8.6. Приближенный оператор эволюции для системы, взаимодействующей с цветным шумом | 290 |
| 8.7. Нелинейный внешний шум | 298 |
| 8.7.1. Теоретические аспекты | 298 |
| 8.7.2. Переход Фредерикса в нематических жидких кристаллах | 303 |
| 8.7.3. Электродинамические неустойчивости и внешний шум | 311 |
| 8.8. Турбулентность и внешний шум | 317 |
| Глава 9. Марковский дихотомический шум: точно решаемый случай цветного шума | 324 |
| 9.1. Марковский дихотомический шум: математический формализм | 325 |
| 9.2. Фазовые диаграммы для переходов, индуцированных D-шумом | 337 |
| 9.2.1. Модель Ферхюльста | 337 |
| 9.2.2. Генетическая модель | 340 |
| 9.2.3. Модель Хонглера | 345 |

| | |
|--|------------|
| 9.2.4. Дихотомическое периодическое силовое воздействие . | 348 |
| 9.3. Электровозбудимые мембраны | 350 |
| 9.3.1. Аксон Ходжкина — Хаксли и дихотомический шум на- пряжения | 354 |
| 9.3.2. Фазовые диаграммы для проводимости ионов натрия и калия в аксоне Ходжкина — Хаксли | 357 |
| Глава 10. Симбиоз шума и порядка — заключительные замечания . . . | 363 |
| Приложения | 366 |
| А. Обобщенные стохастические процессы | 366 |
| Б. Марковское свойство решений стохастических дифферен- циальных уравнений | 370 |
| В. Исчисление Стратоновича согласуется с правилами обыч- ного математического анализа | 371 |
| Г. Критические показатели теории среднего поля | 372 |
| Литература | 375 |
| Предметный указатель | 389 |

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

Монография

Вернер Хорстхемке, Рене Лефевр

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ШУМОМ ПЕРЕХОДЫ

Теория и применение в физике, химии и биологии

Научный редактор Л. И. Третьякова
Мл. редакторы: И. А. Зиновьева, В. И. Аксенова
Художественный редактор К. В. Радченко
Технический редактор Л. П. Емельянова
Корректор С. А. Денисова

ИБ № 5973

Сдано в набор 22.07.86. Подписано к печати 10.02.87. Формат 60×90/16. Бумага типографская № 1. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 12,50 бум. л. Усл. печ. л. 25. Усл. кр.-отт. 25. Уч.-изд. л. 23,47. Изд. № 2/4758. Тираж 3700 экз. Зак. № 2214
Цена 3 р. 80 к.

Издательство «Мир», 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано с матриц Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29, в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.

Издательство «Мир»
выпустило в 1986 г. книгу:

Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. Пер. с англ., 27 л., 4 р. 40 к.

Книга известного новозеландского физика сочетает в себе свойства учебника и монографии и может служить справочником по вопросам теории стохастических процессов. Дано последовательное рассмотрение марковских процессов, выводятся стохастические дифференциальные уравнения, рассматриваются различные формы уравнения Фоккера — Планка, постановка граничных задач и методы их решения, управляющие уравнения процессов со скачками и их аппроксимации с помощью уравнения Фоккера — Планка, вопросы бистабильности и метастабильности, квантовомеханические марковские процессы в применении к квантовой оптике и квантовой электронике, а также основные понятия теории вероятностей и случайных процессов.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

31392