



**Валерий Павлович СУПРУН**  
1948–2018

Кандидат технических наук, доцент механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Область научных интересов — дискретная математика и вычислительная техника. Автор около 350 изобретений в области автоматики и вычислительной техники. Награжден золотой медалью и дипломом Всемирной организации интеллектуальной собственности (ВОИС) как «Лучший изобретатель Беларуси 2006 года». Заслуженный работник Белорусского государственного университета.

Автор 80 научных статей по дискретной математике, а также учебных пособий «Математика для старшеклассников: Задачи повышенной сложности» (М.: URSS), «Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач» (М.: URSS), «Математика для старшеклассников: Методы решения и доказательства неравенств» (М.: URSS), «Математика для старшеклассников: Дополнительные разделы школьной программы» (М.: URSS), «Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения уравнений повышенной сложности» (М.: URSS), «Основы теории булевых функций» (М.: URSS), «Основы математической логики» (М.: URSS). Многие книги автора были переведены и выходили в URSS также на испанском языке.

Наше издательство предлагает следующие книги:



Отзывы о настоящем издании, обнаруженные опечатки присылайте по адресу [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru). Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги.

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА  
**URSS**  
Тел. (многоканальный)  
**+7 (499) 724 25 45**  
<https://URSS.ru>

33762 ID 290289



117335, Москва, Нахимовский проспект, 56

В. П. Супрун МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

НЕСТАНДАРТНЫЕ

методы

решения УРАВНЕНИЙ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ



**В. П. Супрун**

## МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

# НЕСТАНДАРТНЫЕ методы решения УРАВНЕНИЙ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

**180** уравнений  
с подробными  
решениями





В. П. Супрун

МАТЕМАТИКА  
ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

**НЕСТАНДАРТНЫЕ  
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЙ  
ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ**

**180**  
**уравнений**  
**с подробными**  
**решениям**

Издание стереотипное



URSS

МОСКВА

**Супрун Валерий Павлович**

**Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения уравнений повышенной сложности (180 уравнений с подробными решениями).** Изд. стереотип. — М.: ЛЕНАНД, 2023. — 200 с.

Учебное пособие предназначено старшеклассникам для качественной подготовки к вступительным испытаниям по математике, а также для участия в математических олимпиадах различного уровня.

В пособии предлагаются уравнения повышенной сложности, относящиеся к различным разделам математики. Для каждого из уравнений приводится, как правило, нестандартный метод решения в авторской интерпретации.

В пособии рассматриваются весьма сложные уравнения, которые входят в школьную программу или ее дополняют. В целом же все предлагаемые 180 уравнений соответствуют уровню требований вступительных испытаний по математике.

Пособие адресовано учащимся общеобразовательных школ, гимназий, лицеев, колледжей, абитуриентам, учителям математики, руководителям школьных математических кружков, репетиторам, организаторам математических олимпиад и преподавателям, составляющим задания конкурсных испытаний при поступлении в крупнейшие вузы Российской Федерации.

*В оформлении обложки использована иллюстрация:*

*Designed by Vector\_Corp / Freepik*

Формат 60×90/16. Печ. л. 12,5. Доп. тираж. Зак. № АС-7148.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 11А, стр. 11.

**ISBN 978–5–9710–5331–6**

© ЛЕНАНД, 20218, 2022

**978–5–9519–3442–0**

33762 ID 290289



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Содержание

Введение.....	4
<b>Глава 1.</b> Сложная подстановка.....	8
<b>Глава 2.</b> Тригонометрическая подстановка .....	44
<b>Глава 3.</b> Введение параметра .....	64
<b>Глава 4.</b> Числовые неравенства.....	82
<b>Глава 5.</b> Монотонность аналитических функций .....	135
<b>Глава 6.</b> Другие нестандартные методы.....	146
Заключение .....	195
Рекомендуемая литература.....	196

# Введение

*Без знания математики нельзя понять основ современной техники, ни того, как ученые изучают природные и социальные явления.*

Советский математик, академик  
А. Н. Колмогоров

Среди многочисленных учебных дисциплин математика занимает важное место по причине своей особой социальной значимости. Те учащиеся, которые серьезно относятся к изучению математики, развивают свое мышление и тем самым повышают свой интеллектуальный уровень. Хорошо известно высказывание великого русского ученого XVIII века М. В. Ломоносова *«Математику уж затем учить следует, что она ум в порядок приводит»*. Высокий уровень математических знаний позволяет учащимся успешно изучать и другие школьные дисциплины естественно-научного профиля. По мнению великого немецкого философа Иммануила Канта *«В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики»*.

Наряду с обычной школьной математикой существует, так называемая, нестандартная математика, которая включает в себя необычные (неожиданные) методы решения задач повышенной сложности, которые или вообще не изучаются в школах, или изучаются, но только поверхностно. Освоение таких методов решения математических задач способствует

развитию нестандартного, креативного мышления учащихся. В будущем такое мышление может быть успешно применимо нынешними школьниками в различных сферах человеческой деятельности, например, в науке, технике, экономике, кибернетике и бизнесе.

В настоящем учебном пособии представлено 180 уравнений повышенной сложности, решение которых основано на применении (как правило) нестандартных методов, т. е. таких методов, изучение которых не входит в программу школьной математики. При этом следует отметить, что здесь были использованы не все существующие нестандартные методы, поскольку таких методов превеликое множество и, естественно, привести их в полном объеме в одном учебном пособии является невыполнимой задачей.

Кроме того, в пособии совсем не рассматриваются неравенства. Это сделано по той причине, что автор считает целесообразным написание второго учебного пособия на тему «Нестандартные методы решения и доказательства неравенств повышенной сложности». В противном случае данное учебное пособие было бы слишком громоздким и перегруженным новыми методами и подходами к решению математических задач, что, в конечном счете, понизило бы уровень удовольствия учащихся, полученное от работы с этим пособием.

Учебное пособие состоит из шести глав, в каждой из которых приведены основные теоретические сведения, уравнения повышенной сложности и их подробное решение.

В первой главе приводятся методы, основанные на применении сложных подстановок. Причем здесь используется принцип: чем сложнее подстановка, тем проще (в смысле решения)

уравнение, полученное после ее осуществления. Во второй главе рассматривается частный случай сложной подстановки — тригонометрическая подстановка. Применение такого типа подстановок сводит задачу решения алгебраических уравнений к решению тригонометрических уравнений. При этом необходимо помнить, что тригонометрические уравнения, как правило, имеют бесконечное число корней, а алгебраические — конечное их число. Третья глава посвящена описанию и применению весьма оригинального метода решения уравнений — метода введения параметра. Применение этого метода содержит фактор неожиданности, что может вызвать восторг учащихся. В четвертой главе при решении уравнений используется свойство монотонности (возрастания, убывания) аналитических функций, составляющих обе части уравнений. Использование такого свойства функций позволяет не решать уравнение «до победного конца», а подобрать корень (если он существует) или показать, что его нет вообще. Методы решения уравнений, предлагаемые в пятой главе, основаны на использовании ограниченности левой и правой частей уравнений. При получении верхних и (или) нижних оценок тех или иных математических выражений часто и весьма эффективно используются знаменитые числовые неравенства Коши и Коши—Буняковского. Применение таких методов особенно полезно при решении уравнений в том случае, когда функции, представляющих их левые и правые части, не приспособлены для их совместного исследования, упрощения и преобразования. В последней, шестой главе собраны нестандартные методы, которые не попали в предыдущие главы пособия. Эта глава представляет собой своеобразное

ассорти нестандартных и эффективных методов решения сложных уравнений.

Приводимые в настоящем пособии нестандартные подходы к решению уравнений повышенной сложности демонстрируют красоту школьной математики, превращая ее в один из самых любимых школьных предметов. В свою очередь, нестандартная математика оказывает значительное влияние на развитие самостоятельного, креативного и творческого мышления учащейся молодежи и подготовит их к решению различных задач, возникающих в процессе научно-технического и экономического развития нашей страны.

*Автор*



## Сложная подстановка

*Не мы выбираем математику своей профессией, а она нас выбирает.*

Российский математик Ю. И. Манин

Методы решения уравнений повышенной сложности, основанные на применении сложной подстановки, являются самыми распространенными методами школьной математики. Хотя в настоящем разделе приводятся лишь некоторые нестандартные методы решения сложных уравнений, однако эти методы являются оригинальными (необычными) и их применение позволяет успешно решать многие уравнения, предлагаемые на математических олимпиадах различного уровня.

### Основные понятия и определения

Методы, в основу которых положено выполнение сложных подстановок (замены переменных), весьма популярны при решении уравнений и отличаются большим разнообразием. При использовании таких методов целесообразно придерживаться правила: «Чем сложнее подстановка, тем проще будет уравнение, полученное после ее осуществления». Особенный интерес вызывает применение тригонометрических подстановок, которые рассматриваются в следующей главе.

## Уравнения

### 1.1. Решить уравнение

$$(x-3)(x-2)(x+4)(x+6)=10x^2. \quad (1.1)$$

**Решение.** Если в левой части уравнения (1.1) первую скобку перемножим с третьей, а вторую — с четвертой, то получим

$$(x^2+x-12)(x^2+4x-12)=10x^2.$$

Так как  $x \neq 0$  (в этом легко убедиться непосредственной подстановкой  $x=0$  в данное уравнение), то обе части уравнения разделим на выражение  $x^2$  и получим равносильное уравнение

$$\left(x+1-\frac{12}{x}\right)\left(x+4-\frac{12}{x}\right)=10. \quad (1.2)$$

Затем обозначим  $y = x + 1 - \frac{12}{x}$  и перепишем уравнение (1.2) в виде  $y(y+3)=10$ . Корнями уравнения  $y^2+3y-10=0$  являются  $y_1=-5$ ,  $y_2=2$ .

Поскольку  $y = x + 1 - \frac{12}{x}$ , то имеем два уравнения:

$$x+1-\frac{12}{x}=-5 \text{ и } x+1-\frac{12}{x}=2$$

или  $x^2+6x-12=0$  и  $x^2-x-12=0$ . Из первого уравнения получаем  $x_1=-3+\sqrt{21}$  и  $x_2=-3-\sqrt{21}$ , а корнями второго уравнения являются  $x_3=-3$  и  $x_4=4$ .

**Ответ:**  $x_1=-3+\sqrt{21}$ ,  $x_2=-3-\sqrt{21}$ ,  $x_3=-3$ ,  $x_4=4$ .

**1.2. Решить уравнение**

$$8x^4 + 2x^3 - 27x^2 - 3x + 18 = 0. \quad (1.3)$$

**Решение.** Первоначально убедимся, что значение  $x=0$  не является корнем уравнения (1.3). Затем, разделив на  $x^2$  обе части уравнения (1.3), получим равносильное уравнение

$$2\left(4x^2 + \frac{9}{x^2}\right) + \left(2x - \frac{3}{x}\right) - 27 = 0. \quad (1.4)$$

Положим  $y = 2x - \frac{3}{x}$ , тогда

$$y^2 = 4x^2 - 12 + \frac{9}{x^2} \text{ или } 4x^2 + \frac{9}{x^2} = y^2 + 12.$$

В таком случае из уравнения (1.4) получаем:

$$2(y^2 + 12) + y - 27 = 0 \text{ или } 2y^2 + y - 3 = 0.$$

Так как корнями уравнения  $2y^2 + y - 3 = 0$  являются  $y_1 = 1$  и  $y_2 = -\frac{3}{2}$ , то здесь необходимо рассмотреть два случая.

1. Если  $y_1 = 1$ , то  $2x - \frac{3}{x} = 1$ ,  $2x^2 - x - 3 = 0$  или  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}$ .

2. Если  $y_2 = -\frac{3}{2}$ , то  $2x - \frac{3}{x} = -\frac{3}{2}$  или  $4x^2 + 3x - 6 = 0$ . Отсюда получаем  $x_3 = \frac{-3 + \sqrt{105}}{8}$  и  $x_4 = \frac{-3 - \sqrt{105}}{8}$ .

**Ответ:**  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}$ ,  $x_3 = \frac{-3 + \sqrt{105}}{8}$ ,  $x_4 = \frac{-3 - \sqrt{105}}{8}$ .

**1.3. Решить уравнение**

$$\frac{3x}{x^2 - 4x + 1} - \frac{2x}{x^2 + x + 1} = \frac{8}{3}. \quad (1.5)$$

**Решение.** Первоначально убедимся в том, что  $x = 0$  не является корнем уравнения (1.5). Если затем числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения разделить на  $x$ , то

$$\frac{3}{x - 4 + \frac{1}{x}} - \frac{2}{x + 1 + \frac{1}{x}} = \frac{8}{3}. \quad (1.6)$$

Положим  $y = x - 4 + \frac{1}{x}$ , тогда из уравнения (1.6) получим

$$\frac{3}{y} - \frac{2}{y + 5} = \frac{8}{3}, \quad 9y + 45 - 6y = 8y^2 + 40y \quad \text{или} \quad 8y^2 + 37y - 45 = 0.$$

Корнями квадратного уравнения являются  $y_1 = 1$  и  $y_2 = -\frac{45}{8}$ .

Так как  $y = x - 4 + \frac{1}{x}$ , то необходимо рассмотреть два урав-

нения:

$$x - 4 + \frac{1}{x} = 1, \quad x - 4 + \frac{1}{x} = -\frac{45}{8} \quad \text{или}$$

$$x^2 - 5x + 1 = 0, \quad 8x^2 + 13x + 8 = 0.$$

Корнями первого уравнения являются  $x_1 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$  и

$x_2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$ , а второе уравнение действительных корней не имеет.

**Ответ:**  $x_1 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}.$

**1.4. Решить уравнение  $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1)$ .**

**Решение.** Представим заданное уравнение в виде

$$(x^2 + x + 1)^2 = x^2((x^2 + x + 1) + 2x^2). \quad (1.7)$$

Так как  $x^2 + x + 1 \neq 0$ , то разделим обе части уравнения (1.7) на выражение  $(x^2 + x + 1)^2$  и получим равносильное уравнение

$$1 = \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \cdot \left(1 + \frac{2x^2}{x^2 + x + 1}\right). \quad (1.8)$$

Если обозначить  $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ , то уравнение (1.8) примет

вид

$$1 = y(1 + 2y), \quad 2y^2 + y - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (y + 1)(2y - 1) = 0,$$

т. е. уравнение  $2y^2 + y - 1 = 0$  имеет два корня:  $y_1 = -1$  и

$$y_2 = \frac{1}{2}.$$

Так как  $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ , то  $\frac{x^2}{x^2 + x + 1} = -1$  и  $\frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{2}$ .

Отсюда следуют квадратные уравнения  $2x^2 + x + 1 = 0$  и  $x^2 - x - 1 = 0$ . Первое уравнение действительных корней не имеет, а из второго уравнения получаем  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  и  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**1.5. Решить уравнение**

$$10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0. \quad (1.9)$$

**Решение.** Так как кубическое уравнение (1.9) не является приведенным, то оно может не иметь целых корней. Поэтому искать корни уравнения (1.9) методом подбора весьма проблематично.

С целью упрощения процедуры поиска корней выполним замену  $x = \frac{1}{y}$ . Отметим, что такая замена является корректной, поскольку  $x = 0$  не является корнем уравнения (1.9). После такой замены уравнение (1.9) принимает вид приведенного кубического уравнения

$$y^3 - 2y^2 - 3y + 10 = 0. \quad (1.10)$$

Подбором находим целый корень уравнения (1.10) вида  $y_1 = -2$ . Так как

$$y^3 - 2y^2 - 3y + 10 = (y + 2)(y^2 - 4y + 5),$$

а уравнение  $y^2 - 4y + 5 = 0$  действительных корней не имеет (отрицательный дискриминант), то  $y_1 = -2$  является единственным корнем уравнения (1.10).

Поскольку  $x = \frac{1}{y}$  и  $y_1 = -2$ , то  $x_1 = -\frac{1}{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = -\frac{1}{2}$ .



**1.6. Решить уравнение**

$$(x^2 + 4x)(x^2 + 5x + 1) = 20(x + 1)^2. \quad (1.11)$$

**Решение.** Так как  $x^2 + 5x + 1 = (x^2 + 4x) + (x + 1)$ , то выполнив в уравнении (1.11) замену  $u = x^2 + 4x$  и  $v = x + 1$ , получаем  $u(u + v) = 20v^2$  или  $u^2 + uv - 20v^2 = 0$ . Решая квадратное уравнение относительно переменной  $u$ , получаем  $u_1 = -5v$  и  $u_2 = 4v$ .

Так как  $u = x^2 + 4x$  и  $v = x + 1$ , то для поиска корней уравнения (1.11) необходимо решить уравнения  $x^2 + 4x = -5(x + 1)$ ,  $x^2 + 4x = 4(x + 1)$  или  $x^2 + 9x + 5 = 0$  и  $x^2 = 4$ . Отсюда следует, что уравнение (1.11) имеет четыре корня.

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{-9 - \sqrt{61}}{2}, x_2 = \frac{-9 + \sqrt{61}}{2}, x_3 = -2, x_4 = 2.$$

**1.7. Решить уравнение**

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{7}{8}. \quad (1.12)$$

**Решение.** Из уравнения (1.12) следует

$$\frac{1}{x^3} > \frac{1}{(x+1)^3}, \frac{1}{x} > \frac{1}{x+1}, \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} > 0 \text{ или } x(x+1) > 0.$$

Преобразуем уравнение (1.12) следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{7}{8},$$

$$\frac{1}{x(x+1)} \cdot \frac{3x(x+1)+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{7}{8}. \quad (1.13)$$

Если обозначить  $y = x(x+1)$ , то из уравнения (1.13) получаем уравнения  $\frac{1}{y} \cdot \frac{3y+1}{y^2} = \frac{7}{8}$  или

$$7y^3 - 24y - 8 = 0. \quad (1.14)$$

Так как ранее было установлено, что  $x(x+1) > 0$ , то в уравнении (1.14) имеем  $y > 0$ . Первый корень  $y_1 = 2$  уравнения (1.14) находим подбором.

Поскольку  $\frac{7y^3 - 24y - 8}{y - 2} = 7y^2 + 14y + 4$ , то необходимо

рассмотреть уравнение  $7y^2 + 14y + 4 = 0$ . Однако, если  $y > 0$ , то  $7y^2 + 14y + 4 > 0$ .

Следовательно, уравнение (1.14) имеет единственный положительный корень  $y_1 = 2$ . Так как  $y = x(x+1)$ , то  $x(x+1) = 2$  или  $x^2 + x - 2 = 0$ . Корнями уравнения  $x^2 + x - 2 = 0$  являются  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ .

### 1.8. Решить уравнение

$$(x-1)(4x-3)(8x-7)^2 = \frac{9}{2}. \quad (1.15)$$

**Решение.** Если обе части уравнения (1.15) умножить на 16, то

$$(8x-8)(8x-6)(8x-7)^2 = 72.$$

Затем в этом уравнении обозначим  $y = 8x - 7$  и получим

$$(y-1)(y+1)y^2 = 72 \text{ или } y^4 - y^2 - 72 = 0.$$

Корнями биквадратного уравнения являются  $y_1 = -3$  и  $y_2 = 3$ . Так как  $y = 8x - 7$ , то  $8x - 7 = -3$  и  $8x - 7 = 3$ . Следовательно, уравнение (1.15) имеет два корня:  $x_1 = \frac{1}{2}$  и  $x_2 = \frac{5}{4}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{5}{4}$ .

### 1.9. Решить уравнение

$$(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) = 88. \quad (1.16)$$

**Решение.** Если в уравнении (1.16) выполнить замену переменных

$$y = \frac{x-1+x-2+x-4+x-5}{4} = x-3,$$

то получим

$$(y+2)(y+1)(y-1)(y-2) = 88,$$

$$(y^2-4)(y^2-1) = 88 \text{ или}$$

$$y^4 - 5y^2 - 84 = 0.$$

Из биквадратного уравнения следует, что  $y^2 = 12$  или  $y_1 = -2\sqrt{3}$  и  $y_2 = 2\sqrt{3}$ .

Однако  $y = x - 3$ , поэтому  $x_1 - 3 = -2\sqrt{3}$  и  $x_2 - 3 = 2\sqrt{3}$ .

**Ответ:**  $x_1 = 3 - 2\sqrt{3}$ ,  $x_2 = 3 + 2\sqrt{3}$ .

**1.10. Решить уравнение**

$$x^4 = \frac{11x - 6}{6x - 11}. \quad (1.17)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (1.17) является объединение двух интервалов  $x \leq \frac{6}{11}$  и  $x > \frac{11}{6}$ .

Преобразуем уравнение (1.17) следующим образом:

$$x^4(6x - 11) = 11x - 6, \quad 6(x^5 + 1) - 11x(x^3 + 1) = 0,$$

$$6(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 11x(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Отсюда следует первый корень уравнения (1.17) вида  $x_1 = -1$ . Если затем обе части приведенного выше уравнения разделить на выражение  $x + 1$ , то получим

$$6(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 11x(x^2 - x + 1) = 0 \text{ или}$$

$$6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0. \quad (1.18)$$

Уравнение (1.18) является симметрическим уравнением четвертой степени, при решении которого необходимо обе его части разделить на выражение  $x^2$ . В таком случае уравнение (1.18) принимает вид

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 17\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0. \quad (1.19)$$

Положим  $y = x + \frac{1}{x}$ , тогда  $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$  и из уравнения (1.19) получаем квадратное уравнение  $6y^2 - 17y + 5 = 0$ . Корнями данного уравнения являются  $y_1 = \frac{5}{2}$  и  $y_2 = \frac{1}{3}$ . Однако  $y = x + \frac{1}{x}$  и поэтому, согласно неравенству Коши  $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ , которое выполняется для любых  $a_1 \geq 0$  и  $a_2 \geq 0$ , имеем  $y \geq 2$ .

В этой связи для поиска корней уравнения (1.17) необходимо рассмотреть уравнения  $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ ,  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  или  $(x - 2)(2x - 1) = 0$ . Отсюда получаем  $x_2 = 2$  и  $x_3 = \frac{1}{2}$ .

Отметим, что найденные значения  $x_1, x_2, x_3$  удовлетворяют неравенствам  $x \leq \frac{6}{11}$  и  $x > \frac{11}{6}$ .

**Ответ:**  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$ .

### 1.11. Решить уравнение

$$\sqrt{5-x} = 2 + \sqrt{3-x}. \quad (1.20)$$

**Решение.** Из уравнения (1.20) следует, что  $x \leq 2 + \sqrt{3}$ . Введем переменную  $y = \sqrt{5-x}$ . Тогда  $x = 5 - y^2$  и уравнение (1.20) принимает вид

$$y = 2 + \sqrt{3} - 5 + y^2, \quad y^2 - y - 3 + \sqrt{3} = 0, \\ (y^2 - 3) - (y - \sqrt{3}) = 0$$

или

$$(y - \sqrt{3})(y + \sqrt{3} - 1) = 0. \quad (1.21)$$

Так как  $y \geq 0$ , то  $y + \sqrt{3} - 1 > 0$  и из уравнения (1.21) получаем  $y_1 = \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5 - x_1} = \sqrt{3}$  или  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

### 1.12. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + 9x + 5} = 6x. \quad (1.22)$$

**Решение.** Непосредственно из уравнения (1.22) следует, что  $x > 0$ .

Умножим обе части уравнения (1.22) на выражение

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 9x + 5}$$

и согласно формуле  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  получим

$$-12x = 6x \left( \sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 9x + 5} \right) \text{ или}$$

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 9x + 5} = -2.$$

Если полученное уравнение сложить с уравнением (1.22), то

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x - 1, \quad 2x^2 - 3x + 5 = 9x^2 - 6x + 1 \text{ или}$$

$$7x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Положительным корнем уравнения  $7x^2 - 3x - 4 = 0$  является  $x_1 = 1$ .



Выполним проверку: подставим найденное значение  $x_1$  в уравнение (1.22) и убедимся, что оно является его корнем.

**Ответ:**  $x_1 = 1$ .

### 1.13. Решить уравнение

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} = 1. \quad (1.23)$$

**Решение.** Положим  $y = \sqrt{x+1}$ , тогда  $x = y^2 - 1$  и уравнение (1.23) примет вид

$$\sqrt{y^2+1-2y} + \sqrt{y^2+4-4y} = 1, \quad \sqrt{(y-1)^2} + \sqrt{(y-2)^2} = 1$$

или

$$|y-1| + |y-2| = 1. \quad (1.24)$$

Уравнение (1.24) имеет вид  $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)|$ , поэтому это уравнение равносильно неравенству  $(y-1)(y-2) \leq 0$ .

Отсюда следует, что  $1 \leq y \leq 2$ ,  $1 \leq \sqrt{x+1} \leq 2$  или  $0 \leq x \leq 3$ .

**Ответ:**  $0 \leq x \leq 3$ .

### 1.14. Решить уравнение

$$x^2 + 4x - 11 = 2|x+2|. \quad (1.25)$$

**Решение.** Уравнение (1.25) перепишем в виде

$$(x+2)^2 - 15 = 2|x+2|.$$

Если положить  $y = |x+2|$ , то получим уравнения

$$y^2 - 15 = 2y \quad \text{или} \quad y^2 - 2y - 15 = 0, \quad \text{где} \quad y \geq 0.$$

Уравнение  $y^2 - 2y - 15 = 0$  имеет единственный положительный корень  $y_1 = 5$ .

Однако  $y = |x + 2|$ , поэтому  $|x + 2| = 5$  или  $x_1 = 3$  и  $x_2 = -7$ .

**Ответ:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -7$ .

### 1.15. Решить уравнение

$$9x^2 + 2|3x + 2| = 20 - 12x. \quad (1.26)$$

**Решение.** Уравнение (1.26) равносильно уравнению

$$9x^2 + 12x + 4 + 2|3x + 2| - 24 = 0. \quad (1.27)$$

Если в уравнении (1.27) положить  $y = |3x + 2|$ , то получим уравнение  $y^2 + 2y - 24 = 0$ , где  $y \geq 0$ . Так как подходящим корнем квадратного уравнения является  $y_1 = 4$ , то  $|3x + 2| = 4$  или  $3x + 2 = \pm 4$ . Отсюда следует, что  $x_1 = \frac{2}{3}$  и  $x_2 = -2$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{2}{3}$ ,  $x_2 = -2$ .

### 1.16. Решить уравнение

$$2(x^2 + 2x) = 3\sqrt{1 - x^3}. \quad (1.28)$$

**Решение.** Из уравнения (1.28) следует, что  $x^2 + 2x \geq 0$  и  $1 - x^3 \geq 0$ , т. е.  $x \leq -2$  и  $0 \leq x \leq 1$ . Данное уравнение равносильно уравнению

$$2(x^2 + 2x) = 3\sqrt{1-x} \sqrt{1+x+x^2}. \quad (1.29)$$

Положим, что  $u = \sqrt{1-x}$  и  $v = \sqrt{1+x+x^2}$ .

Так как  $x^2 + 2x = v^2 - u^2$ , то уравнение (1.29) принимает вид  $2(v^2 - u^2) = 3uv$ , где  $u \geq 0$  и  $v > 0$ .

Здесь имеем  $2u^2 + 3uv - 2v^2 = 0$  или  $(2u - v)(u + 2v) = 0$ . Так как  $u \geq 0$  и  $v > 0$ , то  $u + 2v > 0$  и  $2u = v$ .

Отсюда получаем  $2\sqrt{1-x} = \sqrt{1+x+x^2}$  или  $x^2 + 5x - 3 = 0$ .

Корнями квадратного уравнения являются  $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$  и  $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$ .

Поскольку  $x_1 \leq -2$  и  $0 \leq x_2 \leq 1$ , то найденные значения переменной  $x$  удовлетворяют уравнению (1.28).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$ .

### 1.17. Решить уравнение

$$\sqrt{x+4} - 2\sqrt[3]{x-13} = 7. \quad (1.30)$$

**Решение.** Обозначим  $u = \sqrt{x+4}$ ,  $v = \sqrt[3]{x-13}$  и представим уравнение (1.30) посредством системы уравнений

$$\begin{cases} u - 2v = 7, \\ u^2 - v^3 = 17, \end{cases}$$

где  $u \geq 0$ . Если выражение  $u = 2v + 7$  подставить во второе уравнение системы, то получим  $v^3 - 4v^2 - 28v - 32 = 0$ . Под-

бором находим первый корень кубического уравнения  $v_1 = -2$ .

Так как  $\frac{v^3 - 4v^2 - 28v - 32}{v + 2} = v^2 - 6v - 16$ , то необходимо рассмотреть уравнение  $v^2 - 6v - 16 = 0$ . Отсюда получаем  $v_1 = -2$  и  $v_2 = 8$ .

Поскольку  $v = \sqrt[3]{x-13}$ , то рассмотрим два уравнения

$$\sqrt[3]{x-13} = -2 \text{ и } \sqrt[3]{x-13} = 8.$$

Из первого уравнения следует, что  $x_1 = 5$ , а из второго уравнения получаем  $x_2 = 525$ .

Следует отметить, если  $v_1 = -2$  и  $v_2 = 8$ , то  $u_1 = 2v_1 + 7 \geq 0$  и  $u_2 = 2v_2 + 7 \geq 0$ . В этой связи значения  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями уравнения (1.30).

**Ответ:**  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 525$ .

### 1.18. Решить уравнение

$$16x^2 + 9x + 117 = 24x\sqrt{x+13}. \quad (1.31)$$

**Решение.** Обозначим  $y = \sqrt{x+13}$ , тогда

$$x = y^2 - 13, \quad 9x + 117 = 9y^2$$

и из уравнения (1.31) получаем

$$16x^2 + 9y^2 = 24xy, \quad (4x - 3y)^2 = 0 \text{ или } 4x = 3y.$$

Так как  $4x = 3y$ , то  $4x = 3\sqrt{x+13}$ , где  $x \geq 0$ . Отсюда следует, что

$$16x^2 = 9(x+13) \text{ или } 16x^2 - 9x - 117 = 0.$$

Положительный корень уравнения  $16x^2 - 9x - 117 = 0$  равен  $x_1 = 3$ .

**Ответ:**  $x_1 = 3$ .

### 1.19. Решить уравнение

$$(x+14)\sqrt{1-x^2} = x+14-7x^2. \quad (1.32)$$

**Решение.** Из уравнения (1.32) следует, что областью допустимых значений переменной  $x$  в этом уравнении является отрезок  $-1 \leq x \leq 1$ .

Если обозначить  $u = x+14$  и  $v = \sqrt{1-x^2}$ , то  $x^2 = 1-v^2$  и уравнения (1.32) принимает вид

$$uv = u - 7(1-v^2), \quad u(v-1) - 7(v^2-1) = 0 \text{ или} \\ (v-1)(u-7v-7) = 0. \quad (1.33)$$

Из уравнения (1.33) следует, что для поиска всех корней уравнения (1.32) необходимо рассмотреть два случая.

1. Пусть  $v-1=0$ , тогда  $\sqrt{1-x^2} = 1$  или  $x_1 = 0$ .

2. Пусть  $u-7v-7=0$ , тогда

$$x+7 = 7\sqrt{1-x^2}. \quad (1.34)$$

Так как  $-1 \leq x \leq 1$ , то  $x + 7 > 0$ . В этой связи после возведения в квадрат обеих частей уравнения (1.34) получаем равносильные уравнения  $x^2 + 14x + 49 = 49 - 49x^2$  или  $50x^2 + 14x = 0$ . Однако известно, что  $x_1 = 0$ . Поэтому из уравнения  $50x^2 + 14x = 0$  следует, что  $x_2 = -\frac{7}{25}$ .

**Ответ:**  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{7}{25}$ .

### 1.20. Решить уравнение

$$16x^3 = (11x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 - x + 1}. \quad (1.35)$$

**Решение.** Положим  $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$  и перепишем уравнение (1.35) в виде

$$16x^3 = \sqrt{x^2 - x + 1} (12x^2 - (x^2 - x + 1)), \quad 16x^3 = y(12x^2 - y^2) \quad \text{или} \\ 16x^3 = 12x^2y - y^3. \quad (1.36)$$

Так как  $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ , то  $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Поскольку  $y \neq 0$ , то из уравнения (1.36) следует, что  $x \neq 0$ . В этой связи обе части уравнения (1.36) можно разделить на  $x^3$  и после этого, обозначив  $z = \frac{y}{x}$ , получить равносильное уравнение

$$z^3 - 12z + 16 = 0. \quad (1.37)$$



Первый корень  $z_1 = 2$  уравнения (1.37) находим подбором.

Так как

$$\frac{z^3 - 12z + 16}{z - 2} = z^2 + 2z - 8 \text{ и } z^2 + 2z - 8 = (z - 2)(z + 4),$$

то уравнение (1.37) имеет второй корень  $z_2 = -4$ .

Рассмотрим два случая.

1. Если  $z_1 = 2$ , то  $\frac{y}{x} = 2$  или  $y = 2x$ . Однако  $y^2 = x^2 - x + 1$ ,

поэтому здесь имеем уравнение

$$4x^2 = x^2 - x + 1 \text{ или } 3x^2 + x - 1 = 0.$$

С учетом того, что  $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $y = 2x$ , то  $x \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Положи-

тельным корнем уравнения  $3x^2 + x - 1 = 0$  является  $x_1 = \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$ .

Так как  $\frac{\sqrt{13} - 1}{6} \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$ , то значение  $x_1$  удовлетворяет уравнению (1.35).

2. Если  $z_2 = -4$ , то  $y = -4x$ ,  $\sqrt{x^2 - x + 1} = -4x$  или  $15x^2 + x - 1 = 0$ , где  $-4x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  или  $x \leq -\frac{\sqrt{3}}{8}$ . Отрицательным

корнем уравнения  $15x^2 + x - 1 = 0$  является  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{61}}{30}$ . По-

скольку  $\frac{-1 - \sqrt{61}}{30} < -\frac{\sqrt{3}}{8}$  (в этом нетрудно убедиться), то зна-

чение  $x_2$  также является корнем уравнения (1.35).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\sqrt{13} - 1}{6}$ ,  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{61}}{30}$ .

**1.21. Решить уравнение**

$$\sqrt{2x^2 - 7x - 1} - \sqrt{4x^2 - 9x - 13} = x^2 - x - 6. \quad (1.38)$$

**Решение.** Обозначим  $u = 2x^2 - 7x - 1$  и  $v = 4x^2 - 9x - 13$ .

В таком случае уравнение (1.38) принимает вид  $\sqrt{u} - \sqrt{v} = \frac{v-u}{2}$

или

$$(\sqrt{u} - \sqrt{v})(\sqrt{u} + \sqrt{v} + 2) = 0. \quad (1.39)$$

Так как  $\sqrt{u} + \sqrt{v} + 2 > 0$ , то из уравнения (1.39) получаем  $\sqrt{u} = \sqrt{v}$ ,  $2x^2 - 7x - 1 = 4x^2 - 9x - 13$  или  $x^2 - x - 6 = 0$ . Отсюда следует  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 3$ . Непосредственной подстановкой значений  $x_1$  и  $x_2$  в уравнение (1.38) убеждаемся в том, что только значение  $x_1$  является его корнем.

**Ответ:**  $x_1 = -2$ .

**1.22. Решить уравнение**

$$\frac{30}{x^2\sqrt{35-x^3}} = x + \sqrt[3]{35-x^3}. \quad (1.40)$$

**Решение.** Если выполнить подстановку  $y = \sqrt[3]{35-x^3}$ , то с учетом уравнения (1.40) получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y + x y^2 = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Далее, умножим на 3 обе части первого уравнения системы, а затем результат умножения сложим со вторым уравнением и получим  $(x + y)^3 = 125$  или  $x + y = 5$ . Так как  $xy(x + y) = 30$  и  $x + y = 5$ , то  $xy = 6$ .

Если  $x + y = 5$  и  $xy = 6$ , то  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 3$  и  $x_2 = 3$ ,  $y_2 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ .

### 1.23. Решить уравнение

$$4\sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2} = x + 4. \quad (1.41)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (1.41) являются  $0 \leq x \leq 2$ .

Перепишем уравнение (1.41) в виде  $\sqrt{4 - x^2} = x - 4\sqrt{x} + 4$  или

$$\sqrt{4 - x^2} = (\sqrt{x} - 2)^2. \quad (1.42)$$

Пусть  $\sqrt{x} = y$ , тогда  $0 \leq y \leq \sqrt{2}$  и после возведения в квадрат обеих частей уравнения (1.42) получаем  $4 - y^4 = (y - 2)^4$  или

$$(y - 2)^4 + y^4 = 4. \quad (1.43)$$

Если в уравнении (1.43) положить  $z = y - 1$ , то получим

$$(z - 1)^4 + (z + 1)^4 = 4, \quad z^4 + 6z^2 - 1 = 0,$$

$$z^2 = \sqrt{10} - 3 \text{ или } z_1 = \sqrt{\sqrt{10} - 3}, \quad z_2 = -\sqrt{\sqrt{10} - 3}.$$

Так как  $0 \leq y \leq \sqrt{2}$  и  $z = y - 1$ , то  $-1 \leq z \leq \sqrt{2} - 1$ . Поэтому необходимо убедиться в том, что найденные значения  $z_1$  и  $z_2$  удовлетворяют условию  $-1 \leq z \leq \sqrt{2} - 1$ .

Покажем, что  $z_1 \leq \sqrt{2} - 1$  или  $\sqrt{\sqrt{10} - 3} \leq \sqrt{2} - 1$ . Для этого возведем в квадрат обе части требуемого неравенства. Тогда

$$\sqrt{10} - 3 \leq 3 - 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{10} \leq 6 - 2\sqrt{2},$$

$$10 \leq 36 - 24\sqrt{2} + 8, \quad 12\sqrt{2} \leq 17 \text{ или } 288 \leq 289.$$

Таким образом, получили очевидное неравенство. Следовательно, неравенство  $z_1 \leq \sqrt{2} - 1$  выполняется.

Теперь убедимся в том, что  $z_2 \geq -1$ . Неравенство  $-\sqrt{\sqrt{10} - 3} \geq -1$  равносильно неравенствам  $\sqrt{\sqrt{10} - 3} \leq 1$ ,  $\sqrt{10} - 3 \leq 1$  или  $\sqrt{10} \leq 4$ . Последнее неравенство очевидно.

Поскольку  $y = z + 1$  и  $z_1 = \sqrt{\sqrt{10} - 3}$ ,  $z_2 = -\sqrt{\sqrt{10} - 3}$ , то

$$y_1 = 1 + \sqrt{\sqrt{10} - 3} \text{ и } y_2 = 1 - \sqrt{\sqrt{10} - 3}.$$

Однако  $x = y^2$ , поэтому

$$x_1 = \sqrt{10} - 2 + 2\sqrt{\sqrt{10} - 3} \text{ и } x_2 = \sqrt{10} - 2 - 2\sqrt{\sqrt{10} - 3}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \sqrt{10} - 2 + 2\sqrt{\sqrt{10} - 3}$ ,  $x_2 = \sqrt{10} - 2 - 2\sqrt{\sqrt{10} - 3}$ .

### 1.24. Решить уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + 2\sqrt{x^2 + x} + 2x = 1. \quad (1.44)$$

**Решение.** Обозначим  $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ , тогда

$$y^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}$$

и уравнение (1.44) примет вид  $y^2 + y = 2$ , где  $y \geq 0$ . Отсюда получаем  $y_1 = 1$  или  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$ . Так как функция  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$  на области определения  $x \geq 0$  является возрастающей, то уравнение  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$  имеет не более одного корня. Искомый корень  $x_1 = 0$  легко найти подбором.

**Ответ:**  $x_1 = 0$ .

### 1.25. Решить уравнение

$$3^{2x} - 18 \cdot 3^{-2x} - 3^x - 6 \cdot 3^{-x} = 2. \quad (1.45)$$

**Решение.** Если выполнить замену  $y = 3^x$ , то из уравнения (1.45) получим  $y^2 - \frac{18}{y^2} - y - \frac{6}{y} = 2$  или

$$y^4 - y^3 - 2y^2 - 6y - 18 = 0, \quad (1.46)$$

где  $y > 0$ . Корень  $y_1 = 3$  уравнения (1.46) находим подбором.

Так как  $\frac{y^4 - y^3 - 2y^2 - 6y - 18}{y - 3} = y^3 + 2y^2 + 4y + 6$ , то для

поиска остальных корней уравнения (1.46) необходимо рассмотреть уравнение  $y^3 + 2y^2 + 4y + 6 = 0$ . Однако данное уравнение не имеет положительных корней, т. е. если  $y > 0$ , то

$y^3 + 2y^2 + 4y + 6 > 0$ . В этой связи уравнение (1.46) имеет единственный подходящий корень  $y_1 = 3$ .

Поскольку  $3^x = y$  и  $y_1 = 3$ , то  $x_1 = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ .

### 1.26. Решить уравнение

$$2^{x+2} + \sqrt{2^{x+6} \cdot 5^x} = 9 \cdot 5^{x+1}. \quad (1.47)$$

**Решение.** Уравнение (1.47) равносильно уравнению

$$4 \cdot 2^x + 8\sqrt{2^x \cdot 5^x} = 45 \cdot 5^x.$$

Если  $u = \sqrt{2^x}$  и  $v = \sqrt{5^x}$ , то имеем уравнение

$$4u^2 + 8uv - 45v^2 = 0,$$

где  $u > 0$  и  $v > 0$ . Так как  $4u^2 + 8uv - 45v^2 = (2u - 5v)(2u + 9v)$  и  $2u + 9v > 0$ , то  $2u - 5v = 0$ ,  $2\sqrt{2^x} = 5\sqrt{5^x}$  или  $2^{x+2} = 5^{x+2}$ . Отсюда получаем  $x + 2 = 0$  или  $x_1 = -2$ .

**Ответ:**  $x_1 = -2$ .

### 1.27. Решить уравнение

$$49^{\log_2 x} = 14 + 5x^{\log_2 7}. \quad (1.48)$$

**Решение.** Воспользуемся формулой  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ , которая справедлива для произвольных значений  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  и

$c \neq 1$ , и перепишем уравнение (1.48) в равносильном виде  $49^{\log_2 x} = 14 + 5 \cdot 7^{\log_2 x}$ .

Если затем обозначить  $y = 7^{\log_2 x}$ , то получим квадратное уравнение  $y^2 - 5y - 14 = 0$ , где  $y > 0$ . Поскольку уравнение  $y^2 - 5y - 14 = 0$  имеет единственный положительный корень  $y_1 = 7$ , то  $7^{\log_2 x} = 7$  или  $\log_2 x = 1$ . Отсюда получаем  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

### 1.28. Решить уравнение

$$\lg \lg x + \lg(\lg x^2 - 1) = 1. \quad (1.49)$$

**Решение.** Так как здесь  $x > 0$ , то  $\lg x^2 = 2\lg|x| = 2\lg x$  и уравнение (1.49) принимает вид  $\lg \lg x + \lg(2\lg x - 1) = 1$ . Если положить  $y = \lg x$ , то отсюда получаем уравнение

$$\lg y + \lg(2y - 1) = 1, \quad (1.50)$$

где  $y > \frac{1}{2}$ . Из уравнения (1.50) следует:  $\lg(2y^2 - y) = 1$  или

$2y^2 - y = 10$ . Так как  $y > \frac{1}{2}$ , то уравнение  $2y^2 - y - 10 = 0$  имеет

один подходящий корень  $y_1 = \frac{5}{2}$ . Однако  $y = \lg x$ , поэтому

$$x = 10^y \text{ и } x_1 = 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 100\sqrt{10}$ .

**1.29.** Решить уравнение

$$7^{\log_x 3} = \frac{21}{x}. \quad (1.51)$$

**Решение.** Обозначим  $y = \log_x 3$ , тогда  $x = 3^{\frac{1}{y}}$  и уравнение (1.51) принимает вид  $3^y \cdot 7^y = 21$ . Если данное уравнение прологарифмировать по основанию 3, то получим

$$\frac{1}{y} + y \log_3 7 = 1 + \log_3 7, \quad y^2 \log_3 7 - y \log_3 7 - y + 1 = 0 \quad \text{или}$$

$$(y \log_3 7 - 1)(y - 1) = 0.$$

Отсюда следует, что  $y_1 = \log_7 3$  и  $y_2 = 1$ . Поскольку  $y = \log_x 3$ , то  $\log_x 3 = \log_7 3$  и  $\log_x 3 = 1$ . В этой связи  $x_1 = 7$  и  $x_2 = 3$ .

**Ответ:**  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 3$ .

**1.30.** Решить уравнение

$$\arcsin^3 x + \arccos^3 x = \frac{7\pi^3}{24}. \quad (1.52)$$

**Решение.** При решении уравнения (1.52) воспользуемся известной формулой:  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ . Если затем обозначить  $y = \arccos x$ , то  $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - y$  и уравнение (1.52) примет



вид  $\left(\frac{\pi}{2} - y\right)^3 + y^3 = \frac{7\pi^3}{24}$ , где  $0 \leq y \leq \pi$ . Отсюда, применяя формулу

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b)^2 - 3ab),$$

получаем равносильные уравнения

$$\frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi^2}{4} - 3y \left( \frac{\pi}{2} - y \right) \right) = \frac{7\pi^3}{24},$$

$$\frac{\pi^2}{4} - 3y \left( \frac{\pi}{2} - y \right) = \frac{7\pi^2}{12} \text{ или } 18y^2 - 9y\pi - 2\pi^2 = 0.$$

Корнями уравнения  $18y^2 - 9y\pi - 2\pi^2 = 0$  являются

$$y_{1,2} = \frac{9\pi \pm \sqrt{81\pi^2 + 144\pi^2}}{36} = \frac{9\pi \pm 15\pi}{36} \text{ или } y_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ и } y_2 = -\frac{\pi}{6}.$$

Однако  $0 \leq y \leq \pi$ , поэтому  $y_1 = \frac{2\pi}{3}$ . Так как  $y = \arccos x$  и

$$y_1 = \frac{2\pi}{3}, \text{ то } \arccos x_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ или } x_1 = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

**Ответ:**  $x_1 = -\frac{1}{2}.$

### 1.31. Решить уравнение

$$2\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arccotg} x = \pi. \quad (1.53)$$

**Решение.** Известно, что  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ .

Поэтому, если  $y = \operatorname{arcsctg} x$ , то  $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - y$  и уравнение (1.53) принимает вид

$$2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + 3y = \pi, \quad (1.54)$$

где  $0 < y < \pi$ . Уравнение (1.54) имеет единственный корень  $y_1 = 0$ , который, однако, не удовлетворяет условию  $0 < y < \pi$ .

В этой связи уравнение (1.53) корней не имеет.

**Ответ:** корней нет.

### 1.32. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3 y^3 + y^3 = 12, \\ x + x y + y = 0. \end{cases} \quad (1.55)$$

**Решение.** Так как в систему уравнений (1.55) переменные  $x$  и  $y$  входят симметрично, то для ее решения целесообразно воспользоваться универсальной заменой переменных, которая заключается в использовании формул  $u = x + y$  и  $v = xy$ .

Выполним следующие равносильные преобразования системы уравнений (1.55):

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) + x^3 y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + y)((x + y)^2 - 3xy) + x^3 y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) + v^3 = 12, \\ u + v = 0. \end{cases} \quad (1.56)$$

Если в первое уравнение системы (1.56) подставить  $u = -v$ , то получим уравнение  $-v(v^2 - 3v) + v^3 = 12$ , из которого следует  $v^2 = 4$  или  $v_1 = -2$ ,  $v_2 = 2$ . Поскольку  $u = -v$ , то  $u_1 = 2$  и  $u_2 = -2$ .

Однако  $u = x + y$  и  $v = xy$ , поэтому здесь необходимо решить две системы уравнений  $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -2 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + y = -2, \\ xy = 2. \end{cases}$

Из первой системы получаем  $x_1 = 1 - \sqrt{3}$  и  $x_2 = 1 + \sqrt{3}$ , а вторая система уравнений является несовместной.

**Ответ:**  $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ ,  $x_2 = 1 + \sqrt{3}$ .

### 1.33. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9, \\ x^3 + 8y^3 = 27. \end{cases} \quad (1.57)$$

**Решение.** Представим систему функций (1.57) посредством равносильной системы уравнений

$$\begin{cases} (x + 2y)^2 - 4xy = 9, \\ (x + 2y)((x + 2y)^2 - 6xy) = 27. \end{cases}$$

Если положить  $u = x + 2y$  и  $v = 2xy$ , то получим систему уравнений

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 9, \\ u^3 - 3uv = 27. \end{cases} \quad (1.58)$$

Первоначально первое и второе уравнения системы (1.58) умножим на  $3u$  и  $-2$ , соответственно, а после этого сложим оба уравнения и получим  $3u^3 - 2u^3 = 27u - 54$  или

$$u^3 - 27u + 54 = 0. \quad (1.59)$$

Так как  $u^3 - 27u + 54 = (u - 3)^2(u + 6)$ , то корнями уравнения (1.59) являются  $u_1 = 3$  и  $u_2 = -6$ . Из первого уравнения

системы (1.58) имеем  $v = \frac{u^2 - 9}{2}$ . В этой связи  $v_1 = \frac{u_1^2 - 9}{2} = 0$  и

$$v_2 = \frac{u_2^2 - 9}{2} = \frac{27}{2}.$$

Однако  $u = x + 2y$  и  $v = 2xy$ , поэтому здесь имеем две системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2xy = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y = -6, \\ 2xy = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

Первая система уравнений имеет корни:

$$x_1 = 0, y_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 3, y_2 = 0,$$

а вторая система уравнений является несовместной.

**Ответ:**  $x_1 = 0, y_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 3, y_2 = 0$ .

**1.34. Решить систему уравнений**

$$\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases} \quad (1.60)$$

**Решение.** Так как

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(y^2 + 1) &= x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1 = \\ &= x^2 y^2 - 2xy + 1 + x^2 + 2xy + y^2 = (xy - 1)^2 + (x + y)^2, \end{aligned}$$

то система (1.60) будет равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} (x + y)^2 + (xy - 1)^2 = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases} \quad (1.61)$$

Если положить  $u = x + y$  и  $v = xy - 1$ , то из системы (1.61)

получаем систему уравнений  $\begin{cases} u^2 + v^2 = 10, \\ uv = 3, \end{cases}$  корнями которой

являются  $u_1 = 1, v_1 = 3$ ,  $u_2 = 3, v_2 = 1$ ,  $u_3 = -1, v_3 = -3$  и  $u_4 = -3, v_4 = -1$ .

Поскольку  $u = x + y$  и  $v = xy - 1$ , то здесь имеем четыре системы уравнений относительно переменных  $x$  и  $y$  следующего вида:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy - 1 = 3, \end{cases} \begin{cases} x + y = 3, \\ xy - 1 = 1, \end{cases} \begin{cases} x + y = -1, \\ xy - 1 = -3, \end{cases} \begin{cases} x + y = -3, \\ xy - 1 = -1. \end{cases}$$

Первая и третья системы уравнений являются несовместными, а из остальных систем получаем корни системы уравнений (1.60).

**Ответ:**

$$x_1 = 1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2 = 1, x_3 = 0, y_3 = -3, x_4 = -3, y_4 = 0.$$

### 1.35. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{5}{x^2 + xy} + \frac{4}{y^2 + xy} = \frac{13}{6}, \\ \frac{8}{x^2 + xy} - \frac{1}{y^2 + xy} = 1. \end{cases} \quad (1.62)$$

**Решение.** Если обозначить  $u = \frac{1}{x^2 + xy}$  и  $v = \frac{1}{y^2 + xy}$ , то из системы уравнений (1.62) получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 30u + 24v = 13, \\ 8u - v = 1. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, получаем  $u_1 = \frac{1}{6}$  и  $v_1 = \frac{1}{3}$ .

Так как  $\frac{1}{x^2 + xy} = \frac{1}{6}$  и  $\frac{1}{y^2 + xy} = \frac{1}{3}$ , то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ y^2 + xy = 3. \end{cases} \quad (1.63)$$

Если сложить уравнения системы (1.63), то получим  $(x + y)^2 = 9$  или  $x + y = \pm 3$ . Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $x + y = 3$ . Подставим выражение  $y = 3 - x$  в первое уравнение системы (1.63) и получим  $x^2 + x(3 - x) = 6$  или  $x_1 = 2$ . Очевидно, что здесь  $y_1 = 1$ .

2. Если  $x + y = -3$ , то  $y = -3 - x$  и из первого уравнения системы (1.63) получаем  $x^2 + x(-3 - x) = 6$ ,  $x_2 = -2$  и  $y_2 = -1$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ ,  $y_2 = -1$ .

### 1.36. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 3xyz = -4, \\ 2y^3 + xyz = 3, \\ 3z^3 + 2xyz = -1. \end{cases}$$

**Решение.** Заданная система уравнений равносильна системе

$$\begin{cases} x^3 = 3xyz - 4, \\ 2y^3 = -xyz + 3, \\ 3z^3 = -2xyz - 1. \end{cases} \quad (1.64)$$

Если перемножить между собой левые и правые части уравнений системы (1.64) и при этом обозначить  $u = xyz$ , то получим

$$6u^3 = (3u - 4)(u - 3)(2u + 1) \text{ или } 23u^2 - 11u - 12 = 0.$$

Корнями уравнения  $23u^2 - 11u - 12 = 0$  являются  $u_1 = 1$  и

$$u_2 = -\frac{12}{23}.$$

Так как  $u_1 = 1$ , то  $xyz = 1$  и система уравнений (1.64) принимает вид  $x^3 = -1$ ,  $2y^3 = 2$  и  $3z^3 = -3$ , т. е.  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 1$  и  $z_1 = -1$ .

Если  $u_2 = -\frac{12}{23}$ , то  $xyz = -\frac{12}{23}$  и из системы уравнений (1.64) получаем  $x^3 = -\frac{36}{23} - 4 = -\frac{128}{23}$ ,  $2y^3 = \frac{12}{23} + 3 = \frac{81}{23}$  и  $3z^3 = \frac{24}{23} - 1 = \frac{1}{23}$ . Отсюда вытекает  $x_2 = -4\sqrt[3]{\frac{2}{23}}$ ,  $y_2 = 3\sqrt[3]{\frac{3}{46}}$  и  $z_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{69}}$ .

**Ответ:**

$$x_1 = -1, y_1 = 1, z_1 = -1, x_2 = -4\sqrt[3]{\frac{2}{23}}, y_2 = 3\sqrt[3]{\frac{3}{46}}, z_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{69}}.$$

### 1.37. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - xyz = \frac{1}{3}\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}, \\ y^3 - xyz = -\frac{5}{6}\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}, \\ z^3 - xyz = \frac{7}{2}\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}, \end{cases} \quad (1.65)$$

где  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  и  $z \geq 0$ .

**Решение.** Если обозначить  $u = \frac{1}{6}\sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$  и  $v = xyz$ , то система уравнений (1.65) будет равносильна системе уравнений



$$\begin{cases} x^3 - v = 2u, \\ y^3 - v = -5u, \\ z^3 - v = 21u, \end{cases} \quad (1.66)$$

где  $u \geq 0$  и  $v \geq 0$ . Если сложить уравнения системы (1.66), то получим  $x^3 + y^3 + z^3 - 3v = 18u$  или

$$36u^2 - 18u = 3v. \quad (1.67)$$

Так как система уравнений (1.66) равносильна системе

$$\begin{cases} x^3 = v + 2u, \\ y^3 = v - 5u, \\ z^3 = v + 21u, \end{cases} \quad (1.68)$$

то после перемножения уравнений системы (1.68) получим

$$v^3 = (v + 2u)(v - 5u)(v + 21u) \text{ или}$$

$$u(210u^2 + 73uv - 18v^2) = 0. \quad (1.69)$$

Корнями уравнения (1.69) относительно переменной  $u$  являются  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = \frac{v}{6}$  и  $u_3 = -\frac{18v}{35}$ . Однако известно, что  $u \geq 0$  и  $v \geq 0$ . Поэтому из равенства  $35u_3 = -18v$  вытекает  $u_3 = 0$ .

Следовательно, здесь требуется рассмотреть только два случая, а именно:  $u_1 = 0$  и  $u_2 = \frac{v}{6}$ .

1. Если  $u_1 = 0$ , то из уравнения (1.67) и системы уравнений (1.68) получаем  $v_1 = 0$  и  $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ .

2. Если  $u_2 = \frac{v}{6}$ , то из уравнения (1.67) следует  $v^2 - 3v = 3v$  или  $v_1 = 0$  и  $v_2 = 6$ . В таком случае из системы уравнений (1.68) вытекает

$$x_2^3 = v_2 + 2u_2 = v_2 + \frac{v_2}{3} = \frac{4v_2}{3} = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8,$$

$$y_2^3 = v_2 - 5u_2 = v_2 - \frac{5v_2}{6} = \frac{v_2}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$

$$z_2^3 = v_2 + 21u_2 = v_2 + \frac{7v_2}{2} = \frac{9v_2}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27$$

или  $x_2 = 2$ ,  $y_2 = 1$  и  $z_2 = 3$ .

**Ответ:**  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $y_2 = 1$ ,  $z_2 = 3$ .

# Тригонометрическая подстановка

*В математике есть своя красота,  
как в живописи и поэзии.*

Русский ученый, механик  
Н. Е. Жуковский

Применение тригонометрической подстановки является одним из наиболее необычных (нестандартных) методов решения алгебраических уравнений. Применение такого метода позволяет свести решение алгебраических уравнений к решению тригонометрических уравнений. Естественно, что для эффективного применения такого метода школьники должны знать тригонометрические формулы и иметь определенные навыки решения тригонометрических уравнений.

## Основные понятия и определения

Приведем примеры простейших тригонометрических подстановок. При этом отметим особенность применения метода тригонометрической подстановки: если тригонометрическое уравнение имеет, как правило, бесконечное множество корней, то алгебраическое уравнение имеет конечное их число.

К простейшим видам тригонометрической подстановки относятся следующие замены переменных:  $x = \sin \omega$ ,  $x = \cos \omega$  и  $x = \operatorname{tg} \omega$ .

Если областью определения переменной  $x$  в алгебраическом уравнении является отрезок  $-1 \leq x \leq 1$ , то в таком случае часто является полезной подстановка  $x = \sin \omega$  при условии,

что  $-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ , или подстановка  $x = \cos \omega$ , где  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

А в том случае, когда переменная  $x$  в уравнении принимает произвольные значения, можно воспользоваться тригонометрической подстановкой  $x = \operatorname{tg} \omega$ , где  $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ .

Приведем некоторые наиболее часто встречаемые равенства, которые приходится учитывать в процессе применения метода тригонометрической подстановки.

1. Если  $x = \sin \omega$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos \omega \geq 0$ ,  $|\cos \omega| = \cos \omega$

и поэтому  $\sqrt{1-x^2} = \cos \omega$ . Кроме того, в таком случае

$$1 - 2x^2 = \cos 2\omega, \quad -4x^3 + 3x = \sin 3\omega,$$

$$\sqrt{1-x} = \left| \sin \frac{\omega}{2} - \cos \frac{\omega}{2} \right| \text{ и } \sqrt{1+x} = \left| \sin \frac{\omega}{2} + \cos \frac{\omega}{2} \right|.$$

2. Если  $x = \cos \omega$  и  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то  $\sin \omega \geq 0$ ,  $|\sin \omega| = \sin \omega$  и здесь  $\sqrt{1-x^2} = \sin \omega$ . При этом

$$2x^2 - 1 = \cos 2\omega, \quad 4x^3 - 3x = \cos 3\omega,$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \text{ и } \sqrt{1+x} = \sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2}.$$

Отметим, если  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то  $0 \leq \frac{\omega}{2} \leq \frac{\pi}{2}$  и поэтому в этом случае  $\sin \frac{\omega}{2} \geq 0$  и  $\cos \frac{\omega}{2} \geq 0$ .

3. Если  $x = \operatorname{tg} \omega$  и  $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos \omega \geq 0$ ,  $|\cos \omega| = \cos \omega$  и  $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos \omega}$ . При такой подстановке (на области допустимых значений  $x$ ) справедливы равенства

$$\frac{2x}{1+x^2} = \sin 2\omega, \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos 2\omega, \quad \frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{tg} 2\omega \text{ и } x + \frac{1}{x} = \frac{2}{\sin 2\omega}.$$

Рассмотрим иррациональные и рациональные уравнения, решение которых посредством применения тригонометрических подстановок сводится к решению тригонометрических уравнений.

## Уравнения

### 2.1. Решить уравнение

$$2x^2 = 2x\sqrt{1-x^2} + 1. \quad (2.1)$$

**Решение.** Так как из уравнения (2.1) следует, что  $-1 \leq x \leq 1$ , то можно выполнить подстановку  $x = \cos \omega$ , где  $0 \leq \omega \leq \pi$ . В таком случае уравнение  $2x^2 - 1 = 2x\sqrt{1-x^2}$  примет вид три-

гонометрического уравнения  $\cos 2\omega = 2\cos \omega |\sin \omega|$ . Так как здесь  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то  $\sin \omega \geq 0$  и в этой связи имеем уравнения  $\cos 2\omega = 2\cos \omega \sin \omega$  или  $\cos 2\omega = \sin 2\omega$ .

Из уравнения  $\cos 2\omega = \sin 2\omega$  получаем  $\operatorname{tg} 2\omega = 1$  и  $\omega = \frac{\pi}{8}(4n+1)$ , где  $n$  — целое число. Поскольку  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то  $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$  и  $\omega_2 = \frac{5\pi}{8}$ .

Следовательно, уравнение (2.1) имеет два корня:

$$x_1 = \cos \omega_1 = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ и}$$

$$x_2 = \cos \omega_2 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ .

## 2.2. Решить уравнение

$$1+x^3=(x^2+3x-1)\sqrt{1-x^2}. \quad (2.2)$$

**Решение.** Так как здесь  $-1 \leq x \leq 1$ , то положим  $x = \cos \omega$ , при условии, что  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Тогда из уравнения (2.2) получим

$$1+\cos^3 \omega = \sin \omega (\cos^2 \omega + 3\cos \omega - 1),$$

$$1+\cos^3 \omega = \sin \omega (-\sin^2 \omega + 3\cos \omega),$$

$$\begin{aligned}\sin^3 \omega + \cos^3 \omega &= 3 \sin \omega \cos \omega - 1 \text{ или} \\ (\sin \omega + \cos \omega)(1 - \sin \omega \cos \omega) &= 3 \sin \omega \cos \omega - 1.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Если обозначить

$$y = \sin \omega + \cos \omega, \text{ то } \sin \omega \cos \omega = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

и уравнение (2.3) примет вид  $y \left( 1 - \frac{1}{2}(y^2 - 1) \right) = \frac{3}{2}(y^2 - 1) - 1$

или

$$y^3 + 3y^2 - 3y - 5 = 0. \quad (2.4)$$

Подбором находим корень уравнения (2.4) вида  $y_1 = -1$ .

Так как

$$\frac{y^3 + 3y^2 - 3y - 5}{y + 1} = y^2 + 2y - 5,$$

то для поиска остальных корней уравнения (2.4) необходимо рассмотреть уравнение  $y^2 + 2y - 5 = 0$ , корнями которого являются  $y_2 = -1 + \sqrt{6}$  и  $y_3 = -1 - \sqrt{6}$ .

Однако по определению  $y = \sin \omega + \cos \omega$ , поэтому  $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$ . Так как  $\sqrt{2} < \sqrt{6} - 1$ , то уравнение (2.4) имеет только один подходящий корень, а именно  $y_1 = -1$ .

Поскольку  $\sin \omega + \cos \omega = -1$  и  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то  $\omega_1 = \pi$  и  $x_1 = \cos \omega_1 = -1$ .

**Ответ:**  $x_1 = -1$

**2.3. Решить уравнение**

$$2x - \sqrt{1 - 4x^2} = \sqrt{2}(8x^2 - 1). \quad (2.5)$$

**Решение.** Областью определения переменной  $x$  в уравнении (2.5) являются  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ . В этой связи можно выполнить тригонометрическую подстановку  $x = \frac{1}{2} \cos \omega$ , где  $0 \leq \omega \leq \pi$ . После этой замены уравнение (2.5) принимает вид  $\cos \omega - \sin \omega = \sqrt{2} \cos 2\omega$  или

$$\cos \omega - \sin \omega = \sqrt{2}(\cos \omega - \sin \omega)(\cos \omega + \sin \omega).$$

Отсюда получаем совокупность двух уравнений:

$$\cos \omega - \sin \omega = 0 \text{ и } \cos \omega + \sin \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Уравнение  $\cos \omega - \sin \omega = 0$  или  $\operatorname{tg} \omega = 1$  на отрезке  $0 \leq \omega \leq \pi$  имеет единственный корень  $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ .

Рассмотрим уравнение  $\cos \omega + \sin \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , которое равносильно уравнению  $\sqrt{2} \sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  или  $\sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ .

Отсюда получаем  $\omega = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n$ , где  $n$  — целое число.

Так как  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то полагая  $n = 1$ , получаем



$$\omega_2 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{12}.$$

Следовательно, уравнение (2.5) имеет два корня

$$x_1 = \frac{1}{2} \cos \omega_1 = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ и}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \cos \omega_2 = \frac{1}{2} \cos \frac{7\pi}{12} = \\ &= -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}, x_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}.$

## 2.4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (2.6)$$

**Решение.** Так как областью определения переменной  $x$  в уравнении (2.6) является вся числовая ось  $OX$ , то сделаем замену переменной  $x = \operatorname{tg} \omega$ , где  $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ . В таком случае из уравнения (2.6) получаем

$$\frac{1}{\cos \omega} - \operatorname{tg} \omega = \frac{5}{2} \cos \omega, \quad 1 - \sin \omega = \frac{5}{2} \cos^2 \omega,$$

$$2 - 2 \sin \omega = 5 (1 - \sin^2 \omega)$$

или

$$5 \sin^2 \omega - 2 \sin \omega - 3 = 0. \quad (2.7)$$

Так как  $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ , то  $-1 < \sin \omega < 1$  и уравнение (2.7)

имеет только один подходящий корень  $\sin \omega_1 = -\frac{3}{5}$ .

Если  $\sin \omega_1 = -\frac{3}{5}$ , то  $\operatorname{tg}^2 \omega_1 = \frac{\sin^2 \omega_1}{1 - \sin^2 \omega_1} = \frac{9}{25} : \left(1 - \frac{9}{25}\right) = \frac{9}{16}$ .

Поскольку

$$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \text{ и } \sin \omega_1 < 0,$$

то

$$\operatorname{tg} \omega_1 < 0 \text{ и } x_1 = \operatorname{tg} \omega_1 = -\frac{3}{4}.$$

**Ответ:**  $x_1 = -\frac{3}{4}$ .

## 2.5. Решить уравнение

$$8x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2) = \sqrt{3}. \quad (2.8)$$

**Решение.** Так как из уравнения (2.8) следует, что  $-1 \leq x \leq 1$ ,

то можно обозначить  $x = \sin \omega$ , где  $-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ . Отметим, что

в таком случае  $\cos \omega \geq 0$  и  $\sqrt{1 - \sin^2 \omega} = |\cos \omega| = \cos \omega$ .

Так как  $x = \sin \omega$ , то из уравнения (2.8) получим

$$8 \sin \omega \cdot \cos \omega \cdot \cos 2\omega = \sqrt{3} \text{ или } \sin 4\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда следует  $\omega = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}n$ , где  $n$  — целое число.

Так как  $-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ , то здесь имеем  $\omega_1 = -\frac{5\pi}{12}$ ,  $\omega_2 = -\frac{\pi}{3}$ ,

$\omega_3 = \frac{\pi}{12}$  и  $\omega_4 = \frac{\pi}{6}$ . Однако  $x = \sin \omega$ , поэтому

$$x_1 = \sin \omega_1 = \sin \left( -\frac{5\pi}{12} \right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$x_2 = \sin \omega_2 = \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \sin \omega_3 = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ и}$$

$$x_4 = \sin \omega_4 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

**Ответ:**  $x_1 = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ,  $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ,  $x_4 = \frac{1}{2}$ .

## 2.6. Решить уравнение

$$4x - \sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2.9)$$

**Решение.** Так как областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (2.9) являются  $-1 < x < 1$ , то можно выполнить тригонометрическую подстановку  $x = \sin \omega$ , где  $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ . Поскольку на данном интервале  $\cos \omega > 0$ , то уравнение (2.9) будет равносильно тригонометрическим уравнениям

$$4 \sin \omega - \sqrt{3} = \frac{\sin \omega}{\cos \omega}, \quad \sin 2\omega = \frac{1}{2} \sin \omega + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega \quad \text{или}$$

$$\sin 2\omega = \sin \left( \omega + \frac{\pi}{3} \right). \quad (2.10)$$

Корнями уравнения (2.10) являются две серии корней

$$2\omega = \omega + \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{и} \quad 2\omega = \pi - \omega - \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{или}$$

$$\omega = \frac{\pi}{3}(6n+1), \quad \omega = \frac{2\pi}{9}(3k+1), \quad (2.11)$$

где  $n, k$  — целые числа.

Так как  $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ , то из формул (2.11) получаем три под-

ходящих корня уравнения (2.10), т. е.  $\omega_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $\omega_2 = -\frac{4\pi}{9}$  и

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{9}.$$

Поскольку  $x = \sin \omega$ , то

$$x_1 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\sin \frac{4\pi}{9} \quad \text{и} \quad x_3 = \sin \frac{2\pi}{9}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\sin \frac{4\pi}{9}, \quad x_3 = \sin \frac{2\pi}{9}.$

**2.7. Решить уравнение**

$$\frac{5x}{\sqrt{1-x^2}} - 6x\sqrt{1-x^2} = 2. \quad (2.12)$$

**Решение.** Из уравнения (2.12) следует, что  $-1 < x < 1$ . В этой связи можно обозначить  $x = \cos \omega$ , где  $0 < \omega < \pi$ .

Так как  $0 < \omega < \pi$ , то  $\sin \omega > 0$ ,  $\sqrt{1 - \cos^2 \omega} = |\sin \omega| = \sin \omega$  и уравнение (2.12) принимает вид

$$\frac{5 \cos \omega}{\sin \omega} - 6 \sin \omega \cdot \cos \omega = 2, \quad \frac{5 \cos \omega}{\sin \omega} - \frac{6 \sin \omega \cdot \cos \omega}{\sin^2 \omega + \cos^2 \omega} = 2,$$

$$5 \operatorname{ctg} \omega - \frac{6 \operatorname{ctg} \omega}{1 + \operatorname{ctg}^2 \omega} = 2 \text{ или}$$

$$5 \operatorname{ctg}^3 \omega - 2 \operatorname{ctg}^2 \omega - \operatorname{ctg} \omega - 2 = 0. \quad (2.13)$$

Введем новую переменную  $y = \operatorname{ctg} \omega$ . Тогда из уравнения (2.13) получаем кубическое уравнение  $5y^3 - 2y^2 - y - 2 = 0$ , первый корень которого  $y_1 = 1$  находим методом подбора.

Так как  $\frac{5y^3 - 2y^2 - y - 2}{y - 1} = 5y^2 + 3y + 2$  и уравнение

$5y^2 + 3y + 2 = 0$  не имеет действительных корней, то  $\operatorname{ctg} \omega = 1$  является единственным корнем уравнения (2.13).

Если  $\operatorname{ctg} \omega = 1$  и  $0 < \omega < \pi$ , то  $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ . Поскольку  $x = \cos \omega$ ,

$$\text{то } x_1 = \cos \omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

### 2.8. Решить уравнение

$$2x + \frac{5-x}{\sqrt{1+x^2}} = 10. \quad (2.14)$$

**Решение.** Так как в уравнении (2.14) переменная  $x$  может принимать произвольные значения, то обозначим  $x = \operatorname{tg} \omega$ , где

$$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}. \text{ В таком случае}$$

$$\cos \omega > 0, \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \omega} = \frac{1}{\cos \omega}$$

и из уравнения (2.14) получаем

$$2 \operatorname{tg} \omega + \frac{5 - \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}} = 10, \quad 2 \operatorname{tg} \omega + \cos \omega (5 - \operatorname{tg} \omega) = 10,$$

$$2 \sin \omega + 5 \cos^2 \omega - \sin \omega \cos \omega - 10 \cos \omega = 0 \text{ или}$$

$$(\sin \omega - 5 \cos \omega)(2 - \cos \omega) = 0. \quad (2.15)$$

Поскольку  $2 - \cos \omega > 0$ , то из уравнения (2.15) следует, что  $\sin \omega = 5 \cos \omega$  или  $\operatorname{tg} \omega = 5$ . Однако  $x = \operatorname{tg} \omega$ , поэтому  $x_1 = 5$ .

**Ответ:**  $x_1 = 5$ .

## 2.9. Решить уравнение

$$\sqrt{1-2x} - 4x\sqrt{1-4x^2} = 8x^2 - 1. \quad (2.16)$$

**Решение.** Так как из уравнения (2.16) следует  $-1 \leq 2x \leq 1$ , то можно обозначить  $2x = \cos \omega$ , где  $0 \leq \omega \leq \pi$ . В таком случае  $\sin \omega \geq 0$  и поэтому  $\sqrt{1-4x^2} = \sin \omega$  и  $\sqrt{1-\cos \omega} = \sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2}$ .

После выполнения тригонометрической подстановки в уравнение (2.16) получаем

$$\sqrt{1-\cos \omega} - 2 \sin \omega \cdot \cos \omega = 2 \cos^2 \omega - 1,$$

$$\sqrt{1-\cos \omega} = \sin 2\omega + \cos 2\omega \text{ или}$$

$$\sin \left( 2\omega + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\omega}{2}.$$

Отсюда получаем

$$2\omega + \frac{\pi}{4} = \frac{\omega}{2} + 2\pi n \text{ и } 2\omega + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\omega}{2} + 2\pi k \text{ или}$$

$$\omega = \frac{\pi}{6} (8n-1) \text{ и } \omega = \frac{\pi}{10} (8k+3), \text{ где } n, k \text{ — целые числа.}$$

Так как  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то подходящим значением  $\omega$  является

$$\omega_1 = \frac{3\pi}{10}.$$

Поскольку  $x = \frac{\cos \omega}{2}$  и  $\cos \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ , то  $x_1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$ .

Ответ:  $x_1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}.$

### 2.10. Решить уравнение

$$8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 0. \quad (2.17)$$

**Решение.** Покажем, что в уравнении (2.17) выполняется двойное неравенство  $-1 \leq x \leq 1$ .

Если  $x > 1$ , то  $8x^3 - 6x + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{2} > 0$ , и если  $x < -1$ , то  $8x^3 - 6x + \sqrt{2} < -2 + \sqrt{2} < 0$ .

Уравнение (2.17) равносильно уравнению  $4x^3 - 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Если в данном уравнении выполнить подстановку  $x = \cos \omega$ , где  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то получим

$$4\cos^3 \omega - 3\cos \omega = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } \cos 3\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Корнями уравнения  $\cos 3\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  являются



$$3\omega = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \text{ или}$$

$$\omega = \frac{\pi}{12}(8n \pm 3), \text{ где } n \text{ — целое число.}$$

Так как  $0 \leq \omega \leq \pi$ , то отсюда получаем  $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\omega_2 = \frac{5\pi}{12}$  и

$\omega_3 = \frac{11\pi}{12}$ . Однако  $x = \cos \omega$ , поэтому

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x_2 = \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ и}$$

$$x_3 = \cos \frac{11\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ,  $x_3 = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

### 2.11. Решить уравнение

$$x(x-3)^2 = 1. \quad (2.18)$$

**Решение.** Из уравнения (2.18) следует, что  $0 < x < 4$ . В противном случае будет выполняться или  $x(x-3)^2 \leq 0$ , или  $x(x-3)^2 \geq 4$ .

Если  $0 < x < 4$ , то выполняется двойное неравенство  $-1 < \frac{x-2}{2} < 1$ . Пусть  $y = \frac{x-2}{2}$  или  $x = 2y + 2$ , тогда из уравнения (2.18) следует

$$(2y + 2)(2y - 1)^2 = 1, \quad 8y^3 - 6y + 2 = 1 \quad \text{или}$$

$$4y^3 - 3y = -\frac{1}{2}, \quad (2.19)$$

где  $-1 < y < 1$ .

Далее, выполним в уравнении (2.19) тригонометрическую подстановку  $y = \cos \omega$ , где  $0 < \omega < \pi$ , и получим

$$4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos 3\omega = -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{2\pi}{9} (3n \pm 1),$$

где  $n$  — целое число.

Нетрудно видеть, что последовательность  $\omega = \frac{2\pi}{9} (3n \pm 1)$  содержит только три значения  $\omega_1 = \frac{2\pi}{9}$ ,  $\omega_2 = \frac{4\pi}{9}$  и  $\omega_3 = \frac{8\pi}{9}$  переменной  $\omega$ , для которых  $0 < \omega < \pi$ .

Так как  $x = 2y + 2$  и  $y = \cos \omega$ , то  $x = 2 \cos \omega + 2 = 4 \cos^2 \frac{\omega}{2}$ .

Отсюда, принимая во внимание значения  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , получаем три корня уравнения (2.18) в тригонометрической форме.

**Ответ:**  $x_1 = 4 \cos^2 \frac{\pi}{9}$ ,  $x_2 = 4 \cos^2 \frac{2\pi}{9}$ ,  $x_3 = 4 \cos^2 \frac{4\pi}{9}$ .

**2.12. Решить систему уравнений**

$$\begin{cases} 4xy^2 + 3x = 5y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

**Решение.** Наличие уравнения  $x^2 + y^2 = 1$  предоставляет возможность обозначить  $x = \sin \omega$  и  $y = \cos \omega$ , где  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ . В таком случае первое уравнение системы (2.20) примет вид

$$4 \sin \omega \cdot \cos^2 \omega + 3 \sin \omega = 5 \cos \omega. \quad (2.21)$$

Из уравнения (2.21) следует, что  $\cos \omega \neq 0$ . В этой связи обе части уравнения (2.21) разделим на  $\cos \omega$  и получим равносильное уравнение  $2 \sin 2\omega + 3 \operatorname{tg} \omega = 5$ .

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой  $\sin 2\omega = \frac{2 \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega}$  и получим  $\frac{4 \operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega} + 3 \operatorname{tg} \omega = 5$  или

$$3z^3 - 5z^2 + 7z - 5 = 0, \quad (2.22)$$

где  $z = \operatorname{tg} \omega$ . Первый корень  $z_1 = 1$  уравнения (2.22) находим подбором.

$$\text{Так как } \frac{3z^3 - 5z^2 + 7z - 5}{z - 1} = 3z^2 - 2z + 5$$

и уравнение  $3z^2 - 2z + 5 = 0$  не имеет действительных корней (дискриминант отрицательный), то уравнение (2.22) имеет единственный корень  $z_1 = 1$ .

Поскольку  $\operatorname{tg} \omega = 1$  и  $0 \leq \omega \leq 2\pi$ , то  $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$  и  $\omega_2 = \frac{5\pi}{4}$ .

Однако  $x = \sin \omega$  и  $y = \cos \omega$ , поэтому система уравнений (2.20) имеет две пары корней  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### 2.13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right), \\ xy + xz + yz = 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

**Решение.** Из системы уравнений (2.23) видно, что все ее корни должны быть одного знака. Поэтому первоначально будем предполагать, что корни этой системы являются положительными.

Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$  и  $z > 0$ , то во всех уравнениях системы (2.23) выполним тригонометрическую подстановку  $x = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $y = \operatorname{tg} \beta$  и  $z = \operatorname{tg} \gamma$ , где  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ , и получим

$$\begin{cases} 3\left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = 4\left(\operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}\right) = 5\left(\operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma}\right), \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 1, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} \frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma}, \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Из второго уравнения системы (2.24) вытекает, что

$$\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) = 1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(\beta + \gamma), \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \gamma\right) \text{ или } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Принимая во внимание известную теорему геометрии – теорему синусов и двойное уравнение

$$\frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma},$$

можно утверждать, что  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$  являются углами треугольника, которые противолежат сторонам, длины которых равны 3, 4, 5, соответственно. Также из геометрии известно, что такой треугольник является прямоугольным и  $2\gamma = \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, имеем  $\gamma_1 = \frac{\pi}{4}$ .

Так как  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$  и  $\gamma_1 = \frac{\pi}{4}$ , то  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$  или  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

и  $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ . Однако  $x = \operatorname{tg} \alpha$  и  $y = \operatorname{tg} \beta$ , поэтому областью допустимых значений переменных  $x$  и  $y$  в системе уравнений (2.23) являются  $0 < x < 1$  и  $0 < y < 1$ .

Если подставить значение  $z_1 = \operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$  в двойное уравнение системы (2.23), то получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 10, \\ 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 10 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0, \\ 2y^2 - 5y + 2 = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Поскольку  $0 < x < 1$  и  $0 < y < 1$ , то подходящими корнями второй системы уравнений (2.25) являются  $x_1 = \frac{1}{3}$  и  $y_1 = \frac{1}{2}$ .

Ранее было отмечено, что все корни исходной системы уравнений (2.23) имеют один и тот же знак. Поэтому с учетом найденных положительных корней системы уравнений  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,

$y_1 = \frac{1}{2}$  и  $z_1 = 1$ , можно записать и отрицательные корни вида

$x_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $y_2 = -\frac{1}{2}$  и  $z_2 = -1$ . На всякий случай здесь можно сделать проверку, подставляя значения  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  в уравнения системы (2.23).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $y_1 = \frac{1}{2}$ ,  $z_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $y_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $z_2 = -1$ .

# Введение параметра

*Математика — это язык, на котором  
говорят все точные науки.*

Русский ученый, математик  
Н. И. Лобачевский

Метод введения параметра используют в самых разных разделах алгебры. В частности, посредством введения параметра могут быть решены некоторые сложные тригонометрические, иррациональные, логарифмические и показательные уравнения. Метод введения параметра позволяет нестандартное уравнение привести к уравнению привычного вида (например, к квадратному уравнению).

## Основные понятия и определения

Суть метода состоит в следующем. Если уравнение  $f(x) = 0$  содержит некоторую константу  $c$ , то в этом уравнении данную константу можно заменить параметром  $a$ , получив при этом уравнение относительно введенного параметра  $F(a) = 0$ . Причем уравнение  $F(a) = 0$  должно совпадать с уравнением  $f(x) = 0$  при условии  $a = c$ . Кроме того, уравнение  $F(a) = 0$  должно быть проще уравнения  $f(x) = 0$ .

Если уравнение  $F(a) = 0$  имеет  $k$  ( $k \geq 1$ ) корней

$$a_1 = g_1(x), a_2 = g_2(x), \dots, a_k = g_k(x).$$

то в завершающей стадии выполнения метода вместо значений параметра  $a_1, a_2, \dots, a_k$  подставим константу  $c$ , а затем будем решать  $k$  уравнений  $g_1(x) = c, g_2(x) = c, \dots, g_k(x) = c$ , относительно переменной  $x$ .

Отметим, что вводить параметр в уравнении  $f(x) = 0$  можно не только вместо константы, но также можно обозначать через параметр  $a$  некоторое алгебраическое выражение, содержащее неизвестные переменные.

## Уравнения

Применение метода введения параметра проиллюстрируем на примерах решения следующих уравнений.

### 3.1. Решить уравнение

$$x^3 - (\sqrt{3} + 1)x^2 + 3 = 0. \quad (3.1)$$

**Решение.** Положим  $a = \sqrt{3}$ , тогда уравнение (3.1) можно переписать в виде квадратного уравнения относительно параметра  $a$ , т. е.

$$a^2 - ax^2 + x^3 - x^2 = 0. \quad (3.2)$$



Корнями уравнения (3.2) являются

$$a_{1,2} = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}}{2} = \frac{x^2 \pm |x^2 - 2x|}{2} = \frac{x^2 \pm (x^2 - 2x)}{2}.$$

Отсюда получаем  $a_1 = x^2 - x$  и  $a_2 = x$ . Так как  $a = \sqrt{3}$ , то имеем уравнение  $x^2 - x - \sqrt{3} = 0$ , из которого следует  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$  и  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$ . Кроме того  $a_2 = x$ , поэтому  $x_3 = \sqrt{3}$ .

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}, x_3 = \sqrt{3}.$$

### 3.2. Решить уравнение

$$x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0. \quad (3.3)$$

**Решение.** Пусть параметр  $a = \sqrt{2}$ , тогда  $a^2 = 2$  и уравнение (3.3) можно переписать в виде квадратного уравнения относительно параметра  $a$ , т. е.

$$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0. \quad (3.4)$$

Отметим, что при переходе от уравнения (3.3) к уравнению (3.4) выражение  $2\sqrt{2}x^2$  было заменено на выражение  $2ax^2$ .

Корнями квадратного уравнения (3.4) являются

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4x^4 + 4x}}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2}.$$

Отсюда получаем  $a_1 = x^2 + x + 1$  и  $a_2 = x^2 - x$ .

Однако здесь  $a = \sqrt{2}$ , поэтому  $\sqrt{2} = x^2 + x + 1$  и  $\sqrt{2} = x^2 - x$ .

Решая уравнения  $x^2 + x + 1 - \sqrt{2} = 0$  и  $x^2 - x - \sqrt{2} = 0$ , получаем корни уравнения (3.3).

**Ответ:**

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2},$$

$$x_3 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}, \quad x_4 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}.$$

### 3.3. Решить уравнение

$$x^4 - 8x^2 - x + 12 = 0. \quad (3.5)$$

**Решение.** Преобразуем уравнение (3.5) следующим образом:

$$x^4 - 4 \cdot 2x^2 - x + 16 - 4 = 0, \quad 16 - 4(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0 \quad \text{или}$$

$$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0, \quad (3.6)$$

где  $a = 4$ . Так как уравнение (3.6) совпадает с уравнением (3.4), то

$$a_1 = x^2 + x + 1 \text{ и } a_2 = x^2 - x.$$

Так как  $a_1 = a_2 = 4$ , то здесь имеем два квадратных уравнения:  $x^2 + x - 3 = 0$  и  $x^2 - x - 4 = 0$ .

Корни приведенных выше квадратных уравнений являются корнями уравнения (3.5).

**Ответ:**

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, x_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, x_4 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}.$$

### 3.4. Решить уравнение

$$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0. \quad (3.7)$$

**Решение.** Вместо уравнения (3.7) будем рассматривать уравнение с параметром  $x^6 - (a^2 + 1)x^2 + a = 0$ , которое представим в виде квадратного уравнения

$$x^2 a^2 - a + x^2 - x^6 = 0, \quad (3.8)$$

где  $a = \sqrt{6}$ . Если уравнение (3.8) решать относительно параметра  $a$ , то получим

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^2(x^2 - x^6)}}{2x^2} = \frac{1 \pm (2x^4 - 1)}{2x^2}.$$

Отсюда следует  $a_1 = x^2$  и  $a_2 = \frac{1 - x^4}{x^2}$ .

Так как  $a_1 = a_2 = \sqrt{6}$ , то получаем два уравнения  $x^2 = \sqrt{6}$  и  $x^4 + \sqrt{6}x^2 - 1 = 0$ , корни которых являются корнями уравнения (3.7).

**Ответ:**

$$x_1 = \sqrt[4]{6}, x_2 = -\sqrt[4]{6}, x_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}},$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}}.$$

### 3.5. Решить уравнение

$$x^2 = (12x^2 + 7x - 6)(1 - 2x^2). \quad (3.9)$$

**Решение.** Пусть  $a = 1 - 2x^2$ , тогда перепишем уравнение (3.9) в виде

$$x^2 = (-6(1 - 2x^2) + 7x)(1 - 2x^2),$$

$$x^2 = a(7x - 6a) \text{ или}$$

$$6a^2 - 7ax + x^2 = 0.$$

Так как  $6a^2 - 7ax + x^2 = (a - x)(6a - x)$ , то необходимо рассмотреть два случая:  $x = a$  и  $x = 6a$

1. Если  $a = x$ , то  $1 - 2x^2 = x$  или  $2x^2 + x - 1 = 0$ . Отсюда получаем корни уравнения (3.9) вида  $x_1 = -1$  и  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

2. Если  $6a = x$ , то имеем уравнение  $12x^2 + x - 6 = 0$ . Корнями данного уравнения являются  $x_3 = -\frac{3}{4}$  и  $x_4 = \frac{2}{3}$ .

**Ответ:**  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = -\frac{3}{4}$ ,  $x_4 = \frac{2}{3}$ .

### 3.6. Решить уравнение

$$(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1). \quad (3.10)$$

**Решение.** Если  $a = x^2 + x + 1$ , то из уравнения (3.10) получаем уравнения  $a^2 = x^2(2x^2 + a)$  или

$$a^2 - x^2a - 2x^4 = 0. \quad (3.11)$$

Поскольку  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ , то  $a > 0$ .

Корнями уравнения (3.11) являются

$$a_{1,2} = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 + 8x^4}}{2} = \frac{x^2 \pm 3x^2}{2}.$$

Так как  $a > 0$ , то  $a = 2x^2$ .

Так как  $a = x^2 + x + 1$  и  $a = 2x^2$ , то  $x^2 - x - 1 = 0$ . Отсюда получаем два корня уравнения (3.10) вида

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**3.7. Решить уравнение**

$$\frac{x^2}{4} - 2 = \sqrt{4x + 8}. \quad (3.12)$$

**Решение.** Для определения области допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (3.12) рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - 2 \geq 0, \\ 4x + 8 \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что искомую область образуют  $x \geq 2\sqrt{2}$ .

Уравнение (3.12) равносильно уравнению  $x^2 - 8 = 4\sqrt{4x + 8}$ .

Если в данном уравнении положить  $a = 8$ , то получим  $x^2 - a = 4\sqrt{4x + a}$  или

$$a^2 - 2a(x^2 + 8) + x^4 - 64x = 0.$$

Корнями квадратного уравнения относительно параметра  $a$  являются

$$a_{1,2} = x^2 + 8 \pm \sqrt{(x^2 + 8)^2 - x^4 + 64x} = x^2 + 8 \pm 4|x + 2| \text{ или}$$

$$a_1 = x^2 + 8 + 4(x + 2) = x^2 + 4x + 16 \text{ и}$$

$$a_2 = x^2 + 8 - 4(x + 2) = x^2 - 4x.$$

Так как  $a_1 = a_2 = 8$ , то здесь имеем два уравнения

$$x^2 + 4x + 8 = 0 \text{ и } x^2 - 4x - 8 = 0.$$

Первое уравнение действительных корней не имеет (дискриминант отрицательный), а из второго уравнения с учетом, что  $x \geq 2\sqrt{2}$ , получаем единственный корень уравнения (3.12) вида  $x_1 = 2 + 2\sqrt{3}$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2 + 2\sqrt{3}$ .

### 3.8. Решить уравнение

$$\sqrt{5-x} = x^2 - 5. \quad (3.13)$$

**Решение.** Так как  $5-x \geq 0$  и  $x^2 - 5 \geq 0$ , то областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (3.13) является объединение двух интервалов:  $x \leq -\sqrt{5}$  и  $\sqrt{5} \leq x \leq 5$ .

Вместо уравнения (3.13) будем рассматривать уравнение с параметром  $a$  вида

$$\sqrt{a-x} = x^2 - a, \quad (3.14)$$

где  $a = 5$ .

Возведем в квадрат обе части уравнения (3.14) и получим квадратное уравнение относительно параметра  $a$  вида

$$a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 + x = 0. \quad (3.15)$$

Решая уравнение (3.15), получаем

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 + x)}}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x - 1)}{2},$$

т. е.  $a_1 = x^2 + x$  и  $a_2 = x^2 - x + 1$ .

Поскольку  $a = 5$ , то здесь имеем два уравнения  $x^2 + x - 5 = 0$  и  $x^2 - x - 4 = 0$ , корнями которых являются

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$  и  $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ . Однако  $x \leq -5$  и  $5 \leq x \leq 5$ ,

поэтому уравнение (3.13) имеет только два корня

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \text{ и } x_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

**Ответ:**  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, x_3 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$

### 3.9. Решить уравнение

$$x^4 - 12x^2 + 16\sqrt{2}x - 12 = 0. \quad (3.16)$$

**Решение.** Если ввести параметр  $a = \sqrt{2}$ , то уравнение (3.16) примет вид уравнения с параметром

$$3a^4 - 8a^3x + 6a^2x^2 - x^4 = 0. \quad (3.17)$$

Преобразуем уравнение (3.17) следующим образом:

$$(4a^4 - 8a^3x + 4a^2x^2) - (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) = 0,$$



$$(2a^2 - 2ax)^2 - (a^2 - x^2)^2 = 0,$$

$$(3a^2 - 2ax - x^2)(a^2 - 2ax + x^2) = 0,$$

$$(a - x)^3(3a + x) = 0.$$

Следовательно, имеем  $a_1 = x$  и  $a_2 = -\frac{x}{3}$ . Так как  $a = \sqrt{2}$ , то корнями уравнения (3.16) являются  $x_1 = \sqrt{2}$  и  $x_2 = -3\sqrt{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_2 = -3\sqrt{2}$ .

### 3.10. Решить уравнение

$$x^4 - (x + 2)(3x^2 - 2x - 4) = 0. \quad (3.18)$$

**Решение.** Если обозначить  $a = x + 2$ , то из уравнения (3.18) получим  $x^4 - a(3x^2 - 2a) = 0$ ,  $2a^2 - 3ax^2 + x^4 = 0$  или  $(2a - x^2)(a - x^2) = 0$ .

Отсюда следует, что  $a_1 = \frac{x^2}{2}$  и  $a_2 = x^2$ . Однако  $a = x + 2$ , поэтому здесь имеем два квадратных уравнения  $x^2 - 2x - 4 = 0$  и  $x^2 - x - 2 = 0$ . Данные уравнения имеют четыре корня:  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$  и  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ ,  $x_2 = 1 - \sqrt{5}$ ,  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = 2$ .

**3.11. Решить уравнение**

$$\frac{(x^2 + x + 1)^2}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} = \frac{49}{45}. \quad (3.19)$$

**Решение.** Если положить  $a = x^2 + 1$ , то уравнение (3.19) принимает вид

$$\frac{(a + x)^2}{a(a + 2x)} = \frac{49}{45}, \quad \frac{a^2 + 2ax + x^2}{a^2 + 2ax} = \frac{49}{45}, \quad \frac{x^2}{a^2 + 2ax} = \frac{4}{45} \text{ или}$$

$$4a^2 + 8ax - 45x^2 = 0. \quad (3.20)$$

Корнями уравнения (3.20) являются

$$a_{1,2} = \frac{-4x \pm \sqrt{16x^2 + 180x^2}}{4} = \frac{-4x \pm 14x}{4} \text{ или } a_1 = \frac{5x}{2} \text{ и}$$

$$a_2 = -\frac{9x}{2}.$$

Так как  $a = x^2 + 1$ , то  $x^2 + 1 = \frac{5x}{2}$  и  $x^2 + 1 = -\frac{9x}{2}$ . Здесь имеем два квадратных уравнения

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ и } 2x^2 + 9x + 2 = 0,$$

решая которые получаем корни уравнения (3.19).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = \frac{-9 - \sqrt{65}}{4}$ ,  $x_4 = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4}$ .

**3.12. Решить уравнение**

$$\frac{x^2 + 8x - 4}{x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 4}. \quad (3.21)$$

**Решение.** Введем параметр  $a = \sqrt{x^2 - 4}$ , тогда уравнение (3.21) можно переписать, как

$$\frac{a^2 + 8x}{x + 2} = 2a \text{ или } a^2 - 2a(x + 2) + 8x = 0,$$

где  $a \geq 0$ .

Отсюда получаем

$$a_{1,2} = x + 2 \pm \sqrt{(x + 2)^2 - 8x} = x + 2 \pm (x - 2)$$

или  $a_1 = 2x$  и  $a_2 = 4$ . Рассмотрим два случая.

1. Если  $a_1 = 2x$ , то  $\sqrt{x^2 - 4} = 2x$  или  $3x^2 = -4$ . Очевидно, что здесь действительных корней нет.

2. Если  $a_2 = 4$ , то  $\sqrt{x^2 - 4} = 4$ ,  $x^2 = 20$  или  $x_1 = -2\sqrt{5}$ ,  $x_2 = 2\sqrt{5}$ .

Подстановкой найденных значений переменной  $x$  в уравнение (3.21) убеждаемся в том, что  $x_1$  и  $x_2$  являются его корнями.

**Ответ:**  $x_1 = -2\sqrt{5}$ ,  $x_2 = 2\sqrt{5}$ .

**3.13. Решить уравнение**

$$\sqrt{x+4} - 2\sqrt[3]{x-13} = 7. \quad (3.22)$$

**Решение.** Пусть  $a = \sqrt[3]{x-13}$ , тогда  $x = a^3 + 13$ . В таком случае уравнение (3.22) можно представить как  $\sqrt{a^3 + 17} - 2a = 7$  или

$$\sqrt{a^3 + 17} = 2a + 7. \quad (3.23)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (3.23) и получим

$$a^3 - 4a^2 - 28a - 32 = 0.$$

Преобразуем кубическое уравнение следующим образом:

$$a^3 + 4a^2 + 4a - 8a^2 - 32a - 32 = 0,$$

$$a(a+2)^2 - 8(a+2)^2 = 0 \text{ или } (a-8)(a+2)^2 = 0.$$

Отсюда получаем  $a_1 = -2$  и  $a_2 = 8$ . Из уравнения (3.23) следует, что  $a \geq -\frac{7}{2}$ . Очевидно, что найденные значения  $a_1$  и  $a_2$  удовлетворяют данному неравенству.

Так как  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 8$  и  $x = a^3 + 13$ , то  $x_1 = 5$  и  $x_2 = 525$ .

**Ответ:**  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 525$ .

**3.14. Решить уравнение**

$$\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2. \quad (3.24)$$

**Решение.** Обозначим  $a = \sqrt[4]{x-8}$ , тогда  $x = a^4 + 8$  и уравнение (3.24) принимает вид  $\sqrt[4]{a^4 + 16} - a = 2$  или  $\sqrt[4]{a^4 + 16} = a + 2$ , где  $a \geq 0$ .

Далее получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{a^4 + 16} &= a^2 + 4a + 4, \quad a^4 + 16 = (a^2 + 4a + 4)^2, \\ a^3 + 3a^2 + 4a &= 0 \quad \text{или} \\ a(a^2 + 3a + 4) &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Так как  $a \geq 0$ , то  $a^2 + 3a + 4 > 0$ . В этой связи из уравнения (3.25) получаем  $a_1 = 0$  и  $\sqrt[4]{x_1 - 8} = 0$  или  $x_1 = 8$ .

**Ответ:**  $x_1 = 8$ .

**3.15. Решить уравнение**

$$\sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4. \quad (3.26)$$

**Решение.** Введем параметр  $a = \sqrt{x+7}$ . Тогда  $x = a^2 - 7$  и уравнение (3.26) будет равносильно уравнению

$$\sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{a^2 - a - 6} = 4. \quad (3.27)$$

Так как  $a \geq 0$ , то  $|a + 1| = a + 1$  и из уравнения (3.27) получаем

$$\begin{aligned} |a + 1| + \sqrt{a^2 - a - 6} &= 4 \text{ или} \\ \sqrt{a^2 - a - 6} &= 3 - a. \end{aligned}$$

Следовательно, здесь имеем  $0 \leq a \leq 3$ . Далее, после возведения в квадрат обеих частей уравнения  $\sqrt{a^2 - a - 6} = 3 - a$  получаем уравнение

$$a^2 - a - 6 = a^2 - 6a + 9 \text{ или } a_1 = 3.$$

Поскольку  $a = \sqrt{x + 7}$  и  $a_1 = 3$ , то  $3 = \sqrt{x_1 + 7}$  или  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

### 3.16. Решить уравнение

$$9^x + (x - 14)3^x - 3x + 33 = 0. \quad (3.28)$$

**Решение.** Введем параметр  $a = 3^x$  и представим уравнение (3.28) посредством квадратного уравнения относительно параметра  $a$ , т. е.

$$a^2 + (x - 14)a - 3x + 33 = 0. \quad (3.29)$$

Решая уравнение (3.29), получаем

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{14 - x \pm \sqrt{(14 - x)^2 + 12(x - 11)}}{2} = \\ &= \frac{14 - x \pm \sqrt{196 - 28x + x^2 + 12x - 132}}{2} = \\ &= \frac{14 - x \pm \sqrt{x^2 - 16x + 64}}{2} = \frac{14 - x \pm |x - 8|}{2} = \frac{14 - x \pm (x - 8)}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (3.29) имеет корни  $a_1 = 3$  и  $a_2 = 11 - x$ . Так как  $a = 3^x$ , то для нахождения корней уравнения (3.28) необходимо рассмотреть два простых уравнения:  $3^x = 3$  и  $3^x = 11 - x$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .

*Примечание.* Решение уравнения  $3^x = 11 - x$  осуществляется методом, который использует свойство монотонности функций  $f(x) = 3^x$  и  $g(x) = 11 - x$ . Так как функция  $f(x) = 3^x$  является возрастающей на всей числовой оси  $OX$ , а функция  $g(x) = 11 - x$  будет убывающей, то уравнение  $3^x = 11 - x$  может иметь не более одного корня. Этот единственный корень  $x_2 = 2$  легко найти подбором. Применение данного метода подробно описано в главе 5.

**3.17. Решить уравнение**

$$\log_2^2 x + x \log_2 x - \log_2 x = 6 - 2x. \quad (3.30)$$

**Решение.** Введем параметр  $a = \log_2 x$  и перепишем уравнение (3.30) в виде квадратного уравнения относительно параметра  $a$ , т. е.

$$a^2 + (x-1)a + 2x - 6 = 0. \quad (3.31)$$

Корнями уравнения (3.31) являются

$$a_{1,2} = \frac{1-x \pm \sqrt{(1-x)^2 - 4(2x-6)}}{2} = \frac{1-x \pm (x-5)}{2}$$

или  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 3 - x$ . Так как  $a = \log_2 x$ , то имеем уравнения

$\log_2 x = -2$  и  $\log_2 x = 3 - x$ . Отсюда получаем  $x_1 = \frac{1}{4}$  и  $x_2 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1}{4}$ ,  $x_2 = 2$ .

**Примечание.** Здесь также было использовано свойство монотонности функций  $f(x) = \log_2 x$  и  $g(x) = 3 - x$ .



# Числовые неравенства

*Стремящийся к ближайшему изучению химии должен быть сведущ и в математике.*

Великий русский ученый  
М. В. Ломоносов

Многие уравнения повышенной сложности  $f(x) = g(x)$  эффективно решаются методами, в основу которых положено установление (верхних или нижних) оценок значений функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ .

Особенный эффект от применения таких методов достигается в том случае, когда функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  относятся к различным разделам школьной математики и вследствие этого они, как правило, не приспособлены для совместного преобразования и исследования.

Для установления оценок значений функций весьма часто используется метод выделения полного квадрата, метод использования ограниченности некоторых тригонометрических функций, а также методы, основанные на применении известных числовых неравенств.

## Основные понятия и определения

Установление нижней оценки выражения  $ax^2 + bx + c$ , где  $a > 0$ , методом выделения полного квадрата осуществляется на основе применения следующей формулы:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2} \geq c - \frac{b^2}{4a^2}.$$

Например, имеет место оценка  $x^2 + x + 1 = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ .

Среди числовых неравенств, наиболее часто применяемых в элементарной математике, следует выделить неравенство Коши и неравенство Коши—Буняковского.

Неравенство Коши в общем случае записывается как

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad (4.1)$$

где  $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$  и  $n \geq 2$ .

Следует отметить, что равенство в (4.1) достигается тогда и только тогда, когда  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Неравенство Коши—Буняковского формулируется следующим образом:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \quad (4.2)$$

Причем неравенство (4.2) превращается в равенство в том и только в том случае, когда существует ненулевая константа  $k$  такая, что  $a_1 = k b_1, a_2 = k b_2, \dots, a_n = k b_n$ .

В школьной математике наибольшую популярность приобрели числовые неравенства, которые являются частными случаями известных в математике числовых неравенств.

Наиболее распространенными среди школьников являются числовые неравенства:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}, \quad (4.4)$$

$$(a_1 + a_2)^2 \leq 2(a_1^2 + a_2^2). \quad (4.5)$$

Неравенства (4.3) и (4.4) являются частными случаями неравенства Коши (4.1), а неравенство (4.5) вытекает из неравенства Коши—Буняковского (4.2).

Среди нижних и верхних оценок тригонометрических функций важными являются следующие неравенства:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi,$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4.6)$$

Перейдем к рассмотрению уравнений, решение которых осуществляется методами, в основу которых положено использование числовых неравенств (4.1)–(4.5) и некоторых других неравенств, а также приведенных выше неравенств из тригонометрии.

## Уравнения

В данном разделе приводятся уравнения повышенной сложности, решение которых основано на использовании метода оценок.

### 4.1. Решить уравнение

$$x^2 + 3x(2\sqrt{x+4} + 3) + 36 = 0. \quad (4.7)$$

**Решение.** Уравнение (4.7) представим следующим образом:

$$x^2 + 6x\sqrt{x+4} + 9(x+4) = 0, \quad (x + 3\sqrt{x+4})^2 = 0 \text{ или}$$

$$3\sqrt{x+4} = -x. \quad (4.8)$$

Отсюда следует, что  $-4 \leq x \leq 0$ . Возведем в квадрат обе части уравнения (4.8) и получим уравнение  $x^2 - 9x - 36 = 0$ . Подходящим корнем квадратного уравнения является  $x_1 = -3$ .

**Ответ:**  $x_1 = -3$ .

**4.2. Решить уравнение**

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + \sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2. \quad (4.9)$$

**Решение.** Так как  $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{(x+1)^2 + 9} \geq 3$ , то

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + \sqrt{x^2 + 2x + 10} &\geq x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3 = \\ &= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + 2 = (x+1)^4 + 2 \geq 2. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что левая часть уравнения (4.9) может принимать значение 2 только в том случае, когда  $x_1 = -1$ .

Для завершения решения задачи подставим значение  $x_1$  в уравнение (4.9) и убедимся, что оно является его корнем.

**Ответ:**  $x_1 = -1$ .

**4.3. Решить уравнение**

$$8(x^4 + y^4) - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0. \quad (4.10)$$

**Решение.** Предварительно уравнение (4.10) умножим на 2, а затем представим это уравнение в виде суммы двух квадратов:

$$(4x^2 - 1)^2 + (4y^2 - 1)^2 = 0. \quad (4.11)$$

Поскольку  $(4x^2 - 1)^2 \geq 0$  и  $(4y^2 - 1)^2 \geq 0$ , то из уравнения (4.11) вытекает  $4x^2 = 1$  и  $4y^2 = 1$ . Следовательно, уравнение (4.10) имеет четыре пары корней.

**Ответ:**

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}, y_3 = \frac{1}{2},$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}, y_4 = -\frac{1}{2}.$$

#### 4.4. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 12} + \sqrt{5x^2 - 20x + 36} = 6 - \sqrt{x - 2}. \quad (4.12)$$

**Решение.** Если преобразовать левую часть уравнения (4.12) путем выделения полных квадратов под знаком обоих радикалов, то получим уравнение

$$\sqrt{2(x-2)^2 + 4} + \sqrt{5(x-2)^2 + 16} = 6 - \sqrt{x-2}.$$

Так как  $2(x-2)^2 + 4 \geq 4$  и  $5(x-2)^2 + 16 \geq 16$ , то

$$\sqrt{2(x-2)^2 + 4} + \sqrt{5(x-2)^2 + 16} \geq 2 + 4 = 6.$$

Поскольку  $6 - \sqrt{x-2} \leq 6$ , то равенство в уравнении (4.12) имеет место только в том случае, когда обе его части одно-

временно равны 6, а это возможно только в том случае, когда  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

#### 4.5. Решить уравнение

$$16(x^2 - 3x + 4)(y^2 + 5y + 7) = 21. \quad (4.13)$$

**Решение.** Оценим снизу левую часть уравнения (4.13), выделяя полный квадрат в каждой из скобок, следующим образом:

$$x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4},$$

$$y^2 + 5y + 7 = \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ и}$$

$$16(x^2 - 3x + 4)(y^2 + 5y + 7) \geq 16 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} = 21.$$

Отсюда следует, что равенство в уравнении (4.13) достигается только в том случае, когда  $x - \frac{3}{2} = 0$  и  $y + \frac{5}{2} = 0$ , т. е.

$$x_1 = \frac{3}{2} \text{ и } y_1 = -\frac{5}{2}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $y_1 = -\frac{5}{2}$ .

**4.6. Решить уравнение**

$$x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 = 0. \quad (4.14)$$

**Решение.** Сначала обе части уравнения (4.14) умножим на 2, а затем сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 = 0,$$

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0. \quad (4.15)$$

Так как  $(x-y)^2 \geq 0$ ,  $(x-1)^2 \geq 0$  и  $(y-1)^2 \geq 0$ , то из равенства (4.15) следует, что  $x-y=0$ ,  $x-1=0$ ,  $y-1=0$  или  $x_1=1$  и  $y_1=1$ .

**Ответ:**  $x_1=1$ ,  $y_1=1$ .

**4.7. Решить уравнение**

$$\sqrt{x-y^2-1} + y^2 + x = 1. \quad (4.16)$$

**Решение.** Уравнение (4.16) равносильно уравнению

$$\sqrt{x-y^2-1} = 1 - y^2 - x.$$

Далее, используя свойства квадратного корня, получаем



$$\begin{cases} x - y^2 - 1 \geq 0, \\ 1 - y^2 - x \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geq y^2 + 1, \\ x \leq 1 - y^2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $x \geq 1$  и  $x \leq 1$ , т. е.  $x_1 = 1$ . Если значение  $x_1$  подставить в уравнение (4.16), то получим  $y_1 = 0$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 0$ .

#### 4.8. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}} + \sqrt{2x+15} = 2x. \quad (4.17)$$

**Решение.** Из уравнения (4.17) следует, что  $x \geq 0$ .

Применим к левой части уравнения (4.17) неравенство Коши (4.3) и получим

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}} + \sqrt{2x+15} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}} \cdot \sqrt{2x+15}} = 2x.$$

Если сравнить полученное неравенство с уравнением (4.17), то можно увидеть, что примененное выше неравенство (4.3) превратилось в равенство. Следовательно, имеем уравнения

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}} = \sqrt{2x+15} \text{ или } x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Так как  $x \geq 0$ , то подходящим корнем уравнения

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

является  $x_1 = 5$ .

**Ответ:**  $x_1 = 5$ .

#### 4.9. Решить уравнение

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) = 8. \quad (4.18)$$

**Решение.** Введем следующие обозначения:  $a = \sqrt{1-x}$  и  $b = \sqrt{1+x}$ . В таком случае уравнение (4.18) принимает вид

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) (a + b) = 8, \quad (4.19)$$

где  $a > 0$  и  $b > 0$ .

Если воспользоваться (три раза) неравенством (4.3), то

$$1 + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad 1 + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{b}}, \quad a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{и тогда}$$

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) (a + b) \geq 8. \quad (4.20)$$

Из уравнения (4.19) и неравенства (4.20) следует, что  $1 = \frac{1}{a}$ ,

$1 = \frac{1}{b}$ ,  $a = b$  или  $a = b = 1$ . Так как  $a = \sqrt{1-x}$  и  $a = 1$ , то

$1 = \sqrt{1-x}$  или  $x_1 = 0$ .

Подставим значение  $x_1 = 0$  в уравнение (4.18) и убедимся в том, что найденное значение  $x$  является его корнем.

**Ответ:**  $x_1 = 0$ .

#### 4.10. Решить уравнение

$$x^2 + 1 = \sqrt{3x^2 + 3x - 5} + \sqrt{-3x^2 + x + 3}. \quad (4.21)$$

**Решение.** Из уравнения (4.21) следует, что

$$3x^2 + 3x - 5 \geq 0 \text{ и } -3x^2 + x + 3 \geq 0.$$

Применим к правой части уравнения (дважды) неравенство Коши (4.3) и получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x^2 + 3x - 5} + \sqrt{-3x^2 + x + 3} = \\ &= \sqrt{1 \cdot (3x^2 + 3x - 5)} + \sqrt{1 \cdot (-3x^2 + x + 3)} \leq \\ & \leq \frac{1 + 3x^2 + 3x - 5}{2} + \frac{1 - 3x^2 + x + 3}{2} = 2x. \end{aligned}$$

Отсюда и из уравнения (4.21) следует, что

$$x^2 + 1 \leq 2x, \quad x^2 - 2x + 1 \leq 0, \quad (x - 1)^2 \leq 0 \text{ или } x_1 = 1.$$

Подставим значение  $x_1 = 1$  в уравнение (4.21) и убедимся в том, что  $x_1$  является его корнем.

**Ответ:**  $x_1 = 1$ .

**4.11. Решить уравнение**

$$x^2 y^2 + \frac{x^4 + 16y^4}{x^2 y^2} = 4(xy + 1). \quad (4.22)$$

**Решение.** Согласно неравенству Коши (4.3) можно записать

$$x^4 + 16y^4 \geq 8x^2 y^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^4 + 16y^4}{x^2 y^2} \geq 8.$$

В этой связи из уравнения (4.22) получаем неравенства

$$x^2 y^2 + 8 \leq 4(xy + 1), \quad x^2 y^2 - 4xy + 4 \leq 0 \quad \text{или} \\ (xy - 2)^2 \leq 0.$$

Отсюда следует, что  $xy = 2$ . Если  $xy = 2$  подставить в уравнение (4.22), то получим

$$4 + \frac{x^4 + 16y^4}{4} \stackrel{!}{=} 4(2 + 1) \quad \text{или} \quad x^4 + 16y^4 = 32.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + 16y^4 = 32, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Если выражение  $x = \frac{2}{y}$  подставить в первое уравнение системы,

то получим  $\frac{1}{y^4} + y^4 = 2$  или  $y^4 = 1$ . Следовательно,

здесь имеем  $y_1 = 1$  и  $y_2 = -1$ . Так как  $x = \frac{2}{y}$ , то  $x_1 = 2$  и  $x_2 = -2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ ,  $y_2 = -1$ .

#### 4.12. Решить уравнение

$$|x-1| - |2x+1| = \sqrt{x^2 - 2x - 8}. \quad (4.23)$$

**Решение.** Для определения области допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (4.23) рассмотрим неравенство  $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ , решением которого являются  $x \leq -2$  и  $x \geq 4$ .

Поскольку правая часть уравнения (4.23) может принимать только неотрицательные значения, то  $|x-1| - |2x+1| \geq 0$ . Отсюда получаем

$$|2x+1| \leq |x-1|, (2x+1)^2 \leq (x-1)^2, (2x+1)^2 - (x-1)^2 \leq 0,$$

$$(2x+1+x-1)(2x+1-x+1) \leq 0 \text{ или } x(x+2) \leq 0.$$

Из неравенства  $x(x+2) \leq 0$  вытекает, что  $-2 \leq x \leq 0$ . Если принять во внимание область допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (4.23), то  $x_1 = -2$ . Подставим найденное значение  $x_1$  в уравнение (4.23) и убедимся, что  $x_1 = -2$  является его корнем.

**Ответ:**  $x_1 = -2$ .

**4.13. Решить уравнение**

$$6 \cdot 2^{|x-7|+|x-4|} + 8 \cdot 3^{|x-8|+|x-6|} = 120. \quad (4.24)$$

**Решение.** Так как  $|a| + |b| \geq |a - b|$ , то

$$|x - 7| + |x - 4| \geq 3 \text{ и } |x - 8| + |x - 6| \geq 2.$$

В этой связи

$$6 \cdot 2^{|x-7|+|x-4|} + 8 \cdot 3^{|x-8|+|x-6|} \geq 6 \cdot 2^3 + 8 \cdot 3^2 = 120.$$

Если принять во внимание уравнение (4.24), то из приведенного выше неравенства вытекает система уравнений

$$\begin{cases} |x - 7| + |x - 4| = 3, \\ |x - 8| + |x - 6| = 2. \end{cases} \quad (4.25)$$

Однако известно, что равенство  $|a| + |b| = |a - b|$  равносильно неравенству  $ab \leq 0$ . Следовательно, система уравнений (4.25) будет равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 7, \\ 6 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Очевидно, что решением данной системы неравенств является отрезок  $6 \leq x \leq 7$ .

**Ответ:**  $6 \leq x \leq 7$ .

**4.14. Решить уравнение**

$$5 \sin x = |x + 2| + |x - 3|. \quad (4.26)$$

**Решение.** С одной стороны, левая часть уравнения  $5 \sin x \leq 5$ . С другой стороны, применяя неравенство

$$|f(x)| + |g(x)| \geq |f(x) - g(x)|,$$

получаем  $|x + 2| + |x - 3| \geq 5$ . Отсюда следует, что равенство в уравнении (4.26) достигается только в том случае, когда обе его части равны 5.

Известно, что  $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)|$  тогда и только тогда, когда  $f(x)g(x) \leq 0$ , т. е.  $(x + 2)(x - 3) \leq 0$  или  $-2 \leq x \leq 3$ .

Следовательно, уравнение (4.26) равносильно уравнению  $\sin x = 1$  при условии, что  $-2 \leq x \leq 3$ . Нетрудно видеть, что это уравнение имеет единственный корень, который находится на отрезке  $-2 \leq x \leq 3$ , и этим корнем является  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ .

**4.15. Решить уравнение**

$$\log_3 \left( 10 + \cos \frac{\pi x}{2} \right) = \sqrt{4x - x^2}. \quad (4.27)$$

**Решение.** Так как  $\cos \frac{\pi x}{2} \geq -1$ , то

$$\log_3 \left( 10 + \cos \frac{\pi x}{2} \right) \geq \log_3 9 = 2.$$

Далее, имеем  $\sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (x - 2)^2} \leq 2$ . Следовательно, равенство (4.27) выполняется только в том случае, когда обе части уравнения одновременно равны 2.

Таким образом, уравнение (4.27) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \log_3 \left( 10 + \cos \frac{\pi x}{2} \right) = 2, \\ \sqrt{4x - x^2} = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем

$$4x - x^2 = 4, \quad (x - 2)^2 = 0 \quad \text{или} \quad x_1 = 2.$$

Нетрудно убедиться, что значение  $x_1 = 2$  удовлетворяет также и первому уравнению системы.

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

#### 4.16. Решить уравнение

$$\left| x^2 - 2x \right| + \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x} + 1 = \sin \left( \frac{5\pi}{2} + x - 2 \right). \quad (4.28)$$

**Решение.** Так как  $\left| x^2 - 2x \right| \geq 0$  и  $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x} \geq 0$ , то

$$\left| x^2 - 2x \right| + \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x} + 1 \geq 1.$$



Если при этом учесть, что  $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x - 2\right) \leq 1$ , то из уравнения (4.28) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x^3 - 3x^2 + 2x = 0, \\ \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x - 2\right) = 1. \end{cases}$$

Данная система уравнений имеет единственный корень  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

#### 4.17. Решить уравнение

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = y^2 - 2y + 3. \quad (4.29)$$

**Решение.** Принимая во внимание двойное неравенство (4.6), можно записать  $-2 \leq \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leq 2$ .

Так как  $y^2 - 2y + 3 = (y-1)^2 + 2 \geq 2$ , то равенство в (4.29) имеет место только в том случае, когда

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2, \\ y^2 - 2y + 3 = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ (y-1)^2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , то  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ .

Отсюда и из второго уравнения системы получаем корни уравнения (4.29).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{4}(8n+1)$ , где  $n$  — целое число,  $y_1 = 1$ .

#### 4.18. Решить уравнение

$$\arccos \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}(1-x^2). \quad (4.30)$$

**Решение.** Из определения функции  $y = \arccos z$  известно, что

$$-1 \leq z \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq \pi.$$

В этой связи из уравнения (4.30) получаем

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{1}{x^2} \leq 1, \\ 0 \leq \frac{\pi}{2}(1-x^2) \leq \pi, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2} \leq 1, \\ 0 \leq 1-x^2 \leq 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2} \leq 1, \\ x^2 \leq 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что система неравенств выполняется только в том случае когда  $x^2 = 1$ . Если значение  $x^2 = 1$  подставить в уравнение (4.30), то получим очевидное равенство  $\arccos 1 = 0$ .

**Ответ:**  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ .

**4.19. Решить уравнение**

$$\frac{x^2 + 13x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}. \quad (4.31)$$

**Решение.** Из уравнения (4.31) следует, что  $x \geq 0$ . Применим к левой части уравнения неравенство Коши (4.3) и получим

$$\frac{x^2 + 13x + 4}{x + 2} = x + 2 + \frac{9x}{x + 2} \geq 2\sqrt{(x + 2) \cdot \frac{9x}{x + 2}} = 6\sqrt{x}.$$

Если полученное неравенство сравнить с уравнением (4.31), то видно, что примененное неравенство (4.3) превратилось в равенство. Следовательно, имеем уравнения

$$x + 2 = \frac{9x}{x + 2} \text{ или } x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Корнями квадратного уравнения являются  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 4$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ .

**4.20. Решить уравнение**

$$\frac{44x^2}{x^4 + 121} = x^2 + 2\sqrt{11}x + 13. \quad (4.32)$$

**Решение.** Согласно неравенству Коши (4.3) получаем неравенство  $x^4 + 121 \geq 2\sqrt{121x^4} = 22x^2$ . В этой связи для левой части уравнения (4.32) имеет место верхняя оценка

$$\frac{44x^2}{x^4 + 121} \leq \frac{44x^2}{22x^2} = 2.$$

С другой стороны, можно оценить снизу правую часть уравнения (4.32) следующим образом:

$$x^2 + 2\sqrt{11}x + 13 = (x + \sqrt{11})^2 + 2 \geq 2.$$

Следовательно, равенство в (4.32) может быть только в том случае, когда обе части уравнения одновременно равны 2. А это может произойти только тогда, когда одновременно выполняются два условия:  $x^4 = 121$  и  $x = -\sqrt{11}$ , т. е. уравнение (4.32) имеет единственный корень  $x_1 = -\sqrt{11}$ .

**Ответ:**  $x_1 = -\sqrt{11}$ .

#### 4.21. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^4 y^4} + 1 = \frac{8}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (4.33)$$

**Решение.** Используя неравенство Коши (4.3), можно записать

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ или } (x^2 + y^2)^2 \geq 4x^2 y^2.$$

В таком случае из уравнения (4.33) получаем

$$\frac{1}{x^4 y^4} + 1 \leq \frac{8}{4x^2 y^2}, \quad \frac{1}{x^4 y^4} - \frac{2}{x^2 y^2} + 1 \leq 0 \text{ или } \left( \frac{1}{x^2 y^2} - 1 \right)^2 \leq 0.$$

Так как  $\left(\frac{1}{x^2 y^2} - 1\right)^2 \geq 0$ , то  $\frac{1}{x^2 y^2} - 1 = 0$  или  $x^2 y^2 = 1$ .

Если  $x^2 y^2 = 1$ , то из уравнения (4.33) следует

$$(x^2 + y^2)^2 = 4 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

Поскольку  $x^2 y^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = 2$ , то  $x^2 = 1$  и  $y^2 = 1$ . Следовательно, уравнение (4.33) имеет четыре пары корней.

**Ответ:**

$$x_1 = 1, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = -1, x_3 = -1, y_3 = 1, x_4 = -1, y_4 = -1.$$

#### 4.22. Решить уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 + 72 = 3x + 12y + 27z, \quad (4.34)$$

где  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ .

**Решение.** Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ , то можно воспользоваться (три раза) неравенством Коши (4.4).

Имеет место

$$x^3 + 2 = x^3 + 1 + 1 \geq 3 \sqrt[3]{x^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3x,$$

$$y^3 + 16 = y^3 + 8 + 8 \geq 3 \sqrt[3]{y^3 \cdot 8 \cdot 8} = 12y,$$

$$z^3 + 54 = z^3 + 27 + 27 \geq 3 \sqrt[3]{z^3 \cdot 27 \cdot 27} = 27z.$$

Если сложить приведенные выше неравенства, то получим

$$x^3 + y^3 + z^3 + 72 \geq 3x + 12y + 27z.$$

Отсюда и из уравнения (4.34) следует, что примененные выше неравенства Коши превратились в равенства, а это означает, что  $x^3 = 1$ ,  $y^3 = 8$  и  $z^3 = 27$ . Следовательно, корнями уравнения (4.34) являются  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 2$  и  $z_1 = 3$ .

Выполним проверку: подставим значения  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  в уравнение (4.34) и получим числовое тождество.

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $z_1 = 3$ .

#### 4.23. Решить уравнение

$$x^2 + y^2 + x^3 + y^3 + 1 = 5xy, \quad (4.35)$$

где  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

**Решение.** С учетом того, что  $x > 0$ ,  $y > 0$ , применим к левой части уравнения (4.35) неравенства (4.3), (4.4) и получим

$$x^2 + y^2 + x^3 + y^3 + 1 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} + 3\sqrt[3]{x^3 y^3 \cdot 1} = 2xy + 3xy = 5xy.$$

Так как неравенство Коши дважды превратилось в равенство, то  $x^2 = y^2$  и  $x^3 = y^3 = 1$ . Отсюда получаем  $x_1 = 1$  и  $y_1 = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 1$ .

**4.24. Решить уравнение**

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = x^2 - 2x. \quad (4.36)$$

**Решение.** Областью допустимых значения переменной  $x$  в уравнении (4.36) являются  $x \geq 4$ . Если воспользоваться неравенством Коши (4.3), то получим верхние оценки каждого из слагаемых левой части уравнения, т. е.

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{1 \cdot (x-1)} \leq \frac{1 + (x-1)}{2} = \frac{x}{2},$$

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{1 \cdot (x-2)} \leq \frac{1 + (x-2)}{2} = \frac{x-1}{2},$$

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{1 \cdot (x-3)} \leq \frac{1 + (x-3)}{2} = \frac{x-2}{2},$$

$$\sqrt{x-4} = \sqrt{1 \cdot (x-4)} \leq \frac{1 + (x-4)}{2} = \frac{x-3}{2}.$$

Таким образом, для левой части уравнения (4.36) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} &\leq \\ &\leq \frac{x}{2} + \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{2} = 2x - 3. \end{aligned}$$

Отсюда и из уравнения (4.36), получаем

$$x^2 - 2x \leq 2x - 3 \text{ или } x^2 - 4x + 3 \leq 0.$$

Решением неравенства  $x^2 - 4x + 3 \leq 0$  является отрезок  $-1 \leq x \leq 3$ . Однако здесь  $x \geq 4$ , поэтому уравнение (4.36) корней не имеет.

**Ответ:** нет корней.

#### 4.25. Решить уравнение

$$\log_2(4x^2 + 1) = \log_2 x - 8x^2 + 8x. \quad (4.37)$$

**Решение.** Из уравнения (4.37) следует, что  $x > 0$ . Перепишем уравнение (4.37) в равносильном виде

$$\log_2\left(4x + \frac{1}{x}\right) = 2 - 2(2x - 1)^2.$$

Так как  $x > 0$ , то согласно неравенству Коши (4.3) имеем

$$4x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} = 4.$$

$$\text{В этой связи } \log_2\left(4x + \frac{1}{x}\right) \geq \log_2 4 = 2.$$

Так как  $2 - (2x - 1)^2 \leq 2$ , то равенство (4.37) достигается только в том случае, когда обе части уравнения одновременно равны 2. Следовательно, имеем  $x_1 = \frac{1}{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1}{2}$ .



**4.26. Решить уравнение**

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2(\sin x + \cos x). \quad (4.38)$$

**Решение.** Так как  $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$ , то

$$-2\sqrt{2} \leq 2(\sin x + \cos x) \leq 2\sqrt{2}.$$

Применяя неравенство Коши (4.3) к левой части уравнения (4.38), получаем

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = 2\sqrt{2}.$$

Отсюда следует, что равенство в уравнении (4.38) достигается только в том случае, когда обе его части одновременно равны  $2\sqrt{2}$ .

Другими словами, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ 2^{\sin^2 x} = 2^{\cos^2 x} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \\ \sin^2 x = \cos^2 x. \end{cases}$$

Корнями уравнения  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  являются  $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ,

где  $n$  — целое число. Так как при таких значениях  $x$  второе уравнение системы превращается в тождество, то  $x_1$  будет также корнем уравнения (4.38).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{4} (8n + 1)$ , где  $n$  — целое число.

**4.27. Решить уравнение**

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = x^2 - 10x + 29. \quad (4.39)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (4.39) является отрезок  $1 \leq x \leq 9$ .

Для оценки сверху левой части уравнения (4.39) воспользуемся неравенством (4.5), точнее неравенством

$$a_1 + a_2 \leq \sqrt{2a_1^2 + 2a_2^2},$$

и получим

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} \leq \sqrt{2(x-1+9-x)} = 4.$$

Применительно к правой части уравнения (4.39) можно записать

$$x^2 - 10x + 29 = (x-5)^2 + 4 \geq 4.$$

Отсюда следует, что равенство в уравнении (4.39) достигается только в том случае, когда его левая и правая части одновременно равны 4. Другими словами, из уравнения (4.39) вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = 4, \\ x^2 - 10x + 29 = 4. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы легко получить единственный корень  $x_1 = 5$ . Непосредственно подстановкой в первое

уравнение системы убеждаемся в том, что система уравнений является совместимой.

**Ответ:**  $x_1 = 5$ .

#### 4.28. Решить уравнение

$$x\sqrt{4-x^2} + 2x = 2\sqrt{x^2+4}. \quad (4.40)$$

**Решение.** Область допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (4.40) образует отрезок  $0 \leq x \leq 2$ .

Если к левой части уравнения (4.40) применить неравенство Коши—Буняковского (4.2), то получим

$$\left(x\sqrt{4-x^2} + 2x\right)^2 \leq (x^2 + 2^2)(4 - x^2 + x^2) = 4(x^2 + 4) \text{ или}$$

$$x\sqrt{4-x^2} + 2x \leq 2\sqrt{x^2+4}.$$

Отсюда и из уравнения (4.40) следует, что примененное неравенство (4.2) превратилось в равенство. В этой связи можно записать:

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}, \quad x^2 = 2\sqrt{4-x^2}, \quad x^4 + 4x^2 - 16 = 0, \quad x^2 = 2\sqrt{5} - 2.$$

Так как  $0 \leq x \leq 2$ , то  $x_1 = \sqrt{2\sqrt{5} - 2}$  является единственным корнем уравнения (4.40).

**Ответ:**  $x_1 = \sqrt{2\sqrt{5} - 2}$ .

**4.29.** Решить уравнение

$$2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}. \quad (4.41)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (4.41) является отрезок  $-7 \leq x \leq 18,5$ .

Применим к левой части уравнения (4.41) неравенство (4.2) и получим

$$(2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93})^2 \leq 49(2x+137) \text{ или}$$

$$2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} \leq 7\sqrt{2x+137}. \quad (4.42)$$

Из уравнения (4.41) и неравенства (4.42) следует, что примененное выше неравенство (4.2) превратилось в равенство. В этой связи имеет место системы уравнений

$$\frac{2}{\sqrt{x+7}} = \frac{3}{\sqrt{37-2x}} = \frac{6}{\sqrt{3x+93}} \text{ или}$$

$$\frac{x+7}{4} = \frac{37-2x}{9} = \frac{3x+93}{36}. \quad (4.43)$$

Система уравнений (4.43) имеет единственный корень  $x_1 = 5$ .

**Ответ:**  $x_1 = 5$ .

**4.30. Решить уравнение**

$$(x-1)\sqrt{x} + \sqrt{4-x} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}. \quad (4.44)$$

**Решение.** Применим к левой части уравнения (4.44) неравенство (4.2) и получим

$$\left((x-1)\sqrt{x} + \sqrt{4-x}\right)^2 \leq \left((x-1)^2 + 1^2\right)(x+4-x) = 4(x^2 - 2x + 2)$$

или

$$(x-1)\sqrt{x} + \sqrt{4-x} \leq 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

Отсюда и из уравнения (4.44) следует, что неравенство (4.2) превратилось в равенство. А это означает, что имеет место уравнение

$$\frac{x-1}{1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}. \quad (4.45)$$

Из уравнения (4.45) следует, что  $1 < x < 4$ .

Кроме того, заметим, что в уравнении (4.44) выполняется неравенство  $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ .

Возведем в квадрат обе части уравнения (4.45) и получим

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{x}{4-x} \quad \text{или} \quad x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0.$$

Первый корень  $x_1 = 2$  кубического уравнения находим подбором. Так как  $\frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 4}{x - 2} = x^2 - 4x + 2$ , то рассмотрим

квадратное уравнение  $x^2 - 4x + 2 = 0$ . Корнями данного уравнения являются

$$x_2 = 2 + \sqrt{2} \text{ и } x_3 = 2 - \sqrt{2}.$$

Однако известно, что  $1 < x < 4$ , поэтому значение  $x_3 = 2 - \sqrt{2}$  не может быть корнем уравнения (4.45).

**Ответ:**  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ .

#### 4.31. Решить уравнение

$$x\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{11-x} = \sqrt{x^2+4} \sqrt{3x+12}. \quad (4.46)$$

**Решение.** Из уравнения (4.46) следует, что  $-\frac{1}{4} \leq x \leq 11$ .

Применим к левой части уравнения неравенство (4.2) и получим

$$(x\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{11-x})^2 \leq (x^2 + 4)(4x+1+11-x) \text{ или}$$

$$x\sqrt{4x+1} + 2\sqrt{11-x} \leq \sqrt{x^2+4} \sqrt{3x+12}. \quad (4.47)$$

Если сравнить выражения (4.46) и (4.47), то можно сделать вывод о том, что примененное выше неравенство (4.2) превратилось в равенство.

Следовательно, имеет место уравнение

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{11-x}}. \quad (4.48)$$

Отсюда вытекает, что  $x \geq 0$ . Далее, обе части уравнения (4.48) возведем в квадрат и получим кубическое уравнение  $x^3 - 11x^2 + 16x + 4 = 0$ , первый корень которого  $x_1 = 2$  несложно найти подбором.

Поскольку  $\frac{x^3 - 11x^2 + 16x + 4}{x - 2} = x^2 - 9x - 2$ , то рассмотрим уравнение  $x^2 - 9x - 2 = 0$ . Так как  $x \geq 0$ , то подходящим корнем квадратного уравнения является  $x_2 = \frac{9 + \sqrt{89}}{2}$ . Отметим,

что здесь неравенство  $\frac{9 + \sqrt{89}}{2} \leq 11$  выполняется.

**Ответ:**  $x_1 = 2, x_2 = \frac{9 + \sqrt{89}}{2}$ .

#### 4.32. Решить уравнение

$$x\sqrt{x+2} + 2\sqrt{6-x} = 2\sqrt{2x^2+8}. \quad (4.49)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (4.49) являются  $-2 \leq x \leq 6$ .

Применяя неравенство Коши—Буняковского (4.2), получаем

$$(x\sqrt{x+2} + 2\sqrt{6-x})^2 \leq (x^2 + 4)(x + 2 + 6 - x) = 8(x^2 + 4).$$

Отсюда следует неравенство  $x\sqrt{x+2} + 2\sqrt{6-x} \leq 2\sqrt{2x^2+8}$ . Если данное неравенство сравнить с уравнением (4.49), то можно сделать вывод о том, что примененное выше неравенство (4.2) превратилось в равенство. А это возможно только в том случае, когда

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}. \quad (4.50)$$

Из уравнения (4.50) следует, что  $x \geq 0$ . Поэтому здесь имеем  $0 \leq x \leq 6$ . Далее, преобразуем уравнение (4.50) следующим образом:

$$x\sqrt{6-x} = 2\sqrt{x+2}, \quad x^2(6-x) = 4(x+2) \text{ или}$$

$$x^3 - 6x^2 + 4x + 8 = 0. \quad (4.51)$$

Подбором находим первый корень уравнения (4.51) вида  $x_1 = 2$ . Так как  $\frac{x^3 - 6x^2 + 4x + 8}{x - 2} = x^2 - 4x - 4$ , то для поиска остальных корней уравнения (4.51) рассмотрим уравнение  $x^2 - 4x - 4 = 0$ , корнями которого являются  $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$  и  $x_3 = 2 - 2\sqrt{2}$ .

Так как  $0 \leq 2 + 2\sqrt{2} \leq 6$  и  $2 - 2\sqrt{2} < 0$ , то исходное уравнение (4.49) имеет только два корня:  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$ .



**4.33. Решить уравнение**

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{2}. \quad (4.52)$$

**Решение.** Из уравнения (4.52) следует  $x^2 \leq 1$ ,  $y^2 \leq 1$  и  $z^2 \leq 1$ . Обозначим  $F(x, y, z) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2}$ . Для получения верхней оценки функции  $F = F(x, y, z)$  воспользуемся неравенством (4.2) при условии, что  $n=3$ . Имеет место  $F^2(x, y, z) \leq (x^2 + y^2 + z^2)(3 - x^2 - y^2 - z^2)$ .

Положим  $u = x^2 + y^2 + z^2$ , тогда

$$F^2(u) \leq u(3-u) = 3u - u^2 = \frac{9}{4} - \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}.$$

Таким образом, доказано, что  $-\frac{3}{2} \leq F(x, y, z) \leq \frac{3}{2}$ . Принимая во внимание уравнение (4.52), утверждаем, что неравенство (4.2) превратилось в равенство. Следовательно, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-x^2}}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (4.53)$$

Из первого уравнения системы (4.53) следует, что переменные  $x, y, z$  могут принимать только значения одного знака.

Однако, принимая во внимание уравнение (4.52), можно утверждать, что  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ .

Система уравнений (4.53) является относительно несложной и симметрической относительно вхождения переменных. Нетрудно установить, что

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{2} \text{ и } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

*Примечание.* Корнями уравнения

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} + z\sqrt{1-x^2} = -\frac{3}{2}$$

являются  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

#### 4.34. Решить уравнение

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x. \quad (4.54)$$

**Решение.** Известно, что

$$-2 \leq 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \text{ или } -2 \leq \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leq 2.$$

Для оценки правой части уравнения (4.54) воспользуемся неравенством Коши (4.3).

Если  $\operatorname{tg} x > 0$ , то  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x} = 2$ .

Если  $\operatorname{tg} x < 0$ , то

$$(-\operatorname{tg} x) + (-\operatorname{ctg} x) \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x} = 2 \text{ или } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \leq -2.$$

Принимая во внимание полученные оценки левой и правой частей уравнения (4.54), можно записать две системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x + \cos x = -\sqrt{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2. \end{cases}$$

Из первой системы уравнений получаем  $x_1 = \frac{\pi}{4}(8n+1)$ , где  $n$  — целое число. В то же время вторая система уравнений является несовместной, поскольку первое равенство выполняется, когда  $\sin x < 0$  и  $\cos x < 0$ . Однако в этом случае  $\operatorname{tg} x > 0$  и поэтому  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \neq -2$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{4}(8n+1)$ , где  $n$  — целое число.

#### 4.35. Решить уравнение

$$\sin^2 4x + \cos^2 x = 2 \sin 4x \cdot \cos^4 x. \quad (4.55)$$

**Решение.** Преобразуем уравнение (4.55) следующим образом:

$$\sin^2 4x + \cos^2 x - 2 \sin 4x \cdot \cos^4 x + \cos^8 x - \cos^8 x = 0,$$

$$(\sin 4x - \cos^4 x)^2 + \cos^2 x (1 - \cos^6 x) = 0. \quad (4.56)$$

Так как  $(\sin 4x - \cos^4 x)^2 \geq 0$  и  $\cos^2 x (1 - \cos^6 x) \geq 0$ , то из уравнения (4.56) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 4x - \cos^4 x = 0, \\ \cos^2 x (1 - \cos^6 x) = 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

Из второго уравнения системы (4.57) следует, что необходимо рассмотреть два случая:  $\cos^2 x = 0$  и  $\cos^2 x = 1$ .

1. Если  $\cos^2 x = 0$ , то  $\sin 4x = 4 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 0$  и оба уравнения системы (4.57) превращаются в числовые тождества.

2. Если  $\cos^2 x = 1$ , то  $\sin x = 0$  и  $\sin 4x = 0$ . Так как  $\cos^2 x = 1$  и  $\sin 4x = 0$ , то  $\sin 4x - \cos^4 x = -1$ , т. е. первое уравнение системы не выполняется.

Из уравнения  $\cos x = 0$  получаем корни исходного уравнения (4.55).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ , где  $n$  — целое число.

#### 4.36. Решить уравнение

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x. \quad (4.58)$$

**Решение.** Так как  $-1 \leq \cos 4x \leq 1$  и  $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ , то

$$-2 \leq \cos 4x - \cos 2x \leq 2 \text{ или } (\cos 4x - \cos 2x)^2 \leq 4.$$

Однако  $\sin 3x \geq -1$  или  $5 + \sin 3x \geq 4$ , поэтому равенство в (4.58) достигается только в том случае, когда

$$\begin{cases} (\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4, \\ 5 + \sin 3x = 4. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \cos 4x - \cos 2x = -2, \\ \sin 3x = -1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos 4x - \cos 2x = 2, \\ \sin 3x = -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos 2x = 1, \\ \sin 3x = -1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \cos 2x = -1, \\ \sin 3x = -1. \end{cases} \quad (4.59)$$

Если  $\cos 2x = 1$ , то  $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ . В этой связи первая система уравнений (4.59) является несовместимой.

Если  $\cos 2x = -1$ , то  $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ . Поэтому вторая система уравнений (4.59) будет равносильна более простой системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \sin 3x = -1. \end{cases} \quad (4.60)$$

Если обозначить  $y = \sin x$ , то система (4.60) будет равносильна

$$\begin{cases} 1 - 2y^2 = -1, \\ -4y^3 + 3y = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y^2 = 1, \\ 4y^3 - 3y = 1. \end{cases}$$

Решением приведенной выше системы уравнений является  $y_1 = 1$ . В этой связи уравнение (4.59) будет равносильно уравнению  $\sin x = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{2} (4n + 1)$ , где  $n$  — целое число.

#### 4.37. Решить уравнение

$$\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \cos^4 x. \quad (4.61)$$

**Решение.** Так как  $-1 \leq \sin x \leq 1$  и  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , то  $\sin^5 x \leq \sin^2 x$  и  $\cos^5 x \leq \cos^2 x$ . В этой связи

$$\sin^5 x + \cos^5 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Поскольку  $\sin^5 x + \cos^5 x \leq 1$  и  $2 - \cos^4 x \geq 1$ , то равенство в уравнении (4.61) достигается только в том случае, когда обе его части равны 1.

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^5 x + \cos^5 x = 1, \\ \cos^4 x = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем  $\cos^2 x = 1$  или  $\sin x = 0$ . В таком случае первое уравнение системы принимает вид  $\cos^5 x = 1$  или  $\cos x = 1$ . А это означает, что система урав-

нений равносильна уравнению  $\cos x = 1$ , корнями которого являются  $x_1 = 2\pi n$ , где  $n$  — целое число.

**Ответ:**  $x_1 = 2\pi n$ , где  $n$  — целое число

#### 4.38. Решить уравнение

$$\sin x = 2 + \sin x \cdot \cos 6x.$$

**Решение.** Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x (1 - \cos 6x) = 2. \quad (4.62)$$

Так как  $\sin x \leq 1$  и  $1 - \cos 6x \leq 2$ , то равенство в уравнении (4.62) достигается только в том случае, когда  $\sin x = 1$  и  $\cos 6x = -1$ .

Однако, если  $\sin x = 1$ , то  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$  и

$$\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = -1.$$

Следовательно, если  $\sin x = 1$ , то  $\cos 6x = -1$ . Значит, уравнение (4.62) равносильно уравнению  $\sin x = 1$  и поэтому корнями исходного уравнения являются  $x_1 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ , где  $n$  — целое число.

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ , где  $n$  — целое число.

**4.39. Решить уравнение**

$$\sqrt{3} \sin x + \cos 6x \cdot \cos x = \sqrt{4 + \sin^2 3x}. \quad (4.63)$$

**Решение.** Используя неравенство (4.2), оценим сверху левую часть уравнения (4.63) следующим образом:

$$(\sqrt{3} \sin x + \cos 6x \cdot \cos x)^2 \leq (3 + \cos^2 6x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \leq 4$$

или

$$\sqrt{3} \sin x + \cos 6x \cdot \cos x \leq 2.$$

Так как при этом  $\sqrt{4 + \sin^2 3x} \geq 2$ , то равенство в уравнении (4.63) имеет место в том случае, когда обе части уравнения равны 2.

Следовательно, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\cos 6x} = \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \sin 3x = 0. \end{cases} \quad (4.64)$$

Так как  $\sin 3x = 0$  и  $\cos 6x = 1 - 2\sin^2 3x$ , то  $\cos 6x = 1$  и систему уравнений (4.64) можно переписать в более простом виде

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \\ \sin 3x = 0. \end{cases}$$



Решая уравнение  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ , получаем  $x_1 = \frac{\pi}{3}(3n+1)$ , где  $n$  — целое число.

Так как  $\sin 3x_1 = \sin(\pi + 3\pi n) = 0$ , то найденные значения  $x_1$  являются корнями уравнения (4.63).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{3}(3n+1)$ , где  $n$  — целое число.

#### 4.40. Решить уравнение

$$2 \cos x \sin 3x + \sin 7x \cdot \cos 3x = \sqrt{6} + \cos^2 x$$

**Решение.** Пусть

$$f(x) = 2 \cos x \cdot \sin 3x + \sin 7x \cdot \cos 3x \text{ и}$$

$$g(x) = \sqrt{6} + \cos^2 x.$$

С учетом неравенства (4.2) получаем

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (2 \cos x \cdot \sin 3x + \sin 7x \cdot \cos 3x)^2 \leq \\ &\leq (4 \cos^2 x + \sin^2 7x)(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = \\ &= 4 \cos^2 x + \sin^2 7x \leq 5. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем  $f(x) \leq \sqrt{5}$ . Так как  $g(x) \geq \sqrt{6}$ , то  $f(x) < g(x)$ .

**Ответ:** корней нет.

**4.41. Решить уравнение**

$$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos z + \sin z \cdot \cos x = \frac{3}{2} \quad (4.65)$$

при условии, что  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  и  $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Решение.** Обозначим

$$f(x, y, z) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos z + \sin z \cdot \cos x.$$

Применяя неравенство (4.2), определим нижнюю и верхнюю оценки левой части уравнения (4.65).

Имеет место

$$\begin{aligned} f^2(x, y, z) &= (\sin x \cdot \cos y + \cos z \cdot \sin y + \sin z \cdot \cos x)^2 \leq \\ &\leq (\sin^2 x + \cos^2 z + \sin^2 y)(\cos^2 y + \sin^2 z + \cos^2 x) = \\ &= (\sin^2 x + 1) \cdot (1 + \cos^2 x) = 2 + \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 + \frac{1}{4} \sin^2 2x \leq \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что  $-\frac{3}{2} \leq f(x, y, z) \leq \frac{3}{2}$ . Кроме того, из приведенных выше рассуждений вытекает  $\sin^2 2x = 1$ . Так как переменные  $x, y, z$  входят в уравнение (4.65) симметрично, то по аналогии можно получить

$$\sin^2 2y = 1 \text{ и } \sin^2 2z = 1.$$

Поскольку

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2},$$

то  $\sin 2x = 1$ ,  $\sin 2y = 1$  и  $\sin 2z = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $y_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $z_1 = \frac{\pi}{4}$ .

#### 4.42. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x} = \sqrt{2}. \quad (4.66)$$

**Решение.** Из уравнения (4.66) следует, что  $\sin x \geq 0$  и  $\cos x \geq 0$ . В таком случае уравнение (4.66) будет равносильно уравнению

$$\sin x \sqrt{\sin x} + \cos x \sqrt{\cos x} = \sqrt{2}.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского (4.2), получаем

$$\begin{aligned} (\sin x \sqrt{\sin x} + \cos x \sqrt{\cos x})^2 &\leq (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x + \cos x) = \\ &= \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\sin x \sqrt{\sin x} + \cos x \sqrt{\cos x} \leq \sqrt[4]{2}$ . Так как  $\sqrt[4]{2} < \sqrt{2}$ , то  $\sin x \sqrt{\sin x} + \cos x \sqrt{\cos x} < \sqrt{2}$ . Следовательно, уравнение (4.66) корней не имеет.

**Ответ:** корней нет.

**4.43.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y^2+5} = 3, \\ \sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{y-2} = 2. \end{cases} \quad (4.67)$$

**Решение.** Так как из второго уравнения системы (4.67) получаем  $y \geq 2$ , то  $\sqrt{y^2+5} \geq \sqrt{4+5} = 3$ . Однако  $\sqrt{x-1} \geq 0$ , поэтому имеет место неравенство  $\sqrt{x-1} + \sqrt{y^2+5} \geq 3$ . Отсюда и из первого уравнения системы (4.67) следует, что  $x-1=0$ ,  $y^2+5=9$  или  $x_1=1$ ,  $y_1=2$ .

Подставляя найденные значения  $x_1$  и  $y_1$  во второе уравнение системы (4.67), убеждаемся в том, что они являются корнями системы уравнений.

**Ответ:**  $x_1=1$ ,  $y_1=2$ .

**4.44.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy - z^2 = 4, \\ x + y + z = 2. \end{cases} \quad (4.68)$$

**Решение.** Из первого уравнения системы (4.68) следует

$$z^2 = 2xy - 4,$$

а из второго уравнения получаем

$$z^2 = (2 - x - y)^2 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy.$$

Здесь была использована формула

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Отсюда получаем  $2xy - 4 = 4 + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 2xy$  или

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0. \quad (4.69)$$

Однако  $(x - 2)^2 \geq 0$  и  $(y - 2)^2 \geq 0$ , поэтому из уравнения (4.69) следует  $x_1 = 2$  и  $y_1 = 2$ . Если затем значения  $x_1$  и  $y_1$  подставить во второе уравнение системы (4.68), то  $z_1 = -2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 2$ ,  $z_1 = -2$ .

#### 4.45. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy - 7z^2 = 9, \\ x + y = 6. \end{cases} \quad (4.70)$$

**Решение.** Из первого уравнения системы получаем

$$xy = 9 + 7z^2 \geq 9.$$

Так как  $xy \geq 9$  и  $x + y = 6$ , то  $x > 0$  и  $y > 0$ .

Согласно неравенству (4.3) имеем  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ . Принимая во внимание уравнение  $x + y = 6$  из системы (4.70), получаем

$\sqrt{xy} \leq 3$  или  $xy \leq 9$ . Однако ранее было установлено, что  $xy \geq 9$ . В этой связи  $xy = 9$ .

Поскольку  $xy = 9$ , то первое уравнение системы (4.70) принимает вид  $9 - 7z^2 = 9$ . Следовательно, здесь имеем  $z^2 = 0$  или  $z_1 = 0$ .

Для завершения решения системы уравнений (4.70) рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 9, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Отсюда легко получить  $x_1 = 3$  и  $y_1 = 3$ .

**Ответ:**  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = 3$ ,  $z_1 = 0$ .

#### 4.46. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 y = 9, \\ 3x + y = 6. \end{cases} \quad (4.71)$$

**Решение.** Из системы уравнений (4.71) следует, что  $x > 0$  и  $y > 0$ . Перепишем первое уравнение системы как

$$\sqrt[4]{x^3 y} = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}.$$

К правой части уравнения  $\sqrt{3} = \sqrt[4]{x^3 y}$  применим неравенство Коши (4.1), в котором  $n = 4$ , и получим

$$\sqrt{3} = \sqrt[4]{x^3 y} \leq \frac{x + x + x + y}{4} = \frac{3x + y}{4}.$$

Отсюда и из второго уравнения системы (4.71) следует, что  $\sqrt{3} \leq \frac{3}{2}$ . Однако, известно, что  $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$ . Поэтому система уравнений (4.71) является несовместной.

**Ответ:** корней нет.

#### 4.47. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y^2 - 1} + y\sqrt{x^2 - 1} = 3\sqrt{7}, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases} \quad (4.72)$$

**Решение.** Первое уравнение системы (4.72) возведем в квадрат и затем к полученному уравнению применим неравенство (4.2). Тогда, принимая во внимание второе уравнение, получим

$$63 = (x\sqrt{y^2 - 1} + y\sqrt{x^2 - 1})^2 \leq (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2) = 9 \cdot 7 = 63.$$

Полученное равенство свидетельствует о том, что примененное неравенство Коши—Буняковского (4.2) обратилось в равенство.

В этой связи можно записать  $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$  или

$$x\sqrt{x^2-1}=y\sqrt{y^2-1}. \quad (4.73)$$

Отсюда и из первого уравнения системы (4.72) следует  $x > 1$ ,  $y > 1$ .

Положим, что  $f(z) = z\sqrt{z^2-1}$ , где  $z > 1$ . Тогда уравнение (4.73) принимает вид  $f(x) = f(y)$ . Так как функция  $f(z) = z\sqrt{z^2-1}$  является возрастающей, то согласно теореме 6.6 из уравнения (4.73) следует  $x = y$ .

Если  $x = y$ , то из второго уравнения системы (4.72) получаем  $2x^2 = 9$  или  $x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно, корнями системы уравнений (4.72) являются  $x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  и  $y_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,  $y_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

#### 4.48. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 6, \end{cases}$$

где  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ .

**Решение.** Если сложить уравнения системы, то

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{2} + \frac{2}{y}\right) + 3\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right) = 12.$$



Если воспользоваться неравенством  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ , которое вытекает из неравенства Коши (4.3) и выполняется для произвольных  $a > 0$ , то

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{2} + \frac{2}{y} \geq 2, \quad \frac{z}{3} + \frac{3}{z} \geq 2 \text{ и}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{2} + \frac{2}{y}\right) + 3\left(\frac{z}{3} + \frac{3}{z}\right) \geq 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 12.$$

Отсюда следует, что примененные выше неравенства Коши обратились в равенства. В этой связи  $x=1$ ,  $\frac{y}{2}=1$  и  $\frac{z}{3}=1$ .

**Ответ:**  $x_1=1$ ,  $y_1=2$ ,  $z_1=3$ .

#### 4.49. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 3, \end{cases}$$

где  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ .

**Решение.** Перемножим уравнения заданной системы и получим

$$1 + \frac{4x}{y} + \frac{9x}{z} + \frac{y}{x} + 4 + \frac{9y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{4z}{y} + 9 = 36 \text{ или}$$

$$\left(\frac{4x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{9x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{9y}{z} + \frac{4z}{y}\right) = 22. \quad (4.74)$$

Если применить неравенство Коши (4.3), то

$$\frac{4x}{y} + \frac{y}{x} \geq 4, \quad \frac{9x}{z} + \frac{z}{x} \geq 6, \quad \frac{9y}{z} + \frac{4z}{y} \geq 12 \text{ и}$$

$$\left(\frac{4x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{9x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{9y}{z} + \frac{4z}{y}\right) \geq 22.$$

Если полученное неравенство сравнить с уравнением (4.74), то видно, что все примененные выше неравенства Коши превратились в равенства. Следовательно, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \frac{4x}{y} = \frac{y}{x}, \\ \frac{9x}{z} = \frac{z}{x}, \\ \frac{9y}{z} = \frac{4z}{y} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 4x^2 = y^2, \\ 9x^2 = z^2, \\ 9y^2 = 4z^2. \end{cases}$$

Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$  и  $z > 0$ , то  $y = 2x$  и  $z = 3x$ . Однако по условию  $x + y + z = 12$ , поэтому  $x + 2x + 3x = 12$  или  $x_1 = 2$ . Следовательно, имеем  $y_1 = 2x_1 = 4$  и  $z_1 = 3x_1 = 6$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ ,  $y_1 = 4$ ,  $z_1 = 6$ .

**4.50.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{2y^2}{1+y^2}, \\ y = \frac{2z^2}{1+z^2}, \\ z = \frac{2x^2}{1+x^2}. \end{cases} \quad (4.75)$$

**Решение.** Первоначально отметим, что  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  и  $z \geq 0$ . Кроме того, система уравнений (4.75) имеет очевидные корни:  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = 0$ . Поэтому далее можно считать, что  $x > 0$ ,  $y > 0$  и  $z > 0$ .

Согласно неравенству Коши (4.3) можно записать:  $1 + y^2 \geq 2y$ . В этой связи  $x = \frac{2y^2}{1+y^2} \leq \frac{2y^2}{2y} = y$ , т. е.  $x \leq y$ . Принимая во внимание второе и третье уравнения системы (4.75), по аналогии получим  $y \leq z$  и  $z \leq x$ .

Так как  $x \leq y \leq z \leq x$ , то  $x = y = z$  и первое уравнение можно переписать, как  $x = \frac{2x^2}{1+x^2}$ . Поскольку  $x > 0$ , то отсюда получаем  $x_2 = 1$ . Однако  $x = y = z$ , поэтому  $y_2 = 1$  и  $z_2 = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $y_2 = 1$ ,  $z_2 = 1$ .

**4.51. Решить систему уравнений**

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + y^3 = -3. \end{cases} \quad (4.76)$$

**Решение.** Принимая во внимание неравенство (4.3), можно записать  $x^2 + 1 \geq 2x$ . Тогда из первого уравнения системы (4.76) получаем

$$y^2 = \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2x}{2x} = 1 \text{ или } -1 \leq y \leq 1.$$

Из второго уравнения системы (4.76) следует

$$2(x-1)^2 + y^3 + 1 = 0.$$

Так как  $2(x-1)^2 \geq 0$ , то  $y^3 + 1 \leq 0$  или  $y \leq -1$ .

Поскольку  $-1 \leq y \leq 1$  и  $y \leq -1$ , то  $y_1 = -1$ . Если подставить значение  $y_1$  в систему уравнений (4.76), то получим  $x_1 = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = -1$ .

**4.52. Решить систему уравнений**

$$\begin{cases} 2x^3 + 27y^3 = 9x^2 y, \\ x^2 - xy + y^2 = 28, \end{cases} \quad (4.77)$$

где  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ .

**Решение.** Так как  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ , то к левой части первого уравнения системы (4.77) можно применить неравенство Коши (4.4).

Имеет место

$$2x^3 + 27y^3 = x^3 + x^3 + 27y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot 27y^3} = 9x^2y.$$

Отсюда и из первого уравнения системы следует, что примененное неравенство (4.4) превратилось в равенство. А это означает, что выполняется условие  $x^3 = 27y^3$  или  $x = 3y$ .

Подставим  $x = 3y$  во второе уравнение системы и получим уравнение  $9y^2 - 3y^2 + y^2 = 28$  или  $y^2 = 4$ . Так как  $y \geq 0$  и  $x = 3y$ , то  $y_1 = 2$  и  $x_1 = 6$ .

**Ответ:**  $x_1 = 6$ ,  $y_1 = 2$ .

# Монотонность аналитических функций

*Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.*

Русский и советский математик

А. И. Крылов

Для успешного решения уравнений повышенной сложности в ряде случаев является весьма полезным и эффективным использование различных свойств аналитических функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ , составляющих уравнение  $f(x) = g(x)$ .

## Основные понятия и определения

К числу важнейших свойств аналитической функции  $y = f(x)$  относится понятие монотонности.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.** Функция  $y = f(x)$  называется *возрастающей* на отрезке  $a \leq x \leq b$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  таких, что  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.** Функция  $y = f(x)$  называется *убывающей* на отрезке  $a \leq x \leq b$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  таких, что  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , выполняется неравенство  $f(x_2) < f(x_1)$ .

Если функция  $y = f(x)$  на отрезке  $a \leq x \leq b$  является возрастающей или убывающей, то она иначе называется *монотонной*.

Естественно, что на рассматриваемом отрезке монотонная функция  $y = f(x)$  является непрерывной.

Использование свойства монотонности функций при решении уравнений вида  $f(x) = g(x)$  осуществляется на основе применения следующих теорем.

**ТЕОРЕМА 5.1.** Если функция  $y = f(x)$  на отрезке  $a \leq x \leq b$  является возрастающей (убывающей), а функция  $y = g(x)$  — убывающей (возрастающей), то уравнение  $f(x) = g(x)$  на данном отрезке имеет не более одного корня.

**ТЕОРЕМА 5.2.** Если функция  $y = f(x)$  на отрезке  $a \leq x \leq b$  является монотонной, а функция  $y = g(x)$  — константой, то уравнение  $f(x) = g(x)$  на данном отрезке имеет не более одного корня.

В этой связи для решения уравнения  $f(x) = g(x)$ , обе части которого удовлетворяют условию теорем 5.1 или 5.2, достаточно найти (хотя бы подбором) единственный корень или показать, что такого корня не существует вообще.

## Уравнения

Перейдем к рассмотрению уравнений и неравенств, решение которых осуществляется на основе применения теорем 5.1 и 5.2.

### 5.1. Решить уравнение

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt[3]{10x+4} = 9. \quad (5.1)$$

**Решение.** Так как функция  $f(x) = \sqrt{4x+1} + \sqrt[3]{10x+4}$  при условии, что  $x \geq -\frac{1}{4}$ , является возрастающей, то уравнение (5.1) может иметь не более одного корня. Этот единственный корень  $x_1 = 6$  легко найти подбором.

**Ответ:**  $x_1 = 6$ .

### 5.2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^4 - 8} + \sqrt[4]{x^3 - 7} = 3. \quad (5.2)$$



**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (5.2) являются  $x \geq \sqrt[3]{7}$ . Так как функция  $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - 8} + \sqrt[4]{x^3 - 7}$  на своей области определения является возрастающей, то уравнение (5.2) не может иметь более одного корня. Подбором находим искомый корень, равный  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

### 5.3. Решить уравнение

$$\sqrt{3 + \sqrt{5 - x}} = \sqrt{x}. \quad (5.3)$$

**Решение.** Очевидно, что областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (5.3) являются  $3 \leq x \leq 5$ .

Поскольку на области допустимых значений  $x$  левая часть уравнения представляет собой убывающую функцию, а правая его часть — возрастающую функцию, то уравнение (5.3) не может иметь более одного корня. Подбором легко определить, что единственным корнем уравнения (5.3) является  $x_1 = 4$ .

**Ответ:**  $x_1 = 4$ .

### 5.4. Решить уравнение

$$\sqrt{x + 9} - \sqrt{x - 3} = x - 5. \quad (5.4)$$

**Решение.** Областью определения переменной  $x$  в уравнении (5.4) являются произвольные  $x \geq 3$ .

Первоначально левую часть уравнения умножим и разделим на выражение  $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-3}$ , учитывая при этом, что  $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-3} \neq 0$ .

После этого получим равносильное уравнение

$$\frac{12}{\sqrt{x+9} + \sqrt{x-3}} = x - 5. \quad (5.5)$$

Так как функция  $f(x) = \frac{12}{\sqrt{x+9} + \sqrt{x-3}}$  убывает при условии, что  $x \geq 3$ , а функция  $g(x) = x - 5$  является возрастающей на всей числовой оси  $OX$ , то уравнение (5.5) имеет один корень или не имеет их вообще. Подбором можно установить, что  $x_1 = 7$  — корень уравнения (5.5).

**Ответ:**  $x_1 = 7$ .

### 5.5. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 27} + \sqrt{3x^2 - 18x + 52} = 6x - x^2 - 1. \quad (5.6)$$

**Решение.** Представим уравнение (5.6) в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{2(x-3)^2 + 9} + \sqrt{3(x-3)^2 + 25} &= 8 - (x-3)^2 \text{ или} \\ \sqrt{2y+9} + \sqrt{3y+25} &= 8 - y, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где  $y = (x-3)^2$ . Очевидно, что здесь  $0 \leq y \leq 8$ .

Так как функция  $f(y) = \sqrt{2y+9} + \sqrt{3y+25}$  на отрезке  $0 \leq y \leq 8$  является возрастающей, а функция  $g(y) = 8 - y$  убывает на всей числовой оси  $OY$ , то уравнение (5.7) на отрезке  $0 \leq y \leq 8$  имеет не более одного корня. Подбором несложно установить, что корнем уравнения (5.7) является  $y_1 = 0$ .

Однако  $y = (x-3)^2$  и  $y_1 = 0$ , поэтому  $x_1 = 3$ .

**Ответ:**  $x_1 = 3$ .

### 5.6. Решить уравнение

$$3(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{2-x}+1) = 2x+4. \quad (5.8)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (5.8) является отрезок  $-3 \leq x \leq 2$ .

Умножим обе части уравнения на выражение  $\sqrt{x+3}+1$ . Отметим, что  $\sqrt{x+3}+1 \neq 0$ . Тогда уравнение (5.8) принимает вид

$$3(x+2)(\sqrt{2-x}+1) = 2(x+2)(\sqrt{x+3}+1). \quad (5.9)$$

Отсюда следует, что  $x+2=0$  и  $x_1 = -2$  является корнем уравнения (5.8). Пусть теперь  $x+2 \neq 0$ . Тогда обе части уравнения (5.9) разделим на  $x+2$  и получим уравнение  $3(\sqrt{2-x}+1) = 2(\sqrt{x+3}+1)$  или

$$3\sqrt{2-x}+1 = 2\sqrt{x+3}. \quad (5.10)$$

Поскольку на области допустимых значений  $-3 \leq x \leq 2$  левая часть уравнения (5.10) убывает, а правая часть — возрастает, то уравнение (5.10) не может иметь более одного корня. Подбором нетрудно установить, что единственным корнем уравнения (5.10) является  $x_2 = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ .

### 5.7. Решить уравнение

$$2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}. \quad (5.11)$$

**Решение.** Поскольку функция  $f(x) = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$  является возрастающей, а функций  $g(x) = \sqrt[3]{14 - 3x}$  — убывающей на всей числовой оси  $OX$ , то уравнение (5.11) имеет не более одного корня. Подбором находим корень данного уравнения вида  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

### 5.8. Решить уравнение

$$(x^3 + x - 2)^3 = 4 - x^3. \quad (5.12)$$

**Решение.** Так как функция  $f(x) = (x^3 + x - 2)^3$  является возрастающей на всей числовой оси  $OX$ , а функция  $g(x) = 4 - x^3$  —

убывающей, то уравнение  $f(x) = g(x)$  не может иметь более одного корня.

Преобразуем уравнение (5.12) следующим образом:

$$(x^3 + x - 2)^3 - x^3 = 4 - 2x^3,$$

$$(x^3 - 2) \left( (x^3 + x - 2)^2 + x(x^3 + x - 2) + x^2 \right) = 2(2 - x^3)$$

$$\text{или } (x^3 - 2) \left( (x^3 + x - 2)^2 + x(x^3 + x - 2) + x^2 + 2 \right) = 0.$$

Отсюда следует, что  $x^3 - 2 = 0$  или  $x_1 = \sqrt[3]{2}$ . На этом решение уравнения (5.12) завершается, поскольку ранее было установлено, если уравнение имеет корень, то он будет единственным.

**Ответ:**  $x_1 = \sqrt[3]{2}$ .

### 5.9. Решить уравнение

$$32(x-2)^5 + (x+1)^3 = 96. \quad (5.13)$$

**Решение.** Так как функция  $f(x) = 32(x-2)^5 + (x+1)^3$  возрастает на всей числовой оси  $OX$ , а правая часть уравнения (5.13) является константой, то это уравнение имеет не более одного корня. Этот корень  $x_1 = 3$  легко найти подбором.

**Ответ:**  $x_1 = 3$ .

**5.10. Решить уравнение**

$$\sqrt{10 - 2 \cdot 5^x} = 5^{x+1} - 13. \quad (5.14)$$

**Решение.** Если обозначить  $y = 5^x$ , то уравнение (5.14) будет равносильно уравнению

$$\sqrt{10 - 2y} = 5y - 13, \quad (5.15)$$

где  $\frac{13}{5} \leq y \leq 5$ .

Поскольку функция  $f(y) = \sqrt{10 - 2y}$  является убывающей на области определения, а функция  $g(y) = 5y - 13$  — возрастающей на всей числовой оси  $OY$ , то уравнение (5.15) может иметь не более одного корня. Искомый корень  $y_1 = 3$  легко найти подбором.

Так как  $5^x = y$  и  $y_1 = 3$ , то  $x_1 = \log_5 3$ .

**Ответ:**  $x_1 = \log_5 3$ .

**5.11. Решить уравнение**

$$\log_2(x - 1) = \log_5(4x + 5). \quad (5.16)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменных  $x$  в уравнении (5.16) являются  $x > 1$ .

Положим, что  $y = \log_2(x-1)$ . Тогда  $x-1=2^y$ ,  $x=2^y+1$  и уравнение (5.16) принимает вид  $y = \log_5(4 \cdot 2^y + 9)$ . Отсюда вытекает показательное уравнение

$$4 \cdot 2^y + 9 = 5^y. \quad (5.17)$$

Нетрудно заметить, что значение  $y_1 = 2$  является корнем уравнения (5.17). Покажем, что найденный корень является единственным для данного уравнения. С этой целью разделим обе части уравнения (5.17) на выражение  $2^y$  (с учетом того, что  $2^y > 0$ ) и получим равносильное уравнение

$$4 + \frac{9}{2^y} = \left(\frac{5}{2}\right)^y. \quad (5.18)$$

Так как функция  $f(y) = 4 + \frac{9}{2^y}$  является убывающей на всей числовой оси  $OY$ , а функция  $g(y) = \left(\frac{5}{2}\right)^y$  — возрастающей, то уравнение (5.18) не может иметь более одного корня. Однако этот единственный корень уже известен.

Поскольку  $y = \log_2(x-1)$  и  $y_1 = 2$ , то  $\log_2(x-1) = 2$  или  $x_1 = 5$ .

**Ответ:**  $x_1 = 5$ .

### 5.12. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{2\sin x - 1} + \sqrt[4]{3\sin x - 2} + \sqrt[4]{4\sin x - 3} = 4 - \sin x. \quad (5.19)$$

**Решение.** Если обозначить  $y = \sin x$ , то уравнение (5.19) можно переписать в виде

$$\sqrt[4]{2y-1} + \sqrt[4]{3y-2} + \sqrt[4]{4y-3} = 4 - y, \quad (5.20)$$

где  $\frac{3}{4} \leq y \leq 1$ .

Так как функция  $f(y) = \sqrt[4]{2y-1} + \sqrt[4]{3y-2} + \sqrt[4]{4y-3}$  является возрастающей на области определения, а функция  $g(y) = 4 - y$  убывает на всей числовой оси  $OY$ , то уравнение (5.20) имеет не более одного корня. Легко видеть, что таким корнем является  $y_1 = 1$ . Поскольку  $y = \sin x$ , то  $\sin x = 1$  и

$x_1 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ , где  $n$  — целое число.

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ , где  $n$  — целое число.



# Другие нестандартные методы

*Для современного физика математика все равно, что абсолютный слух для композитора.*

Советский и российский писатель  
Ю. М. Нагибин

Кроме нестандартных методов решения уравнений повышенной сложности, опубликованных в предыдущих пяти главах книги, существует еще довольно много других оригинальных методов, часть из которых приведена в настоящей главе.

К таким методам относятся, например, методы решения уравнений, содержащих модули, или методы решения функциональных уравнений. Кроме того, в ряде случаев положительный эффект при решении уравнений достигается при использовании известных формул сокращенного умножения.

## Основные понятия и определения

Наиболее сложно решаемыми задачами школьной математики являются уравнения, содержащие переменные под знаком модуля. Для успешного решения таких уравнений необходимо знать и использовать следующие утверждения.

**ТЕОРЕМА 6.1.** Для любых аналитических функций

$$y = f(x) \text{ и } y = g(x)$$

справедливо неравенство  $|f(x)| + |g(x)| \geq |f(x) \pm g(x)|$ .

**ТЕОРЕМА 6.2.** Равенство  $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)|$  равносильно неравенству  $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ .

**ТЕОРЕМА 6.3.** Равенство  $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)|$  равносильно неравенству  $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ .

К уравнениям повышенной сложности относятся также функциональные уравнения — уравнения вида

$$x = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ раз}} \quad (6.1)$$

и

$$f(g(x)) = f(h(x)), \quad (6.2)$$

где  $n \geq 2$ . При решении функциональных уравнений необходимо использовать следующие теоремы.

**ТЕОРЕМА 6.4.** Если функция  $y = f(x)$  возрастает на отрезке  $a \leq x \leq b$ , то на этом отрезке уравнение (6.1) будет равносильно уравнению  $x = f(x)$ .

**ТЕОРЕМА 6.5.** Если функция  $y = f(x)$  убывает на отрезке  $a \leq x \leq b$  и при этом  $n$  – нечетное, то на этом отрезке уравнение (6.1) будет равносильно уравнению  $x = f(x)$ .

Отметим, что в этом случае функциональное уравнение (6.1) будет иметь не более одного корня. Это утверждение вытекает из того факта, что уравнение (6.1) равносильно уравнению  $x = f(x)$ , левая часть которой представляет собой возрастающую функцию, а правая часть — убывающую функцию. Известно, что в таком случае, если уравнение  $x = f(x)$  имеет корень, то этот корень будет единственным.

Уместно заметить, если функция  $y = f(x)$  на отрезке  $a \leq x \leq b$  убывает и при этом  $n$  – четное число, то в таком случае для решения уравнений вида (6.1) необходимо использовать другие методы.

**ТЕОРЕМА 6.6.** Если функция  $y = f(x)$  возрастает (или убывает) на всей области определения переменной  $x$  в уравнении (6.2), то уравнение  $f(g(x)) = f(h(x))$  будет равносильно уравнению  $g(x) = h(x)$ .

Отметим, что зачастую уравнения повышенной сложности эффективно решаются методами, в основу которых положено использование простейших школьных формул — формул сокращенного умножения или их незначительных модификаций. При этом чаще всего используются следующие формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab \quad (6.3)$$

и

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab. \quad (6.4)$$

Ниже предлагаются уравнения повышенной сложности, решение которых осуществляется нестандартными методами, применение которых анонсировано в начале данной главы.

## Уравнения

### 6.1. Решить уравнение

$$(x - 1)^3 + x^4 = 17. \quad (6.5)$$

**Решение.** Преобразуем уравнение (6.5) на основе применения формул сокращенного умножения следующим образом:

$$((x - 1)^3 - 2^3) + (x^4 - 3^2) = 0,$$

$$(x - 3)((x - 1)^2 + 2(x - 1) + 4) + (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0,$$

$$(x - 3)(x^2 + 3) + (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0, \quad (x^2 + 3)(x^2 + x - 6) = 0$$

$$\text{или } (x - 2)(x + 3)(x^2 + 3) = 0.$$

Так как  $x^2 + 3 > 0$ , то уравнение (6.5) имеет только два корня:  $x_1 = -3$  и  $x_2 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 2$ .

## 6.2. Решить уравнение

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = 0. \quad (6.6)$$

**Решение.** Будем искать представление уравнения (6.6) в виде

$$(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) = 0.$$

Пусть

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2),$$

тогда

$$\begin{aligned} & x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 11x + 2 = \\ & = x^4 + x^3(a_1 + a_2) + x^2(b_1 + b_2 + a_1a_2) + x(a_1b_2 + a_2b_1) + b_1b_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 8, \\ b_1 + b_2 + a_1a_2 = 18, \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 11, \\ b_1b_2 = 2. \end{cases} \quad (6.7)$$

Корнями системы уравнений (6.7) являются  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$  и  $b_2 = 1$ . В таком случае уравнение (6.6) будет равносильно уравнению

$$(x^2 + 5x + 2)(x^2 + 3x + 1) = 0.$$

Следовательно, уравнение (6.6) будет равносильно совокупности двух уравнений  $x^2 + 5x + 2 = 0$  и  $x^2 + 3x + 1 = 0$ . Решая оба квадратных уравнения, получаем корни уравнений (6.6).

**Ответ:**

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2},$$

$$x_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.$$

### 6.3. Решить уравнение

$$3(x-2)^2 + 2(x-5)^3 = 10. \quad (6.8)$$

**Решение.** Преобразуем уравнение (6.8) следующим образом:

$$3((x-2)^2 - 4) + 2((x-5)^3 + 1) = 0,$$

$$3x(x-4) + 2(x-4)((x-5)^2 - (x-5) + 1) = 0,$$

$$(x-4)(2x^2 - 19x + 62) = 0. \quad (6.9)$$

Так как  $2x^2 - 19x + 62 > 0$ , то из (6.9) получаем единственный корень уравнения (6.8), т. е.  $x_1 = 4$ .

**Ответ:**  $x_1 = 4$ .

**6.4. Решить уравнение**

$$(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81. \quad (6.10)$$

**Решение.** Из уравнения (6.10) получаем

$$\left( (x^2 - 6x)^2 - 9^2 \right) - 2(x - 3)^2 = 0,$$

$$(x^2 - 6x - 9)(x^2 - 6x + 9) - 2(x - 3)^2 = 0,$$

$$(x^2 - 6x - 9)(x - 3)^2 - 2(x - 3)^2 = 0,$$

$$(x - 3)^2(x^2 - 6x - 11) = 0.$$

Отсюда получаем два уравнения  $x - 3 = 0$  и  $x^2 - 6x - 11 = 0$ , корнями которых являются  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 3 + \sqrt{20}$  и  $x_3 = 3 - \sqrt{20}$ .

**Ответ:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 3 + \sqrt{20}$ ,  $x_3 = 3 - \sqrt{20}$ .

**6.5. Решить уравнение**

$$(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 + (2x - 5)^3 = (5x - 3)^3. \quad (6.11)$$

**Решение.** Известно, что уравнение (6.11) имеет не более трех действительных корней. Рассмотрим три варианта представления уравнения (6.11), в каждом из которых будем последовательно находить его корни, применяя формулы сокращенного умножения.

1. Если  $(2x+3)^3 + (2x-5)^3 = (5x-3)^3 - (x-1)^3$ , то

$$(4x-2)f_1(x) = (4x-2)g_1(x) \text{ и } x_1 = \frac{1}{2}.$$

2. Если  $(x-1)^3 + (2x-5)^3 = (5x-3)^3 - (2x+3)^3$ , то

$$(3x-6)f_2(x) = (3x-6)g_2(x) \text{ и } x_2 = 2.$$

3. Если  $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = (5x-3)^3 - (2x-5)^3$ , то

$$(3x+2)f_3(x) = (3x+2)g_3(x) \text{ и } x_3 = -\frac{2}{3}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -\frac{2}{3}$ .

### 6.6. Решить уравнение

$$(x^2 - 1)^2 + 8x - 4 = 0. \quad (6.12)$$

**Решение.** Уравнение (6.12) равносильно уравнению

$$x^4 - 2x^2 + 1 + 8x - 4 = 0. \quad (6.13)$$

Если в левой части уравнения (6.13) прибавить и вычесть слагаемое  $2x^2$ , то получим

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2 + 8x - 4 = 0, \quad (x^2 + 1)^2 - (2x - 2)^2 = 0 \text{ или}$$

$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0. \quad (6.14)$$



Так как  $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$ , то из (6.14) вытекает уравнение  $x^2 + 2x - 1 = 0$ , корнями которого являются

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ и } x_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

**Ответ:**  $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ ,  $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ .

### 6.7. Решить уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = x(y + z + u). \quad (6.15)$$

**Решение.** Представим уравнение (6.15) в следующем виде:

$$\frac{x^2}{4} + \left( \frac{x^2}{4} - xy + y^2 \right) + \left( \frac{x^2}{4} - xz + z^2 \right) + \left( \frac{x^2}{4} - xu + u^2 \right) = 0 \text{ или}$$

$$\frac{x^2}{4} + \left( \frac{x}{2} - y \right)^2 + \left( \frac{x}{2} - z \right)^2 + \left( \frac{x}{2} - u \right)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что  $x = 0$ ,  $x = 2y$ ,  $x = 2z$  и  $x = 2u$ .

**Ответ:**  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = 0$ ,  $u_1 = 0$ .

### 6.8. Решить уравнение

$$|x-5| + |x-1| + |x+3| + |x+6| = 15 \quad (6.16)$$

**Решение.** Согласно теореме 6.1 можно записать

$$\begin{cases} |x-5| + |x+3| \geq 8, \\ |x-1| + |x+6| \geq 7. \end{cases} \quad (6.17)$$

Принимая во внимание равенство (6.16), делаем вывод о том, что неравенства (6.17) превращаются в равенства, т. е. имеет место система уравнений

$$\begin{cases} |x-5|+|x+3|=8, \\ |x-1|+|x+6|=7. \end{cases}$$

В свою очередь, данная система уравнений равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} (x-5)(x+3) \leq 0, \\ (x-1)(x+6) \leq 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Решая систему неравенств (6.18) получаем  $-3 \leq x \leq 1$ . Так как система неравенств (6.18) равносильна уравнению (6.16), то корни уравнения (6.16) образуют отрезок  $-3 \leq x \leq 1$ .

**Ответ:**  $-3 \leq x \leq 1$ .

### 6.9. Решить уравнение

$$\frac{|x-1|+|x+4|-5}{|x-5|+|x+2|-7}=0. \quad (6.19)$$

**Решение.** Уравнение (6.19) равносильно системе, состоящей из одного уравнения и одного неравенства, следующего вида:

$$\begin{cases} |x-1|+|x+4|=5, \\ |x-5|+|x+2| \neq 7. \end{cases} \quad (6.20)$$

Из теоремы 6.3 следует, что равенство

$$|f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)|$$

равносильно неравенству  $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ . В этой связи система (6.20) будет равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} (x-1)(x+4) \leq 0, \\ (x-5)(x+2) > 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

Решая систему неравенств (6.21) методом интервалов, получаем корни уравнения (6.19) вида  $-4 \leq x < -2$ .

**Ответ:**  $-4 \leq x < -2$ .

### 6.10. Решить уравнение

$$|x-1| + |2x-5| = 4x-9. \quad (6.22)$$

**Решение.** Так как  $|x-1| + |2x-5| \geq 0$ , то  $4x-9 \geq 0$  или  $x \geq \frac{9}{4}$ . Поскольку  $x \geq \frac{9}{4}$ , то  $x-1 \geq 0$  и  $|x-1| = x-1$ . В таком случае уравнение (6.22) принимает вид  $x-1 + |2x-5| = 4x-9$  или

$$|2x-5| = 3x-8. \quad (6.23)$$

Из уравнения (6.23) следует, что  $x \geq \frac{8}{3}$  и  $2x-5 \geq 2 \cdot \frac{8}{3} - 5 = \frac{1}{3}$ .

Так как  $2x-5 \geq 0$ , то  $|2x-5| = 2x-5$  и из уравнения (6.23) получаем  $2x-5 = 3x-8$  или  $x_1 = 3$ .

**Ответ:**  $x_1 = 3$ .

**6.11. Решить уравнение**

$$(x^2 - 27)(x + 3)^2 + 9x^2 = 0. \quad (6.24)$$

**Решение.** Первоначально убедимся в том, что  $x = -3$  не является корнем уравнения (6.24). Так как  $x \neq -3$ , то обе части уравнения (6.24) можно разделить на  $(x + 3)^2$  и после этого получить равносильное уравнение

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x + 3)^2} = 27. \quad (6.25)$$

Далее применим к левой части уравнения (6.25) известное равенство (6.3) и получим следующие уравнения:

$$\left(x - \frac{3x}{x + 3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x + 3} = 27 \text{ или } \left(\frac{x^2}{x + 3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x + 3} = 27.$$

Если затем выполнить замену  $y = \frac{x^2}{x + 3}$ , то последнее уравнение примет вид квадратного уравнения

$$y^2 + 6y - 27 = 0. \quad (6.26)$$

Так как уравнение (6.26) имеет два корня:  $y_1 = -9$  и  $y_2 = 3$ , то необходимо рассмотреть два случая.

1. Если  $y_1 = -9$ , то  $\frac{x^2}{x + 3} = -9$  или  $x^2 + 9x + 27 = 0$ . Однако

это квадратное уравнение действительных корней не имеет.

2. Если  $y_2 = 3$ , то  $\frac{x^2}{x+3} = 3$  или  $x^2 - 3x - 9 = 0$ . Корнями

этого уравнения являются  $x_1 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$  и  $x_2 = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ .

### 6.12. Решить уравнение

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}. \quad (6.27)$$

**Решение.** Применим к левой части уравнения (6.27) равенство (6.4) и получим следующие равносильные уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}\right)^2 - 2 \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} &= \frac{10}{9}, \\ \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} &= \frac{10}{9}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

В уравнении (6.28) выполним замену переменных  $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$

и получим квадратное уравнение  $9y^2 - 9y - 10 = 0$ . Корнями квадратного уравнения являются  $y_1 = -\frac{2}{3}$  и  $y_2 = \frac{5}{3}$ .

Рассмотрим два уравнения  $\frac{2x^2}{x^2-1} = -\frac{2}{3}$  и  $\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{5}{3}$ . Корнями первого уравнения являются  $x_1 = -\frac{1}{2}$  и  $x_2 = \frac{1}{2}$ , а второе уравнение действительных корней не имеет.

**Ответ:**  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

### 6.13. Решить уравнение

$$(2x^2 + x)^2 + x^2 = 12(2x + 1)^2. \quad (6.29)$$

**Решение.** Для преобразования левой части уравнения (6.29) необходимо воспользоваться формулой (6.3). В таком случае имеем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} (2x^2 + x - x)^2 + 2x(2x^2 + x) &= 12(2x + 1)^2 \text{ или} \\ 2x^4 + x^2(2x + 1) - 6(2x + 1)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Отметим, что полученное уравнение (6.30) является однородным уравнением второй степени.

Для решения уравнения (6.30) сначала убедимся, что значение  $x = -\frac{1}{2}$  не является его корнем, а затем обе части уравнения разделим на выражение  $(2x + 1)^2$  и получим

$$2\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)^2 + \frac{x^2}{2x+1} - 6 = 0.$$

После замены переменных  $y = \frac{x^2}{2x+1}$  перейдем к рассмотрению квадратного уравнения  $2y^2 + y - 6 = 0$ . Так как корнями квадратного уравнения являются  $y_1 = -2$  и  $y_2 = \frac{3}{2}$ , то для поиска корней уравнения (6.30) необходимо решить два уравнения  $\frac{x^2}{2x+1} = -2$  и  $\frac{x^2}{2x+1} = \frac{3}{2}$ , которые равносильны уравнениям  $x^2 + 4x + 2 = 0$  и  $2x^2 - 6x - 3 = 0$ . Отсюда получаем четыре корня исходного уравнения (6.29).

**Ответ:**

$$x_1 = -2 - \sqrt{2}, \quad x_2 = -2 + \sqrt{2},$$

$$x_3 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}, \quad x_4 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}.$$

### 6.14. Решить уравнение

$$\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \frac{x}{2}. \quad (6.31)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (6.31) является отрезок  $0 \leq x \leq 5$ .

Воспользуемся известным неравенством  $a + b \geq \sqrt{a^2 + b^2}$ , которое выполняется для любых  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ , и получим  $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} \geq \sqrt{10}$ .

Так как на области допустимых значений  $x$  правая часть уравнения  $\frac{x}{2} \leq \frac{5}{2}$  и  $\frac{5}{2} < \sqrt{10}$ , то уравнение (6.31) корней не имеет.

**Ответ:** корней нет.

### 6.15. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{2-x^2} + \frac{x}{2-x} = 2. \quad (6.32)$$

**Решение.** Из уравнения (6.32) следует, что  $x \neq 2$  и  $x \neq \pm \sqrt{2}$ . Преобразуем (6.32) следующим образом:

$$\frac{x^2}{x^2-2} + 1 + \frac{x}{x-2} + 1 = 0, \quad \frac{x^2-1}{x^2-2} + \frac{x-1}{x-2} = 0,$$

$$(x-1) \left( \frac{x+1}{x^2-2} + \frac{1}{x-2} \right) = 0 \text{ или}$$

$$(x-1)(2x^2-x-4) = 0. \quad (6.33)$$

Из уравнения (6.33) следует, что  $x_1 = 1$  и  $2x^2 - x - 4 = 0$ . Корнями уравнения  $2x^2 - x - 4 = 0$  являются

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{4} \text{ и } x_3 = \frac{1+\sqrt{33}}{4}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 1, x_2 = \frac{1-\sqrt{33}}{4}, x_3 = \frac{1+\sqrt{33}}{4}.$



**6.16. Решить уравнение**

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 3x + 5} = \frac{2x^2 - 5x + 7}{x^2 - 7x + 15}. \quad (6.34)$$

**Решение.** Первоначально отметим, что

$$x^2 + 3x + 5 > 0 \text{ и } x^2 - 7x + 15 > 0$$

(дискриминанты соответствующих квадратных уравнений отрицательные). Затем преобразуем уравнение (6.34) на основе использования свойства пропорции: если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ .

В этой связи уравнение (6.34) будет равносильно уравнению

$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x + 5} = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 7x + 15}. \quad (6.35)$$

Так как  $x^2 + 3x + 5 > 0$  и  $x^2 - 7x + 15 > 0$ , то из уравнения (6.35) следует, что  $x^2 + 2x - 8 = 0$ . Корнями квадратного уравнения являются  $x_1 = -4$  и  $x_2 = 2$ .

Пусть теперь  $x^2 + 2x - 8 \neq 0$ . Тогда разделим обе части уравнения (6.35) на выражение  $x^2 + 2x - 8$  и получим  $x^2 + 3x + 5 = x^2 - 7x + 15$ . Отсюда получаем третий корень уравнения (6.34) вида  $x_3 = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 1$ .

*Примечание.* Свойство пропорции можно записать в более общей форме. Пусть  $m, n, p, q$  – константы, для которых выполняется условие  $p^2 + q^2 \neq 0$ . Тогда выражения  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  и  $\frac{m a + n b}{p a + q b} = \frac{m c + n d}{p c + q d}$  являются равносильными. При решении уравнения (6.34) было использовано свойство пропорции при условии, что  $m = 1$ ,  $n = -1$ ,  $p = 0$  и  $q = 1$ .

### 6.17. Решить уравнение

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}. \quad (6.36)$$

**Решение.** Из уравнения (6.36) следует, что областью допустимых значений переменной  $x$  являются  $x \neq -4$ ,  $x \neq -3$ ,  $x \neq -2$  и  $x \neq -1$ .

Если в каждой дроби уравнения (6.36) разделить числитель на знаменатель, то получим

$$x + 1 + \frac{1}{x + 1} + x + 4 + \frac{4}{x + 4} = x + 2 + \frac{2}{x + 2} + x + 3 + \frac{3}{x + 3},$$

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{4}{x + 4} = \frac{2}{x + 2} + \frac{3}{x + 3}, \quad \frac{4}{x + 4} - \frac{3}{x + 3} = \frac{2}{x + 2} - \frac{1}{x + 1},$$

$$\frac{x}{x^2 + 7x + 12} = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}.$$

Отсюда следует, что  $x_1 = 0$  и  $x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 2$  или  $x_2 = -\frac{5}{2}$ .

**Ответ:**  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{5}{2}$ .

### 6.18. Решить уравнение

$$x^3 + 1 = 2 \sqrt[3]{2x - 1}. \quad (6.37)$$

**Решение.** Перепишем уравнение (6.37) в виде функционального уравнения  $x = \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2x - 1} - 1}$ . Так как функция  $y = \sqrt[3]{2x - 1}$  возрастает на всей числовой оси  $OX$ , то уравнение  $x = \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2x - 1} - 1}$  (согласно теореме 6.4) будет равносильно уравнению  $x = \sqrt[3]{2x - 1}$  или  $x^3 - 2x + 1 = 0$ .

Из уравнения  $x^3 - 2x + 1 = 0$  получаем равносильные уравнения

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x^2 - 2x + 1 &= 0, \quad x^2(x - 1) + (x - 1)^2 = 0, \\ (x - 1)(x^2 + x - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что уравнение (6.37) имеет корни

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ .

*Примечание.* Уравнение (6.37) можно представить в виде рационального функционального уравнения, которое имеет вид

$$x = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x^3 + 1}{2} \right)^3 + 1 \right). \quad (6.38)$$

Если положить  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$ , то уравнение (6.38) приобретает вид функционального уравнения  $x = f(f(x))$ . Так как функция  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$  является возрастающей для любых  $x$ , то уравнение (6.38) будет равносильно уравнениям  $x = \frac{x^3 + 1}{2}$  или  $x^3 - 2x + 1 = 0$ .

Далее повторяются рассуждения, приведенные выше.

### 6.19. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{3x + 12} = \frac{1}{3} (x - 2)^3 - 6. \quad (6.39)$$

**Решение.** Предварительно выполним замену переменных. Положим  $z = x - 2$ . Тогда из уравнения (6.39) получим

$$\sqrt[3]{3z + 18} = \frac{1}{3} z^3 - 6 \text{ или}$$

$$z = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3z + 18} + 18}. \quad (6.40)$$

Уравнение (6.40) относится к классу функциональных уравнений вида  $z = f(f(z))$ , где  $f(z) = \sqrt[3]{3z+18}$ . Так как функция  $y = f(z)$  является возрастающей на всей числовой оси  $OZ$ , то уравнение (6.40) будет равносильно уравнению  $z = \sqrt[3]{3z+18}$ . Отсюда следует уравнение третьей степени  $z^3 - 3z - 18 = 0$ , первый корень которого  $z_1 = 3$  легко находится подбором.

Так как  $\frac{z^3 - 3z - 18}{z - 3} = z^2 + 3z + 6$  и уравнение  $z^2 + 3z + 6 = 0$  не имеет действительных корней, то для уравнения  $z^3 - 3z - 18 = 0$  существует единственный корень  $z_1 = 3$ . Поскольку  $x = z + 2$ , то  $x_1 = 5$ .

**Ответ:**  $x_1 = 5$ .

### 6.20. Решить уравнение

$$\sqrt{7 - 3\sqrt{7 - 3x}} = x. \quad (6.41)$$

**Решение.** Обозначим  $y = \sqrt{7 - 3x}$ . Тогда, принимая во внимание уравнение (6.41), можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{7 - 3y} = x, \\ \sqrt{7 - 3x} = y. \end{cases} \quad (6.42)$$

Из системы уравнений (6.42) следует, что

$$0 \leq x \leq \frac{7}{3} \text{ и } 0 \leq y \leq \frac{7}{3}.$$

Если оба уравнения системы возвести в квадрат, а затем из первого уравнения вычесть второе, то получим

$$(x - y)(x + y - 3) = 0.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $x - y = 0$ , тогда  $x = \sqrt{7 - 3x}$  или  $x^2 + 3x - 7 = 0$ . Квадратное уравнение имеет единственный положительный корень  $x_1 = \frac{\sqrt{37} - 3}{2}$ .

Нетрудно убедиться в том, что  $x_1 \leq \frac{7}{3}$ .

2. Пусть  $x + y - 3 = 0$ . Тогда  $\sqrt{7 - 3x} = 3 - x$ , где  $x \leq \frac{7}{3}$ . После возведения в квадрат обеих частей данного уравнения получаем уравнение  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , корнями которого являются  $x_2 = 1$  и  $x_3 = 2$ .

Ответ:  $x_1 = \frac{\sqrt{37} - 3}{2}$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ .

### 6.21. Решить уравнение

$$(x - 1)^4 + 4x - 4 = x^2 + 4\sqrt{x}. \quad (6.43)$$

**Решение.** Так как уравнение (6.43) равносильно уравнению

$$(x - 1)^4 + 4(x - 1) = x^2 + 4\sqrt{x},$$

то положим, что  $f(z) = z^4 + 4z$ , и представим уравнение (6.43) в виде функционального уравнения  $f(g(x)) = f(h(x))$ , где  $g(x) = x - 1$  и  $h(x) = \sqrt{x}$ .

Поскольку функция  $f(z) = z^4 + 4z$  является возрастающей на положительной полуоси  $OZ$ , то уравнение  $f(g(x)) = f(h(x))$  будет равносильно уравнению  $g(x) = h(x)$ , т. е. уравнению  $x - 1 = \sqrt{x}$ .

Из уравнения  $x - \sqrt{x} - 1 = 0$  получаем

$$\sqrt{x_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ или } x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Ответ:**  $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .

## 6.22. Решить уравнение

$$x^3 + 1 = 2 \sqrt[3]{2x^3 - 1}. \quad (6.44)$$

**Решение.** Преобразуем уравнение (6.44) следующим образом:

$$\begin{aligned} (x^3 + 1)^3 &= 8(2x^3 - 1), \quad (x^3 + 1)^3 - 2^3 = 16(x^3 - 1), \\ (x^3 - 1)(y^2 + 2y + 4) &= 16(x^3 - 1), \end{aligned} \quad (6.45)$$

где  $y = x^3 + 1$ . Отсюда получаем корень уравнения (6.44) вида  $x_1 = 1$ .

Для установления остальных корней уравнения (6.45) рассмотрим уравнение  $y^2 + 2y + 4 = 16$  или  $y^2 + 2y - 12 = 0$ .

Корнями уравнения  $y^2 + 2y - 12 = 0$  являются  $y_1 = -1 + \sqrt{13}$  и  $y_2 = -1 - \sqrt{13}$ . Так как  $x^3 = y - 1$ , то здесь имеем два уравнения относительно переменной  $x$  вида  $x^3 = -2 + \sqrt{13}$  и  $x^3 = -2 - \sqrt{13}$ .

Следовательно, уравнение (6.44) имеет еще два корня:

$$x_2 = \sqrt[3]{\sqrt{13} - 2} \text{ и } x_3 = -\sqrt[3]{\sqrt{13} + 2}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \sqrt[3]{\sqrt{13} - 2}$ ,  $x_3 = -\sqrt[3]{\sqrt{13} + 2}$ .

### 6.23. Решить уравнение

$$x = 2\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{x^3 - 3x^2}. \quad (6.46)$$

**Решение.** Из уравнения (6.46) следует, что  $x \geq 3$ . Данное уравнение равносильно следующим уравнениям:

$$x = 2\sqrt{x-3} + \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x-3} \text{ или}$$

$$x - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x-3} - 2\sqrt{x-3} = 0. \quad (6.47)$$

Уравнение (6.47) относится к числу однородных уравнений второй степени. Предварительно убедимся в том, что значение  $x=3$  не является корнем уравнения (6.47). Затем обе части уравнения разделим на выражение  $\sqrt{x-3}$  и получим



$$y^2 - y - 2 = 0, \text{ где } y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x-3}} \text{ и } y \geq 0.$$

Уравнение  $y^2 - y - 2 = 0$  имеет только один положительный корень  $y_1 = 2$ . Рассмотрим уравнение  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x-3}} = 2$ , где  $x \geq 3$ .

Отсюда получаем уравнение  $x^2 - 16x + 48 = 0$ , корни которого  $x_1 = 4$  и  $x_2 = 12$ .

**Ответ:**  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 12$ .

### 6.24. Решить уравнение

$$\sqrt{2-x^3} = \sqrt[3]{x^2-2}. \quad (6.48)$$

**Решение.** Для установления области допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (6.48) рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} 2-x^3 \geq 0, \\ x^2-2 \geq 0. \end{cases}$$

Из данной системы неравенств получаем  $x \leq -\sqrt{2}$ .

Для упрощения решения уравнения (6.48) положим, что  $y = -x$ . В таком случае уравнение (6.48) будет равносильно уравнению

$$\sqrt{y^3+2} = \sqrt[3]{y^2-2}, \quad (6.49)$$

где  $y \geq \sqrt{2}$ .

Положим, что  $z = \sqrt[3]{y^2 - 2}$ . Тогда  $z^3 = y^2 - 2$ ,  $y = \sqrt{z^3 + 2}$  и уравнение (6.49) можно переписать как

$$z = \sqrt{\left(\sqrt{z^3 + 2}\right)^3 + 2}, \quad (6.50)$$

где  $z \geq 0$ . Введем в рассмотрение функцию  $f(u) = \sqrt{u^3 + 2}$ . Тогда уравнение (6.50) принимает вид функционального уравнения  $z = f(f(z))$ . Поскольку функция  $f(u) = \sqrt{u^3 + 2}$  является возрастающей на всей положительной полуоси  $OU$ , то (согласно теореме 6.4) уравнение (6.50) будет равносильно уравнениям  $z = \sqrt{z^3 + 2}$ ,  $z^3 - z^2 + 2 = 0$  или  $(z + 1)(z^2 - 2z + 2) = 0$ . Однако уравнение  $(z + 1)(z^2 - 2z + 2) = 0$  положительных корней не имеет.

**Ответ:** корней нет.

### 6.25. Решить уравнение

$$2x\sqrt{x+30} = x^2 + x + 30. \quad (6.51)$$

**Решение.** Преобразуем уравнение (6.51) следующим образом:

$$x^2 - 2x\sqrt{x+30} + x + 30 = 0 \text{ или } (x - \sqrt{x+30})^2 = 0.$$

Отсюда получаем  $\sqrt{x+30} = x$  и  $x \geq 0$ . Положительным корнем квадратного уравнения  $x^2 - x - 30 = 0$  является  $x_1 = 6$ .

**Ответ:**  $x_1 = 6$ .

**6.26. Решить уравнение**

$$\sqrt{4x^2 - 3x + 9} - \sqrt{4x^2 - 3x - 11} = 2. \quad (6.52)$$

**Решение.** Если обе части уравнения (6.52) умножить на выражение  $\sqrt{4x^2 - 3x + 9} + \sqrt{4x^2 - 3x - 11}$ , то получим уравнение

$$\sqrt{4x^2 - 3x + 9} + \sqrt{4x^2 - 3x - 11} = 10. \quad (6.53)$$

Если сложить уравнения (6.52) и (6.53), то

$$\sqrt{4x^2 - 3x + 9} = 6 \text{ или } 4x^2 - 3x - 27 = 0.$$

Отсюда следует, что  $x_1 = 3$  и  $x_2 = -\frac{9}{4}$ . Выполним подстановку значений  $x_1$  и  $x_2$  в уравнение (6.52) и убедимся, что данные значения переменной  $x$  являются его корнями.

**Ответ:**  $x_1 = 3, x_2 = -\frac{9}{4}$ .

**6.27. Решить уравнение**

$$x + 1 = (\sqrt{x + 2} + 1)(\sqrt{x + 2} + x^2 + x - 7). \quad (6.54)$$

**Решение.** Из уравнения (6.54) следует  $x \geq -2$ . Если обе части уравнения умножить на выражение  $\sqrt{x + 2} - 1$ , то получим

$$(x + 1)(\sqrt{x + 2} - 1) = (x + 1)(\sqrt{x + 2} + x^2 + x - 7). \quad (6.55)$$

Отсюда следует, что  $x = -1$ . Однако подстановкой в уравнение (6.54) убеждаемся в том, что значение  $x = -1$  не является его корнем.

Разделим обе части уравнения (6.55) на выражение  $x + 1$  и получим  $\sqrt{x+2} - 1 = \sqrt{x+2} + x^2 + x - 7$  или  $x^2 + x - 6 = 0$ . Корнями квадратного уравнения являются  $x_1 = 2$  и  $x_2 = -3$ . Однако  $x \geq -2$ , поэтому уравнение (6.54) имеет лишь один корень  $x_1 = 2$ .

Отметим, что если  $x_1 = 2$ , то  $\sqrt{x+2} - 1 \neq 0$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

### 6.28. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x}. \quad (6.56)$$

**Решение.** Если обозначить функцию  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x}$ , то уравнение (6.56) можно представить в виде функционального уравнения  $f(2x+1) = f(x)$ . Поскольку функция  $y = f(x)$  возрастает на всей числовой оси  $OX$ , то из теоремы 6.6. следует, что уравнение  $f(2x+1) = f(x)$  будет равносильно уравнению  $2x+1 = x$  или  $x_1 = -1$ .

**Ответ:**  $x_1 = -1$ .

**6.29. Решить уравнение**

$$\frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} - x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} + \sqrt{x^2 - 3}. \quad (6.57)$$

**Решение.** Из уравнения (6.57) следует  $|x| \geq \sqrt{3}$ . Преобразуем данное уравнение посредством умножения числителя и знаменателя каждой дроби на выражение, которое является сопряженным знаменателю, и получим

$$\begin{aligned} \frac{9(\sqrt{x^2 + 9} + x)}{(\sqrt{x^2 + 9} - x)(\sqrt{x^2 + 9} + x)} &= \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 9} - 3)}{(\sqrt{x^2 + 9} + 3)(\sqrt{x^2 + 9} - 3)} + \sqrt{x^2 - 3}, \\ \sqrt{x^2 + 9} + x &= \sqrt{x^2 + 9} - 3 + \sqrt{x^2 - 3} \quad \text{или} \\ x + 3 &= \sqrt{x^2 - 3}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Из уравнения (6.58) следует, что  $x \geq -3$ . Если возвести в квадрат обе части уравнения (6.58), то  $x^2 + 6x + 9 = x^2 - 3$  или  $x_1 = -2$ .

**Ответ:**  $x_1 = -2$ .

**6.30. Решить уравнение**

$$\left| 0,5^{x+1} - 4 \right| + \left| 0,5^{x+1} - 1 \right| = 3. \quad (6.59)$$

**Решение.** Уравнение (6.59) удовлетворяет условию теоремы 6.3. В этой связи данное уравнение равносильно неравенству

$$(0,5^{x+1} - 4)(0,5^{x+1} - 1) \leq 0.$$

Отсюда получаем  $1 \leq 0,5^{x+1} \leq 4$ ,  $0,5^0 \leq 0,5^{x+1} \leq 0,5^{-2}$ ,  
 $-2 \leq x+1 \leq 0$  или  $-3 \leq x \leq -1$ .

**Ответ:**  $-3 \leq x \leq -1$ .

### 6.31. Решить уравнение

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} - 2 = 2 - x^{\sqrt{\log_x 2}}. \quad (6.60)$$

**Решение.** Для определения области допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (6.60) рассмотрим неравенства

$$\log_2 x \geq 0, \log_x 2 \geq 0, x > 0 \text{ и } x \neq 1.$$

Отсюда следует, что искомую область образуют  $x > 1$ .

Далее воспользуемся известным равенством

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}},$$

которое выполняется для любых  $a > 1$  и  $b > 1$ , и перепишем уравнение (6.60) в следующем виде:  $2^{\sqrt{\log_2 x}} - 2 = 2 - 2^{\sqrt{\log_2 x}}$ .

Отсюда получаем  $2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2$ ,  $\log_2 x = 1$  или  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

### 6.32. Решить уравнение

$$2^{\log_x 5} + 5^{\log_x 2} = 2^{\log_x 40}. \quad (6.61)$$

**Решение.** Известно, что  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $c \neq 1$ . Воспользуемся данным равенством и перепишем уравнение (6.61) в виде

$$2 \cdot 5^{\log_x 2} = 40^{\log_x 2} \text{ или } 2 \cdot 5^{\log_x 2} = 8^{\log_x 2} \cdot 5^{\log_x 2}.$$

Так как  $5^{\log_x 2} > 0$ , то обе части приведенного выше уравнения разделим на выражение  $5^{\log_x 2}$  и получим равносильное уравнение  $8^{\log_x 2} = 2$ .

Отсюда следует, что  $\log_x 2 = \frac{1}{3}$  или  $x_1 = 8$ .

**Ответ:**  $x_1 = 8$ .

### 6.33. Решить уравнение

$$\log_{16x} x^3 + \log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} = 2. \quad (6.62)$$

**Решение.** Для установления области определения переменной  $x$  в уравнении (6.62) необходимо рассмотреть совокупность трех неравенств:  $x > 0$ ,  $x \neq \frac{1}{16}$  и  $x \neq 2$ .

Так как  $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $b \neq 1$ ,  $c \neq 1$ ,

то из уравнения (6.62) следует  $\frac{\log_2 x^3}{\log_2 16x} + \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 \frac{x}{2}} = 2$  или

$$\frac{3\log_2 x}{\log_2 x + 4} + \frac{\log_2 x}{2\log_2 x - 2} = 2. \quad (6.63)$$

Если в уравнении (6.63) положить  $y = \log_2 x$ , то получим уравнение

$$\frac{3y}{y+4} + \frac{y}{2y-2} = 2. \quad (6.64)$$

Уравнение (6.64) будем решать следующим образом:

$$\frac{3y}{y+4} - 1 + \frac{y}{2y-2} - 1 = 0, \quad \frac{2y-4}{y+4} - \frac{y-2}{2y-2} = 0 \text{ или}$$

$$(y-2) \left( \frac{2}{y+4} - \frac{1}{2y-2} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что  $y-2=0$  и  $\frac{2}{y+4} = \frac{1}{2y-2}$ , т. е. уравне-

ние (6.64) имеет два корня:  $y_1 = 2$  и  $y_2 = \frac{8}{3}$ .

Так как  $y = \log_2 x$ , то  $\log_2 x = 2$  и  $\log_2 x = \frac{8}{3}$  или  $x_1 = 4$  и  $x_2 = 4^{\frac{8}{3}} = 4\sqrt[3]{4}$ .

**Ответ:**  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 4\sqrt[3]{4}$ .

### 6.34. Решить уравнение

$$3\log_5 x^2 - \log_5^2(-x) = 9. \quad (6.65)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменной  $x$  в уравнении (6.65) являются  $x < 0$ . Преобразуем уравнение (6.65) с учетом того, что  $x < 0$ , следующим образом:



$$6\log_5|x| - \log_5^2(-x) = 9 \text{ или}$$

$$6\log_5(-x) - \log_5^2(-x) = 9.$$

Отсюда получаем  $\log_5(-x) = 3$  или  $x_1 = -125$ .

**Ответ:**  $x_1 = -125$ .

**6.35. Решить уравнение**

$$\log_5(\log_4(\log_3(\log_2 x + 2) + 3) + 4) = 1. \quad (6.66)$$

**Решение.** Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнение (6.66) следующим образом:

$$\log_5(\log_4(\log_3(\log_2 x + 2) + 3) + 4) = \log_5 5,$$

$$\log_4(\log_3(\log_2 x + 2) + 3) + 4 = 5,$$

$$\log_4(\log_3(\log_2 x + 2) + 3) = 1,$$

$$\log_4(\log_3(\log_2 x + 2) + 3) = \log_4 4,$$

$$\log_3(\log_2 x + 2) + 3 = 4, \log_3(\log_2 x + 2) = 1,$$

$$\log_3(\log_2 x + 2) = \log_3 3, \log_2 x + 2 = 3, \log_2 x = 1.$$

Отсюда получаем  $x_1 = 2$ .

**Ответ:**  $x_1 = 2$ .

**6.36.** Решить уравнение

$$\sin^2 4x - \sin^2 x = \sin^2 3x. \quad (6.67)$$

**Решение.** Преобразуем уравнение (6.67) на основе применения формулы  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$  и получим равносильные уравнения  $\sin 3x \cdot \sin 5x - \sin^2 3x = 0$  или  $\sin 3x(\sin 5x - \sin 3x) = 0$ .

Если  $\sin 3x = 0$ , то  $x_1 = \frac{\pi n}{3}$ , где  $n$  — целое число.

Если  $\sin 5x = \sin 3x$ , то  $5x = 3x + 2\pi k$  и  $5x = \pi - 3x + 2\pi r$  или  $x_2 = \pi k$  и  $x_3 = \frac{\pi}{8}(2r + 1)$ , где  $k, r$  — целые числа. Отметим,

что серия корней  $x_2 = \pi k$  содержится в серии  $x_1 = \frac{\pi n}{3}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi n}{3}$ ,  $x_3 = \frac{\pi}{8}(2r + 1)$ , где  $n, r$  — целые числа.

**6.37.** Решить уравнение

$$\sin x \cdot (1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x. \quad (6.68)$$

**Решение.** Предварительно заметим, что  $\cos x \neq 1$ . В противном случае  $\sin x = 0$  и уравнение (6.68) превращается в элементарное арифметическое неравенство.

Так как  $\cos x \neq 1$ , то  $1 - \cos x \neq 0$ . В этой связи после умножения обеих частей уравнения (6.68) на выражение  $1 - \cos x$  получим равносильные уравнения

$$\begin{aligned}\sin x (1 - \cos^2 x) &= 1 - \cos^3 x \text{ или} \\ \sin^3 x + \cos^3 x &= 1.\end{aligned}\tag{6.69}$$

Так как

$$\sin^3 x \leq \sin^2 x, \cos^3 x \leq \cos^2 x \text{ и } \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

то

$$\sin^3 x + \cos^3 x \leq 1.$$

Отсюда и из уравнения (6.69) следуют равенства  $\sin^3 x = \sin^2 x$  и  $\cos^3 x = \cos^2 x$ . Однако известно, что  $\cos x \neq 1$ , поэтому  $\cos x = 0$ .

Поскольку  $\cos x = 0$  и  $\sin^3 x = \sin^2 x$ , то  $\sin x = 1$ . Решая уравнение  $\sin x = 1$ , получаем корни уравнения (6.68).

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$ , где  $n$  — целое число.

### 6.38. Решить уравнение

$$\cos 4x + 5 \cos 2x + 3 = \sin 3x.\tag{6.70}$$

**Решение.** Сначала преобразуем (в отдельности) левую и правую части уравнения (6.70) следующим образом:

$$\begin{aligned}\cos 4x + 5 \cos 2x + 3 &= 2 \cos^2 2x - 1 + 5 \cos 2x + 3 = \\&= 2 \cos^2 2x + 5 \cos 2x + 2 = (2 \cos 2x + 1)(\cos 2x + 2) \text{ и} \\ \sin 3x &= -4 \sin^3 x + 3 \sin x = \sin x (-4 \sin^2 x + 3) = \\&= \sin x (2 - 4 \sin^2 x + 1) = \sin x (2 \cos 2x + 1).\end{aligned}$$

В таком случае уравнение (6.70) принимает вид

$$\begin{aligned}(2 \cos 2x + 1)(\cos 2x + 2) &= \sin x (2 \cos 2x + 1) \text{ или} \\ (2 \cos 2x + 1)(\cos 2x + 2 - \sin x) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$2 \cos 2x + 1 = 0, \quad \cos 2x = -\frac{1}{2} \text{ и } x_1 = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1),$$

где  $n$  — целое число. Далее рассмотрим уравнения

$$\cos 2x + 2 - \sin x = 0 \text{ или}$$

$$2 \sin^2 x + \sin x = 3.$$

Нетрудно видеть, что уравнение  $2 \sin^2 x + \sin x = 3$  равносильно уравнению  $\sin x = 1$ , т. е.  $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ , где  $k$  — целое число.

**Ответ:**  $x_1 = \frac{\pi}{3}(3n \pm 1)$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ , где  $n, k$  — целые числа.

**6.39. Решить систему уравнений**

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + 3y\sqrt{x} = 36, \\ y\sqrt{y} + 3x\sqrt{y} = 28. \end{cases} \quad (6.71)$$

**Решение.** Если сложить уравнения системы (6.71), то получим

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 64 \text{ или } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4.$$

Если из первого уравнения системы (6.71) вычесть второе уравнение, то  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 = 8$  или  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$ .

Так как  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$  и  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$ , то  $\sqrt{x} = 3$  и  $\sqrt{y} = 1$ . Отсюда следует, что  $x_1 = 9$  и  $y_1 = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = 9$ ,  $y_1 = 1$ .

**6.40. Решить систему уравнений**

$$\begin{cases} xy + 1 = x + y, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases} \quad (6.72)$$

**Решение.** Так как уравнение  $xy + 1 = x + y$  равносильно уравнению  $(x-1)(y-1) = 0$ , то из системы уравнений (6.72) получаем две системы уравнений:

$$\begin{cases} x-1=0, \\ x^3+y^3=9 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y-1=0, \\ x^3+y^3=9. \end{cases}$$

Из первой системы уравнений следует  $x_1 = 1$  и  $y_1 = 2$ , а из второй получаем  $x_2 = 2$  и  $y_2 = 1$ .

**Ответ:**  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $x_2 = 2$ ,  $y_2 = 1$ .

#### 6.41. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x(y^2 + 1)}{x^2 + y^2} = \frac{3}{5}, \\ \frac{y(x^2 - 1)}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}. \end{cases} \quad (6.73)$$

**Решение.** Непосредственно из системы уравнений (6.73) следует, что  $x > 0$  и  $x^2 \neq 1$ .

Так как  $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ , то система уравнений (6.73) будет равносильна следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} x^2(y^2 + 1)^2 + y^2(x^2 - 1)^2 &= (x^2 + y^2)^2, \\ x^2 y^2 (x^2 + y^2) + x^2 + y^2 &= (x^2 + y^2)^2, \quad x^2 y^2 + 1 = x^2 + y^2 \text{ или} \\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Поскольку  $x^2 \neq 1$ , то из уравнения (6.74) получаем  $y^2 = 1$ . Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $y_1 = 1$ . Если подставить значение  $y_1$  во второе уравнение системы (6.73), то  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$  или  $x^2 = 9$ . Однако  $x > 0$ , поэтому  $x_1 = 3$ .

2. Если положить  $y_2 = -1$ , то второе уравнение системы (6.73) примет вид  $\frac{1 - x^2}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$  или  $9x^2 = 1$ .

Так как  $x > 0$ , то  $x_2 = \frac{1}{3}$ .

Выполним проверку: подставим найденные значения переменных  $x$  и  $y$  в уравнения системы (6.73) и убедимся, что эти значения являются корнями данной системы уравнений.

**Ответ:**  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$ ,  $y_2 = -1$ .

### 6.42. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = 1, \\ \frac{y^3}{x} + xy = 4. \end{cases} \quad (6.75)$$

**Решение.** Областью допустимых значений переменных  $x$  и  $y$  в системе уравнений (6.75) являются  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ , т. е.  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Кроме того, из данной системы уравнений следует,

что значения переменных  $x, y$  должны иметь одинаковые знаки, т. е. должно выполняться неравенство  $xy > 0$ .

Система уравнений (6.75) на области допустимых значений равносильна системе

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = y, \\ y^3 + x^2y = 4x. \end{cases} \quad (6.76)$$

Умножим первое уравнение системы (6.76) на выражение  $4x$ , а второе уравнение — на переменную  $y$ , а затем из первого уравнения результирующей системы вычтем второе уравнение. После этого получим уравнение

$$4x^4 + 3x^2y^2 - y^4 = 0. \quad (6.77)$$

Преобразуем уравнение (6.77) следующим образом:

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4x^2y^2 - y^4 - x^2y^2 &= 0, \\ 4x^2(x^2 + y^2) - y^2(x^2 + y^2) &= 0 \text{ или} \\ (x^2 + y^2)(4x^2 - y^2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Поскольку  $x^2 + y^2 \neq 0$  и  $xy > 0$ , то из уравнения (6.78) получаем  $4x^2 - y^2 = 0$  или  $y = 2x$ . Если выражение  $y = 2x$  подставить в первое уравнение системы (6.76), то получим  $x^3 + x(2x)^2 = 2x$  или  $5x^3 = 2x$ . Однако  $x \neq 0$ , поэтому  $5x^2 = 2$ .



Так как  $5x^2 = 2$  и  $y = 2x$ ,

$$\text{то } x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}, y_1 = 2\sqrt{\frac{2}{5}}, x_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}}, y_2 = -2\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}, y_1 = 2\sqrt{\frac{2}{5}}, x_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}}, y_2 = -2\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

### 6.43. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{y} = 10, \\ y + \sqrt[3]{z} = 10, \\ z + \sqrt[3]{x} = 10. \end{cases} \quad (6.79)$$

**Решение.** Введем в рассмотрение функцию  $f(u) = 10 - \sqrt[3]{u}$ .

В таком случае система уравнений (6.79) принимает вид

$$\begin{cases} x = f(y), \\ y = f(z), \\ z = f(x). \end{cases}$$

Из приведенной выше системы уравнений вытекает функциональное уравнение вида

$$x = f(f(f(x))). \quad (6.80)$$

Так как для функции  $f(u) = 10 - \sqrt[3]{u}$  выполняется условие теоремы 6.5, то можно утверждать, что уравнение (6.80) равносильно уравнению  $x = f(x)$ , т. е.  $x = 10 - \sqrt[3]{x}$  или  $x + \sqrt[3]{x} = 10$ .

Так как функция  $g(x) = x + \sqrt[3]{x}$  является возрастающей на всей числовой оси  $OX$ , то уравнение  $x + \sqrt[3]{x} = 10$  имеет не более одного корня. Этот единственно возможный корень  $x_1 = 8$  нетрудно найти подбором.

Поскольку система уравнений (6.79) является симметрической (относительно вхождения переменных  $x, y, z$ ) и известно, что  $x_1 = 8$  — единственный корень системы уравнений (6.79), то  $y_1 = 8$  и  $z_1 = 8$ .

**Ответ:**  $x_1 = 8, y_1 = 8, z_1 = 8$ .

#### 6.44. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + xy + y = 7, \\ x + xz + z = -3, \\ y + yz + z = -5. \end{cases} \quad (6.81)$$

**Решение.** Выполним преобразование уравнений системы (6.81), суть которое состоит в том, что к обеим частям каждого уравнения добавляется единица. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 8, \\ (x+1)(z+1) = -2, \\ (y+1)(z+1) = -4. \end{cases} \quad (6.82)$$

Если перемножить уравнения системы (6.82), то

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = 64 \text{ или } (x+1)(y+1)(z+1) = \pm 8.$$

Пусть  $(x+1)(y+1)(z+1)=8$ . Тогда данное выражение разделим поочередно на третье, второе и первое уравнения системы (6.82) и получим  $x_1+1=-2$ ,  $y_1+1=-4$ ,  $z_1+1=1$  или  $x_1=-3$ ,  $y_1=-5$ ,  $z_1=0$ .

Пусть  $(x+1)(y+1)(z+1)=-8$ . Тогда повторим приведенную выше процедуру и получим  $x_2+1=2$ ,  $y_2+1=4$ ,  $z_2+1=-1$  или  $x_2=1$ ,  $y_2=3$ ,  $z_2=-2$ .

**Ответ:**  $x_1=-3$ ,  $y_1=-5$ ,  $z_1=0$ ,  $x_2=1$ ,  $y_2=3$ ,  $z_2=-2$ .

#### 6.45. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x^2 + xz + z^2 = 4, \\ y^2 + yz + z^2 = 7. \end{cases} \quad (6.83)$$

**Решение.** Преобразуем систему уравнений (6.83) следующим образом: первое, второе и третье уравнения системы умножим, соответственно, на выражения  $x-y$ ,  $z-x$ ,  $y-z$  и получим систему

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = x - y, \\ z^3 - x^3 = 4z - 4x, \\ y^3 - z^3 = 7y - 7z. \end{cases} \quad (6.84)$$

Если сложить левые и правые части уравнений системы (6.84), то  $x - y + 4z - 4x + 7y - 7z = 0$  или  $x + z = 2y$ . Равенство

$x + z = 2y$  свидетельствует о том, что значения переменных  $x, y, z$  образуют арифметическую прогрессию. Если разность этой прогрессии обозначить  $d$ , то можно записать  $x = y - d$  и  $z = y + d$ .

Подставим выражения  $x$  и  $z$  в первое и третье уравнения системы (6.83) и получим три равносильные системы уравнений

$$\begin{cases} (y-d)^2 + (y-d)y + y^2 = 1, \\ y^2 + y(y+d) + (y+d)^2 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} 3y^2 - 3yd + d^2 = 1, \\ 3y^2 + 3yd + d^2 = 7, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3y^2 + d^2 = 4, \\ yd = 1. \end{cases} \quad (6.85)$$

Если подставить  $d = \frac{1}{y}$  в первое уравнение системы (6.85), то получим  $3y^4 - 4y^2 + 1 = 0$ ,  $(3y^4 - 3y^2) - (y^2 - 1) = 0$  или  $(y^2 - 1)(3y^2 - 1) = 0$ .

Отсюда следует, что  $y^2 = 1$  и  $y^2 = \frac{1}{3}$  или  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -1$ ,  $y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $y_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Так как  $d = \frac{1}{y}$ , то  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = -1$ ,  $d_3 = \sqrt{3}$  и  $d_4 = -\sqrt{3}$ .

Далее воспользуемся формулами  $x = y - d$ ,  $z = y + d$  и получим остальные корни системы уравнений (6.83):

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - d_1 = 0, \quad z_1 = y_1 + d_1 = 2, \\ x_2 &= y_2 - d_2 = 0, \quad z_2 = y_2 + d_2 = -2, \end{aligned}$$

$$x_3 = y_3 - d_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$z_3 = y_3 + d_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$x_4 = y_4 - d_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$z_4 = y_4 + d_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

**Ответ:**  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 1$ ,  $z_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = -1$ ,  $z_2 = -2$ ,

$$x_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, z_3 = \frac{4}{\sqrt{3}}, x_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}, y_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, z_4 = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

#### 6.46. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - yz = -5, \\ y^2 - xz = 7, \\ z^2 - xy = 11. \end{cases} \quad (6.86)$$

**Решение.** Первое уравнение системы умножим на  $y$ , второе — на  $z$ , а третье — на  $x$ . Если затем сложить левые и правые части полученных уравнений, то  $11x - 5y + 7z = 0$ .

Если первое, второе и третье уравнения системы (6.86) умножить, соответственно, на  $z$ ,  $x$  и  $y$ , то после сложения левых и правых частей уравнений получим  $7x + 11y - 5z = 0$ .

Если систему уравнений

$$\begin{cases} 5y - 7z = 11x, \\ -11y + 5z = 7x \end{cases}$$

решить относительно переменных  $y$  и  $z$ , то  $y = -2x$  и  $z = -3x$ .

Подставим выражения  $y = -2x$  и  $z = -3x$  в первое уравнение системы (6.86) и получим  $x^2 - 6x^2 = -5$ ,  $x^2 = 1$  или  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 1$ .

Так как  $y = -2x$  и  $z = -3x$ , то  $y_1 = 2$ ,  $z_1 = 3$  и  $y_2 = -2$ ,  $z_2 = -3$ .

**Ответ:**  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 2$ ,  $z_1 = 3$ ,  $x_2 = 1$ ,  $y_2 = -2$ ,  $z_2 = -3$ .

### 6.47. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x + y)^2 = z^2 + 9, \\ (x + z)^2 = y^2 + 12, \\ (y + z)^2 = x^2 + 15. \end{cases} \quad (6.87)$$

**Решение.** Воспользуемся формулой  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  и представим систему уравнения (6.87) посредством равносильной системы

$$\begin{cases} (x + y - z)(x + y + z) = 9, \\ (x - y + z)(x + y + z) = 12, \\ (-x + y + z)(x + y + z) = 15. \end{cases} \quad (6.88)$$

Если сложить уравнения системы (6.88), то получим

$$(x + y + z)^2 = 36 \text{ или } x + y + z = \pm 6.$$

Пусть  $x + y + z = 6$ , тогда система уравнений (6.88) принимает вид

$$\begin{cases} x + y - z = \frac{3}{2}, \\ x - y + z = 2, \\ -x + y + z = \frac{5}{2}. \end{cases} \quad (6.89)$$

Если из уравнения  $x + y + z = 6$  вычесть поочередно третье, второе и первое уравнения системы (6.89), то последовательно получим  $2x = \frac{7}{2}$ ,  $2y = 4$ ,  $2z = \frac{9}{2}$  или  $x_1 = \frac{7}{4}$ ,  $y_1 = 2$ ,  $z_1 = \frac{9}{4}$ .

Пусть  $x + y + z = -6$ . Тогда, применяя приведенные выше действия, получим  $x_2 = -\frac{7}{4}$ ,  $y_2 = -2$ ,  $z_2 = -\frac{9}{4}$ .

**Ответ:**  $x_1 = \frac{7}{4}$ ,  $y_1 = 2$ ,  $z_1 = \frac{9}{4}$ ,  $x_2 = -\frac{7}{4}$ ,  $y_2 = -2$ ,  $z_2 = -\frac{9}{4}$ .

#### 6.48. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z + xyz = xy + xz + yz + 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases} \quad (6.90)$$

**Решение.** Так как первое уравнение системы (6.90) равносильно уравнению  $(x-1)(y-1)(z-1)=0$ , то здесь имеем три системы уравнений

$$\begin{cases} x-1=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \end{cases} \quad \begin{cases} y-1=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \end{cases} \quad \text{и} \\ \begin{cases} z-1=0, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

Из данных систем уравнений получаем три тройки корней системы уравнений (6.90).

**Ответ:**

$$\begin{aligned} x_1=1, y_1=0, z_1=0, \quad x_2=0, y_2=1, z_2=0, \\ x_3=0, y_3=0, z_3=1. \end{aligned}$$

#### 6.49. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = y - 6, \\ \cos x = y - 7. \end{cases} \quad (6.91)$$

**Решение.** Поскольку  $-1 \leq \sin x \leq 1$  и  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , то из системы уравнений (6.91) получаем  $-1 \leq y - 6 \leq 1$ ,  $-1 \leq y - 7 \leq 1$  или  $6 \leq y \leq 7$ .

Так как  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , то  $(y-6)^2 + (y-7)^2 = 1$  или

$$y^2 - 13y + 42 = 0. \quad (6.92)$$

Решая уравнение (6.92), находим  $y_1 = 6$  и  $y_2 = 7$ .

Если  $y_1 = 6$ , то из системы уравнений (6.91) следует  $\sin x = 0$  и  $\cos x = -1$  или  $x_1 = \pi(2n+1)$ , где  $n$  — целое число.



Если  $y_2 = 7$ , то  $\sin x = 1$  и  $\cos x = 0$ . Отсюда получаем  $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ , где  $k$  — целое число.

**Ответ:**  $x_1 = \pi(2n + 1)$ ,  $y_1 = 6$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ ,  $y_2 = 7$ ,

где  $n, k$  — целые числа.

# Заключение

*Физика и математика всегда помогали одна другой, и развитие их часто неразделимо.*

Советский физик, академик С. И. Вавилов

Главное предназначение учебного пособия — пробудить интерес учащихся к изучению нестандартной (необычной) математики, что будет способствовать развитию у молодых людей креативного (творческого) мышления. Под понятием «креативность» обычно понимается способность людей создавать и находить новые оригинальные идеи, отклоняясь от принятых (шаблонных) схем мышления, успешно решать нестандартным образом любые сложнейшие задачи, стоящие перед современным обществом. Здесь уместно привести высказывание известного советского писателя Вениамина Каверина: *«Математика — самый короткий путь к самостоятельному мышлению»*.

Кроме того, автор уверен в том, что настоящее учебное пособие поможет учащимся успешно подготовиться к выпускным и вступительным экзаменам по математике, а также позволит основательно подготовиться к участию в математических олимпиадах любого уровня.

# Рекомендуемая литература

1. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников: Задачи повышенной сложности. М.: URSS, 2018. 224 с.
2. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач. М.: URSS, 2018. 320 с.
3. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников: Методы решения и доказательства неравенств. М.: URSS, 2018. 264 с.
4. *Супрун В. П.* Математика для старшеклассников: Дополнительные разделы школьной программы. М.: URSS, 2018. 240 с.



МАРТИН ГАРДНЕР

# ЗАГАДКИ СФИНКСА

## и другие математические головоломки



Перед читателем — впервые переведенная на русский язык работа выдающегося американского математика и популяризатора науки Мартина Гарднера. Автор как всегда остается верен своему уникальному стилю, который характеризуют яркость, доходчивость, тонкий юмор, блеск мысли, постоянное вовлечения читателя в самостоятельное творчество.

В книге представлены занимательные математические задачи и головоломки, публиковавшиеся автором в течение ряда лет на страницах «Журнала научной фантастики Айзека Азимова». Эти задачи, составленные самим М. Гарднером, увлеченными читателями его журнальной колонки, друзьями и коллегами автора, в равной мере относятся как к миру собственно математики, так и к миру логических парадоксов, многие из которых изложены в виде фантастических историй на загадочных далеких планетах.

**Материал книги построен таким образом, что к каждой из головоломок дается ответ, который в большинстве случаев порождает новые вопросы, связанные с соответствующей темой. Решение этих новых вопросов приводится уже на следующем уровне ответов.**

Всего в книге четыре раздела с ответами и решениями, так что читатель может последовательно переходить с одного раздела на другой, постепенно углубляя свое понимание.





**О. И. МЕЛЬНИКОВ**

# ТЕОРИЯ ГРАФОВ



**для учителей,  
для школьников...  
И НЕ ТОЛЬКО!**

**Книга, которая научит вас  
теории графов и поможет  
обучать ей других**

**В настоящей книге изложены основы теории графов, одного из бурно развивающихся в настоящее время разделов математики.**

Издание рассчитано в основном на учителей математики и информатики. После каждой главы в разделе «Комментарии» подробно обсуждается изложенное, предлагаются методические приемы обучения, обращается внимание на трудности и возможные ошибки учащихся.

Подробно решенные в книге задачи рассматриваются также с методической точки зрения. Показано, как **простые задачи** не только помогают **закрепить материал**, но и могут использоваться как исследовательские и служить развитию **логического мышления** учащихся.

**Дана краткая история теории графов, приведены сведения об ученых, сыгравших важную роль в ее развитии.**

Помимо учителей, книга может быть использована школьниками и студентами, а также служить для самообразования.



В. И. ОПОЙЦЕВ

# Школа Опойцева



Доктор физико-математических наук, профессор В. И. Опойцев выделяется умением сложное объяснять просто. Его «Лекции по математике» (16 томов под псевдонимом В. Босс) и популярная книга «Интуиция и математика» пользуются большой известностью среди любителей математики самых разных рангов — от специалистов до студентов смежных направлений подготовки.

**Новаторский проект «Школа Опойцева» — это серия учебных курсов для студентов и школьников. Изложение основных разделов математики в книгах проекта отличается краткостью, простотой, ясностью и прозрачностью. Акцент делается на понимание существа дела, притом с заботой о новичках.**

Книги легко читаются, однако охват материала в них даже несколько шире, чем предусматривает школьная программа. Цельность предмета достигается переплетением элементов различных математических дисциплин. Все объяснения даются «человеческим языком», так что становится ясно, «что для чего нужно».

Все книги сопровождаются авторскими видеолекциями.

В серии вышли тома:

- **ГЕОМЕТРИЯ I · 7-11**
- **НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА · ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ · Старшие классы**
- **ТРИГОНОМЕТРИЯ · Старшие классы**
- **АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА · Краткий курс · 6-11**
- **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**
- **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**





Д. М. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ

# СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ



## УЧЕБНЫЕ И ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- Более 100 содержательных задач
- Фокусы, головоломки, исторические факты
- Решение задач из ЕГЭ по информатике
- Вопросы для конкурсов «Что? Где? Когда?» и «Брейн-ринг»

**В книге приведены задачи, фокусы, головоломки и другие увлекательнейшие материалы, связанные с десятичными системами счисления. Ее материалы можно использовать на уроках, в качестве домашних заданий, на кружках и факультативах, во внеклассной работе.**

Книга состоит из 18 глав и содержит 13 приложений. В ней приводятся: задачи разного уровня сложности; методика решения типовых задач на системы счисления, представленных в Едином государственном экзамене по информатике; арифметические и геометрические прогрессии чисел в десятичных системах; логические и сдвиговые операции; основные принципы создания так называемых «помехоустойчивых» кодов; математические фокусы, головоломки, игры с числами в десятичных системах счисления.

**Все задания, представленные в книге, имеют развивающее значение для интеллекта, формируют общеучебные навыки и способствуют повышению интереса учащихся к математике и информатике. Ко всем заданиям даны ответы и разъяснения.**

В приложениях описываются различные методы (в том числе малоизвестные) перевода из одной системы счисления в другую целых чисел и правильных дробей, программы (с методикой их разработки) решения задач, связанных с системами счисления, решением головоломок и демонстрацией фокусов, рассмотренных ранее, а также представлены материалы исторического характера (такие материалы имеются и в основной части книги в виде «врезок»).