

Н.М. БЕСКИН

КУРС  
АНАЛИТИЧЕСКОЙ  
ГЕОМЕТРИИ  
для ВТУЗОВ



ОГИЗ • ГОСТЕХИЗДАТ • 1948



Н. М. БЕСКИН

**КУРС  
АНАЛИТИЧЕСКОЙ  
ГЕОМЕТРИИ  
ДЛЯ ВТУЗОВ**

*Допущено Министерством Высшего  
Образования СССР в качестве  
учебника для втузов*

**ОГИЗ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД**

Редактор *В. А. Калакуцкий.*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*

---

Подписано к печати 3/II 1948 г. А-00496. Печ. л. 31,25. Уч.-изд. л. 40,05. 51 930 тип. знаков в печ. л. Тираж 35 000. Цена 14 р. Переплёт 1 р. Заказ № 1070.

---

2-я типография «Печатный Двор» им. А. М. Горького треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР, Ленинград, Гатчинская, 26.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Цифры в скобках обозначают страницы

Предисловие . . . . .	9
-----------------------	---

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

### Введение

§ 1. Теория проекций . . . . .	11
1. Направленные отрезки (11). 2. Векторы (12). 3. Углы между осями и векторами (13). 4. Правило цепи для углов (15). 5. Проекция вектора на ось (16). 6. Проекция направленного отрезка на ось (18). 7. Проекция ломаной линии на ось (19).	
§ 2. Определители второго и третьего порядков . . . . .	21
8. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными (21). 9. Определители второго порядка (22). 10. Основные свойства определителей второго порядка (23). 11. Система трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными (25). 12. Правила Сарруса для вычисления определителей третьего порядка (27). 13. Разложение определителя третьего порядка по элементам какого-либо ряда (29). 14. Основные свойства определителей третьего порядка (31). 15. Система двух однородных уравнений первой степени с тремя неизвестными (33).	

### Глава I. Простейшие применения метода координат

§ 1. Декартова система координат . . . . .	36
16. Определение положения точки на плоскости (36). 17. Проекция вектора на координатные оси (40).	
§ 2. Простейшие задачи, разрешаемые при помощи метода координат . . . . .	42
18. Расстояние между двумя точками (42). 19. Наклон вектора к координатным осям (43). 20. Деление отрезка в данном отношении (45). 21. Площадь треугольника (48).	
§ 3. Преобразование координат . . . . .	51
22. Формулировка задачи (51). 23. Перенос начала (52). 24. Поворот осей (53). 25. Общее преобразование координат (55).	

### Глава II. Функции

§ 1. Основные понятия и обозначения . . . . .	57
26. Понятие о функции (57). 27. Задание функции формулой (58). 28. Обозначение функций (58). 29. Табличное задание функции (60). 30. Область существования функции (60).	
§ 2. Графическое изображение функций . . . . .	63
31. График функции (63). 32. Задание функций в неявной фор-	

ме (64). 33. Однозначные и многозначные функции (66). 34. Задание функции в параметрической форме (66). 35. Константа как функция (71).

### Глава III. Уравнения линий

- § 1. Геометрические места и их уравнения ..... 74  
 36. Уравнение окружности с центром в начале (74). 37. Общие правила для вывода уравнения линии (75). 38. Условие, при котором точка лежит на линии (76). 39. Точки пересечения двух линий (76).  
 § 2. Вывод уравнений некоторых геометрических мест ..... 77  
 40. Эллипс (77). 41. Вывод уравнения эллипса (79). 42. Гипербола (81). 43. Вывод уравнения гиперболы (83). 44. Парабола (85). 45. Вывод уравнения параболы (86).  
 § 3. Понятие о степенях свободы ..... 88  
 46. О числе условий, необходимых для решения математической задачи (88). 47. Уравнение линии как ограничение, наложенное на координаты (93).

### Глава IV. Прямая линия

- § 1. Различные виды уравнения прямой ..... 94  
 48. Параметры, определяющие прямую на плоскости (94). 49. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (96). 50. Основная теорема о прямой (97). 51. Влияние параметров  $k$  и  $b$  на расположение прямой (99). 52. Нормальное уравнение прямой (102). 53. Приведение уравнения прямой к нормальному виду (103). 54. Уравнение прямой в отрезках (105). 55. Отсутствие некоторых членов в уравнении прямой (106).  
 § 2. Основные задачи на прямую линию ..... 111  
 56. Формулировка основных задач на прямую линию (111). 57. Понятие о семействе линий (112). 58. Точка пересечения двух прямых (113). 59. Пучок прямых (114). 60. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (115). 61. Угол между двумя прямыми (117). 62. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (120). 63. Расстояние от точки до прямой (121).

### Глава V. Полярные координаты. Классификация линий

- § 1. Полярные координаты ..... 126  
 64. Полярная система координат (126). 65. Сравнение декартовой и полярной систем координат (127). 66. Переход от полярных координат к декартовым и обратно (130). 67. Геометрический смысл уравнений в полярных координатах (131). 68. Архимедова спираль (133).  
 § 2. Классификация линий ..... 136  
 69. Преобразование координат в уравнениях линий (136). 70. Классификация уравнений (137). 71. Классификация линий (138). 72. О числе точек пересечения двух линий (140). 73. О распадении алгебраической линии (142).

### Глава VI. Эллипс, гипербола и парабола

- § 1. Окружность ..... 145  
 74. Условия, при которых уравнение второй степени изображается окружностью (145). 75. Нахождение окружности по трём условиям (148).

<b>§ 2. Эллипс</b> . . . . .	149
76. Признаки симметрии линий (149). 77. Исследование формы эллипса по каноническому уравнению (151). 78. Эксцентриситет эллипса (153). 79. Эллипс как равномерное сжатие окружности (154). 80. Эллипс как сечение прямого кругового цилиндра (157). 81. Эллипс как проекция окружности (157). 82. Фокальные радиусы-векторы точек эллипса (158). 83. Фокальный параметр эллипса (159). 84. Уравнения эллипса, отнесённого к вершине (159). 85. Полярное уравнение эллипса (160).	
<b>§ 3. Гипербола</b> . . . . .	164
86. Исследование формы гиперболы по каноническому уравнению (164). 87. Эксцентриситет гиперболы (166). 88. Асимптоты гиперболы (166). 89. Сопряжённые гиперболы (170). 90. Равносторонняя гипербола (172). 91. Фокальные радиусы-векторы точек гиперболы (174). 92. Фокальный параметр гиперболы (175). 93. Уравнение гиперболы, отнесённой к вершине (175). 94. Полярное уравнение гиперболы (176).	
<b>§ 4. Парабола</b> . . . . .	179
95. Исследование формы параболы по каноническому уравнению (179). 96. Формулы, выражающие радиус-вектор любой точки параболы через абсциссу этой точки (181). 97. Полярное уравнение параболы (181). 98. График квадратного трёхчлена (182). 99. Влияние параметров на график квадратного трёхчлена (185).	
<b>§ 5. Диаметры эллипса, гиперболы и параболы</b> . . . . .	188
100. Диаметры эллипса (188). 101. Сопряжённые диаметры эллипса (190). 102. Некоторые свойства сопряжённых диаметров эллипса (192). 103. Диаметры гиперболы (193). 104. Сопряжённые диаметры гиперболы (194). 105. Некоторые свойства сопряжённых диаметров гиперболы (196). 106. Диаметры параболы (196). 107. Некоторые свойства диаметров параболы (196).	
<b>§ 6. Директрисы эллипса, гиперболы и параболы</b> . . . . .	197
108. Геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до некоторой точки и до некоторой прямой постоянно (197). 109. Директрисы эллипса (199). 110. Директрисы гиперболы (200). 111. Директриса параболы (200).	

## Глава VII. Общая теория линий второго порядка

<b>§ 1. Постановка вопроса и общие теоремы</b> . . . . .	202
112. Постановка вопроса (202). 113. Теорема о центре (202). 114. Теорема об оси (203). 115. Условие распадаения линии второго порядка (205). 116. Преобразование уравнения второй степени при переносе начала (209). 117. Преобразование уравнения второй степени при повороте осей (210).	
<b>§ 2. Центральные линии</b> . . . . .	211
118. Отнесение линии к центру (211). 119. Отнесение линии к её осям (213). 120. Исследование уравнения центральной линии (215). 121. Пример (216).	
<b>§ 3. Нецентральные линии</b> . . . . .	218
122. Условие, при котором старшие члены уравнения второй степени представляют полный квадрат (218). 123. Отнесение линии без центра к оси. (219). 124. Сводка результатов исследования общего уравнения второй степени (224). 125. О центрах линии параболического типа (224). 126. Число условий, определяющих линию второго порядка (225).	

## Глава VIII. Циклоидальные кривые и спирали

- § 1. Циклоидальные кривые** . . . . . 228  
 127. Обыкновенная циклоида (228). 128. Укороченная и удлиненная циклоиды (229). 129. Эпициклоида (231). 130. Кардиоида (235). 131. Улитка Паскаля (237). 132. Гипоциклоида (238). 133. Теорема Кардана (240). 134. Астроида (240).
- § 2. Спирали** . . . . .  
 135. Архимедова спираль (242). 136. Логарифмическая спираль (243). 137. Гиперболическая спираль (247). 138. Эвольвента окружности (248).

## Глава IX. Графики функций

- § 1. Графики некоторых простейших функций** . . . . . 251  
 139. Степенная функция (251). 140. Понятие обратной функции (256). 141. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции (259). 142. Целая часть  $x$  (262).
- § 2. Аффинное преобразование графиков** . . . . . 264  
 143. Общие правила аффинного преобразования графиков (264). 144. Общая синусоида (268). 145. Показательная функция (268). 146. Логарифмическая функция (269).

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- Введение . . . . . 270

### Глава X. Координаты в пространстве

- § 1. Проекция на ось** . . . . . 271  
 147. Углы между осями и векторами в пространстве (271). 148. Проекция на ось (274).
- § 2. Декартова прямоугольная система координат в пространстве** . . . . . 276  
 149. Определение положения точки в пространстве (276). 150. Декартова прямоугольная система координат в пространстве (277). 151. Правая и левая системы координат (281).

### Глава XI. Элементы векторной алгебры

- § 1. Основные понятия** . . . . . 284  
 152. Предмет векторного исчисления (284). 153. Векторные и скалярные величины (285). 154. Равенство векторов (286). 155. Модуль вектора (287).
- § 2. Линейные комбинации векторов** . . . . . 288  
 156. Сложение векторов (288). 157. Формальные свойства сложения (289). 158. Формальные свойства сложения векторов (289). 159. Вычитание векторов (292). 160. Умножение вектора на скаляр (293). 161. Формальные свойства умножения (295). 162. Формальные свойства умножения вектора на скаляр (298). 163. Линейная комбинация векторов (299).

<b>§ 3. Проектирование вектора на ось . . . . .</b>	<b>301</b>
164. Проекция на ось линейной комбинации векторов (301). 165. Разложение вектора по данным векторам или осям (303). 166. Координаты вектора (307). 167. Координатное выражение линейной зависимости между векторами (309).	
<b>§ 4. Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве . . . . .</b>	<b>311</b>
168. Связь между координатами векторов и координатами точек (311). 169. Расстояние между двумя точками (312). 170. Деление отрезка в данном отношении (313). 171. Задание направления в пространстве (314). 172. Направление вектора, заданного координатами концов (318).	
<b>§ 5. Скалярное умножение . . . . .</b>	<b>322</b>
173. Понятие о скалярном умножении (322). 174. Некоторые частные случаи скалярного умножения (324). 175. Механическая интерпретация скалярного произведения (325). 176. Формальные свойства скалярного умножения (326). 177. Координатное выражение скалярного произведения (329). 178. Выражение координат вектора через этот вектор и орты (330). 179. Применение скалярного произведения к нахождению углов и длин (331).	
<b>§ 6. Векторное умножение . . . . .</b>	<b>335</b>
180. Вектор площади (335). 181. Понятие о векторном умножении (337). 182. Некоторые простейшие свойства векторного произведения (338). 183. Некоторые частные случаи векторного умножения (340). 184. Формальные свойства векторного умножения (341). 185. Координатное выражение векторного произведения (346).	
<b>§ 7. Произведения трёх векторов . . . . .</b>	<b>348</b>
186. Понятие о смешанном произведении и его геометрический смысл (348). 187. Некоторые свойства смешанного произведения (350). 188. Координатное выражение смешанного произведения (352). 189. Геометрическая интерпретация свойств определителей третьего порядка (353). 190. Двойное векторное произведение (354).	

## Глава XII. Преобразование координат

<b>§ 1. Вывод формул для преобразования прямоугольных декартовых координат в пространстве . . . . .</b>	<b>357</b>
191. Перенос начала (357). 192. Поворот осей (358). 193. Общее преобразование координат (360).	
<b>§ 2. Дополнительные сведения о преобразовании прямоугольных декартовых координат в пространстве . . . . .</b>	<b>361</b>
194. Число параметров, определяющих поворот осей (361). 195. Свойства девяти косинусов преобразования (362). 196. Эйлеровы углы (364).	

## Глава XIII. Геометрический смысл уравнений в пространстве

<b>§ 1. Одно уравнение с тремя переменными . . . . .</b>	<b>368</b>
197. Геометрическое изображение функции двух переменных (368). 198. Область существования функции двух переменных (370). 199. Геометрический смысл уравнения с тремя переменными (372). 200. Уравнение, содержащее не все три координаты (374).	

<b>§ 2. Два уравнения с тремя переменными . . . . .</b>	<b>378</b>
201. Геометрический смысл двух уравнений с тремя переменными (378). 202. Вывод уравнений линии (381). 203. Три уравнения с тремя переменными (384).	
<b>§ 3. Параметрические уравнения линий. Векторные уравнения . . . .</b>	<b>384</b>
204. Параметрические уравнения линии в пространстве (384). 205. Винтовая линия (387). 206. Общая точка зрения на вопросы о геометрическом смысле уравнений в пространстве (390). 207. Векторные уравнения (391).	

## Глава XIV. Плоскость и прямая

<b>§ 1. Аналитическое задание плоскости . . . . .</b>	<b>394</b>
208. Параметры, определяющие плоскость (394). 209. Нормальное уравнение плоскости (395). 210. Уравнение плоскости в отрезках (398). 211. Составление уравнения плоскости по параметрам и вычисление параметров по уравнению (400). 212. Отсутствие некоторых членов в уравнении плоскости (401).	
<b>§ 2. Основные задачи на плоскость . . . . .</b>	<b>405</b>
213. Угол между двумя плоскостями (405). 214. Уравнение связки плоскостей (407). 215. Плоскость, проходящая через три данные точки (408). 216. Расстояние от точки до плоскости (409).	
<b>§ 3. Аналитическое задание прямой в пространстве . . . . .</b>	<b>413</b>
217. Два линейных уравнения (413). 218. Следствия из данной системы уравнений (414). 219. Проекция прямой на координатные плоскости (419). 220. Векторное уравнение прямой. Симметричные уравнения прямой (422). 221. Симметричные уравнения прямой, параллельной координатной плоскости (425). 222. Приведение уравнений прямой к симметричной форме (427).	
<b>§ 4. Основные задачи на прямую и плоскость . . . . .</b>	<b>429</b>
223. Угол между двумя прямыми и между прямой и плоскостью (429). 224. Точка пересечения прямой и плоскости (432). 225. Условие пересечения двух прямых (434). 226. Прямая, проходящая через две данные точки (435). 227. О числе условий, определяющих плоскость и прямую (435).	

## Глава XV. Некоторые сведения о поверхностях

<b>§ 1. Поверхности второго порядка . . . . .</b>	<b>441</b>
228. Метод сечений (441). 229. Эллипсоид (444). 230. Однополостный гиперболоид (449). 231. Двухполостный гиперболоид (456). 232. Эллиптический параболоид (459). 233. Гиперболический параболоид (461). 234. Линейчатость как следствие седлообразности (466).	
<b>§ 2. Некоторые дополнительные сведения о поверхностях . . . . .</b>	<b>469</b>
235. Поверхности вращения (469). 236. Однополостный гиперболоид вращения как поверхность вращения прямой линии (471). 237. Конические поверхности (474). 238. Замечания об исследовании общего уравнения второй степени (477).	

<b>Ответы к задачам . . . . .</b>	<b>479</b>
<b>Указания к задачам . . . . .</b>	<b>497</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс аналитической геометрии во втузах имеет свои специфические задачи и не должен являться уменьшенной копией университетского курса. Для университетского курса характерно то, что он ограничивается образами первого и второго порядков. По применяемым методам университетский курс представляет раздел алгебраической геометрии, будучи чужд анализу бесконечно малых и дифференциальной геометрии.

Составитель втузовского курса аналитической геометрии не может игнорировать двух обстоятельств.

1. Во втузах обычно изучаются только два математических предмета — аналитическая геометрия и анализ. Поэтому все те математические сведения, которые будут признаны необходимыми для инженера, должны быть включены в один из этих курсов. Таково, например, исследование трансцендентных кривых. В той части, в какой это исследование не использует методов анализа, а само является пропедевтикой анализа, его естественнее всего включить в курс аналитической геометрии.

2. Инженеру приходится иметь дело не только с кривыми, являющимися очертаниями материальных предметов, но и с кривыми, символически изображающими ход явлений, т. е. с графиками. Поэтому во втузовском курсе аналитической геометрии должны найти отражение обе точки зрения — геометрическая (обычная) и аналитическая (исследование графиков). Эти точки зрения приводят к различным спискам изучаемых кривых, так как кривые, наиболее интересные по своим геометрическим свойствам, — не те, которые являются графиками наиболее важных функций. В исследовании графиков есть некоторая часть, которую более естественно отнести к аналитической геометрии, чем к анализу [см., например, «Аффинное преобразование графиков» (гл. IX, § 2)].

Не вдаваясь в перечисление некоторых других нововведений, отметим, что специфическая точка зрения автора нашла отражение лишь в мелком шрифте. Книга предназначена служить учебником аналитической геометрии для втузов, и её крупный шрифт соответствует существующим программам. В то же время лектор, ощуща-

Ющий необходимость реформы втузовского курса аналитической геометрии, может опереться на различные места мелкого шрифта. В частности, мы настоятельно рекомендуем не опускать понятие о степенях свободы, без которого сознательное изучение аналитической геометрии невозможно.

Мелкий шрифт содержит также более тонкие места и примеры.

Чтобы не прерывать изложения аналитической геометрии экскурсами в другие области, вспомогательный аппарат вынесен во «Введение». Изучение курса можно начинать с главы I с тем, чтобы вопросы, изложенные во «Введении», преподаватель распределил по своему усмотрению.

Москва, 15 апреля 1947 г.

*Ник. Бескин*

---



# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1. Теория проекций

**1. Направленные отрезки.** Одно из важных отличий аналитической геометрии от элементарной заключается в том, что элементарная геометрия рассматривает отрезки как величины *существенно положительные*, а аналитическая геометрия приписывает отрезкам знаки плюс и минус, т. е. рассматривает отрезки как *относительные* величины.

На прямой существуют два противоположных направления. Отметим одно из них (безразлично какое) стрелочкой (черт. 1) и будем называть его *положительным*; противоположное направление будем называть *отрицательным*. На черт. 1 положительное направление идёт слева направо, а отрицательное — справа налево. *Прямая, на которой различаются положительное и отрицательное направления, называется осью.*



Черт. 1. Ось.

Чтобы определить отрезок на оси, необходимо задать две точки и указать, какая из них служит *началом* отрезка и какая — *концом*. Отрезок обозначается двумя буквами, причём на первом месте ставится начало отрезка, а на втором — конец. *Отрезок, который расположен на оси и в котором мы различаем начало от конца, называется направленным отрезком.*

Направленный отрезок выражается относительным числом. Абсолютная величина этого числа показывает длину отрезка; перед этой длиной ставится знак плюс, если направление отрезка (направлением отрезка считается направление от начала к концу) совпадает с направлением оси \*), и знак минус — если направление отрезка противоположно направлению оси. Например, на черт. 1

$$AB = 13 \text{ мм}^{**}), \quad BA = -13 \text{ мм.}$$

Очевидно, всегда имеем

$$BA = -AB, \quad (1)$$

\*) Для краткости говорят «направление оси» вместо «положительное направление оси».

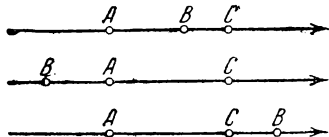
\*\*) Знак плюс обычно опускается.

т. е. при перестановке букв в обозначении отрезка изменяется знак отрезка, а его абсолютная величина остаётся неизменной.

Для направленных отрезков имеет место следующая формула:

$$AB + BC = AC, \quad (2)$$

называемая *формулой Шаля* \*). Для отрезков без знака, рассматриваемых в элементарной геометрии, эта формула справедлива



Черт. 2.  $AB + BC = AC$ .

лишь в том случае, когда точка  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ , для направленных же отрезков она справедлива всегда, лишь бы точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежали на одной оси. Например, на среднем черт. 2 отрезок  $AB$  отрицателен, а отрезок  $BC$  положителен, и их сумма равна  $AC$ .

В дальнейшем мы будем применять формулу Шаля, не обращаясь каждый раз к чертежу, а запомнив её начертание. Её можно сформулировать так: всякий направленный отрезок  $AB$  можно разбить на сумму двух отрезков при помощи любой точки  $C$ , лежащей на той же оси, что и этот отрезок.

Рассмотрим сумму нескольких направленных отрезков

$$AB + BC + CD + \dots + KL + LM,$$

в которой начало каждого следующего отрезка совпадает с концом предыдущего. Сумму первых двух отрезков  $AB + BC$  можно по формуле Шаля заменить через  $AC$ ; после этого сумму  $AC + CD$  можно заменить через  $AD$ . Продолжая этот процесс, мы в результате получим:

$$AB + BC + CD + \dots + KL + LM = AM. \quad (3)$$

Формула (3) называется *обобщённой формулой Шаля*. Она справедлива при любом расположении точек  $A, B, C, D, \dots, K, L, M$ , лишь бы они лежали на одной оси.

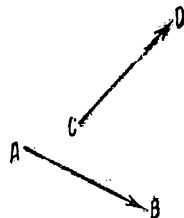
**2. Векторы.** Если мы будем изучать отрезки на плоскости (а не только на одной оси), то эти отрезки могут иметь бесконечное множество различных направлений (а не только два), и поэтому их нельзя характеризовать относительными числами.

*Отрезки, при изучении которых принимается во внимание не только их длина, но и направление, называются векторами.* Разница между векторами и направленными отрезками заключается в том, что направленные отрезки могут рассматриваться только на оси; поэтому они характеризуются относительными числами. Векторы могут иметь всевозможные направления и не требуют

\*) Мишель Шаль (1793 — 1880) — французский геометр.

предварительного установления положительного направления на прямых, на которых они расположены. Если бы мы занимались геометрией одного измерения (только на одной оси), то разницы между направленными отрезками и векторами не было бы.

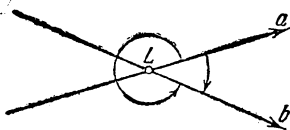
Вектор обозначается двумя буквами, первая из которых обозначает начало вектора, а вторая — конец; над этими двумя буквами ставится черта, заменяющая слово «вектор». Таким образом символ  $\overline{AB}$  обозначает вектор, имеющий начало в точке  $A$ , а конец — в точке  $B$ . На чертеже векторы обозначаются стрелками (черт. 3). Так как вектор характеризуется не только длиной, но и направлением, то векторы  $AB$  и  $CD$ , изображённые на черт. 3, нельзя считать равными, хотя они и имеют одинаковые длины \*).



Черт. 3.  
Векторы.

Длина или, что то же самое, *модуль* вектора обозначается так:  $|\overline{AB}|$ ; длина вектора есть величина положительная. Заметим, что векторы не выражаются числами, потому что число не может выразить и длину, и направление вектора \*\*). Поэтому равенство  $\overline{AB} = 5 \text{ см}$  представляет бессмыслицу; однако возможно равенство  $|\overline{AB}| = 5 \text{ см}$ .

**3. Углы между осями и векторами.** Две прямые, пересекаясь, образуют четыре угла. Определяя угол между двумя *прямыми*, мы можем с одинаковым правом брать острый угол или тупой. Иначе обстоит дело с углом между двумя *осями*. Определяя угол между двумя осями, мы должны принимать во внимание не только то, на каких прямых расположены эти оси, но и то, как установлены положительные направления на этих осях.



Черт. 4. Угол между двумя осями.

Пусть даны две оси  $a$  и  $b$ , пересекающиеся в точке  $L$  (черт. 4). *Углом между осями  $a$  и  $b$  называется угол, на который надо повернуть первую ось вокруг точки  $L$ , чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением второй оси*. Этот угол обозначается так:  $(a, b)$ . Как видно из определения, угол между двумя осями зависит от того, какая ось считается первой и какая второй.

Ось  $a$  не единственным образом можно повернуть так, чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением оси  $b$ . В самом деле, если ось  $a$  уже повернута на такой угол, то после этого можно ещё повернуть её на несколько полных

\*) Какие векторы можно считать равными — читатель узнаёт в п 154.

\*\*) Мы говорим о действительных числах. Комплексное число может выразить и длину и направление вектора на плоскости, и поэтому возможно выражать векторы на плоскости комплексными числами.

оборотов по часовой стрелке или против, и её положительное направление попрежнему будет совпадать с положительным направлением оси  $b$ . Таким образом, символ  $(a, b)$  имеет не одно, а бесконечное множество значений. Если обозначить через  $\alpha_0$  одно из значений угла между осями  $a$  и  $b$ , то все значения угла  $(a, b)$  заключаются в формуле

$$(a, b) = \alpha_0 + 360^\circ \cdot n, \quad (4)$$

где  $n$  — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль). Например, на черт. 4 можно положить  $\alpha_0 = -40^\circ$  (углы считаются положительными против часовой стрелки). При  $n = 1$  формула (4) даёт  $(a, b) = 320^\circ$ ; оба эти угла отмечены на чертеже дугами.

Хотя углу  $(a, b)$  между двумя осями можно приписывать бесконечное множество значений, все тригонометрические функции этого угла являются вполне определёнными величинами, потому что  $360^\circ$  для всех тригонометрических функций служит периодом. Например, из формулы (4) следует

$$\sin (a, b) = \sin (\alpha_0 + 360^\circ \cdot n) = \sin \alpha_0.$$

Выше мы определили угол между двумя осями. Аналогично определяется угол между вектором и осью. Надо брать ось в положительном направлении, а вектор — в направлении от его начала к концу, т. е. в направлении, указываемом его стрелкой. Если нужно, — продолжим вектор до его пересечения с осью. Угол между вектором  $\overline{AB}$  и осью  $l$  обозначается через  $(\overline{AB}, l)$ .

Угол между двумя векторами обозначается через  $(\overline{AB}, \overline{CD})$  и определяется аналогично.

Углы между осями обладают следующими свойствами:

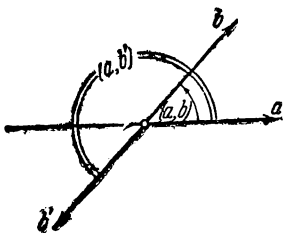
1° Угол между двумя осями не изменится, если одну из этих осей перенести параллельно самой себе. Разумеется, можно параллельно перенести и обе оси.

2° Если на одной из осей изменить направление на противоположное, то угол между осями увеличится на  $180^\circ$  \*). Если обозначить через  $b'$  ось, расположенную на той же прямой, что и  $b$ , но имеющую противоположное направление, то

$$(a, b') = 180^\circ + (a, b). \quad (5)$$

Черт. 5 иллюстрирует эту формулу.

\*) Для определённости можно всегда считать, что угол именно увеличивается, а не уменьшается на  $180^\circ$ . В самом деле, если одно из значений угла между двумя осями обозначить через  $\alpha_0$ , а другое через  $\alpha_1 = 360^\circ + \alpha_0$ , то  $\alpha_0 + 180^\circ = \alpha_1 - 180^\circ$ .



Черт. 5.  
 $(a, b') = 180^\circ + (a, b).$

3° При перемене порядка осей угол только изменяет знак:

$$(b, a) = -(a, b). \quad (6)$$

**Примечание 1.** Рассматривая эти свойства углов между осями, необходимо всё время помнить, что угол между осями имеет бесконечное множество значений, отличающихся одно от другого на кратное  $360^\circ$ . Поэтому любая формула, в которую входит в качестве отдельного члена  $(a, b)$ , может показаться нам неверной, если мы попробуем проверить её, подставив вместо  $(a, b)$  *какое-нибудь одно произвольно выбранное* значение угла между осями  $a$  и  $b$ . Мы всё же считаем её верной, если расхождение между левой и правой частями кратно  $360^\circ$ . Иначе говоря: мы считаем её верной, если она верна при подстановке вместо  $(a, b)$  *одного определённого* значения этого угла. Приведём пример: пусть  $(a, b) = 200^\circ$ . В таком случае по формуле (5) получается  $(a, b') = 380^\circ$ . С таким же успехом можно считать, что  $(a, b') = 380^\circ - 360^\circ = 20^\circ$ . Если в формулу (4) подставить  $(a, b) = 200^\circ$ ,  $(a, b') = 20^\circ$ , то она покажется неверной, но расхождение между левой и правой частями составит  $360^\circ$ . Если же подставить  $(a, b) = 200^\circ$ ,  $(a, b') = 380^\circ$ , то левая и правая части формулы (4) совпадут точно. Рекомендуем читателю иллюстрировать чертежом этот пример.

**Примечание 2.** Изложенные выше три свойства углов между осями полностью переносятся на углы между векторами и осями и углы между векторами.

**4. Правило цепи для углов.** Пусть даны три оси  $a, b$  и  $c$ , проходящие через одну точку. Повернём около этой точки ось  $a$  так, чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением оси  $b$ , а затем повернём её ещё один раз (исходя из нового положения) около той же точки так, чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением оси  $c$ . Сумма этих двух поворотов равна  $(a, b) + (b, c)$ . Но так как в результате этих двух поворотов положительное направление оси  $a$  совпадёт с положительным направлением оси  $c$ , то эта сумма равна  $(a, c)$ . Итак:

$$(a, b) + (b, c) = (a, c). \quad (7)$$

Формула (7) называется *правилом цепи* для углов.

Правило цепи справедливо и в том случае, когда три оси не проходят через одну точку, так как величина углов не зависит от этого обстоятельства [свойство 1° (стр. 14)].

Формулу (7) можно обобщить на случай многих осей тем же способом, каким выше мы обобщили формулу Шаля. Получим:

$$(a, b) + (b, c) + (c, d) + \dots + (k, l) + (l, m) = (a, m). \quad (8)$$

Формула (8) называется *обобщённым правилом цепи*.

Правило цепи для углов аналогично формуле Шаля для направленных отрезков. Однако есть разница, заключающаяся в том, что формулы (7) и (8) справедливы с точностью до  $360^\circ \cdot n$  [это надо понимать в том смысле, как разъяснено в примечании 1 (стр. 15)].

Формулы (7) и (8) можно применять и в том случае, когда вместо некоторых осей фигурируют векторы.

**5. Проекция вектора на ось.** Проекцией точки  $A$  на ось  $l$  называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту ось (черт. 6).

Пусть теперь даны ось  $l$  и вектор  $\overline{AB}$ . Направленный отрезок  $A'B'$ , где  $A'$  — проекция начала вектора на ось  $l$ , а  $B'$  — проекция конца вектора на ту же ось, называется проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$ . Для проекций употребляется следующее обозначение:



$$A'B' = \text{пр}_l \overline{AB}.$$

Черт. 6. Проекция точки на ось.

Подчеркнём два существенных момента в этом определении. Во-первых, проекция вектора на ось является не вектором, а направленным отрезком, или числом \*). Во-вторых, проекцией вектора считается отрезок от проекции его начала до проекции конца; проекция выражается положительным числом, если направление от  $A'$  к  $B'$  совпадает с положительным направлением оси, в противном случае проекция отрицательна.

Проекция вектора на ось зависит 1) от длины проектируемого вектора, 2) от угла этого вектора с осью проекций. На черт. 7 изображены различные случаи расположения вектора относительно оси. На всех четырёх чертежах отмечен угол  $\alpha = (\overline{l}, \overline{AB})$  между осью  $l$  и вектором  $\overline{AB}$ , через начало вектора проведена прямая, параллельная оси, и обозначена через  $C$  точка пересечения этой прямой с перпендикуляром  $BB'$ .

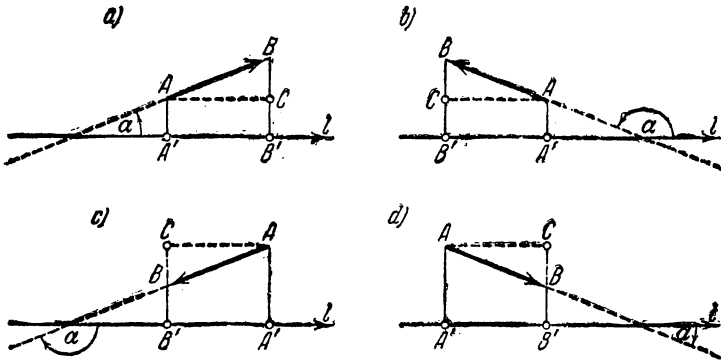
Имеем (для всех четырёх случаев):

$$AC = AB \cdot \cos \widehat{BAC}. \quad (*)$$

На первый взгляд может показаться, что  $AC$  равно искомой проекции  $A'B'$ , но это не так. Дело в том, что в тригонометрии стороны треугольника всегда рассматриваются как положительные величины.

\*) Иногда рассматривают проекцию вектора не на ось, а на прямую, и эту проекцию считают вектором. В этой книге мы нигде не будем рассматривать проекцию вектора на прямую.

Итак, в формуле (\*)  $AB$  и  $AC$  положительны, а проекция  $A'B'$  в случаях а) и d) положительна, а в случаях б) и c) отрицательна. Поэтому, в случаях а) и d) можно в формуле (\*) заменить  $AC$  через  $A'B'$ , а в случаях б) и c)  $AC$  следует заменить через  $-A'B'$ ;  $AB$  во всех случаях можно заменить через  $|\overline{AB}|$  (длина вектора всегда



Черт. 7.  $\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos(l, \overline{AB})$ .

положительна). Угол  $\widehat{BAC}$  в случаях а) и d) равен  $\alpha$ , а в случаях б) и c) он равен  $180^\circ - \alpha$ . Совершая эти замены в формуле (\*), получим:

$$\text{в случаях а) и d): } A'B' = |\overline{AB}| \cdot \cos \alpha,$$

$$\gg \gg \text{ б) } \gg \text{ c): } -A'B' = |\overline{AB}| \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -|\overline{AB}| \cdot \cos \alpha.$$

Отсюда видно, что  $A'B'$  во всех четырёх случаях выражается одной и той же формулой. Заменяя  $A'B'$  через  $\text{пр}_l \overline{AB}$ , а  $\alpha$  через  $(l, \overline{AB})$ , запишем эту формулу так:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos(l, \overline{AB}). \quad (9)$$

Словами: *проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла наклона этого вектора к оси.*

Примечание 1. Как видно из вывода, формула (9) даёт не только величину проекции, но даёт проекцию вместе со знаком. Проекция вектора на ось положительна, если вектор образует с осью острый угол, и отрицательна — если тупой.

Примечание 2. В приведённой выше формулировке нельзя опустить слово «длина». Бессмысленно говорить «проекция вектора на ось равна *самому* вектору, умноженному и т. д.»

**Примечание 3.** В формуле (9) безразлично, писать ли  $(l, \overline{AB})$  или  $(\overline{AB}, l)$ , т. е. безразлично, говорить ли об угле между осью и вектором или между вектором и осью, потому что  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ .

**6. Проекция направленного отрезка на ось.** Пусть даны две оси  $a$  и  $l$ , и на оси  $a$  дан направленный отрезок  $AB$ . Спроектируем точки  $A$  и  $B$  на ось  $l$ . Направленный отрезок  $A'B'$  называется проекцией направленного отрезка  $AB$  на ось  $l$ . Это записывается так:

$$A'B' = \text{пр}_l AB.$$

Выведем формулу, позволяющую вычислить проекцию направленного отрезка на ось, если известны: 1) сам направленный отрезок  $AB$  (и по величине, и по знаку), 2) угол между осями  $a$  и  $l$ . Рассмотрим вместо направленного отрезка  $AB$  вектор  $\overline{AB}$ . Очевидно, проекция направленного отрезка  $AB$  на ось  $l$  совпадает с проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ту же ось. Поэтому проекция направленного отрезка  $AB$  может быть вычислена по формуле (9):

$$\text{пр}_l AB = |\overline{AB}| \cdot \cos(l, \overline{AB}). \quad (**)$$

Далее рассмотрим два случая.

**Первый случай.**  $AB > 0$ . В этом случае  $|\overline{AB}|$  можно заменить через  $AB$ . Так как направление вектора  $\overline{AB}$  в этом случае совпадает с направлением оси  $a$ , то  $(l, \overline{AB}) = (l, a)$ . Формула (\*\*) принимает вид

$$\text{пр}_l AB = AB \cdot \cos(l, a).$$

**Второй случай.**  $AB < 0$ . В этом случае  $|\overline{AB}| = -AB$ , и направление вектора  $\overline{AB}$  противоположно направлению оси  $a$ , т. е.  $(l, \overline{AB}) = 180^\circ + (l, a)$ . Формула (\*\*) принимает вид

$$\text{пр}_l AB = -AB \cdot \cos[180^\circ + (l, a)] = AB \cdot \cos(l, a).$$

Итак, в любом случае имеем одну и ту же формулу

$$\text{пр}_l AB = AB \cdot \cos(l, a), \quad (10)$$

т. е. проекция направленного отрезка на ось равна проектируемому отрезку, умноженному на косинус угла между осью, которой принадлежит проектируемый отрезок, и осью проекций.

Существенное отличие формулы (10) от формулы (9) заключается в том, что в формуле (9) первый сомножитель правой части положителен, а в формуле (10) он может иметь любой знак.

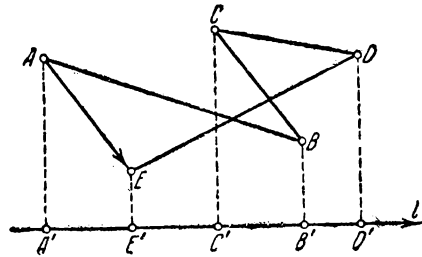


Если мы переставим в проектируемом векторе или направленном отрезке начало и конец, т. е. вместо вектора  $\overline{AB}$  возьмём вектор  $\overline{BA}$  или вместо направленного отрезка  $AB$  возьмём направленный отрезок  $BA$ , то проекция должна изменить знак. В формуле (9) это произойдёт потому, что при замене вектора  $\overline{AB}$  вектором  $\overline{BA}$  угол вектора с осью изменится на  $180^\circ$ , и его косинус изменит знак.

В формуле (10) замена  $AB$  на  $BA$  влияния на угол не окажет, потому что там участвует *угол между осями*, не зависящий от того, какой отрезок взят на оси  $a$ . Зато изменится знак множителя перед косинусом.

Рекомендуем читателю иллюстрировать чертежами результаты этого п. Осью  $a$  можно расположить относительно оси  $l$  четырьмя способами аналогично тому, как это показано для вектора  $\overline{AB}$  на черт. 7. В каждом из этих четырёх случаев отрезок  $AB$  можно взять положительным или отрицательным, т. е. всего следует рассмотреть восемь случаев.

**7. Проекция ломаной линии на ось.** Пусть дана произвольная ломаная  $ABCDE$  (число звеньев может быть любым; мы лишь для примера берём четыре звена). Если  $A$  считать началом ломаной (черт. 8), а  $E$  — концом, то на каждом звене устанавливается определённое направление обхода (от  $A$  к  $B$ , от  $B$  к  $C$ , от  $C$  к  $D$  и от  $D$  к  $E$ ). Звенья ломаной можно рассматривать как векторы (обязательно в указанном направлении обхода). Если же на каждой из прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DE$  установлено (любым образом) положительное направление, т. е. эти прямые являются осями, то звеньями ломаной считаются направленные отрезки (обязательно в направлении обхода от начала ломаной к концу); каждый отрезок считается положительным или отрицательным в зависимости от того, совпадает ли его направление с положительным направлением, установленным на той оси, которой он принадлежит, или нет.



Черт. 8.

$$\text{пр}_l ABCDE = \text{пр}_l \overline{AE}.$$

И в том, и в другом случае вектор  $\overline{AE}$ , соединяющий начало ломаной с её концом, называется *замыкающим вектором*.

*Проекцией ломаной на ось называется сумма (алгебраическая) проекций её звеньев на эту ось*, т. е.

$$\text{пр}_l ABCDE = \text{пр}_l \overline{AB} + \text{пр}_l \overline{BC} + \text{пр}_l \overline{CD} + \text{пр}_l \overline{DE}. \quad (***)$$

Обозначим проекции точек  $A, B, C, D$  и  $E$  соответственно через  $A', B', C', D'$  и  $E'$  (черт. 8). Тогда из формулы (\*\*\*) имеем:

$$\text{пр}_l ABCDE = A'B' + B'C' + C'D' + D'E'.$$

Согласно обобщённой формуле Шаля [формула (3) (стр. 12)], правую часть последней формулы можно заменить через  $A'E'$ :

$$\text{пр}_l ABCDE = A'E'.$$

С другой стороны, проекция замыкающего вектора  $\overline{AE}$  на ось тоже равна  $A'E'$ . Таким образом

$$\text{пр}_l ABCDE = \text{пр}_l \overline{AE}. \quad (11)$$

Формула (11) выражает следующую теорему: *проекция ломаной линии на ось равна проекции её замыкающего вектора на ту же ось*. Эта теорема справедлива независимо от того, рассматриваются ли звенья ломаной как векторы или как направленные отрезки.

**Пояснение.** Важно уяснить, что, благодаря введению направленных отрезков и определению проекции ломаной как *алгебраической* суммы проекций её звеньев, понятие проекции приобретает не тот смысл, какой оно имело в элементарной геометрии. В элементарной геометрии проекцией ломаной  $ABCDE$ , изображённой на черт. 8, считался бы отрезок  $A'D'$ . Теперь мы считаем, что проекция равна  $A'E'$ . Рекомендуем читателю проследить, как движется проекция точки на ось  $l$ , когда эта точка описывает ломаную от  $A$  до  $E$ . Эта проекция движется то направо, то налево. Отрезок, пройденный один раз направо и один раз налево, уничтожается, и *алгебраическая* сумма пройденных отрезков равна  $A'E'$ .

Из доказанной теоремы о проекции ломаной вытекают два следствия:

1°. *Проекции (на одну и ту же ось) двух ломаных, имеющих общее начало и общий конец, равны между собой* (потому что у этих ломаных общий замыкающий вектор).

2°. *Проекция замкнутой ломаной на любую ось равна нулю* (потому что у замкнутой ломаной конец совпадает с началом, и следовательно, замыкающий вектор превращается в точку).

### Задачи

1.  $ABCDEF$  — правильный шестиугольник со стороной  $a$ . Вычислить проекции  $AE$ ,  $EF$  и  $FA$  на  $AC$ . Проверить, что проекция замкнутой ломаной  $AEFA$  на  $AC$  равна нулю.

2.  $ABCDE$  — правильный пятиугольник; вершины обозначены в алфавитном порядке против часовой стрелки. Вектор  $\overline{AB}$  образует с некоторой осью  $l$  угол  $\alpha$ . Какие углы образуют с  $l$  остальные стороны пятиугольника? Найти проекции  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DE}$  и  $\overline{EA}$  на  $l$  и проверить, что сумма этих проекций равна нулю.

## § 2. Определители второго и третьего порядков

8. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. В элементарной алгебре рассматривается вопрос о решении системы уравнений первой степени. Мы здесь дадим более удобный способ решения этой задачи, чем тот, который даётся в элементарной алгебре.

Рассмотрим сначала систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эта система имеет решение, и притом единственное\*), если коэффициенты при неизвестных в этих уравнениях не пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \quad (2)$$

Случай же, когда коэффициенты при неизвестных пропорциональны, распадается на два подслучая:

1°. Коэффициенты при неизвестных пропорциональны и свободные члены тоже пропорциональны им, т. е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

2°. Коэффициенты при неизвестных пропорциональны, но свободные члены им не пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

В случае 1° уравнения (1) *зависимы*; второе уравнение получается из первого умножением его на некоторое число. Система (1) *имеет* решения, но не одно, а бесконечное множество.

В случае 2° уравнения (1) *противоречивы*. Система (1) не имеет ни одного решения.

Предположим теперь, что условие (2) соблюдено, и решим систему (1). Получим (решение представим читателю):

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Теперь ясно, зачем понадобилось условие (2). Если бы было  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ , то знаменатель в формулах (3) оказался бы нулём, и эти формулы потеряли бы смысл.

---

\*) Решением системы (1) называется *пара* чисел  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих одновременно обоим уравнениям.

**9. Определители второго порядка.** В числителях и знаменателях формул (3) фигурируют выражения одинакового типа: произведение двух сомножителей минус произведение других двух сомножителей. Выражение такого типа, например  $a_1b_2 - a_2b_1$ , называется *определителем* (или *детерминантом*) *второго порядка* и обозначается так:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Чтобы освоиться с этим новым обозначением, читатель должен заметить, что определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

вычисляется следующим образом: умножается верхнее левое число на нижнее правое и вычитается произведение нижнего левого на верхнее правое, т. е.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 1 \cdot 5 = 24 - 5 = 19.$$

Запомним следующие названия:

1) *Элементы определителя.* Числа, из которых составлен определитель, называются его элементами. В определителе — четыре элемента. Если рассматривать определитель  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ , то его элементы:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ .

2) *Члены определителя.* Членами определителя называются те произведения, которые получаются при его вычислении. Членов определителя — два, а именно:  $ad$  и  $-cb$ .

3) *Строки.* Строками называются горизонтальные ряды. В определителе — две строки: первая, в которой расположены элементы  $a$  и  $b$ , и вторая, в которой расположены  $c$  и  $d$ .

4) *Столбцы (или колонки).* Столбцами называются вертикальные ряды. Их два: первый, в котором расположены  $a$  и  $c$ , и второй, в котором расположены  $b$  и  $d$ .

5) *Ряды.* Рядами называются и строки, и столбцы.

6) *Диагонали.* В определителе две диагонали: *главная*, на которой расположены  $a$  и  $d$ , и *побочная*, на которой расположены  $c$  и  $b$ .

Пользуясь этими терминами, можно сказать: *для вычисления определителя второго порядка надо из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.*

Пользуясь новым обозначением, можно записать формулы (3) так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

Формулы (5) называются *формулами Крамера* \*) для решения системы двух уравнений. Всматриваясь в уравнения (1) и в формулы (5), дающие решение этих уравнений, замечаем следующее:

1) В обеих формулах (5) — один и тот же знаменатель, а именно определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, взятых в том же порядке, в каком они фигурируют в уравнениях (1).

2) В каждой формуле числитель отличается от знаменателя тем, что столбец коэффициентов при том неизвестном, которое даётся этой формулой, заменён столбцом свободных членов.

Заметим, что мы не дали нового способа для решения системы двух уравнений, а лишь новое обозначение для записи ответа. Это новое обозначение весьма удобно, так как формулы (4) запоминаются легче, чем формулы (3).

**Примечание 1.** Мы предполагали, что свободные члены перенесены направо. Если же они стоят в левых частях уравнений, то в формулах Крамера следует брать их с противоположными знаками.

**Примечание 2.** При решении системы уравнений с числовыми коэффициентами рекомендуется найти по формулам Крамера одно неизвестное; подставив найденное значение этого неизвестного в одно из уравнений, найдём другое неизвестное.

**Примечание 3.** Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы* (уравнений). Система уравнений с двумя неизвестными *имеет единственное решение* в том и только в том случае, когда определитель системы отличен от нуля. Если же определитель системы равен нулю, то система либо не имеет ни одного решения, либо имеет их бесконечное множество.

## 10. Основные свойства определителей второго порядка.

**Свойство I.** *Значение определителя не изменится, если заменить строки столбцами, а столбцы — строками, не меняя их порядка* (т. е. если вместо первой строки написать первый столбец, а вместо второй строки — второй столбец):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

---

\*) Габриель Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

Чтобы доказать это, достаточно вычислить отдельно каждый определитель: и тот, и другой равен  $a_1b_2 - a_2b_1$ .

Свойство II. Если поменять местами два параллельных ряда (т. е. либо две строки, либо два столбца), то определитель только изменит знак:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Эти равенства легко проверить, вычисляя написанные определители.

Свойство III. Чтобы умножить определитель на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число все элементы какого-нибудь одного ряда. Это значит, что умножить определитель на число  $k$  можно одним из следующих способов:

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & kb_1 \\ a_2 & kb_2 \end{vmatrix}.$$

Это свойство можно сформулировать и так: общий множитель, содержащийся во всех элементах одного ряда, можно вынести за знак определителя \*).

Пример. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 7 & 28 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ .

Здесь можно вынести из первой строки 7, а из второго столбца 2. При этом элемент 28 придётся разделить на 14, так как он находится одновременно и в первой строке и во втором столбце:

$$\begin{vmatrix} 7 & 28 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14(3 - 10) = -98.$$

Свойство IV. Если элементы одного ряда определителя пропорциональны соответственным элементам параллельного ряда, то определитель равен нулю.

Пусть дан определитель  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ , причём

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

---

\*) Под «знаком определителя» подразумеваются две вертикальные черты, между которыми располагаются его элементы.

Из последнего равенства следует  $a_1b_2 = a_2b_1$ , т. е.  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , т. е. данный определитель равен нулю.

Отметим особо один частный случай этого свойства: *если определитель содержит два одинаковых параллельных ряда, то он равен нулю.*

Свойство V (обратное свойству IV). *Если определитель второго порядка равен нулю, то в нём элементы любого ряда пропорциональны соответственным элементам параллельного ряда.* Свойства IV и V можно объединить в одной формулировке: *определитель второго порядка равен нулю в том и только в том случае, когда его параллельные ряды состоят из пропорциональных элементов.*

Доказательство. Дано:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это значит

$$a_1b_2 = a_2b_1.$$

Делим обе части этого равенства на  $a_2b_2$ :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Таким образом мы доказали, что элементы первой строки пропорциональны соответственным элементам второй строки. Если в последней пропорции переставить средние члены

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

то выясняется, что элементы первого столбца пропорциональны соответственным элементам второго столбца.

**11. Система трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными.** Рассмотрим систему трёх уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Условие, при котором система (6) имеет решение, и притом единственное, сложнее, чем для системы двух уравнений. Мы не будем формулировать его заранее.

Решим систему (6). Для этого исключим  $z$  из первых двух уравнений (для чего умножим первое уравнение на  $c_2$ , а второе — на  $c_1$  и затем вычтем из первого второе). Аналогично исключим  $z$  из

первого и третьего уравнений. В результате получим два уравнения с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} (a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y &= d_1c_2 - d_2c_1, \\ (a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y &= d_1c_3 - d_3c_1. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Из уравнений (\*) найдём  $x$  по формулам Крамера

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1c_2 - d_2c_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ d_1c_3 - d_3c_1 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1c_2 - a_2c_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1c_3 - a_3c_1 & b_1c_3 - b_3c_1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{d_1b_1c_2c_3 - d_2b_1c_1c_3 - d_1b_3c_1c_2 + d_2b_3c_1^2 - d_1b_1c_2c_3 + d_3b_1c_1c_2 + d_1b_2c_1c_3 - d_2b_2c_1^2}{a_1b_1c_2c_3 - a_2b_1c_1c_3 - a_1b_3c_1c_2 + a_2b_3c_1^2 - a_1b_1c_2c_3 + a_3b_1c_1c_2 + a_1b_2c_1c_3 - a_3b_2c_1^2}.$$

В числителе первый и пятый члены уничтожаются, в знаменателе — тоже; после этого дробь сокращается на  $c_1$ . Производя эти упрощения и выписывая сначала члены с плюсами, а затем с минусами, получим:

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 - d_2b_1c_3 - d_1b_3c_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2}.$$

В этой формуле числитель отличается от знаменателя тем, что буквы  $a$  заменены буквами  $d$  с теми же индексами. Выражения для  $y$  и  $z$  легко написать по аналогии. При нахождении  $y$  (или  $z$ ) буквы  $b$  (или  $c$ ) должны играть ту же роль, какую при нахождении  $x$  играли буквы  $a$ . Знаменатель останется без изменений, потому что в него буквы  $a$ ,  $b$  и  $c$  входят равноправно. При нахождении числителя для  $x$  мы буквы  $a$ , фигурирующие в знаменателе, заменяли через  $d$ . Согласно сделанному замечанию, при нахождении числителя для  $y$  (или для  $z$ ) следует заменить через  $d$  буквы  $b$  (или  $c$ ), фигурирующие в знаменателе. Решение системы (6) таково:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 - d_2b_1c_3 - d_1b_3c_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2}, \\ y &= \frac{a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1 - a_2d_1c_3 - a_1d_3c_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2}, \\ z &= \frac{a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3 - a_1b_3d_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Выражения такого типа, как в числителях и знаменателях формул (7), называются *определителями* (или *детерминантами*) *третьего порядка* и обозначаются так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3. \quad (8)$$



Термины *элементы, члены, строки, столбцы, ряды* и *диагонали* для определителей третьего порядка имеют смысл, аналогичный тому, какой они имели для определителей второго порядка.

Поскольку в первой формуле (7) числитель отличается от знаменателя тем, что буквы *a* заменены буквами *d*, то, обозначив зна-

менатель через  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ , мы обязаны обозначить числитель через

$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ . Аналогичное замечание относится и к двум другим фор-

мулам (7). Следовательно, формулы (7) можно переписать так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

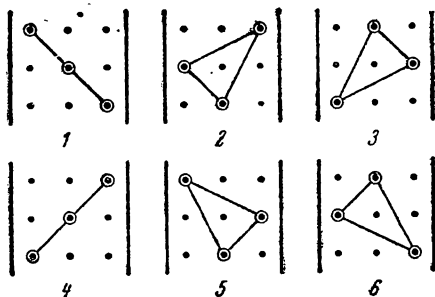
Формулы (9) называются *формулами Крамера* для решения системы трёх уравнений. Их словесная формулировка — та же, которая была дана после формул (5) (стр. 23).

При решении системы трёх уравнений с числовыми коэффициентами рекомендуется найти по формулам (9) значение одного неизвестного. Подставив это значение в какие-нибудь два из данных уравнений, мы получим систему уравнений с двумя неизвестными, которую решим, как было объяснено в п 9.

Система трёх уравнений (6) имеет решение, и притом единственное, если *определитель системы* [являющийся знаменателем в формулах (9)] отличен от нуля. Если определитель системы равен нулю, то формулы (9) неприменимы. Уравнения (6) в этом случае либо зависимы (имеют бесконечное множество решений), либо противоречивы (не имеют ни одного решения). Мы здесь не будем заниматься классификацией этих случаев.

**12. Правила Сарруса для вычисления определителей третьего порядка.** Выведенные в предыдущем п формулы Крамера будут бесполезны, если мы не будем помнить формулу (8), дающую правило для вычисления определителя третьего порядка: мы сможем лишь написать решение при помощи определителей, но не сможем расшифровать написанное. Проанализируем подробно состав формулы (8).

На черт. 9 все элементы определителя обозначены точками, причём на черт. 9,1 обведены кружками и соединены между собой те элементы, которые входят в первый член, на черт. 9,2 — те, которые входят во второй член, и т. д.



Черт. 9.

Всматриваясь в черт. 9, замечаем, что шесть членов определителя третьего порядка составляются так:

1-й член: перемножаются все элементы по главной диагонали;

2-й член: перемножаются два элемента, расположенные параллельно главной диагонали снизу от неё, и один элемент в противоположном углу;

3-й член: перемножаются два элемента, расположенные параллельно главной диагонали сверху от неё, и один элемент в противоположном углу;

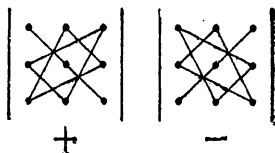
4-й член: перемножаются все элементы по побочной диагонали;

5-й член: перемножаются два элемента, расположенные параллельно побочной диагонали снизу от неё, и один элемент в противоположном углу;

6-й член: перемножаются два элемента, расположенные параллельно побочной диагонали сверху от неё, и один элемент в противоположном углу.

При этом члены, в которых перемножаются элементы по главной диагонали или параллельно ей, входят в формулу (8) со знаком плюс, а члены, в которых перемножаются элементы по побочной диагонали или параллельно ей, входят в формулу (8) со знаком минус.

Это правило для вычисления определителей третьего порядка называется *правилом треугольников* или *первым правилом Сарруса*. Черт. 10 иллюстрирует это правило.



Черт. 10. Правило треугольников (первое правило Сарруса).

$$\text{Пример.} \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 6 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 8 + 5 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 8 + \\ + 5 \cdot 4 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 1 = 327.$$

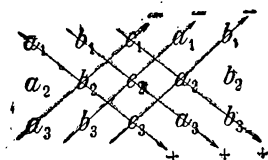
Иногда употребляется другое мнемоническое правило для вычисления определителя третьего порядка. Составим таблицу, в которую

запишем все элементы определителя, не изменяя их порядка, и справа припишем первые два столбца определителя:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

В этой таблице проводим наклонные линии, идущие от элементов первой строки направо вниз, и притом только те, на которых расположены по три элемента.

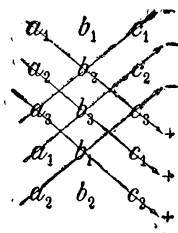
Проводим далее наклонные от элементов третьей строки направо вверх, и притом только те, на которых расположены по три элемента. Берём произведения элементов вдоль первых наклонных с неизменённым знаком и произведения элементов вдоль вторых наклонных с изменённым знаком. Всё сказанное иллюстрируется следующей схемой:



Читатель может убедиться, что при вычислении по этой схеме получится выражение (8).

Изложенное правило для вычисления определителей третьего порядка называется *вторым правилом Сарруса*.

**Примечание.** Изложенное правило можно видоизменить так: вместо того чтобы повторять *справа* первый и второй *столбцы*, можно повторить *снизу* первую и вторую строки, а дальше поступать аналогично:



**13. Разложение определителя третьего порядка по элементам какого-либо ряда.** Возьмём в определителе третьего порядка какой-нибудь элемент и вычеркнем из определителя ту строку и тот столбец, на пересечении которых находится этот элемент. Оставшийся после вычёркивания определитель второго порядка называется *минором* данного элемента.

Пример. В определителе

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

минором элемента  $c_2$  служит определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Вернёмся к формуле (8) для вычисления определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 \quad (8)$$

и преобразуем правую часть этой формулы следующим образом. Выберем в определителе любой ряд, например, первую строку. Будем в правой части группировать вместе те члены, которые содержат один и тот же элемент первой строки, и выносить этот элемент за скобку. Получим:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + b_1 (a_3 c_2 - a_2 c_3) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

Выражения, стоящие в скобках, можно записать в виде определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Всматриваясь в эту формулу, мы замечаем, что элементы  $a_1$  и  $c_1$  умножаются на свои миноры, а элемент  $b_1$  умножается на определитель, отличающийся от его минора порядком столбцов. Переставим столбцы в этом определителе, изменив знак перед ним:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Формула (10) даёт так называемое *разложение определителя по элементам первой строки*.

Можно разложить определитель по элементам любой строки или любого столбца; например, чтобы разложить определитель по

элементам второго столбца, следовало в формуле (8) группировать те члены, которые содержат один и тот же элемент второго столбца. Если читатель попробует разлагать определитель по элементам разных рядов, то он обнаружит следующий закон: чтобы вычислить определитель, надо взять все элементы какого-нибудь одного ряда, умножить каждый элемент на его минор и взять сумму полученных произведений, беря *некоторые* из них с изменённым знаком. Остаётся выяснить, какие именно произведения берутся с изменённым знаком. На этот вопрос отвечает следующая схема:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Запомнить её легко, заметив, что на месте первого элемента (т. е. стоящего в левом верхнем углу) стоит  $+$  и что знаки расположены в шахматном порядке. Например, среднему элементу первой строки всегда соответствует знак минус, независимо от того, производится ли разложение по первой строке или по второму столбцу.

Пример. Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 6 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ , разлагая его по

элементам второй строки [этот определитель встречался в п 12 (стр. 28)].

По схеме знаков второй строке соответствуют знаки  $- + -$ ; значит элементы 6 и  $-4$  следует взять с изменёнными знаками, а элемент 1 с неизменённым. Получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 6 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \\ = 6 \cdot 45 - 1 \cdot 23 + 4 \cdot 20 = 327.$$

Примечание. Этот способ становится особенно выгодным тогда, когда среди элементов определителя встречаются нули. Тогда мы разлагаем определитель по тем строкам (или столбцам), где встречаются эти нули. Члены разложения, представляющие произведения этих нулевых элементов на их миноры, исчезают.

#### 14. Основные свойства определителей третьего порядка.

Свойство I. *Значение определителя не изменится, если замкнуть строки столбцами, а столбцы — строками, не меняя их порядка:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказывается проверкой.

Свойство II. Если поменять местами два параллельных ряда, то определитель только изменит знак. Например, если переставить между собой первые две строки, то получим:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказывается проверкой.

Свойство III. Чтобы умножить определитель на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число все элементы какого-нибудь одного ряда. Например,

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказывается проверкой.

Это свойство можно сформулировать и так: общий множитель, содержащийся во всех элементах одного ряда, можно вынести за знак определителя.

Свойство IV. Если элементы одного ряда определителя пропорциональны соответственным элементам параллельного ряда, то определитель равен нулю.

Отметим особо один частный случай этого свойства: если определитель содержит два одинаковых параллельных ряда, то он равен нулю.

Свойство IV может быть доказано либо проверкой, либо следующим способом. Рассмотрим определитель, имеющий два одинаковых параллельных ряда, например,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Переставим в этом определителе первые две строки. Новый определитель, с одной стороны, должен быть равен  $-D$  (на основании свойства II), а с другой стороны, он должен быть равен  $D$  (так как от перестановки двух одинаковых строк определитель не изменится). Следовательно,

$$D = -D,$$

откуда  $2D = 0$ , т. е.

$$D = 0,$$

что и требовалось доказать.

Если в определителе имеются два параллельных ряда, не одинаковых, а таких, что элементы одного ряда пропорциональны соответственным элементам другого ряда, то, применяя свойство III и только что доказанное свойство, найдём:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Примечание.** Свойство IV, доказанное для определителей второго порядка, для определителей третьего порядка *не имеет места*. Определитель второго порядка равен нулю в том и *только в том* случае, когда он имеет пропорциональные строки. Определитель третьего порядка может быть равен нулю *не только* в том случае, когда в нём есть пропорциональные ряды, но по некоторым более сложным причинам. Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0,$$

а между тем в этом определителе нет никаких пропорциональных строк или столбцов \*).

**15. Система двух однородных уравнений первой степени с тремя неизвестными.** Уравнение первой степени называется *однородным*, если оно не содержит свободного члена, т. е. все его члены — одинаковой степени (первой \*\*). Рассмотрим систему двух однородных уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Разумеется, из уравнений (11) нельзя вполне определить  $x$ ,  $y$  и  $z$ , потому что здесь только два уравнения. Однако, как мы сейчас покажем, из этих уравнений можно определить *отношения неизвестных*  $x : y : z$ .

Перенесём члены, содержащие  $z$ , вправо и разделим оба уравнения на  $z$ :

$$\begin{aligned} a_1 \frac{x}{z} + b_1 \frac{y}{z} &= -c_1, \\ a_2 \frac{x}{z} + b_2 \frac{y}{z} &= -c_2. \end{aligned}$$

\*) *Необходимое* и достаточное условие, при котором определитель третьего порядка равен нулю, будет дано в главе XI [п 189, свойство 3 (стр. 354)].

\*\*) Более общий смысл понятия однородного уравнения читатель узнает в главе XV (п 237, стр. 474).

Решим эту систему, рассматривая в качестве неизвестных отношения

$$\frac{x}{z} \text{ и } \frac{y}{z}:$$

$$\frac{x}{z} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Так как знаменатели в этих формулах одинаковы, то можно записать полученное решение в виде двойной пропорции

$$x:y:z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Формулы (12) легко запомнить следующим образом. Выпишем все коэффициенты уравнений (11) в том порядке, в каком они фигурируют в этих уравнениях:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|. \quad (13)$$

Прямоугольная *таблица* или *схема*, составленная из каких-нибудь чисел, называется *матрицей*; для обозначения матрицы употребляются две вертикальные черточки с каждой стороны. Для столбцов матрицы (13) установим так называемый *циклический порядок*: после первого столбца идёт второй, после второго — третий, после третьего — опять первый и т. д.

Заметим, что определители (12) получаются из матрицы (13) поочерёдным вычёркиванием столбцов, а именно:

- 1) вычёркиваем первый столбец, сохраняем второй и третий,
- 2) вычёркиваем второй столбец, сохраняем третий и первый (*сначала третий*, потому что после вычёркнутого второго столбца идёт третий),
- 3) вычёркиваем третий столбец, сохраняем первый и второй.

Таким образом, каждому неизвестному соответствует определитель, получающийся из матрицы (13) вычёркиванием столбца коэффициентов, соответствующих этому неизвестному. Полезно также заметить, что в формулах (12) второй определитель получается из первого, а третий из второго *циклической заменой* столбцов.

Уравнениям (11) удовлетворяют *любые* числа, пропорциональные определителям (12). Формулы (12) можно записать так:

$$x = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = \lambda \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad z = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (14)$$

где  $\lambda$  — произвольное число.

**Пример.** Решить систему уравнений

$$3x - 2y + z = 0, \quad 2x + y - 4z = 0.$$

Матрица коэффициентов такова:

$$\left\| \begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{matrix} \right\|.$$

По формулам (11) находим:

$$x:y:z = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7:14:7 = 1:2:1.$$

Итак, за  $x$ ,  $y$  и  $z$  можно принять числа 1, 2 и 1 или любые числа, им пропорциональные.



## Задачи

3. Вычислить определитель второго порядка:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} -0,3 & 5 \\ -2,81 & 0,2 \end{vmatrix}; \quad \text{*d) } \begin{vmatrix} a & ab \\ 1 & b \end{vmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

4. Пользуясь формулами Крамера, решить систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 2y - 5 = 0, \\ x - 3y - 18 = 0; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 10x - y = 20, \\ 2x + 7y = 4; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + y = 2; \\ 4x - 5y = 8. \end{cases}$$

5. При каком значении  $k$  система уравнений является зависимой или противоречивой:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 6x - 9y = k; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 8y = 3, \\ 2x + ky = 6; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 5x - 3y = 10, \\ kx - 6y = 12. \end{cases}$$

6. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \\ 7 & -1 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 7,3 & 1 & 0,2 \\ 5 & 0 & 3,1 \\ 2,5 & 4 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

7. Пользуясь формулами Крамера, решить систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 17, \\ 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x - 2y - 10 = 0, \\ 4y + 7z + 77 = 0, \\ 2x - 5z - 59 = 0; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y + 5z = 1, \\ 2x + y + z = 3, \\ x - 4y - 3z = 10. \end{cases}$$

8. Решить уравнение:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & x+2 & 3x-10 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 5 \\ 1 & 3x-17 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Решить систему однородных уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y - 9z = 0, \\ 2x + y + 7z = 0; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x - 3y + 4z = 0, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

---

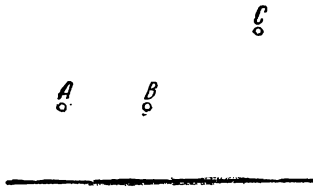
## ГЛАВА I

### ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ

#### § 1. Декартова система координат

**16. Определение положения точки на плоскости.** Вообразим плоскость, неограниченно простирающуюся во все стороны. Все точки этой плоскости одинаковы: ни одна из них не имеет никаких признаков, отличающих её от других точек. Поэтому мы не можем определять положение точек на плоскости, т. е. описывать расположение любой точки плоскости так, чтобы её нельзя было смешать ни с какой другой точкой.

Если на плоскости начерчены какие-нибудь линии или фигуры, то положение точек на ней можно определять, так как разные точки плоскости имеют разное расположение относительно начерченных линий или фигур. Однако не всякий чертёж даёт такую возможность.



Черт. 11.

Пусть, например, на плоскости начерчена прямая линия (говоря о прямой линии, мы всегда будем подразумевать прямую, неограниченно продолжающуюся в обе стороны). Это не даёт возможности определять положение точек на плоскости. Точку  $A$  можно отличить от точки  $C$

(черт. 11), указав, что точка  $A$  находится от нашей прямой на расстоянии 1 см, а точка  $C$  — на расстоянии 2 см, но нет никаких признаков, отличающих точку  $A$  от точки  $B$ .

Начертим на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые  $OX$  и  $OY$  (черт. 12) и посмотрим, дают ли они возможность определять положение точек на плоскости.

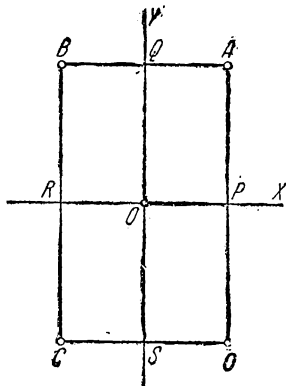
Пусть дана точка  $A$ . Чтобы описать её положение, укажем расстояния точки  $A$  от прямых  $OX$  и  $OY$  (т. е. перпендикуляры  $PA$  и  $QA$ ). Достаточны ли эти данные для того, чтобы отличить точку  $A$  от всех других точек плоскости? Легко сообразить, что, кроме точки  $A$ , есть ещё три такие точки (точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  на черт. 12).

Чтобы устранить это затруднение, следует превратить *прямые*  $OX$  и  $OY$  в *оси*, т. е. отметить на них положительное направление

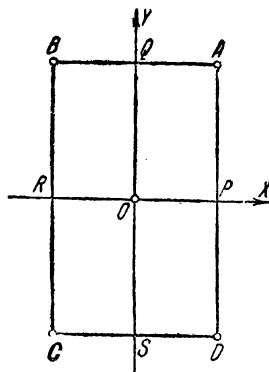
и рассматривать  $OP$  и  $OQ$  как *направленные отрезки* (черт. 13). Теперь точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  становятся различными. Например, на черт. 13 имеем:

для точки $A$	$OP = 11$ мм,	$OQ = 18$ мм,
» » $B$	$OR = -11$ мм,	$OQ = 18$ мм,
» » $C$	$OR = -11$ мм,	$OS = -18$ мм,
» » $D$	$OP = 11$ мм,	$OS = -18$ мм.

В этом примере мы задавали отрезки в миллиметрах. Миллиметр, сантиметр и т. п., это — понятия, не могущие быть определёнными геометрически, а заимствованные из физики. Поэтому мы условимся впредь отмечать единицу масштаба непосредственно на



Черт. 12.



Черт. 13

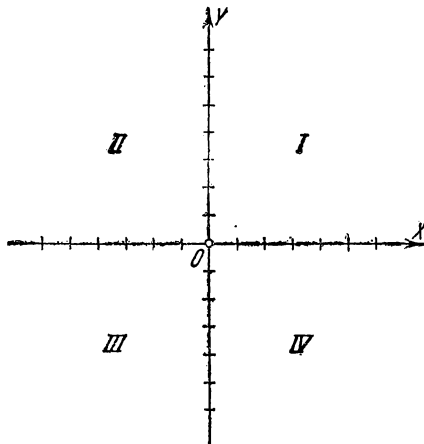
осях и, определяя положение точки при помощи отрезков  $OP$  и  $OQ$ , не указывать наименования, а задавать эти отрезки отвлечёнными числами; при этом всегда подразумевается, что единицей длины служит отрезок, отмеченный на осях.

Теперь наш чертёж примет такой вид, как показано на черт. 14: здесь на прямых  $OX$  и  $OY$  указаны положительные направления и отложены отрезки, принятые за единицы длины \*).

Чтобы описать положение какой-нибудь точки  $M$ , опускаем из неё перпендикуляр  $MP$  на ось  $OX$  и перпендикуляр  $MQ$  на ось  $OY$  (черт. 15). Будем обозначать через  $x$  направленный отрезок  $OP$ , выраженный в отмеченной на осях единице масштаба, а через  $y$  — направленный отрезок  $OQ$ . Числа  $x$  и  $y$  называются *координатами* точки  $M$ ;  $x$  называется *абсциссой* точки  $M$ , а  $y$  — её *ординатой*.

\*) Мы всегда будем предполагать, что на осях  $OX$  и  $OY$  взяты одинаковые единицы масштаба, хотя это не является обязательным.

Чтобы записать, что точка  $M$  имеет координаты  $x$  и  $y$ , эти координаты записываются в скобках после названия точки, т. е. так:  $M(x, y)$ . На первом месте всегда записывается абсцисса, на втором — ордината, между ними ставится запятая \*).



Черт. 14. Декартова прямоугольная система координат.

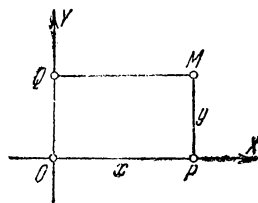
Весь этот способ определения положения точек на плоскости называется *декартовой прямоугольной системой координат*. Он принадлежит великому французскому философу и математику Рене Декарту (1596—1650).

Декарт опубликовал философское сочинение «Рассуждение о методе» и к нему три приложения: «Оптика», «Метеоры» и «Геометрия». В этих приложениях Декарт прилагал общие научные методы, развитые им в «Рассуждении о методе», соответственно к оптике, атмосферным явлениям и геометрии. Приложение «Геометрия» вышло в 1637 г. и считается основополагающим трудом по аналитической геометрии\*\*), хотя другой французский

математик Пьер Ферма (1601—1665) ещё в 1636 г. издал работу «Введение в изучение плоских и телесных мест», содержащую метод аналитической геометрии. По ряду причин именно работа Декарта послужила исходной для развития аналитической геометрии.

Рассматриваемая нами система координат называется *прямоугольной*, потому что оси  $OX$  и  $OY$  образуют прямой угол; возможна *декартова косоугольная* система координат, но в этой книге мы ею пользоваться не будем.

Оси  $OX$  и  $OY$  называются *осями координат*. Ось  $OX$  называется *осью абсцисс*, а ось  $OY$  — *осью ординат*. Мы будем также называть ось абсцисс *осью иксов* и сокращённо обозначать её «ось  $X$ », а ось ординат — *осью игреков* и обозначать «ось  $Y$ ». Точка  $O$  называется *началом координат* или просто *началом*.



Черт. 15.  $M(x, y)$ .

Оси координат делят всю плоскость на четыре части. Эти части называются *четвертями*, или *квадрантами*. Та четверть, которая

\*) Если числа, стоящие в скобках (или хоть одно из них), представляют собой десятичные дроби, то между ними ставится точка с запятой, например:  $K(3,5; 2,7)$  или  $L(-4; 5,1)$ .

\*\*) Имеется русское издание: Рене Декарт, Геометрия. ГОНТИ. Москва — Ленинград, 1938.

получится, если из начала координат вывести обе оси в положительном направлении, называется *первой четвертью* или *нормальным координатным углом*. Дальше нумерация четвертей идёт против часовой стрелки (черт. 14).

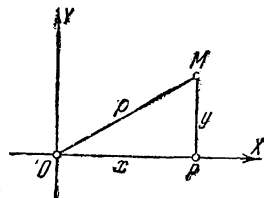
Если точка находится в первой четверти, то обе её координаты положительны; во второй четверти — абсцисса отрицательна, а ордината положительна; в третьей — обе координаты отрицательны; в четвёртой — абсцисса положительна, а ордината отрицательна.

Таким образом, каждой четверти соответствует своя комбинация знаков координат, как показано в следующей таблице:

Четверть	Знак абсциссы	Знак ординаты
I	+	+
II	—	+
III	—	—
IV	+	—

Кроме точек, лежащих внутри четвертей, существуют ещё точки, лежащие на границах между четвертями, т. е. на осях координат. Если точка лежит на оси абсцисс, то её ордината равна нулю, если же она лежит на оси ординат, то её абсцисса равна нулю. У начала координат обе координаты равны нулю.

Зная координаты, всегда можно построить точку. Пусть требуется построить точку  $M(x, y)$ . Откладываем по оси абсцисс от начала координат  $x$  единиц длины (вправо или влево, смотря по тому, положительно ли  $x$  или отрицательно). В полученной точке составляем перпендикуляр к оси абсцисс и на этом перпендикуляре откладываем  $y$  единиц длины (вверх или вниз, смотря по тому, положительно ли  $y$  или отрицательно). Проведем это построение, мы придём в искомую точку  $M$  (черт. 16). Здесь  $y$  откладывается не на оси ординат, а прямо на перпендикуляре к оси абсцисс в точке  $P$ .



Черт. 16.

$$r = + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для дальнейшего весьма важно подчеркнуть, что *координаты суть отвлечённые числа*. Абсолютные величины этих чисел называют *расстояния точки от осей координат* \*), а их знаки указывают направления отрезков  $OP$  и  $PM$  (или  $OQ$ ).

\*) Под словом «расстояние» (так же, как и «длина») всегда подразумевается *положительная величина*.

Вектор, идущий из начала координат в какую-нибудь точку  $M$ , называется радиусом-вектором этой точки. Длину радиуса-вектора мы обычно будем обозначать греческой буквой  $\rho$ :

$$\rho = |\overline{OM}|.$$

Пользуясь понятием радиуса-вектора, можно дать новое определение координат точки: координаты точки суть проекции её радиуса-вектора на оси координат, т. е.

$$x = \text{пр}_X \overline{OM}, \quad y = \text{пр}_Y \overline{OM}. \quad (1)$$

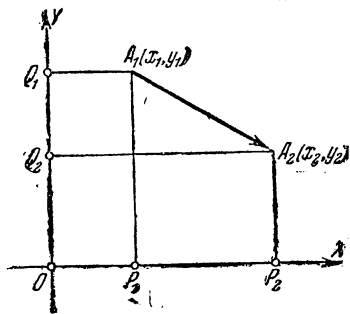
Если координаты точки  $M$  известны, то длину её радиуса-вектора можно определить по теореме Пифагора (черт. 16)

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Знак  $+$  перед радикалом поставлен потому, что  $\rho$  всегда положительно (длина вектора).

В литературе часто называют  $\rho$  радиусом-вектором. Мы тоже, для краткости и для того чтобы не расходиться с общепринятой терминологией, иногда будем так выражаться, хотя это неточно:  $\rho$  это не радиус-вектор, а «длина радиуса-вектора».

**17. Проекция вектора на координатные оси.** Решим следующую задачу. Даны две точки  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ ; тем самым определён вектор  $\overline{A_1A_2}$ . Определить его проекции на оси координат.



Черт. 17.

$$\text{пр}_X \overline{A_1A_2} = x_2 - x_1,$$

$$\text{пр}_Y \overline{A_1A_2} = y_2 - y_1.$$

Отрезок  $OP_2$  есть  $x_2$ , но отрезок  $P_1O$  не есть  $x_1$ , потому что абсцисса точки  $A_1$  отсчитывается от начала к точке  $P_1$ , а не наоборот. Переставим буквы в обозначении отрезка  $P_1O$ , изменив знак перед ним:

$$\text{пр}_X \overline{A_1A_2} = -OP_1 + OP_2 = x_2 - x_1.$$

Аналогично

$$\text{пр}_Y \overline{A_1A_2} = Q_1Q_2 = Q_1O + OQ_2 = -OQ_1 + OQ_2 = y_2 - y_1.$$

Обозначим проекции точек  $A_1$  и  $A_2$  на ось  $X$  соответственно через  $P_1$  и  $P_2$ , а на ось  $Y$  — через  $Q_1$  и  $Q_2$  (черт. 17). Имеем:

$$\text{пр}_X \overline{A_1A_2} = P_1P_2.$$

Разбиваем отрезок  $P_1P_2$  на два отрезка при помощи точки  $O$ :

$$\text{пр}_X \overline{A_1A_2} = P_1O + OP_2.$$

Отрезок  $OP_2$  есть  $x_2$ , но отрезок  $P_1O$  не есть  $x_1$ , потому что абсцисса точки  $A_1$  отсчитывается от начала к точке  $P_1$ , а не наоборот. Переставим буквы в обозначении отрезка  $P_1O$ , изменив знак перед ним:

Итак:

$$\left. \begin{aligned} \text{пр}_X \overline{A_1 A_2} &= x_2 - x_1, \\ \text{пр}_Y \overline{A_1 A_2} &= y_2 - y_1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

т. е. проекция вектора на координатную ось равна координате (абсциссе или ординате — смотря по тому, на какую ось мы проектируем) конца этого вектора минус координата начала. В этой формулировке нельзя переставлять начало и конец вектора.

Вывод формул (3) основан на установленных ранее свойствах направленных отрезков и не зависит от чертежа: эти формулы справедливы при любом расположении вектора  $\overline{A_1 A_2}$ . На черт. 17  $y_2 < y_1$ , т. е. разность  $y_2 - y_1$  отрицательна; и действительно, проекция вектора  $\overline{A_1 A_2}$  на ось  $Y$  отрицательна.

Если точка  $A_1$  совпадает с началом, то вектор  $\overline{A_1 A_2}$  превращается в радиус-вектор точки  $A_2$ . При этом  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = 0$ , и формулы (3) превращаются в формулы (1).

### Упражнения

**10.** Пользуясь клетчатой бумагой, построить точки  $A(3,5)$ ,  $B(-2,1)$ ,  $C(4,-5)$ ,  $D(-2,-7)$ ,  $E(2,0)$ ,  $F(1-\sqrt{2}, 0)$ ,  $G(0,-4)$ ,  $H(0,004;-0,011)$ ,  $I(-0,001;-0,007)$ ,  $J(-200, 200)$ ,  $K(600,-400)$ . Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  нанести на одном чертеже, принимая за единицу масштаба 1 клетку, точки  $H$  и  $I$  — на другом, принимая за единицу масштаба 1000 клеток и точки  $J$  и  $K$  — на третьем, принимая за единицу масштаба 0,01 клетки.

Провести отрезки  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $HI$  и  $JK$ , измерить их при помощи циркуля (определяя на-глаз десятые доли клетки) и надписать на каждом его длину.

**11.** На клетчатой бумаге начертить окружность радиуса 5 с центром в начале. Отметить все точки с целыми координатами, лежащие на этой окружности, и записать их координаты.

### Задачи

**12.** Принимая диагонали квадрата со стороной  $a$  за оси координат, определить координаты его вершин.

**13.** Дана точка  $(-3, 7)$ . Найти точку, симметричную ей: а) относительно оси  $X$ ; б) относительно оси  $Y$ ; с) относительно начала координат.

**14.** Дана точка  $(a, b)$ . Найти точку, симметричную ей: а) относительно оси  $X$ ; б) относительно оси  $Y$ ; с) относительно начала координат.

**15.** Найти длину радиуса-вектора: а) точки  $(-6, 8)$ ; б) точки  $(3, -2)$ .

**16.** Найти точку, для которой: а) абсцисса равна 5, а длина радиуса-вектора равна 13; б) ордината равна  $-3$ , а длина радиуса-вектора равна 10; с) абсцисса равна 7, а длина радиуса-вектора равна 5; д) абсцисса равна  $-2$ , а длина радиуса-вектора равна 2.

**17.** Доказать, что  $\rho \geq |x|$  и  $\rho \geq |y|$ . В каких случаях имеет место равенство?

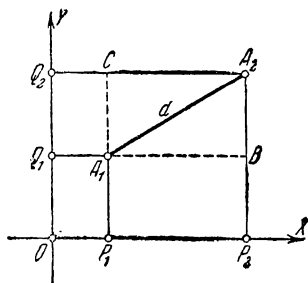
**18.** Определить проекции вектора  $\overline{AB}$  на оси координат, зная координаты начала и конца вектора

а)  $A(1, 5)$ ,  $B(4, -2)$ ; б)  $A(2, 3)$ ,  $B(5, 3)$ .

**19.** Начало вектора находится в точке  $(2, -1)$ , его проекции на оси  $X$  и  $Y$  суть соответственно  $-4$  и  $3$ . Найти конец вектора.

## § 2. Простейшие задачи, разрешаемые при помощи метода координат

**18. Расстояние между двумя точками.** Решим следующую задачу. Даны две точки  $A_1$  и  $A_2$ ; определить расстояние между ними.



Черт. 18.

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В аналитической геометрии точка всегда задаётся своими координатами. Поэтому приведённую задачу можно сформулировать так: даны координаты точек  $A_1$  и  $A_2$ ; вычислить расстояние между ними.

В аналитической геометрии все задачи решаются при помощи вычислений без чертежа (хотя при выводе формул мы иногда и будем пользоваться чертежом).

Итак, пусть даны точки  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ . Обозначим длину  $A_1A_2$  через  $d$ . Числа  $x_1, y_1, x_2, y_2$  — данные,  $d$  — искомое.

Чтобы найти расстояние  $d$ , заметим, что можно построить прямоугольник  $A_1CA_2B$  (черт. 18), стороны которого равны абсолютным величинам проекций вектора  $\overline{A_1A_2}$  на координатные оси, а диагональю является  $A_1A_2$ . Следовательно,

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Формула (1) даёт расстояние между двумя точками. Это расстояние не зависит от того, какую точку считать первой и какую второй. Следовательно, если мы в формуле (2) вместо  $x_2 - x_1$  напишем  $x_1 - x_2$ , или вместо  $y_2 - y_1$  напишем  $y_1 - y_2$ , то  $d$  не должно измениться. Легко сообразить, что оно и не изменится, так как разности  $x_2 - x_1$  и  $y_2 - y_1$  при такой перестановке изменят свой знак, при возведении же в квадрат всё останется по-старому. Итак, *расстояние между двумя точками равно квадратному корню из разности их абсцисс в квадрате плюс разность ординат в квадрате.* (В этой формулировке не говорится, вычитается ли первая координата из второй или вторая из первой.)

Если точка  $A_1$  совпадает с началом, то  $x_1 = 0, y_1 = 0$ , и формула (1) даёт расстояние точки  $A_2$  от начала, т. е. длину радиус-вектора точки  $A_2$  [§ 1, формула (2) (стр. 41)].

**Пример 1.** Расстояние между точкой  $A(-3, 2)$  и точкой  $B(1, y)$  равно 5. Найти ординату точки  $B$ .

Подставляем данные величины в формулу (2):

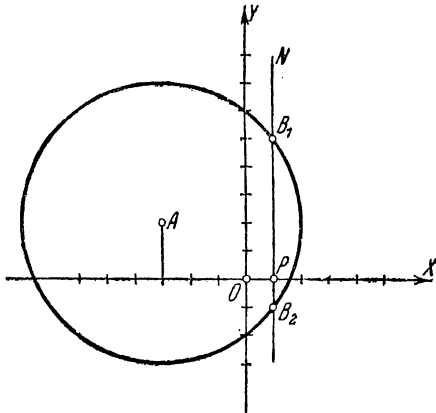
$$5 = + \sqrt{16 + (y - 2)^2}.$$



Решая это уравнение, находим:

$$y_1 = 5, \quad y_2 = -1.$$

Следовательно, точка  $B$  имеет координаты либо  $(1, 5)$ , либо  $(1, -1)$ . Почему получается два ответа? Этот вопрос станет ясен, если мы решим нашу задачу при помощи геометрического построения. Координаты точки  $A$  даны; наносим эту точку на чертеже (черт. 19). Относительно точки  $B$  мы знаем, что её абсцисса равна 1. Откладываем на оси  $X$   $OP=1$  и восстанавливаем в точке  $P$  перпендикуляр  $PN$  к оси  $X$ . Точка  $B$  должна лежать где-то на этом перпендикуляре, а где именно — пока неизвестно. Кроме того, мы знаем, что расстояние между  $A$  и  $B$  равно 5. Описываем окружность с центром в точке  $A$  радиусом, равным 5. Точка  $B$  должна лежать на этой окружности. Следовательно, точка  $B$  должна лежать одновременно и на прямой  $PN$  и на окружности. Эта окружность пересекается с прямой  $PN$  в двух точках  $B_1$  и  $B_2$ . Обе эти точки удовлетворяют условиям задачи. Чертёж подтверждает, что их координаты  $(1, 5)$  и  $(1, -1)$ .



Черт. 19.

**19. Наклон вектора к координатным осям.** Пусть даны две точки  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ . Они вполне определяют вектор  $\overline{A_1A_2}$ . Найдём углы наклона этого вектора к координатным осям.

При решении этой задачи мы используем тот факт, что проекция вектора на координатную ось может быть выражена двояко. Во-первых [Введение, § 1, формула (9) (стр. 17)],

$$\text{пр}_X \overline{A_1A_2} = d \cos \varphi,$$

где  $d$  — длина вектора  $\overline{A_1A_2}$ , т. е.  $d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , а  $\varphi$  — угол наклона вектора  $\overline{A_1A_2}$  к оси  $X$  (этот угол — искомый). Во-вторых [§ 1, формулы (3) (стр. 42)],

$$\text{пр}_X \overline{A_1A_2} = x_2 - x_1.$$

Приравняем эти два выражения

$$d \cos \varphi = x_2 - x_1,$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{d}.$$

Проектируя вектор  $\overline{A_1A_2}$  на ось  $Y$ , мы аналогично нашли бы

$$\cos \psi = \frac{y_2 - y_1}{d},$$

где  $\psi$  — угол наклона вектора  $\overline{A_1A_2}$  к оси  $Y$ . Легко сообразить, что  $\cos \psi = \sin \varphi$  \*).

Итак:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x_2 - x_1}{d}, \\ \sin \varphi &= \frac{y_2 - y_1}{d}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Формулы (2) дают косинус и синус угла наклона вектора к оси  $X$ . В этих формулах нельзя менять порядок индексов: из координат конца вектора вычитаются координаты начала. Если вектор  $\overline{A_1A_2}$  заменить *противоположным* вектором  $\overline{A_2A_1}$ , то косинус и синус в формулах (2) изменят знаки. Геометрически это объясняется тем, что если вектор  $\overline{A_1A_2}$  наклонён к оси  $X$  под углом  $\varphi$ , то противоположный вектор  $\overline{A_2A_1}$  образует с осью  $X$  угол  $180^\circ + \varphi$  [Введение, п 3, свойство  $2^\circ$  (стр. 14)] и

$$\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos \varphi,$$

$$\sin(180^\circ + \varphi) = -\sin \varphi.$$

Деля вторую формулу (2) на первую, получим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3)$$

В формуле (3) изменение порядка индексов не влияет на  $\operatorname{tg} \varphi$ . Это объясняется тем, что

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \varphi) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Следовательно, формула (3) одинаково относится и к вектору  $\overline{A_1A_2}$  и к вектору  $\overline{A_2A_1}$ , т. е. она определяет наклон к оси  $X$  отрезка  $A_1A_2$ , концы которого мы считаем равноправными (т. е. не различаем начала от конца).

Тангенс угла наклона отрезка к оси  $X$  называется *угловым коэффициентом* отрезка. Формула (3) даёт угловой коэффициент отрезка  $A_1A_2$ .

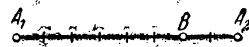
---

\*) Это весьма очевидно. Точное обоснование вытекает из формулы (3) § 3 этой главы и правила, следующего после этой формулы (стр. 54).

**20. Деление отрезка в данном отношении.** Формулировка задачи: даны две точки  $A_1$  и  $A_2$ ; найти точку  $B$ , делящую отрезок  $A_1A_2$  в данном отношении  $\lambda$ .

Напомним, что когда в аналитической геометрии говорится: «даны точки», то это значит, что даны их координаты, а «найти точку», это значит — вычислить её координаты.

Заметим, что если на отрезке  $A_1A_2$  нанесена точка  $B$ , то отношением, в котором  $B$  делит отрезок  $A_1A_2$ , называется число  $\frac{A_1B}{BA_2}$ . Об-

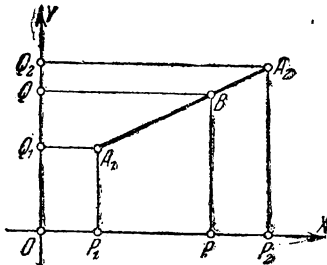


Черт. 20.

$$\lambda = \frac{A_1B}{BA_2} = 3.$$

ратим внимание на то, что в числителе берётся отрезок *от* начала отрезка *до* делящей точки, а в знаменателе — *от* делящей точки *до* конца отрезка. На черт. 20 точка  $B$  делит отрезок  $A_1A_2$  в отношении, равном 3; та же точка делит отрезок  $A_2A_1$  в отношении  $\frac{1}{3}$ .

После этих предварительных замечаний вернёмся к нашей задаче. Даны точки  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ . Найти точку  $B(x, y)$ , лежащую на отрезке  $A_1A_2$  и делящую его в отношении  $\lambda$  (т. е.  $\frac{A_1B}{BA_2} = \lambda$ ). Здесь данные числа:  $x_1, y_1, x_2, y_2$  и  $\lambda$ , а искомые:  $x$  и  $y$ .



Черт. 21.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

на них пропорциональные отрезки. Значит,

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{A_1B}{BA_2}.$$

Однако в элементарной геометрии не принимались во внимание знаки отрезков, и поэтому необходимо ещё проверить эту пропорцию с точки зрения знаков.

Мы предполагаем, что точка  $B$  лежит *внутри* отрезка  $A_1A_2$ ; при этом точка  $P$  также лежит *внутри* отрезка  $P_1P_2$ . Отрезки  $A_1B$  и  $BA_2$  имеют одинаковое направление, и поэтому отношение  $\lambda = \frac{A_1B}{BA_2}$  положительно, независимо от того, какое направ-

ление установлено на прямой  $A_1A_2$  \*); отношение  $\frac{P_1P}{PP_2}$  тоже положительно.

Отрезки  $P_1P$  и  $PP_2$  суть проекции на ось  $X$  векторов  $\overline{A_1B}$  и  $\overline{BA_2}$ . Выражая их по формулам (3) § 1, (стр. 42), можно записать последнюю пропорцию так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

В этой формуле фигурирует одна неизвестная величина:  $x$ . Найдём её.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогично этому, если спроектируем точки  $A_1$ ,  $A_2$  и  $B$  на ось  $Y$ , то получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda,$$

откуда

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Задача решена:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

Если точка  $B$  есть середина отрезка, то  $\lambda = 1$ . Полагая в формулах (4)  $\lambda = 1$ , получаем:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (5)$$

*Абсцисса (ордината) середины отрезка есть среднее арифметическое абсцисс (ординат) его концов.*

**Пример 2.** На концах стержня, массой которого можно пренебречь, помещены две массы: в точке  $(-2, 4)$  масса в 5 г и в точке  $(10, -2)$  масса в 10 г. Найти центр тяжести этой системы.

**Решение.** Центр тяжести лежит на отрезке между точками  $(-2, 4)$  и  $(10, -2)$  и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные массам, сосредоточенным на его концах, т. е.  $\lambda = \frac{10_2}{5_2} = 2$ .

Следовательно,

$$x = \frac{-2 + 2 \cdot 10}{1 + 2} = 6, \quad y = \frac{4 + 2(-2)}{1 + 2} = 0.$$

**О т в е т:**  $(6, 0)$ .

### Упражнение

**20.** Разделить отрезок на 6 равных частей и надписать у каждой точки деления отношение, в котором она делит отрезок.

---

\*) При отрицательном  $\lambda$  точка  $B$  лежала бы вне отрезка  $A_1A_2$ , а точка  $P$  — вне отрезка  $P_1P_2$ ; рассматриваемая пропорция всё равно была бы справедливой. Мы не будем рассматривать случай отрицательного  $\lambda$ .

## Задачи

**21.** Вычислить отрезки  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $HI$  и  $JK$  [упражнение 10 (стр. 41)]  
Сравнить результаты вычисления с результатами измерения.

**22.** Определить вид треугольника  $ABC$  (т. е. выяснить, является ли он остроугольным, прямоугольным или тупоугольным):

a)  $A(2, 8)$ ,  $B(-3, 2)$ ,  $C(16, -14)$ ;

b)  $A(4, 2)$ ,  $B(7, 1)$ ,  $C(3, 6)$ ;

c)  $A(7, -4)$ ,  $B(13, 1)$ ,  $C(14, -8)$ .

**23.** Зная расстояние  $AB$ , определить неизвестную координату точки  $A$ :

a)  $A(2, y)$ ,  $B(8, 5)$ ,  $AB = 10$ ;

b)  $A(x, 3)$ ,  $B(7, 9)$ ,  $AB = 7$ ;

c)  $A(x, -5)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $AB = 6$ ;

d)  $A(4, y)$ ,  $B(-3, 5)$ ,  $AB = 6$ .

**24.** Найти центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ :

a)  $A(5, 2)$ ,  $B(-4, 5)$ ,  $C(-2, 1)$ ;

b)  $A(4, 1)$ ,  $B(6, 5)$ ,  $C(2, 3)$ .

**25.** Определить тангенс угла наклона вектора  $\overline{AB}$  к оси  $X$ , зная координаты его начала и конца:

a)  $A(2, -1)$ ,  $B(-2, 2)$ ;

b)  $A(2, 3)$ ,  $B(2, 8)$ .

**26.** Зная координаты начала и конца вектора  $\overline{AB}$ , определить косинус и синус его угла с осью  $X$  и самый угол

a)  $A(1, 5)$ ,  $B(6, -7)$ ;

b)  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 3)$ ;

c)  $A(2, 1)$ ,  $B(2, -3)$ .

**27.** Вектор, наклонённый к оси  $X$  под углом  $150^\circ$ , имеет конец в точке  $(2 - \sqrt{3}, -5)$ ; длина вектора равна 2. Найти его начало.

**28.** Из точки  $A(-3, 1)$  выходит вектор  $\overline{AB}$ , длина которого равна  $\sqrt{2}$ . Найти конец вектора, зная, что этот вектор наклонён к оси  $X$  под углом:

a)  $135^\circ$ ;

b)  $60^\circ$ .

**29.** Найти точку  $B$ , делящую отрезок  $A_1A_2$  в отношении  $\lambda$ :

a)  $A_1(-6, -2)$ ,  $A_2(2, 10)$ ,  $\lambda = 3$ ;

b)  $A_1(-1, 2)$ ,  $A_2(5, 2)$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$ ;

c)  $A_1(3, 5)$ ,  $A_2(-8, 1)$ ,  $\lambda = \frac{2}{7}$ ;

d)  $A_1(3, 5; 2, 7)$ ,  $A_2(-8, 1; 3)$ ,  $\lambda = 4,1$ .

**30.** Точка  $C(0, 2)$  делит отрезок между  $A(-2, 1)$  и  $B$  в отношении  $\frac{1}{5}$ .  
Найти координаты точки  $B$ .

**31.** Найти центр тяжести однородной треугольной пластинки с вершинами:

$$a) A(2, 3), \quad B(-10, -4) \quad \text{и} \quad C(2, -8);$$

$$b) A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2) \quad \text{и} \quad C(x_3, y_3).$$

**32.** Отрезок  $AB$  между точками  $(-9, 5)$  и  $B(11, -3)$  разделён на четыре равные части. Найти координаты всех точек деления.

**33.** На отрезке  $AB$  между точками  $A(2, -4)$  и  $B(5, 11)$  найти точку с ординатой, равной 1.

**34.** Точки  $(-2, 4)$ ,  $(-3, 1)$  и  $(1, 2)$  являются серединами сторон треугольника. Определить координаты его вершин.

**35.** Зная три вершины параллелограмма  $ABCD$

$$A(4, -3), \quad B(-3, -1), \quad C(-1, 3),$$

найти вершину  $D$ , противоположную  $B$ .

**36.** Даны координаты вершин четырёхугольника  $ABCD$ :

$$A(1, 5), \quad B(8, -5), \quad C(-2, -1), \quad D(-4, 3).$$

Найти точку пересечения диагоналей.

**37.** Найти центр тяжести четырёхугольника задачи **36**, рассматриваемого как однородная пластинка.

**38.** Найти центр тяжести системы  $n$  материальных точек  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ , массы которых суть соответственно  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

**39.** Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , зная координаты его вершин:

$$a) A(-2, 1), \quad B(3, -4), \quad C(4, 2);$$

$$b) A(-2, -2), \quad B(4, 2), \quad C(7, 4). \text{ Объяснить результат.}$$

**40.** На оси  $Y$  найти точку, образующую с точками  $(4, 1)$  и  $(-3, 2)$  треугольник, площадь которого равна 12.

**41.** Точки  $A(3, 5)$ ,  $B(2, -6)$  и  $C(x, -3)$  образуют треугольник, площадь которого равна 18. Определить абсциссу точки  $C$ .

**21. Площадь треугольника.** Пусть даны три точки  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$  и требуется определить площадь треугольника  $ABC$ .

Обозначая, как это обычно принято, стороны треугольника буквами  $a_1, a_2, a_3$ , имеем следующее выражение для площади  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{2} a_2 a_3 \cdot \sin A_1. \quad (*)$$

Займёмся, прежде всего, вычислением  $\sin A_1$ . Рассмотрим векторы  $\overrightarrow{A_1 A_2}$  и  $\overrightarrow{A_1 A_3}$ . Согласно правилу цепи для углов [Введение, § 1, формула (7) (стр. 15)]:

$$(X, \overrightarrow{A_1 A_2}) + (\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}) = (X, \overrightarrow{A_1 A_3}),$$

откуда

$$(\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}) = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где

$$\varphi_1 = (X, \overline{A_1 A_2}), \quad \varphi_2 = (X, \overline{A_1 A_3}).$$

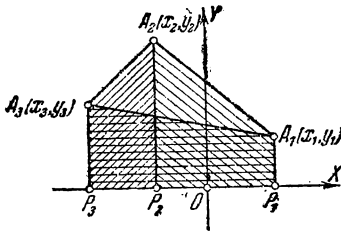
Таким образом

$$\sin (\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}) = \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2.$$

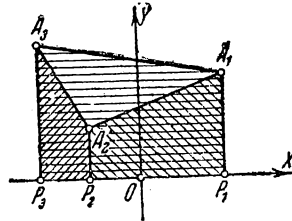
Заменим синусы и косинусы в правой части по формулам (2) § 2 (стр. 44):

$$\sin (\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}) = \frac{y_3 - y_1}{a_2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{a_3} - \frac{x_3 - x_1}{a_2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{a_3}. \quad (**)$$

В этом месте важно отметить следующее. Если вершины треугольника  $A_1, A_2, A_3$  расположены в порядке против часовой стрел-



Черт. 22.  $Q = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$



Черт. 23.

ки (черт. 22), то вращение от вектора  $\overline{A_1 A_2}$  к вектору  $\overline{A_1 A_3}$  происходит против часовой стрелки, т. е. угол  $(\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3})$  положителен. Ясно, что угол  $(\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3})$  есть внутренний угол треугольника, т. е. угол  $A_1$ . Поэтому можно подставить выражение (\*\*) в формулу (\*), и мы получим формулу для площади треугольника. Если же вершины  $A_1, A_2, A_3$  расположены в порядке по часовой стрелке (черт. 23), то угол  $(\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3})$  отрицателен, и его синус отрицателен. Так как в тригонометрии углы треугольника считаются существенно положительными, то

$$\sin A_1 = -\sin (\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}).$$

В первом случае, подставляя (\*\*) в (\*), получим:

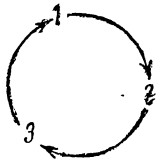
$$Q = \frac{1}{2} [(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)],$$

или, раскрывая скобки, содержащие буквы  $x$  (но не раскрывая

скобок, содержащих буквы  $y$ ), окончательно получим:

$$Q = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \quad (6)$$

Формулу (6) легко запомнить, заметив, что индексы в каждом члене идут в *циклическом порядке* (см. п 14); этот порядок иллюстрируется схемой, помещённой слева:



Каждый следующий член формулы (6) получается из предыдущего *циклической заменой*, т. е. каждый индекс заменяется следующим по вышеприведённой схеме.

Формула (6) может быть представлена в ещё более простом виде:

$$Q = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Разлагая этот определитель по элементам первого столбца, мы убедимся, что эта формула совпадает с формулой (6).

Во втором случае (когда вершины  $A_1, A_2, A_3$  расположены по часовой стрелке) следовало бы подставить в формулу (\*) вместо  $\sin A_1$  выражение (\*\*) с *изменённым знаком*. В этом случае окончательный результат получился бы с другим знаком.

Если же мы условимся во всех случаях (независимо от расположения вершин) пользоваться формулами (1) или (2), то в первом случае эти формулы будут давать нам площадь треугольника, а во втором — *минус площадь* (сама площадь — величина существенно положительная). Итак, впредь буква  $Q$  обозначает не просто площадь треугольника, а площадь, снабжённую знаком плюс или минус, в зависимости от порядка расположения вершин.

Окончательный вывод. При вычислении площади треугольника всегда можно пользоваться формулами (6) или (7). Абсолютная величина результата показывает площадь треугольника, а знак указывает, в каком порядке обхода расположены его вершины (при знаке плюс — против часовой стрелки, при знаке минус — по часовой стрелке).

**Пример.** Вычислить площадь треугольника с вершинами  $A(2, 5)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(-1, 1)$ :

$$Q = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

**Ответ.** Площадь данного треугольника равна 11. Вершины  $A, B, C$  расположены по часовой стрелке.

Рекомендуем читателю иллюстрировать этот результат чертежом.

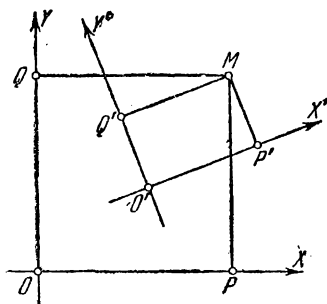


## § 3. Преобразование координат

**22. Формулировка задачи.** Координаты какой-нибудь точки  $M$  зависят от положения этой точки относительно координатных осей. Если мы, оставляя на месте точку  $M$ , перенесём координатные оси, то координаты точки  $M$  изменятся. Мы займёмся следующей задачей: зная координаты какой-нибудь точки в старой системе координат, вычислить её координаты в новой системе, и наоборот, зная координаты какой-нибудь точки в новой системе, вычислить, каковы были её координаты в старой системе. Для решения этой задачи, разумеется, необходимо знать расположение новых осей координат относительно старых.

На черт. 24 изображены две системы координат: старая и новая. Все обозначения, относящиеся к новой системе, мы будем отмечать значком  $'$ , пользуясь теми же буквами, что и в старой. Например, начало координат в старой системе обозначено  $O$ , а в новой —  $O'$  и т. д.

Как определить положение новых осей относительно старых? Чтобы ответить на этот вопрос, посмотрим, как следует двигать старые оси для того, чтобы они совпали с новыми. Это можно осуществить так: 1) перенести начало координат из  $O$  в  $O'$ , не меняя направления осей; тогда система  $XOY$  перейдёт в систему  $X'O'Y'$  [черт. 27 (стр. 55)]; 2) после этого повернуть систему  $X'O'Y'$  около точки  $O'$  на такой угол  $\alpha$ , чтобы ось  $O'X''$  совпала с осью  $O'X'$ ; при этом, очевидно, и ось  $O'Y''$  совпадает с осью  $O'Y'$ .



Черт. 24. Преобразование координат.

Итак, всякое преобразование координат (т. е. переход от одной системы координат к другой) может быть разбито на два преобразования: перенос начала и поворот осей. При переносе начала меняется начало координат и оси переносятся, сохраняя прежнее направление. При повороте осей начало координат остаётся на месте. Можно сначала повернуть оси, а затем перенести начало.

Отсюда ясно, что для определения положения новой системы относительно старой необходимо указать, в какую точку переносится начало, т. е. указать координаты нового начала (разумеется, в старой системе), и на какой угол поворачивается вся система, т. е. указать угол между старой осью абсцисс и новой осью абсцисс (он, очевидно, равен углу между старой осью ординат и новой осью ординат).

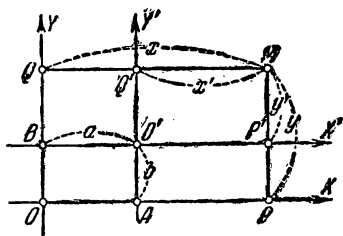
Отсюда ясно, что для определения положения новой системы относительно старой необходимо указать, в какую точку переносится начало, т. е. указать координаты нового начала (разумеется, в старой системе), и на какой угол поворачивается вся система, т. е. указать угол между старой осью абсцисс и новой осью абсцисс (он, очевидно, равен углу между старой осью ординат и новой осью ординат).

После всего сказанного можно окончательно сформулировать задачу преобразования координат так:

Точка  $M$  имеет координаты  $(x, y)$ . Если перенести начало координат в точку  $O'(a, b)$  и повернуть систему на угол  $\alpha$ , то точка  $M$  будет иметь координаты  $(x', y')$ . Требуется: 1) зная новые координаты, вычислить старые, 2) зная старые координаты, вычислить новые. В первой задаче данные числа:  $x', y', a, b$  и  $\alpha$ , а искомые:  $x$  и  $y$ . Во второй задаче данные:  $x, y, a, b$  и  $\alpha$ , а искомые:  $x'$  и  $y'$ .

Мы рассмотрим сначала преобразование координат, когда совершается только перенос начала; потом — когда совершается только поворот осей, и, наконец, общее преобразование, когда совершаются и перенос начала, и поворот осей.

**23. Перенос начала.** Пусть начало перенесено из точки  $O$  в точку  $O'(a, b)$ , направления же осей не изменились (черт. 25). Пусть  $P$  есть проекция точки  $M$  на ось  $X$ , а  $P'$  — проекция  $M$  на ось  $X'$ . Обозначим через  $A$  проекцию  $O'$  на ось  $X$  и через  $B$  — проекцию  $O'$  на ось  $Y$ . Имеем:



$$x = OP.$$

Разбивая отрезок  $OP$  при помощи точки  $A$ , имеем:

$$x = OA + AP = OA + O'P' = a + x'.$$

Черт. 25. 
$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases}$$

Аналогично 
$$y = OQ = OB + BQ = OB + O'Q' = b + y'.$$

формулы выражают старые координаты через новые. Определяя из этих равенств  $x'$  и  $y'$ , получим:

$$x' = x - a,$$

$$y' = y - b.$$

Итак, при переносе начала формулы преобразования координат таковы:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

т. е. старая координата равна новой плюс координата нового начала;

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - a, \\ y' &= y - b, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

т. е. новая координата равна старой минус координата нового начала.

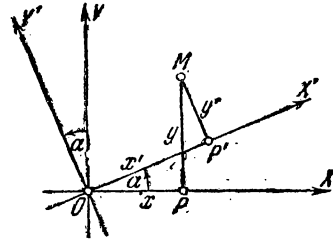
**24. Поворот осей.** На черт. 26 оси координат повернуты на угол  $\alpha$ , начало координат осталось прежнее. Точка  $M$  имеет по старой системе координаты  $x = OP$ ,  $y = PM$ , а по новой  $x' = OP'$ ,  $y' = P'M$ .

Ломаные линии  $OPM$  и  $OP'M$  имеют общее начало и общий конец; следовательно, при проектировании этих ломаных на какую-нибудь ось мы получим одинаковые результаты. Спроектируем эти ломаные на старую ось абсцисс:

$$\text{пр}_X OPM = \text{пр}_X OP'M.$$

Раскроем это равенство, рассматривая звенья ломаных как направленные отрезки (а не как векторы):

$$\begin{aligned} \text{пр}_X OP + \text{пр}_X PM &= \\ &= \text{пр}_X OP' + \text{пр}_X P'M. \quad (*) \end{aligned}$$



Черт. 26. 
$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Для дальнейшего вычисления членов равенства (\*) установим следующие факты:

- 1) направленный отрезок  $OP$  принадлежит оси  $X$ ,
- 2) направленный отрезок  $PM$  перпендикулярен к оси  $X$ ,
- 3) направленный отрезок  $OP'$  принадлежит оси  $X'$ , образующей с осью  $X$  угол  $\alpha$ ),
- 4) направленный отрезок  $P'M$  принадлежит оси  $Y'$  (потому что он параллелен ей), образующей с осью  $X$  угол  $90^\circ + \alpha$  \*\*).

Применяя формулу для проекции направленного отрезка на ось [Введение, § 1, формула (10) (стр. 18)], получим:

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos (90^\circ + \alpha) = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha.$$

Итак, мы выразили  $x$  через новые координаты. Чтобы выразить  $y$  через новые координаты, надо спроектировать те же две ломаные на ось  $Y$ . Предварительно установим общее правило, позволяющее определить угол какой-нибудь оси  $l$  с осью  $Y$ , если известен её

\*) Но нельзя утверждать, что вектор  $\overrightarrow{OP'}$  образует с осью  $X$  угол  $\alpha$ ; это верно лишь при положительном  $x'$ . Если же  $x'$  отрицательно, то вектор  $\overrightarrow{OP'}$  образует с осью  $X$  угол  $180^\circ + \alpha$ .

\*\*) Это вытекает из правила цепи для углов [Введение, п 4 (стр. 15)]:

$$(X, Y) + (Y, Y') = (X, Y'),$$

т. е.

$$90^\circ + \alpha = (X, Y').$$

угол с осью  $X$ . По правилу цепи имеем:

$$(X, l) + (l, Y) = (X, Y) = 90^\circ,$$

откуда

$$(l, Y) = 90^\circ - (X, l),$$

или, принимая во внимание формулу (6) § 1 Введения (стр. 15),

$$(Y, l) = (X, l) - 90^\circ. \quad (3)$$

Формула (3) выражает важное правило, часто избавляющее нас от необходимости обращаться при подсчёте углов к чертежу: *угол наклона любой оси к оси  $Y$  равен углу наклона этой оси к оси  $X$  минус прямой угол*. Это правило относится также к углам наклона вектора к осям  $X$  и  $Y$ .

Теперь ясно, что оси  $X'$  и  $Y'$  наклонены к оси  $Y$  соответственно под углами  $\alpha - 90^\circ$  и  $\alpha$ . Имеем:

$$\text{пр}_Y OPM = \text{пр}_Y OP'M,$$

$$\text{пр}_Y OP + \text{пр}_Y PM = \text{пр}_Y OP' + \text{пр}_Y P'M,$$

$$y = x \cos(\alpha - 90^\circ) + y \cos \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Мы получили пару формул, выражающих старые координаты через новые:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Надо получить ещё пару формул, выражающих новые координаты через старые. Это можно сделать разными способами.

Первый способ. Возьмём формулы (4) и определим из них  $x'$  и  $y'$ :

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{\begin{vmatrix} x & -\sin \alpha \\ y & \cos \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}} = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha & x \\ \sin \alpha & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}} = \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Второй способ. Следует проектировать ломаные  $OPM$  и  $OP'M$  на новые оси. При этом новые координаты при проектировании не искажутся и выразятся через старые. Предоставляем это читателю.

Третий способ. Если для перехода от старой системы к новой надо повернуть старые оси на угол  $\alpha$ , то для обратного пере-

хода надо повернуть новые оси на угол  $-\alpha$ . Значит, можно взять формулы, выражающие старые координаты через новые, и написать вместо старых координат  $x'$  и  $y'$ , вместо новых  $x$  и  $y$ , а вместо угла поворота  $-\alpha$ :

$$x' = x \cos(-\alpha) - y \sin(-\alpha),$$

$$y' = x \sin(-\alpha) + y \cos(-\alpha),$$

или, так как  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ , а  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ :

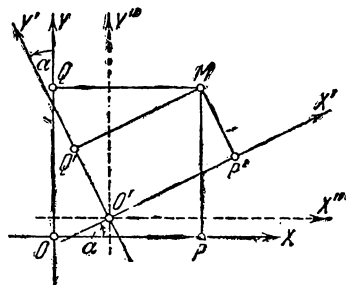
$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

**25. Общее преобразование координат.** Как мы видели в п 22, общее преобразование координат может быть произведено так. Сначала начало координат переносим в точку  $O'(a, b)$ , не изменяя направления осей. Тогда старые оси  $X$  и  $Y$  перейдут в положение  $X''$  и  $Y''$  (черт. 27). Затем повернём оси на угол  $\alpha$ . Тогда оси  $X''$  и  $Y''$  перейдут в положение  $X'$  и  $Y'$ .

При переходе от старой системы к промежуточной воспользуемся формулами для переноса начала, выражающими старые координаты через новые (новыми в данном случае являются промежуточные):

$$\left. \begin{aligned} x &= x'' + a, \\ y &= y'' + b. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$



Черт. 27.

Теперь переходим от промежуточных координат к новым. Воспользуемся формулами для поворота осей, выражающими старые координаты через новые (в данном случае промежуточные координаты являются старыми):

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y'' &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

Подставляя в формулы (\*\*) вместо  $x''$  и  $y''$  их выражения из (\*\*\*), получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Формулы (6) выражают старые координаты через новые при общем преобразовании координат. Чтобы выразить новые через

старые, надо определить из этих формул  $x'$  и  $y'$ . Напишем неизвестные члены (т. е. содержащие  $x'$  и  $y'$ ) слева, а известные справа:

$$x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = x - a,$$

$$x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = y - b,$$

и найдём  $x'$  и  $y'$ :

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{\begin{vmatrix} x-a & -\sin \alpha \\ y-b & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}} = \frac{(x-a) \cos \alpha + (y-b) \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= (x-a) \cos \alpha + (y-b) \sin \alpha, \\ y' &= \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha & x-a \\ \sin \alpha & y-b \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}} = \frac{(y-b) \cos \alpha - (x-a) \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \\ &= -(x-a) \sin \alpha + (y-b) \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### Задачи

**42.** Написать формулы преобразования координат, если:

a) начало перенесено в точку (3, 2);

b) » » » » (0, -5);

c) оси повёрнуты на  $45^\circ$ ;

d) » » »  $-30^\circ$ ;

e) » » »  $90^\circ$ ;

f) » » »  $180^\circ$ ;

g) начало перенесено в точку (-3, 2) и оси повёрнуты на  $60^\circ$ .

**43.** а) Какие координаты будет иметь точка (7, 1) после переноса начала в точку (2, 3) и поворота осей на  $45^\circ$ ?

б) Какие координаты будет иметь точка (6, -2) после поворота осей на острый угол  $\alpha$ , для которого  $\sin \alpha = 0,1 \sqrt{10}$ ?

**44.** а) В какую точку следует перенести начало (не поворачивая осей), чтобы точка A (3, 8) имела координаты (10, -2)?

б) На какой угол следует повернуть оси (не перенося начала), чтобы точка A (-2, 3) оказалась на оси ординат?

## ГЛАВА II

### ФУНКЦИИ

Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием функции отчасти из курса средней школы, отчасти из курса математического анализа. Для систематизации мы приводим здесь основные положения, на которые будем опираться в дальнейшем.

#### § 1. Основные понятия и обозначения

**26. Понятие о функции.** Во многих задачах встречается такое положение, что некоторые величины, входящие в эти задачи, могут, в силу условий задачи, изменяться, т. е. принимать различные числовые значения; такие величины называются *переменными*. Величины же, которые в данной задаче имеют фиксированное числовое значение, называются *постоянными*.

Рассмотрим, например, задачу: вычислить площадь квадрата со стороной  $a$ . Обозначая эту площадь через  $Q$ , имеем:  $Q = a^2$ . Эта формула справедлива для всякого квадрата. Сторону  $a$  здесь можно считать переменной величиной, могущей принимать всевозможные положительные значения. Разумеется, площадь  $Q$  тоже является переменной величиной.

Эти две переменные величины связаны между собой: если одной из них приписать произвольное значение, то этому значению соответствует вполне определённое, не зависящее от нас значение другой.

*Зависимость, связывающая переменные величины, называется функциональной зависимостью.* Из двух переменных величин, связанных функциональной зависимостью, одна называется *независимой переменной* (именно — та, которой мы придаём значения по своему произволу), а другая — *зависимой переменной*. Независимая переменная иначе называется *аргументом*, а зависимая переменная — *функцией*. В рассмотренной задаче можно любую из величин  $a$  и  $Q$  принять за аргумент, тогда другая будет являться функцией.

Рассмотрим другой пример, весьма похожий на первый. Если стороны прямоугольника суть  $a$  и  $b$ , то его площадь  $Q = ab$ . Здесь мы можем произвольно задать значения  $a$  и  $b$ , тогда площадь определится. Таким образом, мы имеем пример функции, зависящей от двух аргументов. Можно привести примеры функций, зависящих от трёх, четырёх и т. д. аргументов.

**27. Задание функции формулой.** Теперь мы рассмотрим вопрос о том, как можно «задать» или «определить» функцию. *Функция считается заданной или определённой, если указан способ, при помощи которого можно, зная значение аргумента, найти значение функции.*

Возьмём какую-нибудь формулу, где в левой части стоит  $y$ , а в правой — выражение, содержащее  $x$ , например,

$$y = \frac{2x^2 + 3}{x^3 + x - 1}. \quad (*)$$

Если  $x$  и  $y$  связаны этой формулой, то мы не можем произвольно придавать значения тому и другому одновременно. Мы можем придать произвольное значение  $x$ , но тогда  $y$  мы должны придать то значение, которое укажет нам формула, поэтому, *если дана формула, выражающая  $y$  через  $x$ , то тем самым величина  $y$  определена как функция  $x$ .*

Вместо  $y$  и  $x$  могут фигурировать другие буквы, например,

$$v = 3a - 5, \quad (**)$$

$$q = \frac{2s^2 + 3}{s^3 + s - 1}. \quad (***)$$

Обратим внимание на то, что формулы (\*) и (\*\*\*) определяют одну и ту же функциональную зависимость. Хотя аргументом в формуле (\*) служит  $x$ , а в формуле (\*\*\*)  $s$ , но действия, которые надо проделать над  $x$ , чтобы получить  $y$ , и действия, которые надо проделать над  $s$ , чтобы получить  $q$ , — одни и те же. Другими словами: зависимость между  $x$  и  $y$  — та же самая, что и зависимость между  $s$  и  $q$ .

Формула

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2x + 3y - 1}$$

определяет функцию двух переменных. Легко придумать формулы, определяющие функции трёх, четырёх и более переменных.

**28. Обозначение функций.** Чтобы выразить тот факт, что  $y$  есть функция от  $x$ , часто употребляют такую запись:

$$y = f(x). \quad (1)$$

Эта запись равносильна фразе « $y$  есть функция  $x$ ». Читается она так: «игрек равняется эф от икс».

При такой записи видно, что  $y$  есть функция от  $x$ , но не видно, *какая именно* функция. Поэтому такой записью пользуются в тех случаях, когда нам важно показать, что  $y$  есть функция от  $x$ , но *какая именно* — в данном вопросе безразлично, т. е. когда ведётся рассуждение, справедливое для всех функций.



Буква  $f$  не обозначает какой-нибудь величины, а обозначает действия, которые надо произвести над  $x$ , чтобы получить  $y$ . Например, если

$$y = \sqrt[3]{5x^2 + 2},$$

то над  $x$  производятся четыре действия в таком порядке: 1)  $x$  возводится в квадрат, 2) полученное число умножается на 5, 3) к полученному (после первых двух действий) числу прибавляется 2, 4) из полученного (после первых трёх действий) числа извлекается кубический корень. Если обозначить эту функцию

$$y = f(x),$$

то в данном случае

$$f(x) = \sqrt[3]{5x^2 + 2}.$$

Буква  $f$  здесь обозначает следующие действия: возведение в квадрат, умножение на 5, прибавление 2 и извлечение кубического корня.

Вместо буквы  $f$  для обозначения функциональной зависимости можно пользоваться любыми другими буквами. Чаще всего употребляются латинские буквы  $f$  и  $F$  и греческие буквы  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  (строчные) и  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\chi$  (прописные). Иногда употребляют одну и ту же букву с разными индексами, например  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  и т. д.

В одной и той же задаче различные функциональные зависимости не следует обозначать одинаково.

Рассмотрим пример. Пусть даны функции

$$y = 6x^2 - 3x + 2,$$

$$v = \sqrt[3]{u^3 - 2},$$

$$y = 3 \cos^2 x + 5,$$

$$z = 6t^2 - 3t + 2,$$

$$x = \sqrt[3]{y^3 - 2}.$$

Можно обозначить их так:

$$y = f(x),$$

$$v = \varphi(u),$$

$$y = \psi(x),$$

$$z = f(t),$$

$$x = \varphi(y).$$

В первом и в четвёртом случаях употреблена одна и та же буква для обозначения функциональной зависимости, равно как во втором и в пятом случаях.

Аналогичное обозначение применимо и к функциям нескольких переменных. Запись

$$u = f(x, y, z)$$

обозначает, что  $u$  есть функция трёх аргументов:  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Пусть дана функция  $f(x)$ . Можно придать  $x$  какое-нибудь значение, например, положить  $x=2$ . Тогда функция примет некоторое числовое значение, которое мы будем обозначать  $f(2)$ . Значит,  $f(2)$  (читается «эф от двух») есть значение функции  $f(x)$ , где вместо  $x$  подставлено 2.

Пример.  $f(x) = x^3 - 2 \lg x + 1$  \*). Найти  $f(1)$ .

Решение.  $f(1) = 1^3 - 2 \lg 1 + 1 = 2$ .

**29. Табличное задание функции.** Мы видели, что площадь квадрата есть функция его стороны и что эта функция может быть задана формулой  $Q = a^2$ . Придавая  $a$  различные значения и вычисляя соответственные значения  $Q$ , получим следующую таблицу:

$a$	$Q$	$a$	$Q$
0	0	6	36
1	1	7	49
2	4	8	64
3	9	9	81
4	16	10	100
5	25		

Эта таблица составлена нами на основании формулы  $Q = a^2$ . Однако она и сама по себе определяет функцию, если даже формула, по которой она составлена, неизвестна. Если, например,  $a=3$ , то по таблице находим соответствующее значение функции:  $Q=9$ .

**30. Область существования функции.** Если  $y = f(x)$ , то мы можем придавать  $x$  произвольные значения. Однако не всегда аргумент может принимать все значения. Иногда  $x$  может принимать лишь некоторые значения, хотя и в бесконечном числе.

Множество всех значений, которые способен принимать аргумент, называется областью существования функции (при других

---

\*) Знаком  $\lg$  без указания основания здесь и в дальнейшем обозначается десятичный логарифм;  $\lg x = \log_{10} x$ .

значениях аргумента функция *не существует*, так как над этими значениями нельзя произвести действий, входящих в данную функцию).

Пример 1. Какова область существования функции

$$y = \sqrt{4 - x^2}?$$

Ответ.  $-2 \leq x \leq 2$ .

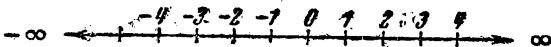
Пример 2. Какова область существования функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}?$$

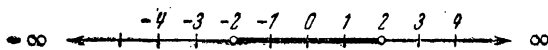
Ответ.  $-2 < x < 2$ .

Для большей наглядности можно изобразить область существования функции на числовой оси. Числовая ось изображена на

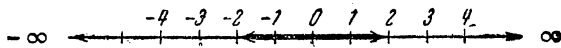
черт. 28. Надо подразумевать, что кроме целых чисел, отмеченных на чертеже, на ней нанесены и находящиеся между ними дробные и иррациональные числа. Стрелки на концах



Черт. 28. Числовая ось.



Черт. 29. Область существования функции  $\sqrt{4 - x^2}$ .



Черт. 30. Область существования функции  $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ .

прямой. Чтобы показать область существования какой-нибудь функции, отмечают эту область на числовой оси более толстой чертой, чем остальная прямая. При этом крайние точки отмечают кружками, если они принадлежат к области существования, и стрелками — если не принадлежат. Черт. 29 изображает область существования функции  $\sqrt{4 - x^2}$ , а черт. 30 — функции  $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ .

Пример 3. Какова область существования функции

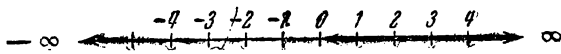
$$y = \lg x?$$

Ответ. Все положительные числа. Отрицательные числа, как известно, логарифмов не имеют. Нуль тоже не имеет логарифма. Записать область существования  $\lg x$  можно так:

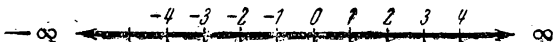
$$0 < x < \infty *).$$

\*) Перед  $\infty$  (или после  $-\infty$ ) никогда не ставится знак  $\leq$ , а обязательно  $<$ .

Запись  $x < \infty$  обозначает лишь то, что  $x$  может принимать сколь угодно большие значения. На числовой оси эта область изображена на черт. 31.



Черт. 31. Область существования функции  $\lg x$ .



Черт. 32. Область существования функции  $\sin x$ .

Пример 4. Какова область существования функции

$$y = \sin x.$$

Ответ. Все числа. Запись:  $-\infty < x < \infty$  (черт. 32).

### Задачи

45.  $f(x) = \sin \lg x$ . Найти

a)  $f(1)$ ;

b)  $f(2)$ .

46.  $F(x, y) = (x^2 - y^2) \cdot \sin(xy)$ . Доказать, что

a)  $F(x, y) = -F(y, x)$ ;

b)  $F(x, x) = 0$ .

47. Перечислить в последовательном порядке действия, входящие в функцию

a)  $f(x) = 2x^2 - 3$ ;

f)  $f(t) = \sin 2t$ ;

b)  $f(x) = (2x)^2 - 3$ ;

g)  $\varphi(x) = \lg \lg(2x - 3)$ ;

c)  $f(x) = (2x - 3)^2$ ;

h)  $\varphi(x) = \lg \lg(2x - 3)$ ;

d)  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$ ;

i)  $\varphi(u) = 3^{\cos u}$ ;

j)  $\varphi(v) = 1 + v - v^2$ ;

e)  $f(t) = 2 \sin t$ ;

k)  $F(w) = \frac{\cos w}{1 + w^2}$ .

48. Записать при помощи формул функции, состоящие из следующих действий:

a) 1) из  $x$  вычитается 5, 2) результат возводится в куб;

b) 1)  $x$  возводится в куб, 2) из результата вычитается 5;

c) 1) из  $x$  вычитается 1, 2) результат возводится в квадрат; 3) к  $x$  прибавляется 2, 4) из результата 3-го действия извлекается квадратный корень;

5) к результату 2-го действия прибавляется результат 4-го действия;

d) 1)  $x$  возводится в квадрат, 2) от результата берётся синус;

e) 1) от  $x$  берётся синус, 2) результат возводится в квадрат;

f) 1)  $x$  возводится в квадрат, 2) из 1 вычитается результат 1-го действия, 3) к 1 прибавляется результат 1-го действия, 4) результат 2-го действия делится на результат 4-го действия.

**49.** Записать и обозначить графически области существования следующих функций:

- |                       |                               |   |
|-----------------------|-------------------------------|---|
| a) $2x^2 - 3$ ;       | j) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ; | r) $\sqrt{-x^2 - 1}$ ;                  |
| b) $\sqrt{x}$ ;       |                               | s) $\frac{1}{x}$ ;                      |
| c) $\sqrt{-x}$ ;      | k) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ; |   |
| d) $\sqrt{x-5}$ ;     | l) $\sqrt{x^2 - 8x + 15}$ ;   | t) $\frac{1}{x^2 - 1}$ ;                |
| e) $\sqrt{x^2 - 9}$ ; | m) $\sqrt{3x - x^2 - 2}$ ;    | u) $\arcsin x$ ;                        |
| f) $\sqrt{x^2 + 9}$ ; | n) $\sqrt{x^2 - 2x + 5}$ ;    | v) $\arcsin 5x$ ;                       |
| g) $\sqrt[3]{x}$ ;    | o) $\sqrt{14x - x^2 - 50}$ ;  | w) $\operatorname{arcsec} x$ ;          |
| h) $\lg(x-1)$ ;       | p) $\sqrt{\sin x}$ ;          | x) $\operatorname{arcsec} \frac{1}{2}x$ |
| i) $\lg \sin x$ ;     | q) $\sqrt{-x^2}$ ;            | y) $2^x$ .                              |

## § 2. Графическое изображение функций

**31. График функции.** Если  $y = f(x)$ , то каждому значению  $x$  \*) соответствует определённое значение  $y$ .

Каждой паре чисел  $(x, y)$  соответствует определённая точка на плоскости. Если  $x$  и  $y$  меняются, то и соответствующая им точка меняется, т. е. движется по плоскости \*\*). Но движущаяся точка описывает, как известно, линию. Следовательно, *всякой функции  $y = f(x)$  соответствует некоторая линия на плоскости*; она называется *графиком функции*.

Пример. Построить график функции

$$y = x^2 - 10x + 24.$$

Область существования этой функции такова:

$$-\infty < x < \infty.$$

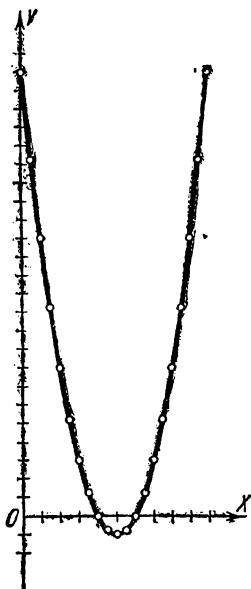
Следовательно, мы можем придавать  $x$  любые значения. Придавая, например,  $x$  значения от 0 до 10 через  $\frac{1}{2}$ , получим таблицу, приведённую на стр. 64.

\*) Принадлежащему к области существования. В дальнейшем мы для краткости не будем оговаривать этого.

\*\*) Если  $x$  и  $y$  меняются непрерывно, т. е. не пропуская промежуточных значений, то и соответствующая точка движется непрерывно.

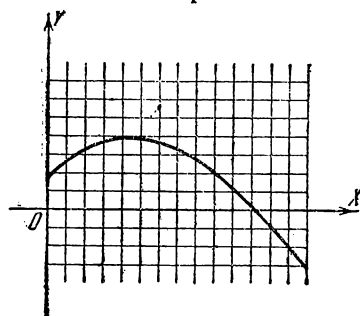
$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
0	24	$2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	8	8
$\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	3	3	6	0	$8\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$
1	15	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	9	15
$1\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	4	0	7	3	$9\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$
2	8	$4\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	10	24
		5	-1				

Строим точки, координаты которых даны в этой таблице, и соединяем их плавной линией (черт. 33). Эта кривая называется *параболой*; впоследствии мы изучим её подробно.



Черт. 33.  
 $y = x^2 - 10x + 24$ .

В этом примере мы, *исходя из формулы*, построили график функции. Но график является и самостоятельным способом задания функции. Так, линия, проведённая на черт. 34, определяет некоторую функцию. Пользуясь чертежом, можно составить для этой функции таблицу. Из чертежа видно (приблизительно), что при  $x=0$   $y=1,6$ , при  $x=1$   $y=2,8$  и т. д. Пока  $x$  возрастает до 4,  $y$



Черт. 34.

тоже возрастает, при дальнейшем возрастании  $x$   $y$  убывает.

**32. Задание функций в неявной форме.** Мы знаем, что если дано уравнение с двумя неизвестными, то одному из них можно

придавать произвольные значения. Но, придав одному неизвестному какое-нибудь значение, мы не можем другому неизвестному тоже придать произвольное значение, а обязаны придать ему то значение, которое получится из данного уравнения. Таким образом уравнение с двумя неизвестными определяет одно неизвестное как функцию другого.

При изучении алгебры мы привыкли называть величины  $x$  и  $y$  неизвестными. Задача, которую мы ставили при решении уравнений, заключалась в том, чтобы эти неизвестные найти. Теперь мы изучаем уравнения с другой точки зрения: мы пользуемся уравнением с двумя неизвестными не для того, чтобы решить его, т. е. найти для  $x$  и  $y$  определённые числовые значения (для этого надо было бы иметь два уравнения), а для того, чтобы при помощи его определить  $y$  как функцию  $x$  (или наоборот). В алгебре, когда мы имеем систему уравнений, например,

$$2x + 5y - 20 = 0, \quad 3x - y + 38 = 0,$$

то мы считаем, что  $x$  и  $y$  — постоянные числа, хотя, пока мы ещё не решили этой системы, они нам не известны. Теперь же, когда мы имеем одно уравнение

$$2x + 5y - 20 = 0, \quad (*)$$

мы смотрим на него с иной точки зрения: оно даёт нам связь (функциональную зависимость) между величинами  $x$  и  $y$ , которые могут изменяться. Поэтому  $x$  и  $y$  целесообразно называть не неизвестными, а переменными, а самое уравнение — уравнением с двумя переменными. Такой терминологии мы и будем держаться в дальнейшем.

Решим уравнение (\*) относительно  $y$ :

$$y = \frac{20 - 2x}{5}. \quad (**)$$

Ясно, что равенства (\*) и (\*\*) определяют *одну и ту же* функцию [мы имеем в виду  $y$  как функцию от  $x$ ], но равенство (\*) определяет её в так называемой *неявной* форме, а равенство (\*\*) — в *явной*.

Вообще функция называется выраженной в явной форме (короче: явной функцией), если она непосредственно выражена через аргумент. В общем виде явная функция может быть записана так:

$$y = f(x). \quad (1)$$

Функция называется неявной, если она не выражена непосредственно через аргумент, но дано уравнение, связывающее её с аргументом. Если в этом уравнении перенести все члены влево, то справа останется нуль. Следовательно, неявную функцию в общем виде можно записать так:

$$F(x, y) = 0, \quad (2)$$

где  $F(x, y)$ , как читателю уже известно, обозначает некоторое выражение, содержащее  $x$  и  $y$ .

Неявную функцию можно сделать явной. Для этого надо решить уравнение (2) относительно  $y$ . Теоретически это всегда возможно сделать\*), но практически мы не всегда сумеем эту возможность осуществить. Например, для того чтобы выразить в явном виде  $y$  как функцию  $x$  из уравнения

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0,$$

надо решить уравнение третьей степени, чего читатель, вероятно, не умеет делать.

Так как уравнение с двумя переменными определяет некоторую функцию, то ему соответствует, или, как говорят, его изображает, некоторая линия (график этой функции).

**33. Однозначные и многозначные функции.** Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Выражая из него  $y$  в явном виде, получим:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Таким образом, в этом примере каждому значению аргумента соответствуют два различных значения функции.

Если каждому значению аргумента соответствует одно значение функции, то функция называется *однозначной*; если же каждому значению аргумента соответствует несколько значений функции, то функция называется *многозначной*. Многозначные функции разделяются на *двузначные*, *трёхзначные* и т. д.

Кривая, изображающая однозначную функцию, должна отличаться той особенностью, что всякий перпендикуляр к оси  $X$  пересекает её один раз\*\*) (почему?). Если функция двузначна, то всякий перпендикуляр к оси  $X$  пересекает кривую два раза (почему?) и т. д. Например, кривая черт. 33 изображает однозначную функцию, а кривая черт. 36 (стр. 70) — двузначную функцию.

**34. Задание функции в параметрической форме.** Для задания функциональной зависимости между двумя переменными  $x$  и  $y$  можно, вместо того чтобы задавать уравнение, непосредственно связывающее  $x$  и  $y$ , выразить каждое из этих переменных через некоторое третье переменное.

---

\*) Кроме некоторых исключительных случаев, которые мы здесь игнорируем.

\*\*) Разумеется, если он восставлен в точке, принадлежащей к области существования нашей функции. В противном случае он не пересечёт кривую вовсе.



Возьмём два уравнения, из которых одно выражает  $x$ , а другое  $y$  в функции некоторого третьего переменного  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения (3) связывают между собой  $x$  и  $y$ , т. е. определяют любую из этих величин (например  $y$ ) как функцию другой. В самом деле, первое уравнение связывает  $x$  с  $t$ , а второе  $y$  с  $t$ . Таким образом,  $x$  и  $y$  оказываются связанными друг с другом не непосредственно, а через посредство  $t$ . Этим рассуждением можно придать более точную форму, как будет сейчас показано.

Чтобы выяснить, действительно ли уравнения (3) определяют  $y$  как функцию  $x$ , надо выяснить, можно ли на основании этих уравнений определить эту функцию каким-либо из уже известных нам способов, а именно:

1. Можно ли на основании уравнений (3) получить формулу, непосредственно связывающую  $x$  и  $y$ ?

2. Можно ли на основании уравнений (3) составить таблицу, где в одной графе стояли бы значения  $x$ , а в другой — соответствующие значения  $y$ ?

3. Можно ли на основании уравнений (3) построить линию, изображающую функциональную зависимость между  $x$  и  $y$ ?

Из двух уравнений можно исключить одно переменное. Если мы из двух уравнений (3) исключим  $t$ , то мы получим одно уравнение, связывающее  $x$  и  $y$ . Тем самым мы пришли к утвердительному ответу на первый вопрос.

Рассмотрим пример. Пусть:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2t + 3, \\ y &= 1 - t^2. \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

Чтобы исключить из этих уравнений  $t$ , проще всего поступить так. Определяем из первого уравнения  $t$  (т. е. выражаем  $t$  через  $x$ ):

$$t = \frac{x-3}{2}.$$

Найденное значение  $t$  подставляем во второе уравнение

$$y = 1 - \left( \frac{x-3}{2} \right)^2. \quad (†)$$

Мы получили формулу, выражающую  $y$  через  $x$ .

Из утвердительного ответа на первый вопрос вытекают утвердительные ответы на второй и третий вопросы. Если даны уравнения (3), то из них можно, как мы только что видели, выразить  $y$  через  $x$ , после чего можно в полученную формулу подставлять произвольные значения  $x$  и вычислять соответствующие значения  $y$ ; таким образом, мы получим таблицу. Получив таблицу, легко построить линию,

Обратим теперь внимание читателя на следующее важное обстоятельство. Для того чтобы построить таблицу, нет надобности сначала исключать  $t$  из уравнений (3), а это можно сделать непосредственно на основании уравнений (3). Для этого надо придать значения  $t$ . Каждому значению  $t$  соответствует значение  $x$  и значение  $y$ , которые и являются соответствующими друг другу.

Рассмотрим, например, уравнения (\*\*\*). Придаём  $t$  значения 0, 1, 2, ... и вычисляем соответствующие значения  $x$  и  $y$ .

$t$	$x$	$y$
0	3	1
1	5	0
2	7	— 3
3	9	— 8
4	11	— 15
5	13	— 24

Первую графу можно потом отбросить: она является вспомогательной; нас интересует лишь связь между  $x$  и  $y$ .

Пример. Построить линию, определяемую уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t. \end{aligned} \right\} \quad (††)$$

Будем придавать  $t$  значения от 0 до  $2\pi \approx 6,28$ , так как при дальнейшем изменении  $t$  значения  $x$  и  $y$  будут повторяться.

Принимая интервал между значениями  $t$  за 0,3, получим\*):

$t$	$x$	$y$	$t$	$x$	$y$	$t$	$x$	$y$
0,0	1,00	0,00	2,1	— 0,50	0,86	4,2	— 0,49	— 0,87
0,3	0,96	0,30	2,4	— 0,74	0,68	4,5	— 0,21	— 0,98
0,6	0,83	0,56	2,7	— 0,90	0,43	4,8	0,09	— 1,00
0,9	0,62	0,78	3,0	— 0,99	0,14	5,1	0,38	— 0,93
1,2	0,36	0,93	3,3	— 0,99	— 0,16	5,4	0,63	— 0,77
1,5	0,07	1,00	3,6	— 0,90	— 0,44	5,7	0,83	— 0,55
1,8	— 0,23	0,97	3,9	— 0,73	— 0,69	6,0	0,96	— 0,28
						6,3	1,00	0,02

Наносим полученные точки на чертёж, принимая за единицу масштаба 10 клеток (черт. 35). Докажем, что они располагаются

\*) См. И. Н. Бронштейн и К. А. Семендяев «Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов», М.—Л., 1945, тригонометрическая таблица на стр. 64.

на окружности с центром в начале радиуса 1. Если взять на этой окружности любую точку  $M$  и обозначить через  $t$  угол наклона вектора  $\overline{OM}$  к оси  $X$

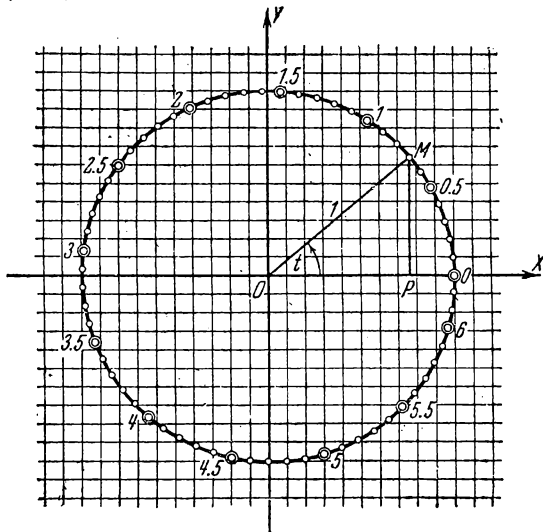
$$t = (X, \overline{OM}),$$

то координаты точки  $M$  выразятся так [гл. I, § 1, формула (1) (стр. 40) и гл. I, § 3, формула (3) (стр. 54)]:

$$x = \text{пр}_X \overline{OM} = OM \cdot \cos(X, \overline{OM}) = \cos t,$$

$$y = \text{пр}_Y \overline{OM} = OM \cdot \cos(Y, \overline{OM}) = \cos(90^\circ - t) = \sin t.$$

Эти формулы совпадают с формулами (††). Следовательно, уравнения можно толковать следующим образом. Радиус-вектор единичной длины вращается; конец его описывает окружность. Если  $t$  есть угол наклона этого радиуса-вектора к оси  $X$  (этот угол, разумеется, переменный), а  $x$  и  $y$  — координаты конца этого радиуса-вектора (тоже переменные), то уравнения (††) выражают эти координаты через  $t$ . Можно около построенных точек отметить соответствующие значения  $t$  (черт. 35); следовательно, пометка, стоящая около какой-либо точки на черт. 35, показывает угол, который образует с осью  $X$  радиус-вектор этой точки.



Черт. 35.  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ .

Если бы мы хотели исключить из уравнений (††)  $t$ , то следовало бы возвести оба уравнения в квадрат:

$$x^2 = \cos^2 t,$$

$$y^2 = \sin^2 t,$$

и сложить их:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Последнее уравнение тоже имеет простой геометрический смысл. Если точка  $M$  движется по окружности, то  $x$  и  $y$  изменяются, но

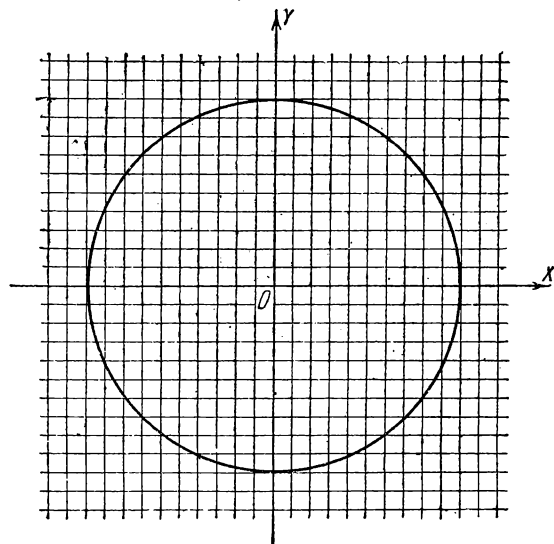
в любой момент по теореме Пифагора

$$OP^2 + PM^2 = OM^2,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Задание функции при помощи двух уравнений типа (3) называется *заданием функции в параметрической форме*. Переменная  $t$



Черт. 36.  $x^2 + y^2 = 1$ .

называется *параметром*. Она имеет постоянное значение для каждой точки кривой, т. е. для каждой пары значений  $x, y$ . Уравнения (3) определяют  $x$  и  $y$  в функции параметра  $t$ .

Заметим, что задание кривой или функции в параметрической форме

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t)$$

не вполне эквивалентно заданию её одним уравнением  $y = f(x)$  или  $F(x, y) = 0$ . Параметрическая форма даёт нам нечто боль-

шее, чем уравнение между  $x$  и  $y$ : она позволяет не только вычертить кривую, но указывает также значение параметра  $t$ , соответствующее каждой точке кривой.

Например, как мы видели, уравнения

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

изображаются окружностью, около точек которой надписаны значения параметра  $t$  [обозначающего в данном случае угол наклона радиуса-вектора к оси  $X$  (черт. 35)]. Уравнение же, которое получится после исключения  $t$ ,

$$x^2 + y^2 = 1$$

изображается той же окружностью, но *без пометок* значений  $t$  (черт. 36). Вообще параметрическая форма даёт кривую *со шкалой значений*  $t$ , а одно уравнение между  $x$  и  $y$  — кривую без шкалы.

Иллюстрируем это различие одним вопросом из механики. Пусть точка  $M$  движется по плоскости. В таком случае её координаты изменяются с течением времени. Если даны формулы, выражающие координаты движущейся точки в функции времени:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

(где  $t$  — время, выраженное в определённых единицах и отсчитываемое от определённого момента), то можно, придавая  $t$  различные значения, определить положения, которые занимала на плоскости точка  $M$  в различные моменты времени. Таким образом можно: 1) определить траекторию точки  $M$  и 2) для всякой точки этой траектории узнать, в какой момент точка  $M$  была в этой точке.

Если же из данных параметрических уравнений исключить  $t$ , то полученное в результате исключения уравнение

$$F(x, y) = 0$$

определяет траекторию точки  $M$ , но не позволяет узнать, в какое время точка  $M$  была в разных точках этой траектории.

**35. Константа как функция.** Обращаем внимание читателя на самую простую функцию, которая может вызвать затруднения именно своей чрезвычайной простотой (с первого взгляда можно не согласиться с тем, что это — функция). Мы имеем в виду функцию, равную константе (постоянной величине), например,

$$y = 5.$$

Зависит ли эта функция от  $x$ ? Она всегда (т. е. при всех значениях  $x$ ) равна 5. Попробуем составить для этой функции таблицу, придавая  $x$  разные значения. Получится следующая таблица:

$x$	$y$	$x$	$y$
0	5	4	5
1	5	5	5
2	5	6	5
3	5		

Таким образом, каждому значению  $x$  соответствует определённое значение  $y$ , но только все эти значения  $y$  одинаковы.

Итак, для нашей функции можно составить таблицу.

Чтобы построить график этой функции, следует взять ряд точек на оси  $X$ , восставить в них перпендикуляры к оси  $x$  и на всех этих перпендикулярах отложить одну и ту же величину (в данном случае 5). Все полученные точки отстоят на расстоянии 5 от оси  $X$ . Отсюда ясно, что наша функция изображается прямой, параллельной оси  $X$  и отсекающей на оси  $Y$  отрезок 5.

Вообще *функция, равная константе, изображается прямой, параллельной оси  $X$ .*

Выходит, что наша функция так же, как и другие функции, изображается некоторой линией. Для неё можно составить таблицу. Значит, нет никаких оснований не считать её за функцию только потому, что она постоянна.

Можно привести ряд примеров, убеждающих нас, что постоянная величина есть частный случай переменной. Пусть, например, на плоскости даны постоянная точка  $A$  и переменная точка  $M$ . Если точка  $M$  движется по плоскости, то расстояние  $AM$ , вообще говоря, является переменной величиной. Но если точка  $M$  движется по окружности с центром в  $A$ , то расстояние  $AM$  постоянно.

Наше знакомство с различными свойствами функций приводит нас к мысли, что в понятии функции единственно существенным является следующее: *каждому значению аргумента соответствует определённое значение функции* \*).

Если значения функции, соответствующие различным значениям аргумента, одинаковы, то от этого функция не перестаёт быть функцией (хотя лишается свойства переменности). Рассуждения этого п показывают, что постоянную величину целесообразно рассматривать как частный случай переменной (переменная, принимающая одинаковые значения), а не противопоставлять её переменной.

Важно уяснить, что, рассматривая функцию  $y=a$ , мы должны мыслить две переменные:  $x$  и  $y$ . Отсутствие в уравнении  $x$  обозначает, что  $x$  может принимать любые значения. Эти значения не влияют на значение  $y$ , которое всегда одно и то же.

### Упражнения

**50.** На клетчатой бумаге построить графики следующих функций:

а)  $y=1-2x$ , придавая  $x$  значения от  $-3$  до  $3$  через  $0,5$ ;

б)  $y=x^2$ , придавая  $x$  значения от  $-4$  до  $4$  через  $0,5$ ;

в)  $y=\pm\sqrt{x}$ , придавая  $x$  значения от  $0$  до  $16$  через  $1$ ;

д)  $y=\frac{1}{x}$ , придавая  $x$  значения от  $-5$  до  $5$  через  $0,5$  (кроме  $0$ ).

**51.** Построить на миллиметровой бумаге график эмпирической функции, выражающей рост подсолнуха как функцию времени:

$t$	$h$	$t$	$h$	$t$	$h$
1	17,9	5	131,0	9	247,1
2	36,4	6	169,0	10	250,5
3	67,8	7	205,5	11	253,8
4	98,1	8	228,3	12	254,5

\*) А для многозначных функций — несколько определённых значений.

Здесь  $t$  — возраст подсолнуха в неделях, а  $h$  — его рост в сантиметрах. На оси абсцисс откладывать время (в 1 см — 1 неделя), а на оси ординат — рост (в 1 см — 10 сантиметров).

**52.** На клетчатой бумаге построить следующие линии, заданные в параметрической форме:

а)  $x = 2 \cos t$ ,  $y = \sin t$ , принимая за единицу масштаба 10 клеток и придавая  $t$  значения от 0 до  $360^\circ$  через  $10^\circ$ ;

б)  $x = 1 + t$ ;  $y = 2t^2 + 4t - 1$ , принимая за единицу масштаба 2 клетки и придавая  $t$  значения от  $-3$  до 1 через 0,5.

**53.** Для следующих функций составить таблицы и вычертить на миллиметровой бумаге графики этих функций:

а)  $y = x^{\frac{2}{3}}$ , придавая  $x$  значения от 0 до 5 через 0,1 и замечая, что  $(-x)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$ ;

б)  $y = \sin^2 x$ , придавая  $x$  значения от 0 до 3,2 через 0,1 и замечая, что данная функция имеет период, равный  $\pi$ ;

с)  $y = 10^x$ , придавая  $x$  значения от  $-1$  до 1 через 0,02;

д)  $y = 2^x$ , придавая  $x$  значения от  $-3$  до 3 через 0,1;

е)  $y = \frac{\sin x}{x}$ , придавая  $x$  значения от 0,1 до 6,3 через 0,1 и замечая, что  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ .

**Примечание.** Для примеров б) и е) использовать тригонометрическую таблицу, указанную в сноске на стр. 68.

### Задачи

**54.** Выразить  $y$  как явную функцию  $x$ :

а)  $2x + 5y - 8 = 0$ ;      е)  $x = \sin y$ ;

б)  $x^2 + y^2 = a^2$ ;      ф)  $x = 10^y$ ;

с)  $3x^2 + 4y^2 - 1 = 0$ ;      г)  $x = 2^y$ .

д)  $xy = k$ ;

**55.**  $y$  есть функция от  $x$ , определяемая уравнением

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0.$$

Найти значение  $x$ , при котором  $y = x$ .

**56.** Для следующих функциональных зависимостей, заданных параметрически, найти непосредственную связь между  $x$  и  $y$ :

а)  $x = 2t - 1$ ,      }      с)  $x = 2 \cos t$ ,      }  
        $y = 5t + 2$ ;      }       $y = 3 \sin t$ ;      }

б)  $x = 3t + 4$ ,      }      д)  $x = 2 \cos^2 t$ ,      }  
        $y = t^2 - 2t + 5$ ;      }       $y = 3 \sin^2 t$ .      }

## ГЛАВА III

### УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ

Мы уже знаем, что существует соответствие между уравнениями с двумя переменными, с одной стороны, и линиями — с другой. Это даёт возможность заменять изучение линий изучением их уравнений, и наоборот. Каждому свойству уравнения соответствует некоторое свойство линии, изображаемой этим уравнением; нужно только уметь переводить свойства уравнений на геометрический язык.

Главная задача аналитической геометрии заключается в изучении линий при помощи их уравнений. Обратная задача — изучение уравнений при помощи линий — имеет меньшее значение.

Чтобы изучать линии по их уравнениям, нам необходимо сначала научиться находить уравнения линий, данных геометрически. Этому вопросу и посвящена настоящая глава.

#### § 1. Геометрические места и их уравнения

**36. Уравнение окружности с центром в начале.** Геометрическим местом точек называется множество *всех* точек, обладающих некоторым общим свойством. Чтобы задать линию, следует указать свойство, которым обладают все её точки и не обладают никакие точки, не принадлежащие этой линии. Например: все точки окружности находятся на одном и том же расстоянии от центра, и ни одна точка, не принадлежащая окружности, не находится на таком расстоянии от центра. Другими словами, окружность есть геометрическое место точек, находящихся на постоянном \*) расстоянии от некоторой точки, называемой центром.

Для вывода уравнения окружности необходимо задать эту окружность. Окружность будет вполне определена, если будут указаны положение её центра (т. е. координаты центра) и радиус. Рассмотрим окружность, центр которой находится в начале, а радиус равен  $R$  (черт. 37). Возьмём на этой окружности *произвольную* точку  $M$  и обозначим её координаты через  $x$  и  $y$ . Вообразим, что точка  $M$  движется по окружности. При этом  $x$  и  $y$  изменяются, но расстояние точки  $M$  от начала всё время остаётся равным  $R$ .

---

\*) Т. е. на одном и том же для всех точек.



А так как это расстояние равно  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , то  $\sqrt{x^2 + y^2} = R$ . Чтобы избавиться от радикала, возведём это равенство в квадрат:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (1)$$

Равенство (1) есть уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в начале.

Подчёркнём важнейшие моменты нашего вывода.

Точка  $M$  не есть определённая точка окружности: она движется по окружности. Следовательно,  $x$  и  $y$  не являются постоянными числами; они называются *текущими координатами*. Вообще *текущими координатами* называются координаты точки, движущейся по некоторой линии.

Однако, хотя  $x$  и  $y$  изменяются при движении точки  $M$ , соотношение (1) справедливо всё время, т. е. для всякого положения точки  $M$  (на окружности!). Другими словами, уравнению (1) удовлетворяют координаты всех точек данной окружности. Координаты же точек, которые не лежат на окружности, не удовлетворяют данному уравнению. В самом деле, если точка лежит внутри окружности, то для неё

$$x^2 + y^2 < R^2,$$

если же точка лежит вне окружности, то для неё

$$x^2 + y^2 > R^2.$$

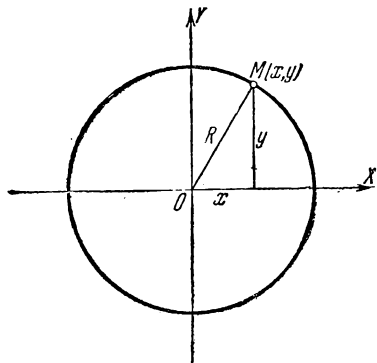
*Уравнение линии есть такое уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты всех точек данной линии и притом только этих точек (т. е. этому уравнению не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной линии).*

**37. Общие правила для вывода уравнения линии.** Чтобы вывести уравнение линии, следует поступать так:

1. Убедиться, что условия данной задачи вполне определяют эту линию.
2. Взять на линии произвольную точку  $M$ , обозначить её координаты через  $x$  и  $y$  и предположить, что точка  $M$  движется по линии.
3. Составить такое соотношение между  $x$  и  $y$ , которое сохраняется всё время при движении точки  $M$  по линии \*). Это и есть уравнение линии \*\*).

\*) И нарушается, если точка  $M$  сходит с линии.

\*\*) Иногда бывает трудно найти соотношение, связывающее  $x$  и  $y$ , и приходится составлять несколько соотношений, связывающих  $x$ ,  $y$  и какие-нибудь вспомогательные переменные, а затем исключать эти переменные.



Черт. 37.  $x^2 + y^2 = R^2$ .

4. Произвести в полученном уравнении возможные упрощения.

Применим всё сказанное к выводу уравнения окружности, центр которой лежит не в начале. Пусть центр окружности лежит в точке  $A(a, b)$ , а радиус её равен  $R$ . Очевидно, эти данные вполне определяют окружность. Возьмём на окружности точку  $M(x, y)$  и предположим, что она движется по окружности. При этом всё время

$$AM = R;$$

выражая  $AM$  по формуле расстояния между двумя точками, получим:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R.$$

Это и есть искомое уравнение. Для упрощения возведём его в квадрат:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (2)$$

Если центр окружности лежит в начале, то  $a=0$  и  $b=0$ ; тогда уравнение (2) превращается в уравнение (1).

В уравнение (2) входит пять букв:  $x$  и  $y$  суть текущие координаты, т. е. координаты точки, движущейся по окружности. Это — переменные величины.  $a$ ,  $b$  и  $R$  суть параметры, т. е. величины для данной окружности постоянные.

**38. Условие, при котором точка лежит на линии.** Мы знаем из предыдущего п, что уравнение линии есть такое уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты всех точек этой линии и только этих точек. Поэтому, если дана линия

$$F(x, y) = 0$$

и дана точка  $A(x, y)$ , то можно без чертежа узнать, лежит ли эта точка на этой линии. Для этого надо в уравнение линии подставить вместо текущих координат координаты данной точки. Если уравнение удовлетворится — значит данная точка лежит на этой линии, если не удовлетворится, то не лежит.

**39. Точки пересечения двух линий.** Пусть даны две линии

$$F(x, y) = 0 \quad (3)$$

и

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (4)$$

и требуется найти точки их пересечения.

Точка пересечения линий (3) и (4) лежит одновременно на обеих линиях. Следовательно (на основании предыдущего п), её координаты должны удовлетворять одновременно уравнениям (3) и (4). Поэтому найти координаты точки пересечения линий (3) и (4), это значит — найти пару чисел  $x, y$ , удовлетворяющую одновременно

уравнениям обеих линий. Чтобы найти такую пару, надо решить совместно уравнения (3) и (4) как систему двух уравнений с двумя неизвестными.

**Пример.** Найти точку пересечения двух окружностей: первая имеет центр в точке  $(-2, 2)$  и радиус её равен 5, а вторая имеет центр в точке  $(1, -4)$  и радиус её равен  $\sqrt{10}$ .

Составляем уравнения данных окружностей:

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

и

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 10.$$

Решая совместно эти уравнения, находим два решения:

$$x_1 = 2, \quad y_1 = -1,$$

$$x_2 = -2, \quad y_2 = -3.$$

Значит, данные окружности пересекаются в двух точках

$$(2, -1) \text{ и } (-2, -3).$$

Рекомендуем читателю проверить этот результат чертежом, начертив данные окружности циркулем на клетчатой бумаге. Чтобы придать циркулю раствор  $\sqrt{10}$ , полезно заметить, что  $\sqrt{10}$  есть гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 1 и 3.

## § 2. Вывод уравнений некоторых геометрических мест

**40. Эллипс.** Возьмём на плоскости две точки  $F_1$  и  $F_2$ . Возьмём какую-нибудь точку  $M$  и вообразим, что она движется в плоскости таким образом, что сумма её расстояний от  $F_1$  и  $F_2$  не меняется (значит, на сколько увеличивается одно расстояние, на столько же уменьшается другое). Линия, которую опишет точка  $M$  при таком движении, называется *эллипсом*; точки  $F_1$  и  $F_2$  называются *фокусами* эллипса.

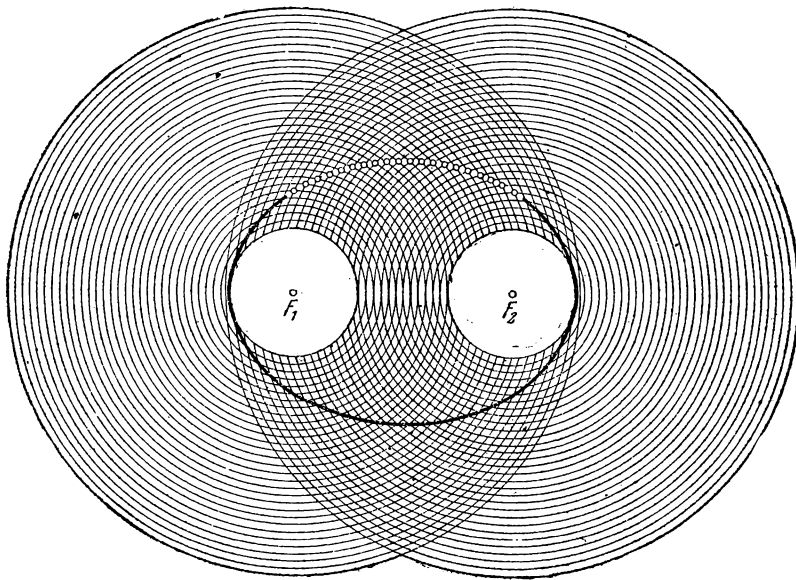
Следовательно, определение эллипса таково: *эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек (называемых фокусами) есть постоянная величина.*

Из этого определения вытекает один способ построения эллипса по точкам, который ясен из черт. 38. На этом чертеже изображены два семейства концентрических окружностей: одно — с центром в  $F_1$  и другое — с центром в  $F_2$ . Наименьшие окружности в обоих семействах имеют один и тот же радиус, а затем радиусы увеличиваются каждый раз на одну и ту же величину (на черт. 38 — на 1 мм). Оба эти семейства, налегая друг на друга, образуют сетку из криволинейных клеточек. Отметим какую-нибудь вершину этих клеточек (т. е. точку пересечения двух окружностей разных семейств). Затем будем отмечать точки следующим образом: каждый раз будем переходить на одну окружность дальше от  $F_1$  и в то же время на одну окружность ближе к  $F_2$  (или наоборот).

На черт. 38 для ясности часть точек не обведена линиями. Мы видим, что эти точки расположены так, как будто мы проходим

через наши криволинейные клеточки по диагоналям. Это замечание облегчает нанесение точек.

Существует большое количество способов черчения эллипса. Сейчас мы ознакомимся ещё с одним способом, имеющим то су-



Черт. 38. Построение эллипса по точкам.

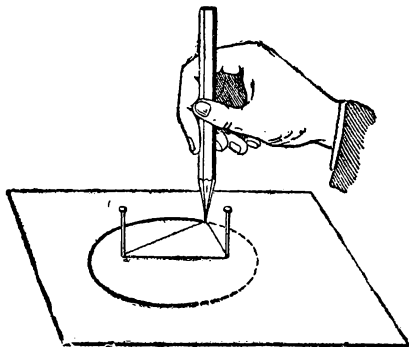
щественное отличие от предыдущего, что он позволяет вычертить эллипс не по точкам, а непрерывным движением.

Отметим две точки  $F_1$  и  $F_2$ , которые будут служить фокусами эллипса, и воткнём в каждую из этих точек по булавке (черт. 39). Сделаем нитяное кольцо и положим это кольцо на бумагу так, чтобы булавки оказались внутри кольца. Затем концом карандаша натягиваем нить и ведём этот конец по бумаге так, чтобы нить всё время была натянутой. Очевидно, сумма расстояний конца карандаша от  $F_1$  и от  $F_2$  будет оставаться постоянной при таком движении, и следовательно, он опишет эллипс с фокусами в  $F_1$  и  $F_2$ .

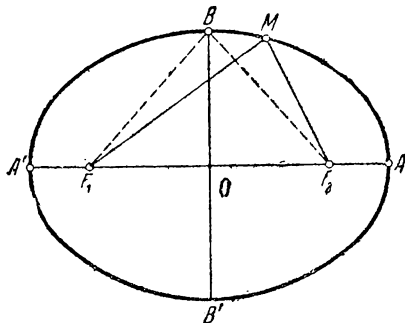
Чтобы вполне определить размеры и форму эллипса, очевидно, надо задать две величины: сумму расстояний каждой точки эллипса от фокусов и расстояние между фокусами. Обозначим сумму расстояний каждой точки эллипса от фокусов через  $2a$ , а междуфокусное расстояние — через  $2c$ . Таким образом (черт. 40),

$$\begin{aligned} F_1M + F_2M &= 2a, \\ F_1F_2 &= 2c. \end{aligned}$$

Множитель 2 вводится потому, что в дальнейших выкладках нам часто придётся делить эти величины пополам. Читатель должен обратить внимание на то, что в равенстве  $F_1M + F_2M = 2a$   $M$  обозначает произвольную точку эллипса, а не какую-либо определённую. Отрезки  $F_1M$  и  $F_2M$ , идущие из фокусов в какую-нибудь



Черт. 39. Вычерчивание эллипса непрерывным движением.



Черт. 40.  $a^2 = b^2 + c^2$ .

точку эллипса, называются *фокальными радиусами-векторами* этой точки. Основное свойство эллипса заключается в том, что сумма фокальных радиусов-векторов для всех точек одна и та же.

**41. Вывод уравнения эллипса.** Примем прямую, на которой лежат фокусы, за ось  $X$ , а за начало примем середину отрезка  $F_1F_2$  (черт. 41).

Возьмём на эллипсе произвольную точку  $M$  и обозначим её координаты через  $x$  и  $y$ . Пользуясь формулой для расстояния между двумя точками, вычислим фокальные радиусы-векторы точки  $M$ :

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

При движении точки  $M$  по эллипсу  $r_1 + r_2 = 2a$ , т. е.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (*)$$

Уравнение  $(*)$  и есть уравнение эллипса. Когда точка  $M$  движется по эллипсу, то  $x$  и  $y$  изменяются, но соотношение  $(*)$  всё время остаётся справедливым, потому что оно выражает, что сумма радиусов-векторов точки  $M$  равна  $2a$ .

Произведём в уравнении  $(*)$  все возможные упрощения и, прежде всего, постараемся освободиться от радикалов,

Перенесём второй радикал в правую часть и возведём обе части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Уединим радикал и заодно раскроем все скобки, приведём подобные члены и сократим уравнение на 4:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.$$

Возведём обе части этого уравнения в квадрат. Переносим после этого члены, содержащие  $x$  и  $y$ , в одну сторону, а свободные члены в другую, получим:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Разделим обе части этого уравнения на  $a^2(a^2 - c^2)$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (**)$$

Для дальнейшего упрощения введём новое обозначение

$$b^2 = a^2 - c^2. \quad (1)$$

Это обозначение требует некоторого обоснования, потому что через  $b^2$  можно обозначить не всякую величину, а только

положительную. Из треугольника  $F_1MF_2$  (черт. 41) имеем

$$F_1M + F_2M > F_1F_2$$

(потому что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны), т. е.

$$2a > 2c$$

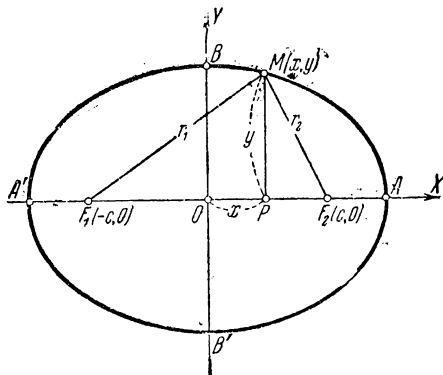
или

$$a > c. \quad (2)$$

Из неравенства (2) следует, что  $a^2 - c^2 > 0$ , следовательно, обозначение (1) законно. Теперь уравнение (\*\*) запишется так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется *каноническим* или *простейшим* уравнением эллипса. Если эллипс расположен относительно координатных осей не так, как на черт. 41, то его уравнение будет иным.



Черт. 41.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Заметим, что если точка  $M$ , двигаясь по эллипсу, придёт в положение  $B$  (черт. 40), то её фокальные радиусы-векторы будут равны между собой, и, следовательно, каждый из них будет равен

$$F_1B = F_2B = a.$$

В таком случае из прямоугольного треугольника  $OBF_2$  следует

$$OB^2 = a^2 - c^2.$$

Сравнивая это равенство с равенством (1), мы видим, что  $OB = b$ . Аналогично  $OB' = b$ . Таким образом выясняется геометрический смысл параметра  $b$  (до сих пор мы рассматривали букву  $b$  только как сокращённое обозначение для  $\sqrt{a^2 - c^2}$ ).

Когда точка  $M$ , двигаясь по эллипсу, придёт в положение  $A$ , её фокальными радиусами-векторами будут служить  $F_1A$  и  $F_2A$ . Следовательно, будем иметь

$$F_1A + F_2A = 2a$$

или, заменяя  $F_1A$  через  $2c + F_2A$ ,

$$2c + 2F_2A = 2a,$$

откуда

$$F_2A = a - c.$$

Следовательно,

$$OA = OF_2 + F_2A = c + (a - c) = a.$$

Аналогично доказывается, что  $OA' = a$ . Таким образом, мы обнаружили ещё один геометрический смысл параметра  $a$ .

Отрезки  $AA' = 2a$  и  $BB' = 2b$  называются *осями* эллипса.  $AA'$  (т. е. та ось, на которой лежат фокусы) называется *большой осью*, а  $BB'$  — *малой осью*.  $a$  и  $b$  называются соответственно *большой* и *малой полуосями*. Точки  $A, A', B, B'$  называются *вершинами* эллипса.

Если  $a = b$ , то уравнение (3) принимает вид

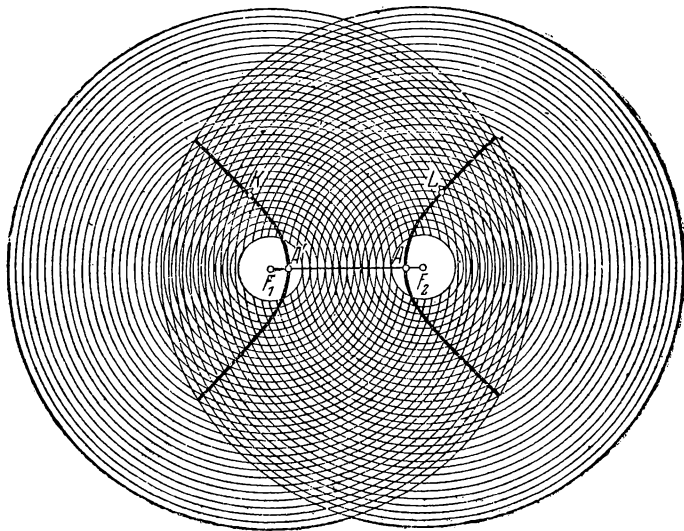
$$x^2 + y^2 = a^2,$$

откуда следует, что окружность есть частный случай эллипса (эллипс с равными полуосями). Из равенства (1) при  $a = b$  следует  $c = 0$ , т. е. в этом случае оба фокуса совпадают с центром. Из черт. 39 тоже ясно, что если обе булавки будут вколоты в одной точке, то карандаш опишет окружность.

**42. Гипербола.** *Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек (называемых фокусами) есть постоянная величина.*

На основании этого определения можно построить гиперболу по точкам. Начертим два семейства концентрических окружностей, как мы это делали при построении эллипса на черт. 38 (черт. 42). Возьмём

какую-нибудь точку пересечения двух окружностей, например  $K$ . Затем будем переходить на один шаг дальше от  $F_1$  (т. е. на следующую окружность от  $F_1$ ) и в то же время на один шаг дальше от  $F_2$ , т. е. отмечать точки по «диагоналям» клеток, но не по тем «диагоналям», по которым мы шли, строя эллипс, а по другим.



Черт. 42. Построение гиперболы по точкам.

Отмеченная на черт. 42 точка  $K$  находится ближе к  $F_1$ , чем к  $F_2$ . Если обозначить разность расстояний, о которой идёт речь в определении гиперболы, через  $2a$ , то

$$F_2K - F_1K = 2a;$$

такое же равенство имеет место и для всех других точек, пока построенных нами. В определении гиперболы говорится, что для всех точек гиперболы разность их расстояний от фокусов есть постоянная величина, но там не сказано, в каком порядке берутся эти расстояния. Следовательно, гипербола состоит, во-первых, из точек  $M$ , для которых

$$F_2M - F_1M = 2a,$$

и, во-вторых, из точек  $M$ , для которых

$$F_1M - F_2M = 2a.$$

Поэтому мы, кроме точки  $K$ , построим точку  $L$ . Точка  $K$  лежала на 7-й окружности от  $F_1$  и на 22-й окружности от  $F_2$ , а точка  $L$  лежит на 7-й окружности от  $F_2$  и на 22-й окружности от  $F_1$ ; следо-



вательно, для точки  $L$  разность расстояний от  $F_1$  и от  $F_2$  — та же, что и для  $K$ , но  $K$  лежит ближе к  $F_1$ , а  $L$  — ближе к  $F_2$ . Начиная от  $L$ , строим последовательность точек, продвигаясь по «диагоналям» так же, как от  $K$ .

Это построение даёт нам представление о виде гиперболы. Гипербола уходит в бесконечность, ибо точка может безгранично удаляться от обоих фокусов так, что разность её расстояний от этих фокусов будет оставаться постоянной. Далее мы видим, что гипербола состоит из двух раздельных частей, называемых *ветвями*. Если точка  $M$  лежит на левой ветви, то

$$F_2M - F_1M = 2a;$$

если точка  $M$  лежит на правой ветви, то

$$F_1M - F_2M = 2a.$$

Если же про точку  $M$  известно лишь, что она лежит на гиперболе (но неизвестно, на какой ветви), то можно написать:

$$F_1M - F_2M = \pm 2a.$$

Междуполюсное расстояние  $F_1F_2$  обозначается через  $2c$ . Отрезки  $F_1M$  и  $F_2M$  называются *фокальными радиусами-векторами* точки  $M$  и обозначаются соответственно через  $r_1$  и  $r_2$ .

**43. Вывод уравнения гиперболы.** Примем за ось  $X$  прямую, проходящую через фокусы, а начало координат поместим в середине отрезка  $F_1F_2$  (черт. 43). При помощи тех же рассуждений, которыми мы пользовались при выводе уравнения эллипса, мы получим уравнение гиперболы

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Дальнейшие преобразования понятны без объяснений:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + \\ &\quad + x^2 - 2cx + c^2 + y^2, \\ cx - a^2 &= \pm a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}, \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Разделим обе части этого уравнения на  $a^2(a^2 - c^2)$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (***)$$

По внешнему виду это уравнение совпадает с уравнением (\*\*) (стр. 80), выведенным для эллипса. Разница заключается в том, что разность  $a^2 - c^2$  для гиперболы является отрицательной величиной.

В самом деле, из треугольника  $F_1MF_2$  (черт. 43) находим:

$$F_1M - F_2M < F_1F_2$$

(потому что разность двух сторон треугольника больше третьей стороны), т. е.

$$2a < 2c$$

или

$$a < c. \quad (4)$$

Поэтому нельзя обозначать через  $b^2$  величину  $a^2 - c^2$ , как мы это делали для эллипса, но можно обозначить через  $b^2$  разность  $c^2 - a^2$ , которая для гиперболы положительна

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (5)$$

Черт. 43.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Тогда уравнение (\*\*\*) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Уравнение (6) называется *каноническим* или *простейшим* уравнением гиперболы.

Если точка  $M$ , двигаясь по гиперболе, придёт в положение  $A$ , то её фокальными радиусами-векторами будут служить отрезки  $F_1A$  и  $F_2A$ . Следовательно,

$$F_1A - F_2A = 2a$$

или, заменяя  $F_1A$  через  $2c - F_2A$ ,

$$2c - 2F_2A = 2a,$$

откуда

$$F_2A = c - a.$$

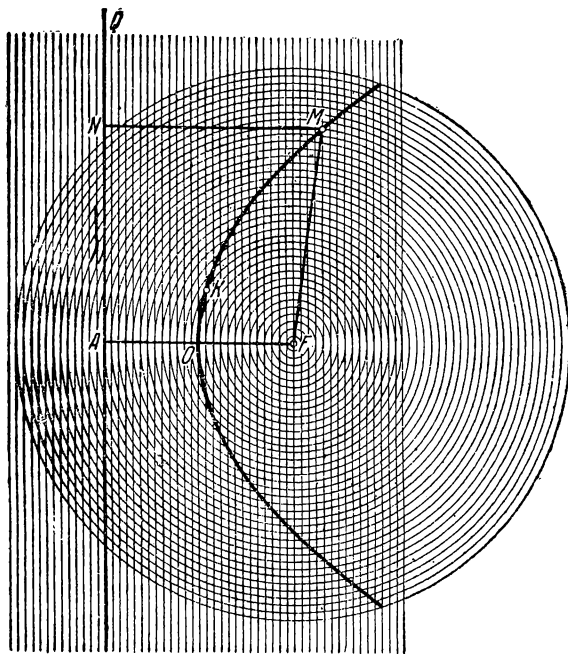
Следовательно,

$$OA = OF_2 - F_2A = c - (c - a) = a.$$

Аналогично доказывается, что  $OA' = a$ . Таким образом мы обнаружили ещё один геометрический смысл параметра  $a$ . Геометрический смысл параметра  $b$  выяснится позднее.

Отрезок  $AA' = 2a$  называется *действительной осью* гиперболы,  $a$  называется *действительной полуосью* \*). Точки  $A$  и  $A'$  называются *вершинами* гиперболы.

**44. Парабола.** *Параболой называется геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки (называемой фокусом) и от данной прямой (называемой директрисой).*



Черт. 44. Построение параболы по точкам.

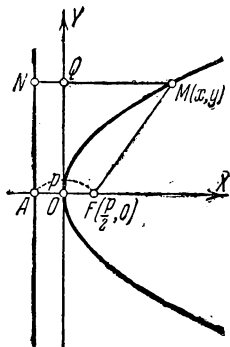
Пусть  $F$  — фокус, а  $a$  — директриса (черт. 44).  $M$  — произвольная точка параболы,  $MN$  — расстояние этой точки до директрисы (т. е. перпендикуляр, опущенный из  $M$  на директрису). По определению параболы

$$MF = MN.$$

Черт. 44 показывает построение параболы по точкам. Строим семейство концентрических окружностей с центром в фокусе. Затем строим семейство прямых, параллельных директрисе. Интервалы между прямыми — такие же, как и между окружностями (на черт. 44 — 1 мм).

\*) Какая ещё ось существует у гиперболы — выяснится позднее [п. 89 (стр. 170)].

Намечаем какую-нибудь точку, находящуюся на одинаковых расстояниях от  $a$  и от  $F$ . На черт. 44 взята точка  $K$ ; она лежит на пересечении 14-й прямой, считая от  $a$ , и 14-й окружности, считая от  $F$ . Затем отмечаем точки по «диагоналям» клеточек, удаляясь каждый раз на следующую прямую, считая от  $a$ , и на следующую окружность, считая от  $F$ .



Черт. 45.  $y^2 = 2px$ .

Опустим из фокуса перпендикуляр  $FA$  на директрису; обозначим через  $O$  точку пересечения этого перпендикуляра с параболой. Эта точка называется *вершиной* параболы. Так как  $O$  лежит на параболы, то её расстояние от  $a$  равно её расстоянию от  $F$ , т. е.

$$OA = OF.$$

**45. Вывод уравнения параболы.** Чтобы параболы была вполне определена, необходимо задать расстояние между фокусом и директрисой. Обозначим его через  $p$ :

$$AF = p.$$

Параметр  $p$  называется просто «*параметром параболы*» (парабола определяется одним параметром; эллипс или гипербола требовали для своего определения двух параметров). Примем  $AF$  за ось  $X$ , а начало координат поместим в вершине параболы (черт. 45). В этой системе координат фокус  $F$  имеет координаты  $(\frac{p}{2}, 0)$ .

Возьмём на параболы произвольную точку  $M$  и обозначим её координаты через  $x$  и  $y$ . Если точка  $M$  движется по параболы, то всё время сохраняется равенство

$$MF = MN \quad (\dagger)$$

( $F$  — постоянная точка, а  $M$  и  $N$  — переменные).  $MF$  легко вычислить как расстояние между точками  $M(x, y)$  и  $F(\frac{p}{2}, 0)$ :

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

а  $MN$ , как видно из чертежа, равно  $MQ + QN$ :

$$MN = MQ + QN = x + \frac{p}{2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение  $(\dagger)$ , получим уравнение параболы

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возводим это уравнение в квадрат и раскрываем скобки:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

или, после приведения,

$$y^2 = 2px. \quad (7)$$

Это уравнение называется *каноническим* или *простейшим* уравнением параболы.

### Упражнение

**57.** а) На сетке из двух семейств окружностей (как на черт. 38 и 42) построить овал Кассини, пользуясь его определением (см. задачу **62**). Следует задаться определёнными значениями  $a$  и  $b$  и рассмотреть случаи  $a < b$  и  $a > b$ ;

б) то же для лемнискаты Бернулли (см. задачу **63**).

### Задачи

**58.** Какие из точек  $A(3,5)$ ,  $B\left(2, -\frac{\sqrt{33}}{3}\right)$ ,  $C(-2,7)$ ,  $D(-6,1)$ ,  $E(0, -3)$  лежат на эллипсе

$$\frac{x^2}{6,75} + \frac{y^2}{9} = 1?$$

**59.** Дана окружность

$$x^2 + y^2 = 26.$$

Указать, какие из следующих точек лежат на окружности, какие — внутри неё и какие — вне:  $A(-3, 2)$ ,  $B(-1, -5)$ ,  $C(0; 5,1)$ ,  $D(4, -\sqrt{10})$ ,  $E(5, 0)$ .

**60.** Вывести уравнение геометрического места точек, равноудалённых от точек  $A(-2, 0)$  и  $B(10, 6)$ .

**61.** Точка  $M$  движется по плоскости, будучи всё время вдвое ближе к точке  $A(-4, 2)$ , чем к  $B(5, 5)$ . Вывести уравнение линии, которую описывает точка  $M$ .

**62.** Овалом Кассини называется геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух данных точек есть постоянная величина. Обозначив это произведение через  $a^2$ , расстояние между данными точками через  $2b$ , приняв за ось  $X$  прямую, соединяющую данные точки, и поместив начало координат посередине между данными точками, вывести уравнение овала Кассини.

**63.** Лемниской Бернулли называется тот частный случай овала Кассини (см. задачу **62**), когда  $a = b$ . Написать уравнение лемнискаты Бернулли.

**64.** Найти точки пересечения:

а) двух окружностей  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$  и  $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 65$ ;

б) двух окружностей  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$  и  $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 25$ ;

с) двух окружностей  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$  и  $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 9$ ;

д) окружности  $x^2 + y^2 = 153$  с гиперболой  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ;

е) окружности  $x^2 + y^2 = 10$  с гиперболой  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ .

**65.** Составить уравнения окружностей:

- а) с центром в точке  $(3, -4)$  радиуса 6;
- б) с центром в начале, проходящей через точку  $(-2, 7)$ ;
- с) с центром в точке  $(2, 10)$ , проходящей через точку  $(-3, 2)$ ;
- д) с центром в точке  $(7, 3)$ , касающейся оси  $x$ .

**66.** Написать каноническое уравнение эллипса по следующим данным:

- а)  $a=5$ ,  $b=2$ ;      д)  $a=10$ ,  $c=2$ ;
- б)  $a=3$ ,  $b=\sqrt{2}$ ;    е)  $b=8$ ,  $c=6$ ;
- с)  $a=13$ ,  $c=5$ ;      ф)  $b=4$ ,  $c=2$ .

**67.** Найти координаты фокусов у эллипсов в задаче **66** а) и б).

**68.** Написать каноническое уравнение гиперболы по следующим данным:

- а)  $a=3$ ,  $b=4$ ;      д)  $a=3$ ,  $c=4$ ;
- б)  $a=5$ ,  $b=1$ ;      е)  $b=7$ ,  $c=25$ ;
- с)  $a=8$ ,  $c=10$ ;    ф)  $a=6$ ,  $c=11$ .

**69.** Найти координаты фокусов у гипербол в задаче **68** а) и б).<sup>1</sup>

### § 3. Понятие о степенях свободы

**46. О числе условий, необходимых для решения математической задачи.** Многим математическим задачам можно придать следующую формулировку: из бесконечного множества каких-нибудь вещей надо найти одну (иногда несколько) вещей, которые удовлетворяли бы некоторым условиям. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Решить уравнение  $5x - 3 = 3x + 7$ . Здесь из бесконечного множества чисел надо найти одно число. Это число должно удовлетворять данному уравнению.

**Пример 2.** Провести прямую через две данные точки  $A$  и  $B$ . На плоскости существует бесконечное множество прямых. Из них надо найти одну, удовлетворяющую двум условиям: 1) она должна проходить через точку  $A$ , 2) она должна проходить через точку  $B$ .

**Пример 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -11, \\ 2x + 5y &= 18. \end{aligned}$$

В данной задаче требуется найти пару чисел. Множество всех пар чисел бесконечно. Из этого бесконечного множества надо найти одну пару, удовлетворяющую двум условиям: 1)  $3x - 2y = -11$ , 2)  $2x + 5y = 18$ . Такая пара:

$$x = -1, y = 4.$$

**Пример 4.** Провести окружность через данные три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . На плоскости существует бесконечное множество окружностей. Из них надо найти одну, удовлетворяющую трём условиям: 1) она должна проходить через точку  $A$ , 2) она должна проходить через точку  $B$ , 3) она должна проходить через точку  $C$ .

**Пример 5.** Решить уравнение  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . См. объяснение к примеру 1. В данном примере таких чисел существует два.

**Пример 6.** Через данную точку провести касательную к данной окружности. На плоскости существует бесконечное множество прямых. Из них надо найти одну, удовлетворяющую двум условиям: 1) она должна проходить через данную точку, 2) она должна касаться данной окружности. Решая эту задачу, мы замечаем, что таких прямых может оказаться две (если данная

точка лежит вне круга), или одна (если данная точка лежит на окружности), или ни одной (если данная точка лежит внутри круга).

**Пример 7.** Из данной точки опустить перпендикуляр на данную прямую. Это значит: из бесконечного множества прямых данной плоскости найти прямую, удовлетворяющую двум условиям: 1) она должна проходить через данную точку, 2) она должна быть перпендикулярна к данной прямой.

**Пример 8.** Найти синус угла  $42^\circ$ . Существует бесконечное множество чисел. Из них надо найти то, которое служит синусом для угла в  $42^\circ$ .

**Пример 9.** Найти точку, у которой сумма координат равна 6, а произведение координат равно 5. На плоскости существует бесконечное множество точек. Из них надо выбрать ту, которая удовлетворяет двум условиям: 1) сумма её координат равна 6, 2) произведение её координат равно 5. Таких точек оказывается две: точка (1,5) и точка (5,1).

**Пример 10.** Провести окружность данного радиуса  $r$  через две данные точки  $A$  и  $B$ . На плоскости существует бесконечное множество окружностей. Надо найти в нём ту окружность, которая удовлетворяет трём условиям: 1) она проходит через точку  $A$ , 2) она проходит через точку  $B$ , 3) она имеет радиус, равный  $r$ . Решая эту задачу, читатель заметит, что таких окружностей может оказаться две, одна или ни одной.

От чего зависит количество условий, необходимых для решения каждой задачи? Вернёмся ещё раз к нашим примерам и сопоставим в каждом примере два обстоятельства: 1) из какого бесконечного множества вещей нам надо найти определённую вещь и 2) сколько надо иметь условий для того, чтобы эту вещь найти.

В примерах 1, 5 и 8 рассматриваемое бесконечное множество одно и то же: это — множество всех чисел. Из этого множества надо найти определённое число. В каждом из трёх примеров дано одно условие, которому это искоемое число должно удовлетворять.

В примере 3 множество уже другое: это — множество всех пар чисел. Из этого множества надо найти определённую пару чисел. Чтобы это сделать, одного условия мало; в задаче даны два условия.

В примере 9 мы рассматриваем множество всех точек на плоскости и хотим найти из него определённую точку. Но так как каждая точка имеет две координаты, то найти точку из множества всех точек на плоскости, это — всё равно, что найти пару чисел из множества всех пар чисел. В примере 9 тоже даны два условия.

В примерах 2, 6 и 7 надо из множества всех прямых линий плоскости найти определённую прямую. В каждом из этих примеров даются два условия.

В примерах 4 и 10 надо из множества всех окружностей плоскости найти определённую окружность. В каждой из этих задач даются три условия.

Всё это наводит нас на мысль, что *количество условий, необходимых для решения какой-нибудь задачи, зависит от того множества, из которого надо найти определённую вещь*. Всякая задача, где говорится «найти прямую, удовлетворяющую таким-то условиям», требует для своего решения двух условий, а задача, где говорится «найти окружность, удовлетворяющую таким-то условиям», требует для своего решения трёх условий. Эта мысль, которая пока является лишь догадкой, основанной на рассмотрении наших примеров, получит в дальнейшем подтверждение. Пока мы можем установить лишь, что если из множества всех чисел надо найти определённое число, то для этого необходимо одно условие (одно уравнение), а если из множества всех пар чисел надо найти определённую пару, то для этого нужны два условия (два уравнения).

Множество всех чисел бесконечно, множество всех пар чисел — тоже. Однако принято обозначать количество всех чисел \*) знаком  $\infty^1$ , а количество всех пар чисел — знаком  $\infty^2$ . Это основано на следующей аналогии. Если бы

\*) Здесь и в дальнейшем подразумеваются действительные числа.

мы рассматривали пары чисел  $(x, y)$ , где каждое число в отдельности может принимать  $n$  разных значений  $1, 2, 3, \dots, n$ , то сколько можно было бы составить разных пар? Очевидно  $n^2$ , как показывает следующая табличка:

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)...	(n, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)...	(n, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)...	(n, 3)
.....			
(1, n)	(2, n)	(3, n)...	(n, n)

В первом столбце перечислены все пары, начинающиеся с 1 (этих пар  $n$ ) во втором столбце — все пары, начинающиеся с 2 (этих пар тоже  $n$ ), и т. д. Всего столбцов  $n$ . Следовательно, мы имеем  $n^2$  пар. Если мы рассматриваем такие пары, где каждое число может принимать бесконечное множество значений, то по аналогии мы говорим, что если каждое число может принимать  $\infty^1$  значений, то пар может быть  $\infty^2$ . Эта запись имеет лишь условный смысл; она должна напоминать нам аналогичную запись для случая конечного числа значений. Однако мы скоро убедимся, что эта условная запись бывает очень полезна и даёт ряд удобных мнемонических правил\*).

По тем же причинам, по которым мы обозначили количество всех пар чисел через  $\infty^2$ , мы обозначим количество всех троек чисел через  $\infty^3$  и т. д.

*Условимся раз навсегда обозначать через  $\infty^1$  количество всех (действительных) чисел, непрерывно заполняющих некоторый промежуток.* Например, количество чисел, заключённых между 3 и 5, мы будем обозначать символом  $\infty^1$ . Символом  $\infty^2$  мы будем обозначать количество пар чисел, где каждое число, независимо от другого, принимает значения, непрерывно заполняющие некоторый промежуток.

Спрашивается, как нам поступать, если нам встретится не множество чисел или пар чисел и т. д., а какое-нибудь множество совсем другой природы. Например, сколько существует точек на плоскости?

Легко сообразить, что точек на плоскости существует  $\infty^2$ . Чтобы определить количество вещей, или, как принято говорить в математике, *элементов*, в каком-либо бесконечном множестве, надо уметь определять каждый элемент в этом множестве при помощи чисел. Мы сумели ответить на вопрос, сколько точек на плоскости, потому что мы знаем, что положение точки на плоскости определяется двумя числами. Каждой точке соответствует пара чисел (её координат), и обратно, каждой паре чисел соответствует одна точка. Следовательно, точек на плоскости столько же, сколько пар чисел. Количество точек на прямой равно  $\infty^1$ . В самом деле, возьмём ось  $X$  (всё равно, какую прямую брать). Для всех точек этой оси ордината равна нулю. Следовательно, чтобы определить положение точки на оси  $X$ , надо указать одно число (абсциссу этой точки). Каждой точке на оси  $X$  соответствует одно число (её абсцисса), и обратно, каждому числу соответствует одна точка на оси  $X$ . Значит, точек на оси  $X$  столько же, сколько чисел.

Сказанное о количестве точек на плоскости станет нам ещё яснее, если мы рассмотрим черт. 46. При этом нужно представить себе, что прямые, параллельные оси  $Y$ , проведены через *все* точки оси  $X$ , а не через промежутки, как на чертеже. На оси  $X$   $\infty^1$  точек; через каждую из них проведена прямая. Значит, количество прямых, параллельных оси  $Y$ , равно  $\infty^1$ . На каждой из этих прямых лежит  $\infty^1$  точек. Следовательно, всего мы имеем  $\infty^2$  точек.

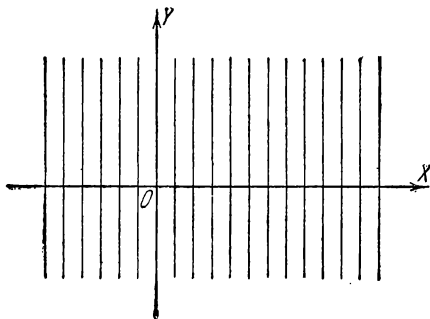
Ответить на вопрос, сколько существует на плоскости прямых, мы пока не можем, так как мы не умеем определять положение прямой с помощью чисел. Впоследствии мы научимся это делать. Если окажется, что прямая

\* ) Правил для простого запоминания каких-либо сложных соотношений.



определяется двумя числами, то мы скажем, что прямых  $\infty^2$ , если тремя, — то  $\infty^3$ , и т. д. Вообще, если мы имеем какое-нибудь бесконечное множество и если для того, чтобы найти из этого множества определённый элемент, надо задать  $n$  чисел, то мы говорим, что наше множество содержит  $\infty^n$  элементов.

Если множество содержит  $\infty^n$  элементов, то это значит, что для нахождения определённого элемента из этого множества надо задать  $n$  чисел. Эти числа называются параметрами. Например, для множества всех точек плоскости параметрами являются координаты точек. Заметим, что для каждого отдельного элемента множества параметры имеют определённые числовые значения. Чтобы выделить из множества определённый элемент, надо указать числовые значения параметров, характеризующие этот элемент. Но можно, вместо того чтобы непосредственно задать значения параметров, задать уравнения, связывающие эти параметры. Таких уравнений должно быть  $n$  (так как из них надо определить значения  $n$  параметров). Впоследствии мы убедимся, что когда мы хотим найти какой-нибудь элемент из бесконечного множества и задаём для этого некоторые условия, то эти условия являются уравнениями, связывающими параметры.



Черт. 46.

Пример 11. Найти точку, отстоящую от начала на расстоянии 6 и лежащую на биссектрисе нормального координатного угла.

На плоскости существует  $\infty^2$  точек. Параметрами служат координаты точек. Чтобы найти определённую точку, необходимо иметь два условия. В данной задаче даны следующие условия:

- 1) искомая точка отстоит от начала на расстоянии 6;
- 2) искомая точка лежит на биссектрисе нормального координатного угла.

Обозначая через  $x$  и  $y$  координаты искомой точки, первое условие можно записать так:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 6,$$

а второе условие, как легко сообразить,

$$x = y.$$

Итак, мы видим, что оба условия, данных в этой задаче, представляют собой уравнения, связывающие параметры, необходимые для выделения определённого элемента из данного множества (в данном случае — координаты, необходимые для выделения определённой точки из всех точек плоскости).

Решая данные уравнения, мы найдём две точки, удовлетворяющие условиям задачи:  $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$  и  $(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ .

Из рассмотренных выше десяти примеров мы пока не все сумеем истолковать подобным образом, но впоследствии мы научимся делать это. Так, возьмём пример 7. Мы увидим, что прямых на плоскости существует  $\infty^2$  (т. е. для определения положения прямой на плоскости надо указать значения двух параметров). Мы увидим также, что условия

- 1) искомая прямая проходит через данную точку,
- 2) искомая прямая перпендикулярна к данной прямой

представляют собой уравнения, связывающие параметры, определяющие искомую прямую.

Вместо того чтобы говорить, что данное множество содержит  $\infty^n$  элементов, иногда выражаются так:

Данное множество зависит от  $n$  произвольных параметров; например, множество всех точек плоскости зависит от двух произвольных параметров.

Выбирая элемент в данном множестве, мы имеем  $n$  степеней свободы (или  $n$  степеней произвола), например, выбирая точку на данной прямой, мы имеем одну степень свободы.

Все выражения, выделенные курсивом, обозначают одно и то же: чтобы выделить определённый элемент из данного множества, надо задать  $n$  чисел или  $n$  условий (т. е. уравнений, связывающих эти числа).

Если задача заключается в том, что надо найти определённый элемент из множества, содержащего  $\infty^n$  элементов, и в этой задаче дано  $m$  условий, где  $m < n$ , то задача называется *неопределённой*. Найти определённый элемент нельзя, но можно из данного множества выделить другое множество, состоящее из всех элементов, удовлетворяющих данным  $m$  условиям. Это выделенное множество содержит  $\infty^{n-m}$  элементов, так как, чтобы найти в нём определённый элемент, надо задать ещё  $n - m$  условий.

Если число заданных условий больше числа произвольных параметров, от которых зависит данное множество, то задача называется *переопределённой* и является невозможной, если только часть данных условий не является излишней, т. е. если эти условия не являются следствиями других условий.

Рассмотрим примеры.

Пример 12. Решить одно уравнение с тремя неизвестными:

$$ax + by + cz = d.$$

Это — неопределённая задача. Для нахождения трёх неизвестных нужны три уравнения, а в нашей задаче дано одно. Можно каким-нибудь двум неизвестным придать произвольные значения, и тогда получится уравнение с одним неизвестным, которое можно будет найти.

Можно рассуждать короче. Требуется найти тройку чисел  $(x, y, z)$ . Таких троек существует  $\infty^3$ . Нам дано одно условие. Значит, существует  $\infty^{3-1} = \infty^2$  троек, удовлетворяющих этому условию (это значит, что можно произвольно задать два числа).

Пример 13. Найти точку, у которой абсцисса равна ординате, т. е.

$$x = y.$$

На плоскости имеется  $\infty^2$  точек. Нам дано одно условие. Следовательно, существует  $\infty^{2-1} = \infty^1$  точек, удовлетворяющих этому условию. Действительно, этому условию удовлетворяют все точки биссектрисы нормального координатного угла.

Пример 14. Найти прямую, проходящую через точку  $(2, 5)$ , параллельную оси  $Y$  и перпендикулярную к оси  $X$ .

Мы видели на ряде примеров, что для нахождения определённой прямой на плоскости надо задать два условия. В этой задаче их дано три:

- 1) искомая прямая проходит через точку  $(2, 5)$ ,
- 2) искомая прямая параллельна оси  $Y$ ,
- 3) искомая прямая перпендикулярна к оси  $X$ .

Но третье условие является следствием второго, и потому данная задача не является переопределённой; она возможна.

Пример 15. Найти окружность с центром в данной точке  $A$ , проходящую через данную точку  $B$ .

На ряде примеров мы видели, что для нахождения определённой окружности на плоскости нужны три условия. В этой задаче их дано два:

- 1) искомая окружность имеет центр в точке  $A$ ,
- 2) искомая окружность проходит через точку  $B$ .

Между тем геометрически очевидно, что это — задача вполне определённая. Это недоразумение разъяснится в главе VI, п 75 (стр. 148). Оказывается, первое условие надо считать за два, так как оно даёт два уравнения, связывающих параметры, определяющие данную окружность.

**47. Уравнение линии как ограничение, наложенное на координаты.** Каждой паре чисел  $(x, y)$  соответствует некоторая точка на плоскости. Если мы будем придавать  $x$  и  $y$  произвольные значения, то точка  $(x, y)$  может занять на плоскости любое положение.

Допустим, что дано уравнение

$$F(x, y) = 0.$$

Это уравнение налагает некоторое ограничение на наш произвол выбора  $x$  и  $y$ . Теперь мы можем придавать  $x$  и  $y$  только значения, удовлетворяющие данному уравнению. Если мы будем придавать  $x$  и  $y$  такие значения, то соответствующая точка будет занимать различные положения на линии, изображающей данное уравнение.

Таким образом, уравнение

$$F(x, y) = 0$$

есть ограничение, налагаемое на точку  $(x, y)$ . Это ограничение выделяет из всей плоскости некоторую линию, точки которой удовлетворяют ему.

Уравнение  $F(x, y) = 0$  не определяет чисел  $x, y$ , но лишь выделяет из всех возможных пар чисел (которых существует  $\infty^2$ )  $\infty^1$  пар, удовлетворяющих ему. Соответственно этому оно на плоскости выделяет из всех точек (которых существует  $\infty^2$ )  $\infty^1$  точек (т. е. линию).

Если линия задана уравнениями в параметрической форме

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t),$$

то эти уравнения тоже определяют  $\infty^1$  пар чисел (потому что пар чисел получается столько, сколько значений можно придать *одному* переменному  $t$ ), т. е. выделяют из всей плоскости  $\infty^1$  точек.

---

## ГЛАВА IV

### ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

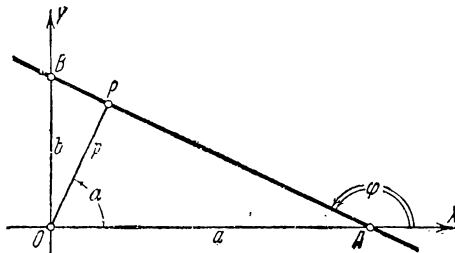
#### § 1. Различные виды уравнения прямой

**48. Параметры, определяющие прямую на плоскости.** Чтобы вывести уравнение прямой, надо сначала задать эту прямую. Определить положение прямой на плоскости можно многими способами. Наиболее употребительны следующие.

1. Даются отрезки, отсекаемые прямой на осях координат (см. черт. 47):

$$OA = a, \quad OB = b.$$

Ясно, что эти отрезки вполне определяют прямую. Они могут иметь любые значения (как положительные, так и отрицательные), т. е.



$$\left. \begin{aligned} -\infty < a < \infty, \\ -\infty < b < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Последнее утверждение обозначает, что для *любых* значений  $a$  и  $b$  существует соответствующая прямая, и если бы мы как-нибудь ограничили изменение  $a$  или  $b$ , то не всякую прямую мы сумели бы задать при помощи этих отрезков.

2. Дается угол, образованный прямой с осью  $X$  (этот угол отсчитывается от оси  $X$  к прямой против часовой стрелки), и отрезок, отсекаемый прямой на оси  $Y$ :

$$\angle XAB = \varphi, \quad OB = b.$$

Угол  $\varphi$  всегда задается положительным и не больше  $180^\circ$ :

$$0 \leq \varphi < 180^\circ, \quad (2)$$

так как этих значений угла  $\varphi$  достаточно, чтобы иметь возможность задать любую прямую. Если прямая параллельна оси  $X$ , то

угол  $\varphi$  можно считать либо 0, либо  $180^\circ$ ; это могло бы зависеть от того, какое направление установлено на прямой — такое, как на оси  $X$ , или противоположное. Но так как мы имеем дело с *прямой*, а не с *осью*, то на ней не установлено определённого направления. Условимся для определённости для прямой, параллельной оси  $X$ , всегда считать  $\varphi = 0$ . В соответствии с этим в неравенствах (2) в первом случае поставлен знак  $\leq$ , а во втором — знак  $<$ .

3. Дается длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую (т. е. расстояние прямой от начала координат), и угол, образованный этим перпендикуляром с осью  $X$ :

$$OP = p, \quad \angle XOP = \alpha.$$

Зная  $\alpha$  и  $p$ , можно построить прямую. Для этого из начала координат выводится полупрямая (существенно, что это — полупрямая а не прямая), образующая угол  $\alpha$  с осью  $X$  (угол  $\alpha$  отсчитывается от положительной части оси  $X$  против часовой стрелки), на этой полупрямой откладывается отрезок  $OP$ , равный  $p$ , и через точку  $P$  проводится перпендикуляр к этой полупрямой. Этот перпендикуляр и является искомой прямой.

Заметим, что перпендикуляр  $OP$  всегда проводится *от* начала *к* прямой; поэтому его следует рассматривать как *ось*. Угол  $\alpha$  задается в пределах от 0 до  $360^\circ$ . Обойтись областью изменения  $\alpha$  от 0 до  $180^\circ$  нельзя; читатель легко убедится, что если прямая образует с координатными осями треугольник, расположенный в третьей или четвертой четверти, то для неё необходимо считать угол  $\alpha$  больше  $180^\circ$ .

Для прямой, параллельной оси  $Y$  и отсекающей на оси  $X$  *положительный* отрезок, угол  $\alpha$  можно принимать за 0 или за  $360^\circ$ ; условимся в этом случае принимать его за 0.

Расстояние  $p$  (как и всякое расстояние) никогда не считается отрицательным. Его величина, разумеется, может быть любой.

Итак,

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq \alpha < 360^\circ, \\ 0 &\leq p < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Числа, определяющие какой-нибудь геометрический образ, т. е. для каждого данного образа имеющие постоянные значения, называются *параметрами* \*). Так, параметрами круга являются координаты центра и радиус. Величины  $a, b, \varphi, \alpha, p$  являются параметрами прямой. Из предыдущего видно, что *прямая определяется двумя параметрами*.

\*) В мелком шрифте [гл. III, § 3 (стр. 91)] дано более точное определение параметров.

Другими словами: семейство всех прямых плоскости зависит от двух произвольных параметров;

или: на плоскости существует  $\infty^2$  прямых,

или: во всякой задаче, где требуется найти определённую прямую, должны быть даны два условия (см. примеры 2, 6 и 7 на стр. 88—89).

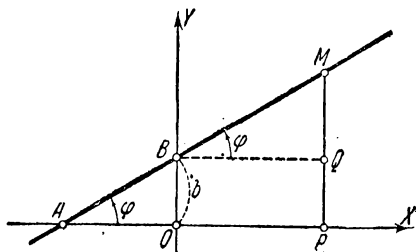
**49. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** В предыдущем пункте мы познакомились с тремя способами задания прямой. Каждому из этих способов соответствует особый вид уравнения прямой. Мы начнём со второго способа, т. е. предположим, что прямая задана параметрами  $\varphi$  и  $b$  и требуется вывести уравнение этой прямой.

Пусть  $M(x, y)$  — произвольная точка прямой (черт. 48). При движении точки  $M$  по прямой переменный отрезок  $BM$  всегда имеет один и тот же угловой коэффициент [см. п 19 (стр. 44)]. Зная координаты концов этого отрезка

$$B(0, b), \quad M(x, y),$$

найдем [гл. I, § 2, формула (3) (стр. 44)]:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y - b}{x}. \quad (*)$$



Черт. 48.  $y = kx + b$ .

Уравнению (\*) удовлетворяют координаты всех точек прямой. Ему не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на прямой.

В самом деле, если точка  $M$  не лежит на прямой, то отрезок  $BM$  образует с осью  $X$  угол  $\psi$ , отличный от  $\varphi$  и от  $180^\circ + \varphi$ . Выражение  $\frac{y - b}{x}$  будет равно  $\operatorname{tg} \psi$  и, следовательно, не будет равно  $\operatorname{tg} \varphi$ .

Таким образом, уравнение (\*) есть уравнение прямой.

Введём обозначение

$$\operatorname{tg} \varphi = k; \quad (4)$$

$k$  называется *угловым коэффициентом прямой*. Итак, *угловым коэффициентом прямой называется тангенс её угла наклона к оси  $X$* . Уравнение (\*) принимает вид

$$y = kx + b. \quad (5)$$

Уравнение прямой, написанное в форме (5), называется *уравнением с угловым коэффициентом*.

**Пример 1.** Написать уравнение прямой, наклонённой к оси  $X$  под углом  $\varphi = 45^\circ$  и отсекающей на оси  $Y$  отрезок  $b = -3$ .

Так как в данном случае угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ , то уравнение данной прямой таково:

$$y = x - 3.$$

Пример 2. Какой линией изображается уравнение

$$y = -2x + 5.$$

Так как это уравнение имеет вид (5), то оно изображается прямой линией. Эта прямая образует с осью  $X$  угол, тангенс которого равен  $-2$ .

$$\operatorname{tg} \varphi = -2,$$

откуда  $\varphi = 116^\circ 34'$ ; прямая отсекает на оси  $Y$  отрезок, равный 5:

$$b = 5.$$

Если прямая параллельна оси  $Y$ , то её уравнение не может быть написано в виде «уравнения с угловым коэффициентом», потому что такой прямой не соответствуют конечные значения  $k$  и  $b$ . Ясно, что все точки такой прямой имеют одну и ту же абсциссу, т. е. уравнение такой прямой таково:

$$x = a, \quad (6)$$

где  $a$  — отрезок, отсекаемый прямой на оси  $X$ .

**50. Основная теорема о прямой.** *Всякое уравнение первой степени*

$$Ax + By + C = 0 \quad (7)$$

*изображается прямой линией.*

Прежде чем доказывать эту теорему, называемую *основной теоремой о прямой*, сделаем некоторые пояснения.

Уравнение (7) называется *общим уравнением первой степени с двумя переменными*. Всякое уравнение первой степени с числовыми коэффициентами является частным случаем уравнения (7).

В предыдущем п было доказано, что всякая прямая имеет уравнение первой степени [прямая, не параллельная оси  $Y$ , имеет уравнение  $y = kx + b$ , а прямая, параллельная оси  $Y$ , имеет уравнение  $x = a$ ], но не было доказано, что *только* прямая имеет уравнение первой степени. Сейчас будет доказано, что кроме прямых не существует никаких других линий, имеющих уравнение первой степени.

**Доказательство.** Решим уравнение (7) относительно  $y$ :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad (**)$$

Можно построить прямую, образующую с осью  $X$  угол, тангенс которого равен  $-\frac{A}{B}$ , и отсекающую на оси  $Y$  отрезок, равный  $-\frac{C}{B}$ , т. е.

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

Согласно предыдущему п, уравнением этой прямой будет служить как раз уравнение (\*\*).

Наше рассуждение неприменимо в том случае, когда в уравнении (7)  $B=0$ . В этом случае уравнение (7) имеет вид

$$Ax + C = 0,$$

и его нельзя привести к виду (\*\*), т. е. решить относительно  $y$ , так как оно не содержит  $y$ . В таком случае решим его относительно  $x$ :

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Можно построить прямую, параллельную оси  $Y$  и отсекающую на оси  $X$  отрезок, равный  $-\frac{C}{A}$ , т. е.

$$a = -\frac{C}{A}. \quad (***)$$

Согласно предыдущему п, уравнением этой прямой будет служить как раз уравнение (\*\*\*)

Таким образом доказано, что уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0$$

всегда изображается прямой.

Уравнение с угловым коэффициентом отличается от других видов уравнений первой степени тем, что оно решено относительно  $y$ . Всякое уравнение первой степени, в котором  $B \neq 0$ , можно привести к виду с угловым коэффициентом: для этого его надо решить относительно  $y$ . Коэффициент при  $x$  в уравнении, решённом относительно  $y$ , есть угловой коэффициент прямой, а свободный член есть отрезок, отсекаемый на оси  $Y$ . Отрезок  $b$  называют также *начальной ординатой*, потому что из уравнения  $y = kx + b$  видно, что  $b$  есть то значение  $y$ , которое получается при  $x = 0$ .

Пример. Каков геометрический смысл уравнения

$$3x - 2y - 8 = 0?$$

Это есть уравнение прямой. Решая его относительно  $y$ ,

$$y = \frac{3}{2}x - 4,$$

обнаруживаем, что угловой коэффициент данной прямой равен  $\frac{3}{2}$ , а начальная ордината равна  $-4$ .

В уравнении вида

$$Ax + By + C = 0$$

каждый из коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  в отдельности никакого геометрического значения не имеет. Это ясно из того, что можно всё уравнение умножить на какое-нибудь число  $M$ :

$$MAx + MBY + MC = 0.$$

Это уравнение, имеющее другие коэффициенты, изображает ту же прямую.

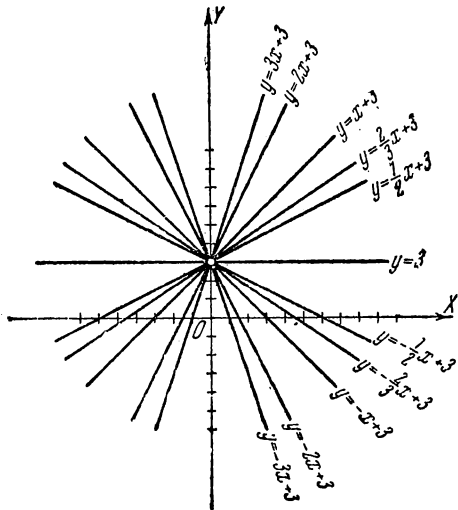


**51. Влияние параметров  $k$  и  $b$  на расположение прямой.** Параметр  $k$  влияет только на направление прямой (направление прямой определяется её углом с каким-нибудь постоянным направлением, обычно с горизонтальным направлением, т. е. с осью  $X$  или с любой прямой, параллельной оси  $X$ ). Следовательно, если в уравнении

$$y = kx + b$$

мы фиксируем  $b$  и будем изменять  $k$ , то наша прямая будет поворачиваться, а её начальная ордината не будет изменяться.

На черт. 49 изображены прямые, для которых  $b=3$ ; около каждой прямой написано её уравнение. Каждому значению  $k$  соответствует своя прямая. При  $k=0$  прямая параллельна оси  $X$ . По мере увеличения  $k$  угол  $\varphi$  увеличивается; при возрастании  $k$  от 0 до 1  $\varphi$  увеличивается от 0 до  $45^\circ$ , а при возрастании  $k$  от 1 до  $\infty$   $\varphi$  увеличивается от  $45^\circ$  до  $90^\circ$ . При отрицательном  $k$  угол  $\varphi$  тупой, и, следовательно, прямая идёт вниз (если двигаться по ней направо).



Черт. 49. Влияние углового коэффициента.

Если мы фиксируем  $k$  и будем изменять  $b$ , то мы будем получать разные прямые, образующие с осью  $X$  один и тот же угол  $\varphi$ , и, следовательно, *параллельные* между собой, но имеющие разные начальные ординаты. Таким образом, при изменении  $b$  прямая перемещается по плоскости, не меняя направления. Если  $k=0$ , то мы получим семейство прямых, параллельных оси  $X$ . Рекомендуем читателю изучить черт. 50 и сделать самому необходимые заключения.

Сформулируем некоторые частные положения.

1. Две прямые параллельны между собой в том и только в том случае, если у них одинаковые угловые коэффициенты.

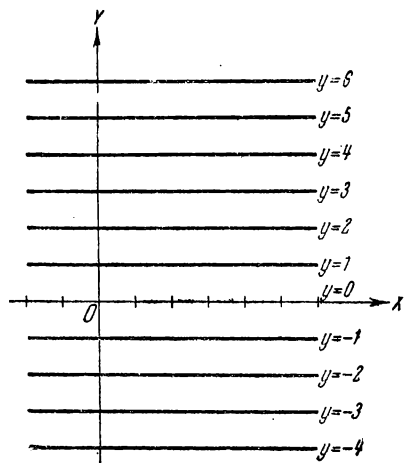
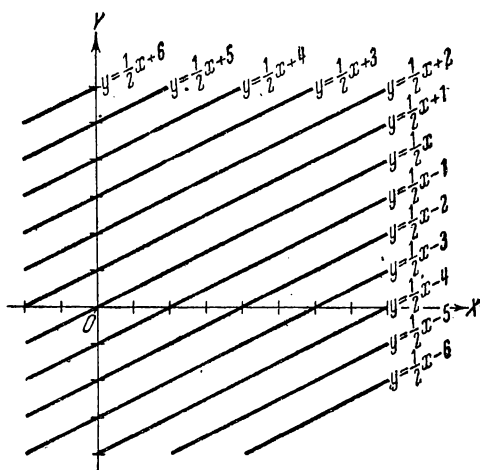
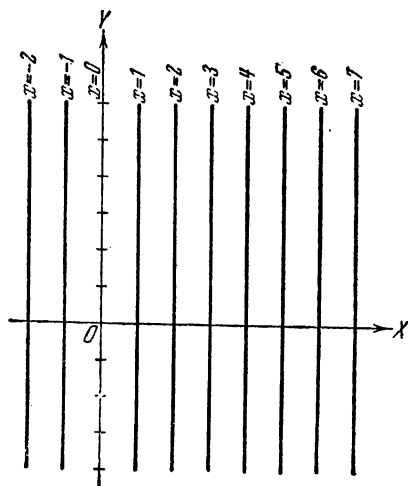
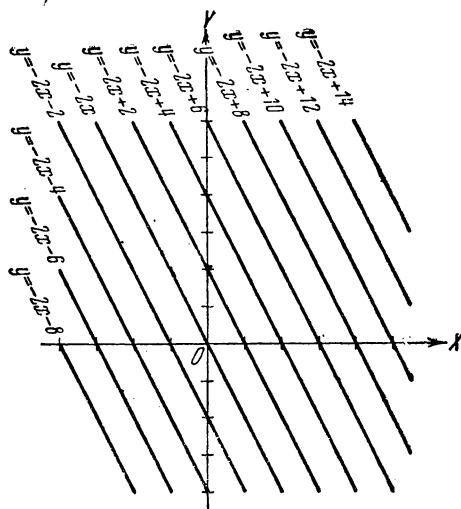
2. Уравнение прямой, проходящей через начало:  $y = kx$ .

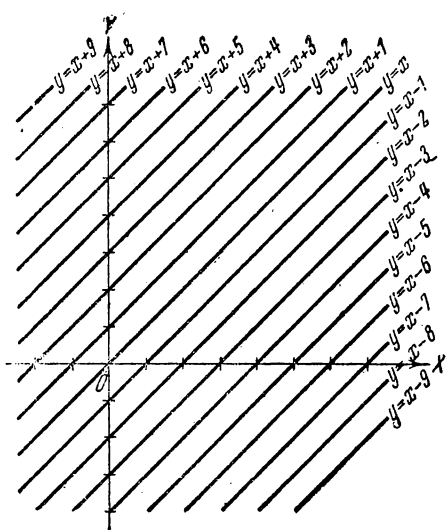
3. Уравнение оси  $X$ :  $y = 0$ .

4. Уравнение всякой прямой, параллельной оси  $X$ :  $y = b$ .

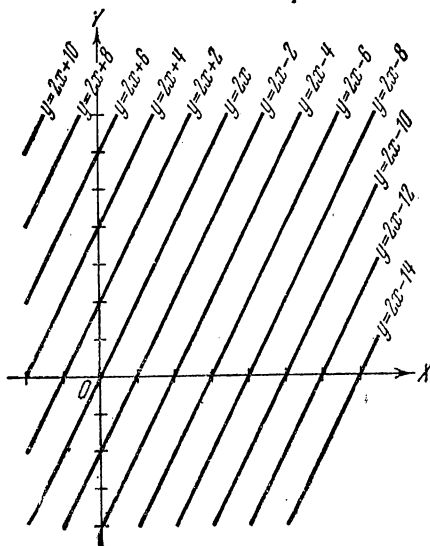
5. Уравнение биссектрисы нормального координатного угла:  $y = x$ .

6. Уравнение всякой прямой, параллельной этой биссектрисе:  $y = x + b$ .

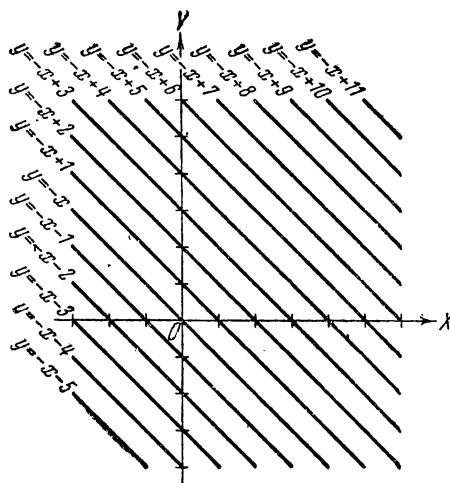
 $k = 0$  $k = \frac{1}{2}$  $k = \infty$  $k = -2$



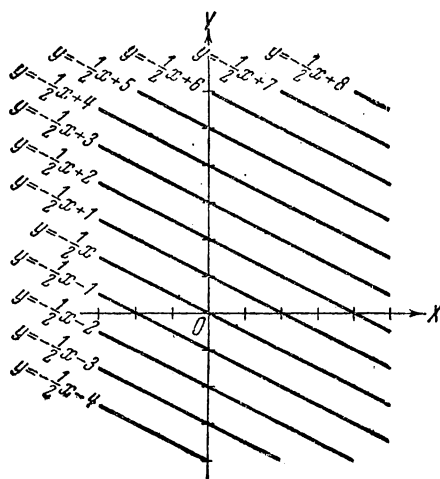
$k = 1$



$k = 2$



$k = -1$



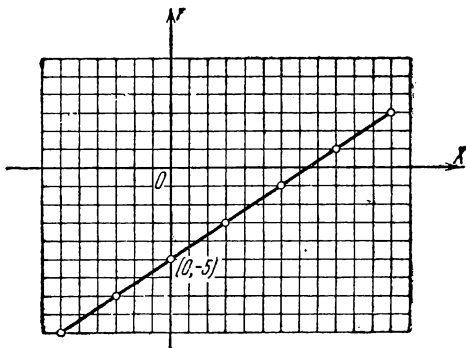
$k = -\frac{1}{2}$

углового коэффициента.

7. Уравнение оси  $Y$ :  $x=0$ .

8. Уравнение всякой прямой, параллельной оси  $Y$ :  $x=a$ .

9. Уравнение биссектрисы координатного угла, проходящей в чётных четвертях:  $y=-x$ .



Черт. 51. Построение прямой по уравнению с угловым коэффициентом.

10. Уравнение всякой прямой, параллельной этой биссектрисе:  $y=-x+b$ .

11. Если угловой коэффициент положителен ( $k>0$ ), то прямая идёт вверх\*), причём чем угловой коэффициент больше, тем круче она идёт вверх.

12. Если угловой коэффициент отрицателен ( $k<0$ ), то прямая идёт вниз, причём чем угловой коэффициент больше по абсолютной величине, тем круче она падает.

На клетчатой бумаге весьма удобно строить прямую по её уравнению с угловым коэффициентом. Пусть, например, дано уравнение

$$y = \frac{2}{3}x - 5.$$

Построим точку  $(0, -5)$  и, начиная от этой точки, отметим несколько точек, продвигаясь каждый раз на три клетки вправо и две клетки вверх (черт. 51). Можно продолжить это построение в другую сторону, продвигаясь на три клетки влево и две клетки вниз. Все отмеченные точки лежат на прямой. Из построения ясно, что эта прямая образует с осью  $X$  угол, тангенс которого равен  $\frac{2}{3}$ . Этот угол равен  $33^\circ 41'$ . Мы видим, что для построения удобнее знать тангенс угла, чем сам угол.

Этот приём неприменим, если угловой коэффициент  $k$  иррационален. В этом случае можно заменить  $k$  приближённым рациональным значением и построить прямую приближённо.

**52. Нормальное уравнение прямой.** Пусть дана длина перпендикуляра, опущенного из начала на прямую, и угол, образованный этим перпендикуляром с осью  $X$  (черт. 52).

$$OP=p, \quad \angle XOP=\alpha.$$

Возьмём на прямой точку  $M$  и предположим, что она движется по прямой; обозначим её координаты через  $(x, y)$ . Рассмотрим ломаную

\*) Когда указывают, что линия идёт вверх или вниз, то всегда подразумевается: при движении по ней слева направо.

ную  $OM'MP$ . Её проекция на любую ось равна проекции замыкающего вектора  $\overline{OP}$  на ту же ось:

$$\text{пр } OM' + \text{пр } M'M + \text{пр } MP = \text{пр } \overline{OP}.$$

Будем проектировать на ось  $OP$ . Звенья ломаной будем рассматривать как направленные отрезки. Предварительно установим следующие факты:

1) Отрезок  $OM'$  принадлежит оси  $X$ , образующей с осью  $OP$  угол  $\alpha$ .

2) Отрезок  $M'M$  принадлежит оси  $Y$ , образующей с осью  $OP$  угол  $\alpha - 90^\circ$  \*).

3) Отрезок  $MP$  перпендикулярен к  $OP$ .

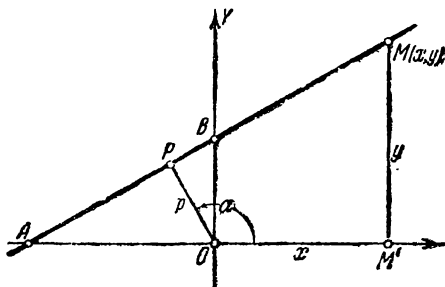
Замечая, что  $OM' = x$ ,  $M'M = y$ ,  $OP = p$ , получим:

$$x \cos \alpha + y \cos (\alpha - 90^\circ) + p \cos 90^\circ = p$$

или

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) справедливо при всяком положении точки на прямой. Как и следовало ожидать, оно — первой степени. Уравнение (8) называется *нормальным уравнением прямой* \*\*).



Черт. 52.  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ .

**53. Приведение уравнения прямой к нормальному виду.** Укажем признаки, отличающие нормальное уравнение прямой от других видов уравнения прямой. Во-первых, в нормальном уравнении все члены перенесены в одну сторону. Во-вторых, сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице (потому что эти коэффициенты суть косинус и синус *одного* угла). В-третьих, свободный член отрицателен (потому что  $p$  обозначает *расстояние* прямой от начала, т. е. величину существенно положительную). Эти условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы

\*) Потому что, в силу правила цепи [Введение, п 4 (стр. 15)],

$$(X, OP) + (OP, Y) = (X, Y) = 90^\circ,$$

откуда

$$(OP, Y) = 90^\circ - (X, OP) = 90^\circ - \alpha,$$

$$(Y, OP) = \alpha - 90^\circ.$$

\*\*) Слово «нормаль» обозначает перпендикуляр. Уравнение называется нормальным потому, что в нём участвует нормаль к прямой.

уравнение было нормальным. Если сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице, то эти коэффициенты являются косинусом и синусом некоторого угла  $\alpha$ , и данное уравнение совпадает с уравнением прямой, для которой перпендикуляр, опущенный на неё из начала, образует с осью  $X$  как раз такой угол  $\alpha$ , а длина этого перпендикуляра равна абсолютной величине свободного члена.

Докажем, что *всякое уравнение первой степени можно привести к нормальному виду*. Рассмотрим общее уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

и покажем, что существует такой множитель  $M$ , от умножения на который данное уравнение становится нормальным; этот множитель называется *нормирующим множителем*.

Умножим данное уравнение на множитель  $M$ , пока неопределённый:

$$MAx + MBu + MC = 0. \quad (\dagger)$$

Для того чтобы уравнение  $(\dagger)$  было нормальным, необходимо, чтобы сумма квадратов коэффициентов при  $x$  и  $y$  была равна единице:

$$M^2 A^2 + M^2 B^2 = 1,$$

откуда находим  $M$ . При этом из двух возможных знаков надо взять тот, который противоположен знаку  $C$  [чтобы свободный член в уравнении  $(\dagger)$  был отрицателен]:

$$\left. \begin{aligned} M &= \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ \text{знак } M &\text{ противоположен знаку } C. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Формулы (9) определяют нормирующий множитель. После умножения на этот множитель уравнение  $Ax + By + C = 0$  становится нормальным.

**Пример.** Определить параметры  $\alpha$  и  $p$  для прямой

$$8x - 15y + 85 = 0.$$

По формулам (9) находим нормирующий множитель  $M = -\frac{1}{17}$ . Следовательно, нормальное уравнение данной прямой таково:

$$-\frac{8}{15}x + \frac{15}{17}y - 5 = 0.$$

Коэффициенты при  $x$  и  $y$  суть соответственно косинус и синус  $\alpha$ , т. е.

$$\cos \alpha = -\frac{8}{15}, \quad \sin \alpha = \frac{15}{17}.$$

Обращаясь к таблицам, находим *табличное значение* угла  $\alpha$ , для которого  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$ ;  $\alpha_1 = 61^\circ 56'$  (с точностью до полминуты). Есть ещё один угол  $\alpha$ , для которого  $\sin \alpha = \frac{15}{17}$  \*),  $\alpha_2 = 180^\circ - 61^\circ 56' = 118^\circ 04'$ . Учитывая, что  $\cos \alpha < 0$ , заключаем, что следует взять второе из этих значений. Итак, для данной прямой

$$\alpha = 118^\circ 04'.$$

Расстояние данной прямой от начала:  $p = 5$ .

К нормальному виду можно привести уравнение *всякой без исключения* прямой (к виду с угловым коэффициентом нельзя привести уравнения прямой, параллельной оси  $Y$ ), так как по формулам (9) всегда можно вычислить  $M$  ( $A$  и  $B$  не могут быть одновременно нулями; в противном случае, как видно из уравнения  $Ax + By + C = 0$ ,  $C$  тоже должно было бы быть нулём. Но тогда от уравнения  $Ax + By + C = 0$  ничего не осталось бы).

**54. Уравнение прямой в отрезках.** Пусть дана прямая

$$Ax + By + C = 0.$$

Обозначим отрезки, отсекаемые прямой на осях  $X$  и  $Y$ , соответственно через  $a$  и  $b$ . В таком случае координаты точки пересечения прямой с осью  $X$  суть  $(a, 0)$ , а координаты точки пересечения прямой с осью  $Y$  суть  $(0, b)$ . Так как эти точки лежат на данной прямой, то их координаты должны удовлетворять её уравнению:

$$\begin{aligned} Aa + B \cdot 0 + C &= 0, \\ A \cdot 0 + Bb + C &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{C}{A}, \\ b &= -\frac{C}{B}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Можно привести уравнение  $Ax + By + C = 0$  к такому виду, чтобы в нём фигурировали комбинации коэффициентов  $-\frac{C}{A}$  и  $-\frac{C}{B}$ , и заменить эти комбинации соответственно через  $a$  и  $b$ . Для этого перенесём в данном уравнении  $C$  направо:

$$Ax + By = -C.$$

Разделим уравнение на  $-C$ :

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1.$$

---

\*) Напоминаем, что угол  $\alpha$  всегда заключён в пределах от 0 до  $360^\circ$  [формулы (3) (стр. 95)].

В первом члене разделим числитель и знаменатель на  $A$ , а во втором на  $B$ :

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1,$$

или, на основании формул (10):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (11)$$

Уравнение (11) называется «*уравнением прямой в отрезках*». Его признаки таковы:

*Свободный член перенесён вправо и равен 1.*

*Коэффициенты при  $x$  и  $y$  отнесены в знаменатели.*

Примечание. Если при  $x$  или  $y$  имеется знак минус, то его следует отнести в знаменатель, а перед дробью писать плю-..

Пример. Уравнение

$$2x - 3y + 9 = 0$$

привести к виду в отрезках:

$$2x - 3y = -9,$$

$$\frac{2x}{-9} + \frac{3y}{9} = 1,$$

$$\frac{x}{-4,5} + \frac{y}{3} = 1.$$

Следовательно, данное уравнение изображает прямую, отсекающую на оси  $X$  отрезок  $-4,5$ , а на оси  $Y$  отрезок  $3$ .

При приведении общего уравнения к виду (11) нам приходилось делить на  $C$ ; это невозможно, если  $C=0$ . Мы знаем, что если свободный член равен нулю, то прямая проходит через начало [п 51, положение 2 (стр. 99)]. Следовательно, *к виду «в отрезках» нельзя привести уравнения прямой, проходящей через начало*. Это ясно ещё из того, что если прямая проходит через начало, то каждый из отрезков, отсекаемых ею на осях, равен нулю, т. е.

$$a=0, \quad b=0,$$

и уравнение (11) в этом случае теряет смысл, так как у него в знаменателях нули.

**55. Отсутствие некоторых членов в уравнении прямой.** Уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad (\dagger \dagger)$$

вообще говоря, содержит три члена, но в частных случаях некоторые из них могут отсутствовать. Выясним, как влияет отсутствие некоторых членов на расположение прямой.



Сначала рассмотрим случай, когда отсутствует один член. Таких случаев может быть три.

Случай 1. Отсутствует свободный член, т. е.  $C=0$ . В этом случае прямая проходит через начало. Обратно: если прямая проходит через начало, то  $C=0$ .

В самом деле, при  $C=0$  уравнение  $(††)$  принимает вид

$$Ax + By = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при подстановке значений  $x=0$ ,  $y=0$ , и следовательно, точка  $(0, 0)$  принадлежит прямой. Если же  $C \neq 0$ , то при  $x=0$ ,  $y=0$  уравнение  $(††)$  не удовлетворяется, и следовательно, начало не принадлежит прямой.

Случай 2. Отсутствует член, содержащий  $x$ , т. е.  $A=0$ . В этом случае прямая параллельна оси  $X$ . Обратно: если прямая параллельна оси  $X$ , то  $A=0$ .

В самом деле, при  $A=0$  уравнение  $(††)$  принимает вид

$$By + C = 0,$$

откуда

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Таким образом, значение  $y$  оказывается постоянным, т. е. не зависящим от  $x$ . Это значит, что все точки прямой имеют одинаковую ординату, т. е. прямая параллельна оси  $X$ . При  $A \neq 0$  мы имели бы:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

т. е.  $y$  зависело бы от  $x$ . Это значит, что разные точки прямой имели бы разные ординаты, и прямая не была бы параллельна оси  $X$ .

Пояснение. Рассматривая уравнение  $By + C = 0$ , было бы ошибкой считать, что  $x=0$ . Если в уравнении  $(††)$  отсутствует член, содержащий  $x$ , то это происходит не потому, что  $x=0$ , а потому, что  $A=0$ . Из того, что в уравнении  $By + C = 0$  отсутствует  $x$ , следует, что на  $x$  не наложено никакого ограничения, т. е. мы вправе придавать  $x$  любые значения. Например, уравнению  $2y + 3 = 0$  удовлетворяют координаты следующих точек:

$$\left(-1, -\frac{3}{2}\right), \quad \left(0, -\frac{3}{2}\right), \quad \left(1, -\frac{3}{2}\right), \quad \left(2, -\frac{3}{2}\right)$$

и т. д.

Случай 3. Отсутствует член, содержащий  $y$ , т. е.  $B=0$ . В этом случае прямая параллельна оси  $Y$ . Обратно: если прямая параллельна оси  $Y$ , то  $B=0$ .

Рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

Теперь рассмотрим случай, когда отсутствуют два члена.

Случай 4.  $A=0$ ,  $C=0$ ,  $B \neq 0$ . Согласно изложенному выше, наша прямая параллельна оси  $X$  и проходит через начало. Это значит, что рассматриваемая прямая есть сама ось  $X$ . Это ясно и непосредственно, так как при  $A=C=0$  уравнение ( $\dagger \dagger$ ) принимает вид

$$By = 0$$

или, по сокращении на  $B$ ,

$$y = 0,$$

а это есть уравнение оси  $X$ .

Случай 5.  $B=0$ ,  $C=0$ ,  $A \neq 0$ . В этом случае прямая есть сама ось  $Y$ . Рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

Случай 6.  $A=0$ ,  $B=0$ ,  $C \neq 0$ .

Этот случай, невозможен. Во-первых, подставляя в уравнение ( $\dagger \dagger$ )  $A=B=0$ , мы получим  $C=0$ , что противоречит условию  $C \neq 0$ . Во-вторых, при  $A=0$  прямая параллельна оси  $X$ , а при  $B=0$  она параллельна оси  $Y$ . Таким образом, в случае 6 прямая должна была бы быть параллельна одновременно осям  $X$  и  $Y$ , что невозможно.

### Упражнение

**70.** Построить прямые:

- a)  $5x + 2y - 10 = 0$ ; f)  $35x - 18y + 63 = 0$ ;
- b)  $2x - y + 28 = 0$ ; g)  $84x + 15y - 36 = 0$ ;
- c)  $x + 2y + 10 = 0$ ; h)  $3x + 5y + 1 = 0$ ;
- d)  $2x + 5y = 0$ ; i)  $34x - 21y - 119 = 0$ .
- e)  $23x - 10y = 0$ ;

### Задачи

**71.** Составить уравнения семейств прямых:

- a) отсекающих на оси  $Y$  отрезок, вдвое больший, чем на оси  $X$ ;
- b) у которых угловой коэффициент равен начальной ординате;
- c) отстоящих от начала координат на расстоянии 3.

По уравнению построить несколько прямых каждого семейства. Указать расположение прямых каждого семейства.

**72.** Составить уравнение прямой, зная её угловой коэффициент и начальную ординату:

- a)  $k=2$ ,  $b=-1$ ; c)  $k=\frac{1}{2}$ ,  $b=0$ ;
- b)  $k=-\frac{1}{3}$ ,  $b=5$ ; d)  $k=0$ ,  $b=-2$ .

**73.** Убедиться геометрически, что параметры  $\alpha = 60^\circ$ ,  $p = 1$ ,  $\varphi = 150^\circ$ ,  $a = 2$ ,  $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  относятся к одной прямой. Составить её уравнения — нормальное, с угловым коэффициентом и в отрезках — и убедиться аналитически, что они определяют одну и ту же прямую.

**74.** Составить уравнение прямой, зная угол её наклона к оси  $X$  и начальную ординату:

a)  $\varphi = 45^\circ$ ,  $b = 10$ ; e)  $\varphi = 25^\circ 10'$ ,  $b = 14$ ;

b)  $\varphi = 120^\circ$ ,  $b = -2$ ; f)  $\varphi = 140^\circ$ ,  $b = 1$ ;

c)  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ,  $b = -1$ ; g)  $\varphi = 1,3$ ,  $b = 0$ ;

d)  $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ ,  $b = 0$ ; h)  $\varphi = 2,5$ ,  $b = -5$ .

**75.** Следующие уравнения прямых привести к виду с угловым коэффициентом и определить угол наклона к оси  $X$  и начальную ординату:

a)  $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$ ; d)  $y + 7 = 0$ ;

b)  $2x - 5y + 8 = 0$ ; e)  $x - 3 = 0$ .

c)  $3x + y - 2 = 0$ ;

**76.** Составить уравнение прямой, зная длину перпендикуляра, опущенного на неё из начала, и угол наклона этого перпендикуляра к оси  $X$ :

a)  $p = 2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ; e)  $p = 4$ ,  $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ ;

b)  $p = 5$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ; f)  $p = 1$ ,  $\alpha = 2,3$ ;

c)  $p = 3$ ,  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ; g)  $p = 10$ ,  $\alpha = 4$ .

d)  $p = 0$ ,  $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ ;

**77.** Какие из следующих уравнений прямых являются нормальными:

a)  $2x + y - 5 = 0$ ; e)  $-0,96x - 0,28y - 1 = 0$ ;

b)  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$ ; f)  $\frac{\sqrt{5}}{6}x + \frac{\sqrt{31}}{6}y + 2 = 0$ ;

c)  $\frac{11}{61}x + \frac{60}{61}y + 3 = 0$ ; g)  $x - 3 = 0$ ;

d)  $\frac{9}{41}x - \frac{40}{41}y - 5 = 0$ ; h)  $y + 5 = 0$ .

**78.** Следующие уравнения прямых привести к нормальному виду и определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, и угол наклона этого перпендикуляра к оси  $X$ :

a)  $x + y - 3 = 0$ ; d)  $-12x + 35y + 111 = 0$ ;

b)  $\sqrt{3}x - 3y - 3 = 0$ ; e)  $2x + 5y + 4 = 0$ ;

c)  $7x + 24y - 50 = 0$ ; f)  $4x - 10y + 3 = 0$ .

**79.** Для прямой  $x - y - 3 = 0$  определить параметры  $\alpha$ ,  $p$ ,  $\varphi$ ,  $a$  и  $b$ .

**80.** Зная уравнение прямой, определить  $\alpha$  и  $p$ :

a)  $x \cos 32^\circ - y \sin 32^\circ - 3 = 0$ ;

b)  $x \cos 20^\circ + y \sin 20^\circ + 5 = 0$ ;

c)  $x \sin 40^\circ + y \cos 40^\circ - 4 = 0$ .

**81.** Составить уравнение прямой, зная отрезки, отсекаемые ею на осях

a)  $a=3$ ,  $b=5$ ; b)  $a=-2$ ,  $b=4$ .

**82.** Следующие уравнения прямых привести к виду в отрезках и определить отрезки, отсекаемые на осях координат:

a)  $3x + 2y - 6 = 0$ ; c)  $16x + 3y + 24 = 0$ ;

b)  $5x - 3y + 15 = 0$ ; d)  $77x - 15y - 35 = 0$ .

**83.** Зная угловой коэффициент и начальную ординату, составить уравнение прямой, привести его к нормальному виду и определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, и угол наклона этого перпендикуляра к оси  $X$ :

a)  $k=0,75$ ,  $b=-2$ ; b)  $k=3$ ,  $b=1$ .

**84.** Зная угловой коэффициент и начальную ординату, составить уравнение прямой и привести его к виду в отрезках:

a)  $k=\frac{2}{5}$ ,  $b=-3$ ; b)  $k=-4$ ,  $b=10$ .

**85.** По следующим данным составить нормальное уравнение прямой и привести его к виду с угловым коэффициентом:

a)  $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ ,  $p = 2\sqrt{3}$ ;

b)  $\sin \alpha = \frac{20}{101}$  ( $\alpha$  — острый угол),  $p=3$ ;

c)  $\sin \alpha = \frac{20}{101}$  ( $\alpha$  — тупой угол),  $p=3$ ;

d)  $\cos \alpha = 0,2$  ( $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ),  $p=5$

( $p$  обозначает длину перпендикуляра, опущенного из начала на прямую, а  $\alpha$  — угол наклона этого перпендикуляра к оси  $X$ ).

**86.** Зная отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, составить уравнение прямой, привести его к виду с угловым коэффициентом и определить угол наклона прямой к оси  $X$ :

a)  $a = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ,  $b=5$ ; c)  $a=-4$ ,  $b=-4$ ;

b)  $a = -\frac{3}{2}$ ,  $b=3$ ; d)  $a=12$ ,  $b=-6$ .

**87.** Зная отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, составить уравнение прямой, привести его к нормальному виду и определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, и угол наклона этого перпендикуляра к оси  $X$ :

a)  $a = \frac{17}{2}$ ,  $b = \frac{68}{15}$ ; c)  $a = -4$ ,  $b = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ;

b)  $a = \frac{\sqrt{29}}{2}$ ,  $b = -\frac{\sqrt{29}}{5}$ ; d)  $a = 5,1$ ,  $b = -3,4$ .

88. Указать, как расположены следующие прямые (не строя их):

- |                    |                    |                   |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| a) $y = x + 2$ ;   | g) $x = 0$ ;       | m) $y = x - 10$ ; |
| b) $6x - 5y = 0$ ; | h) $10x + y = 0$ ; | n) $y = -x$ ;     |
| c) $x = 2$ ;       | i) $y = 3$ ;       | o) $y = -5$ ;     |
| d) $y = -x + 8$ ;  | j) $4y - 1 = 0$ ;  | p) $3x - 8 = 0$ ; |
| e) $2y + 3 = 0$ ;  | k) $2x + 5 = 0$ ;  | q) $y = -x + 5$ ; |
| f) $y = x$ ;       | l) $y = 0$ ;       | r) $x = -4$ .     |

89. Составить таблицу перехода от каждого из известных нам четырёх видов уравнения прямой (общее уравнение первой степени, уравнение с угловым коэффициентом, нормальное уравнение и уравнение в отрезках) ко всем остальным.

Вывести формулы, выражающие одни параметры, определяющие прямую, через другие.

## § 2. Основные задачи на прямую линию

**56. Формулировка основных задач на прямую линию.** Аналитическая геометрия решает те же задачи, что и элементарная геометрия, но решает их не при помощи чертежа, а при помощи выкладок.

Когда в аналитической геометрии говорится: «дана точка  $A$ », то это не значит, что точка  $A$  отмечена на чертеже, а значит, что даны её координаты. Точно так же «найти точку  $A$ » значит — найти её координаты.

Когда в аналитической геометрии говорится: «дана прямая  $a$ », то это не значит, что прямая  $a$  проведена на чертеже, а значит, что дано её уравнение. Точно так же «найти прямую  $a$ » значит — составить её уравнение.

Положение точки на плоскости определяется двумя числами. Другими словами, на плоскости существует  $\infty^2$  точек. Ещё иначе: множество всех точек плоскости зависит от двух параметров. Следовательно, во всякой задаче, где требуется найти точку, должно быть дано два условия. Если дано одно условие, то задача неопределённая: существует  $\infty^1$  точек, удовлетворяющих этому условию.

Положение прямой тоже определяется двумя параметрами, т. е. на плоскости существует  $\infty^2$  прямых. Следовательно, во всякой задаче, где требуется найти прямую, должны быть даны два условия. Если дано одно условие, то задача — неопределённая, и существует  $\infty^1$  прямых, удовлетворяющих этому условию, или, как говорят, семейство прямых, зависящее от одного параметра. Например: найти прямую, отсекающую на оси  $X$  отрезок 3. Уравнение такой прямой

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{b} = 1.$$

После этих предварительных замечаний наметим задачи, возникающие перед нами.

Если даны две точки, то могут возникнуть две задачи:

1. Определить расстояние между ними.
2. Провести через них прямую.

Первая задача была решена в главе I, вторую задачу нам предстоит решить.

Если даны две прямые, то могут возникнуть две задачи:

1. Определить угол между ними.
2. Найти точку их пересечения.

Если даны точка и прямая, то могут возникнуть две задачи:

1. Найти расстояние от точки до прямой.
2. Провести через точку прямую параллельно данной прямой или перпендикулярно к данной прямой, или вообще под определённым углом к данной прямой.

К решению этих задач мы и перейдём, но будем решать их не в том порядке, в каком они здесь перечислены. Кроме того, мы рассмотрим ещё одну вспомогательную задачу, облегчающую решение некоторых перечисленных выше задач: провести прямую через данную точку (неопределённая задача).

Более сложные задачи, где фигурирует более двух точек и прямых, приводятся к этим основным задачам.

**57. Понятие о семействе линий.** Сказанное в предыдущем о семействах прямых может быть обобщено на любые линии.

Пусть дано уравнение

$$F(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

где  $x$  и  $y$  — текущие координаты, а  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — параметры. Если эти параметры неопределённые, т. е. их числовые значения не даны, а известно, что они могут принимать любые значения, непрерывно изменяясь в каких-либо промежутках, то данное уравнение изображает не какой-нибудь определённой линией, а семейством линий. Это семейство линий зависит от  $n$  параметров, или, другими словами, оно содержит  $\infty^n$  линий. Чтобы найти определённую линию из этого семейства, надо указать числовые значения  $n$  параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Во всякой задаче, где требуется найти определённую линию из рассматриваемого семейства, должно быть задано  $n$  условий. Эти условия в переводе на аналитический язык представляют уравнения, связывающие параметры  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ; решая эти уравнения, мы находим значения параметров  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Если условий дано меньше, чем  $n$ , например  $m$  ( $m < n$ ), то задача является неопределённой. По этим условиям можно лишь выделить из рассматриваемого семейства некоторое заключённое в нём более «бедное» семейство (содержащее только  $\infty^{n-m}$  линий).

Пример. Пусть дано уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

При неопределённых значениях  $a$ ,  $b$  и  $R$  оно изображается семейством всех окружностей плоскости.

В это уравнение входит три параметра:  $a$ ,  $b$  и  $R$ . Следовательно, семейство всех окружностей плоскости зависит от трёх параметров, или, другими словами, на плоскости существует  $\infty^3$  окружностей.

В задаче, где требуется найти определённую окружность, должны быть даны три условия.

**58. Точка пересечения двух прямых.** Пусть даны две прямые

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0; \end{cases} \quad (1)$$

требуется найти точку их пересечения. Так как точка пересечения принадлежит и первой и второй прямой, то её координаты должны удовлетворять и первому и второму уравнениям. Следовательно, надо найти пару чисел, удовлетворяющих обоим уравнениям (1), т. е. решить совместно эти уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Формулы (2) и решают поставленную задачу.

Перейдём к исследованию этих формул. Вычисление по ним станет невозможным, если знаменатель (он один и тот же в обеих формулах) обратится в нуль:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует [п 10, свойство V (стр. 25)]:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (3)$$

Мы знаем (п 8, стр. 21), что в этом случае уравнения (1) либо зависимы, либо противоречивы. Они зависимы в том случае, если отношение  $\frac{C_1}{C_2}$  тоже равно отношению (3):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (4a)$$

В этом случае уравнения (2) отличаются друг от друга только постоянным множителем, и следовательно, обе прямые совпадают. Ясно, что их точка пересечения неопределённа. В этом случае определители, стоящие в числителях формул (3), тоже обращаются в нули, и формулы дают неопределённые решения.

Если же отношение  $\frac{C_1}{C_2}$  не равно отношению (3):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad (4b)$$

то уравнения (1) противоречивы. В этом случае точки пересечения не существует, т. е. прямые параллельны. Легко показать, что при  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$  в формулах (2) числители отличны от нуля, а знаменатели равны нулю. Следовательно, для  $x$  и  $y$  получаются бесконечные ответы\*), что подтверждает параллельность прямых.

Итак, мы обнаружили условие параллельности двух прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

*т. е. две прямые параллельны, если коэффициенты при текущих координатах пропорциональны (совпадение прямых можно считать частным случаем параллельности).*

Полезно заметить следующее правило: *противоречивые уравнения изображаются параллельными прямыми, зависимые уравнения изображаются одной и той же прямой.*

**59. Пучок прямых.** Рассмотрим задачу: провести прямую через данную точку. Это — неопределённая задача, так как для нахождения прямой необходимы два условия, а мы имеем одно (прямая должна проходить через данную точку). Поэтому существует бесконечное множество прямых, проходящих через данную точку. *Множество всех прямых, проходящих через некоторую точку, называется пучком прямых, а эта точка называется центром пучка.*

Сформулированную задачу полезно рассмотреть, хотя она неопределённая, потому что она входит как составная часть во многие задачи; например, провести прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой (или вообще проходящую через данную точку и удовлетворяющую ещё какому-нибудь одному условию). Читатель увидит далее, каким образом предварительное рассмотрение неопределённой задачи о проведении прямой через данную точку оказывается полезным при решении других задач, в которые эта задача входит как составная часть.

Пусть дана точка  $A(x_1, y_1)$ . Напишем уравнение искомой прямой в виде

$$y = kx + b. \quad (*)$$

Пока параметры  $k$  и  $b$  — неопределённые, уравнение (\*) может изображаться *любой* прямой. Чтобы прямая (\*) проходила через точку  $A$ , координаты точки  $A$  должны удовлетворять уравнению (\*)

$$y_1 = kx_1 + b.$$

---

\*) За исключением того случая, когда  $A = A_1 = 0$  или  $B = B_1 = 0$ . Тогда один из числителей тоже равен нулю, и для одной координаты получается неопределённое значение, а для другой — бесконечное. В этом случае обе прямые параллельны одной из осей координат.



Это равенство связывает неизвестные параметры  $k$  и  $b$ . Определить из него оба параметра нельзя (в этом и заключается неопределённость задачи), но можно выразить один из них, например  $b$ , через другой:

$$b = y_1 - kx_1.$$

Подставляя это значение в уравнение (\*), получим:

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (5)$$

Уравнение (5) называется «уравнением пучка прямых». В нём  $x$  и  $y$  — текущие координаты,  $x_1$  и  $y_1$  — координаты центра пучка,  $k$  — произвольный параметр (угловой коэффициент прямой). При любом определённом значении  $k$  уравнение (5) есть уравнение одной определённой прямой, проходящей через точку  $A$ , а при неопределённом  $k$  уравнение (5) есть уравнение любой (неопределённой) прямой пучка.

Можно было бы взять уравнение прямой не в виде «с угловым коэффициентом», а в общем виде:

$$Ax + By + C = 0. \quad (**)$$

Если прямая проходит через точку  $A(x_1, y_1)$  \*, то

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Определим отсюда  $C$ :

$$C = -Ax_1 - By_1,$$

и подставим в уравнение (\*\*):

$$Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$$

или

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (6)$$

Это — другой вид уравнения пучка с центром в  $A(x_1, y_1)$ .

Уравнение (6) имеет одно преимущество перед уравнением (5): уравнение (5) даёт все прямые пучка за исключением прямой, параллельной оси  $Y$ , а уравнение (6) даёт все без исключения прямые пучка (прямая, параллельная оси  $Y$ , получается при  $B = 0, A \neq 0$ ).

**60. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.** Требуется провести прямую, проходящую через точки  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ .

Так как искомая прямая проходит через точку  $A_1(x_1, y_1)$ , то её уравнение, на основании предыдущего п, таково:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (***)$$

---

\*) То, что буква  $A$  обозначает коэффициент в уравнении прямой и, кроме того, точку  $(x_1, y_1)$ , не должно создавать путаницы. Читатель сам разберётся, в каком смысле в каждом отдельном случае употребляется буква  $A$ .

Уравнение (\*\*\*) содержит один произвольный параметр  $k$ ; придавая  $k$  различные значения, мы будем получать различные прямые, проходящие через точку  $A_1$ . Используем теперь второе условие данной задачи, — что прямая должна проходить через точку  $A_2$ ; оно даст нам возможность найти значение параметра  $k$ .

Чтобы прямая (\*\*\*) проходила через точку  $A_2(x_2, y_2)$ , координаты этой точки должны удовлетворять этому уравнению, т. е.

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Чтобы имело место это равенство,  $k$  должно иметь такое значение:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставляем найденное значение  $k$  в уравнение (\*\*\*):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Чтобы привести это уравнение к виду, более удобному для запоминания, разделим его на  $y_2 - y_1$ :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (7)$$

Рассматриваемую общую задачу можно было бы решить несколько иначе, беря пучок с центром в  $A_2$  и определяя  $k$  из условия, что прямая проходит через точку  $A_1$ . Тогда мы получили бы уравнение прямой  $A_1A_2$  в виде

$$\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}.$$

Можно придавать этому уравнению [а также уравнению (7)] другой вид, меняя знаки одновременно у каких-нибудь двух разностей, из четырёх разностей, входящих в него.

Можно написать уравнение прямой  $A_1A_2$  и в таком виде:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}.$$

Проверка обнаружит, что это — уравнение первой степени, которому удовлетворяют координаты точек  $A_1$  и  $A_2$ .

Таким образом, нет надобности точно запоминать уравнение (7) (т. е. запоминать, в каком порядке идут буквы  $y, y_1, y_2$  и  $x, x_1, x_2$ ), а надо запомнить следующее.

Чтобы составить уравнение прямой, проходящей через точки  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ , следует взять три буквы:

$$y, y_1 \text{ и } y_2,$$

составить из них *какие-нибудь* две разности (обязательно используя при этом все три буквы) и взять отношение этих разностей.

Полученное отношение приравнять *аналогичному* выражению, составленному из букв:

$$x, x_1 \text{ и } x_2.$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки, можно получить другим методом. Если точка  $M(x, y)$  движется по прямой  $A_1A_2$ , то при всяком положении точки  $M$  (на прямой) площадь треугольника с вершинами в  $M, A_1$  и  $A_2$  равна нулю, т. е.

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Сокращая это уравнение на  $\frac{1}{2}$ , получим:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Легко проверить, что уравнение (8) действительно изображает прямую, проходящую через точки  $A_1$  и  $A_2$ . Разлагая определитель по элементам первой строки, мы убедимся, что уравнение (8) — первой степени. Если мы подставим вместо текущих координат координаты одной из точек  $A_1(x_1, y_1)$  или  $A_2(x_2, y_2)$ , то уравнение (8) удовлетворится, так как в определителе будут две одинаковые строки, и, следовательно, он обратится в нуль.

Раскрывая уравнения (7) и (8), читатель убедится, что это — одно и то же уравнение в разных видах.

**Пример.** Провести прямую через точки  $(1, 8)$  и  $(-2, 5)$ . По формуле (8) получаем:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, получим:

$$3x - 3y + 21 = 0$$

или

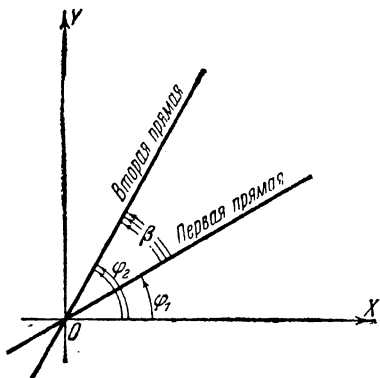
$$x - y + 7 = 0.$$

**61. Угол между двумя прямыми.** Пусть даны две прямые

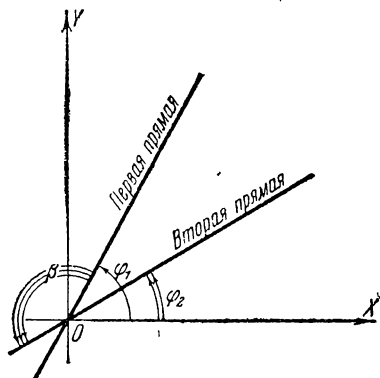
$$\left. \begin{aligned} y &= k_1x + b_1, \\ y &= k_2x + b_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Обозначим угол наклона первой прямой к оси  $X$  через  $\varphi_1$ , а угол наклона второй прямой к оси  $X$  — через  $\varphi_2$ . Обозначим угол между первой и второй прямыми через  $\beta$  и выразим  $\beta$  через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Перенесём каждую прямую, не меняя её направления, так, чтобы она проходила через начало. При этом не изменятся ни углы  $\varphi_1$



a)  $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ ,



Черт. 53.

b)  $\beta = 180^\circ + (\varphi_2 - \varphi_1)$ .

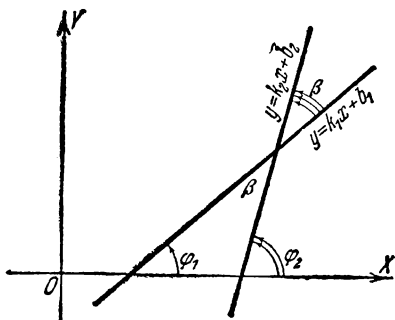
и  $\varphi_2$ , ни угол  $\beta$ . Рассмотрим два случая: 1)  $\varphi_2 > \varphi_1$  (черт. 53a), 2)  $\varphi_2 < \varphi_1$  (черт. 53b). В первом случае

$$\beta = \varphi_2 - \varphi_1,$$

а во втором случае

$$\beta = 180^\circ + (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Нужно только помнить, что углом между первой и второй прямыми



Черт. 54.  $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ .

называется угол, на который надо повернуть первую прямую против часовой стрелки до совпадения со второй прямой; при этом мы не устанавливаем на наших прямых, какое направление считается положительным и какое отрицательным. Угол  $\beta$  всегда считается меньше  $180^\circ$ , так как всегда можно привести первую прямую в совпадение со второй, повернув её на угол, меньший  $180^\circ$ . Черт. 54 иллюстрирует первый случай без переноса прямых в начало. Угол  $\varphi_2$  как внеш-

ний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \beta,$$

откуда

$$\beta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Зная, что  $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$ , а  $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$ , легко определить  $\operatorname{tg} \beta$ . В первом случае

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Во втором случае

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} [180^\circ + (\varphi_2 - \varphi_1)] = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Итак, в обоих случаях имеет место одна и та же формула

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (10)$$

Заметим, что здесь  $k_1$  — угловой коэффициент первой прямой, а  $k_2$  — угловой коэффициент второй прямой. Таким образом в числителе надо брать угловой коэффициент *второй* прямой минус угловой коэффициент *первой* прямой.

Во многих случаях требуется определить угол между двумя прямыми, которые не индивидуализированы, т. е. не указано, какая из них является первой и какая второй. В таком случае в числителе формулы (10) можно брать угловые коэффициенты в любом порядке. При одном порядке мы найдём острый угол между прямыми, а при другом — смежный с ним тупой угол, потому что тангенсы смежных углов отличаются только знаком. Удобно пользоваться формулой

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (11)$$

Формула (11) даёт положительный тангенс, т. е. всегда даёт острый угол между прямыми.

Если уравнения прямых даны в общем виде

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \quad (12)$$

и требуется определить угол между ними, то можно сначала привести их к виду с угловым коэффициентом, а затем воспользоваться формулой (10). Чтобы не проделывать каждый раз этой операции, сделаем её в буквенном виде, а затем будем пользоваться готовой формулой. Приводим уравнения (12) к виду уравнений с угловым коэффициентом:

$$y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1}, \quad y = -\frac{A_2}{B_2} x - \frac{C_2}{B_2},$$

и находим тангенс угла между ними по формуле (10):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}};$$

после упрощений имеем:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \quad (13)$$

Если порядок прямых не играет роли, то

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \right|. \quad (14)$$

**62. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.** Пусть даны две прямые

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1, \\ y = k_2 x + b_2. \end{cases} \quad (9)$$

При каком условии эти прямые параллельны? Перпендикулярны?

Если две прямые параллельны, то угол  $\beta$  между ними равен нулю, а следовательно,  $\operatorname{tg} \beta = 0$ , а это будет тогда, когда в формуле (11) числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Приравняв нулю числитель

$$k_2 - k_1 = 0,$$

находим:

$$k_2 = k_1. \quad (15)$$

Знаменатель при этом обращается в  $1 + k_1^2$  и, следовательно, не может равняться нулю. Таким образом, равенство (15) есть условие параллельности двух прямых. Его словесная формулировка: *две прямые параллельны, если они имеют одинаковые угловые коэффициенты* (верно, разумеется, и обратное положение).

Это условие уже было получено из других соображений (из того, что две параллельные прямые образуют одинаковые углы с осью  $X$ ) в п 51 (стр. 99).

Если две прямые взаимно перпендикулярны, то угол  $\beta$  между ними равен  $90^\circ$  и  $\operatorname{tg} \beta = \infty$ , а это будет тогда, когда в формуле (11) знаменатель равен нулю, а числитель отличен от нуля. Приравняв нулю знаменатель

$$1 + k_1 k_2 = 0,$$

находим:

$$k_1 k_2 = -1, \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}, \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}. \quad (16)$$

Числитель при этом не может быть нулём, так как значения  $k_1$  и  $k_2$  обязательно различны. Таким образом, равенство (16) (любой из трёх вариантов) есть условие перпендикулярности двух прямых. Его словесная формулировка: *две прямые перпендикулярны, если их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку* (верно, разумеется, и обратное положение).

Если уравнения прямых даны в общем виде [уравнения (12) (стр. 119)], то можно определить угловые коэффициенты этих прямых:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Условие параллельности примет вид

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

или

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad (17)$$

т. е. две прямые параллельны, если коэффициенты при текущих координатах пропорциональны. Это условие было уже получено из других соображений (из исследования задачи о точке пересечения двух прямых) в п. 58 [формулы (3) (стр. 113)].

Условие перпендикулярности примет вид

$$-\frac{A_2}{B_2} = \frac{B_1}{A_1}$$

или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (18)$$

Условие (18) есть равенство нулю знаменателя формулы (13).

**63. Расстояние от точки до прямой.** В этой задаче удобнее всего пользоваться нормальным уравнением прямой. Пусть дана точка  $A(x_1, y_1)$  и прямая

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (19)$$

и требуется определить расстояние от этой точки до этой прямой, т. е. длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту прямую.

Опустим из точки  $A$  перпендикуляр  $AN$  на данную прямую и обозначим его длину через  $d$ . Ниже выяснится, что в процессе решения рассматриваемой задачи полезно различать два случая: 1) когда точка  $A$  лежит от данной прямой по другую сторону, чем начало, 2) когда точка  $A$  лежит от данной прямой с той же стороны, что и начало. Первый случай изображён на черт. 55а, а второй — на черт. 55б.

В обоих случаях рассмотрим ломаную  $OA'ANP$  ( $A'$  — проекция точки  $A$  на ось  $X$ ) и спроектируем эту ломаную на  $OP$ . Звенья ломаной будем рассматривать как направленные отрезки. Запишем, что проекция ломаной равна проекции замыкающего вектора

$$\text{пр}_{OP} OA'ANP = \text{пр}_{OP} \overline{OP}$$

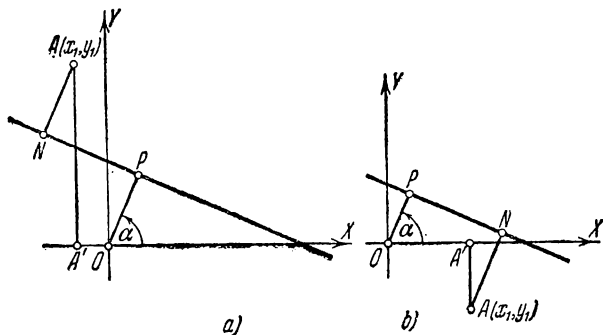
или

$$\text{пр}_{OP} OA' + \text{пр}_{OP} A'A + \text{пр}_{OP} AN + \text{пр}_{OP} NP = \text{пр}_{OP} \overline{OP}. \quad (\dagger)$$

Звено  $OA'$  принадлежит оси  $X$ , образующей с осью проекций  $OP$  угол  $\alpha$ ; поэтому  $\text{пр}_{OP} OA' = x_1 \cos \alpha$ .

Звено  $A'A$  принадлежит оси  $Y$ , образующей с  $OP$  угол  $\alpha - 90^\circ$  \*); поэтому  $\text{пр}_{OP} A'A = y_1 \cos(\alpha - 90^\circ) = y_1 \sin \alpha$ .

Звено  $AN$  параллельно  $OP$ . В первом случае (черт. 55, а) направление  $AN$  противоположно направлению  $OP$ ; поэтому  $\text{пр}_{OP} AN = -d$ .



Черт. 55.  $\delta = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ .

Во втором случае (черт. 55, б) направление  $AN$  совпадает с направлением  $OP$ ; поэтому  $\text{пр}_{OP} AN = d$ .

Значения остальных членов равенства (†) вполне очевидны:  $\text{пр}_{OP} NP = 0$ ,  $\text{пр}_{OP} \overline{OP} = p$ . Подставляя вместо всех членов равенства (†) найденные выражения, получим в первом случае:

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - d = p,$$

а во втором случае

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha + d = p.$$

Таким образом, либо

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p, \quad (\dagger \dagger)$$

либо

$$d = -(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p). \quad (\dagger \dagger \dagger)$$

Если всегда пользоваться формулой († †), то во втором случае (т. е. когда точка  $A_1$  лежит от прямой с той же стороны, что и начало) мы будем получать ответ, отличающийся знаком от правильного, т. е. отрицательный ( $d$  всегда положительный).

Введём величину  $\delta$ , определяемую следующим образом. Если точка  $A_1$  лежит от прямой со стороны, противоположной началу, то  $\delta = d$ , если же точка  $A_1$  лежит от прямой с той же стороны, что и начало, то  $\delta = -d$  (т. е. в этом случае  $\delta < 0$ ). Величина  $\delta$

\*) См. сноску на стр. 103.



всегда определяется формулой

$$\delta = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p. \quad (20)$$

Если учесть, что в случае 55, *a* [когда формула (20) даёт положительный ответ] точка *A* лежит от данной прямой по другую сторону начала, а в случае 55, *b* [когда формула (20) даёт отрицательный ответ] точка *A* лежит от данной прямой с той же стороны, что и начало, то формула (20) сводится к следующему правилу:

*Чтобы узнать расстояние от точки до прямой, надо подставить в нормальное уравнение прямой вместо текущих координат координаты данной точки. Левая часть уравнения при этом обратится в число, абсолютная величина которого покажет расстояние от точки до прямой, а знак покажет, с какой стороны от прямой расположена точка: при знаке минус она лежит с той же стороны от прямой, что и начало, а при знаке плюс — с противоположной.*

Пример. Найти расстояние от точки  $(-2, 1)$  до прямой

$$3x + 4y - 10 = 0.$$

Приводим уравнение данной прямой к нормальному виду

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

и подставляем вместо текущих координат координаты данной точки:

$$\delta = -\frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot 1 = -0,4.$$

Ответ. Расстояние от данной точки до данной прямой равно 0,4, причём эта точка расположена с той же стороны от прямой, что и начало координат.

Теперь можно с новой точки зрения взглянуть на один известный прежде факт. Подставляем в нормальное уравнение прямой вместо текущих координат координаты какой-нибудь определённой точки. Если левая часть уравнения обращается в нуль, т. е. уравнение удовлетворяется, то точка лежит на прямой. Если левая часть уравнения не удовлетворяется, то точка не лежит на прямой. Это было нам известно раньше. Теперь мы узнали, что если точка лежит близко от прямой, то при подстановке её координат в нормальное уравнение это уравнение слегка не удовлетворится (слева получится небольшое число — расстояние этой точки от прямой, — а справа нуль), если же точка лежит далеко от прямой, то уравнение сильно не удовлетворится (слева получится большое число, а справа нуль).

#### Задачи

**90.** Найти точку пересечения двух прямых:

a)  $3x - 8y + 34 = 0$  и  $2x + y - 9 = 0$ ;

b)  $6x + 5y - 16 = 0$  и  $3x - 15y - 62 = 0$ ;

c)  $4x - 11y + 17 = 0$  и  $8x + 7y + 34 = 0$ .

**91.** Составить уравнение пучка прямых, проходящих через точку:

a) (3, 7); b) (-2, 5); c)  $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$ ; d) (0, 0).

**92.** Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

a) (2, 1) и (3, -5); b)  $\left(4, -\frac{11}{3}\right)$  и (5, -5); c) (7, 3) и (12, 3);  
d) (0, 0) и (-2, -1); e) (3, 1) и (3, 5).

**93.** Определить угол между двумя прямыми:

a)  $y = \frac{1}{2}x - 5$  и  $y = 3x + 2$ ; e)  $2x + 3y - 10 = 0$  и  $3x - 2y + 1 = 0$ ;  
b)  $y = 3x - 5$  и  $y = 3x + 2$ ; f)  $4x + 7y + 1 = 0$  и  $3x + 2y - 5 = 0$ ;  
c)  $y = 2x - 1$  и  $y = -\frac{1}{2}x + 8$ ; g)  $x + 2 = 0$  и  $3x - \sqrt{3}y + 5 = 0$ .  
d)  $y = 2x + 7$  и  $y = -5x + 3$ ;

**94.** Через точку (8, 6) проведены четыре прямые, образующие с осью  $X$  углы, относящиеся, как 1:2:3:4. Уравнение второй прямой

$$3x - 4y = 0.$$

Найти уравнения трёх остальных.

**95.** Почему в формулу, выражающую тангенс угла между прямыми  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ , не входят  $b_1$  и  $b_2$ ?

**96.** Даны координаты вершин четырёхугольника  $ABCD$

$$A(2, 9), B(-7, -1), C(-2, 1) \text{ и } D(5, 7).$$

Найти точку пересечения диагоналей и угол между ними.

**97.** Доказать, что если в уравнении прямой поменять местами коэффициенты при  $x$  и  $y$  и переменить знак у одного из этих коэффициентов, то получится уравнение прямой, перпендикулярной к данной (свободный член при этом не играет роли).

**98.** Вершины четырёхугольника  $ABCD$  имеют координаты

$$A(3, 6), B(5, 2), C(-1, -3) \text{ и } D(-5, 5).$$

Доказать, что  $ABCD$  — трапеция.

**99.** Провести прямую:

a) проходящую через точку (2, 5) и параллельную прямой  $y = 3x + 8$ ;  
b) проходящую через точку (3, -7) и параллельную биссектрисе нормального координатного угла;  
c) проходящую через точку (-2, 1) и параллельную прямой  $4x + 10y + 3 = 0$ ;  
d) проходящую через точку (7, 2) и перпендикулярную прямой  $y = \frac{1}{3}x - 1$ ;  
e) проходящую через точку (-3, -4) и перпендикулярную прямой  $2x - 15y + 4 = 0$ ;  
f) проходящую через точку (1, 3) под углом  $45^\circ$  к прямой  $3x + y - 4 = 0$ ;  
g) проходящую через точку (-2, 10) под углом  $23^\circ 40'$  к прямой  $2x + 5y - 10 = 0$ .

**100.** Найти основание перпендикуляра, опущенного:

a) из точки (-1, 7) на прямую  $3x - 5y + 4 = 0$ ;  
b) из начала координат на прямую  $7x + 2y - 3 = 0$ .

**101.** В равнобедренном прямоугольном треугольнике координаты вершины прямого угла суть (5, 4). Уравнение гипотенузы  $x + 5y + 1 = 0$ . Составить уравнения катетов.

**102.** Определить расстояние:

- a) от точки (2, -10) до прямой  $6x - 8y - 5 = 0$ ;
- b) » » (3; 1,625) » »  $6x - 8y - 5 = 0$ ;
- c) » » (-3, 2) » »  $3x + 5y - 11 = 0$ ;
- d) » » (8, 1) » биссектрисы нормального координатного

угла.

**103.** Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми  $2x - 3y + 8 = 0$  и  $6x + 4y - 3 = 0$ .

**104.** Вычислить высоты треугольника  $ABC$ , зная координаты его вершин:

- a)  $A(-2, 5)$ ,  $B(6, -3)$ ,  $C(1, 9)$ ; b)  $A(-3, -1)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $C(-1, 2)$ .

**105.** Найти расстояние между параллельными прямыми: a)  $3x - 4y - 5 = 0$  и  $3x - 4y - 15 = 0$ ; b)  $5x + 12y - 13 = 0$  и  $10x + 24y + 39 = 0$ .

**106.** Провести прямую, параллельную прямой  $7x + 24y - 5 = 0$  и отстоящую от неё на расстоянии 3.

**107.** Через точку (1, 6) провести прямую, расстояние которой от точки (2, -1) равно 5.

**108.** Провести прямую, проходящую на расстоянии 5 от точки  $(-5, -4)$  и на расстоянии 10 от точки (4, 9).

**109.** Даны две параллельные прямые  $3x - 8y + 1 = 0$ ,  $3x - 8y - 11 = 0$ . Составить уравнение прямой, параллельной им и проходящей посередине между ними.

**110.** Одна вершина квадрата находится в начале, одна его сторона образует с осью  $X$  угол  $\varphi$ , длина стороны равна  $a$ . Найти уравнения всех сторон квадрата.

**111.** Через точку (4, 1) провести прямую, отсекающую на координатных осях отрезки, сумма которых равна: a) 10; b) 9; c) 8.

**112.** Через точку (4, 3) провести прямую, образующую с координатными осями треугольник, площадь которого равна: a) 27; b) 24; c)  $13\frac{1}{2}$ .

**113.** Зная вершину треугольника (2, 9) и уравнения двух его высот

$$5x - 8y - 3 = 0, \quad 3x + 10y - 31 = 0,$$

найти уравнения сторон.

**114.** Даны координаты вершин треугольника  $ABC$

$$A(-13, -40), \quad B(14, -4), \quad C(0, 44);$$

- a) составить уравнения его сторон;
  - b) определить его углы;
  - c) составить уравнения его медиан и найти их точку пересечения;
  - d) составить уравнения его высот и найти их точку пересечения;
  - e) составить уравнения его биссектрис и найти их точку пересечения.
-

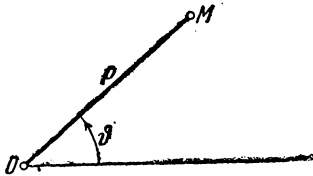
## ГЛАВА V

### ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ

#### § 1. Полярные координаты

**64. Полярная система координат.** Декартова система координат не является единственной системой, позволяющей ориентироваться на плоскости. Сейчас мы познакомимся ещё с одной весьма употребительной системой.

Вообразим полупрямую  $OX$ , выходящую из некоторой точки  $O$  (черт. 56), и покажем, что она позволяет ориентироваться на плоскости. Положение всякой точки  $M$  будет вполне определено, если мы укажем её расстояние от  $O$ , т. е. длину радиуса-вектора  $\overline{OM}$ , и угол наклона этого радиуса-вектора к полупрямой.



Черт. 56.  $M [r, \vartheta]$ .

Длина радиуса-вектора обозначается обычно буквой  $\rho$ .

Угол радиуса-вектора с нашей полупрямой называется *полярным углом* и обозначается буквой  $\vartheta$ .

Точка  $O$  называется *полюсом*.

Полупрямая  $OX$  называется *полярной осью*.

Полярный угол и длина радиуса-вектора точки  $M$  называются *полярными координатами* точки  $M$  \*). Данный способ определять положение точки на плоскости называется *полярной системой координат*.

Полярные координаты точки записываются в скобках после названия точки, причём во избежание смешения с декартовыми координатами мы будем употреблять квадратные скобки; на первом месте ставится длина радиуса-вектора, а на втором — полярный угол. Например,

$A [3, 20^\circ]$  — точка  $A$ , у которой полярные координаты  $\rho = 3$ ,  $\vartheta = 20^\circ$ ;  
 $B [5, 2]$  — »  $B$ , » » » »  $\rho = 5$ ,  $\vartheta = 2$

(не двум градусам, а двум радианам);

$C (3, 7)$  — точка  $C$ , у которой декартовы координаты  $x = 3$ ,  $y = 7$ .

---

\*) Предполагается, что масштаб выбран заранее, и длина радиуса-вектора выражается отвлечённым числом.

Углом  $\vartheta$  называется угол, на который надо повернуть полярную ось против часовой стрелки до совпадения с радиусом-вектором. Следовательно, угол  $\vartheta$  всегда отсчитывается *от* полярной оси против часовой стрелки *к* радиусу-вектору. Полярный угол  $\vartheta$  всегда задаётся в пределах от нуля до  $2\pi$ :

$$0 \leq \vartheta < 2\pi.$$

Однако при вычислениях может получиться полярный угол вне этих пределов, что не мешает нам построить соответствующую точку. Например, если требуется построить точку  $A [5, -40^\circ]$ , то это всё равно, что строить точку  $A [5, 320^\circ]$ , а точка  $B [2, 1000^\circ]$  — всё равно, что точка  $B [2, 280^\circ]$ .  $\rho$  всегда задаётся положительным. Вообще знаками плюс и минус снабжаются те величины, которые могут изменяться в двух противоположных направлениях, а радиус-вектор всегда откладывается *от* начала, и его направление вполне определяется углом  $\vartheta$ . Если мы пожелаем отложить радиус-вектор в прямо противоположном направлении, то для обозначения этого нет надобности менять знак у  $\rho$ , а достаточно изменить на  $\pi$  угол  $\vartheta$ . Однако при вычислениях может получиться отрицательное значение для  $\rho$ . Тогда следует откладывать  $\overline{OM}$  в противоположном направлении. Например, если потребуется построить точку  $[-5, 120^\circ]$ , то мы будем строить точку  $[5, 300^\circ]$ , а если потребуется построить точку  $[-3, 200^\circ]$ , то мы будем строить точку  $[3, 20^\circ]$ .

Решим две основные задачи, которые возникают для каждой новой системы координат.

1. Даны координаты точки; построить эту точку.

2. На чертеже отмечена точка; определить её координаты.

Первая задача решается так. Пусть требуется построить точку  $M [\rho, \vartheta]$ . Проводим из полюса полупрямую, образующую с полярной осью угол  $\vartheta$  (как отсчитывается угол  $\vartheta$  — уже было разъяснено). На этой полупрямой откладываем от полюса радиус-вектор, имеющий длину  $\rho$ . Конец этого радиуса-вектора и есть точка  $M [\rho, \vartheta]$ .

Для решения второй задачи соединяем точку  $M$  с полюсом. Измеряем отрезок  $OM$  — это и есть длина радиуса-вектора точки  $M$ . Измеряем угол, образуемый  $\overline{OM}$  с полярной осью, — это и есть полярный угол точки  $M$ .

**65. Сравнение декартовой и полярной систем координат.** Пусть требуется построить точку, для которой  $x=a$ , а  $y$  неизвестно. Разумеется, это — задача неопределённая: существует бесконечное множество таких точек. Все они лежат на прямой, параллельной оси  $Y$  и отсекающей на оси  $X$  отрезок, равный  $a$ .

Если дана ордината

$$y=b,$$

а абсцисса неизвестна, то можно лишь сказать, что точка, о которой идёт речь, лежит *где-нибудь* на прямой, параллельной оси  $X$  и отсекающей на оси  $Y$  отрезок, равный  $b$ .

Уравнение

$$x = a$$

при неопределённом  $a$  выражает семейство прямых, параллельных оси  $Y$ , а уравнение

$$y = b$$

при неопределённом  $b$  выражает семейство прямых, параллельных оси  $X$ . Оба эти семейства изображены на черт. 57 (следует помнить, что линии каждого семейства следуют друг за другом не через промежутки, как на чертеже, а непрерывно и заполняют всю плоскость). Когда мы движемся вдоль какой-нибудь линии семейства  $x = \text{const.}$ , то  $x$  всё время остаётся постоянным, а  $y$  меняется. Когда мы движемся вдоль какой-нибудь линии семейства  $y = \text{const.}$ , то  $y$  всё время остаётся постоянным, а  $x$  меняется.

Пусть требуется найти точку, для которой

$$x = 3, \quad y = 5.$$

Зная, что  $x = 3$ , мы выделяем одну линию из первого семейства, для которой  $x = 3$ ; искомая точка должна лежать на этой линии. Зная, что  $y = 5$ , мы выделяем линию второго семейства, для которой  $y = 5$ ; искомая точка должна лежать на этой линии. Следовательно она лежит на пересечении этих двух линий.

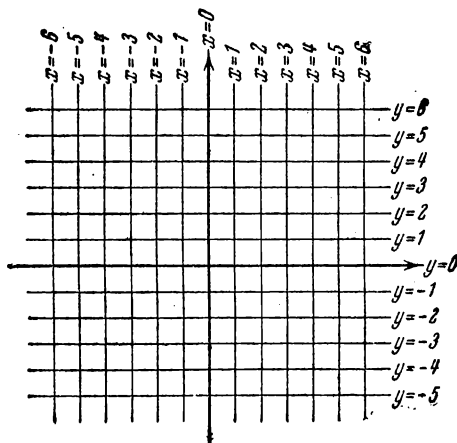
Проведём аналогичные рассуждения для полярной системы.

Если дана длина радиуса-вектора некоторой точки, а полярный угол неизвестен, то можно лишь сказать, что эта точка лежит где-нибудь на окружности данного радиуса с центром в полюсе. Следовательно, уравнение

$$\rho = a$$

при неопределённом  $a$  выражает семейство концентрических окружностей с центром в полюсе.

Если дан полярный угол, а длина радиуса-вектора неизвестна, то можно сказать, что данная точка лежит на полупрямой, с полярной осью данный угол.



Черт. 57. Декартова координатная сетка.

выходящей из полюса и образующей. Следовательно, уравнение

$$\vartheta = \alpha$$

при неопределённом  $\alpha$  выражает семейство полупрямых, выходящих из полюса. Оба эти семейства изображены на черт. 58.

Когда мы движемся вдоль какой-нибудь линии семейства  $\rho = \text{const.}$ , то  $\rho$  всё время остаётся постоянным, а  $\vartheta$  меняется. Когда мы движемся вдоль какой-нибудь линии семейства  $\vartheta = \text{const.}$ , то у нас всё время  $\vartheta$  остаётся постоянным, а  $\rho$  меняется.

Пусть требуется построить точку, для которой

$$\rho = 4, \quad \vartheta = 120^\circ.$$

Зная, что  $\rho = 4$ , мы можем из семейства окружностей выделить одну окружность (для которой  $\rho = 4$ ); искомая точка должна лежать где-то на

этой окружности. Зная, что  $\vartheta = 120^\circ$ , мы из семейства полупрямых выделяем одну полупрямую (для которой  $\vartheta = 120^\circ$ ); искомая точка должна лежать где-то на этой полупрямой. Следовательно, она лежит на пересечении этих двух линий.

Кроме декартовой и полярной систем, можно придумать ещё бесконечное множество других систем координат. Во всякой системе координат на плоскости положение точки на плоскости определяется двумя координатами. Если приравнять одну координату постоянной величине (произвольной), то получим уравнение некоторого семейства линий. Эти линии называются координатными линиями. Во всякой системе координат существует два семейства координатных линий. Определить координатные линии можно так: *координатной линией называется линия, при движении вдоль которой одна из координат остаётся постоянной.*

В декартовой системе координатными линиями являются два семейства прямых, параллельных координатным осям.

В полярной системе координатными линиями являются семейство окружностей с центром в полюсе и семейство полупрямых, выходящих из полюса. Все координатные линии образуют так называемую координатную сетку. Черт. 57 даёт представление о декартовой координатной сетке, а черт. 58 — о полярной.

Во всякой системе координат координатные линии должны обладать следующими двумя свойствами:

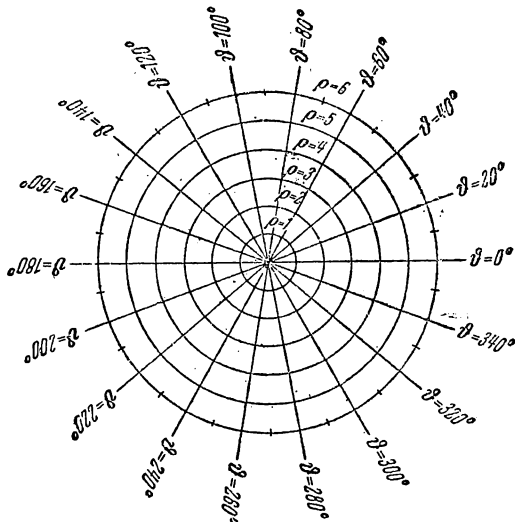
1. Каждая координатная линия одного семейства должна пересекаться с каждой координатной линией другого семейства один раз.

В самом деле, когда мы строим точку по её координатам, то мы по одной координате находим координатную линию одного семейства, а по другой — координатную линию другого семейства. Если бы эти две линии пересекались в нескольких точках, то эти точки имели бы одинаковые координаты. Между тем необходимо, чтобы каждой паре чисел соответствовала только одна точка.

2. Через каждую точку плоскости проходит одна (и только одна) линия одного семейства и одна (и только одна) линия другого семейства.

В самом деле, когда на чертеже отмечена некоторая точка  $M$  и требуется узнать её координаты, то для этого надо установить, какая линия первого семейства проходит через  $M$  и какая линия второго семейства проходит через  $M$ . Если через  $M$  проходит несколько линий, например, первого семейства, то одна из координат точки  $M$  будет неопределённой: ей можно будет приписать столько разных значений, сколько линий проходит через точку  $M$ .

В некоторых координатных системах эти свойства не соблюдаются в исключительных отдельных точках. В декартовой системе таких точек нет, а в полярной системе такой исключительной точкой является полюс.

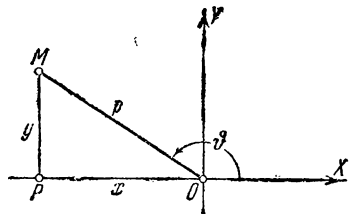


Черт. 58. Полярная координатная сетка.

В полюсе не соблюдается второе свойство, так как из семейства полупрямых через полюс проходит не одна линия, а все. Поэтому соответствующая координата (полярный угол) для полюса неопределённа. Для полюса  $\rho = 0$ , а  $\vartheta$  — любому углу.

### 66. Переход от полярных координат к декартовым и обратно.

Рассмотрим одновременно декартову и полярную системы координат, причём полюс совпадает с началом координат, а полярная ось идёт по положительному направлению оси  $X$ . Найдём формулы преобразования координат для этих двух систем, т. е. решим следующие две задачи:



Черт. 59.  $x = \rho \cdot \cos \vartheta$ ,  
 $y = \rho \cdot \sin \vartheta$ .

1. Даны полярные координаты  $\rho$  и  $\vartheta$  некоторой точки  $M$ ; найти её декартовы координаты  $x$  и  $y$ .

2. Даны декартовы координаты  $x$  и  $y$  некоторой точки  $M$ ; найти её полярные координаты  $\rho$  и  $\vartheta$ .

Первая задача решается на основании того соображения, что координаты  $x$  и  $y$  суть проекции радиуса-вектора  $\overline{OM}$  соответственно на оси  $X$  и  $Y$ :

$$x = \text{пр}_X \overline{OM} = \rho \cos \vartheta,$$

$$y = \text{пр}_Y \overline{OM} = \rho \cos \left( \vartheta - \frac{\pi}{2} \right) = \rho \sin \vartheta *).$$

Итак:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \vartheta, \\ y &= \rho \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Черт. 59 иллюстрирует частный случай этих формул для точки, лежащей во второй четверти. В этом случае  $\cos \vartheta < 0$ ,  $\sin \vartheta > 0$ , и следовательно,  $x$  получается отрицательным, а  $y$  — положительным.

Переходим к решению второй задачи. Выразить  $\rho$  и  $\vartheta$  через  $x$  и  $y$  можно непосредственно из чертежа, а можно из формул (1). Возводя эти формулы в квадрат и затем складывая (чтобы исключить  $\vartheta$ ), получим:

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

откуда

$$\rho = + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Знак  $+$  перед радикалом напоминает, что  $\rho$  — величина существенно положительная.

\*) См. гл. I, § 3, формула (3) (стр. 54).



Чтобы исключить  $\rho$ , делим одно из равенств (1) на другое:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \vartheta.$$

Полученные две формулы

$$\left. \begin{aligned} \rho &= +\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

позволяют вычислить  $\rho$  и  $\vartheta$ , если даны  $x$  и  $y$ .

Вторая формула (2) даёт для угла  $\vartheta$  два значения между 0 и  $2\pi$ , из которых верно лишь одно. Например, для точки  $A(3, 3)$  эта формула даёт  $\operatorname{tg} \vartheta = 1$ , откуда  $\vartheta_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\vartheta_2 = \frac{5\pi}{4}$ . Для точки  $B(-3, -3)$  формула даёт то же самое. Между тем ясно, что для точки  $A$   $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ , а для точки  $B$   $\vartheta = \frac{5\pi}{4}$ . Итак, второй формулой (2) нельзя пользоваться автоматически, а следует, вычислив по ней  $\operatorname{tg} \vartheta$ , сообразить, какой из двух углов, имеющих этот тангенс, следует выбрать (в зависимости от того, в какой четверти лежит данная точка).

Это неудобство можно устранить, если мы вместо второй формулы (2) будем пользоваться *двумя* формулами, которые получатся, если определить  $\cos \vartheta$  и  $\sin \vartheta$  из формул (1):

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{x}{+\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \vartheta &= \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Известно, что по значениям синуса и косинуса угол в пределах от 0 до  $2\pi$  определяется однозначно.

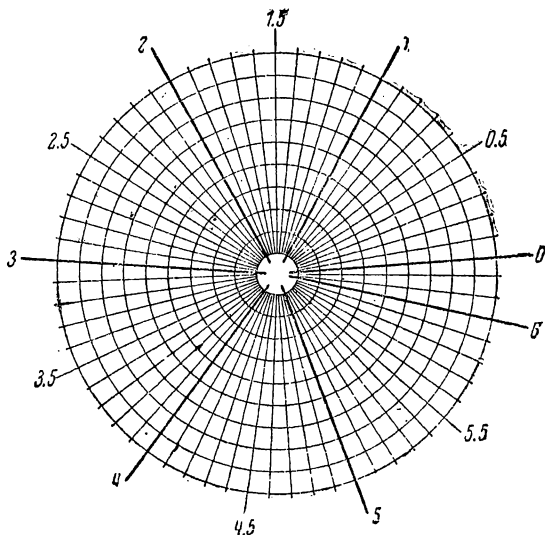
Мы рассмотрели простейший случай преобразования координат: когда полюс полярной системы совпадает с началом декартовой системы и полярная ось совпадает с положительной частью оси  $X$ . Более сложные преобразования можно разбить на несколько преобразований. Пусть, например, даны две полярные системы. Строим для каждой из них декартову систему, помещая начало в полюс и направляя полярную ось по положительной части оси  $X$ . Затем переходим: 1) от первой полярной системы к первой декартовой, 2) от первой декартовой ко второй декартовой, 3) от второй декартовой ко второй полярной.

**67. Геометрический смысл уравнений в полярных координатах.** Если дано уравнение, определяющее  $\rho$  как функцию  $\vartheta$ ,

$$\rho = f(\vartheta), \quad (4)$$

то мы можем придавать  $\vartheta$  произвольные значения. Каждому значению  $\vartheta$  соответствует значение  $\rho$ . Рассуждения п 31 (стр. 63) применимы

и к полярным координатам. Мы придаём  $\vartheta$  какое-нибудь значение, вычисляем соответствующее значение  $\rho$  и наносим на чертёж точку с такими координатами  $\vartheta$  и  $\rho$ . Затем придаём  $\vartheta$  другое значение, опять вычисляем  $\rho$  и наносим на чертёж точку. Так можно построить



Черт. 60. Полярная координатная сетка (полярный угол измерен в радианах).

сколько угодно точек. Соединяя их, мы получим линию. Если бы  $\vartheta$  изменялось непрерывно, мы получили бы все точки этой линии.

Уравнение линии в полярных координатах, так же как и в декартовых, может быть задано в неявной форме:

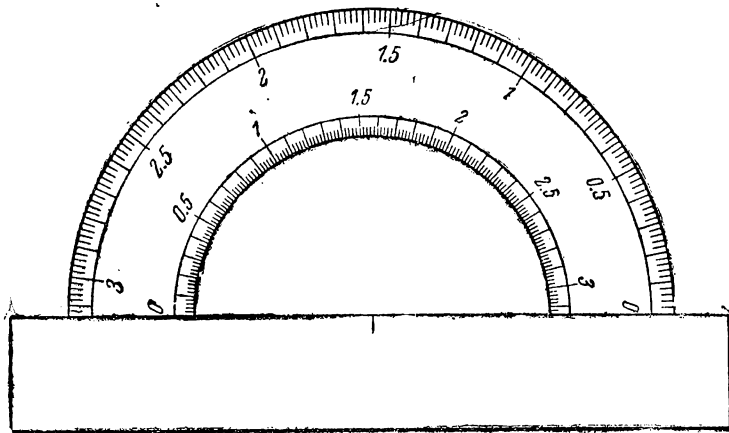
$$F(\rho, \vartheta) = 0, \quad (5)$$

или в параметрической:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \varphi(t), \\ \vartheta &= \psi(t). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Мы видели, что в декартовой системе построение линии по точкам облегчается при пользовании клетчатой бумагой. Легко сообразить, что во всякой системе координат удобно пользоваться бумагой, на которую нанесена координатная сетка этой системы. Строя линию по её полярному уравнению, удобно пользоваться сеткой, изображённой на черт. 58 (стр. 129). Если угол  $\vartheta$  измеряется не в градусах, а в радианах (как это бывает в большинстве случаев), то удобно полупрямые  $\vartheta = \text{const.}$  брать не через «круглое» число градусов, а через «круглое» число радианов. Такая сетка изображена на черт. 60.

При построениях в полярной системе часто приходится пользоваться транспортиром. На транспортирах, имеющих в продаже, углы выражены в градусах. Следует изготовить самому транспортир, где углы выражены в радианах. Такой транспортир изображён на черт. 61.



Черт. 61. Транспортир для измерения углов в радианах.

**68. Архимедова спираль.** В качестве примера рассмотрим кривую

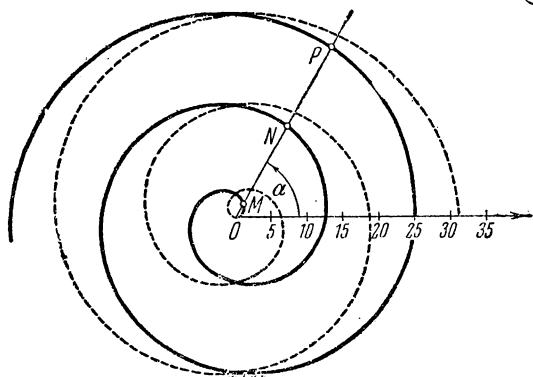
$$\rho = k\vartheta, \quad (7)$$

где  $k = \text{const.}$  Если вместо  $k$  задаться определённым числом, то можно составить таблицу значений  $\vartheta$  и соответствующих значений  $\rho$  и нанести на чертёж соответствующие точки. Мы вместо этого ограничимся следующим рассуждением. Если придавать углу  $\vartheta$  значения, начиная от 0, следующие в арифметической прогрессии, то  $\rho$  тоже будет принимать значения, начинающиеся с 0 и следующие в арифметической прогрессии:

$\vartheta$	$\rho$
0	0
$\alpha$	$k\alpha$
$2\alpha$	$2k\alpha$
$3\alpha$	$3k\alpha$
.....	.....

Проведём из полюса лучи  $OX$ ,  $OA_1$ ,  $OA_2$ ,  $OA_3, \dots$  так, что каждый следующий луч образует с предыдущим угол  $\alpha$ . На луче  $OA_1$  отложим произвольный отрезок, который будем считать за  $k\alpha$ , на

луче  $OA_2$  отложим два таких отрезка, на луче  $OA_3$  — три и т. д. Следует продолжить это построение и в отрицательную сторону, придавая полярному углу значения  $-\alpha$ ,  $-2\alpha, \dots$  (хотя при построении не делается различия



Черт. 62.  $\rho = 2\theta$ .

между углами  $-\alpha$  и  $2\pi - \alpha$ , но им соответствуют различные значения  $\rho$ ). Соединяя полученные точки плавной кривой, мы получим представление об архимедовой спирали. На черт. 62 изображена архимедова спираль  $\rho = 2\theta$ .

Проведём из полюса полупрямую. Эта полупрямая пересечёт архимедову спираль бесконечное число раз. Вычи-

слим расстояние между двумя последовательными точками, например, между  $M$  и  $N$ .

Если обозначить через  $\alpha$  значение полярного угла для точки  $M$ , то для точки  $N$  полярный угол, очевидно, равен  $\alpha + 2\pi$ . Радиус-вектор всякой точки архимедовой спирали вычисляется из уравнения  $\rho = k\theta$ , где вместо  $\theta$  следует подставить значение полярного угла для данной точки. Следовательно, радиус-вектор точки  $M$  равен

$$OM = k\alpha,$$

а радиус-вектор точки  $N$

$$ON = k(\alpha + 2\pi) = k\alpha + 2\pi k,$$

откуда

$$MN = ON - OM = 2\pi k.$$

Из этой формулы видно, что  $MN$  не зависит от  $\alpha$ . Если наша полупрямая  $OM$  будет вращаться, то расстояние между точками  $M$  и  $N$ , в которых она пересекает соседние завитки архимедовой спирали, останется неизменным. Отсюда же вытекает, что

$$MN = NP = \dots$$

Кроме того, из этой формулы выясняется геометрическое значение коэффициента  $k$ , входящего в уравнение архимедовой спирали:

$$k = \frac{a}{2\pi}, \quad (8)$$

где  $a$  — расстояние между соседними завитками архимедовой спирали.

Уравнение архимедовой спирали в полярных координатах весьма просто; в декартовых координатах оно имело бы вид

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{k}.$$

Оно получается путём замены в уравнении (7)  $\rho$  и  $\vartheta$  их выражениями через  $x$  и  $y$  по формулам (2) (стр. 131).

Этот пример показывает, что линия, имеющая очень сложное уравнение в декартовых координатах, может иметь очень простое уравнение в полярных координатах. Бывает, разумеется, и наоборот. Этим объясняется необходимость пользоваться в разных случаях разными системами координат, в зависимости от того, в какой системе проще решается данный геометрический вопрос.

### Упражнения

**115.** Построить точки

$$A [2, 45^\circ]; \quad B \left[4, \frac{5\pi}{6}\right]; \quad C [3, \pi]; \quad D [10, 0];$$

$$E \left[6, \frac{\pi}{2}\right]; \quad F \left[8, \frac{3\pi}{2}\right]; \quad G [5; 3,3]; \quad H [4, 5];$$

$$I [7, 250^\circ]; \quad J [0, 40^\circ]; \quad K [0, 200^\circ].$$

Измерить и записать их декартовы координаты.

Примечание. Полюс совпадает с началом координат, а полярная ось — с положительной частью оси  $X$ .

**116.** Построить точки

$$A (3, 0), \quad B (2, 2), \quad C (-12, 5), \quad D (6, -2), \quad E (0, -8), \quad F (0, 8), \\ G (-5, -2), \quad H (0, 0).$$

Измерить и записать их полярные координаты (см. примечание к предыдущему упражнению).

**117.** Построить по точкам линии:

$$a) \rho = \sin 2\vartheta \text{ (роза о четырёх лепестках);}$$

$$b) \rho = \frac{3}{\sqrt{1 - 0,64 \cos^2 \vartheta}};$$

$$c) \rho = 1 - \cos \vartheta.$$

Во всех случаях сначала составить таблицу, а затем выбрать масштаб в зависимости от получающихся значений  $\rho$ .

### Задачи

**118.** Вычислить декартовы координаты точек  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$  (см. упражнение 115). Сравнить результаты вычислений с результатами измерений.

**119.** Вычислить полярные координаты точек  $A, B, C, D, E, F, G, H$  (см. упражнение 116). Сравнить результаты вычислений с результатами измерений.

**120.** Может ли быть, чтобы у некоторой точки декартовы и полярные координаты представляли одну и ту же пару чисел?

**121.** Найти точки пересечения архимедовой спирали  $\rho = k\vartheta$  и луча  $\vartheta = \vartheta_0$ .

**122.** Найти точки пересечения окружности  $\rho = R$  с архимедовой спиралью  $\rho = k\vartheta$ .

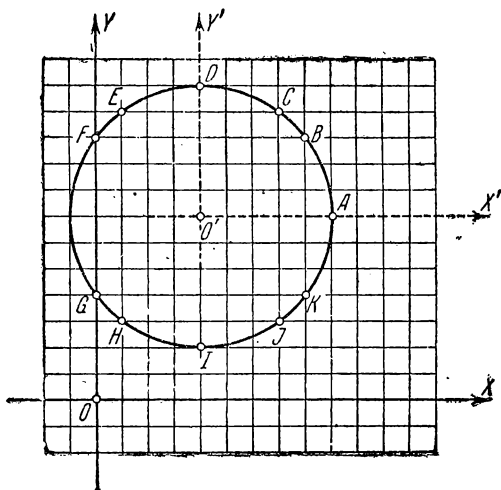
## § 2. Классификация линий

**69. Преобразование координат в уравнениях линий.** В § 3 главы I мы рассматривали преобразование координат отдельных точек. Однако выведенные там формулы позволяют также преобразовывать уравнения линий при переходе от одной координатной системы к другой. Покажем на примерах, как это делается.

**Пример 1.** Пусть дано уравнение

$$x^2 + y^2 - 8x - 14y + 40 = 0. \quad (*)$$

Перенесём начало координат в точку  $O'(4, 7)$ , не изменяя направления осей. При этом старые координаты выразятся через новые так:



Черт. 63.

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + 4, \\ y &= y' + 7. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Заменим старые текущие координаты в уравнении (\*) их выражениями через новые

$$\begin{aligned} (x' + 4)^2 + (y' + 7)^2 - \\ - 8(x' + 4) - \\ - 14(y' + 7) + 40 = 0. \end{aligned}$$

Это и есть уравнение той же линии в новой системе. После упрощений оно принимает вид

$$x'^2 + y'^2 = 25. \quad (***)$$

Мы видим, что наша линия есть окружность радиуса 5 с центром в новом начале, т. е. в точке  $(4, 7)$  по старой системе. Старые координаты любой точки этой окружности удовлетворяют уравнению (\*), а новые координаты той же точки удовлетворяют уравнению (\*\*\*). На черт. 63 изображена эта окружность. Мы видим, например, что точка  $B$  имеет по старой системе координаты  $x = 8, y = 10$ , а по новой  $x' = 4, y' = 3$ . Легко убедиться, что первая пара чисел удовлетворяет уравнению (\*), а вторая — уравнению (\*\*\*).

**Пример 2.** Можно преобразовывать уравнение линии не только при переходе от одной декартовой системы к другой, но и при переходе от декартовой системы к полярной или наоборот. Такой пример нам уже встречался в п 68 (стр. 135), где мы преобразовывали уравнение архимедовой спирали к декартовым координатам. Здесь мы рассмотрим ещё один пример.

Пусть дана окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $(r, 0)$  (черт. 64). Уравнение этой окружности [гл. III, § 1, формула (2) (стр. 76)] таково:

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

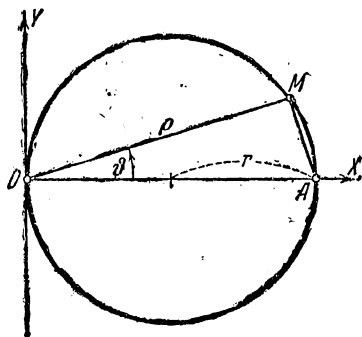
или, раскрывая скобки,

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Преобразуя это уравнение к полярным координатам, получим:

$$\rho(\rho - 2r \cos \vartheta) = 0,$$

откуда для  $\rho$  получаются два значения:  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 2r \cos \vartheta$ . Первое значение соответствует точке  $O$  и, разумеется, не изменяется при вращении луча  $OM$ , т. е. не зависит от  $\vartheta$ . Второе значение даёт связь между текущими координатами точки  $M$ , описывающей окружность. Таким образом, уравнение окружности:



Черт. 64.  $\rho = 2r \cos \vartheta$

$$\rho = 2r \cos \vartheta, \quad (1)$$

Это уравнение можно было вывести и непосредственно. Из черт. 64 понятно, что при любом положении точки  $M$  на окружности треугольник  $AMO$  — прямоугольный, откуда сразу вытекает соотношение (1).

**70. Классификация уравнений.** В аналитической геометрии линии классифицируются по их уравнениям. Поэтому мы начнём с классификации уравнений.

Всякое уравнение с двумя переменными  $x$  и  $y$  переносом всех членов в правую часть может быть приведено к виду

$$F(x, y) = 0. \quad (2)$$

Если  $F(x, y)$  — целый многочлен относительно  $x$  и  $y$ , то уравнение (2) называется *алгебраическим*. Например, уравнение

$$x^3 y^2 - \frac{3}{4} x^2 y^3 + 2y^2 + \sqrt{3} x - 5 = 0 \quad (\dagger)$$

алгебраическое. В общем виде алгебраическое уравнение может быть записано так:

$$\sum Ax^r y^s = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\sum$  — знак суммы, а  $Ax^r y^s$  — один из членов, написанный для образца; таким образом, символ  $\sum Ax^r y^s$  обозначает «сумма нескольких членов типа  $Ax^r y^s$ ». Показатели  $r$  и  $s$  — целые неотрицательные числа, коэффициенты  $A$  — произвольные (в этой книге — действительные) числа.

Алгебраическим считается также всякое уравнение, которое может быть приведено к виду (3). Например, уравнения

$$\sqrt[3]{x^2 y} + \frac{2}{y} = 1, \quad \lg x + \lg y = 1$$

— алгебраические, потому что они приводятся соответственно к виду

$$x^2 y^3 - 6x^2 y^2 + 12x^2 y - 8x^3 - y^3 = 0, \quad xy - 10 = 0.$$

Сумма показателей при  $x$  и  $y$  в каждом члене называется *степенью* или *измерением* этого члена. Так, члены уравнения (†) имеют (считая слева направо) пятое, четвёртое, второе, первое и нулевое измерения. *Степенью алгебраического уравнения* называется наивысшая из степеней его членов; например, уравнение (†) — пятой степени. О степени алгебраического уравнения можно судить только после того, как оно приведено к виду (3).

Всякое неалгебраическое уравнение [т. е. не могущее быть приведённым к виду (3)] называется *трансцендентным*. Таковы, например, уравнения

$$\lg x - 2xy^2 + 1 = 0, \\ y = \sin x, \quad y = 2^x, \quad y = x^{\sqrt{2}}.$$

**71. Классификация линий.** Все линии делятся на два класса: *алгебраические* и *трансцендентные*. Линия называется алгебраической, если её уравнение в *декартовых координатах*

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

алгебраическое. В противном случае линия называется трансцендентной.

Алгебраические линии классифицируются в зависимости от степеней их уравнений. Если линия изображается уравнением  $n$ -й степени, то она называется *линией  $n$ -го порядка*. Например, прямая есть линия первого порядка.

Против этого определения может быть выдвинуто одно возражение. Мы знаем, что уравнение линии зависит от того, к какой системе координат отнесена эта линия. Например, в п 69 (стр. 136)



мы рассматривали окружность, которая в одной системе координат имела уравнение

$$x^2 + y^2 - 8x - 14y + 40 = 0,$$

а в другой

$$x'^2 + y'^2 - 25 = 0.$$

В данном случае оба уравнения — второй степени. Но, может быть, нам встретится случай, когда линия в какой-нибудь системе координат (декартовых) имеет трансцендентное уравнение, а в другой — алгебраическое? Или, может быть, какая-нибудь линия имеет алгебраическое уравнение  $n$ -й степени, а после поворота осей и переноса начала степень его изменится?

Мы докажем, что этого не может быть.

*Теорема. Если некоторая линия в какой-нибудь декартовой системе координат имеет алгебраическое уравнение, то и в любой другой декартовой системе координат эта линия тоже имеет алгебраическое уравнение и притом — той же степени.*

*Доказательство.* Пусть некоторая линия имеет алгебраическое уравнение. Возьмём из него какой-нибудь один член:

$$Ax^r y^s. \quad (4)$$

После преобразования координат он примет вид

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a)^r (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b)^s. \quad (5)$$

В каждой скобке фигурируют выражения первого измерения относительно  $x'$  и  $y'$ . При возведении в степень в первой скобке получатся члены измерения  $r$  и ниже, а во второй — измерения  $s$  и ниже. При перемножении этих скобок получатся члены измерения  $r + s$  и ниже. Итак, из члена (4), который имел измерение  $r + s$ , получится несколько членов, измерения которых будут не выше  $r + s$ . Отсюда ясно, что при преобразовании всего уравнения не может получиться членов высшего измерения, чем измерение старшего члена данного уравнения, т. е. степень уравнения не может повыситься. Приведённое рассуждение показывает также, что алгебраическое уравнение не может перейти в трансцендентное.

Но степень уравнения не может также понизиться. Если бы при переходе от старых осей к новым степень уравнения понизилась, то при обратном преобразовании (т. е. при переходе от новых осей к старым) она должна была бы повыситься, чего, как мы доказали, не может быть.

По этой же причине трансцендентное уравнение не может перейти в алгебраическое; в противном случае при обратном преобразовании алгебраическое уравнение должно было бы перейти в трансцендентное.

Итак, свойство кривой иметь в декартовой системе трансцендентное уравнение или алгебраическое уравнение определённой степени

есть свойство, присущее самой кривой и не зависящее от того, как мы выбираем систему координат (декартову).

Этим свойством обладает не всякая система координат. Декартова система обладает им потому, что в формулах преобразования декартовых координат старые координаты выражаются через новые линейно. Полярные координаты этим свойством не обладают. Например, окружность радиуса  $r$  с центром в полюсе имеет уравнение

$$\rho = r.$$

Если же окружность расположена, как изображено на черт. 64 (стр. 137), то она имеет уравнение

$$\rho = 2r \cos \vartheta.$$

Таким образом, одна и та же линия в полярных координатах может иметь в одной системе координат алгебраическое уравнение, а в другой—трансцендентное. Значит, нельзя классифицировать линии по их уравнениям в полярных координатах.

**72. О числе точек пересечения двух линий.** Пусть даны две алгебраические линии

$$F(x, y) = 0 \quad (6)$$

и

$$\Phi(x, y) = 0, \quad (7)$$

первая — порядка  $m$ , а вторая — порядка  $n$ . Чтобы найти точки пересечения этих линий, следует решить совместно уравнения (6) и (7). В алгебре доказывается, что число решений системы уравнений равно произведению степеней этих уравнений. Следовательно, решая совместно уравнения (6) и (7), мы получим  $mn$  решений [под решением мы понимаем пару значений  $x$  и  $y$ , удовлетворяющую уравнениям (6) и (7)].

Однако отсюда ещё не следует, что линии (6) и (7) пересекаются в  $mn$  точках, так как среди  $mn$  решений могут быть мнимые, которым не соответствует никакая точка. Кроме того, среди этих  $mn$  пар решений могут быть совпадающие пары; им соответствует одна и та же точка. Если все решения действительны и различны, то линии (6) и (7) пересекаются в  $mn$  точках; в противном случае они пересекаются меньше чем в  $mn$  точках.

На черт. 65 изображены два эллипса, пересекающихся в четырёх точках [как видно из п 41 (стр. 79), эллипс есть кривая второго порядка]. Геометрически очевидно, что два эллипса не могут пересекаться более чем в четырёх точках.

Рассмотрим случай, когда  $m = 1$ , т. е. линия (6) — прямая. Тогда  $mn = n$ . Следовательно, алгебраическая линия может пересекаться с прямой в столькох точках, каков её порядок. Это свойство является весьма важным признаком, позволяющим делать некоторые

заклучения о порядке кривой по её виду. Например, эллипс может пересекаться с прямой в двух точках. Архимедова спираль пересекает прямую в бесконечном числе точек. Следовательно, архимедова спираль — трансцендентная линия. Ясно, что алгебраическая линия может пересекать прямую только конечное число раз (столько раз, каков её порядок). И действительно, уравнение архимедовой спирали в декартовых координатах оказывается трансцендентным [см. п 68 (стр. 135)].

Однако количество точек пересечения с прямой не даёт возможности всегда определить порядок линии.

Во-первых, трансцендентные линии могут пересекаться с прямой в конечном числе точек. На черт. 151 (стр. 269) изображена линия

$$y = \lg x.$$

Она может пересекаться с прямой в двух точках. Несмотря на это, она не является линией второго порядка, а является трансцендентной линией.

Во-вторых, алгебраическая линия  $m$ -го порядка не со всякой прямой пересекается  $m$  раз, а с некоторыми прямыми — меньше  $m$  раз. Бывают и такие линии  $m$ -го порядка, которые ни с одной прямой не пересекаются  $m$  раз. Например, на черт. 124 (стр. 251) изображена пунктиром линия четвёртого порядка

$$y = x^4.$$

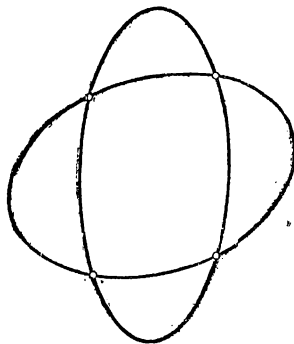
Она ни с одной прямой не пересекается более двух раз. Это объясняется тем, что система уравнений

$$\left. \begin{aligned} y &= x^4, \\ Ax + By + C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ни при каких  $A$ ,  $B$  и  $C$  не имеет больше двух действительных решений (остальные решения мнимые). Таким образом, легко было бы впасть в ошибку и подумать, что линия, изображённая пунктиром на черт. 124, второго порядка.

Если некоторая линия пересекает какую-нибудь прямую бесконечное число раз, то эта линия — трансцендентная. В противном случае (т. е. если она пересекает всякую прямую конечное число раз) вопрос остаётся открытым: такая линия может быть и алгебраической и трансцендентной.

Если известно, что данная линия — алгебраическая и если она может пересекать прямую самое большее в  $m$  точках, то можно утверждать, что её порядок не ниже  $m$ , но он может быть и выше.



Черт. 65. Пересечение двух эллипсов.

**73. О распадении алгебраической линии.** Пусть дано алгебраическое уравнение

$$F(x, y) = 0, \quad (8)$$

приведённое к виду (3), т. е.  $F(x, y)$  — целый многочлен; степень его обозначим через  $n$ . Может случиться, что  $F(x, y)$  есть произведение двух целых многочленов

$$F(x, y) \equiv \Phi(x, y) \cdot \Psi(x, y) *). \quad (9)$$

Сумма степеней многочленов  $\Phi(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$  равна  $n$ . Уравнение (8) может быть записано в виде

$$\Phi(x, y) \cdot \Psi(x, y) = 0. \quad (8')$$

В таком случае мы будем говорить, что алгебраическая линия (8) или, что — то же самое, (8') распадается на две алгебраические линии

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y) &= 0, \\ \Psi(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Это значит, что линия, изображающая уравнение (8), состоит из двух отдельных линий, изображающих уравнения (10) в отдельности.

**Доказательство.** Любая точка, принадлежащая одной из линий (10), имеет координаты, которые, будучи подставлены вместо текущих координат, обращают в нуль один из многочленов  $\Phi(x, y)$  или  $\Psi(x, y)$ . Следовательно, они обращают в нуль также левую часть уравнения (8'), т. е. эта точка принадлежит также линии (8'). Таким образом, обе линии (10) полностью входят в состав линии (8').

С другой стороны, линия (8') не содержит никаких других точек. В самом деле, любая точка линии (8') имеет координаты, которые, будучи подставлены вместо текущих координат, обращают в нуль левую часть уравнения (8'). Но, так как произведение может быть равно нулю только в том случае, когда равен нулю один из сомножителей, то эти координаты обращают в нуль также один из многочленов  $\Phi(x, y)$  и  $\Psi(x, y)$  и, следовательно, эта точка принадлежит одной из линий (10).

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Его левая часть разлагается на множители:

$$(x + y)(x - y) = 0.$$

---

\*)  $\equiv$  есть знак тождественного равенства.

Следовательно, это уравнение изображается парой прямых

$$x + y = 0$$

и

$$x - y = 0$$

(эти прямые суть биссектрисы координатных углов).

Решая данное уравнение относительно  $y$ :

$$y = \pm x,$$

и строя соответствующую линию, читатель и без вышеприведённого рассуждения убедился бы, что это — пара прямых.

Ясно, что если левая часть уравнения распадается на три множителя, то линия распадается на три линии и т. д.

Бывает, что в состав левой части уравнения входят два (или больше) одинаковых множителя. Например, уравнение

$$x^3 + 6xy + 9y^2 = 0$$

может быть представлено так:

$$(x + 3y)^2 = 0.$$

Ясно, что этому уравнению удовлетворяют точки прямой

$$x + 3y = 0$$

и только они. Принято говорить, что уравнение

$$x^3 + 6xy + 9y^2 = 0$$

изображается *дважды взятой прямой или парой совпавших прямых*.

Имея уравнение, часто бывает трудно узнать, разлагается ли его левая часть на множители. Способ решения этого вопроса для уравнений второй степени будет дан в п 115.

**Примечание.** Алгебраическая линия считается распадающейся на отдельные линии только в том случае, если  $F(x, y)$  разлагается на множители, являющиеся *целыми многочленами*. Поясним это условие следующим контрпримером. Уравнение

$$x^3 + y^3 - R^2 = 0$$

изображается окружностью с центром в начале. Оно может быть представлено так:

$$(y - \sqrt{R^2 - x^2})(y + \sqrt{R^2 - x^2}) = 0.$$

Приравнивание нулю отдельных множителей даёт

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2},$$

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2},$$

т. е. мы получаем отдельно уравнения *верхней и нижней полуокружностей*. Верно, что окружность состоит из двух полуокруж-

ностей, но, тем не менее, не говорят, что окружность *распадается* на две полуокружности, т. е. эти полуокружности не считаются за две *отдельные* алгебраические линии; окружность есть единая, не-распадающаяся линия.

Вопрос о распадении трансцендентных линий много сложнее, и в этой книге мы его касаться не будем.

### Задачи

**123.** Преобразовать уравнения следующих линий:

- а) прямой  $5x - 3y - 1 = 0$ , перенеся начало в точку (2, 3);
- б) прямой  $x - y + 8 = 0$ , повернув оси на  $\frac{\pi}{4}$ ;
- в) прямой  $2x + y - 4 = 0$ , перенеся начало в точку (3, -1) и повернув оси на  $\frac{\pi}{3}$ ;
- д) окружности  $x^2 + y^2 = 9$ , перенеся начало в точку (3, 0);
- е) окружности  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ , повернув оси на угол  $\alpha$ ;
- ф) эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , повернув оси на  $\frac{\pi}{2}$ .

**124.** Указать, какие из следующих линий являются алгебраическими и какие трансцендентными. Для алгебраических линий указать их порядок:

- |                             |                                      |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| а) $y = \sin x$ ;           | г) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ;       |
| б) $xy = 1$ ;               | д) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 1$ ; |
| в) $x - y - x^2y - 2 = 0$ ; | и) прямая;                           |
| д) $y = x^2$ ;              | ж) эллипс;                           |
| е) $y = 2^x$ ;              | к) гипербола;                        |
| ф) $y = \frac{x+1}{x-3}$ ;  | л) парабола;                         |
|                             | м) $\lg y - 2 \lg x = 0$ .           |

**125.** Какими линиями изображаются уравнения

- |                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| а) $xy = 0$ ;              | д) $4x^2 - 20xy + 25y^2 = 0$ ; |
| б) $2x^2 - 3xy + 5x = 0$ ; | е) $y^2 = 0$ ;                 |
| в) $x^3y - xy^3 = 0$ ;     | ф) $y^3 - 4xy = 0$ .           |
-

## Г Л А В А VI

### ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

#### § 1. Окружность

**74. Условия, при которых уравнение второй степени изображается окружностью.** Уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $(a, b)$  имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0. \quad (1)$$

Если в уравнении (1) раскрыть скобки и расположить члены по старшинству, то оно примет вид

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \quad (2)$$

Уравнение (1) мы будем называть *каноническим* уравнением окружности.

Окружность есть кривая второго порядка. Сравним уравнение (2) с общим уравнением второй степени. Общее уравнение второй степени с двумя переменными  $x$  и  $y$  содержит

$$\begin{array}{lll} \text{члены второй степени: } & x^2, & xy, & y^2, \\ & \gg & \text{первой} & \gg & : & x, & y, \\ & \gg & \text{нулевой} & \gg & : & \text{свободный член.} \end{array}$$

Каждый член может входить в уравнение с произвольным коэффициентом.

Впоследствии (гл. VII) выяснится, что во многих формулах некоторые коэффициенты приходится делить пополам. Чтобы избежать дробных выражений, принято вводить в обозначение этих коэффициентов множитель 2 и записывать общее уравнение второй степени так:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (3)$$

Укажем, как запомнить, в какие коэффициенты вводится множитель 2. Будем считать, что при каждом коэффициенте имеются два места, которые могут быть заняты множителями  $x$  и  $y$ . В первом члене оба места заняты множителями  $x$ , во втором члене одно место занято множителем  $x$ , а другое — множителем  $y$ . В четвёртом члене одно место занято множителем  $x$ , а другое свободно и т. д. Мно-

житель. 2 вводится в тех случаях, когда оба места заняты *разными* множителями.

Уравнение (3) может изображаться всевозможными кривыми второго порядка в зависимости от значений коэффициентов  $A, B, C, D, E$  и  $F$ \*). При каких условиях это уравнение изображается окружностью?

Сравнивая уравнение (3) с уравнением (2), мы, прежде всего, замечаем, что в уравнении (2) отсутствует член с произведением  $xу$ . Следовательно, для того чтобы уравнение (3) изображало окружность, должно быть  $B=0$ . Далее, мы видим, что в уравнении (2) коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$  суть единицы. Но мы вправе умножить обе части уравнения на постоянный множитель; после этого в уравнении (2) коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$  не будут единицами, но они будут равны между собой. Итак, для того чтобы уравнение (3) изображало окружность, коэффициенты  $A$  и  $C$  должны быть равны между собой.

Остальные коэффициенты должны быть таковы, чтобы можно было найти три числа  $a, b$  и  $R$ , удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned} -2a &= 2D, \\ -2b &= 2E, \\ a^2 + b^2 - R^2 &= F. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\left. \begin{aligned} a &= -D, \\ b &= -E, \\ R &= +\sqrt{D^2 + E^2 - F} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(перед радикалом ставится плюс, потому что  $R$  — величина существенно положительная). Для возможности вычисления  $R$  по этой формуле подкоренное выражение не должно быть отрицательным:

$$D^2 + E^2 - F \geq 0.$$

Итак, общее уравнение второй степени изображает окружность при следующих условиях (необходимых и достаточных):

$$\left. \begin{aligned} B &= 0, \\ A &= C, \\ D^2 + E^2 - F &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Неравенство  $D^2 + E^2 - F \geq 0$  часто опускают, говоря (для краткости), что если оно не соблюдается, то уравнение (3) изображается окружностью мнимого радиуса.

\*) Для краткости эти буквы называют коэффициентами, хотя  $B, D$  и  $E$  — половины коэффициентов.



Уравнение окружности всегда легко привести к каноническому виду. Покажем на примерах, как это делается.

Пример 1. Дано уравнение

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0. \quad (*)$$

Оно изображает окружность, так как в нём отсутствует член, содержащий  $xy$ , а коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$  одинаковы. Требуется привести это уравнение к каноническому виду и определить центр и радиус окружности.

Первый способ. Сравнивая уравнение (\*) с уравнением (2), имеем:

$$\begin{aligned} -2a &= -6, \\ -2b &= 2, \\ a^2 + b^2 - R^2 &= -15, \end{aligned}$$

откуда

$$a = 3, \quad b = -1, \quad R = 5.$$

Данное уравнение может быть представлено в виде

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 5^2 = 0$$

и, очевидно, изображает окружность с центром в точке  $(3, -1)$  радиуса 5.

Можно было прямо вычислить  $a$ ,  $b$  и  $R$  по формулам (5).

Второй способ. Группируя в уравнении (\*) члены  $x^2 - 6x$  и рассматривая  $x^2$  как квадрат  $x$ , а  $-6x$  как удвоенное произведение  $x$  на  $-3$ , находим, что эти два члена произошли от квадрата разности:  $(x - 3)^2$ . Аналогично члены  $y^2 + 2y$  произошли от  $(y + 1)^2$ .

Итак, уравнение (\*) может быть записано в виде

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + \dots = 0,$$

где многоточие заменяет свободный член. При раскрытии скобок получится свободный член 10. Для исправления свободного члена (т. е. чтобы вместо  $+10$  получилось  $-15$ ) следует вычесть 25:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 25 = 0.$$

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 21 = 0. \quad (**)$$

Действуя, как в предыдущем примере, получим:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + 16 = 0.$$

Это уравнение невозможно, т. е. в плоскости не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению.

**75. Нахождение окружности по трём условиям.** Уравнение окружности содержит три параметра. Следовательно, для нахождения определённой окружности необходимы три условия (т. е. три уравнения, из которых можно определить значения этих параметров).

Пример. Провести окружность через три точки  $A(3,3)$ ,  $B(-5,15)$ ,  $C(2,8)$ .

Напишем уравнение искомой окружности в виде

$$x^2 + y^2 + Lx + My + N = 0$$

(коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$  можно считать единицами, так как мы всегда можем разделить уравнение окружности на  $A$  и обозначить через  $L$ ,  $M$  и  $N$  коэффициенты при  $x$  и  $y$  и свободный член, которые получатся после деления).

Так как окружность должна проходить через три данные точки, то координаты этих точек должны удовлетворять уравнению окружности. Запишем это:

$$\begin{aligned} 9 + 9 + 3L + 3M + N &= 0, \\ 25 + 225 - 5L + 15M + N &= 0, \\ 4 + 64 + 2L + 8M + N &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим:  $L = 20$ ,  $M = -6$ ,  $N = -60$ . Уравнение искомой окружности

$$x^2 + y^2 + 20x - 6y - 60 = 0$$

или в каноническом виде

$$(x + 10)^2 + (y - 3)^2 - 169 = 0,$$

откуда видно, что эта окружность имеет центр в точке  $(-10, 3)$  и радиус, равный 13.

Для того чтобы определить окружность, надо иметь три условия; условием же называется равенство, связывающее параметры. То, что на словах формулируется как одно условие, иногда бывает равносильно нескольким условиям, и это может привести к недоразумениям. Рассмотрим, например, задачу: найти окружность с центром в точке  $(3, 1)$ , проходящую через точку  $(9, -7)$ . Разумеется, это — задача вполне определённая. Между тем, может показаться, что здесь даны только два условия: 1) центр окружности находится в точке  $(3, 1)$  и 2) окружность проходит через точку  $(9, -7)$ . Это объясняется тем, что задание центра окружности представляет собой не одно, а два условия, так как оно определяет два параметра:  $a$  и  $b$ . Когда же говорится, что окружность проходит через данную точку, то это есть одно условие, которое аналитически сводится к тому, что координаты данной точки удовлетворяют уравнению окружности; в данном случае

$$(9 - a)^2 + (-7 - b)^2 - R^2 = 0.$$

Это есть одно равенство, связывающее параметры  $a$ ,  $b$  и  $R$ . Таким образом, недоразумение, возникшее в п 46 (стр. 92), разрешено.

## Задачи

Во всех задачах, где требуется найти некоторую окружность, следует дать её уравнение в каноническом виде.

**126.** Найти координаты центра и радиус окружности:

- а)  $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 20 = 0$ ;      д)  $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 53 = 0$ ;  
 б)  $x^2 + y^2 + 2x - 14 = 0$ ;      е)  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$ .  
 в)  $12x^2 + 12y^2 - 60x - 16y - 105 = 0$ ;

**127.** Провести окружность, для которой точки  $(2, -5)$  и  $(8, -1)$  служат концами диаметра.

**128.** Провести окружность с центром в точке  $(7, 2)$ , касающуюся:

- а) оси  $X$ ;  
 б) прямой  $5x - 12y + 26 = 0$ ;  
 в) биссектрисы нормального координатного угла;  
 д) прямой  $5x + 2y + 8 = 0$ .

**129.** Провести окружность через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

- а)  $A(-6, -2)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(-2, -10)$ ;  
 б)  $A(5, -3)$ ,  $B(-4, 0)$ ,  $C(-59, -11)$ ;  
 в)  $A(4, 1)$ ,  $B(1, 5)$ ,  $C(-3, 2)$ ;  
 д)  $A(-2, -5)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(7, 7)$ .

**130.** Через точку  $(4, 2)$  провести касательные к окружности

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 25 = 0.$$

**131.** Провести окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой:

- а)  $(6, -3)$ ,  $(-6, 15)$ ;  $5x + 12y - 319 = 0$ ;  
 б)  $(2, -12)$ ,  $(-2, -4)$ ;  $3x + 4y - 3 = 0$ .

## § 2. Эллипс

**76. Признаки симметрии линий.** Пусть дано алгебраическое уравнение, в которое  $x$  входит только в чётных степенях. Допустим, что мы нашли пару чисел

$$x = k, \quad y = l,$$

удовлетворяющих нашему уравнению; значит, точка  $(k, l)$  лежит на нашей линии. Так как  $x$  входит в уравнение только в чётных степенях, то можно переменить знак у  $x$ , и полученная пара чисел

$$x = -k, \quad y = l$$

тоже должна удовлетворять уравнению; значит, точка  $(-k, l)$  должна лежать на линии. Выходит, что если точка  $(k, l)$  лежит на линии, то и точка  $(-k, l)$  лежит на линии. Но точки  $(k, l)$  и  $(-k, l)$ , отличающиеся знаком абсциссы, симметричны

относительно оси  $Y$ . Следовательно, каждой точке нашей линии соответствует другая её точка, симметричная относительно оси  $Y$ . Другими словами, вся линия симметрична относительно оси  $Y$ .

Аналогичное рассуждение применимо и к оси  $X$ . Итак: *если в уравнении алгебраической линии  $x$  (или  $y$ ) присутствует только в чётных степенях, то эта линия симметрична относительно оси  $Y$  (или  $X$ ).*

Пусть дано алгебраическое уравнение, содержащее члены только чётных измерений. Заметим, что в член чётного измерения  $x$  и  $y$  могут входить в нечётных степенях. Например, член  $xu^3$  — четвёртого измерения и содержит  $x$  в первой степени и  $y$  в третьей. Допустим, что мы нашли пару чисел, удовлетворяющих данному уравнению

$$x = k, \quad y = l.$$

Так как уравнение содержит только члены чётных измерений, которые, очевидно, не изменят своих значений, если одновременно изменить знаки у  $x$  и у  $y$ , то значения

$$x = -k, \quad y = -l$$

тоже удовлетворяют уравнению. Значит, если точка  $(k, l)$  лежит на линии, то и точка  $(-k, -l)$  лежит на ней. Точки  $(k, l)$  и  $(-k, -l)$  симметричны относительно начала. Следовательно, *каждой точке на нашей линии соответствует другая точка на ней, симметричная относительно начала*, т. е. начало является *центром симметрии* нашей линии. Хорда \*), соединяющая две такие точки, проходит через начало и делится в нём пополам. Обратно, всякая прямая, проходящая через начало и пересекающая нашу линию по одну сторону от начала, обязательно пересекает её и по другую сторону на таком же расстоянии. Значит, всякая хорда, проходящая через начало, делится в начале пополам.

Аналогичное положение имеет место и тогда, когда все члены уравнения — нечётных измерений. В этом случае при изменении знаков одновременно у  $x$  и у  $y$  все члены уравнения изменяют знаки (не меняя величины) и поэтому, если значения  $x = k, y = l$  удовлетворяли уравнению, то значения  $x = -k, y = -l$  тоже будут удовлетворять ему.

Если каждой точке некоторой линии соответствует другая точка этой линии, симметричная с первой относительно постоянной точки  $C$ , то точка  $C$  называется *центром симметрии* этой линии (в дальнейшем мы для краткости будем называть центр симметрии просто

---

\*) Хордой какой-нибудь линии называется отрезок, соединяющий две точки этой линии.

центром линии). Не всякая линия имеет центр. Но если в её уравнении все члены одновременно — чётных измерений или все одновременно — нечётных измерений, то она имеет центр, и этот центр находится в начале.

**77. Исследование формы эллипса по каноническому уравнению.** Каноническое уравнение эллипса (т. е. уравнение эллипса, отнесённого к его осям) имеет вид [гл. III, § 2, формула (3) (стр. 84)]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Если бы мы не знали, откуда появилось уравнение (1), то перед нами возникла бы задача исследовать линию, изображаемую этим уравнением. Рассмотрим эту задачу.

Уравнение (1) содержит  $x$  только в квадрате. Следовательно, эллипс\*) симметричен относительно оси  $Y$ . Достаточно вычертить только его правую часть (находящуюся в I и IV четвертях).

$y$  тоже входит в уравнение (1) только в квадрате. Следовательно, эллипс симметричен относительно оси  $X$ . Значит, достаточно вычертить часть эллипса, находящуюся в первой четверти. Зеркальное отражение этой части в оси  $X$  даст нам часть, лежащую в IV четверти, а зеркальное отражение обеих этих частей в оси  $Y$  даст нам части, лежащие во II и III четвертях.

Все три члена, входящие в уравнение эллипса, — чётных измерений (два члена — второго измерения и один член — нулевого). Следовательно, эллипс имеет центр, находящийся в начале.

Определим области изменения  $x$  и  $y$ . Так как члены, стоящие влево, не могут быть отрицательны и в сумме дают единицу, то каждый из них в отдельности не больше единицы:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1,$$

откуда

$$x^2 \leq a^2, \quad -a \leq x \leq a.$$

Таким образом, все точки эллипса находятся внутри полосы, заключённой между параллельными прямыми  $x = -a$  и  $x = a$ . Аналогично из

$$\frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

следует

$$-b \leq y \leq b,$$

---

\*) Эллипсом в данном случае мы называем линию, изображающую уравнение (1). Предполагается, что мы не знаем ни свойств этой линии, ни её вида. Наша задача заключается в том, чтобы исследовать вид этой линии на основании уравнения (1).

т. е. все точки эллипса находятся внутри полосы, заключённой между параллельными прямыми  $y = -b$  и  $y = b$ .

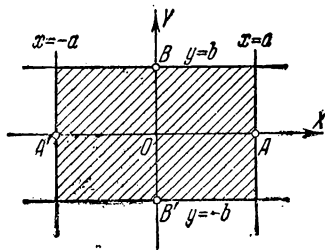
Следовательно, весь эллипс помещается внутри прямоугольника, образованного пересечением этих полос (заштрихованный прямоугольник на черт. 66).

Узнаём точки пересечения эллипса с координатными осями. Полагая в уравнении (1)  $x = 0$ , получаем  $y = \pm b$ ; полагая  $y = 0$ , получаем  $x = \pm a$ . Следовательно, эллипс пересекает координатные оси в точках

$$(0, b), (0, -b), (a, 0) \text{ и } (-a, 0).$$

Решаем уравнение (1) относительно  $y$ :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2)$$



Черт. 66.  $\begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ -b \leq y \leq b. \end{cases}$

Так как нам надо построить только часть эллипса, находящуюся в первой четверти, то мы будем рассматривать только положительные значения  $x$ , т. е. будем изменять  $x$  от 0 до  $a$ , и только положительные значения  $y$ , т. е. в формуле (2) будем брать перед радикалом только плюс. При  $x = 0$   $y = b$ . При дальнейшем увеличении  $x$  подкоренное выражение уменьшается, и следовательно,  $y$  уменьшается. При  $x = a$   $y = 0$ . В переводе на геометрический язык это значит, что, начиная от точки  $B$  вправо, эллипс всё время идёт вниз до точки  $A$ . Принимая во внимание симметрию эллипса относительно осей  $X$  и  $Y$ , приходим к заключению, что эллипс есть замкнутая линия; расположение этой линии теперь вполне ясно.

Проведём прямую через точки  $A$  и  $B$ . Уравнение этой прямой

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

откуда

$$y = \frac{b}{a} (a - x).$$

Сравнивая эту ординату текущей точки прямой с ординатой (2) текущей точки эллипса, можно доказать, что в первой четверти (т. е. при  $0 < x < a$ ) для эллипса ордината больше, чем для прямой. В самом деле,

$$y_{\text{элл}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{(a-x)^2 + 2x(a-x)}.$$

Второй член, стоящий под радикалом, положителен (так как  $0 < x < a$ ). Если его отбросить, то радикал уменьшится:

$$y_{\text{элл}} > \frac{b}{a} \sqrt{(a-x)^2} = \frac{b}{a} (a-x) = y_{\text{прям.}}$$

Следовательно, между точками  $B$  и  $A$  эллипс расположен выше прямой  $AB$ .

Всё сказанное выше достаточно для того, чтобы вычертить эллипс.

Напомним, что в эллипсе

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad (3)$$

где  $c$  — половина междуфокусного расстояния.

Следует помнить, что фокусы эллипса всегда лежат на большой оси. В формуле (3) предполагается, что  $a$  есть большая полуось, а  $b$  — малая. В противном случае (т. е. если ось  $2a$ , расположенная на оси  $X$ , — малая, а ось  $2b$ , расположенная на оси  $Y$ , — большая) в формуле (3) надо поменять местами буквы  $a$  и  $b$ . Словесное выражение формулы (3) — квадрат большой полуоси равен квадрату малой полуоси плюс квадрат половины междуфокусного расстояния — всегда остаётся верным.

**78. Эксцентриситет эллипса.** Эллипсы бывают разной формы: более и менее вытянутые. Форму эллипса можно характеризовать числом. За такое число можно принять, например, отношение осей  $\frac{b}{a}$ . Чаще форму эллипса характеризуют отношением междуфокусного расстояния к большой оси. Это отношение называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается буквой  $e$ :

$$e = \frac{c}{a}. \quad (4)$$

Очевидно, эксцентриситет эллипса есть отвлечённое число, заключённое между нулём и единицей:

$$0 \leq e \leq 1. \quad (5)$$

Эксцентриситет эллипса весьма просто связан с отношением осей: из формулы (3) делением на  $a^2$  получим:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + e^2 = 1. \quad (6)$$

Если  $e = 0$ , то, как видно из формулы (6),  $b = a$ , т. е. эллипс является окружностью. При этом  $c = 0$ , т. е. фокусы совпадают с центром.

При увеличении  $e$  эллипс становится более вытянутым. Наконец, при  $e = 1$  имеем  $b = 0$ , т. е. эллипс превращается в двойной отрезок.

Можно доказать, что эллипсы с одинаковыми эксцентриситетами подобны между собой.

**79. Эллипс как равномерное сжатие окружности.** Построим на большой оси эллипса, как на диаметре, окружность. Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

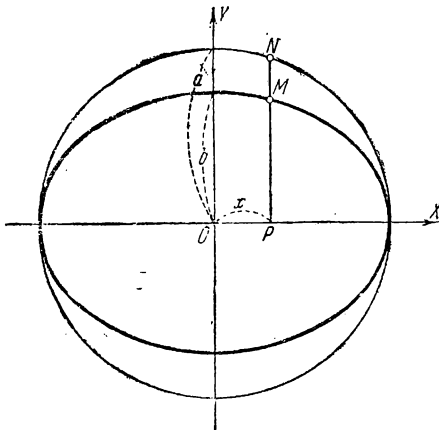
Возьмём на оси  $X$  какую-нибудь точку  $P$ ; восставим в ней перпендикуляр к оси  $X$  и обозначим точки пересечения этого перпендикуляра с верхним полуэллипсом и верхней полуокружностью соответственно через  $M$  и  $N$  (черт. 67). Вычислим отношение  $\frac{PM}{PN}$ .

Ординаты  $PM$  и  $PN$  определятся соответственно из уравнений эллипса и окружности

$$PM = y_{\text{элл}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$PN = y_{\text{окр}} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Буква  $x$  в обоих случаях имеет одно и то же значение (потому что у точек  $M$  и  $N$  — одна и та же абсцисса). Делим первое на второе:



$$\frac{PM}{PN} = \frac{b}{a}. \quad (7)$$

Это равенство показывает, что отношение  $\frac{PM}{PN}$  не зависит от положения точки  $P$ , так как в правой части не входит  $x$ . Напишем это равенство в виде

$$PM = \frac{b}{a} \cdot ON,$$

откуда ясно видно, что ордината эллипса есть определённая часть соответственной ординаты окружности.

Отсюда вытекает новый способ построения эллипса по точкам. Возьмём окружность,

проведём в ней диаметр (черт. 68) и восставим к нему ряд перпендикуляров до пересечения с окружностью. Делим все перпендикуляры в одном и том же отношении. Соединяя точки деления, получим половину эллипса. Чтобы получить другую половину, следует произвести такое же построение с другой стороны диаметра. На черт. 68 взято  $\frac{3}{4}$  от каждой ординаты окружности.

Черт. 67.  $\frac{PM}{PN} = \frac{b}{a}.$

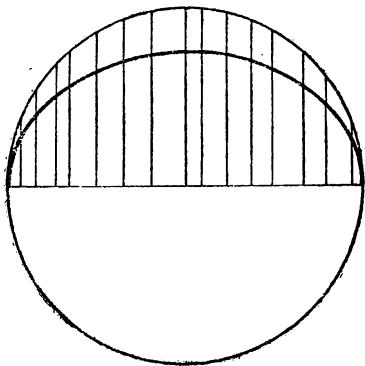


Однако в этом построении не указано, каким способом следует делить полу хорды в некотором отношении. Сейчас мы устраним этот недостаток.

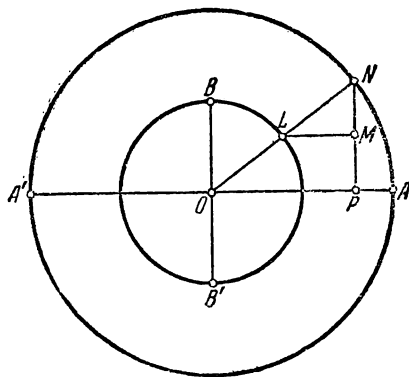
**Задача.** Построить эллипс по его осям.

**Решение.** Пусть  $AA'$  и  $BB'$  суть оси эллипса (черт. 69). Разумеется, эти отрезки должны быть перпендикулярны и должны делиться пополам в точке пересечения. Требование «построить эллипс» мы понимаем в следующем смысле: построить сколько угодно точек эллипса.

Построим на данных осях, как на диаметрах, две концентрические окружности. Проведём из центра произвольный луч и рассмотрим



Черт. 68. Эллипс, как равномерное сжатие окружности.



Черт. 69. Построение эллипса по осям.

рим отрезок  $LN$  этого луча, заключённый в кольцо между окружностями. Принимая этот отрезок за гипотенузу, построим прямоугольный треугольник  $LMN$ , проводя  $LM \parallel OA$ ,  $MN \parallel OB$ , как показано на черт. 69. Докажем, что точка  $M$  принадлежит эллипсу.

Параллельные прямые  $LM$  и  $OA$  отсекают на сторонах угла  $PNO$  пропорциональные отрезки, т. е.

$$\frac{PM}{PN} = \frac{OL}{ON} = \frac{b}{a}.$$

Сопоставляя это с равенством (7), мы видим, что  $PM$  есть ордината эллипса, т. е.  $M$  есть точка эллипса, что и требовалось доказать.

Проводя много лучей, выходящих из  $O$ , и проделывая для каждого из них это построение, получим сколько угодно точек эллипса.

Рассмотрим следующее преобразование плоскости (черт. 70). Пусть каждая точка  $M$  плоскости переходит в новое положение  $M'$ , причём  $M$  и  $M'$  лежат на одном перпендикуляре к оси  $X$  и отношение

$\frac{PM'}{PM}$  есть постоянная величина (т. е. одна и та же для всех точек  $M$ ). Такое преобразование называется *равномерным сжатием к оси  $X$* . Короче говоря, равномерное сжатие к оси  $X$  есть такое преобразование плоскости, при котором абсциссы всех точек остаются неизменными, а ординаты сокращаются в постоянном отношении. Если координаты любой точки  $M$  обозначить через  $x$  и  $y$ , а координаты соответствующей ей точки  $M'$  через  $x'$  и  $y'$ , то

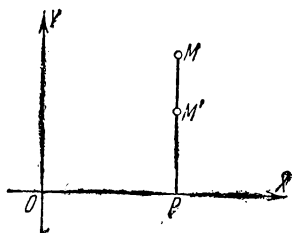
$$x = x',$$

$$\frac{y}{y'} = k$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= x', \\ y &= ky'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Формулы (8) суть формулы равномерного сжатия к оси  $X$ . Они выражают координаты старой (непреобразованной) точки через координаты соответственной (преобразованной) точки. Коэффициент  $k$  называется *коэффициентом сжатия*.



Черт. 70.  $x = x'$ ,  
 $y = ky'$ .

При  $|k| > 1$  все точки приближаются к оси  $X$ , при  $|k| < 1$  они удаляются от оси  $X$  (т. е. в этом случае вернее было бы говорить не «сжатие», а «растяжение»). В общем случае рассматриваемое преобразование иногда называют «равномерным растяжением от оси  $X$ ». При  $k < 0$  преобразование (8) включает также отражение в оси  $X$ .

Читатель без всякого труда составит формулы для равномерного сжатия к оси  $Y$ . Вообще можно рассматривать равномерное сжатие к любой прямой. Равномерное сжатие будет вполне определено, если заданы: 1) прямая, к которой производится сжатие, 2) коэффициент сжатия.

Прямая, к которой производится сжатие, характеризуется тем, что все её точки остаются в покое (сами себе соответствуют).

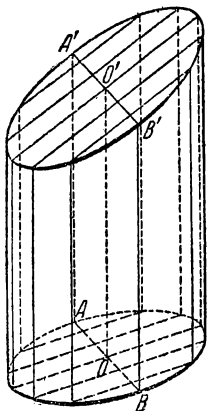
Теперь свойство эллипса, доказанное в этом пункте, можно сформулировать так:

*при равномерном сжатии окружности к её диаметру получается эллипс \*).*

При  $|k| > 1$  диаметр, к которому производится сжатие, служит большой осью эллипса, а при  $|k| < 1$  — малой осью.

\*) Равномерным сжатием часто называют не только самое преобразование плоскости, но и то, что получается в результате этого преобразования. Например, говорят «эллипс есть равномерное сжатие окружности».

**80. Эллипс как сечение прямого кругового цилиндра.** На черт. 71 изображён прямой круговой цилиндр, усечённый сверху плоскостью, не параллельной плоскости основания. Требуется доказать, что в сечении получается эллипс.



Черт. 71. Эллипс как наклонное сечение прямого кругового цилиндра.

Восставим в центре  $O$  окружности основания перпендикуляр до пересечения с секущей плоскостью в точке  $O'$ . Проведём через  $O'$  хорду  $A'B'$ , параллельную плоскости основания. Проектируя  $A'B'$  на плоскость основания, получим диаметр  $AB$ , параллельный  $A'B'$ .

Проведём семейство хорд, перпендикулярных к  $A'B'$ . Проектируя эти хорды на плоскость основания, мы получим семейство хорд окружности, перпендикулярных к диаметру  $AB$  (предоставляем читателю доказать это). Так как все проектируемые хорды параллельны между собой, то при проектировании они все сократятся в одном и том же отношении (умножатся на косинус угла с плоскостью основания). Если  $a'$  — любая из проектируемых хорд, а  $a$  — хорда окружности, служащая её проекцией, то

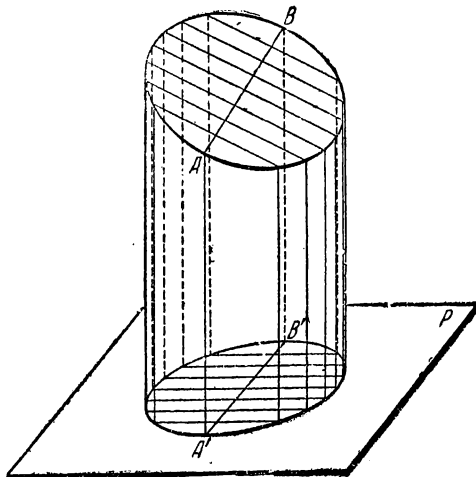
$$a = a' \cos \varphi,$$

причём угол  $\varphi$  для всех хорд один и тот же. Отсюда

$$a' = \frac{1}{\cos \varphi} a.$$

Тем самым доказано, что кривая сечения есть эллипс, так как  $A'B'$  равен диаметру окружности, а все хорды, перпендикулярные к  $A'B'$ , являются хордами окружности, увеличенными в одном и том же отношении (умноженными на  $\frac{1}{\cos \varphi}$ ).

**81. Эллипс как проекция окружности.** Пусть дана плоскость  $P$  (черт. 72) и вне этой плоскости — окружность, причём плоскость окружности не параллельна плоскости  $P$ . Проведём диаметр  $AB$  окружности, параллельный  $P$ . Чтобы найти этот диаметр, следует провести через центр окружности плоскость, параллельную  $P$ ;



Черт. 72. Эллипс как проекция окружности.

линия пересечения этой плоскости с плоскостью окружности и есть диаметр, параллельный  $P$ . Проводим хорды окружности, перпендикулярные к  $AB$ . Проектируем окружность вместе с диаметром  $AB$  и хордами на  $P$ .

Диаметр  $AB$  спроектируется в отрезок  $A'B'$ , равный и параллельный  $AB$ . Хорды, перпендикулярные к  $AB$ , спроектируются в отрезки, перпендикулярные к  $A'B'$  (на основании теоремы о трёх перпендикулярах). При проектировании все хорды сократятся в одинаковом отношении: они умножатся на  $\cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол наклона проектируемых хорд к плоскости  $P$ . Отсюда следует, что проекция окружности есть эллипс.

Заметим, что  $\varphi$  есть угол между плоскостью окружности и плоскостью проекций.

Если радиус проектируемого круга равен  $R$ , то полуоси эллипса, получаемого в проекции, определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} a &= R, \\ b &= R \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

**82. Фокальные радиусы-векторы точек эллипса.** Фокусы эллипса суть точки  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ . Если  $M(x, y)$  — любая точка плоскости, то фокальные радиусы-векторы этой точки выражаются формулами

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Если  $M(x, y)$  не любая точка плоскости, а точка, принадлежащая эллипсу, то эти формулы могут быть упрощены.

Возводя  $r_1$  и  $r_2$  в квадрат и беря их разность, находим:

$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx \quad (*)$$

или

$$(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4cx.$$

Кроме того, если точка  $M$  принадлежит эллипсу, то (в силу основного свойства эллипса)

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Заменяя в равенстве  $(*)$   $r_1 + r_2$  через  $2a$ , находим:

$$r_1 - r_2 = \frac{4cx}{2a} = 2ex.$$

Теперь мы имеем два уравнения для определения  $r_1$  и  $r_2$ :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2a, \\ r_1 - r_2 &= 2ex, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= a + ex, \\ r_2 &= a - ex. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**83. Фокальный параметр эллипса.** Фокальным параметром эллипса называется длина перпендикуляра к большой оси, восстановленного в фокусе, до пересечения с эллипсом. Чтобы вычислить фокальный параметр, надо, очевидно, подставить в формулу (2) (стр. 152)  $x = c$  (или  $x = -c$ ). Обозначая фокальный параметр буквой  $p$ , получим:

$$p = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b^2}{a} \quad (11)$$

(перед радикалом берётся знак  $+$ , потому что вычисляется длина перпендикуляра).

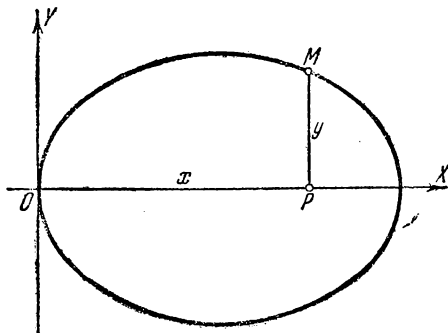
Можно придать этому выражению другой вид, заменив  $b^2$  через  $a^2 - c^2$ :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = a - \frac{c^2}{a} = a - \frac{c}{a} c,$$

или, заменяя  $\frac{c}{a}$  через  $e$ ,

$$p = a - ec. \quad (12)$$

Формулу (12) можно получить из других соображений. Фокальный параметр есть длина фокального радиуса-вектора точки эллипса, лежащей «прямо над (или под) фокусом». Если точка лежит над левым фокусом, то следует воспользоваться первой формулой (10), положив в ней  $x = -c$ , если же над правым, то второй формулой (10), положив в ней  $x = c$ . В обоих случаях получим формулу (12).



Черт. 73.  $y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$   
( $e < 1$ ).

**84. Уравнения эллипса, отнесённого к вершине.** Выведем уравнение эллипса, расположенного так, что начало находится в его вершине, а фокусы лежат на положительной части оси  $X$  (черт. 73), т. е., как принято говорить, *уравнение эллипса, отнесённого к вершине*. Вообще говорят, что кривая *отнесена* к некоторым прямым или к некоторой точке, если эти прямые приняты за оси координат, а точка — за начало. Например, каноническое уравнение эллипса есть уравнение эллипса, отнесённого к его осям.

Для вывода можно взять каноническое уравнение эллипса и произвести преобразование координат, перенося начало в вершину эллипса ( $-a, 0$ ).

Обозначая новые координаты через  $x'$  и  $y'$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} x &= x' - a, \\ y &= y'. \end{aligned}$$

Каноническое уравнение эллипса преобразуется так:

$$\frac{(x' - a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

или, если раскрыть скобки и выразить  $y'^2$ :

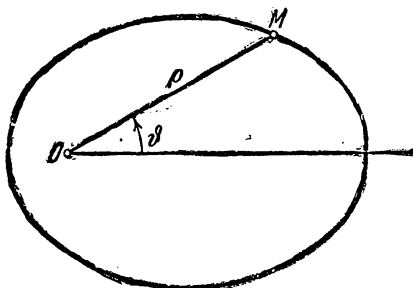
$$y'^2 = 2 \frac{b^2}{a} x' - \frac{b^2}{a^2} x'^2.$$

Вспомня, что  $\frac{b^2}{a}$  есть фокальный параметр (п 83), и заменяя в последнем члене  $b^2$  через  $a^2 - c^2$ , перепишем последнее уравнение так:

$$y'^2 = 2\rho x' + \frac{c^2 - a^2}{a^2} x'^2 = 2\rho x' + \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) x'^2 = 2\rho x' + (e^2 - 1) x'^2.$$

Отбросим совсем старую систему координат и будем обозначать новые координаты  $x$  и  $y$ :

$$y^2 = 2\rho x + (e^2 - 1) x^2. \quad (13)$$



**85. Полярное уравнение эллипса.** Выведем полярное уравнение эллипса, расположенного так, что один его фокус находится в полюсе, а другой — на положительной части полярной оси (черт. 74).

На основании первой из формул (10)

$$r_1 = a + ex.$$

Черт. 74.  $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}.$

Очевидно  $r_1$  и есть  $\rho$  (так как мы поместили полюс в левом фокусе), а

$x$  есть абсцисса, отсчитываемая от

центра эллипса. Если обозначить через  $x'$  абсциссу, отсчитываемую от левого фокуса, то

$$x = x' - c$$

и, следовательно,

$$r_1 = a + e(x' - c).$$

Заменяем  $r_1$  через  $\rho$ , а  $x'$  через  $\rho \cos \vartheta$ :

$$\rho = a + e(\rho \cos \vartheta - c).$$

Находим отсюда  $\rho$ :

$$\rho = \frac{a - ec}{1 - e \cos \vartheta}.$$

Вспоминаем, что  $a - ec$  есть фокальный параметр  $p$

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}. \quad (14)$$

### Упражнения

**132.** Построить по точкам эллипс

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

на миллиметровой бумаге, принимая за единицу масштаба 1 см и изменяя  $x$  черз 0,2.

**133.** Построить по точкам эллипс

$$\rho = \frac{9}{5 - 4 \cos \vartheta},$$

придавая  $\vartheta$  значения от 0 до  $360^\circ$  через  $10^\circ$ . Сначала составить таблицу, а затем выбрать подходящий масштаб.

**Задачи**

**134.** Указать, какими видами симметрии обладают следующие кривые (относительно оси  $X$ , относительно оси  $Y$ , относительно начала) и какие из них проходят через начало:

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| a) $y^2 + 8x - 3x^2 = 0$ ;     | f) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ ; |
| b) $xy = 5$ ;                  | g) $y = \sin x$ ;                            |
| c) $x^2 y^2 = 25$ ;            | h) $y = \cos x$ ;                            |
| d) $x^2 y + 2xy - 1 = 0$ ;     | i) $x^3 - 3xy^2 + 2x - y = 0$ ;              |
| e) $2x^2 y^3 - 5x^4 + 3 = 0$ ; | j) $2x - 3y = 0$ .                           |

**135.** Какие коэффициенты в уравнении

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

равны нулю, если это уравнение изображает эллипс, одна из осей которого служит осью  $Y$ , а одна из вершин — началом координат?

**136.** Функция  $F(x, y)$  называется *симметрической*, если она не меняет своей величины при перемене местами значений аргументов, т. е. если

$$F(b, a) = F(a, b)$$

при любых  $a$  и  $b$ .

Каким свойством обладает линия

- a)  $F(x, y) = 0$ ;  
 b)  $F(x, y) = k \quad (k = \text{const.} \neq 0)$ ,

где  $F(x, y)$  — симметрическая функция?

**137.** Функция  $F(x, y)$  называется *антисимметрической*, если при перемене местами значений аргументов она меняет знак, не меняя абсолютной величины, т. е. если

$$F(b, a) = -F(a, b)$$

при любых  $a$  и  $b$ .

Изменяются ли ответы на вопросы а) и б) предыдущей задачи, если  $F(x, y)$  — антисимметрическая функция?

**138.** Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

проходит через точки (6; 6,4) и (−8; 4,8). Определить его оси.

**139.** Вычислить эксцентриситеты эллипсов в задаче 66 (стр. 83).

**140.** Написать уравнение эллипса, принимая большую ось за ось  $X$ , а малую ось — за ось  $Y$  и зная два параметра:

$$\text{a) } a=3, \quad e=\frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \text{d) } a=\sqrt{13}, \quad e=\frac{\sqrt{143}}{13};$$

$$\text{b) } b=2, \quad e=\frac{3\sqrt{5}}{7}; \quad \text{e) } b=\sqrt{5}, \quad e=\frac{2\sqrt{19}}{9};$$

$$\text{c) } c=\sqrt{19}, \quad e=0,1\sqrt{19}; \quad \text{f) } c=\sqrt{5}, \quad e=\frac{\sqrt{35}}{7}.$$

**141.** Определить координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$\text{a) } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1; \quad \text{c) } \frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{21} = 1;$$

$$\text{b) } x^2 + \frac{y^2}{5} = 1; \quad \text{d) } \frac{x^2}{0,3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

**142.** Определить эксцентриситет эллипса, зная, что

a) малая полуось видна из фокуса под углом  $\frac{\pi}{3}$ ;

b) большая полуось видна из конца малой оси под углом  $64^\circ 20'$ .

**143.** Под каким углом видна из фокуса малая ось эллипса

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1?$$

**144.** Земной меридиан имеет форму эллипса. Вычислить его эксцентриситет, зная, что с точностью до  $\frac{1}{2}$  км длина земной оси равна 12713 км, а экваториальный диаметр Земли равен 12757 км.

**145.** Вычислить эксцентриситет эллипса, полученного из окружности путём увеличения\*) всех хорд, перпендикулярных к некоторому диаметру:

a) в 2 раза; c) в  $\sqrt{2}$  раз;

b) в  $\frac{1}{2}$  раза; d) в  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  раз.

**146.** Прямой круговой цилиндр, диаметр основания которого равен 12 см, пересечён плоскостью, образующей с плоскостью основания угол в  $30^\circ$ . Определить оси и эксцентриситет эллипса, получившегося в сечении.

**147.** Под каким углом к плоскости основания прямого кругового цилиндра надо провести секущую плоскость, чтобы получить в сечении эллипс,

эксцентриситет которого равен  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ?

**148.** Вычислить радиусы-векторы, проведённые из фокусов эллипса

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{4} = 1$$

в точку, для которой

a)  $x=3$ ; b)  $x=4$ .

---

\*) В алгебраическом смысле.



**149.** Радиусы-векторы, проведённые из фокусов эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точку, абсцисса которой равна 2, суть 6,6 и 3,4. Найти полуоси эллипса.

**150.** На эллипсе

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$$

найти точку, фокальные радиусы-векторы которой взаимно перпендикулярны.

**151.** Доказать, что параметрические уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t \end{aligned} \right\}$$

изображаются эллипсом. Указать геометрический смысл параметра  $t$ .

**152.** Дан эллипс

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 \cos t, \\ y &= 2 \sin t. \end{aligned} \right\}$$

Под каким углом наклонён к оси  $X$  радиус-вектор, идущий из начала в точку, для которой  $t = \frac{\pi}{4}$ ?

**153.** Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке  $(x_1, y_1)$ .

**154.** При каком условии прямая  $Ax + By + C = 0$  касается эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

**155.** Доказать, что нормаль к эллипсу в любой его точке делит пополам угол между фокальными радиусами-векторами, проведёнными в эту точку.

**156.** Провести касательную и нормаль:

а) к эллипсу  $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$  в точке (12,12);

б) к эллипсу  $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$  в точке  $\left(\frac{3\sqrt{10}}{7}, \frac{6\sqrt{10}}{7}\right)$ .

**157.** Провести касательную:

а) к эллипсу  $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25} = 1$  параллельно прямой  $3x + 16y + 5 = 0$ ;

б) к эллипсу  $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$  перпендикулярно к прямой  $2x + y = 0$ .

**158.** Провести нормаль:

а) к эллипсу  $\frac{x^2}{676} + \frac{y^2}{169} = 1$  параллельно прямой  $24x - 5y = 0$ ;

б) к эллипсу  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  перпендикулярно к прямой  $3x - y + 5 = 0$ .

**159.** Провести касательную:

а) к эллипсу  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$  через точку  $(7, -2)$ ;

б) к эллипсу  $\frac{x^2}{1156} + \frac{y^2}{289} = 1$  через точку  $(16, -15)$ ;

с) к эллипсу  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  через точку  $(-3, 2)$ .

### § 3. Гипербола

**86. Исследование формы гиперболы по каноническому уравнению.** Каноническое уравнение гиперболы [гл. III, § 2, формула (6) (стр. 84)]

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Теми же рассуждениями, которые мы провели для эллипса, можно показать, что гипербола, изображаемая уравнением (1), симметрична относительно оси  $X$ , относительно оси  $Y$  и относительно начала, т. е. начало координат является центром гиперболы. Достаточно вычертить часть гиперболы, находящуюся в первой четверти, а остальные части можно получить зеркальными отражениями в осях координат.

Решаем уравнение (1) относительно  $x$ :

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2},$$

и относительно  $y$ :

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (2)$$

Из первой формулы видим, что  $y$  может принимать все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Из второй формулы видно, что должно быть

$$x^2 \geq a^2,$$

откуда

$$\text{или } x \leq -a \text{ или } x \geq a.$$

Следовательно, область существования функции  $\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$  такова:

$$-\infty < x \leq -a \text{ и } a \leq x < \infty.$$

Иначе говоря,  $x$  может принимать все значения, кроме значений, заключённых между  $-a$  и  $a$ . Следовательно, гипербола расположена вне полосы, образованной прямыми  $x = -a$  и  $x = a$ . Вверх и вниз она простирается неограниченно, так как  $y$  может изменяться от  $-\infty$  до  $\infty$ .

Так как мы пока ограничиваемся первой четвертью, то будем придавать  $x$  в формуле (2) положительные значения, т. е. от  $a$  до  $\infty$ , и полученные значения  $y$  брать не с двойным знаком, а с плюсом.

При  $x=a$   $y=0$ . При дальнейшем увеличении  $x$   $y$  тоже увеличивается. Следовательно, вправо от точки  $(a, 0)$  гипербола идет вверх.

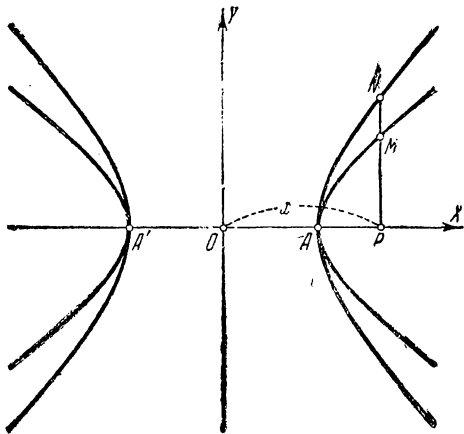
В п 88 мы получим более точное представление о форме гиперболы. Пока можно, задавшись числовыми значениями  $a$  и  $b$ , построить гиперболу по точкам.

На черт. 75 изображены две гиперболы с одинаковыми значениями  $a$  и разными значениями  $b$ . Уравнения этих гипербол:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (*)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \quad (**)$$

Точки  $A$  и  $A'$  называются *вершинами* гиперболы, отрезок  $A'A$  называется *действительной осью* (смысл названия «действительная» выяснится в п 89), а отрезок  $OA$  (а также  $OA'$ ) — *действительной полуосью*.



Черт. 75.  $\frac{PM}{PN} = \frac{b}{b_1}$ .

Если в какой-нибудь точке  $P$  оси  $X$  восставить к оси  $X$  перпендикуляр и обозначить через  $M$  его точку пересечения с верхней частью гиперболы (\*), а через  $N$  — точку пересечения с верхней частью гиперболы (\*\*), то на основании формулы (2)

$$PM = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$PN = \frac{b_1}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

откуда

$$\frac{PM}{PN} = \frac{b}{b_1}. \quad (3)$$

Формула (3) показывает, что отношение  $\frac{PM}{PN}$  постоянно (оно не зависит от  $x$ ), т. е. оно одно и то же для перпендикуляров, составленных из любых точек оси  $X$ . Это значит, что одна из гипербол (\*) и (\*\*) может быть получена из другой равномерным сжатием к оси  $X$ .

Кроме того, из формулы (3) выясняется влияние параметра  $b$  на вид гиперболы. Если  $b_1 > b$ , то  $PN > PM$ , т. е. все ординаты гиперболы (\*\*) больше соответственных ординат гиперболы (\*).

Значит, увеличивая параметр  $b$  (при неизменном  $a$ ), мы делаем гиперболу «шире».

Напомним, что фокусы гиперболы расположены на действительной оси на расстоянии  $c$  в каждую сторону от центра. Параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  связаны формулой

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (4)$$

**87. Эксцентриситет гиперболы.** Гиперболы, как и эллипсы, бывают различной формы. Форма гиперболы может характеризоваться отношением  $\frac{b}{a}$  или отношением  $\frac{c}{a}$ . Последнее отношение (*отношение между фокусного расстояния к действительной оси*) называется *эксцентриситетом* гиперболы и обозначается буквой  $e$ :

$$e = \frac{c}{a}. \quad (5)$$

Очевидно, эксцентриситет гиперболы есть отвлечённое число, не меньшее единицы:

$$1 \leq e < \infty. \quad (6)$$

Эксцентриситет гиперболы весьма просто связан с отношением  $\frac{b}{a}$ : из формулы (4) делением на  $a^2$  получим:

$$e^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2. \quad (7)$$

Если  $e = 1$ , то, как видно из формулы (7),  $b = 0$ , т. е. гипербола превращается в два луча на оси  $X$  ( $-\infty < x \leq -a$  и  $a \leq x < \infty$ ). При увеличении  $e$  гипербола расширяется.

Можно доказать, что гиперболы с одинаковыми эксцентриситетами подобны между собой.

**88. Асимптоты гиперболы.** Рассмотрим задачу: найти точки пересечения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

с прямой, проходящей через начало:

$$y = kx. \quad (9)$$

Прежде чем решать эту задачу, отметим одно обстоятельство, ясное из чертежа. Если прямая (9) образует с осью  $X$  малый угол (как, например, прямая  $OR$  на черт. 76), то она пересекает гиперболу в двух точках  $M$  и  $M_1$ , симметричных относительно начала, если же она образует с осью  $X$  большой угол (как, например, пря-

мая  $OS$  на черт. 76), то она не пересекает гиперболы\*). Но что понимать под словом «малый» и «большой» угол? Это выяснится при решении поставленной задачи.

Решая совместно уравнения (8) и (9), находим:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}, \quad y = \pm \frac{kab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}},$$

причём знаки берутся либо одновременно верхние, либо одновременно нижние. Следовательно, прямая (9) пересекает гиперболу (8) в точках

$$M \left( \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}, \frac{kab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \right)$$

и

$$M_1 \left( -\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}, -\frac{kab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}} \right).$$

Задача возможна (т. е. точки пересечения существуют) лишь при условии, что подкоренное выражение положительно:

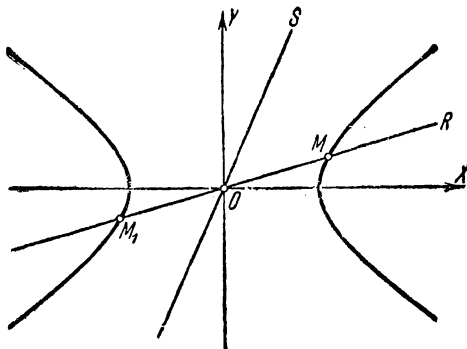
$$b^2 - a^2k^2 > 0,$$

откуда

$$k^2 < \frac{b^2}{a^2}.$$

Если ограничиваться только положительными значениями углового коэффициента  $k$ , т. е. рассматривать только прямые, образующие острый угол с осью  $X$ , то из последнего неравенства следует

$$k < \frac{b}{a}.$$



Черт. 76.

Пока угловой коэффициент прямой, т. е.  $\operatorname{tg} \varphi$  меньше  $\frac{b}{a}$ , прямая пересекает гиперболу. Если  $k$  больше  $\frac{b}{a}$ , то подкоренное выражение становится отрицательным, и прямая гиперболы не пересекает. Следовательно, прямая, наклонённая к оси  $X$  под углом, тангенс которого равен  $\frac{b}{a}$ , является границей: все прямые, наклонённые к оси  $X$  под меньшим углом, пересекают гиперболу, а под большим — нет. Сама эта пограничная прямая гиперболу не пересекает,

\*) Если рассматривать прямые, для которых  $0 \leq \varphi < 90^\circ$ , т. е.  $k \geq 0$ .

потому что при  $k = \frac{b}{a}$  для координат точек  $M$  и  $M_1$  получаются бесконечные значения.

Исследуем подробнее взаимное расположение гиперболы и пограничной прямой. Уравнение этой прямой:

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (10)$$

Восставим перпендикуляр к оси  $X$  в какой-нибудь точке  $P$  и обозначим точки его пересечения с гиперболой (8) и прямой (10) соответственно через  $M$  и  $N$  (черт. 77). Вычислим отрезок  $MN$ :

$$\begin{aligned} MN &= PN - PM = y_{\text{прям}} - y_{\text{гип}} = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \\ &= \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a}. \end{aligned}$$

Решим вопрос: что происходит с отрезком  $MN$  при неограниченном удалении точки  $P$  вправо?

Найденное выше выражение  $MN$  через  $x$  неудобно для решения этого вопроса, потому что при увеличении  $x$  оба члена в скобках увеличиваются, и неясно, что происходит с разностью. Преобразуем найденное выражение, избавившись от иррациональности в числителе:

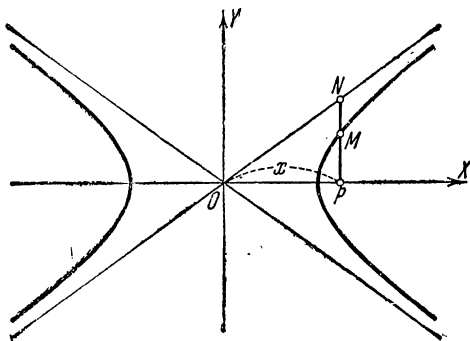
$$MN = \frac{b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}; \quad (***)$$

Из формулы (\*\*\*) ясно, во-первых, что с увеличением  $x$  отрезок  $MN$  уменьшается, т. е. при продвижении вправо гипербола приближается к прямой (10). Во-вторых:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} MN = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

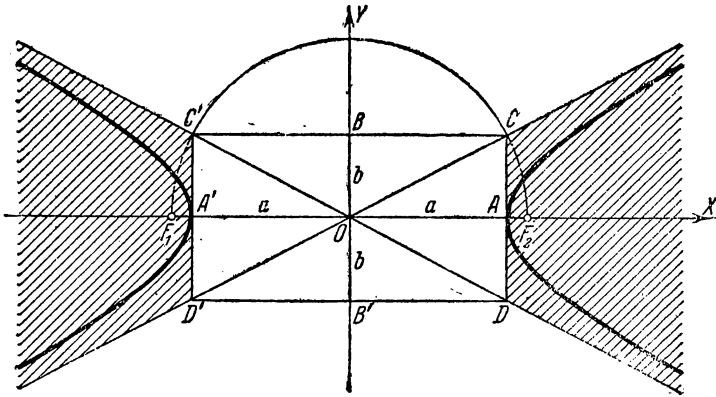
Это равенство показывает, что гипербола приближается к прямой (10) *неограниченно*. Это утверждение означает следующее: какое бы малое положительное число  $\epsilon$  нам ни задали, гипербола при достаточном продолжении подойдет к прямой (10) ближе, чем на  $\epsilon$ , и при дальнейшем продолжении будет держаться от неё ближе, чем на  $\epsilon$ .

Прямая, к которой кривая неограниченно приближается (в указанном выше смысле), называется *асимптотой этой кривой*. Таким образом, прямая (10) является асимптотой гиперболы (8).



Черт. 77.

Учитывая симметрию гиперболы относительно координатных осей, легко сообразить, что в третьей четверти гиперболы асимптотически приближается к той же прямой. Кроме того, у гиперболы



Черт. 78.

есть ещё одна асимптота, проходящая во второй и четвёртой четвертях. Обозначим через  $\gamma$  угол первой асимптоты с осью  $X$ ; тогда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{a}.$$

Вторая асимптота образует с осью  $X$  угол  $180^\circ - \gamma$ ; следовательно, угловой коэффициент второй асимптоты таков:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \gamma) = -\operatorname{tg} \gamma = -\frac{b}{a}.$$

Таким образом, гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеет две асимптоты

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{b}{a} x, \\ y &= -\frac{b}{a} x. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Обе асимптоты изображены на черт. 77. При вычерчивании гиперболы рекомендуется предварительно вычертить её асимптоты.

Для вычерчивания гиперболы по её каноническому уравнению рекомендуется поступать следующим образом. Прежде всего откладываем на оси  $X$  в обе стороны от начала расстояние  $a$ , а на оси  $Y$  — расстояние  $b$  (черт. 78). Строим прямоугольник, для которого отрезки  $AA'$  и  $BB'$  служат средними линиями. Диагонали

этого прямоугольника служат асимптотами гиперболы, потому что из построения видно:

$$k_{oc} = \frac{AC}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Точки  $A$  и  $A'$  являются вершинами гиперболы. Вся гипербола помещается в заштрихованной части плоскости (разумеется, штриховку надо воображать продолжающейся бесконечно вправо и влево).

**89. Сопряжённые гиперболы.** Раньше мы буквой  $b$  просто обозначили выражение  $\sqrt{c^2 - a^2}$ . Теперь  $b$  приобрело для нас геометрический смысл. Смотря на черт. 78, мы видим, что  $b$  есть перпендикуляр к оси  $X$  от вершины гиперболы до пересечения с асимптотой. Из построения, показанного на черт. 78, геометрически ясно влияние  $b$  на «раствор» гиперболы: чем больше  $b$ , тем гипербола шире.

Отрезок  $AA' = 2a$ , как уже было сказано в п 86, называется *действительной осью* гиперболы, а отрезок  $BB' = 2b$  — *мнимой осью*. Последнее название объясняется следующей формальной аналогией. Пытаясь найти точки пересечения гиперболы (1) с осью  $X$ , мы должны решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ y &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $x = \pm a$ . Пытаясь же найти точки пересечения той же гиперболы с осью  $Y$ , мы должны решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ x &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда  $y = \pm ib$ . Мнимость объясняется тем, что гипербола (1) не пересекает оси  $Y$ .

Уравнение

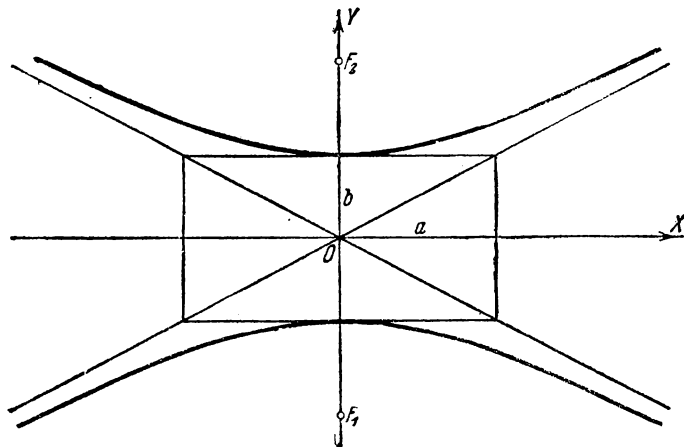
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

изображает гиперболу, у которой действительная ось расположена на оси  $Y$ , а мнимая на оси  $X$ ; фокусы этой гиперболы лежат на оси  $Y$  (черт. 79).

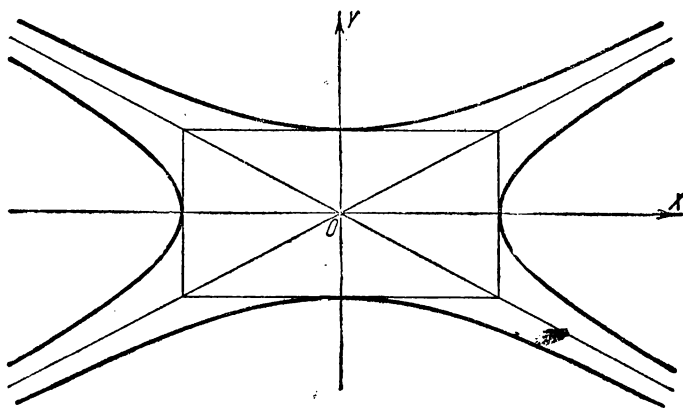
Полезно заметить, что в каноническом уравнении гиперболы знаменатель положительного члена всегда показывает квадрат действительной полуоси, а знаменатель отрицательного члена — квадрат мнимой полуоси. При этом знаменатель под  $x^2$  всегда показывает квадрат той полуоси, которая расположена на оси  $X$ , а знаменатель под  $y^2$  — квадрат той полуоси, которая расположена на оси  $Y$ .



Две гиперболы называются *сопряжёнными*, если они имеют те же оси, но действительная ось одной гиперболы служит мнимой осью



Черт. 79.  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$



Черт. 80. Сопряжённые гиперболы.

другой. Уравнения двух сопряжённых гипербол могут быть написаны так:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Сопряжённые гиперболы имеют общие асимптоты. В этом легко убедиться, строя обе гиперболы по способу, указанному в конце

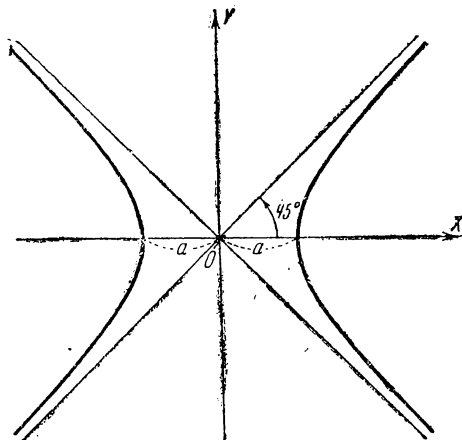
п 88 (для второй гиперболы следует поменять ролями оси  $X$  и  $Y$ ). Кроме того, величина  $c$  для сопряжённых гипербол одинакова. Фокусы и той и другой гипербол лежат на окружности, описанной около прямоугольника  $CC'D'D$  (черт. 78).

Две сопряжённые гиперболы изображены на черт. 80. Так как сопряжённые гиперболы расположены в смежных углах между асимптотами, то очевидно, что чем одна из двух сопряжённых гипербол «уже», тем другая «шире».

**90. Равносторонняя гипербола.** Гипербола, у которой действительная ось равна мнимой, называется *равносторонней*. Каноническое уравнение равносторонней гиперболы получим, полагая в уравнении (1)  $b = a$

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (12)$$

Полагая в формулах (11)  $b = a$ , мы обнаружим, что асимптотами равносторонней гиперболы (12) служат биссектрисы координатных углов



$$y = x,$$

$$y = -x.$$

Таким образом, асимптоты взаимно перпендикулярны. Это свойство может быть принято за определение равносторонней гиперболы \*).

Равносторонняя гипербола изображена на черт. 81.

Равносторонняя гипербола конгруэнтна \*\*) со своей сопряжённой.

Пользуясь тем, что асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны, можно принять их за оси координат.

Всматриваясь в черт. 81, мы видим, что если повернуть оси координат на угол  $45^\circ$ , то они совпадут с асимптотами гиперболы. Гипербола при этом будет расположена во второй и четвёртой четвертях. Если же повернуть оси на  $135^\circ$ , то они тоже совпадут с асимптотами, причём гипербола окажется расположенной в первой и третьей четвертях.

\*) Из формулы  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{a}$  легко понять, что асимптоты взаимно перпендикулярны *только* у равносторонней гиперболы.

\*\*) Т. е. может быть совмещена с ней наложением и, значит, отличается от неё только своим положением на плоскости.

Повернём оси на  $135^\circ$ . Выражая старые координаты через новые [в формулах (4) § 3 главы I (стр. 54) полагаем  $\alpha = 135^\circ$ ], получим:

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'),$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y').$$

Заменяем в уравнении (12)  $x$  и  $y$  их выражениями через  $x'$  и  $y'$ :

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right]^2 = a^2,$$

или после упрощений:

$$x'y' = \frac{a^2}{2}. \quad (13)$$

Обозначая теперь новые координаты через  $x$  и  $y$ , а постоянную величину  $\frac{a^2}{2}$  через  $k$ , получим:

$$xy = k. \quad (13')$$

Это есть уравнение равносторонней гиперболы, *отнесённой к асимптотам* (т. е. асимптоты приняты за оси координат).

Уравнение (12) есть уравнение равносторонней гиперболы, *отнесённой к осям* (т. е. оси гиперболы приняты за оси координат).

Уравнение (13') весьма удобно для построения равносторонней гиперболы по точкам и для исследования вида гиперболы. Из него видно, что  $x$  и  $y$  имеют одинаковые знаки, так как их произведение равно положительной величине  $k$ . Значит, все точки гиперболы лежат в первой четверти (где обе координаты положительны) или в третьей (где обе координаты отрицательны).

Определяем из уравнения (13')  $y$ :

$$y = \frac{k}{x}.$$

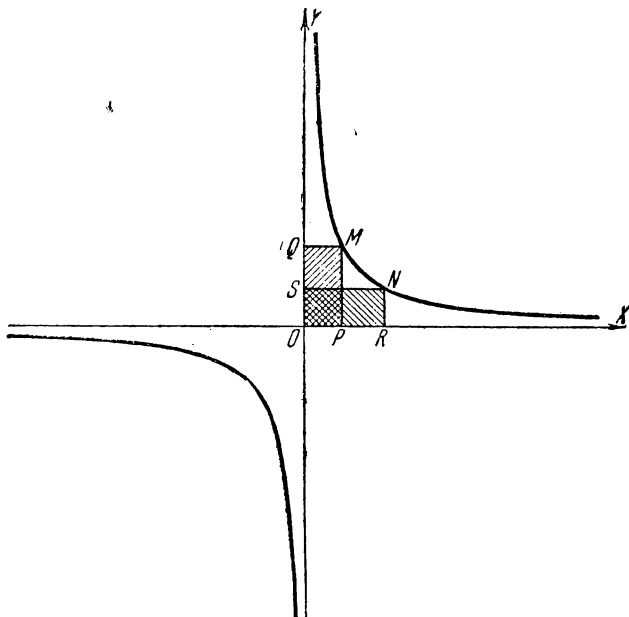
Отсюда видно, что при положительном, неограниченно возрастающем  $x$   $y$  уменьшается, неограниченно приближаясь к нулю. Это значит, что при продвижении вправо от начала координат гипербола асимптотически приближается к оси  $X$ .

Так как уравнение (13') не изменяется от перестановки  $x$  и  $y$ , то гипербола симметрична относительно биссектрисы нормального координатного угла (почему?); следовательно, она асимптотически приближается к оси  $Y$ .

Так как уравнение (13') содержит только члены чётных измерений, то гипербола симметрична относительно начала; следовательно, ветвь, лежащая в третьей четверти, расположена по отношению

к координатным осям так же, как ветвь, лежащая в первой четверти (черт. 82), т. е. оси координат служат её асимптотами.

Уравнение (13') показывает, что для любой точки равносторонней гиперболы, отнесённой к асимптотам, произведение координат есть величина постоянная. Но это произведение выражает площадь



Черт. 82.  $xy = k$ .

прямоугольника, стороны которого лежат на асимптотах, а одна вершина — на гиперболе. Следовательно, все эти прямоугольники имеют одну и ту же площадь. Два такие прямоугольника —  $OQMP$  и  $OSNR$  — изображены на черт. 82.

Это свойство равносторонней гиперболы не связано с системой координат, а является свойством гиперболы и её асимптот \*).

**91. Фокальные радиусы-векторы точек гиперболы.** Решим для гиперболы задачу, аналогичную той, которая решалась в п 82 для эллипса. Фокальные радиусы-векторы любой точки плоскости суть

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

\*) В задаче **174** (стр. 178) указывается обобщение этого свойства на случай неравносторонней гиперболы.

откуда

$$r_1^2 - r_2^2 = 4cx$$

или

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx. \quad (\dagger)$$

Если точка  $M(x, y)$  лежит на правой ветви гиперболы, то для неё

$$r_1 - r_2 = 2a. \quad (\dagger\dagger)$$

Решая совместно уравнения  $(\dagger)$  и  $(\dagger\dagger)$  (заменяя при этом  $\frac{c}{a}$  через  $e$ ), находим:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= ex + a, \\ r_2 &= ex - a. \end{aligned} \right\}$$

Если же точка  $M(x, y)$  лежит на левой ветви гиперболы, то для неё

$$r_2 - r_1 = 2a. \quad (\dagger\dagger\dagger)$$

Решая совместно уравнения  $(\dagger)$  и  $(\dagger\dagger\dagger)$ , найдём аналогичные формулы для левой ветви. Окончательно:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -ex - a, \\ r_2 &= -ex + a \end{aligned} \right\} \text{ для левой ветви, } \left. \begin{aligned} r_1 &= ex + a, \\ r_2 &= ex - a \end{aligned} \right\} \text{ для правой ветви. } \quad (14)$$

**92. Фокальный параметр гиперболы.** Фокальным параметром гиперболы называется длина перпендикуляра к действительной оси, восстановленного в фокусе до пересечения с гиперболой. Фокальный параметр можно вычислить, подставив в формулу (2) (стр. 164)  $x = c$  (или  $x = -c$ ). Обозначая фокальный параметр буквой  $p$ , получим:

$$p = \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b^2}{a}. \quad (15)$$

Можно придать этому выражению другой вид, заменив  $b^2$  через  $c^2 - a^2$ :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{c^2}{a} - a = \frac{c}{a} \cdot c - a,$$

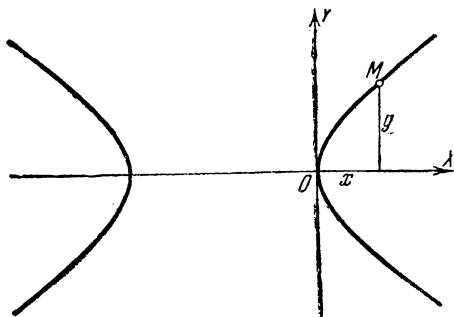
или, заменяя  $\frac{c}{a}$  через  $e$ :

$$p = ec - a. \quad (16)$$

Формулу (16) можно также получить, беря точку «прямо над (или под) фокусом» и вычисляя её соответствующий фокальный радиус-вектор. Таким образом, следует либо в первой формуле (14) положить  $x = -c$ , либо в четвёртой формуле (14) положить  $x = c$ . В обоих случаях получим формулу (16).

**93. Уравнение гиперболы, отнесённой к вершине.** Преобразуем каноническое уравнение гиперболы, перенеся начало координат в правую вершину (таким образом, мы, как и в п 84 для эллипса, помещаем начало коор-

динат в одну из вершин, причём положительное направление оси  $X$  идёт через ближайший фокус). Обозначая новые координаты через  $x'$  и  $y'$ , будем иметь:



$$\begin{aligned}x &= x' + a, \\y &= y'.\end{aligned}$$

Каноническое уравнение гиперболы преобразуется так:

$$\frac{(x' + a)^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

или, если раскрыть скобки и выразить  $y'^2$ :

$$y'^2 = \frac{2b^2}{a} x' + \frac{b^2}{a^2} x'^2.$$

Черт. 83.  $y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$  ( $e > 1$ ).

Вспомня, что  $\frac{b^2}{a}$  есть фокальный параметр, и заменяя в последнем члене  $b^2$  через  $c^2 - a^2$ , получим:

$$y'^2 = 2px' + \frac{c^2 - a^2}{a^2} x'^2 = 2px' + \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) x'^2 = 2px' + (e^2 - 1)x'^2.$$

Отбросим совсем старую систему координат и будем обозначать новые координаты через  $x$  и  $y$ :

$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2 \quad (17)$$

(черт. 83).

Это уравнение формально совпадает с уравнением эллипса [уравнение (13) на стр. 160]; разница в том, что для эллипса  $e < 1$ , а для гиперболы  $e > 1$ . Причина такого совпадения будет выяснена в п 108.

**94. Полярное уравнение гиперболы.** Выведем полярное уравнение гиперболы, поместив полюс в правом фокусе и направив полярную ось по прямой, соединяющей фокусы (вообще, поместив полюс в одном из фокусов и направив полярную ось по прямой, соединяющей фокусы, в противоположную сторону от ближайшей вершины).

Радиусом-вектором  $\rho$ , очевидно, будет служить  $r_2$  (так как полюс помещён в правом фокусе). Для точки  $M$ , описывающей правую ветвь гиперболы, имеем [формулы (14) (стр. 175)]:

$$r_2 = ex - a,$$

где  $x$  — абсцисса, отсчитываемая от центра гиперболы. Если обозначить через  $x'$  абсциссу, отсчитываемую от правого фокуса, то

$$x = x' + c.$$

Следовательно,

$$r_2 = e(x' + c) - a = ex' + ec - a = ex' + p,$$

или, заменяя  $r_2$  через  $\rho$ , а  $x'$  — через  $\rho \cos \vartheta$ ,

$$\rho = e\rho \cos \vartheta + p,$$

откуда

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \vartheta}. \quad (18)$$

Для точки  $M$ , описывающей левую ветвь гиперболы, имеем:

$$r_2 = -ex + a = -e(x' + c) + a = -ex' - ec + a = -ex' - p,$$

или

$$p = -ep \cos \vartheta - p,$$

откуда

$$p = -\frac{-p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (18')$$

Однако уравнение (18) позволяет построить обе ветви гиперболы, если учитывать отрицательные значения  $p$ . В самом деле, значение  $p$ , получаемое из уравнения (18) при полярном угле  $\vartheta + 180^\circ$

$$p = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta + 180^\circ)} = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta},$$

отличается только знаком от значения  $p$ , получаемого из уравнения (18') при полярном угле  $\vartheta$ . Поэтому мы будем считать, что уравнение (18) есть полярное уравнение всей гиперболы. Если при некотором угле  $\vartheta$  уравнение (18) даёт отрицательное значение  $p$ , то мы откладываем величину  $|p|$  под углом  $\vartheta + 180^\circ$ .

### Упражнения

**160.** Построить по точкам гиперболу

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

на миллиметровой бумаге, принимая за единицу масштаба 1 см и изменяя  $x$  от  $-8$  до  $-2$  и от  $2$  до  $8$  через  $0,2$ .

**161.** Построить по точкам гиперболу

$$p = \frac{2}{\sqrt{10 \cos^2 \vartheta - 4}},$$

придавая  $\vartheta$  значения от  $0$  до  $360^\circ$  через  $10^\circ$ . Сначала составить таблицу, а затем выбрать подходящий масштаб.

**162.** Вычертить график, изображающий зависимость между объёмом и давлением для 1 кг кислорода при  $15^\circ \text{C}$ . (В граммолекуле кислорода 32 г.)

### Задачи

**163.** Составить уравнение равносторонней гиперболы, имеющей фокусы в точках  $(-6, 0)$  и  $(6, 0)$ .

**164.** Определить оси равносторонней гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

зная, что она проходит через точку

a)  $(10, 6)$ ;

b)  $(3, 1)$ .

**165.** Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

проходит через точки  $(-25, 1 \frac{1}{6})$  и  $(-30, 3)$ . Определить её оси.

**166.** Вычислить эксцентриситеты гипербол в задаче **63** (стр. 88).

**167.** Написать уравнение гиперболы, принимая действительную ось за ось  $X$ , а мнимую — за ось  $U$  и зная два параметра:

a)  $a = 8$ ,  $e = 1,25$ ;      d)  $a = \sqrt{5}$ ,  $e = 0,6 \sqrt{5}$ ;

b)  $b = 5$ ,  $e = 1 \frac{1}{12}$ ;      e)  $c = 2$ ,  $e = 2$ .

c)  $c = 3 \sqrt{5}$ ,  $e = 0,5 \sqrt{5}$ ;

**168.** Определить координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы:

a)  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{576} = 1$ ;      c)  $-\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$ ;

b)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$ ;      d)  $-\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ .

**169.** Написать уравнения асимптот гиперболы и вычислить угол между асимптотами, внутри которого заключена гипербола:

a)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ ;      c)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ ;

b)  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ ;      d)  $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

**170.** Определить угол между асимптотами, внутри которого заключена гипербола, зная эксцентриситет гиперболы:

a)  $e = \sqrt{2}$ ;      b)  $e = 1,2$ ;      c)  $e = 5$ .

**171.** Определить эксцентриситет гиперболы, зная, что угол между асимптотами, внутри которого заключена гипербола, равен

a)  $\frac{2\pi}{3}$ ;      b)  $42^\circ 20'$ ;      c)  $2\gamma$ .

**172.** Найти формулу, связывающую эксцентриситеты двух сопряжённых гипербол. На основании этой формулы определить эксцентриситет равно-сторонней гиперболы.

**173.** Определить оси равно-сторонней гиперболы:

a)  $xy = 18$ ;      b)  $xy = 10$ ;      c)  $xy = -2$ .

**174.** Доказать, что площадь параллелограмма, стороны которого лежат на асимптотах гиперболы, а одна вершина — в любой точке гиперболы, постоянна и равна  $\frac{ab}{2}$  (обобщение свойства, доказанного в п 90 для равно-сторонней гиперболы; черт. 82).

**175.** Вычислить радиусы-векторы, проведённые из фокусов гиперболы

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$$

в точку, для которой

a)  $x = 10$ ;      b)  $x = 1$ .

**176.** На гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



взята точка, абсцисса которой равна 6. Вычислить полуоси гиперболы, зная, что радиусы-векторы, проведённые из фокусов в эту точку, суть

$$\text{a) } r_1 = 20,6; \quad r_2 = 10,6; \quad \text{b) } r_1 = 30; \quad r_2 = 20.$$

**177.** Получить уравнение гиперболы, если действительная ось служит осью  $X$ , а один из фокусов — началом, причём другой фокус лежит

- a) на положительной части оси  $X$ ;  
b) на отрицательной части оси  $X$ .

**178.** Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  в точке  $(x_1, y_1)$ .

**179.** При каком условии прямая  $Ax + By + C = 0$  касается гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

**180.** Доказать, что касательная к гиперболе в любой её точке делит пополам угол между фокальными радиусами-векторами, проведёнными в эту точку.

**181.** Провести касательную и нормаль:

a) к гиперболе  $\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{225} = 1$  в точке  $(-34, 8)$ ;

b) к гиперболе  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  в точке  $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

**182.** Провести касательную:

a) к гиперболе  $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$  параллельно прямой  $10x - 12y + 5 = 0$ ;

b) к гиперболе  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$  перпендикулярно к прямой  $6x + 5y - 3 = 0$ .

**183.** Провести нормаль:

a) к гиперболе  $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$  параллельно прямой  $18x - 10y + 7 = 0$ ;

b) к гиперболе  $x^2 - y^2 = 25$  перпендикулярно к прямой  $13x - 12y = 0$ .

**184.** Провести касательную к гиперболе  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  через точки:

a)  $(\frac{7}{3}, \frac{4}{9})$ ;    b)  $(\frac{15}{4}, \frac{3}{2})$ ;    c)  $(5, 2)$ .

**185.** Провести касательную к гиперболе  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  параллельно прямой:

a)  $x - 2y + 3 = 0$ ;    b)  $3x - 4y + 2 = 0$ .

**186.** a) Существуют ли у данной гиперболы касательные всех направлений, и если нет, то каких именно?

b) Тот же вопрос для эллипса.

## § 4. Парабола

**95.** Исследование формы параболы по каноническому уравнению. Каноническое уравнение параболы [гл. III, § 2, формула (7) (стр. 87)].

$$y^2 = 2px, \quad (1)$$

где  $p$  — параметр параболы, т. е. расстояние от фокуса до директрисы. Исследуем вид параболы, пользуясь уравнением (1).

Уравнение (1) содержит  $y$  только во второй степени. Следовательно, парабола симметрична относительно оси  $X$  и, значит, достаточно исследовать лишь верхнюю часть параболы (т. е. лежащую над осью  $X$ ); нижняя получится зеркальным отражением относительно оси  $X$ . Решаем уравнение (1) относительно  $y$ :

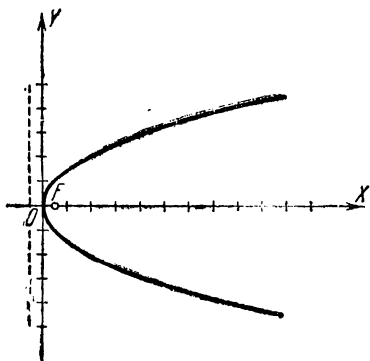
$$y = \pm \sqrt{2px}. \quad (2)$$

Область существования этой функции:

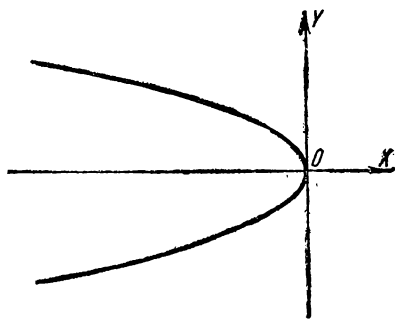
$$0 \leq x < \infty.$$

Следовательно, вся парабола расположена вправо от оси  $Y$ .

Придаём  $x$  возрастающие значения, начиная от нуля. Перед радикалом берём знак  $+$ , так как мы исследуем верхнюю часть параболы. При  $x=0$   $y=0$ , т. е. мы получаем начало координат. При увеличении  $x$   $y$  увеличивается; следовательно, при продвижении вправо



Черт. 84.  $y^2 = 2px$  ( $p = 1$ ).



Черт. 85.  $y^2 = -2px$  ( $p > 0$ ).

парабола идёт вверх. Парабола — незамкнутая кривая, так как и  $x$  и  $y$  могут возрастать неограниченно.

Чтобы составить более точное представление о форме параболы, зададимся определённым значением  $p$  и прибегнем к построению по точкам.

Парабола (1) изображена на черт. 84.

Фокус параболы лежит на оси  $X$  на расстоянии  $\frac{p}{2}$  от начала. Директриса (она проведена пунктиром на черт. 84) проходит параллельно оси  $Y$  на расстоянии  $\frac{p}{2}$  от неё.

Прямая, проходящая через фокус перпендикулярно к директрисе, называется *осью* параболы. Точка пересечения параболы с её осью называется *вершиной* параболы.

Заметим, что буква  $p$  обозначает не только *параметр* параболы (расстояние от фокуса до директрисы), но и её *фокальный параметр*, т. е. длину перпендикуляра к оси, восстановленного в фокусе, до пересечения с параболой. В самом деле, если в формулу (2) подставить  $x = \frac{p}{2}$  (абсцисса фокуса), то получим  $y = \pm p$ . Другое доказательство: точка, лежащая «прямо над фокусом», находится от директрисы на расстоянии  $p$ ; следовательно, на основании определения параболы, её расстояние от фокуса тоже равно  $p$ .

Легко сообразить, что уравнение

$$y^2 = -2px$$

изображается параболой, расположение которой показано на черт. 85. Величину  $p$  (параметр параболы) мы всегда считаем положительной.

**96. Формулы, выражающие радиус-вектор любой точки параболы через абсциссу этой точки.** Выведем выражение для радиуса-вектора, идущего из фокуса в произвольную точку  $M(x, y)$  параболы. Так как координаты фокуса  $F\left(\frac{p}{2}, x\right)$ , то

$$r = MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Заменяя  $y^2$  его выражением из уравнения параболы, получим:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \\ &= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Эту формулу

$$r = x + \frac{p}{2} \quad (3)$$

можно было бы получить проще, вспомнив, что, по определению параболы, радиус-вектор всякой её точки равен расстоянию этой точки от директрисы, т. е.  $x + \frac{p}{2}$ . Формула на стр. 86 (строка 4-я снизу) есть та же формула (3).

**97. Полярное уравнение параболы.** Выведем полярное уравнение параболы, поместив полюс в фокусе и направив полярную ось по оси параболы в сторону, противоположную вершине (черт. 86). Если на черт. 84 перенести начало в фокус, то в формуле (3)  $r$  можно заменить через  $\rho$ , а  $x$  через  $x' + \frac{p}{2}$ :

$$\rho = x' + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = x' + p.$$

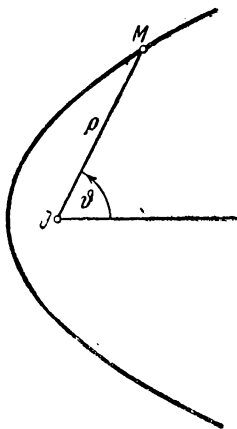
Заменяем  $x'$  через  $\rho \cos \vartheta$ :

$$\rho = \rho \cos \vartheta + p,$$

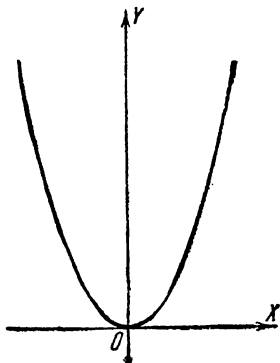
откуда

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \vartheta}. \quad (4)$$

**98. График квадратного трёхчлена.** Повернём оси координат на  $-90^\circ$  (т. е. на  $90^\circ$  по часовой стрелке). Тогда ось пара-



Черт. 86.  $\rho = \frac{p}{1 - \cos \vartheta}.$



Черт. 87.  $y = ax^2$   
( $a > 0$ ).

болы совпадёт с осью  $Y$  (черт. 87). Формулы преобразования координат примут вид

$$x = x' \cos(-90^\circ) - y' \sin(-90^\circ) = y',$$

$$y = x' \sin(-90^\circ) + y' \cos(-90^\circ) = -x',$$

и уравнение (1) преобразуется так:

$$(-x')^2 = 2py',$$

или, если обозначить новые координаты опять через  $x$  и  $y$ ,

$$x^2 = 2py$$

или

$$y = ax^2. \quad (5)$$

При отрицательном  $a$  уравнение (5) изображается параболой, расположение которой показано на черт. 88 (можно исходить из уравнения  $y^2 = 2px$  и повернуть оси на  $+90^\circ$ ). В обоих случаях

$$|a| = \frac{1}{2p}. \quad (6)$$

Выведем уравнение параболы, которая получится из параболы (5), если перенести её вершину в какую-нибудь точку  $(\alpha, \beta)$  (черт. 89). Таким образом, ось параболы параллельна оси  $Y$ , вершина её находится не в начале.

Рассмотрим новые оси координат  $O'X'$  и  $O'Y'$ , параллельные старым, причём начало поместим в вершине параболы. Уравнение параболы в новой системе

$$y' = ax'^2.$$

Выражая новые координаты через старые

$$x' = x - \alpha,$$

$$y' = y - \beta,$$

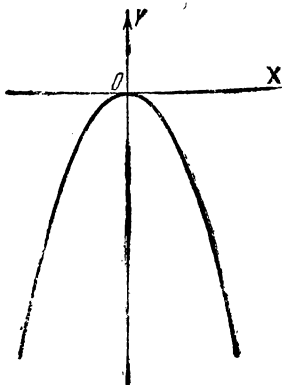
получим:

$$y - \beta = a(x - \alpha)^2$$

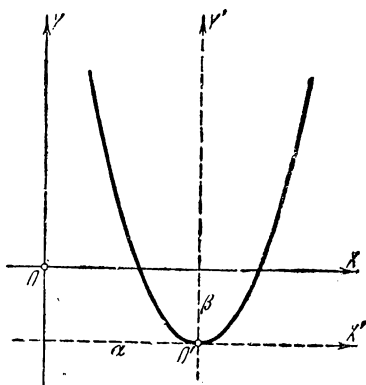
или

$$y = ax^2 - 2\alpha ax + \alpha^2 a + \beta. \quad (7)$$

Оказывается,  $y$  выражается через  $x$  при помощи функции второй степени или, как её обычно называют, *квадратного трёхчлена* \*);



Черт. 88.  $y = ax^2$  ( $a < 0$ ).



Черт. 89.  $y = ax^2 + bx + c$ .

коэффициент  $a$  при старшем члене не изменяется при переносе начала. Это даёт возможность доказать следующую важную теорему:

**Теорема.** *График квадратного трёхчлена есть парабола, ось которой параллельна оси  $Y$ .*

\*) Функцию  $f(x) = ax^2 + bx + c$  продолжают называть квадратным трёхчленом даже и в тех частных случаях, когда в ней меньше трёх членов, вследствие того, что  $b$  или  $c$  обращается в нуль;  $a$  не может быть нулём, так как при  $a = 0$  функция  $f(x) = ax^2 + bx + c$  была бы не второй степени, а первой.

Пусть  $y$  есть квадратный трёхчлен от  $x$ :

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (8)$$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  произвольны. Единственное условие — чтобы  $a$  не равнялось нулю.

Требуется доказать, что уравнение (8) изображает параболу, ось которой параллельна оси  $Y$ .

Читателю может показаться, что это уже доказано. Ведь мы вывели уравнение параболы, ось которой параллельна оси  $Y$  [уравнение (7)], и в нём  $y$  выражается через  $x$  квадратным трёхчленом. Однако отсюда ещё не вытекает обратное предложение, что *всякий* квадратный трёхчлен графически изображается параболой. Коэффициенты трёхчлена (7) имеют некоторый специальный вид, и необходимо доказать, что всякий трёхчлен (8) может быть приведён к виду (7).

Приравниваем коэффициенты трёхчленов (7) и (8):

$$-2a\alpha = b,$$

$$a\alpha^2 + \beta = c,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{b}{2a}, \\ \beta &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, имея уравнение (8), можно найти координаты вершины [по формулам (9)] и параметр [по формуле (6)] параболы, имеющей как раз это уравнение. Для построения этой параболы к формулам (7) и (9) необходимо добавить следующее правило: *при  $a > 0$  парабола «раскрывается» вверх, а при  $a < 0$  — вниз.*

**Примечание.** После того как установлено, что уравнение (8) изображается параболой с осью, параллельной оси  $Y$ , вершина этой параболы может быть найдена разными другими способами. Укажем два из них.

**Первый способ.** Из симметрии параболы относительно её оси ясно, что абсцисса вершины есть среднее арифметическое между корнями трёхчлена (8) (корни изображаются абсциссами точек пересечения параболы с осью  $X$ ):

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Так как сумма корней квадратного трёхчлена  $ax^2 + bx + c$  равна  $-\frac{b}{a}$ , мы получаем первую формулу (9). Подставляя найденное значение  $\alpha$  вместо  $x$  в уравнение параболы и вычисляя  $y$ , мы тем самым узнаем  $\beta$ .

Это рассуждение становится неубедительным в том случае, когда корни трёхчлена — мнимые, т. е. парабола не пересекает ось  $X$ , хотя оно может быть обосновано.

Второй способ. В вершине касательная параллельна оси  $X$ , т. е. производная  $\frac{dy}{dx}$  равна нулю:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b = 0,$$

откуда  $x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a}$ .

**99. Влияние параметров на график квадратного трёхчлена.** Из предыдущего пункта вытекают следующие правила, показывающие влияние параметров  $a, b, c$  на график трёхчлена  $y = ax^2 + bx + c$ .

1. Если  $a > 0$ , то парабола обращена выпуклостью вниз; если  $a < 0$ , то парабола обращена вогнутостью вниз («опрокинута»).

2. Если  $|a|$  велико, то парабола — узкая, если  $|a|$  мало, то — широкая.

Это ясно из формулы (6).

3. Если  $b = 0$  (т. е. отсутствует член, содержащий  $x$  в первой степени), то вершина параболы лежит на оси  $Y$  (но, вообще говоря, не в начале). Ось  $Y$  является осью параболы. При  $b \neq 0$  ось параболы сдвинута влево или вправо.

Это ясно из первой формулы (9).

4. При  $c = 0$  парабола проходит через начало.

Для более подробного ознакомления с влиянием параметров  $a, b, c$  рекомендуется изучить черт. 90 (стр. 186—187) и сделать из него нужные выводы.

### Упражнение

**187.** Построить по точкам параболу

$$y^2 = 2x$$

на миллиметровой бумаге, принимая за единицу масштаба 1 см и придавая  $x$  значения от 0 до 15 через 0,5.

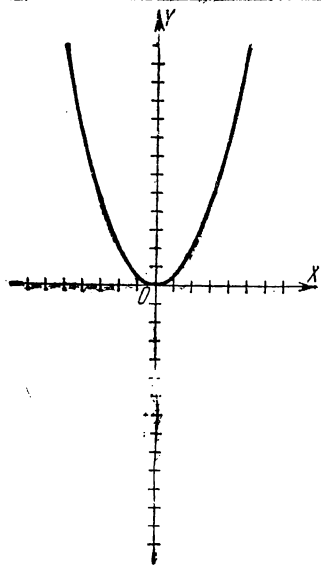
### Задачи

**188.** Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы:

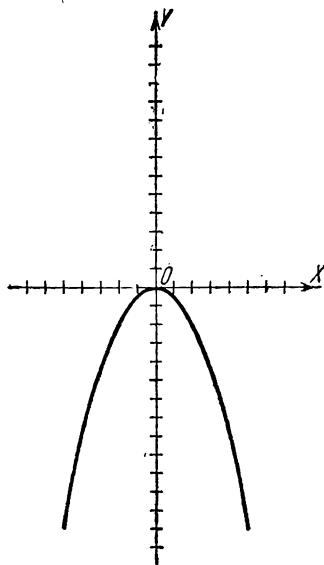
- a)  $y^2 = 5x$ ;      c)  $y = x^2$ ;  
b)  $y^2 = -2x$ ;    d)  $x^2 = -3y$ .

**189.** Для следующих парабол определить координаты вершины, направление оси, в какую сторону парабола расходуется и точки пересечения с осями координат:

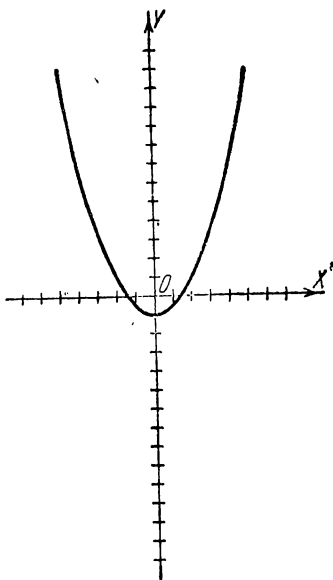
- a)  $y = x^2 - 8x + 15$ ;    d)  $x = y^2 - 2y + 3$ ;  
b)  $y = -x^2 + 6x - 9$ ;    e)  $y = x^2 - 10x + 29$ .  
c)  $y = 2y^2 - 3y - 5$ ;



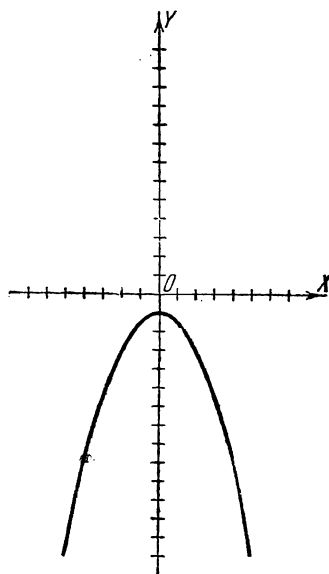
a)  $y = \frac{1}{2} x^2.$



b)  $y = -\frac{1}{2} x^2.$



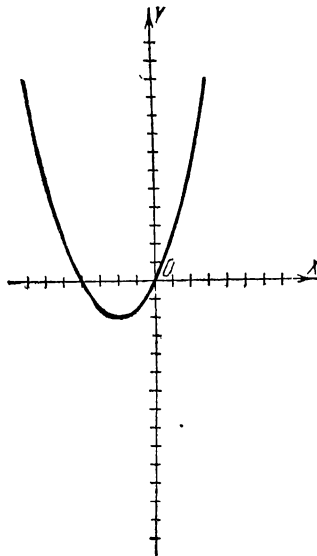
e)  $y = \frac{1}{2} x^2 - 1.$



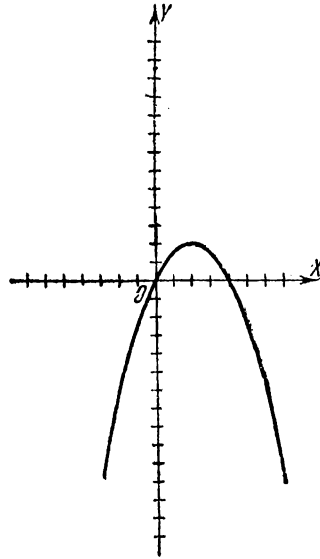
f)  $y = -\frac{1}{2} x^2 - 1.$

Черт. 90. Графики квад

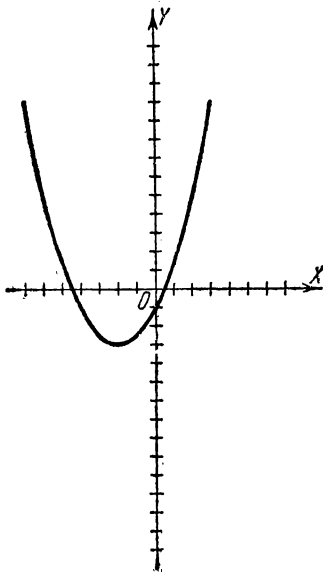




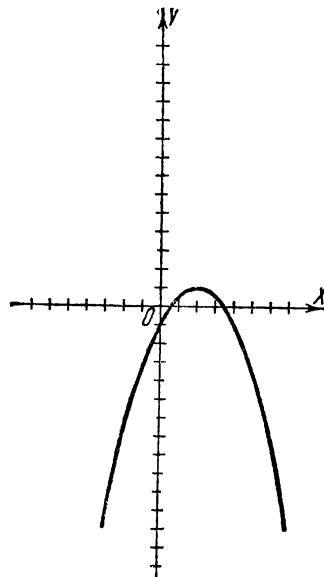
c)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x.$



d)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x.$



g)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1.$



h)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1.$

ратных трёхчленов.

**190.** При каком условии парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

а) пересекает ось  $X$  в двух точках; б) касается оси  $X$ ; в) не имеет общих точек с осью  $X$ .

Решить эту задачу двумя способами: 1) решая совместно уравнение параболы и уравнение оси  $X$ , 2) рассматривая вторую формулу (9) п 98 (стр. 184).

**191.** Определить параметр параболы  $y^2 = 2px$ , зная, что радиус-вектор, проведенный из фокуса в точку, для которой  $x = 3$ , равен 5.

**192.** Для следующих парабол указать вершину, точки пересечения с осью  $X$  и в каком направлении парабола расходится:

а)  $y = x^2 - 7x + 10$ ;    в)  $y = 2x^2 - 3x - 8$ ;    г)  $y = 5x - 3 - 2x^2$ .

б)  $y = 5 + 4x - x^2$ ;    д)  $y = 3x^2 + 5x + 4$ ;

**193.** Составить уравнения касательной и нормали к параболе  $y^2 = 2px$  в точке  $(x_1, y_1)$ .

**194.** Провести касательную к параболе  $y^2 = 2x$  в точке  $(18, -6)$ .

**195.** Провести касательную:

а) к параболе  $y^2 = 3x$  параллельно прямой  $2x - 12y + 3 = 0$ ;

б) к параболе  $y^2 = 2x$  перпендикулярно к прямой  $2x + y - 1 = 0$ .

**196.** Провести касательную к параболе  $y^2 = 6x$  через точку:

а)  $(0, 3)$ ;    б)  $(2, -2\sqrt{3})$ ;    в)  $(5, 5)$ .

**197.** Решить для параболы вопрос задачи **186** (стр. 179).

**198.** Проекция отрезка нормали от точки кривой, в которой проведена нормаль, до пересечения с осью  $X$  на ось  $X$  называется поднормалью.

а) Дать общее выражение для поднормали.

б) Показать, что у параболы  $y^2 = 2px + a$  поднормаль постоянна.

**199.** Доказать, что нормаль к параболе в любой её точке есть биссектриса угла между фокальным радиусом-вектором этой точки и диаметром, выходящим из этой точки.

## § 5. Диаметры эллипса, гиперболы и параболы

**100. Диаметры эллипса.** Диаметр окружности может быть определен разными способами, например:

1) Диаметр есть хорда наибольшей величины.

2) Диаметр есть хорда, которая из всех точек окружности видна под прямым углом.

3) Диаметр есть геометрическое место середин параллельных хорд. Это свойство иллюстрируется черт. 91. Диаметр, перпендикулярный к параллельным хордам, изображенным на этом чертеже, делит каждую из этих хорд пополам. Следовательно, он является геометрическим местом середин этих хорд.

Эти (и многие другие) определения диаметра для окружности эквивалентны, но не каждое из них может быть перенесено на другие линии второго порядка. Читатель сам сообразит, почему первое и второе определения для эллипса, гиперболы и параболы непригодны. Третье же определение диаметра, как будет показано ниже, может быть перенесено на эллипс, гиперболу и параболу.

Эта возможность основана на том, что у всех этих линий, как и у окружности, середины параллельных хорд лежат на прямой, хотя эта прямая, вообще говоря, не перпендикулярна к этим хордам. Докажем это для эллипса.

**Теорема.** *Средины параллельных хорд эллипса лежат на прямой.*

**Доказательство.** Рассмотрим эллипс

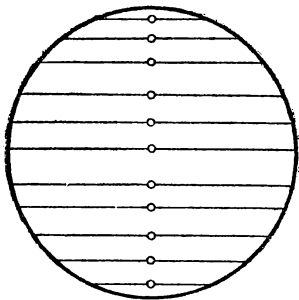
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (*)$$

и проведём в нём семейство параллельных хорд (черт. 92).

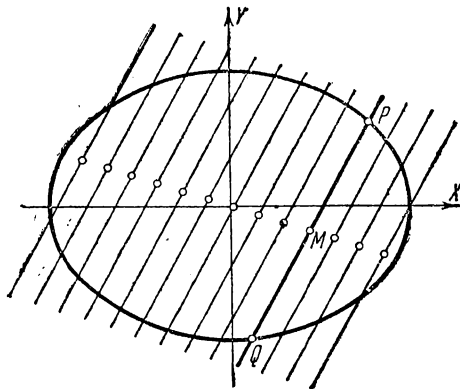
Рассмотрим какую-нибудь одну из этих хорд  $PQ$ . Пусть её уравнение

$$y = kx + m \quad (**)$$

Попытаемся найти середину  $M$  этой хорды. Для этого, прежде всего, решим уравнения (\*) и (\*\*); тем самым мы найдём точки



Черт. 91.



Черт. 92. Параллельные хорды эллипса и сопряжённый им диаметр.

$P$  и  $Q$ , в которых прямая (\*\*) пересекает эллипс (\*). Подставляя в уравнение (\*) значение  $y$  из уравнения (\*\*), получим после упрощений:

$$(b^2 + k^2 a^2) x^2 + 2ka^2 mx + a^2 (m^2 - b^2) = 0. \quad (***)$$

Если бы мы решили это уравнение (чего фактически мы делать не будем), то мы получили бы два значения  $x$ , соответствующие

\*) Мы употребляем букву  $m$ , а не  $b$ , как это было принято до сих пор, потому что  $b$  обозначает малую полуось эллипса.

точкам  $P$  и  $Q$ . Но нас интересует только точка  $M$ . Обозначим её координаты через  $(X, Y)$ . Тогда

$$X = \frac{x_P + x_Q}{2}.$$

Сумму корней уравнения (\*\*\*) можно определить по теореме Виета, не находя самих корней. Поэтому

$$X = -\frac{ka^2m}{b^2 + k^2a^2}.$$

После этого можно определить  $Y$ , подставляя найденное значение  $X$  в уравнение (\*\*) [потому что точка  $M$  лежит на прямой (\*\*)]:

$$Y = -\frac{k^2a^2m}{b^2 + k^2a^2} + m = \frac{b^2m}{b^2 + k^2a^2}.$$

Допустим теперь, что мы будем брать *разные* хорды из нашего семейства параллельных хорд. Все эти хорды будут иметь уравнение (\*\*), причём  $m$  будет иметь разные значения, а  $k$  будет для всех этих хорд одно и то же. Таким образом найденные выше формулы при постоянном  $k$  и переменном  $m$  дают координаты середин любых хорд семейства (\*\*), т. е. текущие координаты геометрического места середин этих хорд. Другими словами, эти формулы суть параметрические уравнения искомого геометрического места; роль переменного параметра играет  $m$ . Чтобы получить обычное уравнение нашего геометрического места, следует исключить  $m$  из формул, выражающих  $X$  и  $Y$ . Для этого разделим вторую формулу на первую:

$$\frac{Y}{X} = -\frac{b^2}{a^2k}$$

или

$$Y = -\frac{b^2}{a^2k} X. \quad (1)$$

Уравнение (1) есть уравнение *прямой*, проходящей через начало. Тем самым теорема доказана.

Теперь можно дать следующее определение:

*Диаметром эллипса называется геометрическое место середин параллельных хорд \*).*

**101. Сопряжённые диаметры эллипса.** Для каждого семейства параллельных хорд эллипса существует свой диаметр, делящий пополам все хорды этого семейства. Этот диаметр называется *сопряжённым* по отношению к этим хордам.

---

\*) Указанное геометрическое место есть отрезок прямой, но иногда под словом «диаметр» подразумевают всю прямую, на которой расположен этот отрезок.

Если угловой коэффициент хорд обозначить через  $k$ , то угловой коэффициент сопряжённого им диаметра, как видно из уравнения (1), таков:

$$k_1 = -\frac{b^2}{a^2 k}. \quad (2)$$

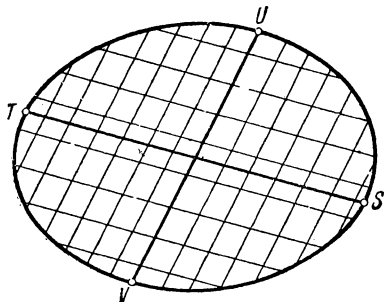
Таким образом,

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}. \quad (2')$$

Угловые коэффициенты  $k$  и  $k_1$  входят в формулу (2') равноправно, и нельзя различить, который из них является угловым коэффициентом хорд и который — угловым коэффициентом сопряжённого им диаметра. Отсюда вытекает:

*Если хордам, имеющим угловой коэффициент  $k$ , сопряжён диаметр, имеющий угловой коэффициент  $k_1$ , то хордам, имеющим угловой коэффициент  $k_1$ , сопряжён диаметр, имеющий угловой коэффициент  $k$ .*

Это положение иллюстрируется черт. 93. На нём изображены два семейства параллельных хорд, угловые коэффициенты которых связаны условием (2). Диаметр  $ST$  сопряжён хордам одного семейства (назовём это семейство первым). Если же взять хорды, параллельные диаметру  $ST$ , то сопряжённый им диаметр  $UV$  принадлежит первому семейству хорд. Такие два диаметра, как  $ST$  и  $UV$ , называются *сопряжёнными диаметрами*. Итак:



Черт. 93. Сопряжённые диаметры эллипса.

*Два диаметра эллипса называются сопряжёнными, если каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому.*

Всякие два направления, параллельные двум сопряжённым диаметрам эллипса, называются *сопряжёнными направлениями* относительно этого эллипса.

Условие (2) или (2') есть условие сопряжённости двух направлений.

Все диаметры проходят через центр эллипса.

Если  $b = a$ , то эллипс является окружностью. Условие сопряжённости (2') при  $b = a$  принимает вид

$$kk_1 = -1,$$

т. е. совпадает с условием перпендикулярности двух направлений. Таким образом, в окружности понятие «сопряжённые диаметры» совпадает с понятием «взаимно перпендикулярные диаметры».

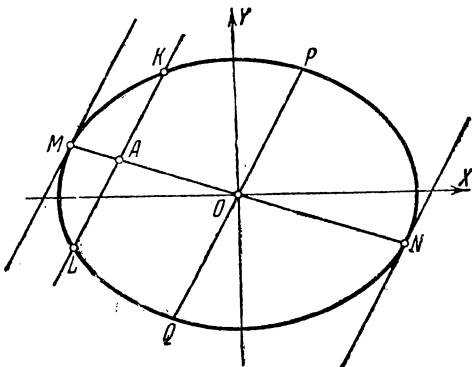
В общем случае (при  $b \neq a$ ) формула (2) при  $k=0$  даёт  $k_1 = \infty$ . Это значит, что большая и малая оси эллипса суть два сопряжённых диаметра. Из формулы (2) или (2') ясно, что в эллипсе нет ни одной другой пары сопряжённых взаимно перпендикулярных диаметров.

Из формулы (2') ясно, что угловые коэффициенты сопряжённых направлений всегда имеют разные знаки. Это значит, что если один диаметр проходит в первой и третьей четвертях, то сопряжённый ему диаметр проходит во второй и четвёртой четвертях.

Из формулы (2') ясно также, что если  $k$ , будучи положительным, увеличивается, то  $k_1$ , будучи отрицательным, уменьшается по абсолютной величине. Это значит, что если один диаметр вращается против часовой стрелки, то сопряжённый ему диаметр тоже вращается против часовой стрелки.

**102. Некоторые свойства сопряжённых диаметров эллипса.**  
Теорема. *Касательная к эллипсу в любой его точке  $M$  параллельна диаметру, сопряжённому тому диаметру, который проходит через точку касания.*

Доказательство. Через данную точку  $M$  эллипса проводим диаметр  $MN$  и строим сопряжённый ему диаметр  $PQ$  (черт. 94). Проведём секущую  $KL \parallel PQ$ ,



Черт. 94. Касательные к эллипсу в концах одного диаметра.

и пусть  $A$  — точка пересечения  $KL$  с  $MN$ . В таком случае  $KA = AL$ . Положим, что секущая  $KL$  перемещается параллельно самой себе, удаляясь от центра эллипса. Отрезки  $KA$  и  $AL$  при этом стремятся к нулю, оставаясь всё время равными между собой. Следовательно, они одновременно обратятся в нуль. При этом точки  $K$ ,  $A$ ,  $L$  и  $M$  совпадут, и секущая  $KL$ , будучи параллельной  $PQ$ , займёт положение, при котором две её точки пересечения с эллипсом сливаются, т. е. станет касательной.

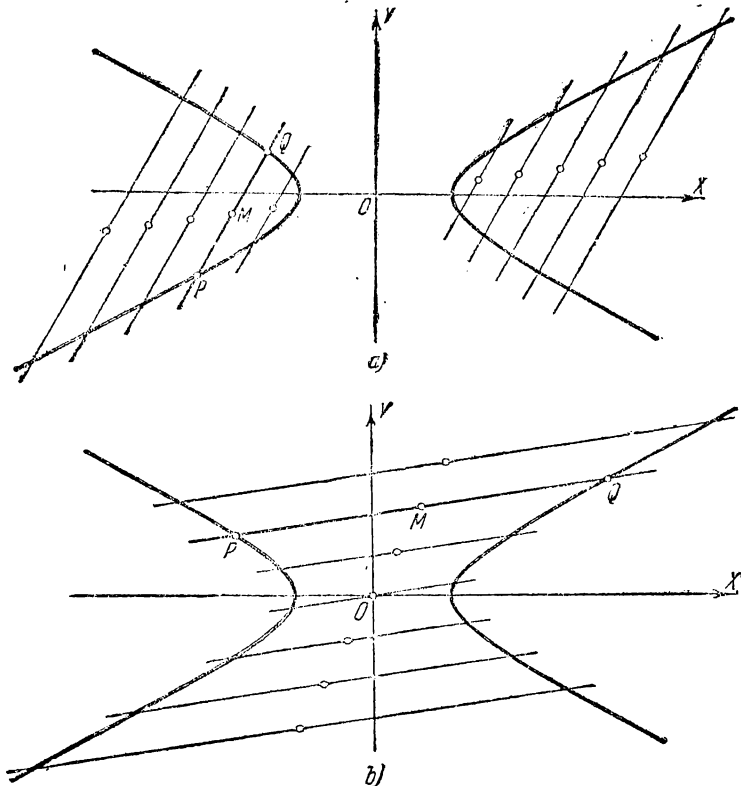
Когда эллипс превращается в окружность, то доказанная теорема сводится к тому, что касательная к окружности перпендикулярна к диаметру, проведённому в точку касания.

Следствие. *Касательные к эллипсу в концах одного диаметра параллельны между собой (касательные в точках  $M$  и  $N$  на черт. 94).*

**103. Диаметры гиперболы.** Для гиперболы имеет место теорема, аналогичная той, которая была доказана в п 100 для эллипса.

**Теорема.** *Средины параллельных хорд гиперболы лежат на прямой.*

Сделаем одно пояснение, полезное для большей наглядности, но не играющее роли для доказательства. У гиперболы есть хорды



Черт. 95. Параллельные хорды гиперболы и сопряжённый им диаметр.

двух сортов: концы хорды могут лежать на одной ветви гиперболы или на разных. Хорды, изображённые на черт. 95 а) — первого сорта, а на черт. 95 б) — второго. Приводимое ниже доказательство не зависит от того, какой из этих двух чертежей мы имеем в виду.

Пусть секущая  $PQ$  имеет уравнение

$$y = kx + m.$$

Подставляя это выражение для  $y$  в уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

находим после упрощений

$$(b^2 - k^2 a^2) x^2 - 2a^2 k m x - a^2 (m^2 + b^2) = 0.$$

Корни этого уравнения суть абсциссы точек  $P$  и  $Q$ . Для точки  $M$ , являющейся серединой  $PQ$ , имеем:

$$X = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{a^2 k m}{b^2 - k^2 a^2}.$$

Из уравнения прямой  $PQ$  теперь находим  $Y$ :

$$Y = \frac{b^2 m}{b^2 - k^2 a^2}.$$

При постоянном  $k$  и переменном  $m$  последние два равенства дают координаты середин *параллельных* хорд, т. е. представляют параметрические уравнения геометрического места этих середин. Для исключения параметра  $m$  делим второе равенство на первое

$$\frac{Y}{X} = \frac{b^2}{a^2 k}$$

или

$$Y = \frac{b^2}{a^2 k} X. \quad (3)$$

Уравнение (3) есть уравнение прямой, проходящей через начало; таким образом, теорема доказана.

*Геометрическое место середин параллельных хорд гиперболы называется диаметром гиперболы* \*).

**104. Сопряжённые диаметры гиперболы.** Всё, что сказано о диаметрах эллипса в п 101 включительно до строки 7-й снизу на стр. 191, относится и к диаметрам гиперболы. Разница заключается лишь в том, что условие сопряжённости для гиперболы таково:

$$k_1 = \frac{b^2}{a^2 k} \quad (4)$$

или

$$k k_1 = \frac{b^2}{a^2}. \quad (4')$$

У гиперболы, так же как и у эллипса, существует единственная пара взаимно перпендикулярных сопряжённых диаметров: оси гиперболы.

Укажем теперь некоторые свойства сопряжённых диаметров гиперболы, отличные от свойств сопряжённых диаметров эллипса.

---

\*) Указанное геометрическое место представляет либо прямую (черт. 95b), либо два отдельных луча прямой (черт. 95a). Часто и в последнем случае диаметром называют всю прямую, которой принадлежат эти лучи.



Угловые коэффициенты сопряжённых диаметров гиперболы имеют одинаковые знаки. Поэтому два сопряжённых диаметра проходят либо одновременно в нечётных четвертях, либо одновременно в чётных.

Если  $k$  увеличивается от 0 до  $\infty$ , то  $k_1$  уменьшается от  $\infty$  до 0. Это значит, что если некоторый диаметр вращается от оси  $Y$  к оси  $X$ , то сопряжённый диаметр вращается *ему навстречу* от оси  $Y$  к оси  $X$ . Следовательно, эти диаметры встречаются, и в момент встречи мы имеем *диаметр, сам себе сопряжённый* (у эллипса таких диаметров нет). Вследствие симметрии в чётных четвертях тоже есть диаметр, сам себе сопряжённый.

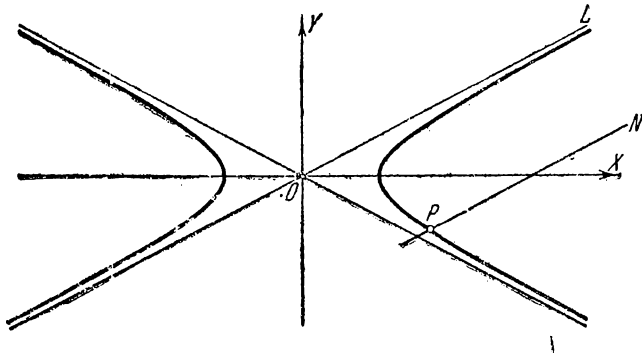
Угловым коэффициентом диаметра, который сам себе сопряжён получим, полагая в формуле (4')  $k_1 = k$ . Это даёт нам

$$k = \pm \frac{b}{a}.$$

Но прямые, проходящие через центр гиперболы и имеющие угловые коэффициенты  $\pm \frac{b}{a}$ , суть асимптоты. Таким образом:

*Каждая асимптота гиперболы есть диаметр, сам себе сопряжённый.*

Это свойство асимптот, кажущееся парадоксальным, не может быть полностью разъяснено в настоящей книге, потому что в ней не излагаются свойства бесконечно удалённых точек. Однако черт. 96 несколько поясняет



Черт. 96. Асимптота гиперболы, как диаметр, сам себе сопряжённый.

его. Пусть требуется построить диаметр, сопряжённый асимптоте  $OL$ . Проводим секущую  $PN$ , параллельную  $OL$ . Она пересекает гиперболу в точке  $P$  и в бесконечно удалённой точке  $Q$ . Середина отрезка  $PQ$  тоже является бесконечно удалённой точкой. Сопряжённый диаметр должен соединять  $O$  с этой серединой. Но прямая, проходящая через  $O$  и бесконечно удалённую точку прямой  $PN$ , параллельна  $PN$ , т. е. это есть сама асимптота  $OL$ .

**105. Некоторые свойства сопряжённых диаметров гиперболы.** Всё изложенное в п 102 относится также к гиперболе. Предоставляем читателю повторить для гиперболы соответствующие доказательства.

**106. Диаметры параболы.** Теорема. *Средины параллельных хорд параболы лежат на прямой.*

Доказательство. Рассмотрим секущую  $PQ$  (черт. 97), имеющую уравнение

$$y = kx + m.$$

Решая совместно уравнение этой секущей и уравнение параболы

$$y^2 = 2px,$$

получим для определения  $x$  уравнение

$$k^2 x^2 + 2(km - p)x + m^2 = 0.$$

Корни этого уравнения суть абсциссы точек  $P$  и  $Q$ , в которых наша секущая пересекает параболу. Абсцисса  $X$  точки  $M$ , являющейся серединой хорды  $PQ$ , определится так:

$$X = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{p - km}{k^2},$$

а ордината  $Y$  точки  $M$ :

$$Y = kX + m = \frac{p - km}{k} + m = \frac{p}{k}.$$

Если вместо секущей  $PQ$  брать другие *параллельные ей* секущие, то  $m$  будет изменяться, а  $k$  будет постоянным. Из формулы

$$Y = \frac{p}{k} \quad (5)$$

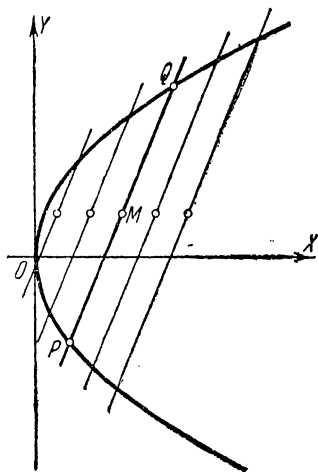
видно, что  $Y$  не зависит от  $m$ . Это значит, что середины всех параллельных хорд имеют одну и ту же ординату. Следовательно, все эти середины лежат на прямой, параллельной оси  $X$ ; уравнение (5) есть уравнение этой прямой. Теорема доказана.

*Геометрическое место середин параллельных хорд параболы называется диаметром параболы* \*).

**107. Некоторые свойства диаметров параболы.** Как видно из предыдущего п, *все диаметры параболы параллельны между собой.*

Диаметр (5) сопряжён хордам, имеющим угловой коэффициент  $k$ . При  $k = \infty$  имеем  $Y = 0$ . Это значит, что *ось параболы сопряжена*

\*) Указанное геометрическое место есть полупрямая, но иногда под словом «диаметр» подразумевают всю прямую.



Черт. 97. Параллельные хорды параболы и сопряжённый им диаметр.

*хордам, перпендикулярным к ней.* Это — единственный случай, когда хорды параболы перпендикулярны к сопряжённому диаметру.

У параболы нет центра, потому что при наличии у кривой центра все диаметры должны через него проходить (почему?), а диаметры параболы не пересекаются.

Для каждого семейства параллельных хорд параболы существует сопряжённый диаметр. Однако у параболы нет сопряжённых диаметров, так как произвольное семейство параллельных хорд не содержит диаметра. Точно так же нет смысла говорить о сопряжённых направлениях, так как пришлось бы считать, что всем направлениям сопряжено одно и то же направление: параллельное оси параболы.

У эллипса и гиперболы хордам с угловым коэффициентом  $k$  сопряжён диаметр с некоторым другим угловым коэффициентом  $k_1$ . У параболы же хордам с угловым коэффициентом  $k$  сопряжён диаметр, проходящий на определённом расстоянии от оси параболы, но всегда с одним и тем же угловым коэффициентом.

*Касательная к параболе в любой её точке параллельна хордам, сопряжённым диаметру, проходящему через точку касания.*

Доказательство вполне аналогично тому, которое изложено в п 102 для эллипса.

### Задачи

**200.** В эллипсе  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  найти хорду, проходящую через точку (2, 1) и делящуюся в этой точке пополам.

**201.** У параболы  $y^2 = 6x$  найти хорду, проходящую через точку (5, 5) и делящуюся в этой точке пополам.

**202.** Найти угол между равными сопряжёнными диаметрами эллипса  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

**203.** Найти сопряжённые диаметры гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$ , угол между которыми равен  $45^\circ$ .

**204.** а) Доказать, что если любую точку эллипса соединить с концами некоторого диаметра, то соединительные хорды будут параллельны двум сопряжённым диаметрам;

б) то же для гиперболы.

**205.** Доказать, что хорды равносторонней гиперболы, проходящие через фокус и параллельные двум сопряжённым диаметрам, равны между собой.

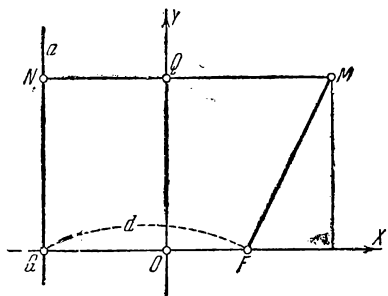
## § 6. Директрисы эллипса, гиперболы и параболы

**108.** Геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до некоторой точки и до некоторой прямой постоянно. Рассмотрим следующую задачу.

Дана точка  $F$  и прямая  $a$ . Переменная точка  $M$  движется по плоскости так, что отношение её расстояния от  $F$  к её расстоянию от  $a$  постоянно. Какую линию описывает точка  $M$ ?

Заметим, что определение этой линии является непосредственным обобщением определения параболы. Для всякой точки параболы её расстояние от фокуса равно её расстоянию от директрисы, т. е. отношение этих расстояний равно единице. У рассматриваемой линии это отношение может

равняться любому постоянному числу; обозначим его буквой  $e$ . Точку  $F$  мы будем называть *фокусом* данной линии, а прямую  $a$  — *директрисой*.



Черт. 98.

Проведём через  $F$  прямую, перпендикулярную к  $a$ , и примем её за ось  $X$  (черт. 98). За начало координат примем ту точку  $O$ , в которой наша линия пересекает отрезок  $FG$ . Положение точки  $O$  легко определить из того соображения, что для всех точек нашей линии

$$\frac{FM}{MN} = e. \quad (1)$$

Так как точка  $O$  принадлежит линии, то для неё

$$\frac{FO}{OG} = e.$$

Обозначим отрезок  $FG$  через  $d$ ; тогда  $OG = d - FO$ , и следовательно,

$$\frac{FO}{d - FO} = e,$$

откуда

$$FO = \frac{ed}{1 + e}, \quad (2)$$

$$OG = d - FO = \frac{d}{1 + e}. \quad (3)$$

Пусть  $M(x, y)$  есть точка, описывающая линию. Координаты фокуса суть  $F\left(\frac{ed}{1 + e}, 0\right)$ . Имеем:  $FM = \sqrt{\left(x - \frac{ed}{1 + e}\right)^2 + y^2}$ . Из черт. 98 ясно, что

$$MN = MQ + QN = x + \frac{d}{1 + e}$$

(так как  $QN = OG$ ).

Подставляем эти выражения для  $FM$  и  $MN$  в равенство (1):

$$\frac{\sqrt{\left(x - \frac{ed}{1 + e}\right)^2 + y^2}}{x + \frac{d}{1 + e}} = e.$$

Это и есть уравнение искомой линии. Займёмся его упрощением. Возводим в квадрат, раскрываем скобки и множим на знаменателя левой части:

$$x^2 - \frac{2ed}{1 + e}x + \frac{e^2d^2}{(1 + e)^2} + y^2 = e^2x^2 + \frac{2e^2d}{1 + e}x + \frac{e^2d^2}{(1 + e)^2}.$$

Определяем  $y^2$ :

$$y^2 = 2e dx + (e^2 - 1)x^2. \quad (4)$$

Назовём *фокальным параметром* нашей линии длину перпендикуляра к оси  $X$ , восстановленного из фокуса до пересечения с этой линией. Чтобы вычислить фокальный параметр, следует подставить в уравнение (4)

$$x = \frac{ed}{1 + e};$$

тогда  $y$  даст нам величину фокального параметра:

$$y^2 = 2ed \cdot \frac{ed}{1+e} + (e^2 - 1) \frac{e^2 d^2}{(1+e)^2},$$

откуда после упрощений

$$y = ed.$$

Фокальный параметр мы будем обозначать через  $p$ . Заменим в уравнении (4)  $ed$  через  $p$ :

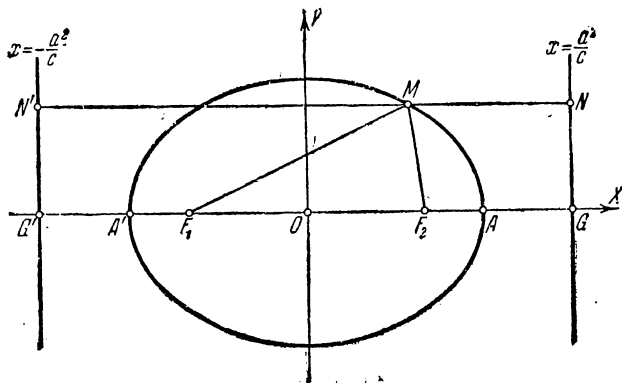
$$y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2. \quad (4')$$

Уравнение (4') при  $e < 1$  изображается эллипсом [черт. 73 (стр. 159)], при  $e = 1$  — параболой, при  $e > 1$  — гиперболой [черт. 83 (стр. 176)].

Таким образом, мы видим, что можно дать общее определение эллипса, гиперболы и параболы. Кроме того, открывается новый геометрический смысл эксцентриситета.

*Эллипсом, гиперболой и параболой называются линии, для всех точек которых отношение расстояния до некоторой точки (называемой фокусом) к расстоянию до некоторой прямой (называемой директрисой) есть постоянная величина (называемая эксцентриситетом).* Для эллипса и гиперболы эксцентриситет является в то же время отношением между фокусного расстояния соответственно к большой или действительной оси; для параболы эксцентриситет равен единице.

Точка  $O$  (т. е. точка пересечения кривой с перпендикуляром, опущенным из фокуса на директрису) является вершиной кривой. Расстояние от вершины



Черт. 99. Директрисы эллипса.

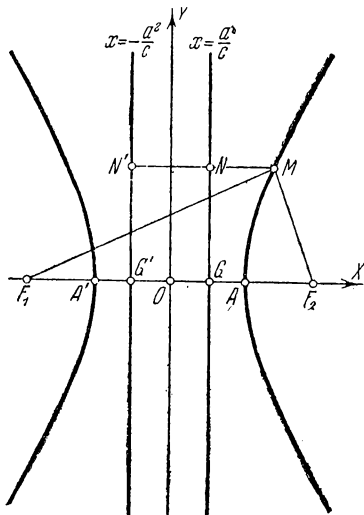
до директрисы определяется формулой (3). Заметим, что  $p = ed$  и заменим в формуле (3)  $d$  через  $\frac{p}{e}$ . Тогда формула (3) даёт

$$f = \frac{p}{e(1+e)}, \quad (5)$$

где буквой  $f$  обозначено расстояние от вершины до директрисы. *Директриса располагается от вершины в сторону, противоположную фокусу.*

**109. Директрисы эллипса.** Рассмотрим эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Фокусу  $F_2$  (черт. 99) соответствует директриса, перпендикулярная к  $F_2A$  ( $A$  — вершина) и проходящая правее  $A$  (потому что фокус  $F_2$  лежит левее  $A$ ).

Расстояние от  $A$  до директрисы определяется формулой (5). Учитывая, что для эллипса  $p = \frac{b^2}{a}$  [§ 2, формула (11) (стр. 159)] и  $e = \frac{c}{a}$ , получим:



$$f = AG = \frac{b^2 a}{c(c+a)}.$$

Находим расстояние от центра эллипса до директрисы:

$$OG = a + f = a + \frac{b^2 a}{c(c+a)} = \frac{a^2}{c}.$$

Очевидно, левому фокусу соответствует директриса, находящаяся на таком же расстоянии от центра слева. Таким образом, уравнения директрис эллипса суть

$$x = \pm \frac{c^2}{a}. \quad (6)$$

Легко непосредственно проверить, что прямые (6) служат директрисами. Возьмём на эллипсе произвольную точку  $M(x, y)$  и опустим из неё перпендикуляр  $MN$  на директрису.

Имеем:

$$MF_2 = r_2 = a - ex,$$

$$MN = \frac{a^2}{c} - x.$$

Черт. 100. Директрисы гиперболы.

Следовательно,

$$\frac{MF_2}{MN} = \frac{a - ex}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{a - \frac{c}{a}x}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{a^2 c - c^2 x}{a^3 - acx} = \frac{c(a^2 - cx)}{a(a^2 - cx)} = \frac{c}{a} = e.$$

Аналогично для левого фокуса и левой директрисы:

$$MF_1 = r_1 = a + ex,$$

$$MN' = \frac{a^2}{c} + x,$$

и аналогичные выкладки дают  $\frac{MF_1}{MN'} = e$ .

### 110. Директрисы гиперболы. Для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

так же, как для эллипса, находим:

$$f = AG = \frac{b^2 a}{c(c+a)}.$$

Далее

$$OG = a - f = a - \frac{b^2 a}{c(c+a)} = \frac{a^2}{c}.$$

Поэтому гипербола имеет две директрисы

$$x = \pm \frac{a^2}{c},$$

соответствующие двум фокусам.

Легко непосредственно проверить, что для любой точки  $M$  гиперболы

$$\frac{MF_1}{MN'} = \frac{MF_2}{MN} = e.$$

**111. Директриса параболы.** У параболы — один фокус и одна директриса. Из формулы (5) при  $e = 1$  получается:

$$f = \frac{p}{2},$$

т. е. директриса параболы проходит на расстоянии  $\frac{p}{2}$  от вершины, что нам было известно раньше.

### Задача

**206.** Написать уравнения директрис следующих кривых:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; & \text{c) } \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{8} = 1; \\ \text{b) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1; & \text{d) } -\frac{x^2}{10} + y^2 = 1. \end{array}$$


---

## ГЛАВА VII

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

#### § 1. Постановка вопроса и общие теоремы

**112. Постановка вопроса.** Мы уже знаем, что общее уравнение второй степени с двумя переменными имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

[гл. VI, § 1, уравнение (3) (стр. 145)].

В этой главе мы будем решать следующие задачи:

1°. Найти метод, позволяющий в каждом частном случае (т. е. при числовых значениях коэффициентов) исследовать кривую (1), т. е. определить её вид, размеры и расположение относительно координатных осей.

2°. Исследовать уравнение (1) в общем виде и перечислить все случаи, которые могут встретиться при всевозможных числовых значениях коэффициентов.

Метод решения этих вопросов заключается в следующем. Каждый раз совершается преобразование координат: от данной системы мы переходим к другой, в которой уравнение данной линии имеет наиболее простой вид.

Предварительно мы докажем некоторые общие теоремы, выясняющие, от каких особенностей расположения кривой относительно координатной системы зависят различные упрощения уравнения (1), и выведем формулы, показывающие, как преобразуется уравнение (1) при различных преобразованиях координат.

**113. Теорема о центре.** *Центром симметрии* или просто *центром* линии называется точка, обладающая следующим свойством: если какая-нибудь точка  $M$  принадлежит линии, то точка  $M'$ , симметричная  $M$  относительно этого центра, тоже принадлежит этой линии.

**Теорема.** *Если в уравнении линии второго порядка отсутствуют члены первой степени, то начало координат служит центром этой линии, и обратно: если начало координат служит центром линии второго порядка, то в уравнении этой линии отсутствуют члены первой степени.*



Пусть дано, что в уравнении (1) отсутствуют члены первой степени, т. е. это уравнение имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0. \quad (*)$$

Если какая-нибудь точка  $M(x, y)$  принадлежит линии (\*), то точка  $M'(-x, -y)$ , симметричная точке  $M$  относительно начала, тоже принадлежит этой линии. В самом деле, все члены уравнения (\*) — чётных измерений, и поэтому изменение знаков одновременно у  $x$  и  $y$  не влияет на уравнение. Таким образом, первая часть теоремы доказана \*).

Пусть теперь, наоборот, дано, что начало является центром линии (1), и требуется доказать, что в этом уравнении отсутствуют члены первой степени.

Проведём через начало произвольную прямую  $y = kx$  и будем искать точки её пересечения с линией (1). Подставляя в уравнение (1)  $y = kx$ , после некоторой группировки получаем:

$$(A + 2Bk + Ck^2)x^2 + 2(D + Ek)x + F = 0. \quad (**)$$

Согласно условию теоремы, всякая прямая, проходящая через начало, должна пересекать нашу линию в двух симметричных точках. Поэтому уравнение (\*\*) должно иметь корни, равные по величине и противоположные по знаку, т. е. сумма этих корней должна быть равна нулю. Следовательно, средний коэффициент уравнения (\*\*) должен быть равен нулю:

$$D + Ek = 0.$$

Это равенство должно иметь место тождественно (т. е. при любых значениях  $k$ ), потому что всякая прямая пересекает нашу линию в точках, симметричных относительно начала. Отсюда вытекает, что оба коэффициента  $D$  и  $E$  должны быть нулями:

$$D = E = 0,$$

что и требовалось доказать.

**114. Теорема об оси.** Теорема. Если в уравнении линии второго порядка отсутствует член с произведением координат, то эта линия имеет ось (т. е. ось симметрии), параллельную одной из координатных осей, и обратно: если линия второго порядка имеет ось, параллельную одной из координатных осей, то в уравнении этой линии отсутствует член с произведением координат.

Пусть в уравнении (1) отсутствует член с произведением координат, т. е. это уравнение имеет вид

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (***)$$

\*) Это положение, доказанное здесь для линий второго порядка, есть частный случай более общего положения, доказанного в п 76 (стр. 150—151).

Проведём произвольную прямую, параллельную оси  $Y$ ,

$$x = h$$

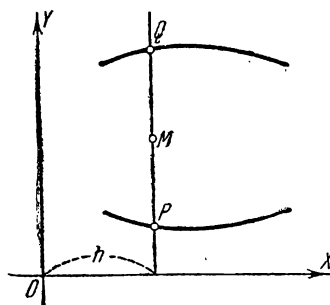
и найдём точки  $P$  и  $Q$  пересечения этой прямой с линией (\*\*\*) (черт. 101). Подставляя в уравнение (\*\*\*)  $x = h$ , получаем следующее уравнение для определения  $y$ :

$$Cy^2 + 2Eyu + Ah^2 + 2Dh + F = 0.$$

Если  $C \neq 0$ , то это — квадратное уравнение. Оно имеет два корня, равные ординатам точек  $P$  и  $Q$ . Рассмотрим точку  $M$ , являющуюся серединой отрезка  $PQ$ . Её ордината равна

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} = -\frac{E}{C}.$$

Если мы теперь будем проводить *разные* прямые  $x = h$  и на каждой из них находить точку  $M$ , являющуюся серединой хорды  $PQ$ , то все эти точки  $M$  имеют одну и ту же ординату, потому что полученное нами выражение  $y_M = -\frac{E}{C}$  постоянно, т. е. не зависит от  $h$ . Следовательно, при перемещении прямой  $x = h$  точка  $M$  переме-



Черт. 101.

щается по прямой, параллельной оси  $X$ ; эта прямая и является осью симметрии нашей линии.

Если  $C = 0$ , то это рассуждение неприменимо. В таком случае рассмотрим прямые  $y = h$ , параллельные оси  $X$ , и аналогичным рассуждением докажем, что наша линия имеет ось симметрии, параллельную оси  $Y$ ; это рассуждение справедливо лишь при условии  $A \neq 0$ .

Три коэффициента  $A$ ,  $B$  и  $C$  не могут быть одновременно нулями, так как тогда уравнение (1) не было бы уравнением второй степени. Следовательно, одно из

двух вышеприведённых рассуждений обязательно справедливо, и линия имеет ось, параллельную одной из координатных осей.

**Примечание.** Из приведённого доказательства ясно, что если член с произведением координат отсутствует и оба коэффициента  $A$  и  $C$  отличны от нуля, то линия имеет две оси — параллельную оси  $X$  и параллельную оси  $Y$ .

Пусть теперь дано, что линия 1) имеет ось, параллельную, например, оси  $X$ ; требуется доказать, что в уравнении (1) отсутствует член с произведением координат. Проведём произвольную прямую, параллельную оси  $Y$ ,

$$x = h$$

и будем искать её точки пересечения с линией (1). Для определения  $y$  получим уравнение

$$Cy^2 + 2(Bh + E)y + Ah^2 + 2Dh + F = 0. \quad (\dagger)$$

Согласно условию, середины всех вертикальных (параллельных оси  $Y$ ) хорд лежат на прямой, параллельной оси  $X$ . Это значит, что полусумма корней уравнения  $(\dagger)$  должна быть постоянной (т. е. не зависящей от  $h$ ):

$$y_1 + y_2 = -\frac{Bh + E}{C} = \text{const.},$$

а это может быть только при  $B=0$ , что и требовалось доказать.

Это доказательство потеряло бы силу при  $C=0$ , но в данном случае  $C$  не может быть нулём. В самом деле, при  $C=0$  уравнение  $(\dagger)$  было бы первой степени относительно  $y$ , т. е. любая прямая  $x=h$  пересекала бы нашу линию только в одной точке, что несовместимо с условием, что эта линия имеет ось симметрии, параллельную оси  $X$ .

В случае, когда линия имеет ось, параллельную оси  $Y$ , доказательство аналогично.

**115. Условие распадаения линии второго порядка.** Мы знаем (из п 73), что алгебраическая линия  $n$ -го порядка распадается на отдельные линии, сумма порядков которых равна  $n$ , если левая часть уравнения данной линии разлагается на множители. Линия второго порядка может распадаться на пару прямых. Например, уравнение

$$(2x - 3y + 6)(x + 5y - 8) = 0 \quad (\dagger\dagger)$$

изображается парой прямых

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6 &= 0, \\ x + 5y - 8 &= 0, \end{aligned}$$

потому что, если какая-нибудь точка лежит на одной из этих прямых, то её координаты обращают в нуль один из множителей левой части уравнения  $(\dagger\dagger)$ , и уравнение удовлетворяется.

Производя перемножение, мы представим уравнение  $(\dagger\dagger)$  в виде

$$2x^2 + 7xy - 15y^2 - 10x + 54y - 48 = 0. \quad (\dagger\dagger\dagger)$$

В этом виде трудно сразу сказать, разлагается ли левая часть уравнения на множители.

Рассмотрим вопрос: имея уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (1)$$

найти признак, позволяющий судить, разлагается ли левая часть этого уравнения на множители.

Расположим уравнение (1) по степеням  $y$

$$Cy^2 + 2(Bx + E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0$$

и определим из него  $y$ :

$$y = \frac{-Bx - E \pm \sqrt{(Bx + E)^2 - C(Ax^2 + 2Dx + F)}}{C}.$$

Расположим подкоренное выражение по степеням  $x$ :

$$y = \frac{-Bx - E \pm \sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + E^2 - CF}}{C}. \quad (§)$$

Если левая часть уравнения (1) разлагается на два линейных множителя, то это уравнение может быть решено другим способом: приравняем нулю поочерёдно каждый множитель и каждый раз определяем  $y$ . В таком случае для  $y$  должны получиться два *линейных* выражения

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1x + b_1, \\ y_2 &= a_2x + b_2. \end{aligned} \right\} \quad (§§)$$

Формула (§) должна давать тот же результат. Это возможно в том и только в том случае, когда квадратный корень, участвующий в этой формуле, тождественно извлекается. Таким образом подкоренное выражение должно быть полным квадратом.

Из курса алгебры известно, что квадратный трёхчлен является полным квадратом в том и только в том случае, когда его дискриминант равен нулю. Приравняем нулю дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего под радикалом в формуле (§):

$$(BE - CD)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF) = 0.$$

После упрощений (раскрытие скобок, приведение подобных членов и сокращение на  $C$ ) это равенство может быть написано так:

$$ACF + 2BDE - CD^2 - AE^2 - B^2F = 0. \quad (§§§)$$

Итак, если линия (1) распадается, то имеет место равенство (§§§). Верно и обратное. В самом деле, если равенство (§§§) имеет место, то под радикалом в формуле (§) имеем полный квадрат. Извлекая корень, получим линейный двучлен. Беря перед радикалом разные знаки, получим для  $y$  два выражения типа (1), и, значит,

$$\begin{aligned} Cy^2 + 2(Bx + E)y + Ax^2 + 2Dx + F &= \\ &= C(y - a_1x - b_1)(y - a_2x - b_2), \end{aligned}$$

т. е. левая часть уравнения (1) разлагается на два линейных множителя.

Равенство (§§§) может быть записано так:

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

в чём легко убедиться, вычисляя этот определитель.

Последний определитель, играющий важную роль в теории линий второго порядка, называется *дискриминантом уравнения (1)* или *большим дискриминантом* (в п 118 нам встретится малый дискриминант). Мы будем всегда обозначать его буквой  $\Delta$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Итак, необходимое и достаточное условие распада линии второго порядка заключается в равенстве нулю большого дискриминанта

$$\Delta = 0. \quad (3)$$

**Примечание 1.** Дадим mnemonicское правило для составления большого дискриминанта. В первой строке выписываются подряд коэффициенты членов уравнения (1), содержащих  $x$ . При этом, если множитель  $x$  фигурирует в некотором члене два раза, то коэффициент берётся полностью, если же один раз, то берётся половина коэффициента. Во второй строке таким же образом выписываются коэффициенты членов, содержащих  $y$ , в третьей строке — коэффициенты членов, содержащих пустые места (например, в члене  $2Dx$  одно место занято множителем  $x$ , а другое пустое, в члене  $2Ey$  тоже одно место пустое, а в члене  $F$  — оба места пустые).

**Примечание 2.** Если  $\Delta = 0$ , то левая часть уравнения (1) разлагается на множители. Чтобы фактически произвести это разложение, надо решить уравнение относительно  $x$  или  $y$ . Покажем это на примере. Для уравнения (§§§) имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{7}{2} & -5 \\ \frac{7}{2} & -15 & 27 \\ -5 & 27 & -48 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, линия  $(\dagger\dagger\dagger)$  распадается. Решаем уравнение  $(\dagger\dagger\dagger)$  относительно  $y$ :

$$\begin{aligned} 15y^2 - (7x + 54)y - 2x^2 + 10x + 48 &= 0, \\ y &= \frac{7x + 54 \pm \sqrt{(7x + 54)^2 + 4 \cdot 15 \cdot (2x^2 - 10x - 48)}}{30} = \\ &= \frac{7x + 54 \pm \sqrt{169x^2 + 156x + 36}}{30} = \frac{7x + 54 \pm \sqrt{(13x + 6)^2}}{30} = \\ &= \frac{7x + 54 \pm (13x + 6)}{30}. \end{aligned}$$

То обстоятельство, что корень извлекается, является следствием условия  $\Delta = 0$ . Беря поочередно знаки  $\pm$ , видим, что линия  $(\dagger\dagger\dagger)$  есть пара прямых:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x + 6}{3}, \\ y &= \frac{-x + 8}{5} \end{aligned}$$

или, после упрощений,

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6 &= 0, \\ x + 5y - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Перемножение этих уравнений даёт уравнение  $(\dagger\dagger\dagger)$ .

Примечание 3. Хотя равенство  $\Delta = 0$  есть необходимое и достаточное условие распада левых частей уравнения (1) на два линейных множителя, но оно не гарантирует, что эти множители действительны (т. е. имеют действительные коэффициенты): под радикалом в формуле (§) может получиться полный квадрат со знаком минус. Например, для уравнения

$$x^2 + y^2 = 0$$

имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$y = \pm \sqrt{-x^2} = \pm ix.$$

Следовательно, данное уравнение разлагается так:

$$(y - ix)(y + ix) = 0.$$

Ясно, что уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  изображается одной точкой ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ). Однако для простоты формулировок и в этом случае иногда говорят, что линия распадается на *пару мнимых прямых* (иначе нельзя сказать, что при  $\Delta = 0$  линия всегда распадается)  $y - ix = 0$  и  $y + ix = 0$ . Эти несуществующие прямые имеют однако одну действительную точку:  $(0, 0)$ .

Примечание 4. При выводе условия распада мы предполагали, что  $C \neq 0$  (при  $C = 0$  формула (§) теряет смысл и, кроме того, при выводе формулы (§§§) мы сокращали на  $C$ ). Если  $C = 0$ , то следовало решить уравнение (1) не относительно  $y$ , а относительно  $x$ , и аналогичные рассуждения опять приводят к условию  $\Delta = 0$ ; это рассуждение справедливо при усло-

вин  $A \neq 0$ . Наконец, если  $A$  и  $C$  одновременно нули, то уравнение (1) принимает вид

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (*)$$

Допустим, что левая часть разлагается на линейные множители

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2).$$

Один из коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  должен быть нулём (иначе в произведении присутствовал бы член с  $x^2$ ). Так как множители равноправны, то мы можем, не нарушая общности, положить  $\alpha_2 = 0$ . Далее можно положить  $\alpha_1 = 2B$ ,  $\beta_2 = 1$  (так как можно перенести некоторый постоянный множитель из одной скобки в другую). Коэффициент  $\beta_1$  должен быть нулём (иначе в произведении получился бы член с  $y^2$ ). Итак:

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = (2Bx + \gamma_1)(y + \gamma_2), \quad (**)$$

откуда

$$D = B\gamma_2, \quad 2E = \gamma_1, \quad F = \gamma_1\gamma_2.$$

Исключая отсюда  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , находим:

$$2DE - BF = 0.$$

С другой стороны, при  $A = C = 0$  большой дискриминант имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & B & D \\ B & 0 & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = B(2DE - BF)$$

и в силу предыдущего равенства  $\Delta = 0$ . Предоставляем читателю доказать обратное: если  $\Delta = 0$ , то линия (\*) распадается.

Из равенства (\*\*) видно, что в этом случае ( $A = C = 0$ ), если линия распадается, то обязательно на две прямые, параллельные координатным осям.

**116. Преобразование уравнения второй степени при переносе начала.** Если начало координат перенесено в какую-нибудь точку  $Q'(\xi, \eta)$ , то формулы, выражающие старые координаты через новые, таковы:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + \xi, \\ y &= y' + \eta. \end{aligned} \right\}$$

Уравнение линии второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

в новой системе координат запишется так:

$$\begin{aligned} A(x' + \xi)^2 + 2B(x' + \xi)(y' + \eta) + C(y' + \eta)^2 + \\ + 2D(x' + \xi) + 2E(y' + \eta) + F = 0. \quad (***) \end{aligned}$$

Запишем его в виде

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

Вообще мы обозначаем штрихами все величины, относящиеся к новой системе координат, так что  $A', B', C', D', E', F'$  — коэффициенты уравнения нашей кривой в новой системе. Раскрывая скобки в уравнении (\*\*\*), обнаружим, что коэффициенты со штрихами имеют следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} A' &= A, \\ B' &= B, \\ C' &= C, \\ D' &= A\xi + B\eta + D, \\ E' &= B\xi + C\eta + E, \\ F' &= A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi + 2E\eta + F. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Формулы (4) показывают, как преобразуются коэффициенты уравнения (1) при переносе начала в точку  $(\xi, \eta)$ .

Отметим, что перенос начала не влияет на старшие коэффициенты.

Формула для  $F'$  может быть преобразована следующим образом.

Разобьём пополам члены, содержащие в коэффициентах двойки:

$$F' = A\xi^2 + B\xi\eta + B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi + D\xi + E\eta + E\eta + F,$$

и вынесем за скобки из первого, второго и пятого членов  $\xi$ , а из третьего, четвёртого и седьмого  $\eta$ :

$$F' = \xi(A\xi + B\eta + D) + \eta(B\xi + C\eta + E) + D\xi + E\eta + F,$$

или окончательно

$$F' = D'\xi + E'\eta + D\xi + E\eta + F. \quad (5)$$

**117. Преобразование уравнения второй степени при повороте осей.** Выясним, как преобразуются коэффициенты уравнения второй степени при повороте осей на какой-нибудь угол  $\alpha$ . Формулы, выражающие старые координаты через новые, таковы:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

и уравнение (1) при переходе к новой системе принимает вид

$$\begin{aligned} A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + \\ + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0. \end{aligned}$$



Раскрывая скобки и обозначая коэффициент при  $x'^2$  через  $A'$ , коэффициент при  $x'y'$  — через  $2B'$  и т. д., найдём:

$$\left. \begin{aligned} A' &= A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha, \\ B' &= (C - A) \cos \alpha \sin \alpha + B (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\ C' &= A \sin^2 \alpha - 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha, \\ D' &= D \cos \alpha + E \sin \alpha, \\ E' &= -D \sin \alpha + E \cos \alpha, \\ F' &= F. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Поворот осей не влияет на свободный член.

Складывая первую и третью формулы (6), находим:

$$A' + C' = A + C, \quad (7)$$

т. е. сумма коэффициентов при  $x^2$  и  $y^2$  не изменяется при повороте осей.

## § 2. Центральные линии

**118. Отнесение линии к центру.** Пусть дано уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

и требуется его упростить, перейдя к другой системе координат. Мы знаем, что уравнение (1) упростилось бы, если бы мы перенесли начало в центр: исчезли бы члены первой степени. Однако мы заранее не знаем, есть ли у линии (1) центр, и, если есть, то где он находится.

Применим следующий метод. Перенесём начало координат в точку  $Q'(\xi, \eta)$  пока неопределённую. Тогда наша линия будет иметь уравнение

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

коэффициенты которого выражаются по формулам (4) § 1. Если коэффициенты  $D'$  и  $E'$  окажутся нулями, то это будет значить, что точка  $O'(\xi, \eta)$  является центром кривой. Приравняем эти коэффициенты нулю:

$$A\xi + B\eta + D = 0, \quad B\xi + C\eta + E = 0. \quad (2)$$

Если удастся решить уравнения (2), то линия (1) имеет центр, и числа  $\xi, \eta$ , удовлетворяющие уравнениям (2), суть координаты центра.

Заметим, что коэффициенты уравнений для нахождения центра образуют первые две строки большого дискриминанта.

Решая уравнения (2), находим:

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \quad \eta = -\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \quad (3)$$

Для того чтобы это решение было возможно, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (2), фигурирующий в знаменателе формул (3), был отличен от нуля. Этот определитель называется *дискриминантом старших членов* уравнения (1) или *малым дискриминантом*. Мы будем всегда обозначать его буквой  $\delta$ :

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Заметим, что определитель  $\delta$  представляет собой верхний левый угол определителя  $\Delta$ .

Ясно, что исследование линии (1) пойдёт по двум разным путям при  $\delta \neq 0$  и при  $\delta = 0$ . В этом параграфе мы рассмотрим случай

$$\delta \neq 0. \quad (5)$$

В этом случае линия имеет центр и поэтому называется *центральной*. Координаты центра определяются по формулам (3).

Выясним, какой вид примет уравнение (1) после переноса начала в центр (или, как принято говорить, после отнесения линии к центру). Для этого используем формулы (4) и (5) § 1 (стр. 210), подставляя в них вместо  $\xi$  и  $\eta$  выражения (3). При этом надо вычислить только  $F'$ , так как старшие коэффициенты не меняются при переносе начала, а  $D'$  и  $E'$  будут нулями. Используя формулу (5) § 1 и учитывая, что  $D' = E' = 0$ , найдём:

$$\begin{aligned} F' &= D \cdot \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} - E \cdot \frac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} + F = \\ &= \frac{D \cdot \begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} - E \cdot \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix} + F \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{\Delta}{\delta}. \end{aligned}$$

Окончательный результат: *уравнение*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (\delta \neq 0)$$

*после переноса начала в центр принимает вид*

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (6)$$

**119. Отнесение линии к её осям.** Уравнение (6) можно ещё упростить поворотом координатной системы на некоторый угол. Если наша линия имеет хотя бы одну ось симметрии и если повернуть оси координат на такой угол  $\alpha$ , чтобы одна из координатных осей совпала с этой осью симметрии, то после такого поворота в уравнении линии должен исчезнуть член с произведением координат.

Используя формулы (6) § 1 (стр. 211), причём коэффициенты (и вообще все величины), относящиеся к новой (после поворота) системе, мы будем обозначать двумя штрихами, а старые коэффициенты мы будем брать из уравнения (6) этого параграфа, приравниваем нулю коэффициент  $B''$ :

$$(C - A) \cos \alpha \cdot \sin \alpha + B (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0.$$

Отсюда мы найдём угол  $\alpha$ , при повороте на который в уравнении исчезнет член с произведением координат

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \quad (7)$$

Исследуем формулу (7). Случай  $A - C = 0$ ,  $B \neq 0$  не является исключительным, так как для тангенса бесконечное значение возможно. В случае

$$B = 0, A = C$$

формула (7) даёт для  $\operatorname{tg} 2\alpha$  неопределённость. В этом случае наша линия является окружностью (гл. VI, § 1), а в окружности любые два взаимно перпендикулярных диаметра являются осями симметрии. Следовательно, в повороте осей нет надобности, так как член с произведением координат, который мы хотим уничтожить, уже отсутствует. Впрочем, можно повернуть оси на *любой* угол, и этот член всё равно будет отсутствовать.

Для того чтобы найти все значения  $\alpha$  в пределах от 0 до  $360^\circ$  (прибавление к углу  $\alpha$  полного оборота несущественно), надо рассмотреть все значения  $2\alpha$ , определяемые формулой (7) и заключённые от 0 до  $720^\circ$ . Если угол  $2\alpha$ , имеющий данный тангенс, есть  $2\alpha_0$ , то всего имеем четыре значения:

$$2\alpha_0, \quad 2\alpha_0 + 180^\circ, \quad 2\alpha_0 + 360^\circ, \quad 2\alpha_0 + 540^\circ.$$

Соответственно угол  $\alpha$  имеет четыре значения:

$$\alpha_0, \quad \alpha_0 + 90^\circ, \quad \alpha_0 + 180^\circ, \quad \alpha_0 + 270^\circ.$$

Наличие этих четырёх значений показывает, что линия имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии. Поворот на  $\alpha_0$  или  $\alpha_0 + 180^\circ$  приведёт ось  $X$  к совпадению с одной из этих осей, а на  $\alpha_0 + 90^\circ$  или  $\alpha_0 + 270^\circ$  — с другой.

Так как для наших целей (уничтожение члена с произведением координат) безразлично, на какой из этих углов повернуть оси ко-

ординат, то для определённости условимся всегда выбирать *острый* угол  $\alpha$ :

$$0 < \alpha < 90^\circ. \quad (8)$$

Формула (7) вместе с условием (8) определяет *единственный* угол  $\alpha$ . Заметим, что, хотя условие (8) необязательно, дальнейшие выводы будут с ним согласованы. При ином выборе угла  $\alpha$  некоторые дальнейшие положения изменились бы. Вычислим  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{2B}{\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}, \\ \cos 2\alpha &= \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В силу условия (8) угол  $2\alpha$  заключён между  $0$  и  $180^\circ$  и, следовательно, его синус положителен. Поэтому:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Радикал в формулах (9) следует брать} \\ &\text{с тем же знаком, что и } B. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Теперь вычислим коэффициенты уравнения, которое получится после поворота осей на угол, определяемый формулой (7) и условиями (8) или (10). Прежде всего находим:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2} + A - C}{2\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}, \\ \cos \alpha \cdot \sin \alpha &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{2B}{2\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}, \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2} - A + C}{2\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}. \end{aligned}$$

(Вторая формула для удобства дальнейших выкладок приведена к тому же знаменателю, что и две другие.)

Далее вычисляем коэффициенты по формулам (6) § 1 (стр. 211). При этом новые коэффициенты обозначаем  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$ ,  $E''$ ,  $F''$ , а вместо старых подставляем  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$ ,  $F'$ :

$$\begin{aligned} A'' &= \frac{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2}, & D'' &= 0, \\ B'' &= 0, & E'' &= 0, \\ C'' &= \frac{A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2}, & F'' &= \frac{\Delta}{\delta}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в формуле для  $A''$  радикал берётся с тем же знаком, что и  $B$  (т. е. не всегда с плюсом, как можно подумать по начертанию формулы), а в формуле для  $C''$  — с противоположным.

Вычисляя сумму и произведение  $A''$  и  $C''$ , находим:

$$\begin{aligned} A'' + C'' &= A + C^*), \\ A''C'' &= AC - B^2 = \delta. \end{aligned}$$

Следовательно,  $A''$  и  $C''$  являются корнями квадратного уравнения

$$s^2 - (A + C)s + \delta = 0. \quad (11)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для линии (1). Вместо формул для  $A''$  и  $C''$  достаточно запомнить уравнение (11).

Окончательный результат: *уравнение*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (\delta \neq 0)$$

*после переноса начала в центр и поворота осей координат до совпадения с осями симметрии линии принимает вид*

$$s_1x''^2 + s_2y''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \quad (12)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  — корни характеристического уравнения.

Этот результат будет неполным, если не будет указано, какой из двух корней характеристического уравнения служит коэффициентом при  $x''^2$  и какой — при  $y''^2$ . Из формул, определяющих  $A''$  и  $C''$ , вычитанием находим:

$$A'' - C'' = \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}.$$

Учитывая условие (10), скажем:

*Если  $B > 0$ , то коэффициентом при  $x''^2$  служит больший корень характеристического уравнения, а если  $B < 0$ , то — меньший.*

**120. Исследование уравнения центральной линии.** После того как мы упростили уравнение (1), приведя его к виду (12), нам предстоит судить, какой линией изображается это уравнение.

Ясно, что следует различать случаи  $\Delta = 0$  и  $\Delta \neq 0$ .

Если  $\Delta = 0$ , то уравнение (12) принимает вид

$$s_1x''^2 + s_2y''^2 = 0. \quad (13)$$

Если  $s_1$  и  $s_2$  имеют разные знаки (что имеет место при  $\delta < 0$ , потому что  $s_1s_2 = \delta$ ), то левая часть уравнения разлагается на множители, и наша линия представляет *пару пересекающихся прямых*. Если  $s_1$  и  $s_2$  имеют одинаковые знаки (что имеет место при  $\delta > 0$ ), то уравнение (13) удовлетворяется только при  $x'' = 0$ ,  $y'' = 0$ . Наша линия превращается в *одну точку*. Иногда говорят, что она рас-

\*) Мы уже видели, что при повороте осей на любой угол сумма коэффициентов  $A + C$  не изменяется.

падает на пару мнимых прямых, потому что левая часть уравнения (13) в данном случае разлагается на два мнимых множителя.

Из п 115 уже было известно, что при  $\Delta = 0$  линия распадается.

Если  $\Delta \neq 0$ , то уравнение (12) может быть приведено к виду

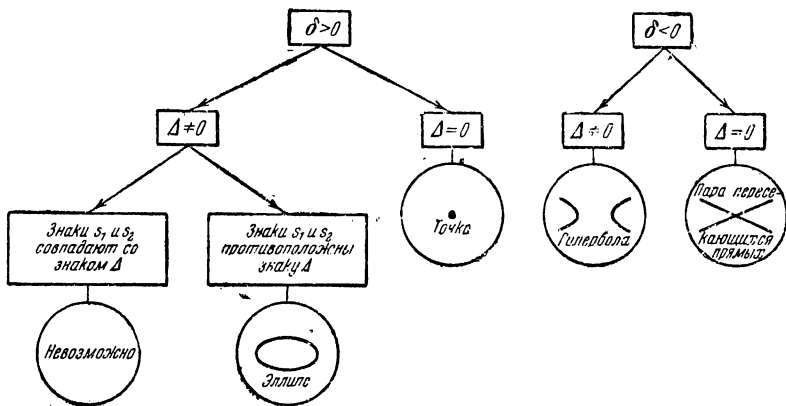
$$\frac{x''^2}{\Delta} + \frac{y''^2}{\Delta} = 1. \quad (14)$$

$$-\frac{x''^2}{s_1 \delta} - \frac{y''^2}{s_2 \delta} = 1.$$

Если  $\delta > 0$ , то  $s_1$  и  $s_2$  имеют одинаковые знаки. Если эти знаки совпадают со знаком  $\Delta$ , то оба знаменателя отрицательны, и уравнение (14) *невозможно* [это значит, что не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (14); то же, разумеется, относится и к уравнению (1)]. Если же знаки  $s_1$  и  $s_2$  противоположны знаку  $\Delta$ , то оба знаменателя в уравнении положительны, и наша линия есть *эллипс*.

Если  $\delta < 0$ , то  $s_1$  и  $s_2$  имеют разные знаки. Знаменатели уравнения (14) имеют разные знаки, и наша линия есть *гипербола*.

Результаты нашего исследования центральной линии могут быть представлены в виде следующей схемы:



### 121. Пример. Исследовать линию

$$10x^2 - 24xy + 17y^2 - 44x + 84y + 78 = 0. \quad (*)$$

Задача исследования линии второго порядка распадается на две части:

- 1) Определить вид линии и её размеры.
- 2) Определить расположение линии относительно координатных осей. Для этого можно указать координаты центра и углы её осей с осью  $X$  или, проще, указать уравнения её осей.

Первая часть задачи может быть решена независимо от второй,

Всякое исследование рекомендуется начинать с вычисления  $\Delta$ ,  $\delta$ ,  $s_1$  и  $s_2$ . Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -12 & -22 \\ -12 & 17 & 42 \\ -22 & 42 & 78 \end{vmatrix} = -1664, \quad \delta = \begin{vmatrix} 10 & -12 \\ -12 & 17 \end{vmatrix} = 26.$$

Составляем характеристическое уравнение  $s^2 - 27s + 26 = 0$ , из которого находим  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 26$ .

Поскольку в данном примере  $B < 0$ , из двух корней характеристического уравнения меньший служит коэффициентом при  $x''^2$ , а больший — при  $y''^2$ . Впрочем, это имеет значение только для второй части задачи, так как уравнения  $x''^2 + 26y''^2 - 64 = 0$  и  $26x''^2 + y''^2 - 64 = 0$  изображаются одной и той же линией, но по-разному расположенной.

Итак, уравнение (\*) приводится к виду [уравнение (12)]

$$x''^2 + 26y''^2 - 64 = 0$$

или

$$\frac{x''^2}{64} + \frac{y''^2}{\frac{32}{13}} = 1. \quad (**)$$

Наша линия есть эллипс с полуосями

$$a = 8, \quad b = \sqrt{\frac{32}{13}} = \frac{4\sqrt{26}}{13} \approx 1,57$$

(мы обозначаем через  $a$  ось, расположенную на оси  $X''$ ; в данном случае она является большой).

Переходим ко второй части задачи. Для того чтобы фактически привести уравнение (\*) к виду (\*\*), надо, прежде всего, перенести начало координат в центр эллипса. Координаты центра определяются из уравнений (2):

$$\begin{aligned} 10\xi - 12\eta - 22 &= 0, \\ -12\xi + 17\eta + 42 &= 0 \end{aligned}$$

(для составления которых используются первые две строки определителя  $\Delta$ ). Решая эти уравнения, находим  $\xi = -5$ ,  $\eta = -6$ .

Далее следует повернуть оси на угол  $\alpha$ , определяемый по формуле (7)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-24}{10 - 17} = \frac{24}{7},$$

причём [согласно (9) и (10)]

$$\sin 2\alpha = \frac{24}{25}, \quad \cos 2\alpha = \frac{7}{25}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{3}{4}.$$

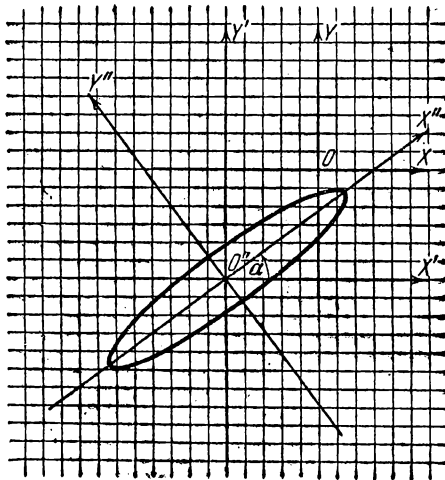
$\operatorname{tg} \alpha$  есть угловой коэффициент оси  $X''$ . Ось  $Y''$  перпендикулярна к оси  $X''$ , т. е. её угловой коэффициент равен  $-\frac{4}{3}$ . Следовательно, уравнения этих осей:

$$y+6=\frac{3}{4}(x+5), \quad y+6=-\frac{4}{3}(x+5)$$

или после упрощений:

$$\begin{aligned} \text{уравнение оси } X'': 3x-4y-9=0; \\ \text{> } Y'': 4x+3y+38=0. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{уравнение оси } X'': 3x-4y-9=0; \\ \text{> } Y'': 4x+3y+38=0. \end{aligned}} \right\} \quad (***)$$

Теперь легко построить эллипс (\*). Строим прямые (\*\*\*) (черт. 102). Откладываем на них найденные ранее величины полуосей и строим



Черт. 102.  $10x^2 - 24xy + 17y^2 - 44x + 84y + 78 = 0$ .

эллипс. Угол  $\alpha$  — острый; без учёта этого замечания есть опасность спутать оси  $X''$  и  $Y''$  и получить неверный чертёж.

Примечание. В случае  $\Delta = 0$  рекомендуется не производить преобразования координат, а действовать, как в примере п 115 [примечание 2 (стр. 207—208)].

### § 3. Нецентральные линии

122. Условие, при котором старшие члены уравнения второй степени представляют полный квадрат. Если линия имеет центр, то его координаты обязательно должны удовлетворять уравнениям (2) § 2 (стр. 207). Но эти уравнения имеют определённое решение только при  $\delta \neq 0$ .



При  $\delta = 0$  уравнения (2) либо противоречивы, либо зависимы. В первом случае линия не имеет центра. Во втором случае она имеет бесконечное множество центров: эти центры образуют прямую, уравнением которой служит любое из уравнений (2).

В этом параграфе мы исследуем уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

при условии

$$\delta = 0. \quad (2)$$

Прежде всего докажем следующую теорему:

*Теорема. Для того чтобы старшие члены уравнения второй степени представляли полный квадрат, необходимо и достаточно, чтобы малый дискриминант  $\delta$  равнялся нулю.*

**Необходимость.** Пусть дано, что старшие члены представляют полный квадрат. Это значит

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (\alpha x + \beta y)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2.$$

Вычисляем для этого выражения  $\delta$ :

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

**Достаточность.** Пусть дано, что малый дискриминант равен нулю:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0. \quad (*)$$

Прежде всего заметим, что в этом случае коэффициенты  $A$  и  $C$  имеют одинаковые знаки, потому что произведение  $AC$  равно положительной величине  $B^2$ . Далее имеем:

$$B = \pm \sqrt{AC}. \quad (**)$$

Если  $A$  и  $C$  положительны, то старшие члены можно записать так:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = Ax^2 \pm 2\sqrt{AC}xy + Cy^2 = (\sqrt{A}x \pm \sqrt{C}y)^2,$$

т. е. они представляют полный квадрат, что и требовалось доказать. Если же  $A$  и  $C$  отрицательны, то выносим из выражения  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  за скобку минус, после чего применяем приведённое рассуждение.

**123. Отнесение линии без центра к оси.** Для определённости введём два условия, касающиеся формы записи уравнения (1). В случае  $\delta = 0$  коэффициенты  $A$  и  $C$  имеют одинаковые знаки. Условимся (если нужно — меняя знаки всех членов уравнения) писать уравнение так, чтобы  $A$  и  $C$  были положительны;

$$A > 0, \quad C > 0. \quad (3)$$

Далее, на основании теоремы предыдущего пункта, можно записать уравнение (1) так:

$$(ax + \beta y)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (4)$$

При этом у нас есть произвол в выборе знаков  $\alpha$  и  $\beta$ , так как от перемены одновременно обоих знаков выражение  $(ax + \beta y)^2$  не изменяется. Условимся всегда выбирать  $\beta$  положительным; при этом знак  $\alpha$  должен совпадать со знаком  $B$ :

$$\left. \begin{array}{l} \beta > 0, \\ \text{знак } \alpha \text{ совпадает со знаком } B. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Повернём систему координат на угол  $\varphi$  \*). Старые координаты выражаются через новые так:

$$\left. \begin{array}{l} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{array} \right\}$$

Подберём угол  $\varphi$  таким образом, чтобы один из членов в скобках, например член с  $y'$ , исчез.

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, поворотом осей можно уничтожить в уравнении второй степени только один член, но в случае  $\delta = 0$  поворотом осей можно уничтожить два члена. В самом деле, выражение  $(ax + \beta y)^2$  по раскрытии скобок даёт три члена уравнения. Если же в скобках один член исчезнет, то по возведении в квадрат получится один член.

При повороте на угол  $\varphi$  выражение  $ax + \beta y$  преобразуется так:

$$\begin{aligned} ax + \beta y &= \alpha (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) + \beta (x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) = \\ &= (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) x' + (-\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) y'. \end{aligned}$$

Приравниваем нулю коэффициент при  $y'$ :

$$-\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (6)$$

Условимся выбирать  $\varphi$  между  $0$  и  $180^\circ$ :

$$0 < \varphi < 180^\circ. \quad (7)$$

В таком случае формула (6) определяет единственный угол. При повороте на этот угол в уравнении останется только один старший член, содержащий  $x'^2$ . Отсутствие члена с произведением  $x'y'$  указывает, что одна из координатных осей параллельна оси симметрии кривой.

---

\*) Мы обозначаем угол поворота через  $\varphi$ , потому что  $\alpha$  обозначает один из коэффициентов уравнения,

Остаётся выяснить, какой вид примет уравнение (1) при повороте осей на угол  $\varphi$ , определяемый формулой (6). Прежде всего находим:

$$\sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (8)$$

причём всегда будем считать:

$$\beta > 0, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 0. \quad (9)$$

Легко понять, что условия (9) совпадают с условиями (5).

Старшие члены преобразуются так:

$$(\alpha x + \beta y)^2 = [(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) x']^2 = \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} x' \right)^2 = (\alpha^2 + \beta^2) x'^2.$$

Остальные коэффициенты вычисляем по формулам (6) § 1 (стр. 211), подставляя вместо  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  соответственно  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  из формул (8) настоящего параграфа:

$$D' = \frac{D\alpha + E\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$E' = \frac{-D\beta + E\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

$$F' = F,$$

и уравнение нашей линии после некоторых упрощений примет вид

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}} x'^2 + 2(D\alpha + E\beta) x' + 2(-D\beta + E\alpha)y + F\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0. \quad (10)$$

Можно исключить вспомогательные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , вернувшись к исходным обозначениям:

$$\alpha = \sqrt{A}, \quad \beta = +\sqrt{C},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = A + C,$$

$$D\alpha + E\beta = D\sqrt{A} + E\sqrt{C} = \frac{1}{\sqrt{C}}(D\sqrt{AC} + EC) = \frac{1}{\sqrt{C}}(BD + CE),$$

$$\begin{aligned} -D\beta + E\alpha &= -D\sqrt{C} + E\sqrt{A} = \frac{1}{\sqrt{C}}(-CD + E\sqrt{AC}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{C}}(BE - CD) \end{aligned}$$

и уравнение (10) примет вид

$$(A + C)^{\frac{3}{2}} x'^2 + 2 \frac{BD + CE}{\sqrt{C}} x' + 2 \frac{BE - CD}{\sqrt{C}} y' + F\sqrt{A + C} = 0,$$

или, умножая на  $\sqrt{C}$  и заменяя  $AC$  через  $B^2$ :

$$(A+C)\sqrt{B^2+C^2}x'^2 + 2(BD+CE)x' + 2(BE-CD)y' + F\sqrt{B^2+C^2} = 0. \quad (11)$$

Остаётся выяснить, какой линией изображается уравнение (11). Здесь могут встретиться два случая:

I случай:  $BE-CD \neq 0$ . В этом случае можно решить уравнение (11) относительно  $y'$ :

$$y' = \frac{(A+C)\sqrt{B^2+C^2}}{2(CD-BE)}x'^2 + \frac{BD+CE}{CD-BE}x' + \frac{F\sqrt{B^2+C^2}}{2(CD-BE)}. \quad (12)$$

Из того, что  $y'$  выражается через  $x'$  в виде квадратного трёхчлена, вытекает, что наша линия есть *парабола*, ось которой параллельна оси  $Y'$ . Уравнение (12) можно ещё упростить, перенеся начало координат в вершину параболы, но мы не будем этого делать, так как уравнение (12) уже достаточно просто для исследования этой параболы. Методами, изложенными в п 98 можно найти вершину параболы; направление её оси нам известно. Этого достаточно, чтобы построить параболу.

II случай:  $BE-CD=0$ . В этом случае уравнение (11) не содержит  $y'$ :

$$(A+C)\sqrt{B^2+C^2}x'^2 + 2(BD+CE)x' + F\sqrt{B^2+C^2} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (12) является квадратным уравнением относительно  $x'$  и даёт для  $x'$  два *постоянных* значения

$$x' = a \quad \text{и} \quad x' = b,$$

т. е. наша линия распадается на пару параллельных прямых (они параллельны оси  $Y'$ ). Впрочем, надлежит ещё исследовать характер корней уравнения (11).

В рассматриваемом случае мы имеем одновременно два равенства

$$\begin{aligned} AC = B^2 \quad \text{или} \quad \frac{A}{B} = \frac{B}{C}, \\ BE = CD \quad \gg \quad \frac{B}{C} = \frac{D}{E}, \end{aligned}$$

которые можно записать в виде цепи пропорций

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}. \quad (14)$$

Пропорции (14) непосредственно показывают, что первые две строки определителя  $\Delta$  пропорциональны, и следовательно,  $\Delta=0$ . Отсюда следует, что линия распадается на пару прямых, что было установлено и непосредственно.

Уравнение (13) может быть упрощено следующим образом. Во-первых, заменяя  $B^2$  через  $AC$ , находим:

$$B^2 + C^2 = AC + C^2 = C(A+C).$$

Во-вторых, из пропорций (14) имеем:

$$BD = AE,$$

следовательно,

$$BD + CE = AE + CE = E(A + C),$$

и уравнение (13) (по сокращении на  $\sqrt{A+C}$ ) принимает вид

$$(A+C)\sqrt{Cx'^2} + 2E\sqrt{A+C}x' + F\sqrt{C} = 0. \quad (15)$$

Решая уравнение (15), находим:

$$x' = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - CF}}{\sqrt{C(A+C)}}. \quad (16)$$

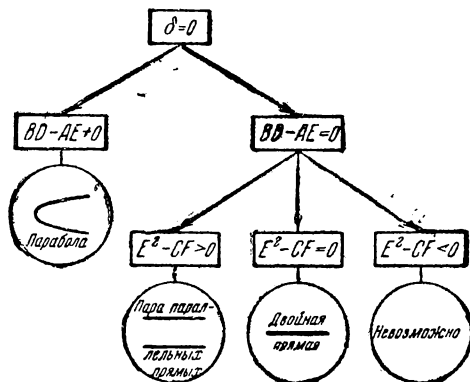
Теперь ясно, что II случай распадается на три:

Па.  $E^2 - CF > 0$ . Корни уравнения (15) действительны и различны. Наша линия — *пара параллельных прямых*.

Пб.  $E^2 - CF = 0$ . Корни уравнения (15) совпадают. Наша линия — *двойная прямая*. Фактически это — одна прямая, но по понятным соображениям её следует считать дважды (если  $E^2 - CF$ , будучи сначала положительным, стремится к нулю, то две параллельные прямые сближаются и в пределе совпадают).

Пс.  $E^2 - CF < 0$ . Корни уравнения (15) — мнимые. Линии не существует [нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (15)]. Для единообразия иногда говорят, что линия распадается на пару *параллельных мнимых прямых*.

Результаты нашего исследования можно представить в виде схемы



Примечание. Предполагается, что все три коэффициента  $A, B, C$  отличны от нуля; в противном случае эта схема неприменима. В силу

равенства  $AC = B^2$  обращаться в нуль могут лишь два коэффициента сразу (либо  $A$  и  $B$ , либо  $C$  и  $B$ ). В этих случаях уравнение (1) не нуждается в преобразованиях, так как сразу видно, что оно изображается параболой, ось которой параллельна соответственно оси  $X$  или  $Y$ , а если при этом соответственно  $D$  или  $E$  равно нулю, то прямыми (действительными, совпадающими или мнимыми), параллельными соответственно оси  $X$  или  $Y$ .

**124. Сводка результатов исследования общего уравнения второй степени.** Все результаты исследования общего уравнения второй степени (как при  $\delta \neq 0$ , так и при  $\delta = 0$ ) представлены в следующей таблице:

	$\delta > 0$ Линия эллиптического типа	$\delta = 0$ Линия параболического типа	$\delta < 0$ Линия гиперболического типа
$\Delta \neq 0$ Линия не распадается	<i>Эллипс</i> 1) Знаки $s_1$ и $s_2$ совпадают со знаком $\Delta$ — невозможно (мнимый эллипс). 2) Знаки $s_1$ и $s_2$ противоположны знаку $\Delta$ — действительный эллипс.	<i>Парабола</i>	<i>Гипербола</i>
$\Delta = 0$ Линия распадается на пару прямых	Точка (пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке)	Пара параллельных прямых 1) $E^2 - CF > 0$ — прямые действительны и различны. 2) $E^2 - CF = 0$ — прямые совпадают. 3) $E^2 - CF < 0$ — прямые мнимые.	Пара пересекающихся прямых

Наименования «линия эллиптического, параболического или гиперболического типа» употребляются, чтобы не исключать случая распада. Так, например, «линия гиперболического типа» есть либо гипербола, либо пара пересекающихся прямых.

**125. О центрах линии параболического типа.** Координаты центра линии второго порядка определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} A\xi + B\eta + D &= 0, \\ B\xi + C\eta + E &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

При  $\delta = 0$ ,  $BE - CD \neq 0$  имеем:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}.$$

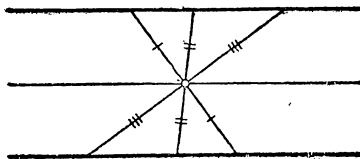
В этом случае уравнения (17) противоречивы. Поэтому *парабола не имеет центра*.

При  $\delta = 0$ ,  $BE - CD = 0$  имеем:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

В этом случае уравнения (17) зависимы. Они имеют бесконечное множество решений, и наша линия имеет бесконечное множество центров. Так как второе уравнение (17) получается умножением первого на некоторый множитель, то любая точка  $(\xi, \eta)$ , координаты которой удовлетворяют первому (а значит и второму) уравнению (17), является центром. Все центры образуют прямую линию, и любое из уравнений (17) есть уравнение этой прямой.

Это свойство иллюстрируется черт. 103. Всякая точка средней прямой между двумя параллельными прямыми обладает свойствами центра.



Черт. 103. Линия центров пары параллельных прямых.

### 126. Число условий, определяющих линию второго порядка.

В общем уравнении второй степени — шесть коэффициентов. Однако параметрами являются не сами коэффициенты, а их отношения. Это ясно из того, что можно умножить уравнение на постоянное число; при этом кривая останется та же, а коэффициенты изменятся. За независимые параметры можно принять, например, отношения каких-нибудь пяти коэффициентов к шестому. Таким образом, *линия второго порядка определяется пятью параметрами*.

Это явление вполне аналогично следующему: в общем уравнении прямой — три члена, но два параметра.

Линия второго порядка *определяется пятью условиями* (т. е. пятью уравнениями, связывающими параметры), например, *заданием пяти точек, через которые она должна проходить*.

**Пример.** Провести кривую второго порядка через точки  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(2, 7)$  и  $(-2, 1)$ .

Разделим общее уравнение на  $A$  и обозначим коэффициенты, которые получатся при  $x$ ,  $y^2$ , ..., соответственно через  $b$ ;  $c$ , ...

$$x^2 + bx + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Если дано, что кривая проходит через некоторую точку  $(x_1, y_1)$ , то координаты этой точки должны удовлетворять написанному

выше уравнению; это даёт нам одно условие, связывающее пять величин  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $f$ .

В данном случае мы имеем следующие пять условий:

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ 4 + 2d + f &= 0, \\ 9 + 15b + 25c + 3d + 5e + f &= 0, \\ 4 + 14b + 49c + 2d + 7e + f &= 0, \\ 4 - 2b + c - 2d + e + f &= 0, \end{aligned}$$

Решая эти уравнения; находим:

$$b = \frac{31}{35}, \quad c = \frac{26}{35}, \quad d = -2, \quad e = -\frac{244}{35}, \quad f = 0.$$

Следовательно, уравнение искомой кривой таково:

$$x^2 + \frac{31}{35}xy + \frac{26}{35}y^2 - 2x - \frac{244}{35}y = 0,$$

или после умножения на 35:

$$35x^2 + 31xy + 26y^2 - 70x - 244y = 0.$$

Могло случиться, что для  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $f$  получились бы бесконечные и неопределённые ответы. Это указывало бы, что коэффициент  $A$ , на который мы разделили уравнение, равен нулю. Тогда следовало бы разделить уравнение на  $B$  или на  $C$ .

Рассмотрим с новой точки зрения вопрос о том, сколько условий надо задать для нахождения определённой окружности. Мы знаем, что для нахождения кривой второго порядка надо иметь пять условий. Если указано, что искомая кривая есть окружность, то тем самым даны два условия:

$$B = 0,$$

$$A = C,$$

и поэтому для нахождения этой кривой надо иметь ещё три условия.

Чтобы найти параболу, надо иметь четыре условия, так как указание, что искомая кривая есть парабола, равносильно условию

$$AC - B^2 = 0.$$

Для нахождения эллипса надо иметь пять условий, так как «условие» того, что кривая есть эллипс

$$AC - B^2 > 0,$$

не есть условие в том смысле, в каком мы употребляем это слово:



это не есть *равенство*, связывающее параметры. Если нам даны пять условий, то мы можем написать уравнение кривой второго порядка; если она окажется не эллипсом, значит, не существует эллипса, удовлетворяющего этим условиям (следует при этом иметь в виду, что может существовать несколько кривых, удовлетворяющих данным пяти условиям, если эти условия суть уравнения не первой степени относительно параметров).

### Задачи

**207.** Исследовать следующие уравнения второй степени:

- a)  $6x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 12y + 5 = 0$ ;
- b)  $8x^2 + 12xy + 3y^2 - 8x + 5 = 0$ ;
- c)  $3x^2 + 4xy + 6y^2 + 42x - 28y + 215 = 0$ ;
- d)  $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 30x - 210y + 975 = 0$ ;
- e)  $8x^2 + 24xy + y^2 - 56x + 18y - 55 = 0$ ;
- f)  $27x^2 + 20xy + 6y^2 + 10x + 2y + 2 = 0$ ;
- g)  $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 6x + 12y + 5 = 0$ ;
- h)  $18x^2 - 12xy + 2y^2 - 21x + 7y - 15 = 0$ ;
- i)  $9x^2 - 30xy + 25y^2 + 12x - 20y + 4 = 0$ ;
- j)  $x^2 + 6xy + 2y^2 + 5x - 3y + 2 = 0$ ;
- k)  $3x^2 - 10xy + 10y^2 + 4x + 14y + 1 = 0$ ;
- l)  $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 10x - 6y + 2 = 0$ .

**208.** Провести кривую второго порядка через точки  $A(5, 2)$ ,  $B(0, 5)$ ,  $C(-2, 3)$ ,  $D(-3, 2)$  и  $E(2, -2)$ .

**209.** Провести параболу через точки  $A(8, 7)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(3, 0)$  и  $D(6, 0)$ .

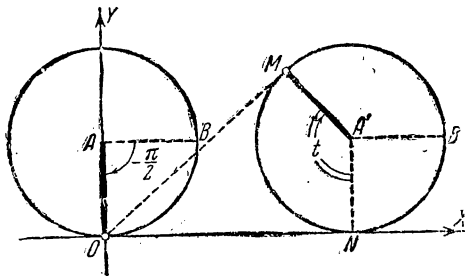
---

## ГЛАВА VIII

### ЦИКЛОИДАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И СПИРАЛИ

#### § 1. Циклоидальные кривые

**127. Обыкновенная циклоида.** *Обыкновенной циклоидой (или просто циклоидой) называется кривая, которую описывает какая-нибудь точка окружности, катящейся без скольжения\*) по прямой линии (черт. 104).*



Черт. 104. Образование циклоиды.

Выведем уравнение циклоиды. Примем за ось  $X$  прямую, по которой катится окружность. Примем за начальное положение окружности то положение, при котором точка  $M$ , описывающая циклоиду, находится на оси  $X$ ; примем эту точку за начало координат (черт. 104). Радиус «производящего» круга обозначим через  $r$ .

Пусть теперь читатель представит себе, что круг катится по оси  $X$  вправо. В этом круге имеется радиус  $AO$ , который следует представлять себе как спицу, твёрдо связанную с кругом; конец этой спицы описывает циклоиду. Допустим, что круг повернулся на угол  $t$ . Это значит, что наша спица, которая первоначально была в вертикальном положении, теперь образует угол  $t$  с радиусом  $A'N$ , идущим в точку касания. Если мы выразим координаты точки  $M$  через  $t$ , то тем самым мы получим параметрические уравнения циклоиды.

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{пр}_X \overline{OM} = \text{пр}_X \overline{ONA'M} = \text{пр}_X \overline{ON} + \text{пр}_X \overline{NA'} + \text{пр}_X \overline{A'M}, \\ y &= \text{пр}_Y \overline{OM} = \text{пр}_Y \overline{ONA'M} = \text{пр}_Y \overline{ON} + \text{пр}_Y \overline{NA'} + \text{пр}_Y \overline{A'M}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Проекции векторов  $\overline{ON}$  и  $\overline{NA'}$  на оси координат очевидны, если заметить, что длина вектора  $\overline{ON}$  равна длине дуги  $\widehat{NM}$ , которая, в свою очередь, равна  $rt$  \*\*). Относительно вектора  $\overline{A'M}$  заметим, что он наклонён к оси  $X$  под углом —  $\frac{\pi}{2} - t$  (потому что в начальном положении  $\overline{AO}$  он был наклонён к оси  $X$

\*) Слова «без скольжения» обозначают следующее: при повороте круга на любую дугу он перемещается по прямой на отрезок, длина которого равна длине этой дуги.

\*\*) Формула  $\widehat{NM} = rt$  справедлива, если угол измеряется в радианах. Таким образом, и в дальнейшем мы обязаны измерять углы в радианах.

под углом  $-\frac{\pi}{2}$ , а затем он повернулся на угол  $t$  по часовой стрелке); следовательно, к оси  $Y$  вектор  $A'M$  наклонён под углом  $(-\frac{\pi}{2} - t) - \frac{\pi}{2} = -(\pi + t)$  [гл. I, § 3, формула (3) (стр. 54)].

Теперь продолжаем равенства (\*):

$$x = rt + 0 + r \cos(-\frac{\pi}{2} - t) = r(t - \sin t),$$

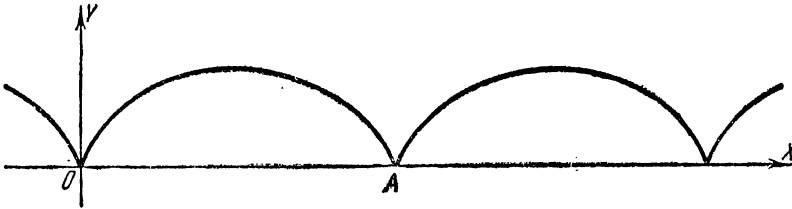
$$y = 0 + r + r \cos(\pi + t) = r(1 - \cos t).$$

Эти равенства являются параметрическими уравнениями циклоиды:

$$\left. \begin{aligned} x &= r(t - \sin t), \\ y &= r(1 - \cos t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Параметр  $t$  есть угол поворота производящего круга, соответствующий данной точке  $(x, y)$ .

Циклоида состоит из бесконечного числа «арок». Отрезок  $OA$ , равный длине окружности производящего круга (черт. 105), называется «базой» циклоиды.



Черт. 105. Циклоида.

На черт. 106 изображена одна арка циклоиды, причём около отдельных точек отмечены значения параметра  $t$ , соответствующие этим точкам. Для построения взяты значения  $t=0; 0,5; 1,0; \dots$  (см. сноску на стр. 68) и вычислены  $x$  и  $y$  по формулам (1). За единицу принято 10 клеток.

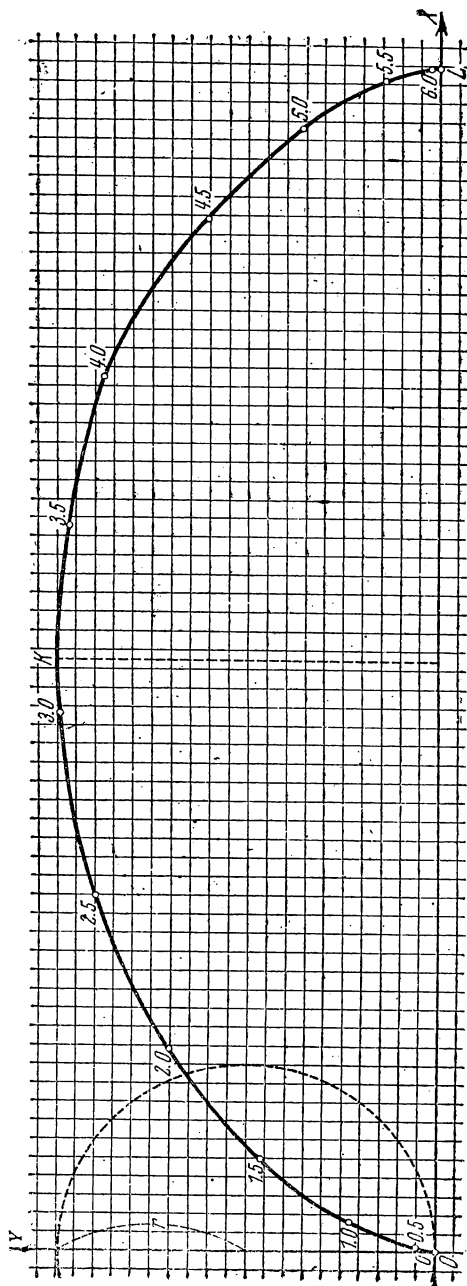
**128. Укороченная и удлинённая циклоиды.** Кривая, которую описывает точка, лежащая на радиусе (не на окружности, а ближе к центру) круга, катящегося без скольжения по прямой, называется укороченной циклоидой.

Уравнения укороченной циклоиды выводятся так же, как уравнения обыкновенной циклоиды, но отрезок  $A'M$  (см. черт. 104 и соответствующее рассуждение) равен не  $r$ , а  $l$  (причём  $l < r$ ). Повторив с соответствующим изменением прежнее рассуждение, получим уравнения укороченной циклоиды:

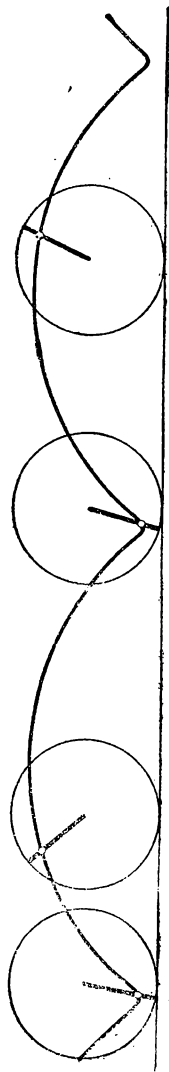
$$\left. \begin{aligned} x &= rt - l \sin t, \\ y &= r - l \cos t \end{aligned} \right\} \quad (l < r). \quad (2)$$

Укороченная циклоида изображена на черт. 107:

Точка, лежащая на продолжении радиуса круга, катящегося без скольжения по прямой, описывает кривую, называемую удлинённой циклоидой. Читатель теперь сам сообразит, что если обозначить через  $l$  рас-



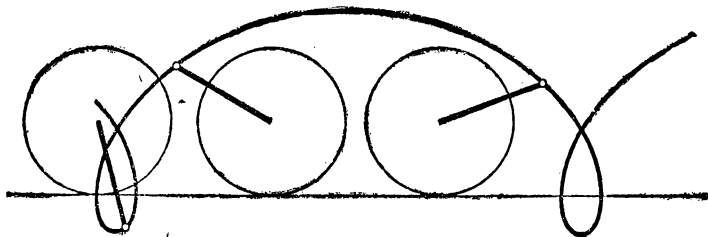
Черт. 106.  $x = r(t - \sin t)$ ,  $y = r(1 - \cos t)$ .



Черт. 107. Укороченная циклоида.

стояние этой точки от центра (причём  $l > r$ ), то уравнения удлинённой циклоиды напишутся так же, как уравнения укороченной циклоиды.

Удлинённая циклоида изображена на черт. 108.



Черт. 108. Удлинённая циклоида.

Итак, уравнения обыкновенной, укороченной и удлинённой циклоид имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= rt - l \sin t \\ y &= r - l \cos t \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } l < r \text{ укороченная циклоида} \\ &» \quad l = r \text{ обыкновенная} \\ &» \quad l > r \text{ удлинённая} \end{aligned} \quad (3)$$

**129. Эпициклоида.** Если круг катится без скольжения по другому кругу, касаясь его внешним образом, то кривая, которую описывает всякая точка окружности катящегося круга, называется эпициклоидой.

Примем за начальное положение катящегося круга то положение, при котором точки  $M$ , описывающая эпициклоиду, является точкой касания обоих кругов (черт. 109). За ось  $X$  примем линию центров обоих кругов в начальном положении, начало координат поместим в центре неподвижного круга. Обозначим через  $R$  радиус неподвижного круга, а через  $r$  — радиус катящегося круга (это не значит, что  $r < R$ : оба радиуса могут быть какие угодно).

Допустим, что катящийся круг через некоторое время занял новое положение с центром в  $A'$ . Обозначим угол  $\angle AOA'$  через  $t$ . Обозначим через  $\psi$  угол, на который повернулся радиус  $AM$ :

$$\angle LA'M' = \psi,$$

Черт. 109. Образование эпициклоиды.

где  $A'L$  проведено параллельно старому положению  $AM$ , т. е. отрицательному направлению оси  $X$ , а  $A'M'$  — новое положение радиуса  $AM$ .

Так как

$$\angle LA'N = t,$$

$$\angle NA'M' = \psi - t.$$

Ввиду того, что круг катится без скольжения, имеем:

$$\widetilde{MN} = M'N,$$

или

$$Rt = r(\psi - t),$$

откуда

$$\psi = \frac{R+r}{r} t = \left(\frac{R}{r} + 1\right) t.$$

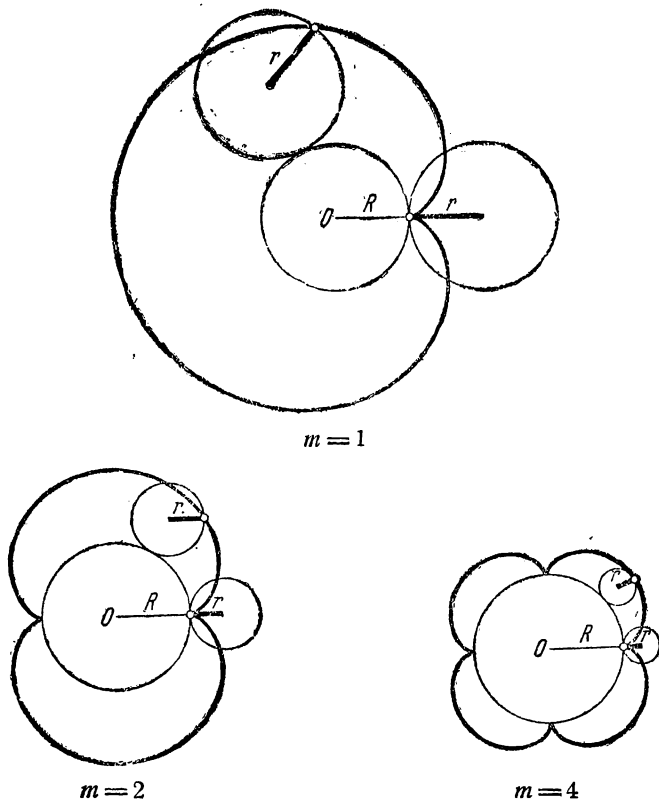
Обозначая

$$\frac{R}{r} = m, \tag{4}$$

получим:

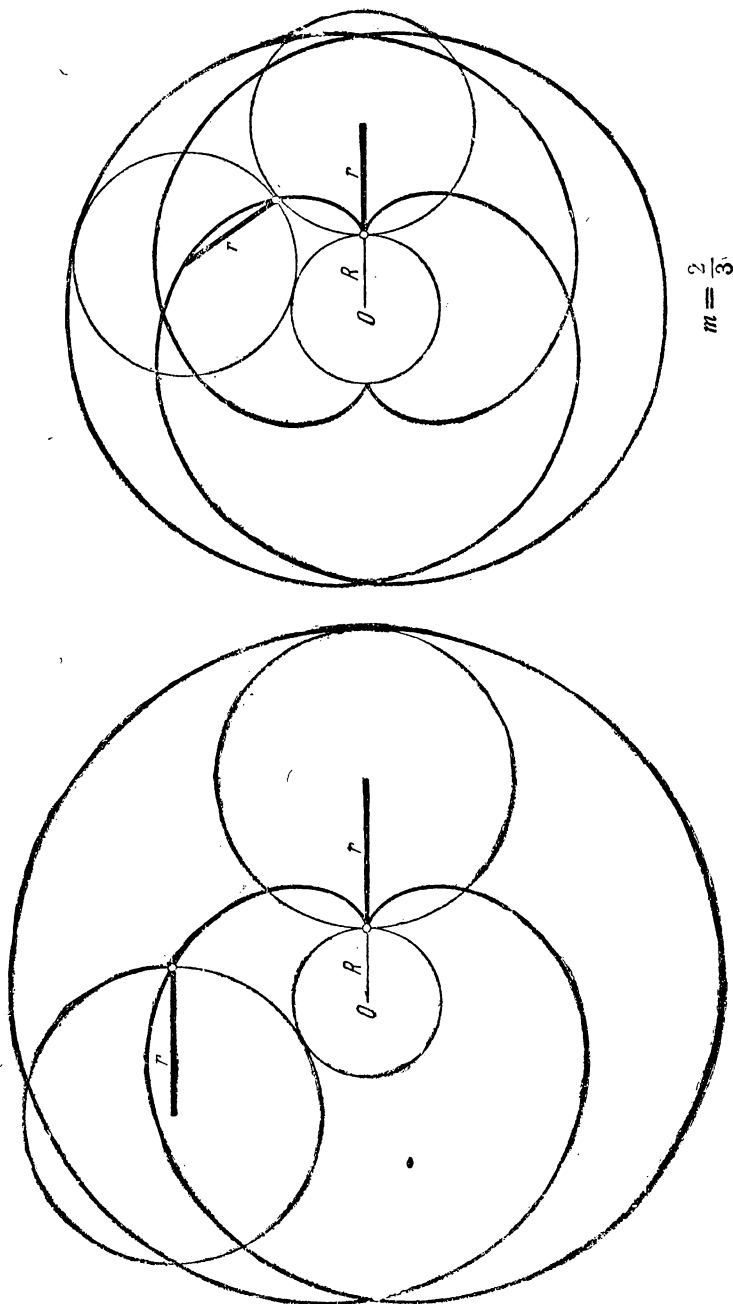
$$\psi = (m + 1) t.$$

Чтобы выразить через  $t$  текущие координаты эпициклоиды, т. е. координаты точки  $M'$ , описывающей эпициклоиду, следует спроектировать лома-



Черт. 110. а) Эпициклоиды с целым  $m$ .

ную  $OA'M'$  на оси координат. Заметим, что радиус  $AM$  в начальном положении образовывал с осью  $X$  угол  $180^\circ$ . После того как он повернулся ещё на



$$m = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

Черт. 110. б) Эпициклоиды с дробным  $m$ .

угол  $\psi$  в положительном направлении (против часовой стрелки), он образует с осью  $X$  угол:

$$180^\circ + \psi = 180^\circ + (m + 1)t.$$

Запишем длины звеньев ломаной  $OA'M'$  и их углы с осями координат в следующей таблице:

	Длина	Угол с осью $X$	Угол с осью $Y$
Звено $\overline{OA'}$	$R + r$	$t$	$t - 90^\circ$
Звено $\overline{A'M'}$	$r$	$180^\circ + (m + 1)t$	$[180^\circ + (m + 1)t] - 90^\circ = 90^\circ + (m + 1)t$

Проектируем  $OA'M'$  на оси координат:

$$\begin{aligned} x = \text{пр}_X OA'M' &= (R + r) \cos t + r \cos [180^\circ + (m + 1)t] = \\ &= (R + r) \cos t - r \cos (m + 1)t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \text{пр}_Y OA'M' &= (R + r) \cos (t - 90^\circ) + r \cos [90^\circ + (m + 1)t] = \\ &= (R + r) \sin t - r \sin (m + 1)t. \end{aligned}$$

Вынося за скобки  $r$  и заменяя  $\frac{R}{r}$  через  $m$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= r [(m + 1) \cos t - \cos (m + 1)t], \\ y &= r [(m + 1) \sin t - \sin (m + 1)t]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Уравнения (5) суть параметрические уравнения эпициклоиды. Здесь  $r$  есть радиус катящегося круга,  $m$  — отношение радиуса неподвижного круга к радиусу катящегося круга,  $t$  есть угол наклона к оси  $X$  радиуса-вектора, проведённого в точку, в которой касались круги в тот момент, когда точка, описывающая эпициклоиду, находилась в положении, соответствующем данному значению  $t$ .

На черт. 110 а и б изображены эпициклоиды для значений  $m = 1, 2, 4, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ .

При иррациональном значении  $m$  точка  $M$  никогда не вернётся в начальное положение  $(R, 0)$ , и следовательно, при качении круга она будет описывать эпициклоиду, чертя всё новые завитки и никогда не идя по уже пройденному пути. В самом деле, если бы точка  $M$  пришла в начальное положение, то это значило бы, что длина неподвижной окружности, взятая некоторое целое число раз ( $q$  раз), равна длине катящейся окружности, взятой некоторое целое число раз ( $p$  раз), т. е.

$$2\pi R \cdot q = 2\pi r \cdot p,$$

откуда

$$\frac{R}{r} = \frac{p}{q},$$

т. е. отношение  $m = \frac{R}{r}$  выражалось бы рациональным числом.



**130. Кардиоиды.** Эпициклоида при  $m = 1$  называется кардиоидой. Таким образом, кардиоиды есть кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по равной окружности, касаясь её внешним образом. Уравнения кардиоиды получим, подставляя в (5)  $m = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= r(2 \cos t - \cos 2t), \\ y &= r(2 \sin t - \sin 2t). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для получения обычного (не в параметрической форме) уравнения кардиоиды следует исключить  $t$  из уравнений (6). Возводим эти уравнения в квадрат:

$$x^2 = r^2(4 \cos^2 t - 4 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t),$$

$$y^2 = r^2(4 \sin^2 t - 4 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t).$$

Складываем эти уравнения:

$$x^2 + y^2 = r^2[4 - 4(\cos t \cdot \cos 2t + \sin t \cdot \sin 2t) + 1] = r^2(5 - 4 \cos t).$$

Находим из этого равенства  $\cos t$ :

$$\cos t = -\frac{x^2 + y^2 - 5r^2}{4r^2}.$$

Теперь вычисляем  $\cos 2t$ :

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1 = 2 \left( \frac{x^2 + y^2 - 5r^2}{4r^2} \right)^2 - 1 = \frac{(x^2 + y^2 - 5r^2)^2 - 8r^4}{8r^4}.$$

Подставляем найденные значения  $\cos t$  и  $\cos 2t$  в первое уравнение (7):

$$x = r \left[ -2 \frac{x^2 + y^2 - 5r^2}{4r^2} - \frac{(x^2 + y^2 - 5r^2)^2 - 8r^4}{8r^4} \right].$$

После обычных упрощений получим:

$$(x^2 + y^2 - 5r^2)^2 + 4r^2(x^2 + y^2 - 5r^2) + 8r^3x - 8r^4 = 0.$$

Это уравнение показывает, что кардиоиды — алгебраическая кривая четвёртого порядка. Оно может быть упрощено, если перенести начало координат в точку  $(r, 0)$ ; тогда оси координат займут положение, показанное на черт. 111. Формулы преобразования координат будут:

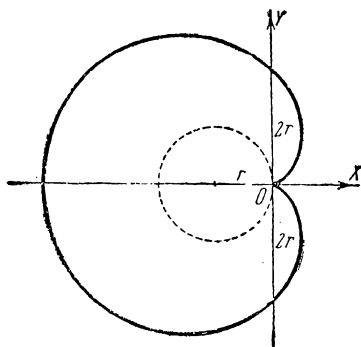
$$x = x' + r, \quad y = y',$$

и уравнение кардиоиды примет вид

$$(x'^2 + y'^2 + 2rx' - 4r^2)^2 + 4r^2(x'^2 + y'^2 + 2rx' - 4r^2) + 8r^3(x' + r) - 8r^4 = 0.$$

Производя в нём алгебраические упрощения и заменяя в окончательном результате новые координаты через  $x$  и  $y$ , получим:

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (7)$$



Черт. 111. Кардиоиды:

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Кардиоида имеет весьма простое полярное уравнение. Переходя в уравнении (7) к полярным координатам, получим:

$$(\rho^2 + 2r \cos \vartheta)^2 - 4r^2 \rho^2 = 0 \quad \text{или} \quad \rho^2 [(\rho + 2r \cos \vartheta)^2 - 4r^2] = 0,$$

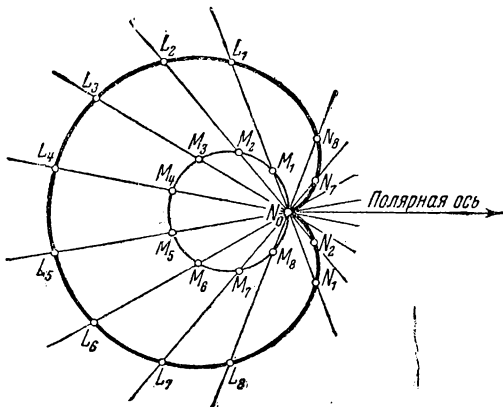
откуда либо

$$\rho = 0,$$

либо

$$\rho = 2r(\pm 1 - \cos \vartheta). \quad (**)$$

Первое решение  $\rho = 0$  объясняется тем, что всякий луч, выходящий из полюса, встречает кардиоиду в полюсе. Второе решение даёт для  $\rho$  два значения:



Черт. 112. Кардиоида:  $\rho = 2r(1 - \cos \vartheta)$ .

луч с полярным углом  $180^\circ + \vartheta$  и отложить на нём положительную величину  $-\rho_2$ :  $-\rho_2 = 2r(1 + \cos \vartheta)$ , но первое уравнение при полярном угле  $180^\circ + \vartheta$  даёт ту же самую точку

$$\rho_1 = 2r[1 - \cos(180^\circ + \vartheta)] = 2r(1 + \cos \vartheta).$$

Итак, полярное уравнение кардиоиды таково:

$$\rho = 2r(1 - \cos \vartheta). \quad (8)$$

Из полярного уравнения можно усмотреть новый геометрический способ образования кардиоиды. Вернёмся к уравнению (\*\*) и запишем его так:

$$\rho = -2r \cos \vartheta \pm 2r. \quad (***)$$

Если отбросить член  $\pm 2r$ , то оставшееся уравнение

$$\rho = -2r \cos \vartheta \quad (\dagger)$$

будет изображаться окружностью, изображённой пунктиром на черт. 111\*). Сравнивая уравнения (†) и (\*\*\*), приходим к следующему способу построения кардиоиды: из точки  $O$ , лежащей на окружности, проведём множество лучей (черт. 112) и обозначим через  $M_1, M_2, M_3, \dots$  точки пересечения этих

\*) Ср. с уравнением (1) гл. V § 2 (стр. 137). Вследствие изменения знака  $\rho$  окружность расположена не как на черт. 64 (стр. 137), а как на черт. 111.

лучей с окружностью.  $OM_i$  есть радиус-вектор точки окружности; следовательно, он выражается по формуле (†). Чтобы получить радиус-вектор точки кардиоиды, надо к  $OM_i$  прибавить или вычесть  $2r$ . Итак, на каждом луче откладываем в обе стороны от точки  $M_i$  один и тот же отрезок, равный диаметру окружности:

$$M_i L_i = M_i N_i = 2r.$$

Точки  $L_1, L_2, L_3, \dots, N_1, N_2, N_3, \dots$  суть точки кардиоиды.

**131. Улитка Паскаля.** Построение кардиоиды, приведённое в конце предыдущего пункта, может быть обобщено следующим образом. Будем откладывать на каждом луче в обе стороны от точки пересечения с окружностью постоянный отрезок  $b$  (вообще говоря, не равный  $2r$ ):

$$M_i L_i = M_i N_i = b.$$

Геометрическое место точек  $L_i$  и  $N_i$  называется *улиткой Паскаля*.

Выполняя указанное построение, мы видим, что улитка Паскаля имеет вид, изображённый на черт. 113а (при  $b < 2r$ ) или 113б (при  $b > 2r$ ).

Из самого способа получения улитки Паскаля ясно, что её полярное уравнение таково:

$$\rho = -2r \cos \vartheta \pm b. \quad (9)$$

Преобразуем уравнение улитки Паскаля к декартовым координатам

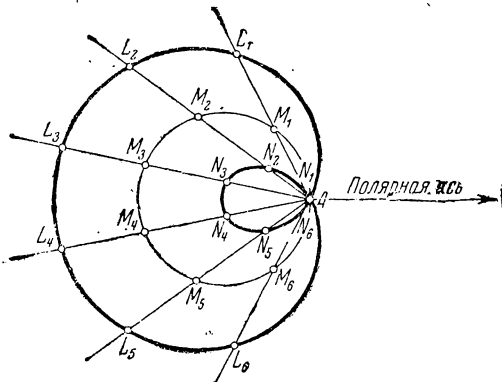
$$\sqrt{x^2 + y^2} = -2r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm b,$$

или, после небольших преобразований,

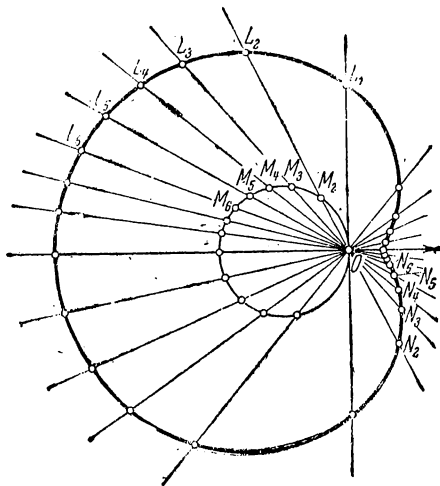
$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 - b^2 (x^2 + y^2) = 0. \quad (10)$$

При  $b = 2r$  улитка Паскаля становится кардиоидой, и уравнение (10) превращается в уравнение (7).

Улитка Паскаля при  $b \neq 2r$  не является эпициклоидой. Кардиоида является одновременно частным случаем улитки Паскаля и частным случаем кардиоиды.

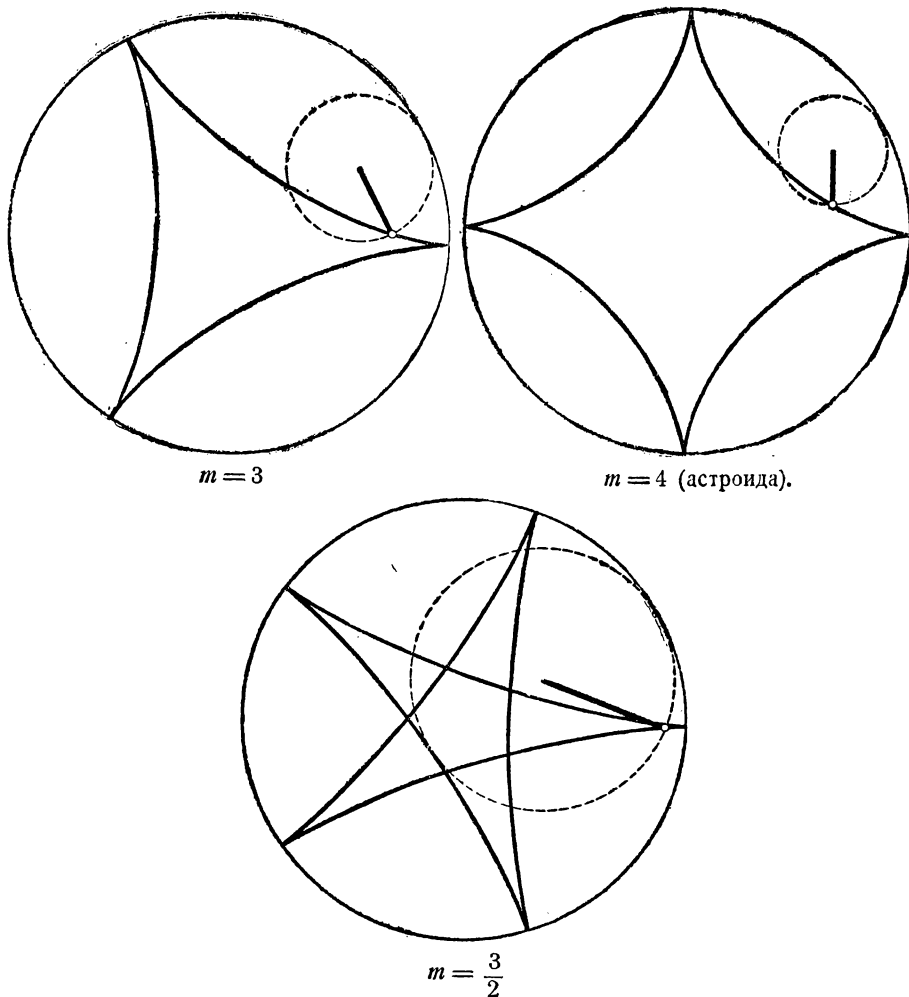


Черт. 113. а) Улитка Паскаля:  
 $\rho = -2r \cos \vartheta \pm b$  ( $b < 2r$ ).



Черт. 113. б) Улитка Паскаля:  
 $\rho = -2r \cos \vartheta \pm b$  ( $b > 2r$ ).

**132. Гипоциклоида.** Если круг катится без скольжения по другому кругу, касаясь его внутренним образом, то кривая, которую описывает всякая точка окружности катящегося круга, называется *гипоциклоидой*.



Черт. 114. Гипоциклоиды.

Для гипоциклоиды, как и для эписциклоиды, мы будем обозначать радиус неподвижного круга через  $R$ , радиус катящегося круга через  $r$ , а их отношение  $\frac{R}{r}$  через  $m$ ; для гипоциклоиды, разумеется,  $R > r$  и  $m > 1$ .

На черт. 114 изображены гипоциклоиды для  $m=3$ , 4,  $\frac{3}{2}$ .

Для гипоциклоиды с иррациональным  $m$  сохраняет силу то же замечание, которое было сделано для эпициклоиды с иррациональным  $m$ .

Для вывода уравнения гипоциклоиды обратимся к черт. 115. Примем за начальное то положение катящегося круга, при котором точка  $M$ , описывающая гипоциклоиду, находится на неподвижной окружности, и примем прямую  $OM$  за ось  $X$ ; начало поместим в центре неподвижного круга.

Пусть через некоторое время катящийся круг займёт положение с центром в  $A'$ . Обозначим

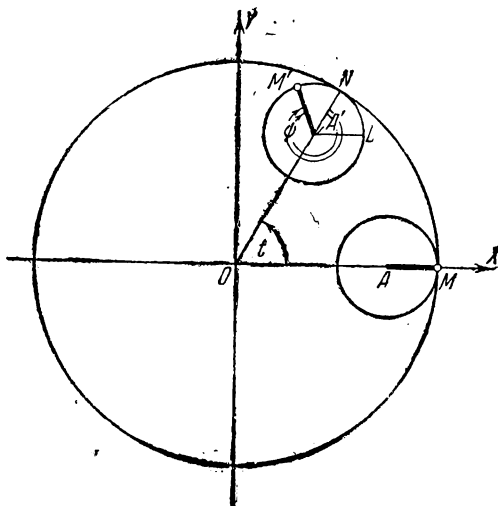
$$\angle AOA' = t, \quad \angle NA'M' = \psi^*)$$

и проведём радиус  $A'L$  параллельно начальному положению  $AM$ , т. е. параллельно положительному направлению оси  $X$ . Так как круг катится без скольжения, то

$$\widetilde{MN} = \widetilde{M'LN},$$

или  $Rt = r\psi$ , откуда

$$\psi = \frac{R}{r} t = mt.$$



Черт. 115. Образование гипоциклоиды.

Так как  $\angle LA'N = t$ , то  $\angle LA'M'$  по величине равен  $\psi - t$ , но так как радиус  $A'M'$  повернулся от положительного направления оси  $X$ , т. е. от  $A'L$ , в отрицательном направлении (по часовой стрелке), то угол  $A'M'$  с осью  $X$  следует считать равным

$$-(\psi - t) = -(mt - t) = -(m - 1)t.$$

Составляем таблицу:

	Длина	Угол с осью $X$	Угол с осью $Y$
Звено $\overline{OA'}$	$R - r$	$t$	$t - 90^\circ$
Звено $\overline{A'M'}$	$r$	$-(m - 1)t$	$-(m - 1)t - 90^\circ$

\*) Здесь имеется в виду угол, отсчитанный от  $A'N$  к  $A'M'$  в том направлении, в каком поворачивался радиус  $AM$  при качении круга, т. е. по часовой стрелке.

Проектируем ломаную  $OA'M'$  на оси координат:

$$\begin{aligned}x &= \text{пр}_X OA'M' = (R - r) \cos t + r \cos [-(m - 1)t] = \\&= (R - r) \cos t + r \cos (m - 1)t, \\y &= \text{пр}_Y OA'M' = (R - r) \cos (t - 90^\circ) + [\cos r - (m - 1)t - 90^\circ] = \\&= (R - r) \sin t - r \sin (m - 1)t.\end{aligned}$$

Выносим за скобки  $r$  и заменяем  $\frac{R}{r}$  через  $m$ :

$$\begin{aligned}x &= r[(m - 1) \cos t + \cos (m - 1)t], \\y &= r[(m - 1) \sin t - \sin (m - 1)t].\end{aligned} \quad (11)$$

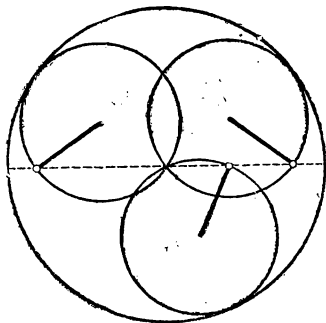
Уравнения (11) и суть параметрические уравнения гипоциклоиды; геометрический смысл  $r$ ,  $m$  и  $t$  — тот же, что и для эпициклоиды.

**133. Теорема Кардана.** Рассмотрим некоторые частные виды гипоциклоид.

Если  $m = 1$ , т. е.  $R = r$ , то уравнения (11) дают:

$$x = r, \quad y = 0.$$

Геометрически это вполне ясно: при  $m = 1$  круги совпадают, и внутренний круг не может катиться без скольжения по внешнему; точка  $M$  остаётся всё время в положении  $(r, 0)$ .



Черт. 116. Теорема Кардана.

При  $m = 2$ , т. е.  $R = 2r$ , имеем:

$$\begin{aligned}x &= 2r \cos t, \\y &= 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что гипоциклоида превращается в диаметр круга. При изменении  $t$   $x$  изменяется от  $2r = R$  до  $-2r = -R$ , а  $y$  равно нулю. Мы получаем следующую теорему Кардана\*).

*Если круг катится изнутри без скольжения по кругу вдвое большего радиуса, то каждая точка окружности катящегося круга описывает диаметр неподвижного круга (черт. 116).*

**134. Астроида.** При  $m = 4$ , т. е.  $R = 4r$ , получим гипоциклоиду с четырьмя заострениями, называемую также астроидой (черт. 114). Уравнения (11) при  $m = 4$  дадут нам параметрические уравнения астроиды:

$$\begin{aligned}x &= r(3 \cos t + \cos 3t), \\y &= r(3 \sin t - \sin 3t).\end{aligned}$$

Воспользовавшись тригонометрическими формулами

$$\begin{aligned}\cos 3t &= 4 \cos^3 t - 3 \cos t, \\ \sin 3t &= 3 \sin t - 4 \sin^3 t,\end{aligned}$$

\* ) Иероним Кардан (1501 — 1576) — итальянский математик.

мы приведём уравнения астрои́ды к виду

$$x = 4r \cos^3 t,$$

$$y = 4r \sin^3 t,$$

или, замечая, что  $4r = R$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos^3 t, \\ y &= R \sin^3 t. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Нетрудно исключить из этих уравнений  $t$ . Для этого возводим оба уравнения в степень  $\frac{2}{3}$ :

$$x^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}} \cos^2 t, \quad y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}} \sin^2 t,$$

и складываем их:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}. \quad (13)$$

Это есть неявное уравнение астрои́ды.

### Упражнения

**210.** Построить по точкам циклоиду

$$\left. \begin{aligned} x &= t - \sin t, \\ y &= 1 - \cos t, \end{aligned} \right\}$$

изменяя  $t$  от 0 до  $6,3$  через  $0,1$ .

**211.** Построить по точкам эпициклоиду

$$\left. \begin{aligned} x &= r[(m+1) \cos t - \cos(m+1)t], \\ y &= r[(m+1) \sin t - \sin(m+1)t] \end{aligned} \right\}$$

при

$$\text{a) } m = \frac{1}{2}; \quad \text{b) } m = \frac{2}{3}; \quad \text{c) } m = 1;$$

$$\text{d) } m = 2; \quad \text{e) } m = 4.$$

В каждом случае изменять  $t$  через  $10^\circ$ , выбирая границу изменения  $t$  так, чтобы получить всю эпициклоиду;  $r$  выбрать в зависимости от желаемых размеров чертежа.

**212.** Построить по точкам гипоциклоиду

$$\left. \begin{aligned} x &= r[(m-1) \cos t + \cos(m-1)t], \\ y &= r[(m-1) \sin t - \sin(m-1)t] \end{aligned} \right\}$$

при

$$\text{a) } m = 3; \quad \text{b) } m = 4; \quad \text{c) } m = \frac{3}{2}.$$

(См. замечание в конце предыдущего упражнения.)

## Задачи

## 213. Циклоида

$$\left. \begin{aligned} x &= r(t - \sin t), \\ y &= r(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}$$

сдвинута влево на  $\pi r$  и отражена в оси  $X$ . Написать уравнение получившейся циклоиды.

## 214. Найти точки пересечения дуги циклоиды

$$\left. \begin{aligned} x &= t - \sin t, \\ y &= 1 - \cos t \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

с прямой  $y = 1,5$ .

## 215. Какого порядка астроида?

216. Окружность катится без скольжения по окружности вдвое большего радиуса, касаясь её внутренним образом. В малой окружности проведён диаметр, неподвижно с ней связанный. Какую линию описывает всякая внутренняя точка этого диаметра?

## 217. Провести касательную:

а) к циклоиде  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  при  $t = \frac{\pi}{6}$ ;

б) к циклоиде  $x = r(t - \sin t)$ ,  $y = r(1 - \cos t)$  в точке  $(0, 0)$ .

218. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде  $x = r(t - \sin t)$ ,  $y = r(1 - \cos t)$  в любой её точке.

219. Доказать, что нормали к циклоиде в любой её точке  $M$  проходят через точку касания производящего круга и прямой, по которой он катится. Пояснение: для каждой точки  $M$  следует брать то положение производящего круга, которое соответствует этой точке.

## 220. Провести касательную:

а) к дуге циклоиды  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) параллельно биссектрисе нормального координатного угла;

б) к дуге циклоиды  $x = 2(t - \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) перпендикулярно к прямой  $3x - 2y + 5 = 0$ ;

с) к астроиде  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$  параллельно биссектрисе координатного угла, проходящей в чётных четвертях.

## 221. Доказать, что отрезок касательной к астроиде

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

заключённый между осями координат, постоянен.

## § 2. Спирали

135. **Архимедова спираль.** Пусть прямая  $a$  равномерно вращается вокруг своей точки  $O$ . Если при этом некоторая точка  $M$  равномерно движется по прямой  $a$ , то она (точка  $M$ ) описывает *архимедову спираль*; архимедова спираль была рассмотрена в п 68.

Из определения архимедовой спирали следует, что если полярный угол возрастает в арифметической прогрессии, то и радиус-вектор возрастает в арифметической прогрессии. Отсюда вытекает простой способ для построения архимедовой спирали. Строим равные углы  $\widehat{1O2} = \widehat{2O3} = \widehat{3O4} = \dots$  \*)

\*) Если имеют в виду построить более одного оборота спирали, то за величину этих углов удобно принять *целую часть полного оборота*.



(черт. 117) и откладываем на лучах  $O1, O2, O3, \dots$  радиусы-векторы в арифметической прогрессии, т. е. на луче  $O1$  откладываем нуль, на луче  $O2$  — произвольный отрезок  $a$ , на луче  $O3$  откладываем  $2a$  и т. д. Соединяя концы этих радиусов-векторов плавной линией, получим архимедову спираль.

**136. Логарифмическая спираль.** Линия, у которой радиусы-векторы возрастают в геометрической прогрессии, в то время как полярные углы возрастают в арифметической прогрессии, называется логарифмической спиралью. Из этого определения ясно построение логарифмической спирали. Отложим на прямой  $O1$  произвольный отрезок  $a$ , на прямой  $O2$  —  $ka$  ( $k$  знаменатель прогрессии), на  $O3$  —  $k^2a$  и т. д. На черт. 117 (см. сплошную линию) радиус-вектор удваивается при увеличении полярного угла на  $\frac{\pi}{8}$ .

Чтобы осуществить умножение радиусов-векторов на постоянную величину  $k$ , нет надобности знать их числовую величину, а можно воспользоваться следующим построением. Берём на прямой  $O1$  произвольную точку  $A_1$  (черт. 118) и проводим из неё прямую под углом  $\beta$  к  $O1$  до пересечения с  $O2$  в точке  $A_2$ . Из  $A_2$  проводим прямую под тем же углом  $\beta$  к  $OA_2$  до пересечения с  $O3$  в точке  $A_3$  и т. д. Принимая во внимание, что углы при точке  $O$  тоже равны между собой, мы заключим, что треугольники  $OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, \dots$  подобны между собой, откуда

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OA_3}{OA_2} = \frac{OA_4}{OA_3} = \dots = k,$$

где  $k$  есть общая величина всех этих отношений. Отсюда ясно, что отрезки  $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, \dots$  образуют геометрическую прогрессию, так как

$$OA_2 = k \cdot OA_1,$$

$$OA_3 = k \cdot OA_2 = k^2 \cdot OA_1,$$

$$OA_4 = k \cdot OA_3 = k^3 \cdot OA_1,$$

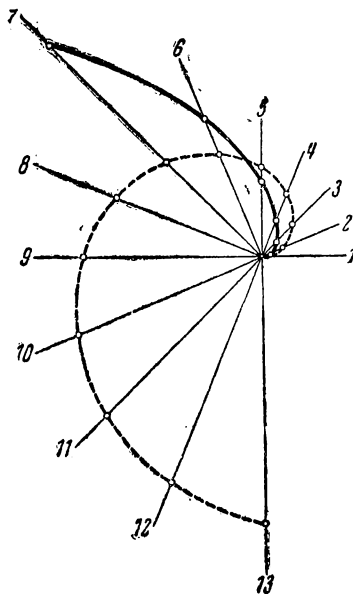
$$\dots \dots \dots$$

Выведем уравнение логарифмической спирали в полярных координатах. Если обозначить углы при точке  $O$  через  $\alpha$ :

$$\angle 1O2 = \angle 2O3 = \angle 3O4 = \dots = \alpha,$$

начальный радиус-вектор через  $a$ :

$$OA_1 = a,$$

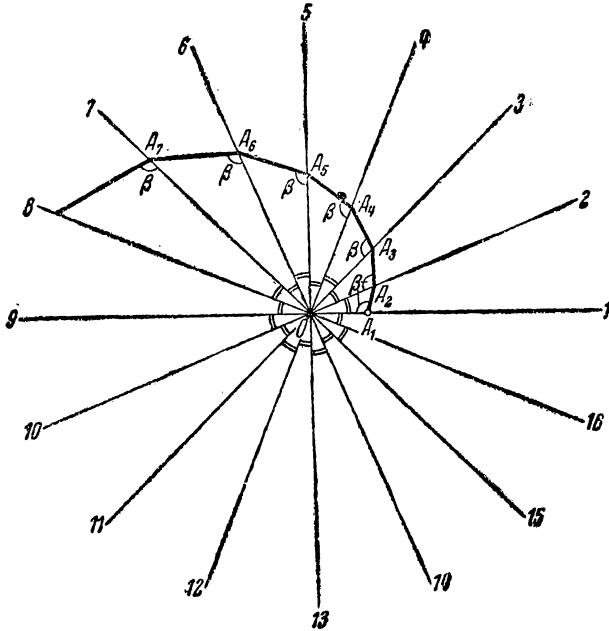


Черт. 117. Пунктирная линия: архимедова спираль. Сплошная линия: логарифмическая спираль.

и знаменатель прогрессии через  $k$ , то будем иметь:

полярному углу 0	соответствует	радиус-вектор	$a$ ,
»	»	$\alpha$	» $ka$ ,
»	»	$2\alpha$	» $k^2a$ ,
.....	.....	.....	.....
»	»	$n\alpha$	» $k^na$ ,

причём  $n$  может принимать любые (а не только целые) значения. Например, полярному углу  $\frac{1}{2}\alpha$  соответствует радиус-вектор  $k^{\frac{1}{2}}a = \sqrt{k}a$ .



Черт. 118. Построение логарифмической спирали по точкам.

Так как всякий угол  $\vartheta$  может быть представлен в виде  $\vartheta = \frac{\vartheta}{\alpha} \alpha$ , то полярному углу  $\vartheta$  соответствует радиус-вектор

$$\rho = k^{\frac{\vartheta}{\alpha}} a.$$

Это и есть уравнение логарифмической спирали. Представим его в виде

$$\rho = a \left( \frac{1}{k^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\vartheta}$$

и обозначим постоянную величину  $k^{\frac{1}{\alpha}}$  через  $b$ :

$$\rho = ab^{\vartheta}, \quad (1)$$

или, если выразить  $\vartheta$  через  $\rho$ :

$$\vartheta = \lg_b \frac{\rho}{a}; \quad (2)$$

$\vartheta$  выражается через  $\rho$  при помощи логарифма; поэтому рассматриваемая спираль и называется логарифмической.

Исследуем уравнение (1). Допустим, что  $b$  — положительное число, большее единицы,  $a$  — любое положительное число. При  $\vartheta = 0$  имеем  $\rho = a$ , т. е. геометрический смысл коэффициента  $a$  таков:  $a$  есть начальный радиус-вектор.

При увеличении  $\vartheta$   $\rho$  будет увеличиваться.

Если  $\vartheta$  будет уменьшаться от нуля в сторону отрицательных чисел, т. е. радиус-вектор будет вращаться от полярной оси по часовой стрелке, то  $\rho$  будет уменьшаться, оставаясь положительным. При этом  $\rho$  никогда не станет нулём, но по мере возрастания абсолютной величины  $\vartheta$   $\rho$  будет приближаться к нулю:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow -\infty} \rho = 0.$$

Следовательно, логарифмическая спираль не проходит через полюс. Если двигать по ней по часовой стрелке, то она совершает бесконечное число оборотов вокруг полюса, с каждым оборотом приближаясь всё более и более к нему. Такие точки называются *асимптотическими*; полюс есть асимптотическая точка логарифмической спирали.

При  $b = 1$  уравнение (1) даёт  $\rho = a$ , т. е. логарифмическая спираль превращается в окружность. При  $0 < b < 1$  спираль «раскручивается» по часовой стрелке.

Повернём полярную ось на угол  $\varphi$ . Тогда, как понятно из черт. 119, формулы преобразования полярных координат будут таковы:

$$\vartheta = \vartheta' + \varphi,$$

$$\rho = \rho'.$$

Уравнение (1) преобразуется так:

$$\rho = ab^{\vartheta'} + \varphi$$

или

$$\rho = ab^{\varphi} \cdot b^{\vartheta'}.$$

Можно подобрать угол  $\varphi$  так, что постоянный коэффициент  $ab^{\varphi}$  станет равным единице:

$$ab^{\varphi} = 1.$$

Для этого надо положить:

$$\varphi = -\frac{\lg a}{\lg b}. \quad (3)$$

Тогда в новой системе координат уравнение логарифмической спирали запишется так (новые координаты снова обозначаем  $\vartheta$  и  $\rho$ ):

$$\rho = b^{\vartheta}. \quad (4)$$



Черт. 119.  $\begin{cases} \rho = \rho', \\ \vartheta = \vartheta' + \varphi. \end{cases}$

Уравнение *всякой* логарифмической спирали можно написать в виде (4). Для этого надо за полярную ось принять тот луч, на котором расположен радиус-вектор, равный единице (у *всякой* логарифмической спирали существует радиус-вектор любой величины).

Пусть дана логарифмическая спираль

$$\rho = b^{\vartheta}. \quad (4)$$

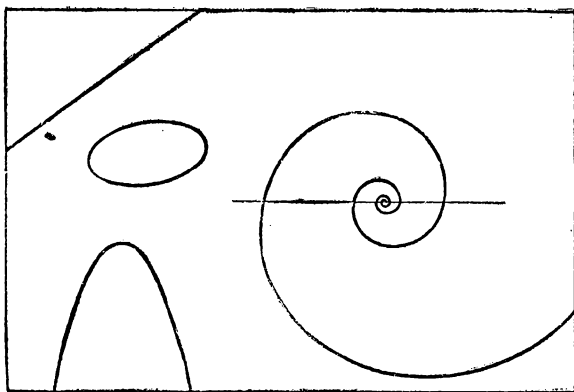
Построим подобную ей логарифмическую спираль, увеличив все её радиусы-векторы в  $m$  раз:

$$\rho = mb^{\vartheta}. \quad (5)$$

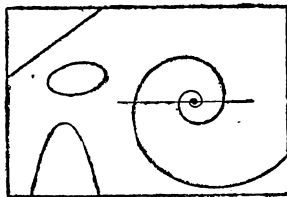
На основании только что доказанного свойства эта спираль не будет отличаться от спирали (5) ни формой, ни размерами; она будет лишь повернута по отношению к ней на некоторый угол. Если повернуть полярную ось на угол

$$\varphi = -\frac{\lg m}{\lg b},$$

то уравнение спирали (5) не будет отличаться от уравнения спирали (4).



a



b

Черт. 120.

Мы пришли к замечательному свойству логарифмической спирали, которое на первый взгляд кажется парадоксальным: логарифмическая спираль не изменяется при подобном преобразовании (а только поворачивается).

Свойством не изменяться при подобном преобразовании обладает также прямая линия (причём она даже не поворачивается). На черт. 120 изображены прямая, эллипс, парабола и логарифмическая спираль. Черт. 120а представляет собою черт. 120b, увеличенный вдвое по линейным размерам.

Если читатель сведёт черт. 120а на прозрачную бумагу и попытается накладывать изображённые на нём линии на линии черт. 120b, то он убедится в том, что:

1. Прямая линия при увеличении чертежа не изменилась: прямая второго чертежа при наложении полностью совпадает с прямой первого чертежа (следует помнить, что обе прямые предполагаются бесконечными в обе стороны, а не ограниченными рамками чертежа). При наложении поворачивать чертёж не придётся (рамки второго чертежа будут параллельны рамкам первого чертежа).

2. Эллипс второго чертежа нельзя совместить с эллипсом первого чертежа. Параболу с параболой тоже нельзя.

3. Логарифмическую спираль второго чертежа можно совместить с логарифмической спиралью первого чертежа. Для этого следует повернуть

второй чертёж на  $180^\circ$  по часовой стрелке; при этом спирали полностью совпадут (необходимо помнить, что обе спирали предполагаются совершающими бесконечное множество оборотов как против часовой стрелки — за рамки чертежа, — так и по часовой стрелке — к полюсу).

**137. Гиперболическая спираль.** Линия, у которой радиус-вектор обратно пропорционален полярному углу, называется гиперболической спиралью. Из этого определения непосредственно вытекает уравнение гиперболической спирали

$$\rho = \frac{a}{\vartheta} \quad (6)$$

или

$$\rho\vartheta = a. \quad (6')$$

Положим, что  $a$  — положительная величина. Ясно, что при возрастании  $\vartheta$  от 0 до  $\infty$   $\rho$  уменьшается, стремясь к нулю. Это значит, что гиперболическая спираль совершает бесконечное множество оборотов вокруг полюса, неограниченно приближаясь к нему, но не достигая его, т. е. полюс является асимптотической точкой гиперболической спирали.

Если  $\vartheta$  уменьшается, приближаясь к нулю, то  $\rho$  неограниченно возрастает.

Докажем, что гиперболическая спираль (6) имеет асимптоту, параллельную полярной оси. Выражая декартовы координаты точек гиперболической спирали через полярные и заменяя  $\rho$  его выражением из уравнения (6), получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cos \vartheta}{\vartheta}, \\ y &= \frac{a \sin \vartheta}{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

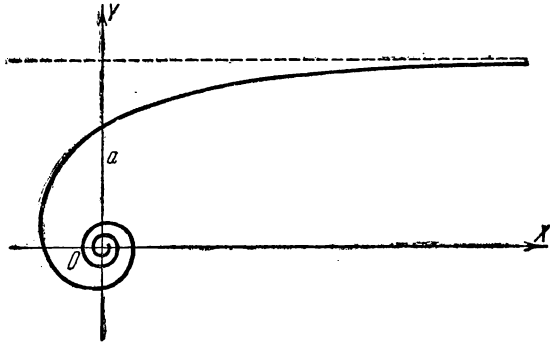
Уравнения (7) суть параметрические уравнения гиперболической спирали в декартовых координатах.

Из уравнений (7) вытекает:

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} x &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{a \cos \vartheta}{\vartheta} = \infty, \\ \lim_{\vartheta \rightarrow 0} y &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{a \sin \vartheta}{\vartheta} = a. \end{aligned}$$

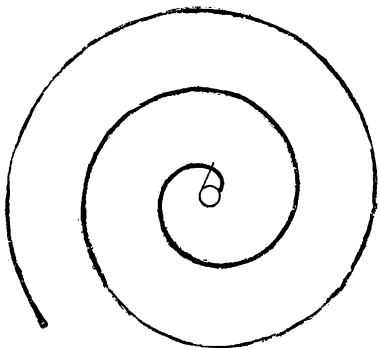
Геометрически это значит, что при неограниченном продвижении по гиперболической спирали вправо она поднимается\*), неограниченно приближаясь к прямой  $y = a$ , но не достигая её. Другими словами, прямая  $y = a$  является асимптотой гиперболической спирали.

\*) Напоминаем, что отношение  $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$  всегда меньше единицы и, стремясь к единице, начиная с некоторого момента, всё время возрастает.



Черт. 121. Гиперболическая спираль  $\rho\vartheta = a$ .

**138. Эвольвента окружности.** Если прямая линия катится без скольжения по окружности, то каждая точка этой прямой описывает линию, называемую эвольвентой окружности \*). Чтобы начертить эвольвенту



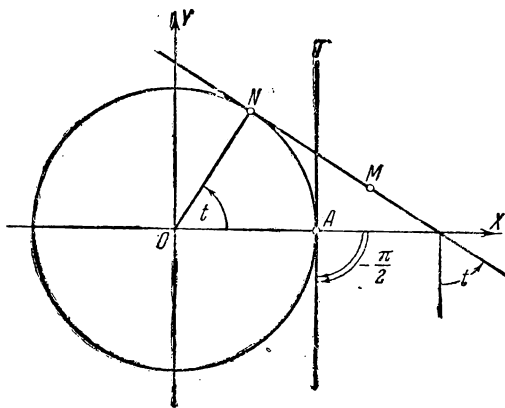
Черт. 122. Эвольвента окружности.

окружности, следует прикрепить к бумаге круг, намотать на него нить и к концу нити привязать карандаш. Если теперь вести карандашом по бумаге, разматывая нить и держа её всё время натянутой, то он будет чертить эвольвенту окружности (черт. 122).

Выведем уравнение эвольвенты окружности. Примем за начальное то положение катящейся прямой, при котором точка, описывающая эвольвенту окружности, находится на окружности (точка  $A$  на черт. 123). Начало координат поместим в центре окружности и примем  $OA$  за ось  $X$ .

Пусть прямая  $AT$ , катясь по окружности, через некоторое время займёт положение  $NM$ , где  $N$  — точка касания, а  $M$  — точка, описывающая эвольвенту

окружности. Если обозначить  $\angle AON$  через  $t$ , то  $\widehat{AN} = Rt$  ( $R$  — ра-



Черт. 123. Образование эвольвенты окружности.

диус окружности). Из определения эвольвенты окружности следует, что

$$NM = \widehat{AN}.$$

Следовательно,  $NM = Rt$ . Заметим, что катящаяся прямая  $NM$  первоначально образовывала с осью  $X$  угол  $-\frac{\pi}{2}$ ; затем эта прямая стала пово-

\*) Вообще если прямая линия катится без скольжения по некоторой кривой, то линия, описываемая точкой этой прямой, называется эвольвентой этой кривой. Обычно эвольвента определяется иначе (как линия, для которой данная кривая является геометрическим местом центров кривизны), и тогда свойство эвольвенты, которое мы приняли за её определение, должно быть доказано.

рачиваться в положительном направлении. К моменту, когда  $\angle AON = t$ , она успела повернуться также на угол  $t$  (черт. 123) и, следовательно, образует с осью  $X$  угол  $-\frac{\pi}{2} + t$ . Чтобы определить координаты точки  $M$ , следует спроектировать ломаную  $ONM$  на оси координат. Составляем, как обычно, таблицу.

	Длина	Угол с осью $X$	Угол с осью $Y$
Звено $\overline{ON}$	$R$	$t$	$t - \frac{\pi}{2}$
Звено $\overline{NM}$	$Rt$	$-\frac{\pi}{2} + t$	$\left(-\frac{\pi}{2} + t\right) - \frac{\pi}{2} = t - \pi$

$$x = \text{пр}_X ONM = R \cos t + Rt \cos \left(-\frac{\pi}{2} + t\right) = R \cos t + R t \sin t,$$

$$y = \text{пр}_Y ONM = R \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right) + Rt \cos (t - \pi) = R \sin t - R t \cos t.$$

Следовательно, параметрические уравнения эвольвенты окружности таковы:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\cos t + t \sin t), \\ y &= R(\sin t - t \cos t). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

### Упражнения

**222.** Построить по точкам логарифмическую спираль

$$\rho = 1,5^{\vartheta},$$

придавая  $\vartheta$  значения от  $-6,4$  до  $6,4$  через  $0,4$ .

Сначала составить таблицу, а затем выбрать подходящий масштаб.

**223.** Построить по точкам кривую

$$\rho^2 = \vartheta$$

(параболическая спираль), придавая  $\vartheta$  значения от  $0$  до  $12,8$  через  $0,4$ .

Сначала составить таблицу, а затем выбрать подходящий масштаб.

### Задачи

**224.** При возрастании  $\vartheta$  в арифметической прогрессии с разностью  $2$  радиусы-векторы архимедовой спирали

$$\rho = k\vartheta$$

возрастают в арифметической прогрессии с разностью  $3$ . Определить  $k$ .

**225.** При возрастании  $\vartheta$  в арифметической прогрессии с разностью  $1$  радиусы-векторы логарифмической спирали

$$\rho = b^{\vartheta}$$

возрастают в геометрической прогрессии со знаменателем  $3$ . Определить  $b$ .

**226.** Полупрямая, выходящая из полюса, пересекает логарифмическую спираль

$$\rho = b^{\vartheta}$$

в точках, расстояние между которыми по мере удаления от полюса увеличивается в геометрической прогрессии со знаменателем

а) 2, б)  $q$ .

Определить  $b$ .

**227.** Каков должен быть угол  $\beta$  в построении черт. 118 (стр. 244), чтобы получилась спираль  $\rho = 2^{\beta}$ ?

**228.** Доказать, что касательная к логарифмической спирали образует постоянный (т. е. один и тот же для всех точек данной спирали) угол с радиусом-вектором, проведённым в точку касания.

**229.** Все нормали к окружности проходят через одну точку (центр). Доказать это свойство, рассматривая окружность как частный случай:

- а) эллипса;
- б) логарифмической спирали.

**230.** В логарифмической спирали

$$\rho = 2^{\beta}$$

все радиусы-векторы увеличены втрое. На какой угол надо повернуть полученную спираль, чтобы она совместилась с первоначальной?

**231.** Пусть  $M$  — точка на линии,  $\overline{OM}$  — радиус-вектор, проведённый в эту точку. Проводим две прямые: перпендикуляр к  $OM$  в точке  $O$  и касательную к данной линии в точке  $M$ ; обозначим через  $T$  точку пересечения этих прямых. Проекция  $\overline{MT}$  на  $\overline{OT}$  (т. е. отрезок  $OT$ ) называется полярной подкасательной.

- а) Дать общее выражение для полярной подкасательной.
- б) Показать, что у гиперболической спирали

$$\rho\delta = k$$

полярная подкасательная постоянна.

**232.** Пусть  $M$  — точка на линии,  $\overline{OM}$  — радиус-вектор, проведённый в эту точку. Проводим две прямые: перпендикуляр к  $OM$  в точке  $O$  и нормаль к данной линии в точке  $M$ ; обозначим через  $N$  точку пересечения этих прямых. Проекция  $\overline{MN}$  на  $\overline{ON}$  (т. е. отрезок  $ON$ ) называется полярной поднормалью.

- а) Дать общее выражение для полярной поднормали.
- б) Показать, что у архимедовой спирали

$$\rho = k\delta$$

полярная поднормаль постоянна.

**233.** Показать аналитически, что эвольвента окружности есть предельный случай эпициклоиды, когда радиус катящейся окружности неограниченно возрастает.



## ГЛАВА IX

### ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

#### § 1. Графики некоторых простейших функций

В этой главе рассматриваются графики явных функций

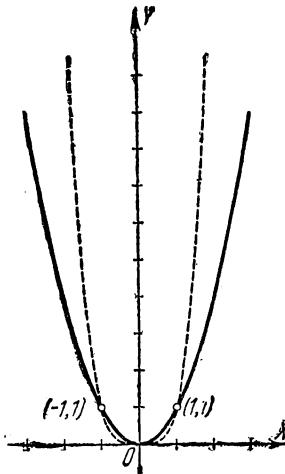
$$y = f(x).$$

В дифференциальном исчислении даются методы для построения графиков (исследование на экстрема, точки перегиба, асимптоты и т. д.). Однако нецелесообразно во всех случаях применять аппарат дифференциального исчисления: графики основных функций должны быть раз навсегда известны.

Графики функций, рассматриваемых в этой главе, строятся теми приемами, которые излагались в этой книге. Поэтому мы опускаем все объяснения (область существования, признаки симметрии и т. д.) и даём сразу готовый результат. Таким образом, эта глава носит справочный характер. Особое внимание уделено систематизирующим правилам, охватывающим целые классы функций.

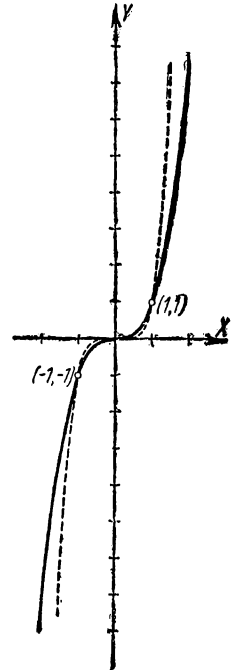
Простейшие функции — *целые многочлены*. Многочлен *первой* степени (линейный двучлен)  $y = kx + b$  имеет графиком прямую линию, не параллельную оси  $Y$ . Многочлен *второй* степени (*квадратный трёхчлен*)  $y = ax^2 + bx + c$  имеет графиком параболу, ось которой параллельна оси  $Y$ . Графики многочленов третьей и высших степеней мы не включаем в тот минимум графиков, которые следует знать как готовые.

**139. Степенная функция.** Рассмотрим график степенной функции

$$y = x^n. \quad (1)$$


Черт. 124.

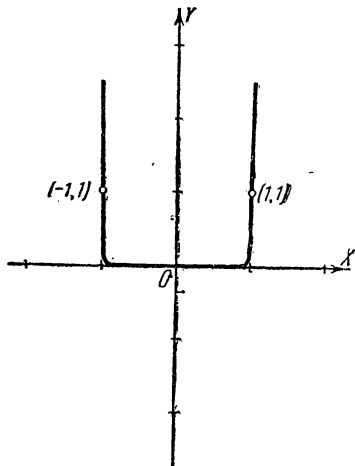
Сплошная линия:  $y = x^2$ ,  
пунктирная линия:  $y = x^4$ .



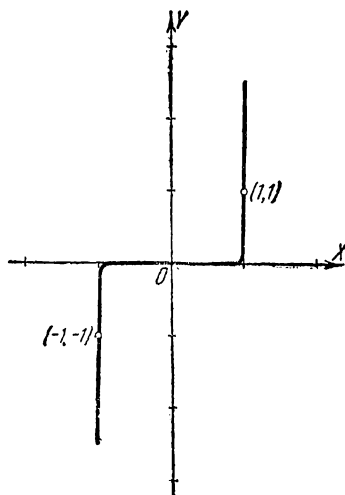
Черт. 125. Сплошная линия:  $y = x^3$ ,  
пунктирная линия:  $y = x^5$ .

Сначала предположим, что  $n$  — целое положительное. На черт. 124 и 125 изображены графики степенной функции для  $n = 2, 3, 4, 5$ .

При  $n$  чётном кривая имеет тип, изображённый на черт. 124. Она симметрична относительно оси  $Y$ , имеет в начале наимизшую точку. При  $n$  нечётном кривая имеет тип, изображённый на черт. 125. Она симметрична

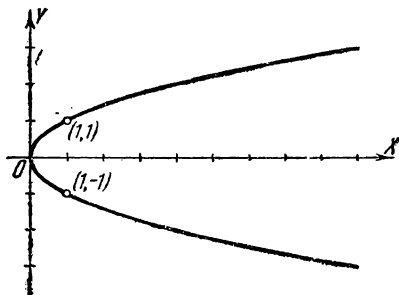


Черт. 126. График  $y = x^n$  при очень большом чётном  $n$ .



Черт. 127. График  $y = x^n$  при очень большом нечётном  $n$ .

относительно начала, имеет в начале точку перегиба\*). В обоих случаях кривая проходит через точку  $(1, 1)$  и касается оси  $X$  в начале координат (за исключением случая  $n = 1$ ).



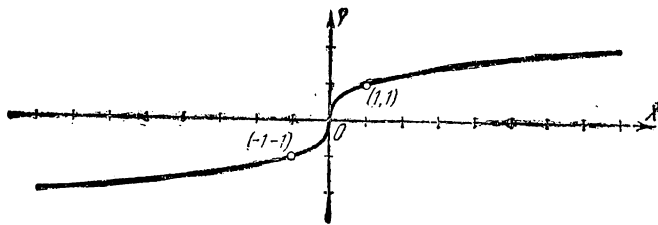
Черт. 128.  $y = x^{\frac{1}{2}}$ .

Линия  $y = x^3$  называется *кубической параболой*. Вообще линия  $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  называется *параболой  $n$ -го порядка*.

\*) Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием о точках перегиба из курса дифференциального исчисления.

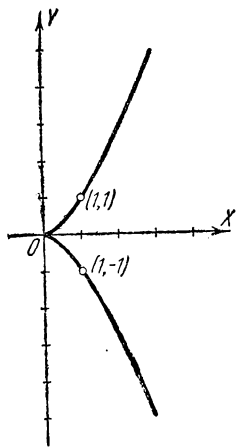
Чем больше  $n$ , тем ближе к оси  $X$  проходит кривая на участке  $-1 < x < 1$  и тем круче она удаляется от оси  $X$  при  $|x| > 1$  (см. черт. 126 и 127).

На черт. 128 — 131 изображены кривые  $y = x^n$  для некоторых дробных значений  $n$ . Для определения типа кривой в каждом случае надо только сооб-

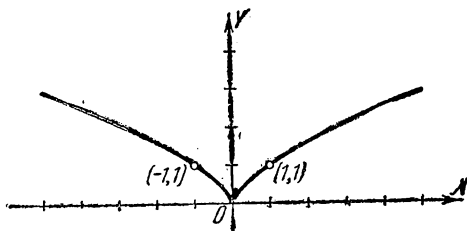


Черт. 129.  $y = x^{\frac{1}{3}}$ .

разить, в каких четвертях расположена кривая, и заметить, что в начале координат при  $n > 1$  кривая касается оси  $X$ , а при  $n < 1$  она касается оси  $Y$ .



Черт. 130.  $y = x^{\frac{2}{3}}$ .



Черт. 131.  $y = x^{\frac{3}{2}}$ .

Полезно заметить следующее соображение. Уравнение

$$y = x^n$$

может быть записано в виде

$$x = y^{\frac{1}{n}}.$$

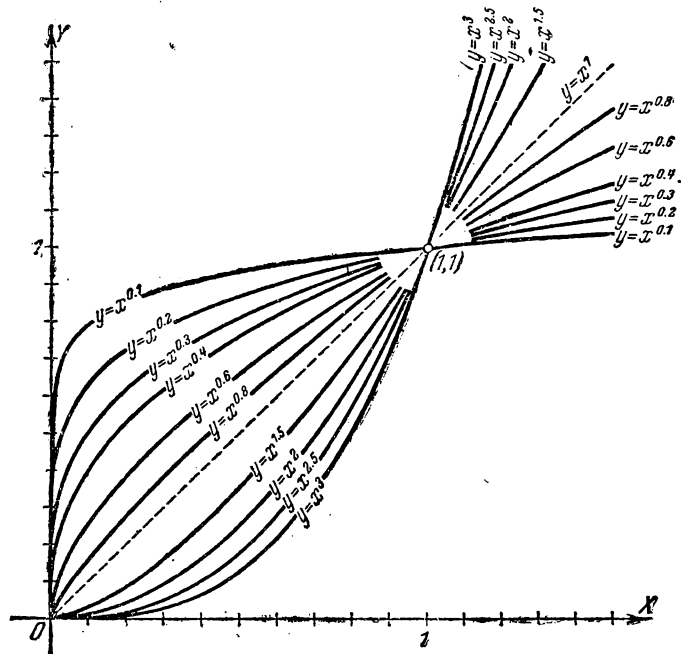
Поэтому уравнения  $y = x^n$  и  $y = x^{\frac{1}{n}}$  изображаются одной и той же кривой, но с заменой ролей осей  $X$  и  $Y$ .

Кривая

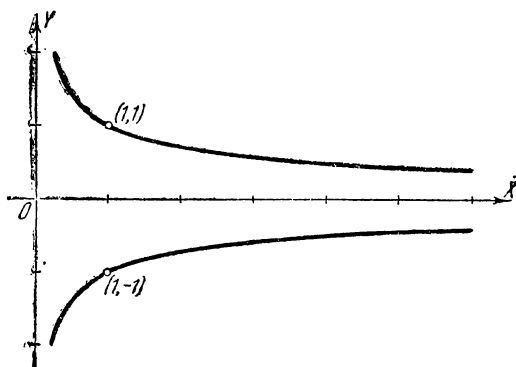
$$y = x^{3/2} \text{ или } y = x^{2/3}$$

называется *параболой Нейля* или *полукубической параболой*.

Мы видим, что характер графика  $y = x^n$  зависит не только от величины показателя  $n$ , но и от его природы. Например, если рассмотреть кривые  $y = x^{1/9}$  и  $y = x^{1/10}$ , то, хотя показатели весьма близки по величине, харак-



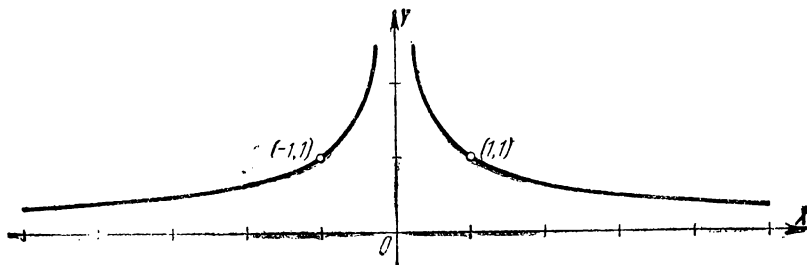
Черт. 132. Течение кривых  $y = x^n$  ( $n$  положительно) в первой четверти.



Черт. 133.  $y = x^{-\frac{1}{2}}$ .

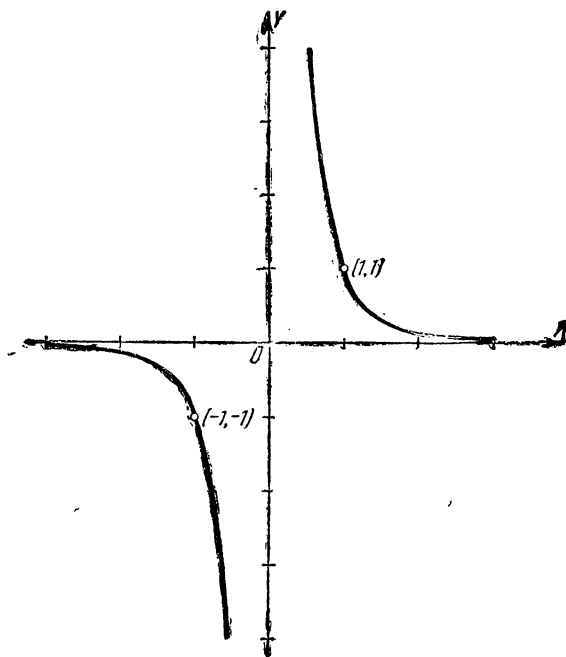
тер этих графиков различный: в первом случае мы имеем кривую такого типа, как на черт. 129, а во втором — как на черт. 128. Однако, если рас-

смаатривать течение этих кривых в *первой четверти*, то можно сказать, что при близких значениях  $n$  соответствующие кривые мало отличаются друг от друга (см. черт. 132).



Черт. 134.  $y = x^{-\frac{2}{3}}$ .

Рассмотрим степенную функцию с отрицательным показателем. Кривая  $y = x^{-1}$  есть равносторонняя гиперболa, рассмотренная в п 90 [черт. 82



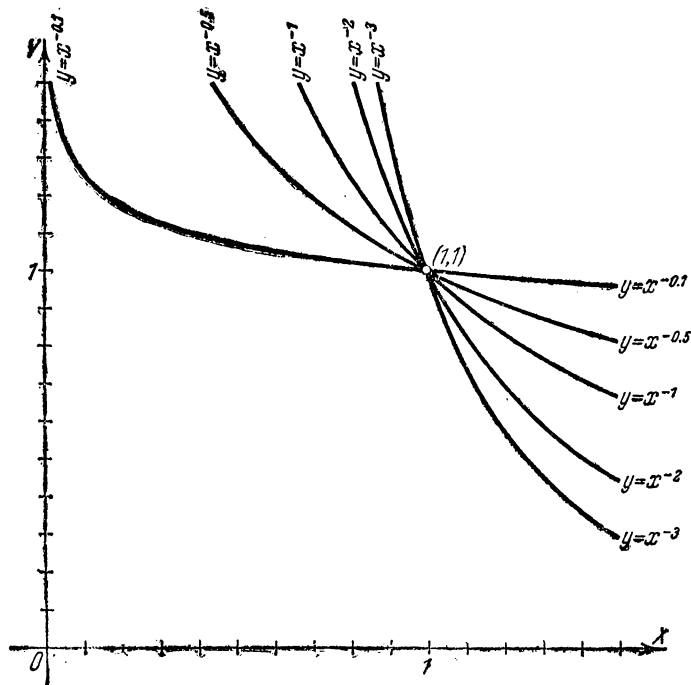
Черт. 135.  $y = x^{-3}$ .

(стр. 173)]. При любом рациональном отрицательном показателе кривая  $y = x^n$  имеет оси координат своими асимптотами, но, во-первых, может быть расположена в различных четвертях (в зависимости от природы показателя  $n$ )

и, во-вторых, при  $|n| > 1$  приближается к оси  $X$  быстрее, чем к оси  $Y$ , а при  $|n| < 1$  — наоборот (см. черт. 133 — 135).

Течение в первой четверти кривых  $y = x^n$  при отрицательном  $n$  показано на черт. 136.

Случай иррационального  $n$  мы не рассматриваем. Всё сказанное выше о графиках степенных функций с рациональным показателем резюмируется



Черт. 136. Течение кривых  $y = x^n$  ( $n$  отрицательно) в первой четверти.

в схеме, помещённой на стр. 257. По этой схеме можно определить тип графика  $y = x^n$  для любого рационального  $n$ .

Примечание 1. Предполагается, что  $n$  представлено в виде несократимой дроби.

Примечание 2. Целые значения  $n$  представляются в виде дроби со знаменателем 1.

**140. Понятие обратной функции.** Пусть дана какая-нибудь функция

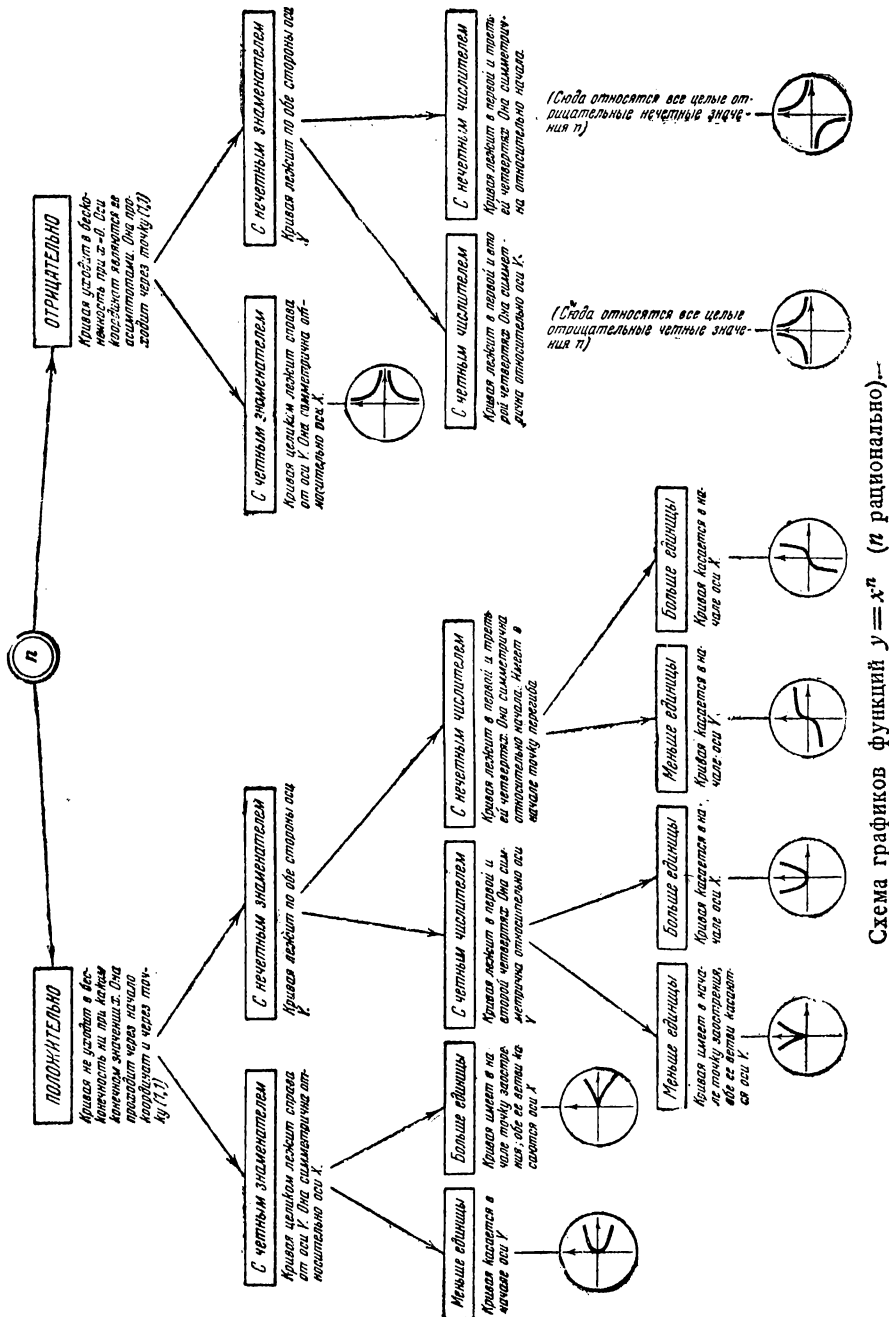
$$y = f(x). \quad (2)$$

Определим из уравнения (1)  $x$ :

$$x = \varphi(y). \quad (3)$$

Функции  $f$  и  $\varphi$  называются взаимно обратными.

Важно уяснить, что обратными называются самые функциональные зависимости  $f$  и  $\varphi$ , независимо от того, к каким аргументам эти зависимости прилагаются.



(Когда относятся все целые отрицательные нечетные значения  $n$ )



(Когда относятся все целые отрицательные четные значения  $n$ )



Пример. Пусть

$$y = 3x - 2. \quad (*)$$

Определяем отсюда  $x$ :

$$x = \frac{y + 2}{3}.$$

Функция (\*) состоит из двух действий: 1) умножение на 3 и 2) вычитание 2. Определив  $x$ , мы выяснили, что обратная функция состоит из двух действий: 1) прибавление 2 и 2) деление на 3. Функция, состоящая из таких двух действий, всегда называется обратной по отношению к функции (\*), хотя бы аргументом служил не  $y$ . Например, функция

$$v = \frac{u + 2}{3}$$

является обратной по отношению к функции (\*). Можно обозначить опять аргумент буквой  $x$ , а функцию буквой  $y$ . Функция

$$y = \frac{x + 2}{3}$$

является обратной по отношению к функции (\*).

Условимся в дальнейшем всегда обозначать аргумент буквой  $x$ , а функцию буквой  $y$ . В таком случае, чтобы написать функцию, обратную данной функции

$$y = f(x), \quad (2)$$

следует произвести две операции:

1. Разрешить уравнение (1) относительно  $x$ :

$$x = \varphi(y). \quad (3)$$

2. В полученном равенстве поменять местами буквы  $x$  и  $y$ :

$$y = \varphi(x). \quad (4)$$

Эти операции можно производить и в обратном порядке.

1. В равенстве (2) поменять местами буквы  $x$  и  $y$ :

$$x = f(y).$$

2. Полученное равенство разрешить относительно  $y$ :

$$y = \varphi(x). \quad (4)$$

Имея график прямой функции, легко получить график обратной функции: для этого надо поменять ролями оси координат. В самом деле, когда мы разрешаем уравнение (2) относительно  $x$ , то это не оказывает влияния на линию: уравнения (2) и (3) изображаются одной и той же линией. Переходя же от уравнения (3) к уравнению (4), мы меняем ролями  $x$  и  $y$ .

Переменить ролями оси координат можно, просто переставив буквы  $X$  и  $Y$  в обозначениях осей, но тогда чертёж будет иметь непривычное расположение. Условимся действовать так: оставляя оси координат неизменными, переворачиваем кривую вокруг биссектрисы нормального координатного угла.

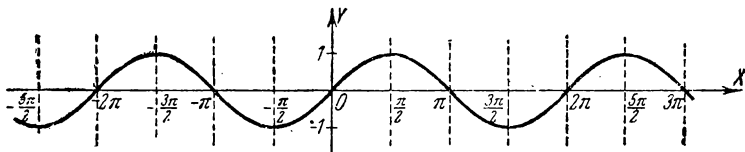
Примечание. На первый взгляд может показаться, что для замены ролей  $X$  и  $Y$  следует повернуть чертёж на  $90^\circ$ . Если читатель учтёт, что *положительные* направления осей  $X$  и  $Y$  должны меняться ролями, то он поймёт, что поворачивание на  $90^\circ$  не годится.

Примеры. Для функции  $y = x^2$  обратной является функция  $y = \pm\sqrt{x}$ . График первой функции изображён на черт. 124, а второй — на черт. 128.

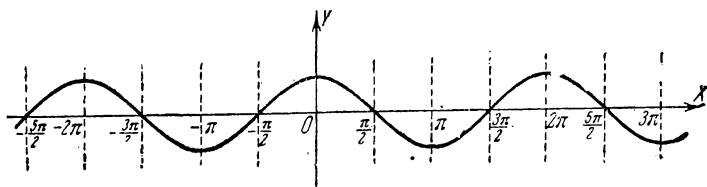


Мы видим, что один из этих графиков получается из другого переворачиванием вокруг биссектрисы нормального координатного угла. Другой пример:  $y = x^{2/3}$  (черт. 130) и  $y = x^{3/2}$  (черт. 131).

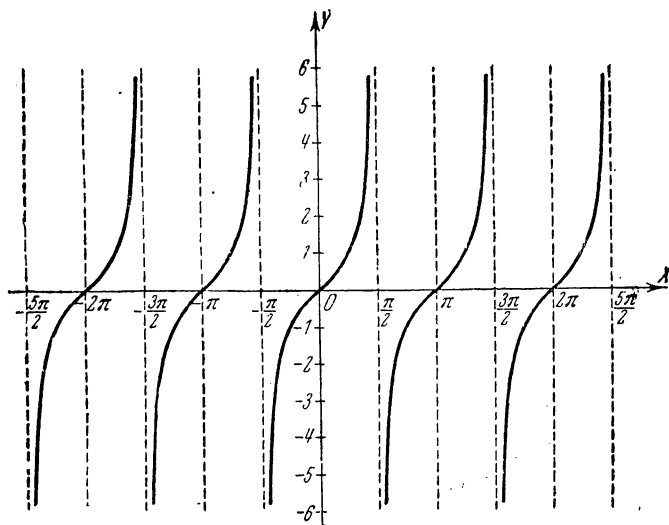
**141. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.** Графики тригонометрических функций изображены на черт. 137—142. Аргу-



Черт. 137.  $y = \sin x$ .

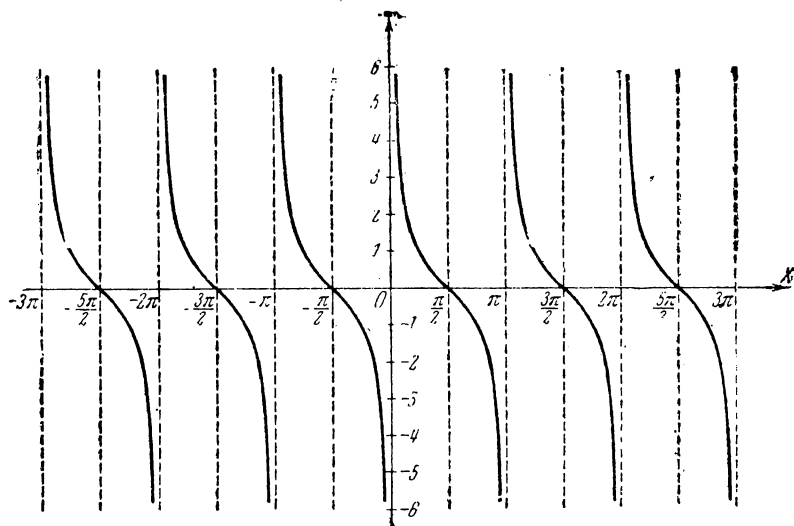
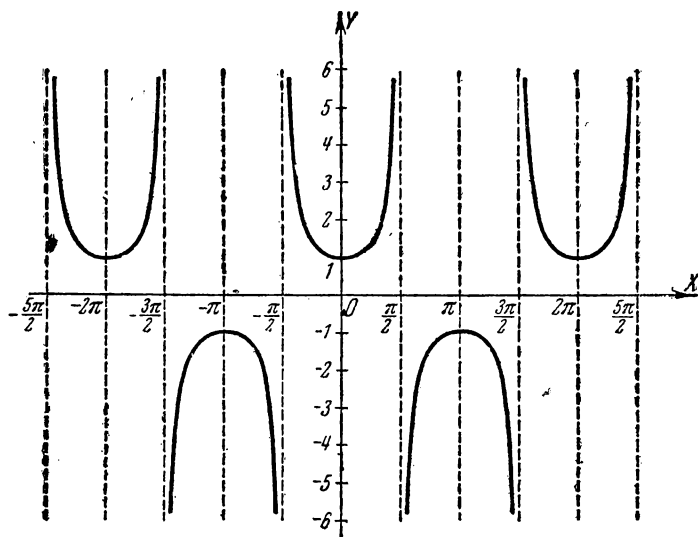


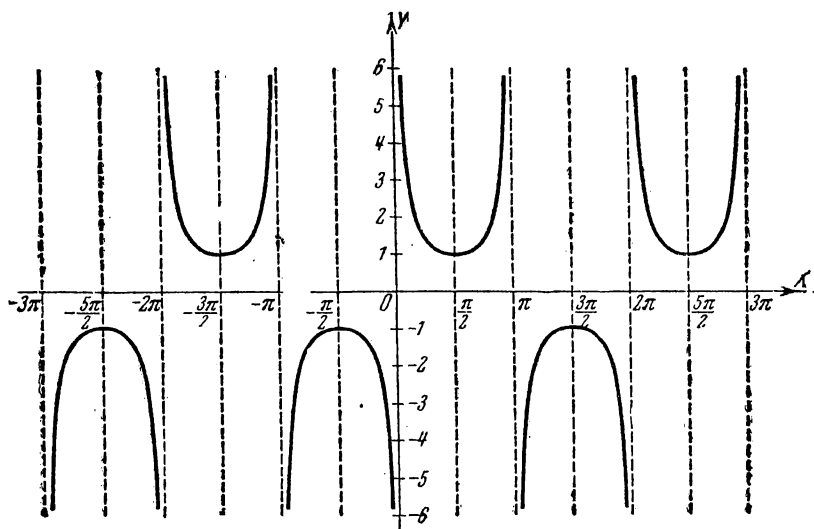
Черт. 138.  $y = \cos x$ .



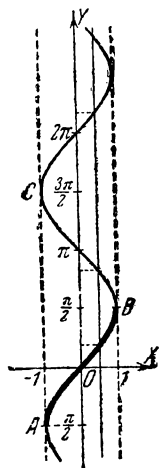
Черт. 139.  $y = \operatorname{tg} x$ .

мент измеряется в радианах (см. сноску на стр. 68). Необходимо помнить, что соотношение между вертикальными и горизонтальными размерами каждого

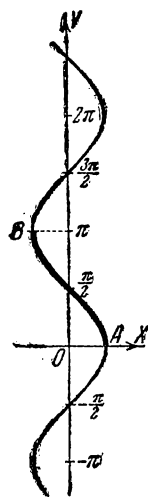
Черт. 140.  $y = \operatorname{ctg} x$ .Черт. 141.  $y = \sec x$ .



Черт. 142.  $y = \csc x$ .



Черт. 143.  
 $y = \text{Arc sin } x$ .



Черт. 144.  
 $y = \text{Arc cos } x$ .

чертежа — вполне определенное, а не произвольное. Например, на черт. 137 база синусоиды равна  $\pi \approx 3,14$ , а максимальная высота равна 1.

Переворачивая кривые черт. 137—139 вокруг прямой  $y = x$ , получим графики *обратных тригонометрических функций*;  $\text{Arcsin } x$ ,  $\text{Arccos } x$  и  $\text{Arctg } x$  (черт. 143—145). Все эти функции многозначны: каждому значению  $x$

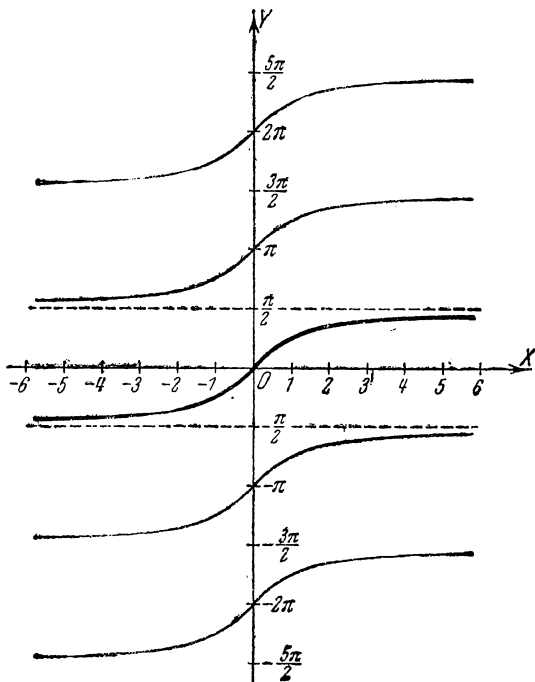
(принадлежащему к области существования функции) соответствует бесконечное множество значений функции.

Из этих многозначных функций можно выделить так называемые «главные значения», являющиеся однозначными функциями, обозначаемые  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  и  $\text{arctg } x$  и определяемые неравенствами

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq \arccos x \leq \pi, \\ -\frac{\pi}{2} &< \text{arctg } x < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Графики  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  и  $\text{arctg } x$  показаны жирными линиями на черт. 143—145.

Построение графиков  $\text{Arcctg } x$ ,  $\text{Arcsec } x$  и  $\text{Arccsc } x$  предоставляем читателю.



Черт. 145.  $y = \text{Arc tg } x$ .

ждому значению  $x$  соответствует наибольшее целое число, не превосходящее  $x$  (т. е. меньшее, чем  $x$ , или равное  $x$ ). Эта функциональная зависимость обозначается буквой  $E$  (от французского слова entier — целый):

$$y = E(x)$$

можно определить эту функцию короче, сказав, что  $y$  есть целая часть  $x^*)$ .

\*) Но для отрицательных значений  $x$  лучше пользоваться первым определением, так как второе в этом случае несколько двусмысленно: может показаться, что, например,  $E\left(-2\frac{1}{2}\right) = -2$ , тогда как в действительности  $E\left(-2\frac{1}{2}\right) = -3$ .

Например:

$$E(1, 3) = 1, \quad E\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$E(\sqrt{2}) = 1, \quad E(-3, 4) = -4,$$

$$E(5) = 5, \quad E(-5) = -5.$$

Построим график функции  $E(x)$ . При

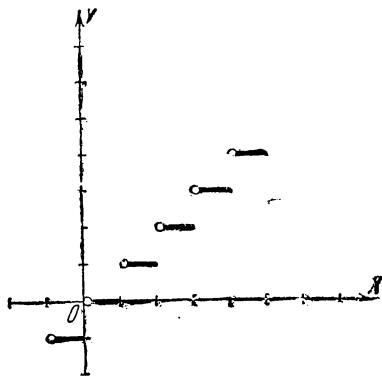
$$x = 0$$

функция равна нулю. При  $x$ , изменяющемся от 0 до 1, функция всё время равна нулю. При

$$x = 1$$

функция равна единице. При  $x$ , изменяющемся от 1 до 2, функция всё время равна единице и т. д. График этой функции изображён на черт. 146. Точки, стоящие в левом конце каждого отрезка, поставлены для того, чтобы не получалось двузначности при определении по графику значений функции при целых значениях  $x$ . Не будь этих точек, нельзя было бы, например, определить равно ли  $E(2)$  1 или 2.

Функция  $E(x)$  имеет бесконечное число точек разрыва (она разрывна при всех целых значениях аргумента). При переходе  $x$  через целое значение функция  $E(x)$  переходит от одного значения к другому, *минуя все промежуточные значения*.



Черт. 146.  $y = E(x)$ .

### Упражнения

**234.** Некоторое количество воздуха, занимавшее при давлении 1 ат объём 1 л, подвергается адиабатическому (без обмена энергией с окружающей средой) изменению. Вычертить линию, графически изображающую зависимость между давлением и объёмом, зная, что при адиабатическом процессе эта зависимость даётся формулой

$$pv^k = \text{const.},$$

где  $k$  есть отношение теплоёмкости газа при постоянном давлении к его теплоёмкости при постоянном объёме; для воздуха  $k = 1,4$ .

**235.** Решить графически уравнение

$$2^x = 4x.$$

**236.** Построить графики функций

$$\text{a) } y = \text{arccctg} x; \quad \text{b) } y = \text{arcsec} x; \quad \text{c) } y = \text{arccsc} x.$$

## Задачи.

**237.** Определить общий вид графиков следующих функций:

- |                                  |                            |                             |
|----------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| a) $y = x^{\frac{2}{3}}$ ;       | f) $y = x^{\frac{1}{5}}$ ; | k) $y = x^{-1}$ ;           |
| b) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ; | g) $y = x^{-2}$ ;          | l) $y = \sqrt[5]{x^6}$ ;    |
| c) $y = x^5$ ;                   | h) $y = x^{\frac{3}{4}}$ ; | m) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ ; |
| d) $y = \sqrt{x^3}$ ;            | i) $y = x^{\frac{1}{3}}$ ; | n) $y = x^4$ .              |
| e) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ ;      | j) $y = x^{\frac{5}{3}}$ ; |                             |

**238.** Для следующих функций найти обратные функции:

- |                           |                             |                               |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| a) $y = 2x + 1$ ;         | d) $y = \log_2 x$ ;         | g) $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ ; |
| b) $y = 3x^2 - 5$ ;       | e) $y = 4^{5x-7}$ ;         | h) $y = \frac{1}{x}$ ;        |
| c) $y = \frac{5-3x}{3}$ ; | f) $y = \sqrt[3]{2x^2-3}$ ; | i) $y = \sin x + \cos x$ .    |

**239.** Доказать, что функция, обратная периодической функции, многозначна.

**240.** Доказать геометрически (не прибегая ни к каким выкладкам), что функция, обратная дробно-линейной функции, есть тоже дробно-линейная функция.

**241.** Пусть функция  $f(x)$  сама себе обратна, т. е. из

$$y = f(x)$$

следует

$$x = f(y).$$

Какой особенностью обладает линия  $y = f(x)$ ?

Сопоставить это с задачей **136** (стр. 161) и доказать, что функция

$$F(x, y) = y - f(x)$$

симметрическая.

**242.** Построить графики функций

- |                                      |                            |                        |
|--------------------------------------|----------------------------|------------------------|
| a) $y = E(2x)$ ;                     | c) $y = E(x^2)$ ;          | e) $y = E(\sin x)$ ;   |
| b) $y = E\left(\frac{x}{3}\right)$ ; | d) $y = E(\pm \sqrt{x})$ ; | f) $y = E(2 \sin x)$ . |

**243.** Каким образом из графика функции  $y = f(x)$  получить график функции  $y = E[f(x)]$ ?

## § 2. Аффинное преобразование графиков

**143.** Общие правила аффинного преобразования графиков. В предыдущем параграфе мы рассмотрели графики некоторых отдельных функций. Эти сведения останутся изолированными и будут иметь весьма малую ценность, если читатель не сумеет, зная график какой-нибудь функции, судить также о графике *похожей* функции. Этому вопросу и посвящён настоящий параграф.

С этой целью мы рассмотрим следующие три задачи:

1° Что произойдёт с графиком функции, если букву  $x$  заменить на  $x + \xi$  ( $\xi$  — постоянная)?

Другими словами: если уже построен график функции

$$y = f(x), \quad (1)$$

то как построить график функции

$$y = f(x + \xi) ? \quad (2)$$

Если в уравнение (1) подставить вместо  $x$  какое-нибудь значение  $x = x_0$ , а в уравнение (2) подставить значение  $x = x_0 - \xi$ , то для  $y$  получится одно и то же значение. Следовательно, каждой точке  $M(x_0, y_0)$  линии (1) соответствует точка  $M_1(x_0 - \xi, y_0)$  линии (2). Но точка  $M$ , будучи передвинута на  $-\xi$  параллельно оси  $X$ , переходит в точку  $M_1$ . Следовательно, линия (2) есть та же линия (1), передвинутая на  $-\xi$  параллельно оси  $X$ .

Аналогичное правило имеет место при прибавлении некоторой константы к  $y$ . Итак:

Правило первое. При замене  $x$  на  $x + \xi$  линия сдвигается на  $-\xi$  параллельно оси  $X$ . При замене  $y$  на  $y + \eta$  линия сдвигается на  $-\eta$  параллельно оси  $Y$ .

Таким образом, при прибавлении к  $x$  положительного числа линия сдвигается влево.

2° Что произойдёт с графиком функции, если букву  $x$  заменить на  $ax$  ( $a$  — постоянная)?

Другими словами: если уже построен график функции

$$y = f(x), \quad (1)$$

то как построить график функции

$$y = f(ax) ? \quad (3)$$

Если в уравнение (1) подставить вместо  $x$  какое-нибудь значение  $x = x_0$ , а в уравнение (3) подставить значение  $x = \frac{x_0}{a}$ , то для  $y$  получится одно и то же значение. Следовательно, каждой точке  $M(x_0, y_0)$  линии (1) соответствует точка  $M_1\left(\frac{x_0}{a}, y_0\right)$  линии (3).

У точек  $M$  и  $M_1$  ординаты одинаковы, а отношение абсцисс равно

$$\frac{x_M}{x_{M_1}} = x_0 : \frac{x_0}{a} = a.$$

Это значит, что при равномерном сжатии плоскости к оси  $Y$  с коэффициентом сжатия, равным  $a$ , точка  $M$  переходит в точку  $M_1$  [см. гл. VI, § 2, формулы (8) (стр. 156)]. Напоминаем, что при  $a < 0$  равномерное сжатие включает отражение в оси  $Y$ . Следовательно, линия (3) может быть получена из линии (1) равномерным сжатием к оси  $Y$  с коэффициентом сжатия, равным  $a$ .

Аналогичное правило имеет место при умножении  $y$  на некоторую константу. Итак:

Правило второе. При замене  $x$  на  $ax$  линия подвергается равномерному сжатию к оси  $Y$  с коэффициентом сжатия, равным  $a$ . При замене  $y$  на  $by$  линия подвергается равномерному сжатию к оси  $X$  с коэффициентом сжатия, равным  $b$ .

Таким образом, при  $|a| > 1$  все точки линии (1) приближаются к оси  $X$ , а при  $|a| < 1$  они удаляются от оси  $X$ , т. е. фактически линия подвергается растяжению.

3° Что произойдёт с графиком функции, если букву  $x$  заменить линейным двучленом  $ax + b$  ( $a$  и  $b$  — постоянные)?

Другими словами: если уже построен график функции

$$y = f(x), \quad (1)$$

то как построить график функции

$$y = f(ax + b) \quad (4)$$

Замену  $x$  на  $ax + b$  можно осуществить двумя шагами.

Первый шаг. Прибавим к  $x$  число  $b$ ; после этого шага  $x$  заменится на  $x + b$ .

Второй шаг. Умножим  $x$  на  $a$ ; после этого шага  $x + b$  заменится на  $ax + b$ . Можно проделывать шаги в другом порядке, а именно:

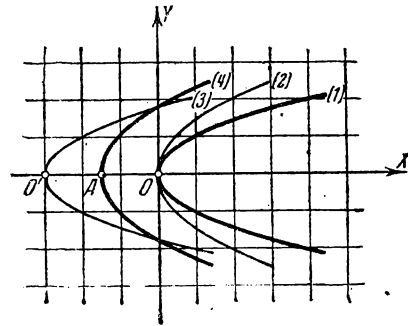
Первый шаг. Умножим  $x$  на  $a$ ; после этого шага  $x$  заменится на  $ax$ .

Второй шаг. Прибавим к  $x$  число  $\frac{b}{a}$ ; после этого шага  $ax$  заменится

$$\text{на } a \left( x + \frac{b}{a} \right) = ax + b.$$

Аналогичные рассуждения относятся к замене  $y$  на  $cy + d$ . Используя первое и второе правила, получим:

Правило третье (первый вариант). При замене  $x$  на  $ax + b$  линия сдвигается параллельно оси  $X$  на  $-b$  и затем подвергается равномерному сжатию к оси  $Y$  с коэффициентом сжатия, равным  $a$ . При замене  $y$  на  $cy + d$  линия сдвигается



Черт. 147.

параллельно оси  $Y$  на  $-d$  и затем подвергается равномерному сжатию к оси  $X$  с коэффициентом сжатия, равным  $c$ .

Правило третье (второй вариант). При замене  $x$  на  $ax + b$  линия подвергается равномерному сжатию к оси  $Y$  с коэффициентом сжатия, равным  $a$ , и затем сдвигается параллельно оси  $X$  на  $-\frac{b}{a}$ . При замене  $y$  на  $cy + d$  линия подвергается равномерному сжатию к оси  $X$  с коэффициентом сжатия, равным  $c$ , и затем сдвигается параллельно оси  $Y$  на  $-\frac{d}{c}$ .

Рассмотренное выше преобразование называется *аффинным преобразованием графиков*, а графики, получаемые один из другого этим преобразованием, называются *аффинными* \*) (друг другу). Повторим определение аффинного преобразования графиков.

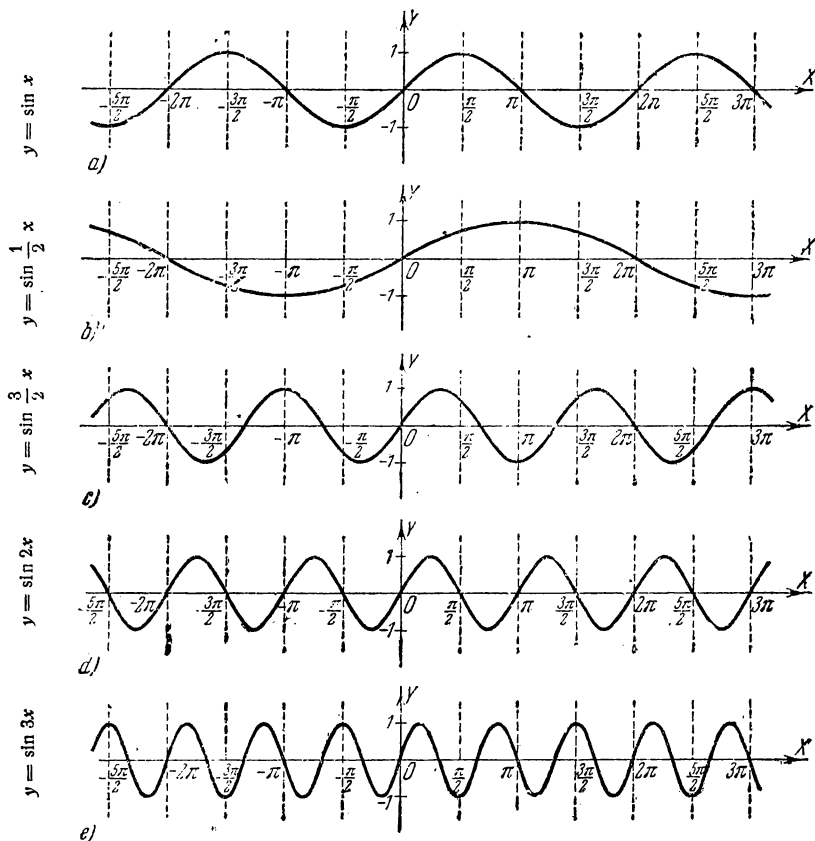
\*) От латинского слова *affinitas* — родство; таким образом, аффинный значит — *родственный* или *похожий*.

Термин «аффинное преобразование» имеет в геометрии более общий смысл, чем приведенный в тексте. Аффинное преобразование в самом общем смысле заключается в замене  $x$  на  $a_1x + b_1y + c_1$ , а  $y$  — на  $a_2x + b_2y + c_2$ . Мы ограничиваемся частным случаем  $b_1 = a_2 = 0$  (см., например, Н. Ф. Четверухин, Высшая геометрия. Москва, 1939. Глава первая). Общее аффинное преобразование, кроме двух сжатий и двух параллельных переносов, содержит ещё два поворота. Говоря об аффинном преобразовании графиков (а не линий вообще), мы всегда имеем в виду упомянутый частный случай, так как при общем аффинном преобразовании преобразованную линию нельзя рассматривать как график функции, сколько-нибудь похожей на исходную (при изучении графиков нельзя делать поворотов, так как при этом искажаются основные свойства графиков, например, максимумы и минимумы).



**Аналитическое определение.** Аффинное преобразование графиков заключается в замене текущих координат  $x$  и  $y$  соответственно линейными комбинациями  $ax + b$  и  $cy + d$ .

**Геометрическое определение.** Аффинное преобразование графиков заключается в двух равномерных сжатиях (к оси  $X$  и к оси  $Y$ ) и в двух поступательных (перемещениях параллельно оси  $X$  и параллельно оси  $Y$ ).



Черт. 148.

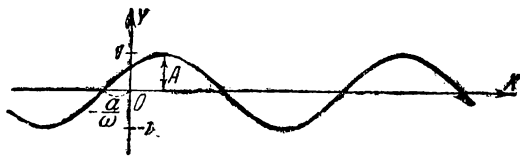
Приведённые выше три правила называются правилами аффинного преобразования графиков. Для удобства применения их приведено три, но достаточно одного — третьего. Третье правило является общим; при  $a = c = 0$  оно даёт первое правило, а при  $b = d = 0$  — второе.

**Пример.** Построить график функции

$$y = \pm \sqrt{ax + b}.$$

Будем отправляться от уже известного нам графика  $y = \pm \sqrt{x}$ , представляющего параболу [линия (1) на черт. 147]. Пользуясь первым вариан-

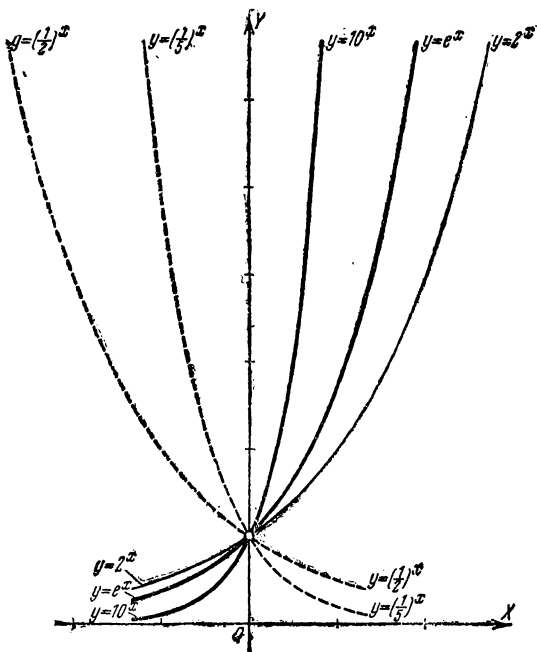
том третьего правила, мы, прежде всего, передвигаем параболу (1) параллельно оси  $X$  на  $-b$ ; получим линию (3). При этом вершина параболы  $O(0, 0)$  перейдет в положение  $O'(-b, 0)$ . Затем подвергнем линию (3) равномерному сжатию к оси  $Y$  с коэффициентом сжатия, равным  $a$ ; получим



Черт. 149.  $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ .

линию (4); при этом точки пересечения линии (3) с осью  $Y$  останутся на месте, а все остальные точки приблизятся к оси  $Y$  в  $a$  раз; например, вершина  $O'(-b, 0)$  перейдет в положение  $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ .

Рекомендуем читателю проследить ход рассуждений при втором варианте третьего правила. При этом линия (1) сначала перейдет в линию (2), а затем в линию (4). На



Черт. 150.  $y = a^x$ .

Линия (4) изображена на черт. 149. Заметим, что коэффициент  $A$  вызывает равномерное сжатие к оси  $X$  с коэффициентом сжатия  $\frac{1}{A}$  (а не  $A$ !), потому что для применения соответствующего правила аффинного преобра-

**144. Общая синусоида.**  
Общей синусоидой называют линию

$$y = A \sin(\omega x + \alpha). \quad (4)$$

Эта линия является графиком гармонического колебания. Если под  $x$  подразумевать время, а под  $y$  — путь, проходимый в прямолинейном движении по некоторой оси, то  $\omega$  — угловая скорость (т. е.  $\omega = 2\pi N$ , где  $N$  — частота, или число колебаний за единицу времени),  $\alpha$  — начальная фаза,  $A$  — амплитуда. Функция (4) имеет период  $T$ , равный

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5)$$

На черт. 137 (стр. 158) была изображена обыкновенная синусоида  $y = \sin x$ . Коэффициент  $\omega$  вызывает равномерное сжатие к оси  $Y$  (влияние этого коэффициента показано на черт. 148).

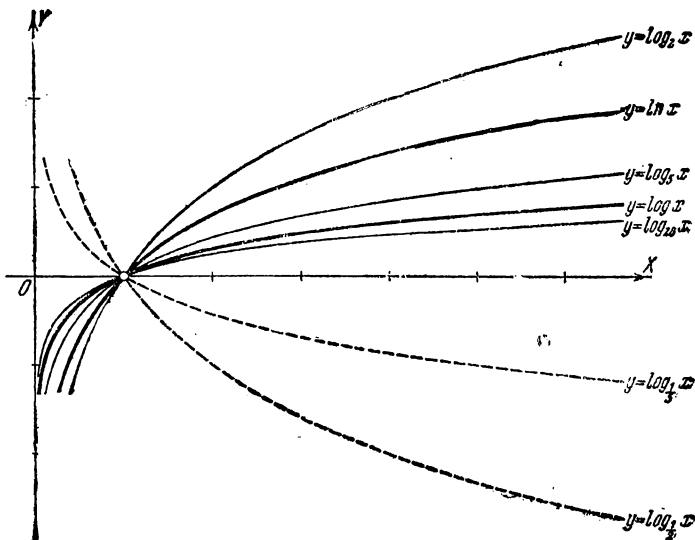
зования графиков следует отнести этот коэффициент к  $y$ , т. е. переписать уравнение (4) так:

$$\frac{1}{A} \cdot y = \sin(\omega x + \alpha).$$

**145. Показательная функция.** На черт. 150 изображены графики показательных функций

$$y = a^x \quad (6)$$

при различных (положительных) значениях основания  $a$ .



Черт. 151.  $y = \log_a x$ .

Как известно, всякое положительное число  $b$  может быть следующим образом представлено как степень любого положительного числа  $a$ :

$$b = a^{\log_a b}. \quad (7)$$

Поэтому показательная функция  $y = b^x$  может быть представлена так:

$$y = b^x = (a^{\log_a b})^x = a^{x \cdot \log_a b}$$

или

$$y = b^x = a^{kx} \quad (k = \log_a b). \quad (8)$$

Отсюда видно, что функция  $b^x$  получается из функции  $a^x$  введением коэффициента  $k$  при  $x$ . Это значит, что:

*Графики любых двух показательных функций  $a^x$  и  $b^x$  получаются один из другого равномерным сжатием к оси  $Y$ .*

Из формул (8) читатель поймёт, что это равномерное сжатие включает отражение в оси  $Y$  в том случае, когда  $a$  и  $b$  расположены по разные стороны

единицы (т. е. одно из этих оснований меньше единицы, а другое больше единицы), потому что в этом случае  $k < 0$ .

Для всех графиков (7) ось  $X$  служит асимптотой.

#### 146. Логарифмическая функция. Логарифмическая функция

$$y = \log_a x \quad (9)$$

является *обратной* функцией по отношению к показательной функции  $y = a^x$ . Поэтому графики логарифмических функций при различных основаниях мы получим, перевернув черт. 150 вокруг прямой  $y = x$  (черт. 151).

*Графики любых двух логарифмических функций  $\log_a x$  и  $\log_b x$  получаются один из другого равномерным сжатием к оси  $X$ .*

Это свойство может быть выведено и без обращения к переворачиванию черт. 150. Известно, что переход от одной системы логарифмов к другой осуществляется посредством умножения всех логарифмов первой системы на одно и то же число, называемое *модулем перехода*:

$$\log_b N = M \cdot \log_a N \quad (M = \log_b a). \quad (10)$$

Для всех графиков (9) ось  $Y$  служит асимптотой.

#### Упражнения

**244.** Построить график движения точки, совершающей гармоническое колебание с периодом 0,008 сек., с амплитудой  $6 \mu^*$  и с начальной фазой  $42^\circ$ .

**245.** Построить графики

$$\text{a) } y = (2x + 3)^{\frac{3}{2}} - 5; \quad \text{b) } y = 3 \ln(4x - 1) + 2; \quad \text{c) } y = 2(x - 3)^3 + 1.$$

#### Задачи

**246.** Выяснить общий вид графиков следующих функций и начертить их от руки (не прибегая к построению по точкам):

$$\text{a) } y = \pm \sqrt{3x + 6}; \quad \text{b) } y = \pm \sqrt{2 - 5x}; \quad \text{c) } y = \pm \sqrt{2x}.$$

**247.** Исследовать график функции

$$y = \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

(квадратный корень из квадратного трёхчлена).

**248.** Выяснить общий вид графиков следующих функций и начертить их от руки (не прибегая к построению по точкам):

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \pm \sqrt{x^2 - 3}; & \text{f) } y = \pm \sqrt{1 - x^2}; \\ \text{b) } y = \pm \sqrt{6 - 2x^2}; & \text{g) } y = \pm \sqrt{9x^2 + 72}; \\ \text{c) } y = \pm \sqrt{3x^2 + 30x + 78}; & \text{h) } y = \pm \sqrt{6x - 7 - x^2}; \\ \text{d) } y = \pm \sqrt{4x^2 - 8}; & \text{i) } y = \pm \sqrt{x^2 - 2x + 14}; \\ \text{e) } y = \pm \sqrt{-1 - x^2}; & \text{j) } y = \pm \sqrt{20x - 42 - 2x^2}. \end{array}$$

\*)  $\mu$  — микрон (0,001 м).

**249.** Выяснить общий вид графиков следующих функций и вычертить их от руки (не прибегая к построению по точкам):

$$\text{a) } y = \frac{2x}{3x-4}; \quad \text{c) } y = \frac{2x+1}{3(x+2)};$$

$$\text{b) } y = \frac{3x+4}{2(x+1)}; \quad \text{d) } y = \frac{5}{3x-1}.$$

**250.** Выяснить общий вид графиков следующих функций:

$$\text{a) } y = \arcsin 2x; \quad \text{c) } y = \operatorname{arctg}(2x-1);$$

$$\text{b) } y = \arccos \frac{x}{2}; \quad \text{d) } y = \arcsin(3-x);$$

$$\text{e) } y = \arccos \frac{x+5}{2}.$$

**251.** Выяснить общий вид графика функции

$$y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

и начертить его от руки, не прибегая к построению по точкам.

---

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

---

Читатель, знакомый с аналитической геометрией на плоскости, должен до некоторой степени предвидеть, чем занимается аналитическая геометрия в пространстве: она изучает геометрические образы в пространстве при помощи аналитических выкладок.

В аналитической геометрии в пространстве, как и в аналитической геометрии на плоскости, положение точки определяется заданием чисел — координат точки, но в пространстве положение точки определяется не двумя координатами, как на плоскости, а тремя. Этот вопрос рассматривается в главе X.

Аналитическая геометрия на плоскости изучает линии при помощи их уравнений. Вследствие того что точка в пространстве имеет три координаты, можно рассматривать между ними *либо одно, либо два уравнения* (на плоскости можно было рассматривать только одно уравнение между текущими координатами, так как два уравнения не оставляли места никакой неопределённости и, следовательно, определяли не геометрическое место точек, а отдельные точки). Этому аналитическому факту соответствует тот геометрический факт, что геометрические образы в пространстве более разнообразны, чем на плоскости: на плоскости мы изучали только линии, в пространстве же будем изучать *поверхности и линии*. Этому вопросу посвящена глава XIII, в которой и раскрывается главное содержание аналитической геометрии в пространстве.

Перед тем как приступить непосредственно к аналитической геометрии в пространстве, мы излагаем теорию проекций в пространстве. Её назначение — то же, что и в геометрии на плоскости: служить аппаратом, при помощи которого можно делать геометрические выводы общего характера, не зависящие от случайного расположения частей чертежа.

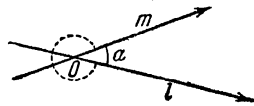
В главе XI излагаются элементы векторной алгебры. Пользуясь векторной алгеброй, можно изложить аналитическую геометрию проще и нагляднее, чем без неё.

---

## ГЛАВА X КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

### § 1. Проекция на ось

**147. Углы между осями и векторами в пространстве.** Понятие об угле между двумя осями в пространстве отличается от понятия об угле между двумя осями на плоскости. Пусть через некоторую точку  $O$  проходят две оси  $l$  и  $m$  (черт. 152). Будем искать угол, на который надо повернуть одну ось (в плоскости обеих осей), для того, чтобы её положительное направление совпало с положительным направлением другой оси. Таких углов два (см. углы, отмеченные сплошной и пунктирной дугами на черт. 152); эти два угла в сумме составляют  $360^\circ$ . Меньший из этих двух углов мы и будем считать углом между двумя осями. Итак, по самому определению *угол между двумя осями в пространстве не может превосходить  $180^\circ$* .



Черт. 152. Угол между осями.

Заметим, что мы не устанавливаем в пространстве положительного направления для отсчёта углов, и, говоря об угле между осями  $l$  и  $m$ , мы не различаем, берётся ли угол от  $l$  к  $m$  или от  $m$  к  $l$ . Таким образом, угол между двумя осями в пространстве есть величина существенно положительная. Обозначив этот угол через  $\alpha$

$$(l, m) = (m, l) = \alpha,$$

запишем:

$$0 \leq \alpha \leq 180^\circ. \quad (1)$$

Поясним, почему на плоскости условились различать положительное и отрицательное направления отсчёта углов, а в пространстве — нет. Если на плоскости мы имеем ось, проходящую через некоторую точку  $O$ , и желаем повернуть эту ось около точки  $O$  на угол  $\alpha$ , то этот поворот можно произвести в двух противоположных направлениях (против часовой стрелки или по часовой стрелке); поэтому можно принять одно из них за положительное, а другое — за отрицательное. В пространстве же ось, проходящую через  $O$ , можно повернуть около точки  $O$  на угол  $\alpha$  в бесконечном множестве направлений (в разных плоскостях, проходящих через эту ось).

Определяя угол между двумя осями, мы предполагали, что эти оси имеют общую точку  $O$ . Если же они скрещиваются, то мы

берём в пространстве произвольную точку  $O$  и проводим через эту точку две оси, параллельные соответственно  $l$  и  $m$  и имеющие те же направления (две параллельные оси могут иметь направления либо одинаковые, либо противоположные); угол между этими осями и считается углом между данными осями  $l$  и  $m$ . Легко показать, что этот угол не зависит от выбора точки  $O$ .

Обратим внимание читателя на следующее важное свойство угла между осями:

*Пусть угол между двумя осями равен  $\alpha$ . Если на одной из осей изменить направление на противоположное, то угол между осями станет равен  $180^\circ - \alpha$ .*

Доказательство предоставляем читателю; следует обратить внимание на то, что если угол  $\alpha$  удовлетворяет неравенству (1), то и угол  $180^\circ - \alpha$  удовлетворяет этому неравенству.

Из сформулированного выше свойства вытекает, что если на обеих осях изменить направления на противоположные, то угол между осями не изменится.

Если даны ось  $l$  и вектор  $\overline{AB}$ , то углом между ними называется угол между осью  $l$  и осью, направление которой совпадает с направлением вектора  $\overline{AB}$  (подчёркиваем, что ось, направление которой совпадает с направлением вектора, не только параллельна этому вектору, но и направлена в ту же сторону, а не в противоположную). Этот угол обозначается так:

$$(l, \overline{AB}).$$

Углом между двумя векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  называется угол между осями, направления которых совпадают соответственно с направлениями данных векторов. Этот угол обозначается так:

$$(\overline{AB}, \overline{CD}).$$

Углы  $(l, \overline{AB})$  и  $(\overline{AB}, \overline{CD})$  всегда удовлетворяют неравенству (1).

**148. Проекция на ось.** Пусть в пространстве дана ось  $l$  и точка  $A$  (черт. 153). Проведём через точку  $A$  плоскость, перпендикулярную к оси  $l$ . Точка  $A$  пересечения этой плоскости с  $l$  называется проекцией точки  $A$  на ось  $l$ .

Очевидно  $AA' \perp l$ . Проектирование точки на ось можно осуществить иначе, а именно так: проводим плоскость, проходящую через  $A$  и  $l$ , и в этой плоскости опускаем перпендикуляр из  $A$  на  $l$ ; этот перпендикуляр попадёт в ту же точку  $A'$ .

Возьмём вектор  $\overline{AB}$  и спроектируем его на ось  $l$ . Для этого достаточно спроектировать точки  $A$  и  $B$ , проводя через них соответственно плоскости  $P$  и  $Q$ , перпендикулярные к  $l$  (черт. 154); в результате мы получим на оси направленный отрезок  $A'B'$ , являющийся проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$ . Весьма существенно, что под  $A'B'$  мы понимаем *направленный отрезок*, т. е.  $A'B'$  имеет знак  $+$  или  $-$ , смотря соответственно по тому, совпадает ли



направление  $A'B'$  (считая от  $A'$  к  $B'$ ) с направлением оси  $l$  или же эти два направления противоположны. Таким образом, по определению *проекция всякого вектора на ось есть относительное число* (а не вектор). Запись:

$$\text{пр}_l \overline{AB} = A'B'.$$

Обращаем внимание читателя на то, что перпендикуляры  $AA'$  и  $BB'$ , проектирующие точки  $A$  и  $B$  на ось  $l$ , вообще говоря, не параллельны друг другу, а являются *скрещивающимися (косыми)* прямыми; они параллельны лишь в том случае, когда точки  $A, B$  и ось  $l$  лежат в одной плоскости.

Выведем формулу для проекции вектора на ось. Проводим через точку  $A$  прямую, параллельную оси  $l$ , и обозначим через  $C$  точку пересечения этой прямой с плоскостью  $Q$  (черт. 155). Треугольник  $ABC$  прямоугольный (почему?). Проекция  $A'B'$  по абсолютной величине равна катету  $AC$ . Из треугольника  $ABC$  находим:

$$AC = AB \cdot \cos \widehat{BAC}, \quad (*)$$

но угол  $\widehat{BAC}$  равен либо  $(l, \overline{AB})$  [черт. 155 а) и d)], либо  $180^\circ - (l, \overline{AB})$  [черт. 155 б) и с)]; таким образом

$$\cos \widehat{BAC} = \pm \cos (l, \overline{AB}).$$

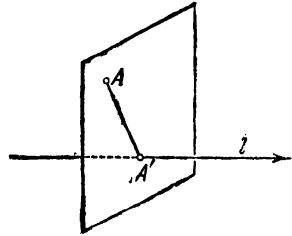
Формула (\*) даёт длину  $AC$ . Учитывая, что проекция  $A'B'$ , будучи по абсолютной величине равна  $AC$ , может иметь знак  $+$  или  $-$  и что  $\cos \widehat{BAC} = \pm \cos (l, \overline{AB})$ , напомним:

$$A'B' = \pm AB \cdot \cos (l, \overline{AB}). \quad (**)$$

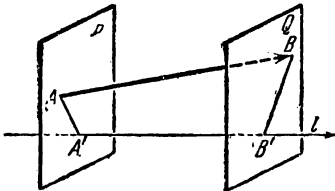
Рассматривая черт. 155, мы видим, что знак проекции  $A'B'$  всегда совпадает со знаком  $\cos (l, \overline{AB})$  [в случаях а) и d) и проекция и косинус положительны, а в случаях б) и с) оба отрицательны]. Следовательно, в формуле (\*\*) всегда следует брать знак  $+$  ( $\overline{AB}$ , как длина вектора  $\overline{AB}$ , есть величина существенно положительная). Итак,

$$\text{пр}_l \overline{AB} = AB \cdot \cos (l, \overline{AB}). \quad (2)$$

*Проекция вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус его угла с осью.*



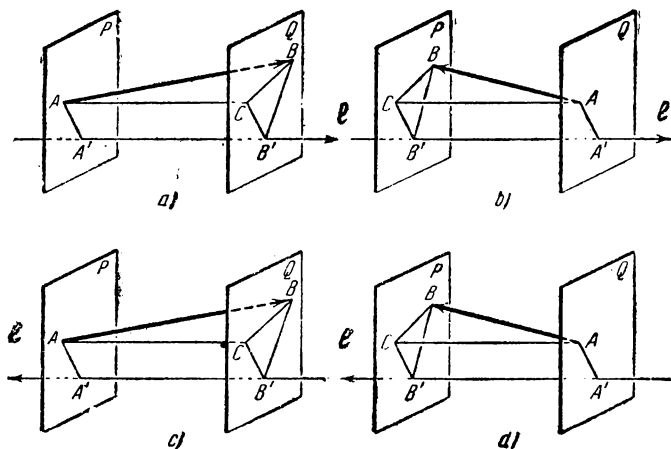
Черт. 153. Проекция точки на ось.



Черт. 154. Проекция вектора на ось.

Теорема о проекции направленного отрезка на ось также имеет место и в пространстве. Все рассуждения п 6 (стр. 18—19) могут быть повторены дословно.

Если дана ломаная линия, то можно выбрать на ней определённое направление обхода; тем самым установится определённое направление на каждом её звене, т. е. эти звенья будут являться векторами. Проекция ломаной на ось определяется как сумма проек-



Черт. 155.  $\text{пр}_l \overline{AB} = AB \cdot \cos(l, \overline{AB})$ .

ций её звеньев на эту ось, причём звенья можно рассматривать либо как векторы, либо как направленные отрезки. Относительно проекции ломаной линии на ось имеет место та же теорема, что и в геометрии на плоскости, а именно: *проекция ломаной линии на ось равна проекции её замыкающего вектора на ту же ось*.

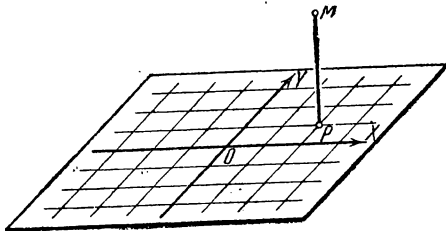
Доказывается эта теорема так же, как и в геометрии на плоскости [Введение, п 7 (стр. 19—20)]; черт. 8 (там же) пришлось бы изменить; ломаная  $ABCDE$  — пространственная, и проектирующие перпендикуляры  $AA', BB', CC', DD'$  и  $EE'$  не параллельны друг другу.

Разумеется, сохраняют силу и два следствия из этой теоремы, приведённые в п 7 (стр. 20).

## § 2. Декартова прямоугольная система координат в пространстве

**149. Определение положения точки в пространстве.** Задача определения положения точки в пространстве ставится так же, как и аналогичная задача на плоскости: надо уметь описать положение всякой точки пространства так, чтобы её нельзя было смешать ни с какой другой точкой.

Вообразим в пространстве плоскость, на которой установлена декартова прямоугольная система координат (черт. 156). Если теперь дана в пространстве какая-нибудь точка  $M$ , то её можно спроектировать на эту плоскость; проекцию назовём  $P$ . Точка  $P$  имеет определённые координаты (на черт. 156 для точки  $P$   $x=2$ ,  $y=1$ ). Если, кроме координат точки  $P$ , мы укажем 1) расстояние точки  $M$  от плоскости, т. е. длину перпендикуляра  $PM$ , 2) с какой стороны от плоскости лежит точка  $M$  (сверху или снизу), то положение точки  $M$  будет вполне определено. Последние два указания можно объединить в одно, если условиться считать перпендикуляр  $PM$  положительным, когда он направлен в одну сторону от плоскости, и отрицательным, когда — в другую.



Черт. 156. Определение положения точки в пространстве.

Итак, если в пространстве имеется плоскость, на которой установлена декартова прямоугольная система координат, то, чтобы определить положение любой точки  $M$  в пространстве, надо указать три числа: 1) и 2) — координаты проекции точки  $M$  на взятую плоскость, 3) длину перпендикуляра  $PM$ , снабжённую знаком  $+$  или  $-$ , указывающим, в какую сторону от плоскости откладывается эта длина. Эти три числа называются *координатами* точки  $M$ . Первые две координаты называются попрежнему *абсциссой* и *ординатой* и обычно обозначаются соответственно буквами  $x$  и  $y$ . Третья координата называется *апликатой* и обычно обозначается буквой  $z$ . Аликата, так же как и абсцисса и ордината, может быть положительной и отрицательной и иметь любую абсолютную величину, т. е.

$$-\infty < z < \infty.$$

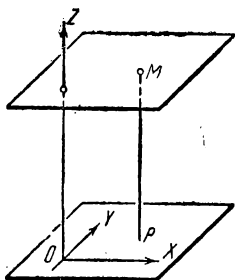
Тот факт, что точка  $M$  имеет координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , записывается так:  $M(x, y, z)$ .

### 150. Декартова прямоугольная система координат в пространстве.

В рассуждениях предыдущего п координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  не равноправны: координата  $z$  играет особую роль. Это обстоятельство легко устранить.

Восставим в точке  $O$  перпендикуляр к плоскости  $XOY$  (черт. 157) и проведём через точку  $M$  плоскость, параллельную плоскости  $XOY$ ; обозначим через  $U$  точку пересечения этого перпендикуляра с этой плоскостью. Очевидно,  $OU=PM$ . Таким образом, аликату можно откладывать на перпендикуляре, восставленном

к плоскости  $XOY$  в начале координат. Этот перпендикуляр с отмеченным на нём положительным направлением мы будем называть «*осью аппликат*» или «*осью зетов*» (пишется «ось  $Z$ »).



Черт. 157. Определённые положения точки в пространстве.

Таким образом, мы имеем теперь три оси координат: ось  $X$ , ось  $Y$  и ось  $Z$ . Через каждую пару этих осей можно провести плоскость; эти плоскости называются *координатными плоскостями* и обозначаются так: плоскость  $XY$ , плоскость  $YZ$  и плоскость  $ZX$ .

Решим теперь две основные задачи: 1) имея точку, построить её координаты и, 2) зная координаты точки, построить эту точку.

Пусть дана в пространстве точка  $M$ . Опустим из неё перпендикуляры на координатные плоскости (черт. 158)\*): на плоскость  $XY$  — перпендикуляр  $MP$ , на плоскость  $YZ$  — перпендикуляр  $MQ$ , на плоскость  $ZX$  — перпендикуляр  $MR$ . Из точек  $P$  и  $R$  опускаем перпендикуляры на ось  $X$ ; эти перпендикуляры попадут в одну и ту же точку  $S$  (почему?). Опускаем также перпендикуляры из точек  $P$  и  $Q$  на ось  $Y$  и из точек  $Q$  и  $R$  на ось  $Z$ . В результате этих построений мы получим параллелепипед  $MRUQPSOT$ . Каждой точке  $M$  пространства соответствует такой параллелепипед. Рёбра этого параллелепипеда, взятые с соответствующими знаками, и представляют собой координаты точки  $M$ :

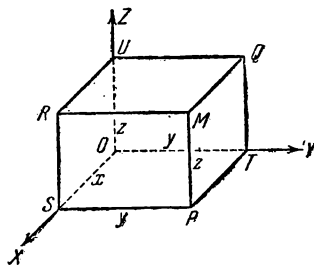
$$OS = TP = QM = UR = x,$$

$$OT = SP = RM = UQ = y,$$

$$OU = TQ = PM = SR = z.$$

Важно заметить, что плоскость  $MPSR$  перпендикулярна к оси  $X$ ,

$$\begin{array}{lll} \gg & MQTP & \gg \quad \gg \quad Y, \\ \gg & MRUQ & \gg \quad \gg \quad Z. \end{array}$$



Черт. 158. Координаты точки.

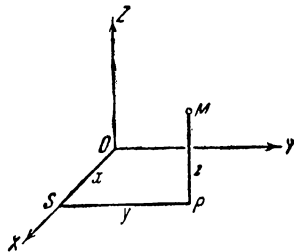
Из перпендикулярности этих трёх плоскостей координатным осям вытекает, что *прямые  $MS$ ,  $MT$  и  $MU$*  (на чертеже они не проведены) *суть перпендикуляры, опущенные из точки  $M$  на координатные оси.*

\*) Чтобы устранить неудобство, заключающееся в том, что положительное направление одной из осей (оси  $Y$ ) идёт от читателя, вся система повернута около оси  $Z$  на  $90^\circ$ . После поворота ось  $X$  идёт вперёд, а ось  $Y$  вправо. Начиная с черт. 158, такое расположение будет употребляться всегда.

Для решения второй задачи укажем два способа.

**Первый способ.** Откладываем данные координаты от начала  $O$  на соответствующих координатных осях; при этом знак каждой координаты указывает, в каком направлении её следует откладывать на соответствующей оси. Обозначим через  $S$ ,  $T$  и  $U$  концы отрезков, отложенных соответственно на осях  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Проводим через  $S$  плоскость, перпендикулярную к оси  $X$ , через  $T$  — плоскость, перпендикулярную к оси  $Y$ , через  $U$  — плоскость, перпендикулярную к оси  $Z$ . Точка пересечения этих трёх плоскостей и есть точка  $M$ .

**Второй способ (черт. 159).** Откладываем на оси  $X$  отрезок  $OS = x$  (вперёд или назад \*), смотря по тому, положительно ли  $x$  или отрицательно). В точке  $S$  восстанавливаем перпендикуляр к оси  $X$ , лежащей в плоскости  $XY$ ; на этом перпендикуляре откладываем отрезок  $SP = y$  (вправо или влево, смотря по тому, положительно ли  $y$  или отрицательно). В точке  $P$  восстанавливаем перпендикуляр к плоскости  $XY$ , на этом перпендикуляре откладываем отрезок  $PM = z$  (вверх или вниз, смотря по тому, положительно ли  $z$  или отрицательно).



Черт. 159. Координаты точки (упрощённый чертёж).

Установленный выше способ определения положения точки в пространстве называется *декартовой прямоугольной системой координат*, потому что он является непосредственным обобщением декартовой прямоугольной системы координат на плоскости \*\*).

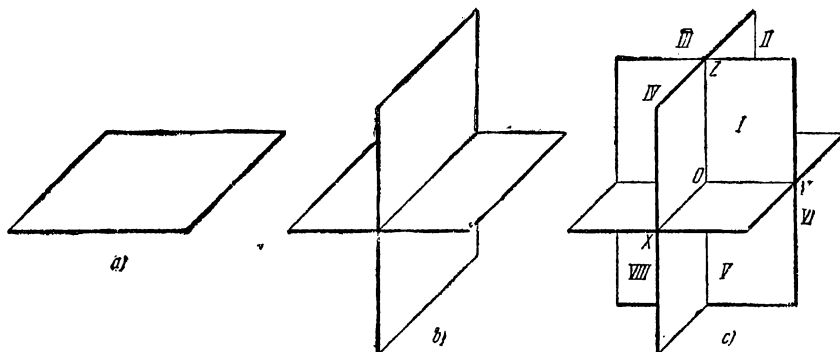
Координатные плоскости делят всё пространство на восемь частей. В самом деле, если мы проведём только плоскость  $XY$ , то она разделит пространство на две части (черт. 160). Если мы теперь проведём ещё плоскость  $YZ$ , то каждая из этих двух частей разделится ещё на две части: таким образом, образуется четыре части. Если, наконец, мы проведём ещё плоскость  $ZX$ , то каждая из этих четырёх частей разделится ещё на две части, и мы получим восемь частей. Эти восемь частей называются *октантами*. Тот октант, который определяется положительными частями всех трёх осей, называется *нормальным* или *первым* октантом. Мы будем нумеровать октанты следующим образом. Сначала нумеруются все верхние

\*) Слова «вперёд» и «назад» относятся к такому выбору направлений на координатных осях, какой имеет место на черт. 158 и 159. Вообще же следовало бы сказать «параллельно положительному направлению оси  $X$ » и «параллельно отрицательному направлению оси  $X$ ».

Аналогичное замечание относится к словам «вправо» и «влево» и «вверх» и «вниз», встречающимся несколькими строками ниже.

\*\*) Сам Декарт не рассматривал вопросов аналитической геометрии в пространстве.

октанты \*), начиная с первого в порядке против часовой стрелки (если смотреть сверху). Затем нумеруются нижние октанты: октант, находящийся под первым, считается пятым, и дальше нумерация идёт против часовой стрелки (см. черт. 160).



Черт. 160. Деление пространства координатными плоскостями.

Каждому октанту соответствует своя комбинация знаков координат, а именно:

Октант	Знак абсциссы	Знак ординаты	Знак аппликаты
I	+	+	+
II	—	+	+
III	—	—	+
IV	+	—	+
V	+	+	—
VI	—	+	—
VII	—	—	—
VIII	+	—	—

Если у некоторой точки одна из координат равна нулю, то эта точка лежит в координатной плоскости, а именно:

если  $x=0$ , то точка лежит в плоскости  $YZ$ ,  
 »  $y=0$ , » » » »  $ZX$ ,  
 »  $z=0$ , » » » »  $XY$ .

Если две координаты суть нули, то точка лежит на координатной оси:

если  $x=0$  и  $y=0$ , то точка лежит на оси  $Z$ ,  
 » ,  $y=0$  »  $z=0$ , » » » »  $X$ ,  
 »  $z=0$  »  $x=0$ , » » » »  $Y$ .

\*) Лучше сказать: октанты, лежащие по ту же сторону плоскости  $XY$ , что и первый октант.

Если три координаты суть нули, то точка совпадает с началом координат.

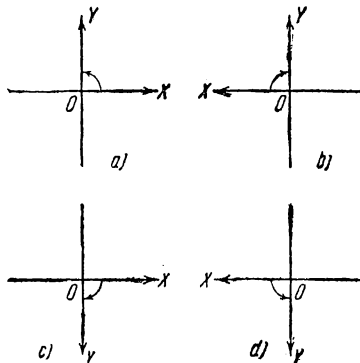
Вектор  $\overline{OM}$  называется *радиусом-вектором* точки  $M$ . Замечая, что радиус-вектор является диагональю прямоугольного параллелепипеда, измерения которого суть  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим для длины радиуса-вектора  $r$  следующее выражение:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1)$$

Координаты точки  $M$  суть проекции её радиуса-вектора на оси координат:

$$x = \text{пр}_X \overline{OM}, \quad y = \text{пр}_Y \overline{OM}, \quad z = \text{пр}_Z \overline{OM}. \quad (2)$$

**151. Правая и левая системы координат.** В аналитической геометрии на плоскости мы всегда выбирали положительные направления на осях так, как показано на черт. 161, *a*. Не поворачивая осей координат (оставляя ось  $X$  горизонтальной, а ось  $Y$  вертикальной), можно выбрать положительные направления на осях четырьмя различными способами. Вспомогаясь в черт. 161, на котором изображены эти четыре способа, мы замечаем, что в случаях *a*) и *d*) вращение от положительной части оси  $X$  к положительной части оси  $Y$  происходит против часовой стрелки, а в случаях *b*) и *c*) — по часовой стрелке.

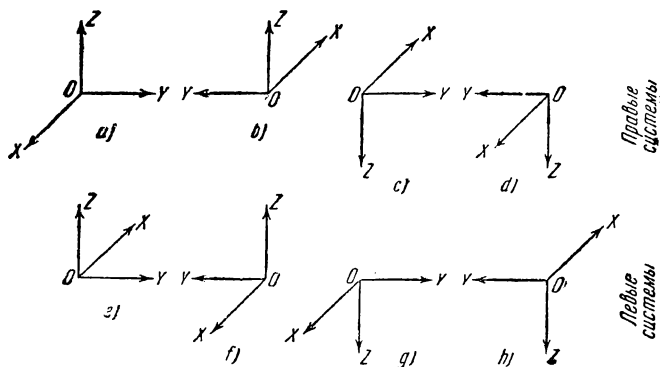


Черт. 161. Конгруэнтные и симметричные системы координат на плоскости.

Далее, мы замечаем, что систему *a*) можно совместить с системой *d*), повернув её на  $180^\circ$ . Таким же образом систему *b*) можно совместить с системой *c*). Совместить же две системы, у которых вращение от положительной части оси  $X$  к положительной части оси  $Y$  совершается в разных направлениях [например, систему *a*) с системой *b*)], не выходя из плоскости чертежа, нельзя. Чтобы совместить систему *a*) с системой *b*), необходимо систему *a*) *перевернуть* на  $180^\circ$ , например, вокруг оси  $X$ , т. е. выйти в третье измерение.

Системы, которые можно совместить друг с другом путём движения в плоскости, называются *конгруэнтными*; системы, для совмещения которых необходим выход в третье измерение, называются *симметричными*. Конгруэнтные системы, как, например, *a*) и *d*) на черт. 161, геометрически неразличимы; это — одна и та же система в разных положениях.

Рассмотрим теперь аналогичный вопрос в пространстве. Выбирая на каждой из трёх осей двумя различными способами положительное направление, мы получим восемь комбинаций, изображённых на черт. 162



Черт. 162. Конгруэнтные и симметричные системы координат в пространстве.

(для ясности чертежа отрицательные части осей не показаны). Отметим стрелкой направление вращения от положительной части оси  $X$  к положительной части оси  $Y$ . Если мы пожелаем в каждом случае выяснить, происходит ли это вращение по часовой стрелке или против, то, чтобы вопрос имел смысл, необходимо указать, с какой стороны мы смотрим на плоскость  $XU$ . Если мы условимся во всех случаях смотреть на плоскость  $XU$  со стороны положительной части оси  $Z$ , то можно сказать, что в системах черт. 162,  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$  и  $d)$  вращение от положительной части оси  $X$  к положительной части оси  $Y$  происходит против часовой стрелки, а в системах  $e)$ ,  $f)$ ,  $g)$  и  $h)$  — по часовой стрелке. Системы типа  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$  и  $d)$  называются *правыми* (иногда *английскими*) системами, а системы типа  $e)$ ,  $f)$ ,  $g)$  и  $h)$  — *левыми* (иногда *французскими*) системами.

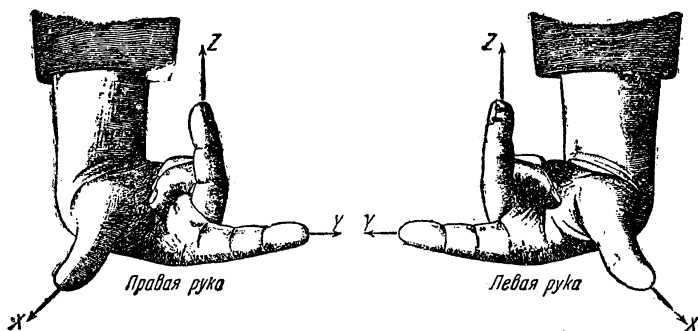
Любую левую систему можно совместить с любой другой левой, надлежащим образом перемещая её в пространстве; так же обстоит дело и с двумя правыми системами. Совместить же левую систему с правой нельзя. Пробыя сделать это, читатель заметит, что если две оси одной системы совместить с двумя соответственными осями другой системы, то третьи оси пойдут в противоположных направлениях.

На плоскости мы могли совместить две симметричные системы путём переворачивания, т. е. вывода одну из систем из плоскости в третье измерение. В пространстве (где мы лишены аналогичной возможности) мы вовсе не можем совместить две симметричные системы.

В данном выше определении правой и левой системы можно произвести циклическую замену букв (т. е. заменить  $X$  через  $Y$ ,  $Y$  через  $Z$  и  $Z$  через  $X$ ). В самом деле:



У *правой системы* следующие вращения происходят *против часовой стрелки*: от положительной части оси  $X$  к положительной части оси  $Y$  (если смотреть с положительной части оси  $Z$ ), от положительной части оси  $Y$  к положительной части оси  $Z$  (если смотреть с положительной части оси  $X$ ), от положительной части оси  $Z$



Черт. 163.

к положительной части оси  $X$  (если смотреть с положительной части оси  $Y$ ).

У *левой системы* все эти вращения происходят *по часовой стрелке*. При этом мы всюду подразумеваем, что вращение производится кратчайшим способом (т. е. на угол, равный  $90^\circ$ , а не  $270^\circ$ ).

Названия «правая» и «левая» системы имеют следующее происхождение. Если расположить три пальца руки — большой, указательный и средний — по трём взаимно перпендикулярным направлениям и принять большой палец за ось  $X$ , указательный — за ось  $Y$  и средний — за ось  $Z$ , то пальцы правой руки образуют систему типа *a*), *b*), *c*) и *d*), а пальцы левой руки — систему типа *e*), *f*), *g*) и *h*) (черт. 163).

В этой книге мы будем пользоваться правой системой. Это делается для определённости (т. е. потому, что надо выбрать какую-то одну систему); разумеется, обе системы равноправны.

## ГЛАВА XI

### ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

#### § 1. Основные понятия

**152. Предмет векторного исчисления.** Понятие о векторе уже знакомо читателю как из первой части этой книги, так, вероятно, и из физики и механики.

В векторном исчислении векторы являются объектами исчисления; над векторами производятся действия сложения, умножения, дифференцирования и т. д. Эти действия производятся по определённым формальным правилам, аналогичным тем правилам, по которым производятся соответственные действия над числами, но за этими действиями скрываются геометрические преобразования векторов. Формальные правила, по которым производятся действия над векторами, весьма просты, а соответствующие им геометрические преобразования бывают весьма сложны. Оценить это преимущество векторного исчисления читатель сможет, когда ознакомится с этой главой.

Векторное исчисление разделяется на векторную алгебру, изучающую алгебраические действия над векторами (сложение, умножение и т. д.), и векторный анализ, изучающий действия над векторами, основанные на понятии предельного перехода (дифференцирование и интегрирование). В этой главе излагаются элементы векторной алгебры.

Векторная алгебра и аналитическая геометрия приносят друг другу взаимную пользу. С одной стороны, соотношения между векторами часто бывает выгодно записывать (и действовать с ними), пользуясь координатами (читатель неоднократно убедится в этом при чтении настоящей главы). С другой стороны, многие вопросы аналитической геометрии решаются значительно проще при помощи аппарата векторной алгебры, в чём читатель убедится при чтении главы XIV.

Выгода от применения векторной алгебры сказывается, главным образом, в аналитической геометрии в пространстве, где приходится решать более сложные геометрические вопросы, чем в аналитической геометрии на плоскости. Поэтому настоящая глава и включена во вторую часть настоящего «Курса».

Заметим, что все вопросы аналитической геометрии, разрешаемые при помощи векторной алгебры, могут быть решены и без неё, хотя часто это оказывается более сложным.

**153. Векторные и скалярные величины.** Величины, рассматриваемые в естествознании, можно разделить на *скалярные* и *векторные*. Величина называется скалярной, если она вполне определяется заданием её числового значения; величина называется векторной, если для её полного определения надо, кроме её числового значения, задать ещё её направление в пространстве.

Утверждение, что величина вполне определяется заданием её числового значения, следует понимать так: два значения этой величины, выражающиеся одним и тем же числом, равны между собой, т. е. ничем не отличаются друг от друга. Например, две массы, каждая из которых равна 4 г, ничем не отличаются друг от друга; масса — скалярная величина. Сила же не определяется вполне числовым значением. Две силы, каждая из которых равна 3 кг\*, могут быть не равны друг другу, так как, если у них разные направления, то их действие будет неодинаково. Сила — векторная величина; для задания её необходимо, кроме числового значения, указывать ещё направление в пространстве.

В качестве примеров скалярных величин можно привести массу, длину, поверхность, объём, работу, плотность и т. д. Примеры векторных величин: скорость, ускорение, сила, перемещение и т. д.

Векторное исчисление рассматривает векторы, отвлекаясь от конкретного физического смысла векторных величин, так же, как обычный анализ рассматривает числа, отвлекаясь от конкретного физического смысла скалярных величин, которые измеряются этими числами. Вектор изображается стрелкой, причём длина этой стрелки изображает в некотором масштабе числовое значение соответствующей векторной величины, а направление стрелки совпадает с направлением этой величины.

Мы уже условились во Введении (стр. 13) обозначать векторы двумя буквами (первая из которых обозначает начало вектора, а вторая — конец) с чертой сверху:

$$\overline{AB}.$$

Иногда вектор обозначают одной буквой с чертой сверху:

$$\overline{a}.$$

В печати весьма распространено обозначение векторов буквами жирного шрифта:

$$\mathbf{a},$$

в отличие от скалярных величин, которые обозначаются буквами обычного шрифта. При этом, если жирная буква обозначает некоторый вектор, то *та же* светлая буква обозначает длину *этого*

вектора, т. е.  $a$  есть длина вектора  $\mathbf{a}$ . Впредь мы будем пользоваться преимущественно этим обозначением, но так как оно неудобно в рукописном тексте, то читатель должен иметь в виду, что *всюду, где в книге встречается жирная буква, он в своих рукописных выкладках должен употреблять соответствующую букву с чертой сверху*.

**154. Равенство векторов.** Два вектора называются равными, если они имеют одинаковую величину и одинаковое направление.

Таким образом, если написано, что вектор  $\overline{AB}$  равен вектору  $\overline{CD}$ :

$$\overline{AB} = \overline{CD},$$

то это значит, что:

- 1) Длина вектора  $\overline{AB}$  равна длине вектора  $\overline{CD}$ .
- 2) Направление вектора  $\overline{AB}$  совпадает с направлением вектора  $\overline{CD}$ . Напоминаем, что второе условие, в свою очередь, равносильно следующим двум:

- 2<sub>1</sub>) Векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  расположены на параллельных прямых.
- 2<sub>2</sub>) Векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{CD}$  направлены в одну сторону (а не в противоположные стороны).

В векторной алгебре между равными векторами не делается никакого различия. Это значит, что если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равны между собой:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b},$$

то в любых рассуждениях и выкладках, где фигурирует вектор  $\mathbf{a}$ , его можно заменить вектором  $\mathbf{b}$ .

Из изложенного выше ясно, что начало, или, как часто говорят, «точка приложения» вектора не играет роли. Это значит, что данный вектор  $\mathbf{a}$  можно перенести, поместив его начало в любую точку пространства. Этот перенос осуществляется так:

Через данную точку  $A$  проводим прямую, параллельную вектору  $\mathbf{a}$ . Из двух возможных направлений на этой прямой выбираем то, которое совпадает с направлением вектора  $\mathbf{a}$ . В этом направлении откладываем от точки  $A$  отрезок  $AB$ , длина которого равна длине вектора  $\mathbf{a}$ . Очевидно,  $\overline{AB} = \mathbf{a}$ .

Очевидно, знак равенства, стоящий между двумя векторами, имеет не тот смысл, что обычный знак равенства. Знак равенства, стоящий между векторами, выражает некоторый геометрический факт, смысл которого был разъяснён выше. Читатель ясно поймёт специфичность векторного равенства, если продумает следующее: пусть  $OA$  и  $OB$  суть радиусы одной окружности. Очевидно, можно написать:

$$OA = OB$$

(символ  $OA$  без черты сверху изображает *длину* отрезка  $OA$ ), но нельзя написать:

$$\overline{OA} = \overline{OB}.$$

Заметим, что в вопросах естествознания не всегда векторы, равные в том смысле, как определено выше, оказываются эквивалентными. Например, силу, приложенную к твёрдому телу, можно переносить только по прямой действия этой силы. Если перенести точку приложения силы в точку, не лежащую на прямой действия силы, то действие силы на твёрдое тело изменится.

**155. Модуль вектора.** Длина вектора, или, что — то же самое, *модуль* вектора, обозначается либо тем же символом, что и сам вектор, но заключённым в прямые чёрточки:

$$\text{модуль вектора } \overline{AB} = |\overline{AB}|,$$

$$\text{модуль вектора } \mathbf{a} = |\mathbf{a}|,$$

либо тем же символом, что и вектор, но без черты сверху или светлым шрифтом:

$$\text{модуль вектора } \overline{AB} = AB,$$

$$\text{модуль вектора } \mathbf{a} = a.$$

Модуль вектора есть скаляр (положительный).

Мы определили, что такое равные векторы. Векторы, не подходящие под это определение, являются неравными. Неравенство векторов записывается так:

$$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}.$$

Понятия же «больше» и «меньше» к векторам неприменимы. Запись

$$\mathbf{a} > \mathbf{b}$$

лишена смысла. Однако имеет смысл такая запись:

$$|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$$

или

$$a > b,$$

выражающая, что модуль (т. е. длина) вектора  $\mathbf{a}$  больше модуля вектора  $\mathbf{b}$ .

Точно так же лишена смысла запись

$$\mathbf{a} = 3 \text{ см},$$

но имеет смысл запись

$$|\mathbf{a}| = 3 \text{ см}.$$

Вектор, модуль которого равен нулю, называется *нуль-вектором*. У *нуль-вектора* конец совпадает с началом и, следовательно, он изображается точкой.

Нуль-вектор имеет неопределённое направление; это значит, что два вектора, модули которых суть нули, не отличаются один от другого, даже если приписать им различные направления. Этим свойством обладает только нуль-вектор.

Нуль-вектор обозначается символом  $0$ .

Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным вектором*. Единичный вектор, одинаково направленный с вектором  $\mathbf{a}$ , называется *единичным вектором вектора  $\mathbf{a}$*  и обычно обозначается той же буквой, что и вектор  $\mathbf{a}$ , но с нуликом сверху

$$\mathbf{a}^0.$$

Вообще нулик, стоящий сверху, указывает, что вектор — единичный \*).

В рукописи нулик ставится сверху под чертой:

$$\overline{a}^0.$$

## § 2. Линейные комбинации векторов

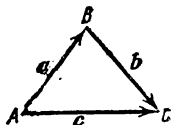
**156. Сложение векторов.** Суммой двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется третий вектор  $\mathbf{c}$ , получающийся следующим образом. Перенесём начало вектора  $\mathbf{b}$  в конец вектора  $\mathbf{a}$  (черт. 164) и построим вектор  $\mathbf{c}$ , начало которого совпадает с началом вектора  $\mathbf{a}$ , а конец — с концом вектора  $\mathbf{b}$ . Символически:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Данное выше правило для сложения двух векторов называется *правилом треугольника*.

Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  суть три точки, как угодно расположенные в пространстве, то всегда имеем:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \quad (1)$$



Черт. 164.  
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$   
(правило треугольника).

Знак «+», употребляемый здесь, имеет особый смысл: он обозначает некоторую геометрическую операцию, посредством которой из двух векторов получается третий вектор, называемый их суммой. Почему эта операция называется «сложением», а не как-нибудь иначе?

Отчасти это правило сложения векторов заимствовано из естествознания: по правилу треугольника складываются силы, скорости, перемещения и т. д. Математическая же причина, по которой данное действие названо сложением, заключается в том, что оно обладает теми же формальными свойствами, что и сложение скаляров.

\*) Это обозначение не строго обязательно. Иногда мы будем обозначать единичные векторы буквами без нуликов, оговаривая на словах, что они единичные.

**157. Формальные свойства сложения.** Основные формальные свойства обыкновенного сложения следующие:

1. *Когда имеется больше двух слагаемых, то их можно любым образом объединять в группы.* Например, для трёх слагаемых

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (2)$$

Равенство (2) гласит, что можно сложить  $a$  с  $b$ , а затем полученную сумму сложить с  $c$  или можно сложить  $b$  с  $c$ , а затем сложить  $a$  с полученной суммой — результат в обоих случаях будет тот же.

На основании этого свойства можно записывать сумму трёх чисел вовсе без скобок:  $a + b + c$ , где  $a + b + c$  обозначает одновременно и  $(a + b) + c$  и  $a + (b + c)$ .

Свойство (2) называется свойством *сочетательности* или *ассоциативности* сложения.

На основании формулы (2) можно доказать сочетательность для суммы любого числа слагаемых, т. е. доказать возможность группировать слагаемые любым образом, не меняя их порядка (о перемене порядка речь будет ниже).

Пусть, например, требуется доказать тождество

$$[a + (b + c)] + d = (a + b) + (c + d).$$

Производим на основании формулы (2) перегруппировку внутри квадратных скобок:

$$[a + (b + c)] + d = [(a + b) + c] + d.$$

Применяя ещё раз формулу (2), найдём:

$$[(a + b) + c] + d = (a + b) + (c + d).$$

Итак,

$$[a + (b + c)] + d = (a + b) + (c + d).$$

что и требовалось доказать.

Ввиду того, что расстановка скобок не влияет на результат, принято записывать сумму любого числа слагаемых вовсе без скобок:

$$a + b + c + d.$$

2. *Сумма не зависит от порядка слагаемых*

$$a + b = b + a. \quad (3)$$

Свойство (3) называется свойством *переместительности* или *коммутативности* сложения.

**158. Формальные свойства сложения векторов.** Мы сейчас покажем, что сложение векторов тоже обладает свойствами сочетательности и переместительности.

Расположим три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  так, чтобы начало каждого следующего совпадало с концом предыдущего (черт. 165):

$$\overline{AB} = \mathbf{a},$$

$$\overline{BC} = \mathbf{b},$$

$$\overline{CD} = \mathbf{c}.$$

Очевидно, имеем:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD},$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}.$$

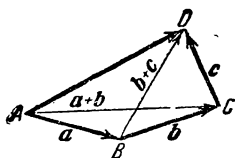
Следовательно,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (4)$$

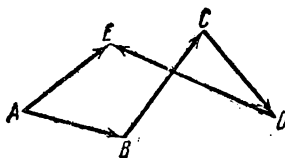
Вектор  $\overline{AD}$  можно обозначить  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ .

Складывая подобным образом сколько угодно векторов, мы придём к следующему правилу.

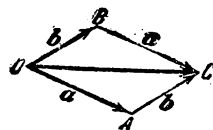
Чтобы сложить сколько угодно векторов, следует расположить их так, чтобы начало каждого следующего вектора совпадало с кон-



Черт. 165.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$   
(сочетательность сложения векторов).



Черт. 166.  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE}$   
(правило многоугольника).



Черт. 167.  
 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (переместительность сложения векторов).

цом предыдущего. Вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом последнего, является суммой всех векторов (черт. 166). Это правило сложения векторов называется *правилом многоугольника*.

Если  $A, B, C, D, \dots, K, L$  суть точки, как угодно расположенные в пространстве, то всегда имеем:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \dots + \overline{KL} = \overline{AL}. \quad (5)$$

Докажем теперь, что сложение векторов обладает свойством переместительности. Пусть даны два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Приведём их к общему началу, т. е. поместим их так, чтобы их начала совпали. Пусть  $\overline{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{OB} = \mathbf{b}$  (черт. 167).



Дополним полученный чертёж до параллелограмма, проводя  $BC \parallel OA$  и  $AC \parallel OB$ . Очевидно,

$$\overline{BC} = \overline{OA} = \mathbf{a},$$

$$\overline{AC} = \overline{OB} = \mathbf{b}.$$

Далее, очевидно,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC},$$

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \overline{OB} + \overline{BC} = \overline{OC}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

что и требовалось доказать.

Из вышеприведённого построения вытекает новое правило для сложения векторов. Чтобы сложить два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , надо привести их к общему началу и построить на них параллелограмм. Вектор, служащий диагональю этого параллелограмма и выходящий из той же точки, что и слагаемые векторы \*), является их суммой. Это правило сложения векторов называется *правилом параллелограмма*.

Укажем ещё одно построение для суммы трёх векторов. Приведём данные векторы к общему началу (черт. 168):

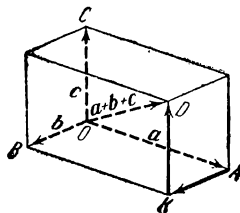
$$\mathbf{a} = \overline{OA},$$

$$\mathbf{b} = \overline{OB},$$

$$\mathbf{c} = \overline{OC}.$$

Построим на векторах  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  и  $\overline{OC}$  параллелепипед. Вектор  $\overline{OD}$ , являющийся диагональю этого параллелепипеда и выходящий из точки  $O$ , равен сумме данных трёх векторов:

$$\overline{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$



Черт. 168. Сложение трёх векторов (правило параллелепипеда).

Это легко доказать, замечая, что  $\overline{AK} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{KD} = \mathbf{c}$ , и складывая наши векторы по правилу многоугольника:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overline{OA} + \overline{AK} + \overline{KD} = \overline{OD}.$$

\*) Эта оговорка необходима потому, что в параллелограмме существуют четыре различных вектора, являющиеся его диагоналями; это — векторы  $\overline{OC}$ ,  $\overline{CO}$ ,  $\overline{AB}$  и  $\overline{BA}$ . Суммой векторов  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$  является вектор  $\overline{OC}$ .

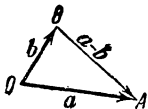
Приведённое построение для нахождения суммы трёх векторов называется *правилом параллелепипеда*. Оно применимо, если данные три вектора после приведения их к общему началу не лежат в одной плоскости.

**159. Вычитание векторов.** Вычитание векторов мы определим как действие, обратное сложению, т. е. так: вектор  $\mathbf{c}$  называется разностью векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и обозначается

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad (6)$$

если сумма  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  равна  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}. \quad (7)$$



Черт. 169.  
Вычитание  
векторов.

Другими словами, вычесть из вектора  $\mathbf{a}$  вектор  $\mathbf{b}$  — значит решить векторное уравнение (7), где  $\mathbf{c}$  — неизвестный вектор. Равенство (6), по определению, равносильно равенству (7).

Дадим геометрическое построение разности двух векторов. Приведём данные векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  к общему началу. Пусть  $\overline{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{OB} = \mathbf{b}$  (черт. 169). Требуется найти вектор, который в сумме с  $\mathbf{b}$  даёт  $\mathbf{a}$ . На основании правила треугольника для сложения ясно, что искомый вектор есть  $\overline{AB}$ . В самом деле,

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB},$$

следовательно,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}. \quad (8)$$

Итак, если два вектора приведены к общему началу, то их разность есть вектор, соединяющий их концы и идущий от вычитаемого к уменьшаемому (черт. 169).

Полезно заметить, что если на векторах  $\overline{OA} = \mathbf{a}$  и  $\overline{OB} = \mathbf{b}$  построить параллелограмм  $OACB$ , то сумма и разность векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  изображаются векторами-диагоналями параллелограмма  $OACB$ , а именно:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{OC},$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overline{AB}.$$

Кроме этого геометрического правила, выражаемого черт. 169, читатель должен также твёрдо запомнить формулу (8) по её начертанию; формула (8) справедлива при любом расположении в пространстве точек  $O$ ,  $A$  и  $B$ , и её можно применять, не обращаясь к чертежу.

Из того, что равенство (6) равносильно равенству (7), следует, что в векторном равенстве (т. е. в равенстве, члены которого суть векторы) можно переносить любой член из одной части равенства в другую, меняя знак перед ним,

Два вектора **a** и **b** называются взаимно противоположными, если в сумме они дают нуль-вектор, т. е.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (9)$$

или, перенося один член направо,

$$\mathbf{b} = \mathbf{0} - \mathbf{a}.$$

Условимся нуль-вектор в подобных случаях опускать и писать так:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a}. \quad (10)$$

Взаимно противоположные векторы, т. е. векторы, характеризующиеся равенством (9) или (10), имеют одинаковые модули и противоположные направления.

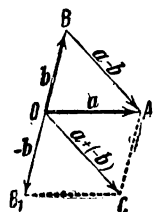
Вычитание векторов можно определить так: *вычесть из вектора **a** вектор **b**, это значит прибавить к вектору **a** вектор  $-\mathbf{b}$* . Покажем, что это определение совпадает с прежним. Приведём векторы **a** и **b** к общему началу; пусть

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$$

(черт. 170). Строим

$$\overrightarrow{OB_1} = -\mathbf{b}.$$



Черт. 170.  
 $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$

По старому определению вычитания разность  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  есть вектор  $\overrightarrow{BA}$ , а по новому — вектор  $\overrightarrow{OB_1CA}$  есть параллелограмм. Но так как  $OBA_1C$  есть параллелограмм, то

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}.$$

То, что мы сейчас доказали, записывается следующей формулой:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}. \quad (11)$$

Предоставляем читателю доказать, что

$$\mathbf{a} - (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (12)$$

Обе эти формулы можно распространить на любое число членов. Таким образом, в векторной алгебре имеет место обычное правило: если перед скобкой стоит плюс, то скобки могут быть опущены, если перед скобкой стоит минус, то скобки могут быть опущены, но при этом следует изменить знаки всех членов, стоящих в скобках.

**160. Умножение вектора на скаляр.** Пусть дан вектор **a** и положительное число  $\lambda$ . Произведением вектора **a** на число  $\lambda$  называется вектор **b**, определяющийся так:

1) вектор **b** имеет то же направление, что и вектор **a**,

2) модуль вектора  $\mathbf{b}$  равен модулю вектора  $\mathbf{a}$ , умноженному на  $\lambda$ :

$$|\mathbf{b}| = \lambda \cdot |\mathbf{a}|.$$

Короче говоря, умножить вектор на положительное число  $\lambda$  — это значит только изменить его длину в  $\lambda$  раз, не меняя направления. Символически будем писать так:

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$$

или

$$\mathbf{b} = a\lambda.$$

Умножение вектора на отрицательное число  $\lambda$  определяется так: умножить вектор  $\mathbf{a}$  на отрицательное число  $\lambda$  — значит изменить длину вектора  $\mathbf{a}$  в  $|\lambda|$  раз и переменить его направление на противоположное. Символическое обозначение остаётся прежнее.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они расположены на параллельных прямых (в частности, на одной прямой) независимо от того, направлены ли они одинаково или их направления противоположны.

Итак, если

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}, \quad (13)$$

где  $\lambda$  положительное или отрицательное число, то векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, причём если  $\lambda > 0$ , то они одинаково направлены, если же  $\lambda < 0$ , то они имеют противоположные направления.

Из изложенного выше ясно, что если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  суть два коллинеарных вектора, то мы можем говорить об их отношении. Отношение двух коллинеарных векторов есть некоторое число  $\lambda$ :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \lambda,$$

определяющееся так: 1) абсолютная величина числа  $\lambda$  есть отношение модулей векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$|\lambda| = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|},$$

2) число  $\lambda$  положительно, если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  одинаково направлены, и отрицательно — если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют противоположные направления.

Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  неколлинеарны, то отношение  $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$  не имеет смысла.

Таким образом, равенство (13) есть аналитическое условие коллинеарности двух векторов: если два вектора коллинеарны, то один из них (любой) равен другому, умноженному на скаляр.

Зависимость вида (13), очевидно, эквивалентна зависимости

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0, \quad (14)$$

причём скаляр  $\lambda$  заменяет —  $\frac{\alpha}{\beta}$ . Зависимости вида (13) и (14) назы-

ваются *линейными зависимостями*. Векторы, связанные линейной зависимостью, называются *линейно зависимыми*. Напротив, если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  таковы, что нельзя найти чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , из которых хотя бы одно было *отлично от нуля*, при которых удовлетворялось бы соотношение (14), то они называются *линейно независимыми*.

Оговорка о том, что хотя бы одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  должно быть отлично от нуля, понятна: иначе всякие два вектора были бы линейно зависимыми, так как равенство

$$0\mathbf{a} + 0\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

справедливо для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Случай же, когда, например,  $\alpha = 0$ , а  $\beta \neq 0$ , встретится тогда, если  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ;  $\beta$  в этом случае произвольно. Отсюда ясно, что нуль-вектор линейно зависим со всяким вектором.

Теперь условие коллинеарности может быть высказано так: *два вектора коллинеарны в том и только в том случае, если они линейно зависимы*.

Подчеркнём следующее положение. Если имеет место равенство

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

причём векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  неколлинеарны \*), то коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  должны быть оба нулями:

$$\alpha = \beta = 0.$$

Пусть дан вектор  $\mathbf{a}$  и его единичный вектор  $\mathbf{a}^0$ . Имеет место следующая очевидная формула:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0, \quad (15)$$

т. е. *всякий вектор равен произведению своего модуля на свой единичный вектор*.

Из формулы (15) видно, как можно выразить единичный вектор данного вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \quad (16)$$

**161. Формальные свойства умножения.** Напомним основные формальные свойства обыкновенного умножения. Это нужно для того, чтобы выяснить, обладает ли этими свойствами новое действие, названное нами умножением вектора на скаляр.

1. *Когда имеется больше двух сомножителей, то их можно любым образом объединять в группы*. Например, для трёх сомножителей

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}). \quad (17)$$

---

\*) В частности, ни один из векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не является нуль-вектором, так как нуль-вектор коллинеарен со всяким вектором.

На основании этого свойства можно записывать произведение трёх чисел вовсе без скобок:

$$abc,$$

где  $abc$  обозначает одновременно и  $(ab)c$  и  $a(bc)$ .

Свойство (17) называется свойством *сочетательности* или *ассоциативности* умножения.

На основании формулы (17) можно доказать сочетательность для произведения любого числа сомножителей, аналогично тому, как это было сделано для сложения (стр. 289).

2. Произведение не зависит от порядка сомножителей:

$$ab = ba. \quad (18)$$

Свойство (18) называется свойством *переместительности* или *коммутативности* умножения.

3. Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, можно умножить каждое из слагаемых на это число, а затем сложить полученные произведения:

$$(a + b)m = am + bm. \quad (19)$$

Свойство (19) называется свойством *распределительности* или *дистрибутивности* умножения относительно сложения. Это есть то правило умножения двучлена на одночлен, которым мы пользуемся в алгебре, раскрывая скобки.

На основании формулы (19) можно доказать правило умножения любого многочлена (не только двучлена) на одночлен.

Пусть, например, требуется раскрыть скобки в выражении

$$(a + b + c)m.$$

Поступаем так:

$$(a + b + c)m = [(a + b) + c]m.$$

В квадратных скобках—двучлен, следовательно, можно раскрыть квадратные скобки по формуле (19):

$$[(a + b) + c]m = (a + b)m + cm.$$

Ещё раз применяем формулу (19):

$$(a + b)m + cm = am + bm + cm.$$

Итак,

$$(a + b + c)m = am + bm + cm.$$

Можно также, на основании формул (19) и (18), доказать правило умножения многочлена на многочлен.

Даём без пояснений доказательство для случая умножения двучлена на двучлен:

$$\begin{aligned} (a + b)(m + n) &= a(m + n) + b(m + n) = (m + n)a + (m + n)b = \\ &= ma + na + mb + nb = am + an + bm + bn. \end{aligned}$$

4. Произведение двух чисел равно нулю в том и только в том случае, когда один из сомножителей равен нулю.

Числа, отличные от нуля и дающие в произведении нуль, называются *делителями нуля*. Таким образом, если бы существовали числа  $a$  и  $b$  такие, что

$$ab = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0,$$

то  $a$  и  $b$  назывались бы делителями нуля.

В силу свойства 4, делителей нуля не существует.

Читателю может показаться странным введение специального термина для чисел, которых не существует. Заметим, что хотя в обычной алгебре делителей нуля не существует, но есть такие системы гиперкомплексных чисел (обобщение комплексных чисел), в которых существуют делители нуля. С таким же положением мы столкнёмся в векторной алгебре.

Важно заметить, что отсутствие делителей нуля связано с однозначностью деления, и вот почему.

Деление есть действие, обратное умножению, т. е. разделить число  $b$  на число  $a$ , которое всегда предполагается отличным от нуля, это значит найти такое число  $x$ , которое, будучи умножено на  $a$ , даёт  $b$ . Короче говоря, разделить  $b$  на  $a$  — это значит решить уравнение

$$ax = b \quad (a \neq 0). \quad (20)$$

Если делителей нуля не существует, то уравнение (20) не может иметь больше одного решения. В самом деле, допустим, что уравнение (20) имеет два *различных* решения  $x = x_1$  и  $x = x_2$ . Это значит, что

$$ax_1 = b,$$

$$ax_2 = b.$$

Вычитая одно из другого, получим:

$$a(x_1 - x_2) = 0,$$

что невозможно, так как  $x_1$  и  $x_2$  различны, и следовательно  $x_1 - x_2 \neq 0$ ; по условию также  $a \neq 0$ .

Если бы делители нуля существовали, то деление не было бы однозначным (по крайней мере в некоторых случаях).

Допустим, что  $p$  и  $q$  — делители нуля:

$$pq = 0, \quad p \neq 0, \quad q \neq 0. \quad (*)$$

Тогда, например, уравнение

$$px = r \quad (**)$$

либо не имело бы ни одного решения, либо имело бы их бесконечное множество. В самом деле, если  $x = x_1$  есть решение уравнения (\*\*), т. е.

$$px_1 = r,$$

то  $x = x_1 + \lambda q$ , где  $\lambda$  — произвольное число, тоже есть решение уравнения (\*\*), так как

$$p(x_1 + \lambda q) = px_1 + \lambda pq = r + 0 = r.$$

Запомним: если  $x_1$  есть решение уравнения  $px = r$ , то можно получить другие решения этого уравнения, прибавляя к  $x_1$  слагаемые, дающие в произведении на  $p$  нуль,

В обычной алгебре таких слагаемых (отличных от нуля) не существует, и поэтому данное замечание бесполезно; это — лишь логическая возможность, которая не реализуется. В векторной алгебре эта возможность реализуется, и это замечание нам пригодится в п 176 (стр. 328) и п 184 (стр. 345).

**162. Формальные свойства умножения вектора на скаляр.** Говоря о свойстве сочетательности, мы должны предполагать, что из трёх сомножителей два — скаляры и один — вектор. Иначе (т. е. если бы мы имели один скаляр и два вектора) это свойство не имело бы смысла, так как мы ничего не знаем об умножении вектора на вектор. Таким образом, свойство сочетательности в данном случае имеет вид

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a. \quad (21)$$

Доказательство мы предоставляем читателю (при этом следует внимательно исследовать различные комбинации знаков чисел  $\lambda$  и  $\mu$ ). Свойство (21) позволяет, не опасаясь смешения, обозначать произведение двух скаляров и одного вектора так:

$$\lambda\mu a.$$

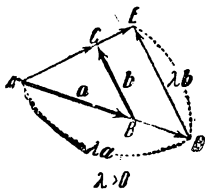
Свойство переместительности не требует доказательства, так как мы просто условились обозначать произведение вектора на скаляр, безразлично через  $\lambda a$  или  $a\lambda$ .

Что касается закона распределительности, то ввиду различной природы множителей (один множитель — вектор, а другой — скаляр) здесь могут быть два разных закона распределительности, а именно:

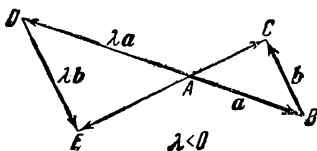
$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \quad (22)$$

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a. \quad (23)$$

Оба эти закона справедливы. Закон (22) при положительном  $\lambda$  иллюстрируется черт. 171 (левый). Здесь  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AC = a + b$ .



Черт. 171.  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ .



Если все стороны треугольника  $ABC$  изменить в  $\lambda$  раз, то получим подобный треугольник  $ADE$ , в котором  $\overline{AD} = \lambda a$ ,  $\overline{DE} = \lambda b$  и  $\overline{AE} = \lambda(a + b)$ . Так как  $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE}$ , то закон доказан. Если  $\lambda < 0$ ,

то можно либо повторить те же рассуждения, иллюстрируя их черт. 171 (правый), либо (рекомендуем читателю внимательно разобратся в этом) можно на черт. 171 (левый) иначе векторизовать \*)

\*) Т. е. выбрать на них определённые направления.



стороны треугольника  $ADE$ . Если

$$\overline{AB} = \mathbf{a},$$

$$\overline{BC} = \mathbf{b},$$

$$\overline{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

то при отрицательном  $\lambda$  будем иметь:

$$\overline{DA} = \lambda \mathbf{a} \quad (\text{а не } \overline{AD} = \lambda \mathbf{a}, \text{ как прежде}),$$

$$\overline{ED} = \lambda \mathbf{b},$$

$$\overline{EA} = \lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

а так как

$$\overline{EA} = \overline{ED} + \overline{DA},$$

то закон (22) доказан.

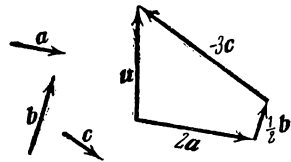
Доказательство закона (23) предоставляем читателю.

**163. Линейная комбинация векторов.** Имея несколько данных векторов и производя над ними те действия, с которыми мы пока познакомились, т. е. умножение на скаляр и сложение [о вычитании мы не говорим, потому что оно может быть заменено сложением (стр. 293)], мы придём к выражению такого типа:

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} + \dots + \vartheta \mathbf{h}. \quad (24)$$

Вектор  $\mathbf{u}$  называется *линейной комбинацией* векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{h}$ . Если векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{h}$  и скаляры  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \vartheta$  даны, то линейную комбинацию легко построить.

Например, на черт. 172 даны три вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , лежащие в одной плоскости (это сделано лишь для удобства чертежа, вообще же векторы, из которых мы образуем линейную комбинацию, могут быть любыми), и построена линейная комбинация  $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ .



Черт. 172. Линейная комбинация векторов:

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - 3\mathbf{c}.$$

### Задачи

**252.**  $ABCDEF$  — правильный шестиугольник,  $O$  — его центр. Какие из векторов  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$  и  $\overline{FA}$  равны между собой?

**253.** Векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , выходящие из одной точки, являются рёбрами параллелепипеда. Выразить все векторы, являющиеся диагоналями этого параллелепипеда.

**254.**  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  — правильный шестиугольник. Выразить векторы  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{A_2A_3}$ , ...,  $\overline{A_6A_1}$  через  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , принимая за  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  следующие два вектора:

$$\text{a) } \mathbf{a} = \overline{A_1A_2}, \quad \mathbf{b} = \overline{A_1A_6}; \quad \text{c) } \mathbf{a} = \overline{A_1A_3}, \quad \mathbf{b} = \overline{A_4A_5};$$

$$\text{b) } \mathbf{a} = \overline{A_1A_3}, \quad \mathbf{b} = \overline{A_1A_4}; \quad \text{d) } \mathbf{a} = \overline{A_1A_5}, \quad \mathbf{b} = \overline{A_4A_6}.$$

**255.**  $\overline{AB} = \mathbf{a} - 2\mathbf{c}$ ,  $\overline{BC} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\overline{CD} = 5\mathbf{a} + 6\mathbf{b} - 8\mathbf{c}$  ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — некопланарные \*) векторы). Найти вектор, соединяющий середины диагоналей четырёхугольника  $ABCD$ .

**256.** Показать геометрически, что

$$\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2} = \mathbf{a}.$$

**257.** Показать геометрически, что  $\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

**258.** При каком условии векторы  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  коллинеарны?

**259.** Векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  приведены к общему началу. При каком условии вектор  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  делит пополам угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ?

**260.** Какому условию должны удовлетворять векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , чтобы было

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

**261.** Какому условию должны удовлетворять векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , чтобы было

$$\text{a) } |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|; \quad \text{c) } |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|;$$

$$\text{b) } |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|; \quad \text{d) } |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|.$$

**262.**  $A_1A_2 \dots A_n$  — правильный  $n$ -угольник (плоский),  $O$  — его центр. Доказать, что

$$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n} = \mathbf{0}.$$

**263.** В треугольнике  $ABC$   $\overline{CB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{CA} = \mathbf{b}$ . Определить вектор, являющийся биссектрисой треугольника, выходящей из точки  $C$ .

**264.** Найти какой-нибудь вектор, делящий пополам угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (предполагается, что все векторы приводятся к общему началу).

**265.**  $\overline{AB} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ ,  $\overline{BC} = -2\mathbf{a} + 8\mathbf{b}$ ,  $\overline{CD} = 3(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ . Доказать, что точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  лежат на одной прямой.

**266.** В четырёхугольнике  $ABCD$   $\overline{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ ,  $\overline{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $\overline{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — неколлинеарные векторы. Доказать, что  $ABCD$  — трапеция.

**267.** В параллелограмме  $ABCD$  на стороне  $AD$  от точки  $A$  отложен отрезок  $AL$ , равный  $\frac{1}{5} AD$ ; на диагонали  $AC$  от точки  $A$  отложен отрезок  $AM$ , равный  $\frac{1}{4} AC$ ; на стороне  $BC$  от точки  $B$  отложен отрезок  $BN$ , равный  $\frac{2}{5} BC$ . Доказать, что точки  $L$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной прямой. Узнать, в каком отношении точка  $M$  делит отрезок  $LN$ .

**268.** Какому условию должен удовлетворять треугольник  $ABC$ , чтобы медиана и биссектриса, проведённые из вершины  $A$ , совпадали?

\*) Т. е. не параллельные одной плоскости; подробнее см. п 165 (стр. 305).

**269.**  $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ . Какому условию должны удовлетворять коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы концы векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  лежали на одной прямой (предполагается, что эти векторы приведены к общему началу)?

**270.** На сторонах треугольника  $ABC$  взяты точки  $L$  (на стороне  $BC$ ),  $M$  (на стороне  $CA$ ) и  $N$  (на стороне  $AB$ ). При каком условии из векторов  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  и  $\overline{CN}$  можно составить треугольник?

**271.**  $AL$ ,  $BM$  и  $CN$  — биссектрисы треугольника  $ABC$  (причём точки  $L$ ,  $M$  и  $N$  лежат на сторонах треугольника),  $O$  — точка пересечения биссектрис.  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ . Найти те из следующих отношений, которые имеют смысл:

$$\overline{LB} : \overline{LC}, \quad \overline{OM} : \overline{MB},$$

$$\overline{NL} : \overline{AC}, \quad \overline{BO} : \overline{OM}.$$

**272.** В треугольнике  $ABC$   $L$  — середина стороны  $BC$ ,  $M$  — середина  $CA$ ,  $N$  — середина  $AB$ ,  $O$  — точка пересечения медиан. Вычислить те из следующих отношений, которые имеют смысл:

$$\overline{OA} : \overline{OL}, \quad \overline{LN} : \overline{CM},$$

$$\overline{MN} : \overline{CB}, \quad \overline{AO} : \overline{OC}.$$

$$\overline{AN} : \overline{AM},$$

**273.** Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и что эта точка делит каждую медиану в отношении  $2:1$ , считая от вершины.

**274.** На сторонах треугольника взяты точки  $L$  (на стороне  $BC$ ),  $M$  (на стороне  $CA$ ) и  $N$  (на стороне  $AB$ ). Доказать следующую теорему: для того чтобы прямые  $AL$ ,  $BM$  и  $CN$  пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы произведение отношений, в которых точки  $L$ ,  $M$  и  $N$  делят стороны треугольника (считая в одном определённом направлении обхода по контуру треугольника), было равно  $1$ , т. е.

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

(теорема Чевы).

Показать, что теоремы о пересечении в одной точке медиан или биссектрис или высот треугольника являются частными случаями теоремы Чевы.

### § 3. Проектирование вектора на оси

**164.** Проекция на ось линейной комбинации векторов. Если вектор  $\mathbf{c}$  является суммой векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

то эти три вектора можно расположить так, чтобы они образовали треугольник:

$$\mathbf{a} = \overline{AB},$$

$$\mathbf{b} = \overline{BC},$$

$$\mathbf{c} = \overline{AC}.$$

Проектируя точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  на ось  $l$ , получим соответственно точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Так как при любом расположении точек  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  на оси имеем

$$A'C' = A'B' + B'C',$$

то

$$\text{пр}_l c = \text{пр}_l a + \text{пр}_l b$$

или

$$\text{пр}_l (a + b) = \text{пр}_l a + \text{пр}_l b, \quad (1)$$

т. е. *проекция суммы двух векторов на какую-нибудь ось равна сумме проекций этих векторов на ту же ось.*

Аналогичное рассуждение можно применить и к разности векторов. Можно также распространить его на любое число векторов. Так, например,

$$\text{пр}_l (a + b - c + d) = \text{пр}_l a + \text{пр}_l b - \text{пр}_l c + \text{пр}_l d \quad (2)$$

и вообще: *проекция алгебраической суммы нескольких векторов на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций этих векторов на ту же ось.*

Рассмотрим теперь проекцию вектора, получающегося из данного вектора  $a$  умножением его на некоторый скаляр, т. е. проекцию вектора  $\lambda a$ .

Приводим векторы  $a$  и  $\lambda a$  к общему началу. Пусть

$$a = \overline{AB},$$

$$\lambda a = \overline{AC}.$$

Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой; проектируя их на ось  $l$ , получим соответственно точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Так как проектирующие плоскости взаимно параллельны, то на основании теоремы, гласящей, что параллельные плоскости отсекают на прямых, пересекающих эти плоскости, пропорциональные отрезки, мы можем сказать, что *длины проекций* относятся так же, как длины проектируемых векторов. Отсюда ещё не следует, что

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \lambda,$$

так как проекции  $A'C'$ ,  $A'B'$  и скаляр  $\lambda$  суть числа относительные, и мы пока лишь можем утверждать, что абсолютная величина отношения  $\frac{A'C'}{A'B'}$  равна абсолютной величине  $\lambda$ . Проверим, совпадает ли знак левой части со знаком правой. Если  $\lambda > 0$ , то векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  имеют одно и то же направление (а не противоположные). Тогда направление  $A'C'$  на оси  $l$  совпадает с направлением  $A'B'$  и, следовательно, отрезки  $A'C'$  и  $A'B'$  имеют одинаковые знаки (эти

отрезки положительны, если направление от  $A'$  к  $B'$  или, что — то же, от  $A'$  к  $C'$  совпадает с направлением оси  $l$ , и отрицательны, если их направление противоположно направлению оси  $l$  и их отношение положительно. Таким образом, если  $\lambda > 0$ , то и  $\frac{A'C'}{A'B'} > 0$ . Если же  $\lambda < 0$ , то легко выяснить, что направления от  $A'$  к  $B'$  и от  $A'$  к  $C'$  взаимно противоположны и, следовательно, отрезки  $A'B'$  и  $A'C'$  имеют разные знаки, и их отношение отрицательно. Таким образом, во всех случаях имеем:

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \lambda;$$

$$A'C' = \lambda A'B'$$

или

$$\text{пр}_l \overline{AC} = \lambda \text{пр}_l \overline{AB},$$

т. е.

$$\text{пр}_l (\lambda a) = \lambda \text{пр}_l a. \quad (3)$$

Рассмотрим, наконец, проекцию линейной комбинации нескольких векторов

$$\text{пр}_l (\alpha a + \beta b + \dots + \vartheta h).$$

Применяя сначала теорему о проекции суммы векторов

$$\text{пр}_l (\alpha a + \beta b + \dots + \kappa k) = \text{пр}_l (\alpha a) + \text{пр}_l (\beta b) + \dots + \text{пр}_l (\vartheta h),$$

а затем применяя к каждому члену правой части формулу (3), окончательно получим:

$$\text{пр}_l (\alpha a + \beta b + \dots + \kappa k) = \alpha \text{пр}_l a + \beta \text{пр}_l b + \dots + \kappa \text{пр}_l h, \quad (4)$$

т. е. *проекция линейной комбинации нескольких векторов на какую-нибудь ось равна такой же (т. е. с теми же коэффициентами) линейной комбинации проекций этих векторов на ту же ось.*

Интересно отметить, что эта теорема была бы верна и в том случае, если бы мы пользовались не ортогональными, а косоугольными параллельными проекциями (т. е. если бы проектирующие плоскости, будучи параллельными между собой, были бы не перпендикулярны к оси). В настоящей книге это замечание не будет использовано, потому что мы всегда будем пользоваться прямоугольной системой координат.

**165. Разложение вектора по данным векторам или осям.** Пусть дан вектор  $u$ . Рассмотрим вектор

$$\lambda u.$$

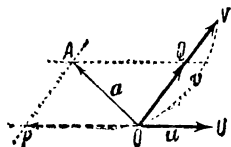
Если мы будем изменять параметр  $\lambda$ , то это выражение будет давать нам различные векторы, *коллинеарные*  $u$ . Обратно, всякий вектор, коллинеарный  $u$ , можно представить в виде  $\lambda u$ .

Пусть даны два неколлинеарных вектора  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Рассмотрим вектор

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}. \quad (*)$$

Будем выводить векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  из одного начала. По смыслу действий умножения вектора на скаляр и сложения векторов ясно, что при любых значениях  $\lambda$  и  $\mu$  выражение  $(*)$  будет давать векторы  $\mathbf{a}$ , лежащие в той же плоскости, что и векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Обратно, всякий вектор  $\mathbf{a}$ , лежащий в плоскости векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , можно представить как линейную комбинацию векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Другими словами: если нам дана любая точка в плоскости векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , то всегда можно так подобрать коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  в выражении  $(*)$ , что конец вектора  $\mathbf{a}$  попадёт в эту точку. Покажем, как это сделать.

Пусть  $\overrightarrow{OU} = \mathbf{u}$ ,  $\overrightarrow{OV} = \mathbf{v}$  и пусть дана точка  $A$  в плоскости  $OUV$  (черт. 173); требуется представить вектор  $\overrightarrow{OA}$  как линейную комбинацию  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Проведём через точку  $A$  прямую, параллельную вектору  $\mathbf{u}$ , и обозначим через  $Q$  точку пересечения этой прямой с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{v}$ . Проведём через точку  $A$  прямую, параллельную вектору  $\mathbf{v}$ , и обозначим через  $P$  точку пересечения этой прямой с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{u}$ . Будем иметь:



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}.$$

Черт. 173. Разложение вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам:

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}.$$

Приведённое геометрическое построение позволяет всякий вектор  $\mathbf{a}$ , лежащий в плоскости векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , представить как сумму двух векторов, коллинеарных соответственно  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , т. е. как линейную комбинацию векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , или, как мы будем выражаться впредь, *разложить вектор  $\mathbf{a}$  по векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$* . Таким образом, доказано, что всякий вектор  $\mathbf{a}$ , лежащий в плоскости векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , можно разложить по векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , но доказано, что это можно сделать *единственным* способом. Правда, построение, иллюстрируемое черт. 173, всегда приводит к одному вполне определённом результату, но, может быть, существует какое-нибудь другое построение для разложения вектора  $\mathbf{a}$  по векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , которое может привести к другому результату? Таким образом, мы стоим перед следующей задачей. Пусть вектор  $\mathbf{a}$  разложен по векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}. \quad (*)$$

Можно ли изменить коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  так, чтобы эти изменения нейтрализовали друг друга, т. е. чтобы при некоторых других значениях коэффициентов линейная комбинация векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  дала

бы тот же самый вектор  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{u} + \mu_1 \mathbf{v} \quad (**)$$

Оказывается, этого не может быть, потому что из равенств (\*) и (\*\*) вытекает

$$\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u} + \mu_1 \mathbf{v}$$

или

$$(\lambda - \lambda_1) \mathbf{u} + (\mu - \mu_1) \mathbf{v} = 0. \quad (***)$$

Равенство (\*\*\*) есть линейная зависимость между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ ; векторы, связанные линейной зависимостью, коллинеарны [п 160 (стр. 294—295)], векторы же  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  по условию неколлинеарны.

Мы приводили векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  к общему началу. Если бы мы этого не сделали, то они могли бы не лежать в одной плоскости, но они все были бы параллельны одной плоскости — той самой, в которой они расположатся при приведении к общему началу. Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными* \*).

Резюмируя всё сказанное, мы можем сформулировать следующую теорему:

*Если даны два неколлинеарных вектора, то всякий третий вектор, компланарный с ними, может быть разложен по ним и притом единственным образом.*

Эта теорема называется теоремой о единственности разложения на плоскости.

Интересно подойти к этой теореме с такой точки зрения. Будем называть несколько векторов *линейно зависимыми*, если они связаны линейной зависимостью

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \dots + \vartheta \mathbf{h} = 0, \quad (5)$$

причём исключается случай, когда все коэффициенты суть нули. Векторы, для которых невозможно подобрать такие коэффициенты  $\alpha, \beta, \dots, \vartheta$ , чтобы удовлетворялось равенство (5), т. е. не связанные никакой линейной зависимостью, будем называть *линейно независимыми*. В таком случае из теоремы о единственности разложения на плоскости следует, что на плоскости не может быть больше двух линейно независимых векторов.

Пусть дан вектор  $\mathbf{a}$ . После этого пусть дан вектор  $\mathbf{b}$ . Если эти два вектора окажутся линейно зависимыми, то они коллинеарны, если же они линейно независимы, то они неколлинеарны. Пусть дан третий вектор  $\mathbf{c}$ . Если он линейно зависим с векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то

\*) Очевидно, два вектора всегда компланарны.

он с ними компланарен, если же вектор  $\mathbf{c}$  линейно независим с  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то он некомпланарен с ними. Итак, *линейная зависимость между тремя векторами*

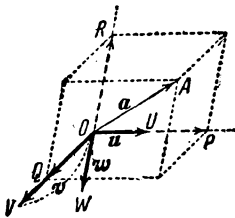
$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (6)$$

есть необходимое и достаточное условие их компланарности\*).

Если все три коэффициента  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  одновременно равны нулю, то равенство (6) имеет место и для некомпланарных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . И, обратно, если имеет место равенство (6) для трёх некомпланарных векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  (ни один из которых не равен нулю), то отсюда следует, что  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

Аналогичная теорема имеет место в пространстве. Пусть  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  суть три некомпланарных вектора\*\*). Покажем, прежде всего, что всякий четвёртый вектор  $\mathbf{a}$  можно разложить по ним.

Приведём все векторы к общему началу (черт. 174):



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OU} &= \mathbf{u}, \\ \overrightarrow{OV} &= \mathbf{v}, \\ \overrightarrow{OW} &= \mathbf{w}, \\ \overrightarrow{OA} &= \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Черт. 174. Разложение вектора в пространстве по трём неколлинеарным векторам:  
 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}$ .

Проведём через  $A$  плоскость, параллельную плоскости векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , и обозначим через  $R$  точку пересечения этой плоскости с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{w}$ . Проведём через  $A$  плоскость, параллельную плоскости векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ , и обозначим через  $P$  точку пересечения этой плоскости с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{u}$ . Проведём через  $A$  плоскость, параллельную плоскости векторов  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{u}$ , и обозначим через  $Q$  точку пересечения этой плоскости с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{v}$ . Таким образом, мы построили параллелепипед, у которого  $OA$  служит диагональю, а рёбра лежат на прямых  $OU$ ,  $OV$  и  $OW$ . На основании правила параллелепипеда [n 158 (стр. 291)] имеем:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} + \nu\mathbf{w}.$$

Итак, всякий вектор  $\mathbf{a}$  можно разложить по трём некомпланарным векторам  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ . Это разложение можно осуществить единственным образом, потому что если бы для какого-нибудь вектора  $\mathbf{a}$

\*) Интересно истолковать обращение в нуль некоторых коэффициентов.

\*\*) Заметим, что если три вектора некомпланарны, то любые два из них неколлинеарны. В самом деле, если бы векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  были коллинеарны, то ясно, что после проведения векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  к общему началу через них можно было бы провести плоскость.



существовали два различных разложения

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} + \nu \mathbf{w},$$

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{u} + \mu_1 \mathbf{v} + \nu_1 \mathbf{w},$$

то мы имели бы

$$\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} + \nu \mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u} + \mu_1 \mathbf{v} + \nu_1 \mathbf{w}$$

или

$$(\lambda - \lambda_1) \mathbf{u} + (\mu - \mu_1) \mathbf{v} + (\nu - \nu_1) \mathbf{w} = \mathbf{0},$$

т. е. векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  были бы компланарны, что противоречит условию.

Мы пришли к следующей теореме:

*Если даны три некопланарных вектора, то всякий четвёртый вектор может быть разложен по ним и притом единственным образом.*

Эта теорема называется теоремой о единственности разложения в пространстве или просто теоремой о единственности разложения. Из теоремы о единственности разложения следует, что *нельзя указать больше трёх линейно независимых векторов.*

При всяких рассуждениях, в которых приходится иметь дело со многими векторами, можно принять за основные какие-нибудь три некопланарных вектора; все остальные векторы будут являться их линейными комбинациями. Если дело происходит на плоскости, то за основные принимаются какие-нибудь два неколлинеарных вектора. Это замечание, как мы увидим дальше, постоянно используется в аналитической геометрии.



Черт. 175.

Приведём пример, показывающий, что упоминание о некопланарности (в пространстве) или о неколлинеарности (на плоскости) тех векторов, по которым мы разлагаем данный вектор, весьма существенно. Рассмотрим векторы, изображённые на черт. 175. Векторы  $\overline{OA} = \mathbf{u}$  и  $\overline{OB} = \mathbf{v}$  коллинеарны. Пытаясь разложить вектор  $\overline{OC}$  по векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , мы убеждаемся, что это невозможно; таким образом, нарушается первая часть теоремы о единственности разложения. Пытаясь разложить вектор  $\overline{OD}$  по векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , мы убеждаемся, что это можно сделать бесконечным множеством способов, например,

$$\overline{OD} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v} = \frac{5}{3}\mathbf{u} = -5\mathbf{v} = \dots;$$

таким образом, нарушается вторая часть теоремы о единственности разложения.

**166. Координаты вектора.** В предыдущем п мы видели, что, если задать какие-нибудь три некопланарных вектора  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ , то всякий четвёртый вектор можно представить как линейную комбинацию данных трёх. Пользуясь тем, что векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  могут быть заданы произвольно (лишь бы они были некопланарны), зададим их раз навсегда возможно более простым образом. Таким образом,

мы раз навсегда выбираем в пространстве три основных вектора, а все остальные векторы будем выражать как линейные комбинации этих трёх. Три вектора, служащие для этой цели, мы будем называть *ортами*, обозначать через  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  и выбирать так:

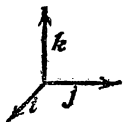
- 1) Векторы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — единичные (т. е.  $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ ).
- 2) Векторы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  взаимно перпендикулярны ( $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{j} \perp \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} \perp \mathbf{i}$ ).
- 3) Векторы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  образуют правую тройку \*) (если  $\mathbf{i}$  считать первым вектором,  $\mathbf{j}$  — вторым и  $\mathbf{k}$  третьим). На черт. 176 изображены *орты*, приведённые к общему началу.

Можно определить  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  как единичные векторы, направления которых совпадают соответственно с направлениями координатных осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Представим вектор  $\mathbf{a}$  как линейную комбинацию ортов:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (7)$$

(при представлении любого вектора в виде линейной комбинации ортов мы впредь всегда будем обозначать коэффициенты этого разложения той же буквой, что и данный вектор, но светлого шрифта \*\*) и с индексом, показывающим, при каком из трёх ортов стоит данный коэффициент).



Черт. 176.  
Орты.

Коэффициенты  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  называются *декартовыми прямоугольными координатами вектора  $\mathbf{a}$* . Для краткости мы будем называть их просто *координатами*.

Векторы  $a_x \mathbf{i}$ ,  $a_y \mathbf{j}$  и  $a_z \mathbf{k}$  называются *составляющими* вектора по координатным осям (т. е. векторами, имеющими направления координатных осей и дающими в сумме данный вектор) или по ортам; каждая составляющая имеет направление, либо совпадающее с соответствующим ортом, либо противоположное ему (в зависимости от знака соответствующей координаты).

Заметив, что орты суть единичные векторы, читатель легко докажет, что  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  суть проекции вектора  $\mathbf{a}$  на векторы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  или, что — то же самое, на оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ :

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \text{пр}_X \mathbf{a}, \\ a_y &= \text{пр}_Y \mathbf{a}, \\ a_z &= \text{пр}_Z \mathbf{a}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Итак, мы приходим к новому определению координат:

*Координатами вектора называются его проекции на координатные оси.*

\*) Читатель, знающий, что такое правая и левая системы координат [п 151 (стр. 280)], не нуждается в объяснении того, что такое правая и левая тройки векторов. Непосредственное определение правой тройки можно найти в п 182 (стр. 338, строки 16—20 сверху).

\*\*) В рукописи — той же буквой, но без черты сверху.

Координаты вектора суть числа, могущие принимать любые значения:

$$\left. \begin{aligned} -\infty < a_x < \infty, \\ -\infty < a_y < \infty, \\ -\infty < a_z < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

*Каждому вектору соответствует одна вполне определённая тройка чисел, являющихся его координатами, и, обратно, каждой тройке чисел соответствует один вполне определённый вектор (причём, разумеется, начало этого вектора произвольно).*

Всякий вектор можно рассматривать как диагональ прямоугольного параллелепипеда, рёбрами которого служат составляющие этого вектора по координатным осям. Замечая, что длины этих рёбер суть  $|a_x|$ ,  $|a_y|$  и  $|a_z|$  (так как  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  суть единичные векторы), мы получим следующую формулу, выражающую длину вектора через его координаты:

$$|\mathbf{a}| = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (10)$$

**167. Координатное выражение линейной зависимости между векторами.** В п. 164 (стр. 303) была доказана теорема о проекции на ось линейной комбинации векторов. Так как координаты вектора суть его проекции на координатные оси, то эта теорема применима и к координатам. Таким образом, имеем:

*Координата линейной комбинации нескольких векторов есть такая же линейная комбинация одноимённых координат этих векторов.*

Например, если

$$\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c},$$

то

$$d_x = 2a_x - b_x + 3c_x,$$

$$d_y = 2a_y - b_y + 3c_y,$$

$$d_z = 2a_z - b_z + 3c_z.$$

Другими словами, *если между несколькими векторами существует линейная зависимость, то такая же линейная зависимость существует между их одноимёнными координатами.*

Обратно, *если все одноимённые координаты нескольких векторов связаны одной и той же линейной зависимостью (т. е. абсциссы нескольких векторов связаны линейной зависимостью с теми же коэффициентами, что и ординаты и аппликаты), то и сами векторы*



## Задачи

**275.** При каком условии  $\text{пр}_{a-b} a + \text{пр}_{a-b} b = 0$ ?

**276.** Даны векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и ось  $l$ . Доказать: для того чтобы угол  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  был острым, достаточно (но не необходимо), чтобы проекции векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  на ось  $l$  имели один и тот же знак.

**277.**

$$\begin{aligned}\text{пр}_l \mathbf{a} &= 3, & \text{пр}_l \mathbf{b} &= 2, & \text{пр}_l \mathbf{c} &= 2, \\ \text{пр}_m \mathbf{a} &= 9, & \text{пр}_m \mathbf{b} &= -4, & \text{пр}_m \mathbf{c} &= 8, \\ \text{пр}_n \mathbf{a} &= 0, & \text{пр}_n \mathbf{b} &= -5, & \text{пр}_n \mathbf{c} &= 1,\end{aligned}$$

где  $l$ ,  $m$  и  $n$  — три оси, не параллельные одной плоскости. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны и найти линейную зависимость между ними.

**278.**

$$\begin{aligned}\text{пр}_l \mathbf{a} &= 5, & \text{пр}_l \mathbf{b} &= -3, & \text{пр}_l \mathbf{c} &= -6, & \text{пр}_l \mathbf{d} &= 5, \\ \text{пр}_m \mathbf{a} &= 1, & \text{пр}_m \mathbf{b} &= 0, & \text{пр}_m \mathbf{c} &= 2, & \text{пр}_m \mathbf{d} &= 4, \\ \text{пр}_n \mathbf{a} &= 4, & \text{пр}_n \mathbf{b} &= 6, & \text{пр}_n \mathbf{c} &= 8, & \text{пр}_n \mathbf{d} &= 14,\end{aligned}$$

где  $l$ ,  $m$  и  $n$  — три оси, не параллельные одной плоскости. Разложить вектор  $\mathbf{d}$  по векторам  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

**279.**  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — неколлинеарные векторы. Выразить  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  через  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$ :

$$\begin{aligned}\text{a) } \mathbf{c} &= 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}, & \mathbf{d} &= -\mathbf{a} + 4\mathbf{b}; \\ \text{b) } \mathbf{c} &= 2\mathbf{a} - \mathbf{b}, & \mathbf{d} &= 2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}.\end{aligned}$$

**280.**  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — некопланарные векторы. Узнать, компланарны ли векторы  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$ , и, если да, найти линейную зависимость между ними:

$$\begin{aligned}\text{a) } \mathbf{d} &= \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}, & \mathbf{e} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, & \mathbf{f} &= 3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + \mathbf{c}; \\ \text{b) } \mathbf{d} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}, & \mathbf{e} &= -3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + \mathbf{c}, & \mathbf{f} &= -\mathbf{a} + 7\mathbf{b} + 5\mathbf{c}.\end{aligned}$$

**281.**  $\text{пр}_l \mathbf{a} = -1$ ,  $\text{пр}_l \mathbf{b} = 5$ ,  $\text{пр}_l \mathbf{c} = 2$ ,  $\text{пр}_l \mathbf{d} = -6$ . Показать, что вектор  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$  перпендикулярен к оси  $l$ .

**282.**

$$\begin{aligned}\text{пр}_l \mathbf{a} &= 2, & \text{пр}_l \mathbf{b} &= -1, & \text{пр}_l \mathbf{c} &= 5, \\ \text{пр}_m \mathbf{a} &= -3, & \text{пр}_m \mathbf{b} &= 2, & \text{пр}_m \mathbf{c} &= 4.\end{aligned}$$

Найти какой-нибудь вектор, перпендикулярный к обоим осям  $l$  и  $m$ .

**283.**  $\mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d} = \lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — неколлинеарные векторы. При каком условии векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  коллинеарны?

**284.**  $\mathbf{d} = \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{e} = \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b} + \gamma_2 \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{f} = \alpha_3 \mathbf{a} + \beta_3 \mathbf{b} + \gamma_3 \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — некопланарные векторы. При каком условии векторы  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$  компланарны?

**285.** Даны координаты вектора  $\mathbf{a}$ :  $a_x = 8$ ,  $a_y = -12$ ,  $a_z = 9$ . Найти модуль вектора  $\mathbf{a}$  и его проекции на координатные плоскости.

## § 4. Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве

**168.** Связь между координатами векторов и координатами точек. Положение всякой точки  $M$  в пространстве вполне определяется заданием её радиуса-вектора  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ . В самом деле, если радиус-вектор  $\mathbf{r}$  задан, то мы поместим начало этого вектора в  $O$ , и тогда конец этого вектора и будет искомой точкой.

Разумеется, задание длины радиуса-вектора не определяет положения точки в пространстве. Если, например, дано, что для точки  $M$   $|\mathbf{r}|=3$ , то мы можем лишь сказать, что точка  $M$  лежит где-нибудь на поверхности сферы радиуса, равного 3, с центром в  $O$ . Когда мы утверждаем, что задание радиуса-вектора точки  $M$  вполне определяет положение этой точки в пространстве, то мы предполагаем, что этот радиус-вектор задан, как и всякий вектор, и по величине и по направлению. Точка  $M$ , имеющая радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , обозначается так:  $M(\mathbf{r})$ .

Положение точки  $M$  может быть определено также заданием трёх координат:  $M(x, y, z)$ . Установим связь между этими двумя способами задания точки — векторным и координатным.

В п 150 было установлено, что координаты точки суть проекции её радиуса-вектора на координатные оси [гл. X, § 2, формулы (2) (стр. 280)]. Так как проекции вектора на координатные оси суть координаты этого вектора [§ 3, формулы (8) (стр. 308)], то:

*Координаты точки суть координаты её радиуса-вектора.*

Если точка  $M$  имеет координаты  $(x, y, z)$ , то её радиус-вектор выражается формулой

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (1)$$

Пусть даны две точки  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  или, в векторном задании,  $A_1(\mathbf{r}_1)$  и  $A_2(\mathbf{r}_2)$ . Очевидно,

$$\overline{A_1A_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (2)$$

т. е. *всякий вектор равен радиусу-вектору конца минус радиус-вектор начала.*

Заменив векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  их координатными выражениями

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

получим:

$$\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}. \quad (3)$$

Таким образом, координаты вектора суть разности координат его конца и начала. Это положение можно также выразить формулами

$$\left. \begin{aligned} \text{пр}_x \overline{A_1A_2} &= x_2 - x_1, \\ \text{пр}_y \overline{A_1A_2} &= y_2 - y_1, \\ \text{пр}_z \overline{A_1A_2} &= z_2 - z_1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**169. Расстояние между двумя точками.** Пусть даны две точки  $A_1$  и  $A_2$  и требуется определить расстояние между ними. Теперь всякая задача аналитической геометрии приобретает двойкий смысл. Слова «дана точка» могут обозначать, что дан её радиус-вектор или что даны её координаты. Мы будем решать все задачи ана-

литической геометрии в векторном истолковании, а затем переводить результат в координатную форму.

Если даны точки  $A_1(\mathbf{r}_1)$  и  $A_2(\mathbf{r}_2)$ , то расстояние  $d$  между ними есть длина вектора  $\overline{A_1A_2}$ , определяемого формулой (2), т. е.

$$d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|. \quad (5)$$

Если же точки  $A_1$  и  $A_2$  заданы своими координатами  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ , то вектор  $\overline{A_1A_2}$  определяется формулой (3), а его длина равна квадратному корню из суммы квадратов его координат [§ 3, формула (10) (стр. 309)], т. е.

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (6)$$

**170. Деление отрезка в данном отношении.** Даны две точки  $A_1(\mathbf{r}_1)$  и  $A_2(\mathbf{r}_2)$ . Требуется найти точку  $M(\mathbf{r})$  (найти точку — это значит найти её радиус-вектор), делящую отрезок  $A_1A_2$  в данном отношении  $\lambda$ . Это значит, что точка  $M$  лежит на отрезке  $A_1A_2$ , причём

$$\frac{A_1M}{MA_2} = \lambda$$

( $\lambda$  — некоторое положительное число).

Легко сообразить, что между векторами  $\overline{A_1M}$  и  $\overline{MA_2}$  имеется соотношение

$$\overline{A_1M} = \lambda \overline{MA_2}. \quad (*)$$

В самом деле, во-первых, векторы  $\overline{A_1M}$  и  $\overline{MA_2}$  коллинеарны (так как точка  $M$  лежит на отрезке  $A_1A_2$ ); следовательно, вектор  $\overline{A_1M}$  равен вектору  $\overline{MA_2}$ , умноженному на некоторую константу:

$$\overline{A_1M} = \text{const.} \cdot \overline{MA_2}.$$

Во-вторых, абсолютная величина этой константы равна отношению длины вектора  $\overline{A_1M}$  к длине вектора  $\overline{MA_2}$ , т. е. эта константа равна  $\pm \lambda$

$$\overline{A_1M} = \pm \lambda \overline{MA_2}.$$

В-третьих, эта константа положительна, так как векторы  $\overline{A_1M}$  и  $\overline{MA_2}$  направлены в одну сторону. Таким образом, равенство (\*) доказано.

Равенство (\*) можно записать так:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}).$$

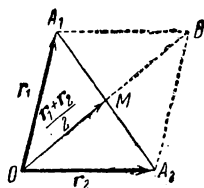
Здесь  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — данные векторы,  $\lambda$  — данное число,  $\mathbf{r}$  — искомый вектор. Определяя из последнего равенства  $\mathbf{r}$ , найдём:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2}{1 + \lambda}. \quad (7)$$

В частности, если требуется найти радиус-вектор точки  $M$ , являющийся серединой отрезка  $A_1A_2$ , то надо положить в формуле (7)  $\lambda = 1$ . Получим:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad (8)$$

т. е. радиус-вектор середины отрезка равен полусумме радиусов-векторов его концов.



Черт. 177. Деление отрезка пополам.

Этот результат геометрически очевиден. Если на векторах  $\overline{OA_1} = \mathbf{r}_1$  и  $\overline{OA_2} = \mathbf{r}_2$  построить параллелограмм, то вектор  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \overline{OB}$  (черт. 177) будет служить диагональю этого параллелограмма. Из того факта, что диагонали параллелограмма делят друг друга пополам, вытекает, во-первых, что точка  $M$  (точка пересечения диагоналей) является серединой отрезка  $A_1A_2$  и, во-вторых, что вектор  $\overline{OM}$  равен половине вектора  $\overline{OB}$ .

Если точки  $M$ ,  $A_1$  и  $A_2$  определяются своими координатами

$$M(x, y, z), \quad A_1(x_1, y_1, z_1), \quad A_2(x_2, y_2, z_2),$$

то

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

Мы знаем, что линейная зависимость между векторами эквивалентна трём таким же линейным зависимостям между координатами этих векторов. Следовательно, из формулы (7) вытекает:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \\ z &= \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Мы получили формулы, выражающие координаты точки, делящей отрезок между двумя данными точками в данном отношении.

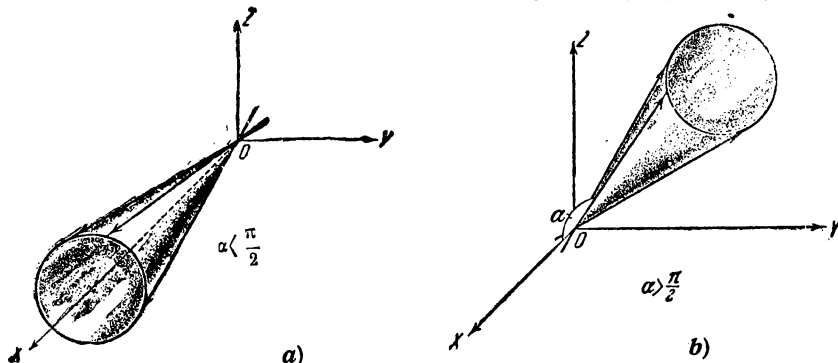
**171. Задание направления в пространстве.** Пусть в пространстве дана некоторая ось  $l$ ; спрашивается, какими данными можно задать её направление. Так как направление оси не меняется при её параллельном переносе, то для определённости проведём эту ось через начало координат.



На плоскости направление оси вполне определяется углом, который эта ось образует с осью  $X$ . Попробуем и в пространстве задать угол  $\alpha$ , который данная ось образует с осью  $X$ .

Легко сообразить, что существует бесконечное множество осей, выходящих из начала и образующих с осью  $X$  угол  $\alpha$ . Все эти оси образуют коническую поверхность с вершиной в начале. Ось  $X$  служит осью этого конуса; угол между осью и образующей равен  $\alpha$  (черт. 178).

Если выводить из начала координат лучи, образующие угол  $\alpha$



Черт. 178. Задание угла некоторой оси с осью  $X$ .

с осью  $X$ , то эти лучи образуют *одну полость* конической поверхности.

Читатель должен помнить, что под углом  $\alpha$  между двумя осями всегда подразумевается угол между положительными направлениями этих осей. Этот угол удовлетворяет неравенству (1) § 1 главы  $X$  (стр. 272):

$$0 \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

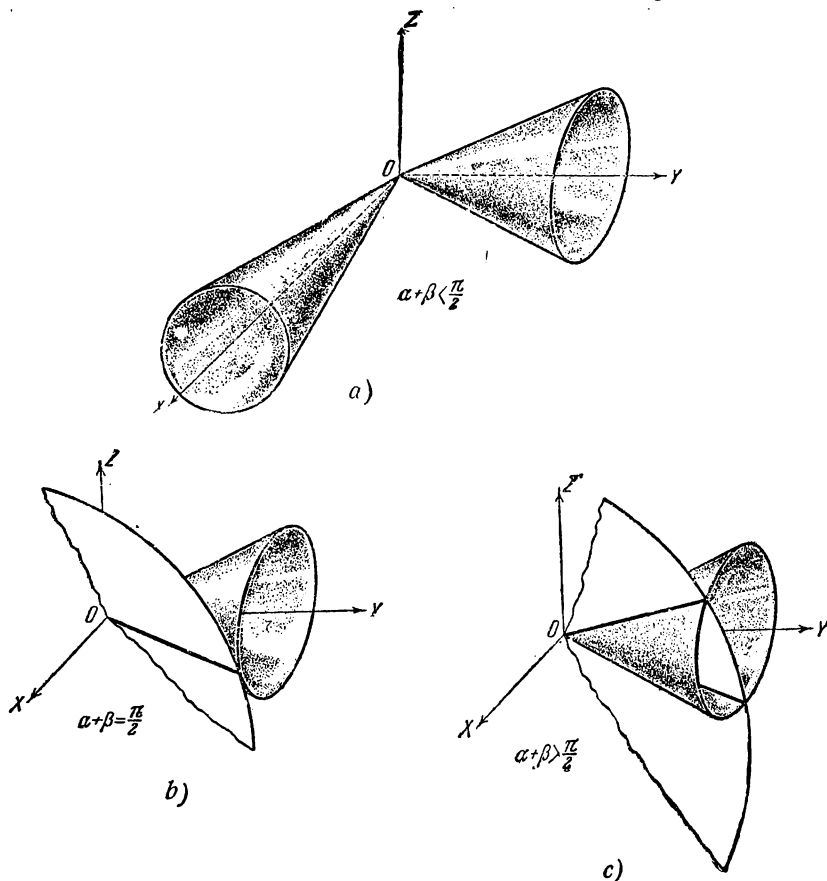
Если  $\alpha < 90^\circ$ , то наша полость конической поверхности расположена так, что внутри неё проходит положительная часть оси  $X$  (черт. 178, *a*), если  $\alpha > 90^\circ$ , то внутри неё проходит отрицательная часть  $X$  (черт. 178, *b*). Рекомендуем читателю выяснить, во что превращается эта поверхность при  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 90^\circ$  и  $\alpha = 180^\circ$ .

Таким образом, мы видим, что направление оси не определяется заданием угла этой оси с осью  $X$ .

Попробуем в таком случае задать ещё угол  $\beta$  между данной осью и осью  $Y$ . Теперь мы стали перед следующей геометрической задачей: вывести из начала координат ось, образующую с осью  $X$  угол  $\alpha$ , а с осью  $Y$  — угол  $\beta$ . Ясно, что эта ось должна лежать одновременно на двух конусах, осями которых являются соответственно ось  $X$  и ось  $Y$ ; у первого конуса угол между осью и образующей равен  $\alpha$ , а у второго  $\beta$ . Следовательно, надо найти пересечение двух конических поверхностей,

На черт. 179, *a* изображён случай, когда углы  $\alpha$  и  $\beta$  — острые и сумма их меньше  $90^\circ$ . Ясно, что в этом случае конусы не пересекаются, и, значит, не существует оси, образующей с осями  $X$  и  $Y$  такие углы.

На черт. 179, *b* углы  $\alpha$  и  $\beta$  острые и сумма их равна  $90^\circ$ . В этом случае конусы касаются по одной образующей, которая и является



Черт. 179. Задание углов некоторой оси с осями  $X$  и  $Y$ .

данной осью. Она лежит в плоскости  $XY$  и, следовательно, образует с осью  $Z$  угол, равный  $90^\circ$ .

На черт. 179, *c* углы  $\alpha$  и  $\beta$  острые и сумма их больше  $90^\circ$ . В этом случае конусы пересекаются по двум образующим, т. е. существуют две оси, образующие с осями  $X$  и  $Y$  такие углы. Одна из этих осей образует с осью  $Z$  острый угол, а другая — тупой.

Предоставляем читателю самому разобрать случаи, когда один из углов  $\alpha$  и  $\beta$  тупой или оба тупые.

Итак, задание двух углов  $\alpha$  и  $\beta$  достаточно для определения направления оси; эта задача иногда оказывается невозможной, иногда имеет одно решение, иногда два.

Обозначим через  $\gamma$  угол данной оси с осью  $Z$ . Из предыдущих рассуждений ясно, что нельзя произвольно задать три угла  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , потому что заданием двух углов  $\alpha$  и  $\beta$  (впрочем, несущественно, какие два угла из трёх задать) определяется направление оси (хотя бы и двузачно), а следовательно, определяется угол  $\gamma$ , образуемый этой осью с осью  $Z$ . Значит, если нам зададут углы  $\alpha$  и  $\beta$ , то мы должны суметь вычислить угол  $\gamma$ . Другими словами, *существует формула, связывающая углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , образуемые любой осью с осями координат*. Эта формула будет выведена ниже [формула (10)].

Направление оси может быть также определено заданием какого-нибудь вектора  $\mathbf{a}$ , имеющего то же направление, что и эта ось. Этот вектор называется *направляющим вектором* данного направления. Длина направляющего вектора безразлична, т. е. каждое направление имеет бесконечное множество направляющих векторов, отличающихся друг от друга длиной.

Если направляющий вектор  $\mathbf{a}$  образует с осями  $X, Y, Z$  соответственно углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , то его координаты (т. е. его проекции на оси) определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a \cos \alpha, \\ a_y &= a \cos \beta, \\ a_z &= a \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Возведём эти равенства в квадрат и сложим:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma).$$

Учитывая, что  $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2$ , получим:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (10)$$

Это и есть формула, связывающая углы  $\alpha, \beta$ , и  $\gamma$ .

Вместо того чтобы задавать углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , удобнее задавать их косинусы:

$$\cos \alpha, \quad \cos \beta, \quad \cos \gamma.$$

Эти косинусы называются *направляющими косинусами* данной оси. Всякие три числа, сумма квадратов которых равна единице, могут быть приняты за направляющие косинусы и, следовательно, определяют некоторое направление оси в пространстве.

Если в пространстве дана прямая, то на ней можно отметить два противоположных направления, т. е. прямая может служить носителем

двух различных осей. Какая связь между направляющими косинусами этих осей?

Пусть одна ось образует с осями координат углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Из замечания об изменении направлений на осях [п 147 (стр. 273)] следует, что противоположная \*) ось образует с осями координат углы  $180^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ - \beta$  и  $180^\circ - \gamma$ . Следовательно, направляющие косинусы одной оси суть

$$\cos \alpha, \quad \cos \beta, \quad \cos \gamma,$$

а направляющие косинусы противоположной оси

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta,$$

$$\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma.$$

Следовательно, *переменив знаки у всех направляющих косинусов некоторой оси, получим направляющие косинусы противоположной оси.*

Если за направляющий вектор принять единичный вектор, то [полагая в формулах (\*\*)  $a = 1$ ] выясняется ещё один геометрический смысл направляющих косинусов:

*Направляющие косинусы некоторого направления суть координаты единичного направляющего вектора этого направления.*

**172. Направление вектора, заданного координатами концов.** Пусть даны две точки:  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ . Требуется определить направление вектора  $\overline{A_1A_2}$ , т. е. определить его направляющие косинусы.

Обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  углы вектора  $\overline{A_1A_2}$  с осями координат. Обозначим через  $d$  длину вектора  $\overline{A_1A_2}$ :

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Будем проектировать вектор  $\overline{A_1A_2}$  на оси координат, причём воспользуемся тем, что у нас есть два способа для вычисления этих проекций. Во-первых, проекции вектора на оси координат суть разности координат конца и координат начала [формулы (4) (стр. 312)]:

$$\text{пр}_X \overline{A_1A_2} = x_2 - x_1,$$

$$\text{пр}_Y \overline{A_1A_2} = y_2 - y_1,$$

$$\text{пр}_Z \overline{A_1A_2} = z_2 - z_1.$$

---

\*) Так мы для краткости называем ось с противоположным направлением.

Во-вторых, проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус его угла с осью:

$$\text{пр}_X \overline{A_1 A_2} = d \cos \alpha,$$

$$\text{пр}_Y \overline{A_1 A_2} = d \cos \beta,$$

$$\text{пр}_Z \overline{A_1 A_2} = d \cos \gamma.$$

Следовательно,

$$x_2 - x_1 = d \cos \alpha,$$

$$y_2 - y_1 = d \cos \beta,$$

$$z_2 - z_1 = d \cos \gamma,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_2 - x_1}{d}, \\ \cos \beta &= \frac{y_2 - y_1}{d}, \\ \cos \gamma &= \frac{z_2 - z_1}{d}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Заметим, что в первых трёх формулах (11) порядок индексов не безразличен: необходимо из координаты конца вычитать координату начала.

Принимая во внимание четвёртую формулу (11), читатель может проверить, что сумма квадратов полученных направляющих косинусов равна единице.

Весьма важен тот частный случай формул (11), когда начало данного вектора совпадает с началом координат. Пусть дана одна точка  $M(x, y, z)$  и требуется определить направляющие косинусы вектора  $\overline{OM}$ . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{r}, \\ \cos \beta &= \frac{y}{r}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$r = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

## Задачи

**236.** Дана точка  $M(x, y, z)$ . Найти точки, симметричные ей:

- a) относительно координатных плоскостей;
- b) относительно координатных осей;
- c) относительно начала.

**237.** В третьем октанте найти точку, расстояния которой от осей координат таковы:

$$d_x = 3\sqrt{29}, \quad d_y = 10, \quad d_z = 17.$$

**238.** Найти геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

- a)  $xyz = 0$ ; d)  $x^2 + y^2 < a^2$ ;
- b)  $xyz > 0$ ; e)  $1 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq -1, \quad 4 \leq z \leq 5$ ;
- c)  $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ ; f)  $xy > 0$ .

**239.** Доказать, что если расстояния некоторой точки от всех координатных осей равны между собой, то её расстояния от всех координатных плоскостей тоже равны между собой.

**290.** По следующим данным найти неизвестную координату точки  $B$ :

- a)  $A(4, -7, 1), \quad B(6, 2, z), \quad AB = 11$ ;
- b)  $A(7, 0, 10), \quad B(4, y, 5), \quad AB = 4$ ;
- c)  $A(2, 3, 4), \quad B(x, -2, 4), \quad AB = 5$ .

**291.** Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , зная координаты его вершин

- a)  $A(2, -3, 5), \quad B(5, -7, 4), \quad C(11, 5, 12)$ ;
- b)  $A(5, 1, 1), \quad B(2, 3, -1), \quad C(7, 0, -4)$ ;
- c)  $A(-3, 5, 0), \quad B(3, 2, 9), \quad C(-1, 4, 3)$ .

**292.** Найти центр и радиус шара, описанного около тетраэдра  $ABCD$ :

- a)  $A(2, 11, -4), \quad B(-8, 4, -5), \quad C(4, 9, -6), \quad D(-12, 1, 0)$ ;
- b)  $A(2, 3, 1), \quad B(5, 2, 0), \quad C(-1, -3, 7), \quad D(3, -8, 4)$ .

**293.** Является ли четырёхугольник  $ABCD$  ромбом:

- a)  $A(1, -3, -4), \quad B(3, 11, 1), \quad C(-8, 9, 11), \quad D(-10, -5, 6)$ ;
- b)  $A(4, -5, 1), \quad B(7, 1, 7), \quad C(-1, 5, 6), \quad D(5, -1, 9)$ .

**294.** Для некоторой точки  $r = 9$ ,  $r_{yz} = r_{zx} = 7$ . Найти  $r_{xy}$ . (Пояснение:  $r$  — расстояние точки от начала,  $r_{xy}$  — проекция этого расстояния на плоскость  $XY$  и т. д.)

**295.** Найти точку, находящуюся от начала координат на расстоянии  $\sqrt{3}$ , зная, что

- a) радиус-вектор этой точки имеет одинаковые проекции на все оси координат;
- b) радиус-вектор этой точки имеет одинаковые проекции на все плоскости координат.

**296.** В каких октантах существуют точки, находящиеся от точки  $(-3, 5, 7)$  на расстоянии, равном: a) 2; b) 4; c) 10; d) 6; e) 8; f)  $7\frac{1}{2}$ ; g) 9; h)  $5\frac{1}{2}$ .

**297.** Пусть в тетраэдре середина каждого ребра соединена прямолинейным отрезком с серединой противоположного ребра. Показать, что эти четыре отрезка пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

**298.** Пусть в тетраэдре каждая вершина соединена прямолинейным отрезком с центром тяжести противоположной грани. Показать, что эти четыре отрезка пересекаются в одной точке, делящей каждый отрезок в отношении 3 : 1, считая от вершины.

**299.** Найти единичные векторы, коллинеарные вектору  $\mathbf{a}$ :

a)  $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$ ;

b)  $\mathbf{a} = \frac{6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 22\mathbf{k}}{115}$ ;

c)  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ .

**300.** Ось направлена из точки  $A(-5, 11, 1)$  в точку  $B(-1, -8, 9)$ . Найти её единичный вектор.

**301.** От точки  $A(2, -1, 7)$  в направлении вектора  $8\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$  отложен отрезок  $AB = 34$ . Найти точку  $B$ .

**302.** Направление оси задано вектором  $\mathbf{a} = 33\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ . Найти углы этой оси с осями координат.

**303.** Конец вектора находится в точке  $(2, -1, 7)$ ; его проекции на оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  суть соответственно 4,  $-4$  и 7. Найти:

a) начало вектора;

b) длину вектора.

**304.** Некоторая ось образует с осями координат углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Зная два из этих углов, найти третий:

a)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 120^\circ$ ;

b)  $\alpha = 80^\circ$ ,  $\gamma = 50^\circ$ ;

c)  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ;

d)  $\alpha = 26^\circ 31'$ ,  $\beta = 63^\circ 29'$ .

**305.** Зная два направляющих косинуса оси

$$\cos \alpha = \frac{44}{45}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{9},$$

задать направление этой оси каким-нибудь вектором.

**306.** Некоторая ось образует равные углы со всеми осями координат. Найти эти углы.

**307.** Некоторая ось образует с осями  $X$  и  $Y$  равные углы, а с осью  $Z$  — угол, вдвое больший, чем с каждой из осей  $X$  и  $Y$ . Определить направление этой оси.

**308.** Ось, которая образовывала с координатными осями углы  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ , повернулась так, что все эти углы увеличились на одну и ту же величину. Найти эту величину.

**309.** Найти зависимость между синусами углов, образуемых произвольной осью с осями координат. Найти зависимость между косинусами углов, образуемых произвольной осью с плоскостями координат. Объяснить, какая связь между этими двумя вопросами.

**310.** Показать, что если некоторая ось образует с координатными осями углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , то  $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$ .

**311.** Для точки  $M(x, y, z)$ , а расстояние от начала координат  $OM = 15$ . Дан один из направляющих косинусов оси  $OM$ :  $\cos \beta = \frac{2}{3}$ . Найти все координаты точки  $M$  и все направляющие косинусы оси  $OM$ .

**312.** При каком условии три точки  $A_1(r_1)$ ,  $A_2(r_2)$  и  $A_3(r_3)$  лежат на одной прямой?

**313.** При каком условии три точки  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  и  $(x_3, y_3, z_3)$  лежат на одной прямой?

**314.** Доказать, что точки  $(x, y, z)$  и  $(kx, ky, kz)$  лежат на одной прямой с началом координат.

**315.** Треугольник  $ABC$  задан радиусами-векторами вершин:  $A(\mathbf{r}_1)$ ,  $B(\mathbf{r}_2)$ ,  $C(\mathbf{r}_3)$ . Найти точку пересечения:

а) медиан;

б) биссектрис.

**316.** Даны  $n$  материальных точек:  $A_1(\mathbf{r}_1)$ ,  $A_2(\mathbf{r}_2)$ , ...,  $A_n(\mathbf{r}_n)$ ; точка  $A_1$  имеет массу  $m_1$ , точка  $A_2$  — массу  $m_2$ , ..., точка  $A_n$  имеет массу  $m_n$ . Найти центр тяжести этой системы материальных точек:

а) решить задачу для  $n=2$ ;

б) решить задачу для любого  $n$ .

**317.** Показать, что если в вершинах треугольника находятся массы, пропорциональные противоположным сторонам, то центр тяжести этих масс падает в точку пересечения биссектрис треугольника.

## § 5. Скалярное умножение

**173. Понятие о скалярном умножении.** До сих пор мы умеем производить над векторами сложение, вычитание и умножение вектора на скаляр. Сейчас мы дадим определение нового действия над векторами.

*Скалярным произведением двух векторов называется произведение длины одного вектора на проекцию на него другого вектора.* Действие, заключающееся в нахождении по двум данным векторам их скалярного произведения, называется *скалярным умножением*.

Скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  обозначается по-разному. Наиболее употребительны такие обозначения:

$\mathbf{ab}$ ,

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ,

$(\mathbf{ab})$ .

Мы будем пользоваться первым из них и иногда — вторым.

Из приведённого определения вытекает, что скалярное произведение двух векторов есть скаляр.

Вспомним, что длина вектора есть число положительное, а проекция вектора на вектор может быть и положительным и отрицательным числом. Следовательно, скалярное произведение двух векторов может быть и положительным и отрицательным.

Когда мы скалярно перемножаем два вектора, то, согласно определению, мы должны умножить длину *одного* вектора (в определении не сказано, какого именно) на проекцию *на него другого* вектора. Таким образом, определение оставляет нам возможность некоторого произвола: можно длину первого вектора умножить на проекцию второго вектора на первый, а можно длину второго вектора умножить на проекцию первого вектора на второй. Формулами эти две воз-



мощности выражаются так:

$$ab = a \text{ пр}_a b,$$

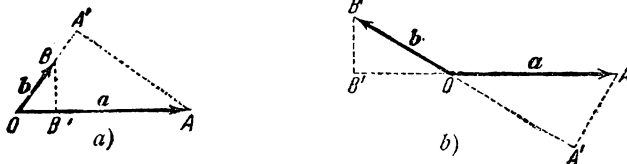
или

$$ab = b \text{ пр}_b a.$$

Докажем, что скалярное произведение не зависит от того, какой из этих двух возможностей мы будем пользоваться, т. е. что для всяких двух векторов имеет место равенство

$$a \text{ пр}_a b = b \text{ пр}_b a. \quad (1)$$

На черт. 180,  $a$  изображены два вектора, образующие острый угол, а на черт. 180,  $b$  — два вектора, образующие тупой угол. Даль-



Черт. 180.  $a \cdot \text{пр}_a b = b \cdot \text{пр}_b a$ .

нейшие обозначения и рассуждения относятся одновременно к обоим чертежам:  $\overline{OA} = a$ ,  $\overline{OB} = b$ ,  $OA' = \text{пр}_b a$ ,  $OB' = \text{пр}_a b$ . Из подобия треугольников  $OAA'$  и  $OB'B$  имеем:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Эта пропорция верна не только в том случае, если под  $OA$ ,  $OB$ ,  $OA'$  и  $OB'$  понимать длины отрезков, как это делается в элементарной геометрии, но также и в том случае, если под  $OA'$  и  $OB'$  понимать проекции векторов, могущие иметь любой знак. В самом деле, левая часть пропорции положительна, так как  $OA$  и  $OB$  суть длины векторов, т. е. величины существенно положительные. Правая часть тоже положительна, так как в случае острого угла между векторами (черт. 180,  $a$ ) обе проекции  $OA'$  и  $OB'$  положительны, а в случае тупого угла (черт. 180,  $b$ ) обе они отрицательны.

Из написанной пропорции имеем:

$$OA \cdot OB' = OB \cdot OA'$$

или

$$a \text{ пр}_a b = b \text{ пр}_b a,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, определение скалярного произведения можно записать в виде формулы так:

$$ab = a \text{ пр}_a b = b \text{ пр}_b a. \quad (2)$$

Формальные свойства скалярного умножения будут подробно рассмотрены дальше. Отметим пока одно свойство, особенно бросающееся в глаза: скалярное умножение обладает свойством переместительности, т. е.

$$ab = ba. \quad (3)$$

Это видно из доказанного только что равноправия сомножителей: безразлично, какой вектор считать первым и какой вторым.

Согласно данному выше определению,

$$ab = a \text{ пр}_a b.$$

Мы знаем, что проекция вектора на вектор равна длине проецируемого вектора, умноженной на косинус угла между векторами. Таким образом,

$$\text{пр}_a b = b \cos(a, b).$$

Подставляя это выражение для  $\text{пр}_a b$  в формулу (2), получим:

$$ab = a b \cos(a, b). \quad (4)$$

Таким образом, мы получаем новое определение скалярного произведения.

*Скалярным произведением двух векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.*

Из этого определения непосредственно ясно переместительное свойство скалярного произведения, так как длины векторов безразлично, в каком порядке перемножать, а при определении угла между векторами порядок их не принимается во внимание, т. е.  $(a, b) = (b, a)$ .

**174. Некоторые частные случаи скалярного умножения.** Из формулы (4) очевидно, что *скалярное произведение двух векторов положительно, если эти векторы образуют между собой острый угол, и отрицательно — если тупой.*

Рассматривая формулу (4), мы видим, что её правая часть есть произведение трёх чисел и, следовательно, обращается в нуль тогда и только тогда, когда обращается в нуль одно из этих чисел. Это приводит нас к такому заключению:

*Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда либо один из перемножаемых векторов есть нуль-вектор, либо перемножаемые векторы взаимно перпендикулярны.* Если исключить из рассмотрения нуль-вектор, то равенство нулю скалярного произведения двух векторов обозначает взаимную перпендикулярность этих векторов.

Рассмотрим случай, когда два перемножаемых вектора коллинеарны. В этом случае либо  $(a, b) = 0$ , либо  $(a, b) = 180^\circ$  (смотря по тому, направлены ли оба вектора в одну сторону или в противоположные стороны). В первом случае мы имеем;

$$ab = ab_1$$

а во втором

$$ab = -ab.$$

Итак, если два вектора коллинеарны, то их скалярное произведение равно произведению их длин, взятому со знаком плюс или минус, смотря соответственно по тому, направлены ли оба вектора в одну сторону или в противоположные стороны.

Как особо интересный частный случай умножения коллинеарных векторов, рассмотрим тот случай, когда перемножаются два равных вектора или, другими словами, когда некоторый вектор скалярно умножается сам на себя:

$$aa = a^2 \cos(a, a)$$

или, так как  $(a, a) = 0$ ,

$$aa = a^2.$$

Скалярное произведение  $aa$  называется скалярным квадратом вектора  $a$  и обозначается так:  $a^2$ . Итак,

$$a^2 = a^2, \quad (5)$$

т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Скалярное произведение двух векторов определяется так:

$$ab = b \text{ прь } a.$$

Если  $b$  — единичный вектор (т. е.  $b = 1$ ), то из последней формулы следует:

$$ab = \text{прь } a \quad (b = 1). \quad (6)$$

Таким образом, скалярное произведение какого-нибудь вектора  $a$  на единичный вектор есть проекция этого вектора  $a$  на этот единичный вектор.

Если один из двух перемножаемых векторов умножить на некоторый скаляр, то всё скалярное произведение умножится на этот скаляр, т. е.

$$(\lambda a) b = a (\lambda b) = \lambda (ab). \quad (7)$$

Другими словами: скалярный множитель, стоящий при одном из перемножаемых векторов, можно вынести за знак скалярного произведения.

Доказательство весьма просто: предоставляем его читателю. Следует рассмотреть отдельно случаи  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$ .

**175. Механическая интерпретация скалярного произведения.** Пусть материальная точка движется по прямой и пусть на эту точку действует сила, направленная по той же прямой и в ту же сторону. Известно, что работа, произведённая рассматриваемой силой, равна произведению величины силы на длину перемещения, на протяжении которого эта сила действовала:

$$R = Fs,$$

где  $R$  — работа,  $F$  — величина силы (но не самая сила; сила есть вектор, а здесь  $F$  — скаляр),  $s$  — величина перемещения (но не самое перемещение).

Если сила действует под углом к направлению движения точки, то для вычисления работы следует брать не величину силы, а лишь величину её проекции на перемещение  $s$ :

$$R = s \operatorname{pr}_s \mathbf{F} = s F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{s}).$$

Всё вышесказанное можно сформулировать значительно короче, сказав: *работа есть скалярное произведение силы на перемещение*:

$$R = \mathbf{F} \mathbf{s}. \quad (8)$$

Формула (8) пригодна во всех случаях, т. е. при любом угле между силой и перемещением. Здесь сила  $\mathbf{F}$  и перемещение  $\mathbf{s}$  рассматриваются как векторы, а произведение  $\mathbf{F} \mathbf{s}$  понимается как скалярное произведение двух векторов. Работа  $R$  есть, разумеется, скаляр, положительный — если сила образует острый угол с перемещением, отрицательный — если тупой, и равный нулю — если прямой.

**176. Формальные свойства скалярного умножения.** Действие, названное нами скалярным умножением, обладает почти всеми *формальными* свойствами обычного умножения (хотя под общим формальным выражением здесь и там скрывается различное конкретное содержание).

Формальные свойства обыкновенного умножения были рассмотрены в п 161 (стр. 295). Выясним, обладает ли этими свойствами скалярное умножение векторов.

Обладает ли скалярное произведение векторов первым свойством (свойство сочетательности)?

В применении к скалярному умножению векторов свойство сочетательности вообще не имеет смысла, так как нельзя скалярно перемножить три вектора. Вдумаемся в смысл символа

$$(\mathbf{ab}) \mathbf{c}.$$

Здесь выражение, стоящее в скобках, есть скаляр. Этот скаляр умножается на вектор  $\mathbf{c}$ . Это последнее умножение уже не есть скалярное умножение двух векторов, а есть умножение скаляра на вектор — действие, рассмотренное в п 160 (стр. 293). Таким образом, два действия умножения, подразумевающиеся в символе  $(\mathbf{ab}) \mathbf{c}$ , суть действия различной природы: умножение  $\mathbf{a}$  на  $\mathbf{b}$  есть скалярное умножение двух векторов, а умножение  $\mathbf{ab}$  на  $\mathbf{c}$  есть умножение скаляра на вектор.

Но если свойство сочетательности для скалярного умножения не имеет смысла, то можно поставить вопрос, имеет ли место свойство сочетательности для двух умножений, из которых одно есть скалярное умножение двух векторов, а другое — умножение вектора на скаляр. Другими словами, имеет ли место тождество

$$(\mathbf{ab}) \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{bc})?$$

На этот вопрос следует ответить отрицательно, так как левая часть этого равенства есть вектор, коллинеарный  $\mathbf{c}$ , а правая часть — вектор, коллинеарный  $\mathbf{a}$ .

Обладает ли скалярное умножение вторым свойством (свойством переместительности)?

Ответ. Да. Мы уже доказали это выше [формула (3) (стр. 324)].

Обладает ли скалярное умножение третьим свойством (т. е. является ли скалярное умножение распределительным относительно сложения векторов)? Другими словами, имеет ли место тождество

$$(a + b)c = ac + bc?$$

Ответ. Да.

Доказательство. Представим вектор  $c$  в виде

$$c = cc^0,$$

где  $c$  — длина вектора  $c$ , а  $c^0$  — его единичный вектор.

Для единичного вектора  $c^0$  имеет место тождество

$$(a + b)c^0 = ac^0 + bc^0. \quad (*)$$

В самом деле, скалярное произведение какого-нибудь вектора на единичный вектор есть проекция этого вектора на этот единичный вектор [формула (6) (стр. 325)]. Таким образом, равенство (\*) гласит, что проекция суммы векторов  $a$  и  $b$  на вектор  $c^0$  равна сумме проекций векторов  $a$  и  $b$  на вектор  $c^0$ , а это утверждение, как мы знаем, верно.

На основании свойства, сформулированного в п 174 [формулы (7) (стр. 325)], мы можем в равенстве (\*) умножить вектор  $c^0$  на скаляр  $c$ : так как вектор  $c^0$  входит во все члены равенства (\*), то при этом все эти члены умножаются на  $c$ , и равенство не нарушится. Замечая, что  $cc^0 = c$ , получим:

$$(a + b)c = ac + bc, \quad (9)$$

что и требовалось доказать.

Как было объяснено в п 161 (стр. 296), из формулы (9) вытекает обычное правило умножения многочлена на многочлен. Учитывая также свойства умножения вектора на скаляр, можно сформулировать следующее правило: *скалярное произведение двух линейных комбинаций векторов составляется по тому же закону, что и произведение многочленов в алгебре*. Например,

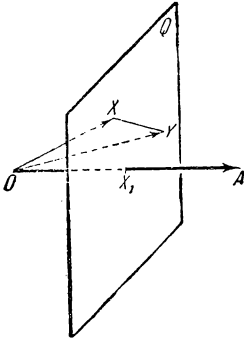
$$\begin{aligned} (\alpha a + \beta b - \gamma c)(\lambda p - \mu q) &= \\ &= \alpha\lambda ap + \beta\lambda bp - \gamma\lambda cp - \alpha\mu aq - \beta\mu bq + \gamma\mu cq. \end{aligned}$$

При этом можно пользоваться свойствами переместительности и сочетательности векторного сложения и переместительности скалярного умножения векторов, т. е. можно переставлять множители и слагаемые и любым образом группировать их. Опираясь на эти свойства, можно, например, вывести формулы

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (10)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \quad (11)$$

Предостерегаем читателя от попытки распространить на скалярное умножение векторов алгебраические формулы, связанные с возведением в степень, большую двух (например, формулу для куба суммы). Выше уже разъяснялось, что нельзя скалярно перемножить больше двух векторов, потому что, перемножив первые два, мы получим уже не вектор, а скаляр. В частности, в векторной алгебре есть понятие скалярного квадрата ( $\mathbf{a}^2$ ), но нет понятия скалярного куба и более высоких степеней.



Черт. 181.

Неоднозначность скалярного деления:

$$\overline{OX} \cdot \overline{OA} = \overline{OY} \cdot \overline{OA}.$$

ное деление как действие, обратное скалярному умножению, то это действие будет не однозначно.

Скалярно разделить скаляр  $m$  на вектор  $\mathbf{a}$  — это значит найти вектор  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = m. \quad (12)$$

Это уравнение можно переписать так:

$$a \text{ пр } \mathbf{a}\mathbf{x} = m,$$

откуда

$$\text{пр } \mathbf{a}\mathbf{x} = \frac{m}{a}. \quad (13)$$

Равенство (13) показывает, что уравнению (12) будет удовлетворять всякий вектор, проекция которого на вектор  $\mathbf{a}$  равна  $\frac{m}{a}$ . Таких векторов, как легко понять, существует бесконечное множество. Будем выводиться векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{x}$  из общего начала. На черт. 181 изображена плоскость  $Q$ , перпендикулярная к оси вектора  $\mathbf{a}$  и отсекающая на ней отрезок  $OX_1 = \frac{m}{a}$ . Всякий вектор  $\overline{OX}$ , конец которого лежит где-нибудь в плоскости  $Q$ , имеет проекцию на  $\mathbf{a}$ , равную  $\frac{m}{a}$ , и, следовательно, удовлетворяет уравнению (12).

Пусть  $\overline{OX}$  есть какой-нибудь вектор, конец которого лежит в плоскости  $Q$  и который, следовательно, удовлетворяет уравнению (12):

$$\mathbf{a} \cdot \overline{OX} = m.$$

Всякий другой вектор  $\overline{OY}$ , конец которого тоже лежит в плоскости  $Q$ , может быть представлен так:

$$\overline{OY} = \overline{OX} + \overline{XY}. \quad (**)$$

Вектор  $\overline{XY}$ , как лежащий в плоскости  $Q$ , перпендикулярен к вектору  $\mathbf{a}$ , т. е.

$$\mathbf{a} \cdot \overline{XY} = 0.$$

Поэтому, подставляя в уравнение (12) вместо  $\mathbf{x}$  вектор  $\overline{OY}$ , мы получим:

$$\mathbf{a} \cdot \overline{OY} = \mathbf{a}(\overline{OX} + \overline{XY}) = \mathbf{a} \cdot \overline{OX} + \mathbf{a} \cdot \overline{XY} = \mathbf{a} \cdot \overline{OX} = m.$$

Таким образом, если  $\overline{OX}$  есть какой-нибудь один вектор, удовлетворяющий уравнению (12), то все другие векторы, удовлетворяющие уравнению (12), получаются путём прибавления к вектору  $\overline{OX}$  любых векторов, перпендикулярных к  $\mathbf{a}$  (т. е. дающих нуль при скалярном умножении на  $\mathbf{a}$ ).

Это явление есть непосредственное следствие наличия делителей нуля. Мы предвидели эту возможность (см. замечание на стр. 297, последние три строки), когда ещё не были знакомы со скалярным умножением.

Среди всех векторов, удовлетворяющих уравнению (12), имеется один вектор, коллинеарный  $\mathbf{a}$ . Он, очевидно, равен произведению скаляра  $\frac{m}{a}$  на единичный вектор вектора  $\mathbf{a}$ , т. е. на  $\frac{\mathbf{a}}{a}$ :

$$\overline{OX}_1 = \frac{m}{a^2} \mathbf{a}. \quad (14)$$

Можно непосредственной подстановкой убедиться, что вектор (14) удовлетворяет уравнению (12).

**177. Координатное выражение скалярного произведения.** Пусть даны векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Представим их как линейные комбинации ортов:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Коэффициенты при  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  в этих комбинациях суть координаты данных векторов.

Мы можем скалярно перемножить векторы (15) как обычные многочлены. При этом перемножении мы столкнёмся со скалярными произведениями ортов. Вычислим их заранее.

Скалярный квадрат вектора есть квадрат его длины. Орты суть единичные векторы. Следовательно,

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1. \quad (16)$$

Всякие два разных орта взаимно перпендикулярны. Следовательно, скалярное произведение двух *разных* ортов равно нулю:

$$\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = \mathbf{jk} = \mathbf{kj} = \mathbf{ki} = \mathbf{ik} = 0. \quad (17)$$

Объединим формулы (16) и (17) в следующей «таблице скалярного умножения ортов»:

	<b>i</b>	<b>j</b>	<b>k</b>
<b>i</b>	1	0	0
<b>j</b>	0	1	0
<b>k</b>	0	0	1

(18)

где произведение двух ортов указано на пересечении соответствующих строки и столбца.

Перемножая векторы (15) и принимая во внимание таблицу (18), получим:

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (19)$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноимённых координат.*

Если вектор **a** скалярно возводится в квадрат, то формула (19) (если положить в ней **b** = **a**) даёт:

$$\mathbf{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (20)$$

Формула (20) совпадает с выведенной ранее формулой (10) § 3 (стр. 309), потому что скалярный квадрат вектора — это то же самое, что квадрат его длины.

Вообще можно так выразить длину вектора, пользуясь скалярным умножением:

$$a = +\sqrt{\mathbf{a}^2}. \quad (21)$$

**178. Выражение координат вектора через этот вектор и орты.** Если в пространстве заданы орты **i**, **j** и **k** и задан некоторый вектор **a**, то координаты этого вектора вполне определены. Поэтому должна существовать возможность выразить эти координаты непосредственно через вектор **a** и орты **i**, **j** и **k**. Покажем, как это делается.

Напишем разложение вектора **a** по ортам:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (***)$$

Здесь числа  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  — неизвестные.

Умножим скалярно обе части равенства (\*\*\*) на **i**. Принимая во внимание таблицу умножения ортов, получим:

$$\mathbf{ai} = a_x.$$

Точно так же, умножая скалярно равенство (\*\*\*) на **j** или на **k**, найдём  $a_y$  и  $a_z$ .



Итак, координаты всякого вектора выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= ai, \\ a_y &= aj, \\ a_z &= ak, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

т. е. координаты вектора суть скалярные произведения этого вектора на орты. Здесь мы имеем новую формулировку для факта, который нам был известен и раньше. Скалярное произведение какого-либо вектора на единичный вектор есть проекция этого вектора на этот единичный вектор. Таким образом, сформулированное только что свойство обозначает, что координаты вектора суть проекции этого вектора на орты.

Подставляя выражения (22) в формулу (\*\*\*), получаем следующее тождество для разложения всякого вектора по ортам:

$$\mathbf{a} = (ai) \mathbf{i} + (aj) \mathbf{j} + (ak) \mathbf{k}. \quad (23)$$

**179. Применение скалярного произведения к нахождению углов и длин.** Так как направление в пространстве задаётся направляющим вектором, то всякий вопрос о нахождении угла между какими-нибудь двумя направлениями сводится к нахождению угла между двумя векторами.

Из формулы (4) (стр. 324) имеем:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{ab}{ab}, \quad (24)$$

т. е. косинус угла между двумя векторами равен скалярному произведению этих векторов, делённому на произведение их длин.

Допустим, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заданы своими координатами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}. \end{aligned} \right\}$$

В этом случае

$$ab = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$a = + \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$b = + \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (24), получим:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (25)$$

Оба радикала, входящие в формулу (25), берутся с плюсом, так как это суть длины векторов.

Рассмотрим пример нахождения угла при помощи скалярного произведения. Пусть в треугольнике  $ABC$  дано

$$AB = 2, \quad AC = 5, \quad \angle A = 60^\circ.$$

Требуется найти угол между медианами, проведёнными из вершин  $A$  и  $B$  (черт. 182).

Векторизуем стороны треугольника. Заметим, что на плоскости всегда можно принять за основные какие-нибудь два неколлинеарных вектора; все остальные векторы можно выразить через них. Положим, например,

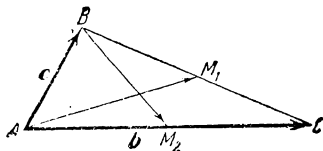
$$\overline{AB} = \mathbf{c}, \quad \overline{AC} = \mathbf{b}.$$

Согласно условию задачи, угол  $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 60^\circ$ . Следует внимательно относиться к выбранному нами направлению на сторонах треугольника; если бы мы обозначили через  $\mathbf{b}$  вектор  $\overline{CA}$ , то угол  $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  равнялся бы не  $60^\circ$ , а  $120^\circ$ .

Пусть  $M_1$  — середина стороны  $BC$ , а  $M_2$  — середина стороны  $AC$ . Выражаем медианы как векторы через векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$\overline{AM_1} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2},$$

$$\overline{BM_2} = \frac{\mathbf{b} - 2\mathbf{c}}{2}.$$



Черт. 182.

Имея выражения медиан как векторов, определим их длины. Для этого введём векторы  $\overline{AM_1}$  и  $\overline{BM_2}$  скалярно в квадрат:

$$\overline{AM_1}^2 = \left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + 2\mathbf{b}\mathbf{c} + c^2}{4}.$$

При возведении вектора в квадрат можно (но не обязательно) употреблять светлую букву вместо жирной \*) (так как  $\mathbf{b}^2 = b^2$ ); разумеется, нельзя делать этого в скалярном произведении *разных* векторов:  $\mathbf{b}\mathbf{c}$  — не то же самое, что  $bc$ . Замечая, что  $\mathbf{b}\mathbf{c} = bc \cos(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 5 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 5$ , продолжая наши выкладки:

$$\overline{AM_1}^2 = \frac{25 + 10 + 4}{4} = \frac{39}{4}; \quad AM_1 = \frac{\sqrt{39}}{2},$$

$$\overline{BM_2}^2 = \left(\frac{\mathbf{b} - 2\mathbf{c}}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4\mathbf{b}\mathbf{c} + 4c^2}{4} = \frac{25 - 20 + 16}{4} = \frac{21}{4}; \quad BM_2 = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Теперь вычисляем скалярное произведение векторов  $\overline{AM_1}$  и  $\overline{BM_2}$ :

$$\overline{AM_1} \cdot \overline{BM_2} = \left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{b} - 2\mathbf{c}}{2}\right) = \frac{b^2 - \mathbf{b}\mathbf{c} - 2c^2}{4} = \frac{25 - 5 - 8}{4} = 3.$$

Наконец, находим косинус искомого угла по формуле (24) (стр. 331):

$$\cos(\overline{AM_1}, \overline{BM_2}) = \frac{\overline{AM_1} \cdot \overline{BM_2}}{\overline{AM_1} \cdot \overline{BM_2}} = \frac{3}{\frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{4\sqrt{91}}{91} \approx 0,4193.$$

откуда

$$(\overline{AM_1}, \overline{BM_2}) = 65^\circ 13'.$$

Применение скалярного произведения к нахождению длин основано на том, что искомым отрезком векторизуется, а затем скалярно возводится в квадрат. Ограничимся двумя примерами.

\*) В рукописи — опускать черту над буквой.

**Пример 1.** Вывести формулу, выражающую сторону треугольника через две другие стороны и угол между ними.

Если в треугольнике  $ABC$  векторизуем стороны так:

$$\overline{AB} = \mathbf{c}, \quad \overline{AC} = \mathbf{b}, \quad \overline{CB} = \mathbf{a},$$

то будем иметь:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Возводим скалярно в квадрат:

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Заметим, что угол  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  есть не угол треугольника  $C$ , а смежный угол  $180^\circ - C$  и, следовательно,  $\mathbf{a}\mathbf{b} = ab \cos(180^\circ - C) = -ab \cos C$ . Мы получаем известную из тригонометрии теорему косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (26)$$

Если бы мы векторизовали стороны треугольника иначе:

$$\overline{CA} = \mathbf{b}, \quad \overline{CB} = \mathbf{a}, \quad \overline{AB} = \mathbf{c},$$

то мы имели бы:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

но зато при такой векторизации угол  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  был бы внутренним углом треугольника, и мы пришли бы к той же самой теореме косинусов.

**Пример 2.** Вывести формулы для длин медиан треугольника. Векторизуя стороны треугольника:

$$\overline{AB} = \mathbf{c}, \quad \overline{BC} = \mathbf{a}, \quad \overline{CA} = \mathbf{b}$$

и обозначая через  $M$  середину стороны  $BC$ , имеем:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

Возводим скалярно в квадрат:

$$\begin{aligned} \overline{AM}^2 &= \frac{1}{4}(c^2 - 2\mathbf{b}\mathbf{c} + b^2) = \frac{1}{4}[b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - A)] = \\ &= \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc \cos A). \end{aligned}$$

Формулы для других медиан получим циклической перестановкой букв. Окончательно

$$\left. \begin{aligned} m_a^2 &= \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc \cos A), \\ m_b^2 &= \frac{1}{4}(c^2 + a^2 + 2ca \cos B), \\ m_c^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab \cos C). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

### Задачи

**318.** Показать, что  $-ab \leq \mathbf{a}\mathbf{b} \leq ab$ . В каких случаях имеет место знак равенства с той или другой стороны?

**319.** Показать, что вектор  $(\mathbf{b}\mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\mathbf{c})\mathbf{b}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{c}$ .

**320.** В треугольнике  $ABC$   $AB=13$ ,  $BC=14$ ,  $CA=15$ . Вычислить

а)  $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$ ;

б)  $\overline{BC} \cdot \overline{CA}$ .

**321.** **a** и **b** — данные векторы. Выразить проекцию вектора **b** на вектор **a**.

**322.** Показать, что в равнобедренном треугольнике скалярное произведение двух медиан, одна из которых выходит из вершины, равно  $\frac{1}{4}$  скалярного произведения сторон, к которым проведены медианы, взятого со знаком  $+$  или  $-$  в зависимости от того, как расставлены стрелки на рассматриваемых векторах.

**323.** Найти условие, при котором диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны.

**324.** Какому условию должны удовлетворять два вектора, чтобы их сумма и разность были взаимно перпендикулярны?

**325.** Доказать, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

**326.** Какому условию должен удовлетворять треугольник  $ABC$ , чтобы биссектриса угла  $A$  была перпендикулярна медиане, проведённой из вершины  $B$ ?

**327.** Доказать: для того чтобы диагонали четырёхугольника были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов противоположных сторон были равны между собой. (Четырёхугольник, вообще говоря, — неплоский.)

**328.** Какому условию должен удовлетворять треугольник  $ABC$ , чтобы медиана и высота, проведённые из вершины  $A$ , совпадали?

**329.** При каком условии  $(\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2$ ? Указать то формальное свойство обыкновенного умножения, которое позволяет доказать, что  $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2 \beta^2$ , и отсутствие которого для скалярного умножения векторов влечёт за собой отсутствие свойства  $(\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2$ .

**330.** При каком условии (необходимом и достаточном)

а)  $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$ ;

б)  $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = (\mathbf{bc})\mathbf{a} = (\mathbf{ca})\mathbf{b}$ .

**331.** Указать механический смысл закона распределительности

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$$

для случаев:

а) векторы **a** и **b** суть силы, вектор **c** — перемещение;

б) векторы **a** и **b** суть перемещения, вектор **c** — сила.

**332.** Показать, что векторы  $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$  и  $4\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$  взаимно перпендикулярны.

**333.** Показать, что вектор  $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$  перпендикулярен к плоскости, параллельной векторам  $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$  и  $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ .

**334.** Найти вектор **x**, коллинеарный вектору  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  и удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{ax} = -18.$$

**335.** Найти геометрическое место концов векторов **x**, имеющих начало в данной точке **A** и удовлетворяющих

а) уравнению  $\mathbf{ax} = m$ ;

б) двум уравнениям  $\mathbf{ax} = m$  и  $\mathbf{bx} = n$ , где **a** и **b** — неколлинеарные векторы.

**336.** Показать, что три уравнения

$$\mathbf{ax} = m,$$

$$\mathbf{bx} = n,$$

$$\mathbf{cx} = p$$

( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  — некопланарные векторы) вполне определяют вектор  $\mathbf{x}$ .

## § 6. Векторное умножение

**180. Вектор площадки.** Пусть дана плоская фигура; её площадь есть некоторый скаляр. Так как плоскость этой фигуры занимает определённое положение в пространстве, то можно характеризовать её вектором, причём длина этого вектора будет характеризовать величину площади, а направление будет характеризовать положение в пространстве плоскости данной фигуры \*). Сейчас мы уточним это общее соображение.

В дальнейшем мы будем говорить не о «фигуре», а о «площадке», так как при изображении её вектором не будет играть никакой роли форма фигуры, а будет играть роль лишь её площадь и положение её плоскости.

Будем изображать площадку вектором, который называется «вектором площадки» и определяется следующими условиями.

1) Длина вектора площадки численно равна площади площадки.

Читателя не должно удивлять приравливание разнородных величин — длины и площади. Мы в аналитической геометрии всегда предполагаем, что все единицы масштаба выбраны заранее и после этого все геометрические величины (длины, площади и объёмы) выражаются отвлечёнными числами, показывающими, сколько единиц масштаба заключается в данной величине. Таким образом, сформулированное выше условие значит, что длина вектора площадки заключает столько линейных единиц, сколько площадь площадки заключает квадратных единиц.

2) Вектор площадки перпендикулярен самой площадке.

Высказанные два условия ещё не вполне определяют вектор площадки, так как на прямой, перпендикулярной площадке, можно установить два противоположных друг другу направления, и необходимо условиться, какое из этих двух направлений мы будем приписывать вектору площадки. Нам не удастся этого сделать, пока мы не умеем различать двух сторон плоскости площадки («лицевой стороны» и «изнанки»), так как без такого различия два противополо-

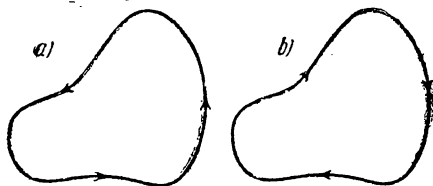
---

\*) Мы будем говорить, что плоскости имеют одно и то же «положение», если они параллельны между собой. Термин «положение плоскости» аналогичен термину «направление прямой».

ложные друг другу направления, перпендикулярные к нашей площадке, совершенно равноправны, и нельзя объяснить, о каком из них идёт речь.

Это затруднение устраняется, если мы выберем определённое направление обхода на контуре рассматриваемой площадки.

Обходить площадку по её контуру можно в двух направлениях, как показано на черт. 183. Например, треугольник  $ABC$  можно обходить по его контуру либо в направлении  $ABC$  (т. е. от вершины  $A$  к вершине  $B$ , от  $B$  к  $C$  и от  $C$  к  $A$ ), либо в направлении  $ACB$ : эти два направления противоположны друг другу. Итак, предположим, что на контуре нашей



Черт. 183. Разные направления обхода по контуру.

площадки установлено определённое направление обхода.

Если смотреть на площадку с какой-либо стороны её плоскости, то установленное направление обхода будет нам казаться либо направлением *против часовой стрелки*, либо *по часовой стрелке*.

Поэтому, если на контуре нашей площадки установлено определённое направление обхода, то можно дать следующее определение: *будем называть положительной стороной плоскости ту, с которой установленное направление обхода по контуру кажется идущим против часовой стрелки*. Согласно этому определению, для площадки черт. 183, *a* страница 336-я является положительной стороной плоскости, а страница 335-я — отрицательной. Для чертежа 183, *b* — наоборот.

Теперь вернёмся к вектору площадки и сформулируем третье условие.

3) Направление вектора площадки есть то направление, в котором надо двигаться, чтобы перейти с отрицательной стороны площадки на положительную.

Например, площадка черт. 183, *a* изображается вектором, проходящим сквозь лист бумаги в направлении от стр. 335-й к стр. 336-й, т. е. направленным *к читателю*.

Эти три условия вполне определяют вектор площадки. Для того чтобы изобразить площадку вектором, необходимо, чтобы на контуре этой площадки было установлено определённое направление обхода.

Условие 3) можно высказать в такой форме:

3') Если начало вектора площадки поместить где-нибудь на самой площадке и если смотреть на площадку с конца вектора, то установленное на контуре площадки направление обхода кажется направлением *против часовой стрелки*.

Можно также высказать условие 3 в форме, называемой «правилom штопора»;

3'') Направление обхода по контуру площадки и направление вектора площадки связаны между собой так же, как вращательное и поступательное движение обыкновенного штопора.

Если изменить направление обхода по контуру, то вектор площадки заменится противоположным.

**181. Понятие о векторном умножении.** Пусть даны два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Приведём их к общему началу:

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b},$$

и построим на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм  $OADB$ .

Вектор площадки  $OADB$  (черт. 184) называется *векторным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$*  и обозначается так:

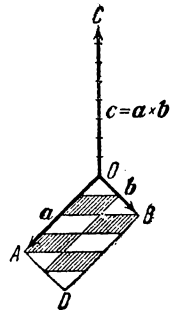
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}^*).$$

Оговоримся раз навсегда, что когда мы обозначаем площадку буквами, указывающими точки её контура, то порядок этих букв указывает направление обхода по контуру. Например, в данном случае, говоря «площадка  $OADB$ », мы в самом названии указываем направление обхода.

Вот более непосредственное определение векторного произведения.

*Векторным произведением двух векторов называется вектор, изображающий параллелограмм, построенный на двух данных векторах, причём направление обхода этого параллелограмма таково, что первый вектор проходится по своему направлению (а второй, следовательно, по противоположному).*

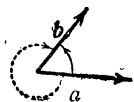
Заметим, что если на векторах  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$  и  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$  построить параллелограмм  $OADB$ , то вектор  $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ , изображающий площадку  $OADB$ , направлен таким образом, что если смотреть с его конца, то поворот от первого вектора ко второму происходит против часовой стрелки\*\*). Теперь мы видим, что определению векторного произведения можно придать такую формулировку.



Черт. 184. Векторное произведение.

\*) Иногда для векторного произведения употребляется обозначение  $[\mathbf{ab}]$ .

\*\*) Читатель всё время не должен забывать, что угол между двумя векторами по самому определению не превосходит  $180^\circ$  [§ 1, неравенства (1) (стр. 272)]. Если упустить это из виду, то будет неясно, что называется «поворотом от первого вектора ко второму»: этот поворот можно производить либо по направлению сплошной дуги, либо по направлению пунктирной дуги (черт. 185). Здесь и всюду в дальнейшем имеется в виду меньший из этих двух поворотов. В случае, когда они оба равны между собой, можно рассматривать любой из них.



Черт. 185.

*Векторным произведением двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется вектор  $\mathbf{c}$ , определяемый следующими условиями:*

1) *Длина вектора  $\mathbf{c}$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .*

2) *Вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярен плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (т. е. перпендикулярен векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ).*

3) *Вектор  $\mathbf{c}$  направлен в ту сторону (из двух возможных), с которой вращение от вектора  $\mathbf{a}$  к вектору  $\mathbf{b}$  кажется происходящим против часовой стрелки.*

Условие 3) можно заменить более коротко сформулированным:

3') *Векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  образуют правую тройку.*

Читатель, который помнит, что такое правая и левая системы осей [п 151 (стр. 280)], легко поймёт, что такое правая и левая тройка векторов. Отметим, что мы не предполагаем, что наши векторы взаимно перпендикулярны (в п 151 мы предполагали, что оси взаимно перпендикулярны, но это предположение было несущественно). Тройка некопланарных векторов называется правой, если с той стороны, где находится конец третьего вектора (предполагается, что все три вектора приведены к общему началу), вращение от первого вектора ко второму кажется происходящим против часовой стрелки.

В условии 3' существует порядок векторов. Здесь  $\mathbf{a}$  — первый множитель,  $\mathbf{b}$  — второй множитель,  $\mathbf{c}$  — векторное произведение. Взятые именно в таком порядке, наши векторы должны образовывать правую тройку.

**182. Некоторые простейшие свойства векторного произведения.** Прежде чем исследовать свойства векторного произведения, укажем некоторые свойства правых и левых троек векторов, которые нам при этом понадобятся. Свойства эти очевидны, и читатель легко убедится в них сам.

Пусть дана тройка векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ . Она называется *ориентированной* тройкой, если указан порядок этих векторов (т. е. указано, какой из них первый, какой — второй и какой — третий). В дальнейшем мы будем говорить об ориентированных тройках и будем считать, что порядок векторов — тот, в каком они перечисляются.

Две тройки называются *одинаково ориентированными* или *имеющими одинаковую ориентацию*, если они обе правые или обе левые; если же одна из них правая, а другая левая, то говорят, что они имеют *разные ориентации*.

Свойство 1. *Ориентация тройки векторов не изменяется от их циклической перестановки.* Это значит, что тройки 1)  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ; 2)  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}$ ; 3)  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  имеют одинаковую ориентацию.

Свойство 2. *Ориентация тройки векторов меняется от перестановки двух векторов.* Это значит, что, например, тройки  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}$  имеют разные ориентации.



Из свойств 1 и 2 вытекает, что если из трёх векторов всевозможными способами образовать тройки:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, & \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}, & \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \\ \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, & \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}, & \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}, \end{array}$$

то тройки первой строки имеют одну ориентацию, а тройки второй строки — другую.

Свойство 3. Если один из трёх векторов заменить противоположным, то ориентация тройки изменится. Это значит, что, например, тройки  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}$  имеют разные ориентации.

Разумеется, ориентация тройки изменится также и в том случае, если заменить один из векторов любым вектором противоположного направления.

Переходим теперь к рассмотрению некоторых свойств векторного произведения. Прежде всего бросается в глаза, что *векторное произведение не переместительно*. В самом деле, при перемене порядка сомножителей меняется направление обхода на контуре параллелограмма, построенного на данных векторах, и, следовательно, векторное произведение изменит направление на противоположное. Других изменений оно не претерпит, так как площадь параллелограмма и положение его плоскости останутся прежние. Таким образом

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (1)$$

Это свойство можно также вывести из свойств 2 и 3 ориентированных троек. В самом деле, если

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

то

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{c},$$

потому что, если тройка  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  правая, то и тройка  $\mathbf{b}, \mathbf{a}, -\mathbf{c}$  тоже правая.

Вследствие того, что векторное произведение не обладает свойством переместительности, необходимо следить за порядком сомножителей: на первом месте ставится первый вектор, а на втором — второй.

Площадь параллелограмма равна произведению соседних сторон на синус угла между ними. Поэтому модуль векторного произведения (но отнюдь не само векторное произведение) выражается формулой

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (2)$$

Само же векторное произведение может быть выражено так:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}^0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{c}^0$  — единичный вектор, перпендикулярный векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и образующий с ними (если считать в порядке  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^0$ ) правую тройку.

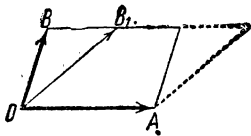
Пусть даны два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Их векторное произведение

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

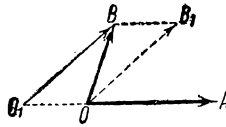
не изменится, если конец одного вектора передвигать (не трогая его начала) по прямой, параллельной другому вектору. Например, для векторов, изображённых на черт. 186, имеем:

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB_1}$$

(площадь параллелограмма, построенного на данных векторах, очевидно, не меняется при таком сдвиге; направление вращения от первого вектора ко второму тоже не меняется).



Черт. 186.  $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB_1}$ .



Черт. 187.  $\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OA} \times \overline{OB_1}$ .

Разумеется, можно сдвинуть начало одного вектора (не трогая его конца) по прямой, параллельной другому вектору. На черт. 187 имеем:

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OA} \times \overline{O_1B}.$$

Это объясняется тем, что сдвиг начала вектора эквивалентен сдвигу его конца по прямой, параллельной той, по которой сдвинуто начало. Так, на черт. 187 вектор  $\overline{O_1B}$  может быть заменён равным ему вектором  $\overline{OB_1}$ :

$$\overline{O_1B} = \overline{OB_1},$$

а вектор  $\overline{OB_1}$  получается из вектора  $\overline{OB}$  сдвигом конца по прямой, параллельной вектору  $\mathbf{a}$ .

Если один из двух перемножаемых векторов умножить на скаляр, то всё векторное произведение умножится на этот скаляр:

$$\lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \lambda \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (4)$$

Другими словами: скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения.

Доказательство предоставляем читателю; следует рассмотреть отдельно случаи  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$ .

**183. Некоторые частные случаи векторного умножения.** Из формул (2) и (3) ясно, что векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  обращается в нуль-вектор тогда и только тогда, когда либо  $\mathbf{a} = 0$ , либо  $\mathbf{b} = 0$ , либо  $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ . Равенство  $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  имеет место

либо при  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ , либо при  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 180^\circ$ ; в этих обоих случаях векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны.

Итак, равенство нулю векторного произведения двух векторов обозначает их коллинеарность. Случай нуль-вектора тоже включается в эту формулировку, так как нуль-вектор коллинеарен всякому вектору (стр. 288).

Таким образом мы получили новую форму условия коллинеарности двух векторов. Тот факт, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, аналитически можно записать либо так:

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a},$$

либо так:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0. \quad (5)$$

В частности, векторный квадрат всякого вектора равен нулю:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0. \quad (6)$$

Если перемножаемые векторы будут взаимно перпендикулярны, то  $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ , и формула (2) даёт

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \quad (\text{при } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}). \quad (7)$$

**184. Формальные свойства векторного умножения.** Будем сравнивать формальные свойства векторного умножения с формальными свойствами обыкновенного умножения [п 161 (стр. 295)].

Обладает ли векторное умножение первым свойством (свойство сочетательности)?

Ответ: нет.

Мы видели, что для скалярного умножения векторов свойство сочетательности лишено смысла, так как нельзя скалярно перемножить три вектора: при перемножении первых двух векторов получается скаляр. Про векторное умножение этого нельзя сказать. При векторном перемножении двух векторов получается вектор; этот вектор можно векторно умножить на какой-нибудь третий вектор и т. д. Таким образом можно векторно перемножить сколько угодно векторов. Поэтому формулировка закона сочетательности для векторного умножения имеет смысл, но всё-таки, как мы сейчас покажем, векторное умножение этим свойством не обладает.

Рассмотрим два вектора:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c},$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Перемножая векторно векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , мы получаем вектор  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , перпендикулярный им обоим. Умножая векторно этот вектор на  $\mathbf{c}$ , мы получим вектор, перпендикулярный  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Вектор, перпендикулярный  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , очевидно, лежит в плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (если приводить все векторы к общему началу; если же нет, то следует сказать, что этот вектор компланарен с  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ).

Итак, выясняется, что  $\mathbf{d}$  есть вектор, лежащий в плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и перпендикулярный вектору  $\mathbf{c}$ . Но по тем же причинам  $\mathbf{e}$  есть вектор, лежащий в плоскости векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  и перпендикулярный вектору  $\mathbf{a}$ . А так как плоскость векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , вообще говоря, не совпадает с плоскостью векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , то векторы  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{e}$  различны, и, следовательно, закон сочетательности для векторного умножения не имеет места.

Обладает ли векторное умножение вторым свойством (свойство переместительности)?

Мы уже видели, что нет. Вместо этого имеет место такое свойство:

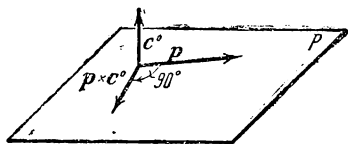
$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Обладает ли векторное умножение третьим свойством (т. е. является ли оно распределительным относительно сложения векторов)? Другими словами, имеет ли место тождество

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}?$$

Ответ: да.

Доказательство. Пусть имеется некоторая плоскость  $P$ , и пусть  $\mathbf{c}^0$  есть единичный вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Рассмотрим векторное произведение какого-нибудь вектора  $\mathbf{p}$ , лежащего в плоскости  $P$ , на вектор  $\mathbf{c}^0$  (черт. 188)



Черт. 188.

$$\mathbf{p} \times \mathbf{c}^0.$$

Вектор  $\mathbf{p} \times \mathbf{c}^0$  лежит в плоскости  $P$  (потому что он перпендикулярен вектору  $\mathbf{c}^0$ ) и перпендикулярен вектору  $\mathbf{p}$ .

Вращение от вектора  $\mathbf{p}$  к вектору  $\mathbf{p} \times \mathbf{c}^0$ , если смотреть с конца вектора  $\mathbf{c}^0$ , происходит по часовой стрелке. Модуль вектора  $\mathbf{p} \times \mathbf{c}^0$  равен модулю вектора  $\mathbf{p}$  [на основании формулы (7) (стр. 341)]. Итак, любой вектор  $\mathbf{p}$ , лежащий в плоскости  $P$ , от векторного умножения на  $\mathbf{c}^0$  поворачивается в плоскости  $P$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке (если смотреть с конца вектора  $\mathbf{c}^0$ ).

Пусть даны векторы  $\overline{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{OB} = \mathbf{b}$  и  $\overline{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Следовательно, фигура  $OADB$  есть параллелограмм (черт. 189). Возьмём единичный вектор  $\mathbf{c}^0$ , перпендикулярный к плоскости параллелограмма  $OADB$ , и умножим векторно все три вектора  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  и  $\overline{OD}$  на  $\mathbf{c}^0$ ; при этом все эти векторы, не изменяя своей длины, повернутся в плоскости  $OADB$  на  $90^\circ$  в одну и ту же сторону. Получатся векторы

$$\overline{OA_1} = \overline{OA} \times \mathbf{c}^0 = \mathbf{a} \times \mathbf{c}^0,$$

$$\overline{OB_1} = \overline{OB} \times \mathbf{c}^0 = \mathbf{b} \times \mathbf{c}^0,$$

$$\overline{OD_1} = \overline{OD} \times \mathbf{c}^0 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}^0.$$

Эти векторы, разумеется, образуют параллелограмм (тот же параллелограмм  $OADB$ , повернутый на  $90^\circ$ ). Следовательно,  $\overline{OD_1} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}$ , т. е.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}^0 = \mathbf{a} \times \mathbf{c}^0 + \mathbf{b} \times \mathbf{c}^0. \quad (*)$$

Итак, свойство распределительности доказано для того случая, когда  $\mathbf{c}^0$  — единичный вектор, перпендикулярный к  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Пусть теперь  $\mathbf{c}$  есть вектор любой длины, но попрежнему перпендикулярный к  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Представим его в виде

$$\mathbf{c} = c\mathbf{c}^0.$$

Если мы в равенстве (\*) введём всюду при  $\mathbf{c}^0$  множитель  $c$ , то оно не нарушится, потому что при этом в нём все члены умножатся на  $c$  [см. формулу (4) (стр. 340)]. Следовательно, мы имеем

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times c\mathbf{c}^0 = \mathbf{a} \times c\mathbf{c}^0 + \mathbf{b} \times c\mathbf{c}^0$$

или

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad (***)$$

Теперь свойство распределительности доказано для любого вектора  $\mathbf{c}$ , перпендикулярного векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Заметим, что при умножении всех рассматриваемых векторов на  $\mathbf{c}$  параллелограмм  $OADB$  поворачивается в своей плоскости на  $90^\circ$ , одновременно растягиваясь в  $c$  раз.

Переходим теперь к общему случаю, когда векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  — какие угодно; мы попрежнему приводим их к общему началу  $O$ . Строим по правилу параллелограмма  $\overline{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ; таким образом,  $OADB$  есть параллелограмм (черт. 190).

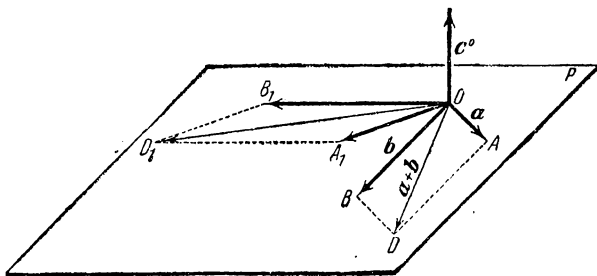
Проведём через  $O$  плоскость  $P$ , перпендикулярную вектору  $\mathbf{c}$ , и спроектируем параллелограмм  $OADB$  на эту плоскость. При проектировании точка  $O$  останется на месте, а точки  $A$ ,  $D$  и  $B$  спроектируются соответственно в точки  $A_1$ ,  $D_1$  и  $B_1$ .

Установим следующие факты:

1) Четырёхугольник  $OA_1D_1B_1$  есть параллелограмм \*); отсюда следует, что

$$\overline{OD_1} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}.$$

\*) Потому что параллельные прямые при проектировании переходят в параллельные, и, следовательно, проекция параллелограмма есть параллелограмм.

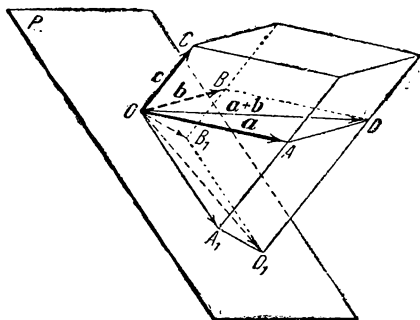


Черт. 189. Доказательство распределительности векторного умножения (первый этап).

2) Ввиду того что вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярен плоскости  $P$ , мы можем считать свойство распределительности уже доказанным для векторного умножения векторов, *лежащих в плоскости  $P$* , на вектор  $\mathbf{c}$  [формула (\*\*\*)]. Следовательно,

$$\overline{OD_1} \times \mathbf{c} = \overline{OA_1} \times \mathbf{c} + \overline{OB_1} \times \mathbf{c}. \quad (\dagger)$$

3) Проектирующие прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $DD_1$  параллельны вектору  $\mathbf{c}$  (потому что и эти прямые и вектор  $\mathbf{c}$  перпендикулярны плоскости  $P$ ). Векторное произведение не меняется, если конец одного



Черт. 190. Доказательство распределительности векторного умножения (второй этап).

вектора сдвинуть по прямой, параллельной другому вектору [см. черт. 186 (стр. 340)]. Поэтому равенство  $(\dagger)$  не нарушится, если мы точки  $D_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  перенесём соответственно в  $D$ ,  $A$  и  $B$ .

$$\overline{OD} \times \mathbf{c} = \overline{OA} \times \mathbf{c} + \overline{OB} \times \mathbf{c},$$

т. е.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad (8)$$

Таким образом свойство распределительности векторного умножения относительно сложения векторов доказано во всей общности.

Можно переставить сомножители во всех членах равенства (8), так как при этом все эти члены заменяются противоположными векторами, и равенство не нарушится. Следовательно, свойство распределительности может быть записано и в такой форме:

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}. \quad (9)$$

Из свойства распределительности вытекает обычное правило умножения многочленов, которым можно пользоваться при векторном перемножении линейных комбинаций векторов. *При этом нельзя произвольно менять порядок множителей.* В частности, нельзя пользоваться теми алгебраическими формулами сокращённого умножения, которые основаны не только на законе распределительности, но также на законе переместительности; такова, например, формула  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$ ; при её выводе мы считаем, что получающиеся члены  $-\mathbf{ab}$  и  $+\mathbf{ba}$  взаимно уничтожаются, так как  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ . Посмотрим, что получится при векторном умножении суммы двух векторов на их разность:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \\ &= -\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Обладает ли векторное умножение четвёртым свойством (отсутствие делителей нуля)? Мы уже видели, что нет. *Векторное произведение двух векторов может быть равно нулю без того, чтобы один из этих векторов был нулём; это будет в том случае, когда перемножаемые векторы коллинеарны.*

Мы видели [п 161 (стр. 297)], что однозначность деления связана с отсутствием делителей нуля. В векторном умножении делители нуля существуют. Мы сейчас покажем, что если определить векторное деление как действие, обратное векторному умножению, то это действие будет не однозначно.

Векторно разделить вектор  $\mathbf{b}$  на вектор  $\mathbf{a}$ , это значит, найти вектор  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

В силу самого определения векторного умножения вектор  $\mathbf{b}$  должен быть перпендикулярен векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{x}$ . Следовательно, если два данных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не перпендикулярны друг другу, то деление *невозможно*.

Если  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , то деление возможно, но оно не однозначно. Вектор  $\mathbf{x}$  можно найти так:

1) Проведём прямую, перпендикулярную  $\mathbf{b}$  и образующую с  $\mathbf{a}$  произвольный угол  $\varphi$ .

2) Определим длину вектора  $\mathbf{x}$  из равенства

$$ax \sin \varphi = b.$$

3) На проведённой прямой отложим вектор найденной длины в такую сторону, чтобы векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{b}$  образовывали правую тройку.

Произвол в выборе угла  $\varphi$  показывает неоднозначность решения. Впрочем, эта неоднозначность может быть показана чисто геометрически. Допустим, что мы нашли какой-нибудь один вектор  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющий уравнению

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Мы знаем, что можно сдвинуть конец вектора  $\mathbf{x}$  по прямой, параллельной  $\mathbf{a}$ , и векторное произведение от этого не изменится [см. черт. 186 (стр. 340)]. Следовательно, вектор  $\mathbf{x}_1$ , получающийся в результате такого сдвига, тоже удовлетворяет нашему уравнению

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}.$$

Сдвиг конца вектора по прямой, параллельной вектору  $\mathbf{a}$ , с аналитической точки зрения есть прибавление к этому вектору вектора, коллинеарного  $\mathbf{a}$ . Так (черт. 191),

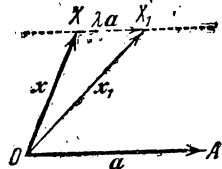
$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \overline{\lambda \mathbf{x}_1} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}.$$

Понятно, что если вектор  $\mathbf{x}$  удовлетворяет уравнению  $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , то и всякий вектор  $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}$  тоже удовлетворяет этому уравнению, так как на основании закона распределительности

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{a},$$

а последний член равен нулю, как произведение двух коллинеарных векторов.

Здесь опять (как и в скалярном умножении) реализуется замечание, сделанное в п 161 (стр. 297, последние три строки).



Черт. 191. Неоднозначность векторного деления:  $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}_1$ .

**185. Координатное выражение векторного произведения.** Свойство распределительности позволяет легко выразить векторное произведение двух векторов через координаты этих векторов. Для этого надо данные два вектора, разложенных по ортам, перемножить по правилу умножения многочленов. Но сначала надо составить таблицу векторного умножения ортов.

Параллелограмм, построенный на ортах  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , есть квадрат, площадь которого равна единице. Следовательно, векторное произведение  $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$  есть единичный вектор, перпендикулярный  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  и образующий с ними правую тройку. Но таким вектором является орт  $\mathbf{k}$ . Итак,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Аналогичным рассуждением получим

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Перестановка множителей даёт

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Если добавить к этому, что векторный квадрат всякого вектора равен нулю, то получим следующую таблицу векторного умножения ортов:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

(10)

Эту таблицу можно заменить следующей мнемонической схемой:



Здесь орты расположены в циклическом порядке. Если перемножить любые два орта, идущих один за другим по стрелке, то получится третий орт. Если же перемножить любые два орта,



идущих один за другим, против стрелки, то получится вектор, противоположный третьему орту.

Решим теперь задачу о выражении векторного произведения двух векторов через их координаты. Пусть

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Перемножая эти векторы почленно, после приведения получаем:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \quad (12)$$

Каждый член правой части получается из предыдущего члена циклической заменой, причём индексы идут по циклу  $x, y, z$ , а орты — по циклу  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Векторное произведение двух векторов можно формально записать в виде определителя

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (13)$$

В самом деле, если раскрывать написанное выражение по любому из тех правил, по которым мы раскрывали определители третьего порядка, то мы получим выражение (12). Особенно удобно разлагать определитель (13) по элементам первой строки. Итак, векторное произведение двух векторов можно представить в виде определителя третьего порядка, в котором в первой строке стоят орты, во второй — координаты первого вектора и в третьей — координаты второго вектора.

Однако выражение (13) не есть определитель в том смысле, в каком мы всегда употребляли это слово до сих пор, потому что не все его элементы суть числа: элементы первой строки суть векторы, и всё выражение также есть вектор, а не число.

### Задачи

**337.** Каким вектором изображается площадка, ограниченная окружностью  $y = R \cos t$ ,  $z = R \sin t$ , лежащей в плоскости  $YZ$ , если направление обхода по окружности соответствует возрастанию параметра  $t$ ?

**338.** Найти  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ , зная, что  $a = 1$ ,  $b = 5$ ,  $\mathbf{ab} = -3$ .

**339.** Доказать, что  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq ab$ . В каком случае имеет место знак равенства?

**340.** Написать в координатной форме равенство  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{ab})^2 = a^2 b^2$ .

**341.** Указать ориентацию троек

a)  $\mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}$ ; d)  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{a}, \mathbf{b}$ ;

b)  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ ; e)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

c)  $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ;

**342.** Найти единичный вектор, перпендикулярный одновременно векторам  $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$  и  $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ .

**343.** Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — неколлинеарные векторы. Доказать, что  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  суть взаимно перпендикулярные векторы (т. е. любые два из них взаимно перпендикулярны).

**344.** Раскрыть скобки в выражении

$$(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 5\mathbf{b}).$$

**345.** Найти площадь треугольника с вершинами  $A(4, -1, 2)$ ,  $B(-8, 0, 4)$  и  $C(8, 2, 3)$ .

**346.** Чему равно

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})?$$

**347.** Доказать, что если  $\mathbf{ab} = 0$  и  $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = 0$ , то  $\mathbf{bc} = 0$ .

**348.** Выразить формулой содержание закона, выражаемого чертежом 186 (стр. 340).

**349.** Дан произвольный тетраэдр. Будем считать внутреннюю сторону каждой грани отрицательной, а внешнюю — положительной. Доказать, что сумма векторов, изображающих грани тетраэдра, равна нулю.

## § 7. Произведения трёх векторов

**186.** Понятие о смешанном произведении и его геометрический смысл. В связи с тем, что мы знаем два рода умножения векторов — скалярное и векторное, — могут встретиться следующие три комбинации при перемножении трёх векторов.

1) Вектор  $\mathbf{a}$  множится на  $\mathbf{b}$  скалярно. Полученный скаляр множится на вектор  $\mathbf{c}$ :

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c}.$$

Смысл этого выражения вполне ясен, и мы его рассматривать не будем.

2) Вектор  $\mathbf{a}$  множится на вектор  $\mathbf{b}$  векторно. Полученный вектор множится на вектор  $\mathbf{c}$  скалярно:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Такое произведение называется *смешанным произведением трёх векторов*. Его свойства будут рассмотрены в этом п.

3) Вектор  $\mathbf{a}$  множится на вектор  $\mathbf{b}$  векторно. Полученный вектор множится на вектор  $\mathbf{c}$  тоже векторно:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

Такое произведение трёх векторов называется *двойным векторным произведением трёх векторов*. Его свойства будут рассмотрены в п 190.

Рассмотрим смешанное произведение

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Будем считать, что все наши векторы приведены к общему началу (черт. 192):

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC},$$

Когда мы перемножим векторно векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то получим некоторый вектор  $\mathbf{d} = \overline{OD}$

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

обладающий следующими свойствами: 1) длина вектора  $\mathbf{d}$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , 2) вектор  $\mathbf{d}$  перпендикулярен плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , 3) векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{d}$  образуют правую тройку.

Рассмотрим отдельно случаи, когда вектор  $\mathbf{c}$  образует с векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  правую тройку и когда левую.

Пусть вектор  $\mathbf{c}$  образует с векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  правую тройку (черт. 192, а). В таком случае вектор  $\mathbf{c}$  лежит от плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  по ту же сторону, что и вектор  $\mathbf{d}$ , и образует с вектором  $\mathbf{d}$  острый угол.

Мы уже умножили векторно вектор  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$  и получили вектор  $\mathbf{d}$ . Теперь мы должны полученный вектор  $\mathbf{d}$  умножить скалярно на вектор  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{dc} = d \text{ прас.} \quad (*)$$

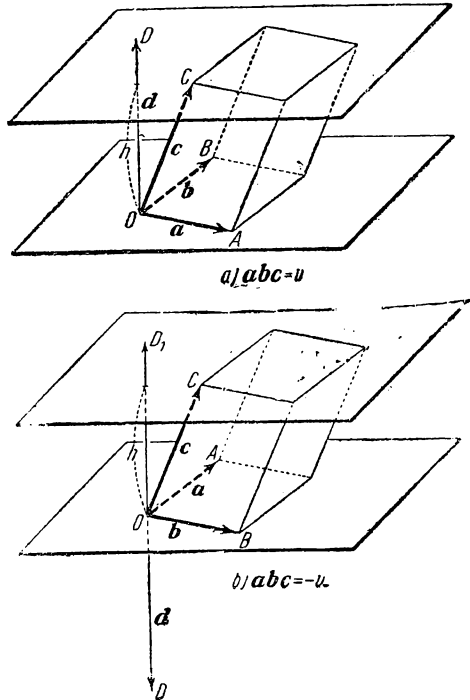
Если мы построим на векторах  $\mathbf{a} = \overline{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overline{OB}$  и  $\mathbf{c} = \overline{OC}$  (как на рёбрах) параллелепипед и если плоскость  $OAB$  будем рассматривать как основание, то высотой этого параллелепипеда будет служить проекция бокового ребра  $\mathbf{c}$  на направление, перпендикулярное к основанию, т. е.

$$h = \text{прас.}$$

Возвращаясь к формуле (\*) и замечая, что  $d$  есть площадь основания параллелепипеда, а  $\text{прас}$  — его высота, мы заключим, что скалярное произведение  $\mathbf{dc}$  есть объём параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ :

$$V = \mathbf{dc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  образуют левую тройку (черт. 192, б), то векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  направлены в разные стороны от плоскости основа-



Черт. 192. Геометрический смысл смешанного произведения.

ния параллелепипеда, и высотой параллелепипеда в этом случае является проекция  $\mathbf{c}$  на вектор, противоположный  $\mathbf{d}$ :  $h = \text{пр}_{-\mathbf{d}}\mathbf{c} = -\text{пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c}$ . Следовательно,

$$V = dh = -d \text{ пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c} = -\mathbf{d}\mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$$

или

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = -V.$$

Мы пришли к следующему результату. *Смешанное произведение трёх векторов по абсолютной величине всегда равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах*

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}| = V, \quad (1)$$

*причём это произведение положительно, если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  образуют правую тройку, и отрицательно — если левую.* Вообще

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \pm V \quad (2)$$

(объём  $V$  есть величина существенно положительная).

**187. Некоторые свойства смешанного произведения.** На первый взгляд кажется, что в смешанном произведении  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$  векторы неравноправны: здесь векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  перемножаются *векторно*, и результат умножается на вектор  $\mathbf{c}$  *скалярно*. Если бы мы из тех же векторов образовали смешанное произведение  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ , то в нём векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  перемножаются *векторно*, а затем вектор  $\mathbf{a}$  умножается *скалярно* на полученный вектор. Однако в действительности этого неравноправия не существует, так как смешанное произведение трёх векторов есть объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятый со знаком плюс или минус. В этой формулировке ничем не выделяются те два вектора из трёх, которые перемножались векторно. Если бы мы проделали все рассуждения предыдущего п применительно к произведению  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ , то мы считали бы основанием параллелепипеда параллелограмм, построенный на векторах  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  (а не на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ), но объём параллелепипеда был бы тот же.

Если даны три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , то объём параллелепипеда, построенного на них, вполне определён. Любое смешанное произведение, образованное из данных трёх векторов, равно либо  $V$ , либо  $-V$ . Следовательно, два различных смешанных произведения, составленных из векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , либо равны между собой, либо отличаются только знаком. Покажем прежде всего, что

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \quad (3)$$

Правая часть равенства (3) может быть также представлена в виде

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a},$$

потому что скалярное умножение обладает свойством переместительности. Чтобы доказать равенство (3), надо только доказать, что смешанные произведения  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c}$  и  $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{a}$  имеют одинаковые знаки. Но это, очевидно, верно, потому что тройки векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и  $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$  имеют одинаковую ориентацию [п 182 (стр. 338)].

Свойство, выражаемое равенством (3), делает ненужным употребление скобок в обозначении смешанного произведения. Условимся обозначать смешанное произведение символом  $\mathbf{abc}$ . Таким образом,

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \quad (4)$$

Из векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  можно образовать шесть смешанных произведений:

$$\mathbf{abc}, \mathbf{acb}, \mathbf{bac}, \mathbf{bca}, \mathbf{cab}, \mathbf{cba}.$$

Любые два из них либо равны между собой, либо отличаются знаком. Мы знаем, что от перестановки двух векторов ориентация тройки меняется, следовательно, смешанные произведения  $\mathbf{abc}$  и  $\mathbf{acb}$  имеют разные знаки. Далее мы знаем, что от циклической перестановки ориентация тройки не меняется, следовательно, смешанные произведения

$$\mathbf{abc}, \mathbf{bca} \text{ и } \mathbf{cab}$$

имеют одинаковые знаки; также смешанные произведения

$$\mathbf{acb}, \mathbf{cba} \text{ и } \mathbf{bac}$$

имеют одинаковые знаки.

Резюмируя всё сказанное, получим

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}. \quad (5)$$

Если один из трёх векторов есть нуль-вектор, то смешанное произведение, очевидно, равно нулю. Исключим из рассмотрения этот тривиальный случай и рассмотрим, когда ещё смешанное произведение может обратиться в нуль.

Объём параллелепипеда обращается в нуль, когда у этого параллелепипеда либо площадь основания равна нулю, либо высота равна нулю.

Площадь основания равна нулю в том случае, если два вектора, которые мы рассматриваем как стороны основания, коллинеарны. Если даже не знать геометрической интерпретации смешанного произведения, то всё равно ясно, что в этом случае смешанное произведение равно нулю, так как если два вектора коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю, и, умножая этот нуль на третий вектор, мы получим нуль.

Так как при вычислении смешанного произведения безразлично, какие два из трёх векторов перемножить векторно, то можно сказать, что если какие-либо два из трёх перемножаемых векторов коллинеарны, то смешанное произведение равно нулю.

Высота параллелепипеда равна нулю, если третий вектор лежит в плоскости двух первых, т. е. если все три вектора компланарны. Можно и без геометрической интерпретации смешанного произведения показать, что смешанное произведение компланарных векторов равно нулю. Если три вектора компланарны, то векторное произведение двух из них перпендикулярно третьему, а скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю.

Второй из рассмотренных случаев (компланарность трёх векторов) включает первый, так как если два вектора коллинеарны, то, присоединив к ним *любой* третий вектор, мы получим три компланарных вектора. Поэтому полученный результат можно сформулировать так:

*Смешанное произведение трёх векторов равно нулю в том и только в том случае, когда эти три вектора компланарны.*

Мы получили новую форму аналитического условия компланарности. Раньше мы формулировали это условие так: если векторы **a**, **b** и **c** компланарны, то они линейно зависимы, т. е.

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \quad (6)$$

или, в неявной форме,

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где хоть один из коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  отличен от нуля. Теперь мы формулируем условие компланарности так: если векторы **a**, **b** и **c** компланарны, то их смешанное произведение равно нулю:

$$abc = 0. \quad (8)$$

Таким образом, условия (7) и (8) эквивалентны.

**188. Координатное выражение смешанного произведения.** Пусть три вектора заданы своими координатами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{c} &= c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

требуется вычислить их смешанное произведение.

Прежде всего перемножим векторно какие-нибудь два из векторов (9), например, **b** и **c**:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (**)$$

или, разлагая по элементам первой строки,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (b_y c_z - b_z c_y) \mathbf{i} + (b_z c_x - b_x c_z) \mathbf{j} + (b_x c_y - b_y c_x) \mathbf{k}. \quad (***)$$

Теперь составим скалярное произведение вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ :

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (b_y c_z - b_z c_y) a_x + (b_z c_x - b_x c_z) a_y + (b_x c_y - b_y c_x) a_z. \quad (\dagger)$$

Мы видим, что правая часть формулы  $(\dagger)$  может быть получена из правой части формулы  $(***)$  путём замены  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  соответственно на  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ . Но правая часть формулы  $(***)$  может быть написана в виде определителя. Отсюда мы заключаем, что правая часть формулы  $(\dagger)$  тоже может быть написана в виде определителя, причём этот определитель получится из определителя  $(**)$  заменой  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  соответственно на  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ . Таким образом мы получаем:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Легко проверить непосредственным вычислением, что правые части формул  $(\dagger)$  и  $(10)$  совпадают.

Формула  $(10)$  выражает смешанное произведение трёх векторов через координаты этих векторов.

Сопоставляя формулы  $(8)$  и  $(10)$ , мы получим координатное условие компланарности трёх векторов:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

**189. Геометрическая интерпретация свойств определителя третьего порядка.** Мы установили, что смешанное произведение трёх векторов есть определитель третьего порядка, в котором элементами первой строки являются координаты первого вектора, элементами второй строки — координаты второго вектора и элементами третьей строки — координаты третьего вектора. Обратное: *всякий* определитель третьего порядка можно рассматривать как смешанное произведение некоторых трёх векторов. Например, определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

можно рассматривать как смешанное произведение  $\mathbf{abc}$ , где

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j},$$

$$\mathbf{c} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Если рассматривать каждый определитель третьего порядка как смешанное произведение трёх векторов, то все свойства определителей третьего порядка являются лишь аналитическими выражениями свойств смешанного произведения. Можно развить всю теорию определителей третьего порядка, стоя на этой точке зрения, т. е. выводя свойства определителей третьего

порядка из свойств смешанного произведения\*). Мы ограничимся лишь некоторыми простейшими примерами.

**Свойство 1.** При перестановке двух строк определитель (под словом «определитель» здесь и далее подразумевается определитель третьего порядка) меняет знак.

**Доказательство.** Перестановка двух строк определителя равносильна перестановке двух векторов в смешанном произведении, а мы знаем, что при перестановке двух векторов смешанное произведение меняет знак (потому что тройка векторов меняет ориентацию).

**Свойство 2.** Если элементы одной строки определителя пропорциональны элементам другой строки, то определитель равен нулю.

**Доказательство.** В рассматриваемом случае два вектора (соответствующих пропорциональным строкам) коллинеарны, и, следовательно, смешанное произведение равно нулю.

**Свойство 3** (обобщение свойства 2). Определитель равен нулю в том и только в том случае, если у него одна строка есть линейная комбинация двух остальных, причём в этом случае у него *любая* строка есть линейная комбинация двух остальных. Мы знаем, что смешанное произведение равно нулю в том и только в том случае, когда три вектора компланарны. Но если три вектора компланарны, то любой из них может быть представлен как линейная комбинация двух других; например, можно представить вектор  $\mathbf{c}$  как линейную комбинацию векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b},$$

а это равенство эквивалентно таким трём:

$$c_x = \lambda a_x + \mu b_x,$$

$$c_y = \lambda a_y + \mu b_y,$$

$$c_z = \lambda a_z + \mu b_z,$$

что и требовалось доказать.

**190. Двойное векторное произведение.** Двойным векторным произведением называется произведение

$$\mathbf{w} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}. \quad (12)$$

Когда мы перемножим векторно  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то получим вектор

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (11')$$

перпендикулярный к векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , т. е. перпендикулярный их плоскости. Когда этот вектор умножим векторно на  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{w} = \mathbf{d} \times \mathbf{c},$$

то получим вектор  $\mathbf{w}$ , перпендикулярный вектору  $\mathbf{d}$  и, следовательно, *лежащий в плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$* . Мы пришли к следующему результату:

*Двойное векторное произведение  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  есть вектор, компланарный с векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .*

Отсюда следует, что двойное векторное произведение  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$  выражается как линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}. \quad (11'')$$

---

\*) Можно аналогичным образом построить теорию определителей  $n$ -го порядка, но для этого придётся рассматривать векторы в пространстве  $n$  измерений. Это сделано, например, в книге: О. Шрейер и Е. Шпернер. Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, том I, ОНТИ, М — Л, 1934.



Коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$ , разумеется, вполне определены, раз все три вектора заданы. Найдём эти коэффициенты. Для этого выразим двойное векторное произведение через координаты входящих в него векторов.

Перемножая векторно векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , пользуясь формулой (13) или (12) § 6 (стр. 347)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

Теперь умножая векторно полученный вектор на  $\mathbf{c}$ , опять пользуясь формулой (13)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_y b_z - a_z b_y & a_z b_x - a_x b_z & a_x b_y - a_y b_x \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= S(a_z b_x c_z - a_x b_z c_z - a_x b_y c_y + a_y b_x c_y) \mathbf{i}.$$

Здесь для сокращения письма выписан только один из трёх членов разложения определителя по элементам первой строки, и перед ним поставлен знак  $S^*$ ), указывающий, что, кроме этого члена, берутся ещё два, получающиеся из него циклической заменой индексов  $x, y, z$  и ортов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Прибавим и вычтем в скобках член  $a_x b_x c_x$ :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = S(a_z b_x c_z - a_x b_z c_z - a_x b_y c_y + a_y b_x c_y + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x) \mathbf{i}.$$

Группируем в скобках все члены с плюсами, вынося из них за скобки  $b_x$ , и все члены с минусами, вынося из них за скобки  $-a_x$ :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = S\{b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - a_x(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z)\} \mathbf{i}.$$

Замечая, что выражения в круглых скобках суть скалярные произведения, можем написать

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = S\{b_x(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - a_x(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\} \mathbf{i}.$$

Выпишем теперь это разложение полностью, не пользуясь знаком циклической суммы:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \{b_x(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - a_x(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\} \mathbf{i} + \{b_y(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - a_y(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\} \mathbf{j} + \{b_z(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - a_z(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\} \mathbf{k} =$$

$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}.$$

Таким образом, мы пришли к следующей основной формуле для двойного векторного произведения  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ , дающей разложение этого произведения по векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}. \quad (13)$$

Отметим одно следствие из этой формулы.

Произведём в двойном векторном произведении все циклические перестановки и применим к каждому произведению формулу (13):

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}, \\ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}, \\ (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}. \end{aligned}$$

\*) Произносимый: «циклическая сумма».

Складывая эти равенства, получим

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0. \quad (14)$$

Разумеется, пользование координатами при доказательстве формулы (13) несколько неестественно: сама формула не содержит координат векторов и может быть доказана геометрически. Геометрическое доказательство в данном случае оказывается сложнее координатного, и мы его не приводим.

### Задачи

**350.** Раскрыть скобки в смешанном произведении:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c})(2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

**351.** Каково необходимое и достаточное условие, при котором

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})?$$

**352.** Определить ориентацию тройки  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ :

$$\text{а) } \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{k} + \mathbf{i};$$

$$\text{б) } \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k};$$

$$\text{с) } \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}.$$

**353.** Является ли четырёхугольник  $ABCD$  задачи **255** (стр. 300) плоским?

**354.** Без всяких выкладок определить значение смешанного произведения

$$(2\mathbf{a} + \mathbf{b})(3\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + 4\mathbf{b}).$$

**355.** Найти вектор  $\mathbf{r}$ , удовлетворяющий одновременно двум уравнениям:

$$\mathbf{a}\mathbf{r} = \alpha,$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{r} = \mathbf{u}.$$

**356.** Вычислить смешанное произведение  $\mathbf{abc}$ , где

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

**357.** Вычислить объём тетраэдра с вершинами в  $A(-1, 0, 4)$ ,  $B(3, -2, 7)$ ,  $C(0, 2, -5)$  и  $D(2, 8, 3)$ .

## ГЛАВА XII

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Преобразование координат в этой книге не будет использовано\*). Эта глава введена, во-первых, ввиду самостоятельного интереса, который представляет преобразование координат в пространстве, и, во-вторых, потому, что знакомство с преобразованием координат необходимо при изучении теоретической механики. Таким образом читатель может без всякого ущерба для понимания следующих глав пропустить эту главу и вернуться к ней тогда, когда возникнет в этом потребность, не зависящая от чтения этой книги.

#### § 1. Вывод формул для преобразования прямоугольных декартовых координат в пространстве

**191. Перенос начала.** Задача о переносе полюса формулируется так. Пусть полюс перенесён в точку  $O' (R)$ . Некоторая точка  $M$  имеет в старой системе радиус-вектор  $r$ , а в новой — радиус-вектор  $r'$ , т. е.

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= r, \\ \overline{O'M} &= r',\end{aligned}$$

требуется найти связь между  $r$  и  $r'$ .

Решение задачи непосредственно получается из тождества

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}.$$

Подставляя в это тождество  $\overline{OM} = r$ ,  $\overline{O'M} = r'$  и  $\overline{OO'} = R$ , получим

$$r = r' + R. \quad (1)$$

Задача решена. Оказывается, при переносе полюса *старый радиус-вектор равен новому плюс радиус-вектор нового полюса.*

Выражая из равенства (1)  $r'$ , получим

$$r' = r - R. \quad (2)$$

Из выведенных формул легко получить решение эквивалентной координатной задачи о переносе начала координат. Пусть начало координат перенесено в точку  $O' (a, b, c)$ , причём направления осей остались прежние (таким образом орты  $i, j$  и  $k$  — одни и те же и в старой и в новой системах). Пусть некоторая точка  $M$  имеет координаты  $x, y$  и  $z$  по старой системе и  $x', y'$  и  $z'$  — по новой. Выражая векторы  $r, r'$  и  $R$  через их координаты:

$$\begin{aligned}r &= xi + yj + zk, \\ r' &= x'i + y'j + z'k, \\ R &= ai + bj + ck,\end{aligned}$$

---

\*) Кроме одной ссылки на перенос начала в мелком шрифте п 237 и одного замечания общего характера в сноске на стр. 441.

и заменяя линейное соотношение (1) между векторами тремя такими же линейными соотношениями между их координатами, получим:

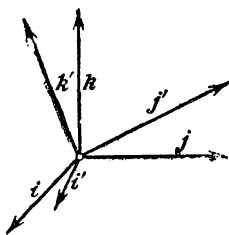
$$\left. \begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b, \\ z &= z' + c. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из равенства же (2) [или из равенств (3)] получаются следующие три равенства, выражающих новые координаты через старые:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - a, \\ y' &= y - b, \\ z' &= z - c. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

**192. Поворот осей.** Пусть система координат  $OXYZ$  приведена в положение  $OX'Y'Z'$ . Начало на черт. 193 осталось прежнее. Вообще в задаче о преобразовании *координат вектора* положение начала не играет роли, так как координаты вектора не изменяются при переносе начала; иначе обстоит дело в задаче о преобразовании координат точки.

Обозначим через  $i, j$  и  $k$  — орты старой системы, а через  $i', j'$  и  $k'$  — орты новой системы. Чтобы определить положение новой системы относительно старой, зададим углы, образованные новыми ортами со старыми, или, другими словами, *углы, образованные новыми осями координат со старыми*:



Черт. 193. Поворот осей.

	$i$	$j$	$k$
$i'$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$
$j'$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$
$k'$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\gamma_3$

Координатами единичного вектора служат его направляющие косинусы [п 171 (стр. 318)]. Направляющими косинусами вектора  $i'$  относительно старой системы служат  $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$ ; направляющие косинусы векторов  $j'$  и  $k'$  также видны из таблицы (5). Таким образом

$$\left. \begin{aligned} i' &= \cos \alpha_1 \cdot i + \cos \beta_1 \cdot j + \cos \gamma_1 \cdot k \\ j' &= \cos \alpha_2 \cdot i + \cos \beta_2 \cdot j + \cos \gamma_2 \cdot k \\ k' &= \cos \alpha_3 \cdot i + \cos \beta_3 \cdot j + \cos \gamma_3 \cdot k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Рассматривая косинусы углов таблицы (5) по вертикалям, мы найдём направляющие косинусы (они же — координаты) старых ортов  $i, j, k$  относительно новой системы:

$$\left. \begin{aligned} i &= \cos \alpha_1 \cdot i' + \cos \alpha_2 \cdot j' + \cos \alpha_3 \cdot k' \\ j &= \cos \beta_1 \cdot i' + \cos \beta_2 \cdot j' + \cos \beta_3 \cdot k' \\ k &= \cos \gamma_1 \cdot i' + \cos \gamma_2 \cdot j' + \cos \gamma_3 \cdot k' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Пусть некоторый вектор  $\mathbf{a}$  имеет по старой системе координаты  $a_x, a_y, a_z$ , а по новой  $a'_x, a'_y, a'_z$ . Это значит, что

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (3)$$

$$\mathbf{a} = a'_x \mathbf{i}' + a'_y \mathbf{j}' + a'_z \mathbf{k}'. \quad (9)$$

Заменяя в формуле (9) новые орты их выражениями (6), получим после приведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & (a'_x \cos \alpha_1 + a'_y \cos \alpha_2 + a'_z \cos \alpha_3) \mathbf{i} + (a'_x \cos \beta_1 + a'_y \cos \beta_2 + a'_z \cos \beta_3) \mathbf{j} + \\ & + (a'_x \cos \gamma_1 + a'_y \cos \gamma_2 + a'_z \cos \gamma_3) \mathbf{k}. \quad (*) \end{aligned}$$

Поскольку формула (\*) даёт разложение вектора  $\mathbf{a}$  по старым ортам, коэффициенты этого разложения суть старые координаты  $\mathbf{a}$ . Другими словами, сравнивая формулы (8) и (\*), находим

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a'_x \cos \alpha_1 + a'_y \cos \alpha_2 + a'_z \cos \alpha_3, \\ a_y &= a'_x \cos \beta_1 + a'_y \cos \beta_2 + a'_z \cos \beta_3, \\ a_z &= a'_x \cos \gamma_1 + a'_y \cos \gamma_2 + a'_z \cos \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Формулы (10) выражают старые координаты вектора через новые.

Аналогично, подставляя в формулу (8) вместо старых ортов их выражения (7), получим после приведения

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & (a_x \cos \alpha_1 + a_y \cos \beta_1 + a_z \cos \gamma_1) \mathbf{i}' + (a_x \cos \alpha_2 + a_y \cos \beta_2 + a_z \cos \gamma_2) \mathbf{j}' + \\ & + (a_x \cos \alpha_3 + a_y \cos \beta_3 + a_z \cos \gamma_3) \mathbf{k}'. \quad (**) \end{aligned}$$

Сравнивая формулы (9) и (\*\*), находим

$$\left. \begin{aligned} a'_x &= a_x \cos \alpha_1 + a_y \cos \beta_1 + a_z \cos \gamma_1, \\ a'_y &= a_x \cos \alpha_2 + a_y \cos \beta_2 + a_z \cos \gamma_2, \\ a'_z &= a_x \cos \alpha_3 + a_y \cos \beta_3 + a_z \cos \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Формулы (11) выражают новые координаты вектора через старые.

Из формул (10) и (11) легко получить формулы для преобразования координат точки в случае поворота осей. Для этого надо только предположить, что вектор  $\mathbf{a}$  есть радиус-вектор; тогда его координаты будут служить координатами точки — его конца. При этом надо предполагать, что начало координат остаётся на месте, так как иначе в левых частях равенств (8) и (9) мы имели бы *разные* векторы \*).

Заменяя в формулах (10) и (11)  $a_x$  через  $x$ ,  $a_y$  через  $y$  и т. д., получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3, \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3, \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1, \\ y' &= x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2, \\ z' &= x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

---

\*) Разумеется, при преобразовании координат вектора положение начала не играет роли, так как координаты данного вектора зависят только от направления осей.

**193. Общее преобразование координат.** Пусть система координат  $OXYZ$  приведена в положение  $O'X'Y'Z'$ , отличающееся от первоначального положения и началом и направлением осей. Введём промежуточную систему координат  $O'X''Y''Z''$ , начало которой совпадает с новым началом, а направления осей совпадают с направлениями старых осей. Тогда наше преобразование можно разбить на два: сначала переносом начала перейти от старой системы к промежуточной, а затем поворотом осей перейти от промежуточной системы ко второй.

Обозначим через  $a, b, c$  координаты нового начала; углы новых осей со старыми (или, что — то же, с промежуточными) обозначим, как в таблице (5) (стр. 358). Выразим старые координаты через промежуточные

$$x = x'' + a,$$

$$y = y'' + b,$$

$$z = z'' + c.$$

Теперь выразим промежуточные координаты через новые:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3, \\ y'' &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3, \\ z'' &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3. \end{aligned} \right\}$$

Заменяя в первых трёх формулах промежуточные координаты их выражениями из вторых трёх формул, получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 + a, \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 + b, \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 + c. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Формулы (14) выражают старые координаты через новые при общем преобразовании координат.

Разумеется, два преобразования, на которые мы разбили общее преобразование, можно было бы производить в обратном порядке: сначала повернуть оси, а затем перенести начало.

Чтобы выразить новые координаты через старые, выразим сначала новые через вспомогательные:

$$\begin{aligned} x' &= x'' \cos \alpha_1 + y'' \cos \beta_1 + z'' \cos \gamma_1, \\ y' &= x'' \cos \alpha_2 + y'' \cos \beta_2 + z'' \cos \gamma_2, \\ z' &= x'' \cos \alpha_3 + y'' \cos \beta_3 + z'' \cos \gamma_3, \end{aligned}$$

а затем вспомогательные через старые:

$$\begin{aligned} x'' &= x - a, \\ y'' &= y - b, \\ z'' &= z - c. \end{aligned}$$

Из последних шести формул получаем

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - a) \cos \alpha_1 + (y - b) \cos \beta_1 + (z - c) \cos \gamma_1, \\ y' &= (x - a) \cos \alpha_2 + (y - b) \cos \beta_2 + (z - c) \cos \gamma_2, \\ z' &= (x - a) \cos \alpha_3 + (y - b) \cos \beta_3 + (z - c) \cos \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

## Задачи

**358.** Даны точки  $A(r_1)$  и  $B(r_2)$ . Найти радиусы-векторы этих точек после переноса полюса в точку  $O'$ , являющуюся серединой отрезка  $AB$ . Применить полученный результат к случаю  $r_1 = i - 2j + 5k$ ,  $r_2 = 3i + 2j + 7k$ .

**359.** Начало координат перенесено в точку  $O'$ , лежащую в плоскости  $XY$ ; после этого координаты точки  $M(-2, 4, 3)$  оказались равными между собой. Найти точку  $O'$ .

## § 2. Дополнительные сведения о преобразовании прямоугольных декартовых координат в пространстве

**194. Число параметров, определяющих поворот осей.** В предыдущем параграфе мы видели, что при повороте осей положение новой системы относительно старой может быть задано углами, образуемыми каждой новой осью с каждой старой [таблица (5) (стр. 358)]:

	$X$	$Y$	$Z$
$X'$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$
$Y'$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$
$Z'$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\gamma_3$

(1)

В формулы преобразования координат при повороте осей формулы [(12) (стр. 359)] входят девять коэффициентов: косинусы углов таблицы (1). Эти девять коэффициентов не могут быть все заданы произвольно: они связаны некоторыми соотношениями [иначе говоря, девять углов таблицы (1) не могут быть заданы произвольно]. Исследуем вопрос, сколько степеней свободы имеется у нас при задании таблицы (1)?

Представим себе обе системы координат — старую и новую — как два твёрдых тела. У них имеется одна общая точка — начало координат. Новую систему мы можем произвольно поворачивать, сохраняя закреплённым начало координат. Если мы закрепим новую систему в определённом положении, то сколько параметров надо задать, чтобы определить это положение?

Чтобы определить положение новой системы, надо определить направления всех её осей. Начнём с оси  $X'$ ; чтобы определить её направление, надо задать, как мы знаем из п 171 (стр. 314) два параметра.

Если мы эти два параметра зададим, то тем самым мы закрепим ось  $X'$ . Окажется ли вследствие этого закреплённой вся новая система? Очевидно нет, так как она может вращаться вокруг закреплённой прямой. Закрепив ось  $X'$ , мы тем самым закрепили плоскость  $Y'Z'$  (так как она должна быть перпендикулярна к оси  $X'$ ), но оси  $Y'$  и  $Z'$  ещё могут вращаться в этой плоскости. Чтобы закрепить эту пару осей, надо задать ещё один параметр, например, угол оси  $Y'$  с какой-нибудь из старых осей или плоскостей.

Таким образом, чтобы определить положение новой системы координат, надо задать три параметра.

Этот результат имеет важный механический смысл. Оказывается, положение твёрдого тела, имеющего одну закреплённую точку, определяется тремя параметрами. Другими словами, твёрдое тело, закреплённое в одной

точке, имеет три степени свободы в своих вращениях вокруг этой точки. Ещё, иначе говоря, существует  $\infty^3$  вращений, которые может совершить твёрдое тело вокруг закреплённой точки.

**195. Свойства девяти косинусов преобразования.** Вернёмся к таблице (1) (стр. 361). В этой таблице фигурирует девять параметров, определяющих положение новой системы, а мы знаем, что это положение определяется тремя *независимыми* параметрами. Отсюда заключаем, что должно существовать шесть и только шесть независимых уравнений, связывающих углы таблицы (1).

Во-первых, имеем три уравнения, вытекающих из того, что сумма квадратов направляющих косинусов всякой оси равна единице. Выписывая это равенство для осей  $X'$ ,  $Y'$  и  $Z'$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 &= 1, \\ \cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Во-вторых, имеем условия взаимной перпендикулярности осей  $X'$ ,  $Y'$  и  $Z'$ :

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0, \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0, \\ \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 + \cos \beta_3 \cos \beta_1 + \cos \gamma_3 \cos \gamma_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Условия (2) и (3) являются независимыми, т. е. ни одно из них не может быть выведено из остальных пяти. В самом деле, первое условие (2) есть условие существования направления  $X'$  (если бы это условие не было соблюдено, то направления, определяемого углами  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\gamma_1$ , не существовало бы). Точно так же, второе и третье условия (2) суть соответственно условия существования направлений  $Y'$  и  $Z'$ . Ясно, что эти три факта независимы друг от друга, например, из существования направления, определяемого углами  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\gamma_1$ , не вытекает существование направления, определяемого углами  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  и  $\gamma_2$ . Первое условие (3) есть условие перпендикулярности  $X'$  и  $Y'$ , второе — условие перпендикулярности  $Y'$  и  $Z'$ ; ясно, что из первого не следует второе. Третье условие (3) есть условие перпендикулярности  $Z'$  и  $X'$ ; это условие не вытекает из первых двух: легко представить себе два направления  $Z'$  и  $X'$ , не перпендикулярных друг другу, и направление  $Y'$ , перпендикулярное к ним обоим.

Кроме условий (2) и (3), можно получить ещё бесчисленное множество условий, являющихся их следствиями. Например, рассматривая направляющие косинусы *старых осей относительно новой системы* и применяя к ним те же рассуждения, которые мы применяли выше к направляющим косинусам *новых осей относительно старой системы*, мы получим формулы:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 &= 1, \\ \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 &= 1, \\ \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 &= 1, \\ \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \cos \alpha_3 \cos \beta_3 &= 0, \\ \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_2 \cos \gamma_2 + \cos \beta_3 \cos \gamma_3 &= 0, \\ \cos \gamma_1 \cos \alpha_1 + \cos \gamma_2 \cos \alpha_2 + \cos \gamma_3 \cos \alpha_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Мы знаем, что формулы (4) должны являться следствием формул (2) и (3), потому что независимых соотношений между нашими девятью косину-



сами существует только шесть. Действительно, формулы (4) могут быть получены из формул (2) и (3) путём алгебраических преобразований. Но эти преобразования, если их проводить кустарно, весьма громоздки. Чтобы провести их просто, нужны некоторые сведения из алгебры (главным образом — из теории определителей), которые не предполагаются у читателя этой книги. Поэтому мы не даём вывода формул (4) из формул (2) и (3).

Присоединяя к формулам (4) ещё некоторые следствия из формул (2) и (3), приводим сводку важнейших свойств девяти направляющих косинусов преобразования.

1. *Определитель  $\Delta$ , составленный из девяти направляющих косинусов преобразования и называемый определителем преобразования, равен единице, т. е.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = 1. \quad (5)$$

Доказательство. Как ясно из формул (6) § 1 (стр. 358), определитель  $\Delta$  является смешанным произведением новых ортов

$$\Delta = i'j'k'. \quad (6)$$

Параллелепипед с рёбрами  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  есть куб единичного объёма; тройка  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  — правая. Следовательно,  $i'j'k' = 1$ .

2. *Каждый элемент определителя  $\Delta$  равен своему минору, взятому со знаком  $+$  или  $-$  согласно схеме*

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\cos \beta_1 = - \begin{vmatrix} \cos \alpha_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. В любой тройке ортов — старой или новой — каждый орт есть векторное произведение следующих за ним в циклическом порядке ортов. Например,

$$i' = j' \times k',$$

или, выражая новые орты по формулам (6) § 1

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cdot i + \cos \beta_1 \cdot j + \cos \gamma_1 \cdot k &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \cos \alpha_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 \end{vmatrix} k. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах слева и справа, получим формулы указанного выше типа.

3. *В каждом ряду определителя  $\Delta$  (т. е. в каждой строке и в каждом столбце) сумма квадратов элементов равна единице.*

Это — просто координатное выражение того факта, что каждый орт — новый или старый — есть единичный вектор:

$$\left. \begin{aligned} i'^2 &= j'^2 = k'^2 = 1, \\ i^2 &= j^2 = k^2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

4. Сумма произведений соответствующих элементов двух параллельных рядов (строк или столбцов) равна нулю.

Суммы произведений, о которых идёт речь, суть скалярные произведения ортов (по строкам — новых, а по столбцам — старых). Эти скалярные произведения равны нулю в силу перпендикулярности ортов. Равенства (3) и последние три равенства (4) в векторной форме принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} i'j' &= 0, & j'k' &= 0, & k'i' &= 0, \\ ij &= 0, & jk &= 0, & ki &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

196. **Эйлеровы углы.** У читателя может возникнуть вопрос, зачем вводить в формулы поворота осей девять параметров и принимать ещё внимание шесть уравнений, связывающих эти параметры? Может быть, было бы лучше ввести только три параметра, которые были бы независимыми?

Лишние параметры вводятся лишь для придания формулам большей простоты и симметрии. Удалить лишние параметры из формул поворота осей можно двумя способами.

Во-первых, можно принять из девяти косинусов три\*) за основные и из уравнений (2) и (3) выразить остальные шесть косинусов через эти три (т. е. решить шесть уравнений с шестью неизвестными). Подставив найденные выражения для шести косинусов в формулы (12) и (13) § 1 (стр. 359), мы получим формулы поворота осей, в которых будут фигурировать только три независимых параметра.

Во-вторых, можно принять за параметры, характеризующие поворот системы, не три угла из таблицы (1), а какие-нибудь три совсем других параметра. Тогда не шесть косинусов в формулах поворота осей будут выражены через три других, а все девять косинусов будут выражены через эти три новых параметра.

Первый способ не применяется ввиду его громоздкости. Второй способ мы сейчас реализуем. При этом мы придём к формулам поворота осей (9) и (10) (стр. 366—367). Эти формулы уступают формулам (12) и (13) (стр. 359) в отношении простоты и симметрии [параметры, входящие в формулы (9) и (10), неравноправны], но зато в них входят только независимые параметры.

Покажем, как можно старую систему совместить с новой тремя последовательными поворотами. Углы, на которые мы будем поворачивать старую систему, мы и примем за параметры, определяющие положение новой системы; эти углы называются эйлеровыми углами по имени Эйлера, решившего задачу, которую мы сейчас рассматриваем.

Итак, пусть мы имеем две системы координат  $OXYZ$  и  $OX'Y'Z'$  с общим началом (черт. 194). Пусть  $OX''$  — прямая пересечения плоскостей  $XU$  и  $X'U'$ . Отметим на этой прямой произвольное направление как положительное. Теперь произведём следующие три поворота старой системы.

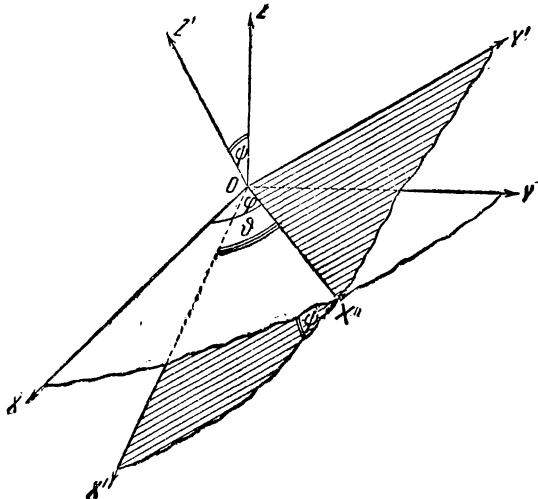
Первый поворот. Поворачиваем старую систему вокруг оси  $Z$  (таким образом плоскость  $XU$  не изменяет своего положения в пространстве, а лишь поворачивается в самой себе) до тех пор, пока положительная часть оси  $OX$  совпадёт с положительной частью оси  $OX''$ . Угол этого поворота, т. е. угол от оси  $OX$  до оси  $OX''$ , обозначим через  $\varphi$ \*\*). После этого поворота ось  $Z$  останется неизменной, ось  $X$  перейдёт в  $X''$ , а ось  $Y$  перей-

\*) Не любые три. Например,  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \beta_1$  и  $\cos \gamma_1$  — нельзя, а  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \beta_1$  и  $\cos \alpha_2$  — можно.

\*\*) Угол  $\varphi$  считается положительным, если вращение происходит так, как обычно, от оси  $X$  к оси  $Y$ , т. е. если смотреть с положительной стороны оси  $Z$ , — против часовой стрелки.

дёт в некоторое новое положение, которое мы обозначим  $OY''$ . Очевидно,  $OY''$  есть перпендикуляр к оси  $OX''$ , лежащий в плоскости  $XU$ . Полученную систему координат  $OX''Y''Z$  назовём первой промежуточной системой.

Второй поворот. Повернём первую промежуточную систему вокруг оси  $X''$  так, чтобы ось  $Z$  совпала с осью  $Z'$ . Это возможно, потому что оси  $Z$  и  $Z'$  обе перпендикулярны к  $X''$  и, следовательно, лежат в плоскости, перпендикулярной к  $X''$ ; эта плоскость при вращении системы вокруг оси  $X''$  вращается в самой себе. Заметим, что в этой же плоскости лежит ось  $Y''$ . Обозначим угол поворота через  $\psi^*$ ). После этого поворота плоскость  $XU$  или  $X''Y''$  (это — одна и та же плоскость), перпендикулярная к оси  $Z$ , совпадёт с плоскостью  $X'Y'$ , перпендикулярной к оси  $Z'$ ; двугранный угол между этими плоскостями, очевидно, равен  $\psi$ .



Черт. 194. Эйлеровы углы.

После второго поворота ось  $X''$  останется неизменной, ось  $Z$  перейдёт в  $Z'$ , а ось  $Y''$  займёт некоторое новое положение, которое мы обозначим  $OY'''$ . Очевидно,  $OY'''$  есть перпендикуляр к  $OX''$ , лежащий в плоскости  $X'Y'$ . Полученную систему  $OX''Y'''Z'$  назовём второй промежуточной системой.

Третий поворот. Поворачиваем вторую промежуточную систему вокруг оси  $Z'$  (таким образом плоскость  $X'X''Y'Y'''$  не изменяет своего положения в пространстве, а лишь вращается в самой себе) так, чтобы ось  $X''$  совпала с осью  $X'$ ; при этом ось  $Y'''$  совпадёт с осью  $Y'$ . Угол поворота обозначим через  $\vartheta^{**}$ ). После этого поворота вторая промежуточная система займёт положение  $OX'Y'Z'$ , т. е. совпадёт с новой системой.

Чтобы читатель мог легче разобраться в этих поворотах, сформулируем в нескольких словах их основную идею. Рассматриваются две плоскости  $XU$  и  $X'Y'$  и линия их пересечения  $OX''$ . Первым поворотом ось  $X$  в старой плоскости доводится до  $X''$ , вторым поворотом старая плоскость  $XU$  совмещается с новой плоскостью  $X'Y'$ , третьим поворотом ось  $X''$  в новой плоскости доводится до  $X'$ .

Переходим к выводу формул преобразования. Пусть какая-нибудь точка имеет по старой системе координаты  $x, y, z$ , по первой промежуточной  $x'', y'', z''$ , по второй промежуточной  $x''', y''', z'''$  и по новой  $x', y', z'$ . Так как при первом повороте плоскость  $XU$  вращается в самой себе, то координата  $z$

\*) Угол  $\psi$  считается положительным, если вращение происходит так, как обычно, от оси  $Z$  к оси  $Y''$ , т. е., если смотреть с положительной стороны оси  $X''$ , — по часовой стрелке.

\*\*) Угол  $\vartheta$  считается положительным, если вращение происходит так, как обычно, от оси  $X''$  к оси  $Y'''$ , т. е., если смотреть с положительной стороны оси  $Z'$ , — против часовой стрелки.

остаётся неизменной, а координаты  $x$  и  $y$  преобразуются по формулам поворота осей на плоскости [гл. I, § 3, формулы (4) (стр. 54)]:

$$\left. \begin{aligned} x &= x'' \cos \varphi - y'' \sin \varphi, \\ y &= x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi, \\ z &= z''. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

При втором повороте плоскость  $Y''Z$  вращается в самой себе, и, следовательно, координата  $x''$  остаётся неизменной, а координаты  $y''$  и  $z''$  преобразуются по формулам поворота осей на плоскости:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x''', \\ y'' &= y''' \cos \psi - z''' \sin \psi, \\ z'' &= y''' \sin \psi + z''' \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

При третьем повороте плоскость  $X''Y'''$  вращается в самой себе, и, следовательно, координата  $z'''$  остаётся неизменной, а координаты  $x'''$  и  $y'''$  преобразуются по формулам поворота осей на плоскости:

$$\left. \begin{aligned} x''' &= x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta, \\ y''' &= x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta, \\ z''' &= z'. \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

Выражения для  $x'''$ ,  $y'''$  и  $z'''$  из формул (\*\*\*) вносим в формулы (\*\*); тогда  $x''$ ,  $y''$  и  $z''$  окажутся выраженными через  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ . Полученные выражения для  $x''$ ,  $y''$  и  $z''$  вносим в формулы (\*); тогда  $x$ ,  $y$  и  $z$  выразятся через  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$ . После раскрытия скобок и вынесения за скобки  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' (\cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \cos \psi \sin \vartheta) - \\ &\quad - y' (\cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + z' \sin \varphi \sin \psi, \\ y &= x' (\sin \varphi \cos \vartheta + \cos \varphi \cos \psi \sin \vartheta) + \\ &\quad + y' (-\sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) - z' \cos \varphi \sin \psi, \\ z &= x' \sin \psi \sin \vartheta + y' \sin \psi \cos \vartheta + z' \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Формулы (9), называемые формулами Эйлера, решают поставленную задачу: они выражают старые координаты через новые при повороте осей и содержат лишь три параметра.

Сопоставляя формулы (9) с формулами (12) § 1 (стр. 359), мы видим, что коэффициенты при  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  в формулах (9) суть направляющие косинусы новых осей, например,

$$\cos \alpha_1 = \cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \cos \psi \sin \vartheta,$$

$$\cos \beta_1 = \sin \varphi \cos \vartheta + \cos \varphi \cos \psi \sin \vartheta$$

и т. д.

Читатель может, сравнивая коэффициенты формул (9) и (12), выразить все девять направляющих косинусов новых осей через эйлеровы углы  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\vartheta$  и проверить, что полученные выражения для направляющих косинусов тождественно удовлетворяют равенствам (2) и (3) и всем следствиям из них (свойства девяти косинусов преобразования, сформулированные в п 195).

Если мы пожелаем выразить новые координаты через старые, то можно, проделывая наши три поворота, каждый раз выражать не старые координаты через новые, как мы это делали, а новые — через старые. Однако, учитывая сделанное выше замечание о том, что коэффициенты в формулах (9) суть направляющие косинусы новых осей, можно притти к цели ещё быстрее. Рассматривая формулы (12) и (13) § 1 (стр. 359), мы видим, что те косинусы,

которые в формулах (12) расположены по строкам, в формулах (13) расположены по столбцам, и наоборот. Переставляя таким образом коэффициенты формул (9), получим следующие формулы, выражающие новые координаты через старые:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x (\cos \varphi \cos \vartheta - \sin \varphi \cos \psi \sin \vartheta) + \\ &\quad + y (\sin \varphi \cos \vartheta + \cos \varphi \cos \psi \sin \vartheta) + z \sin \varphi \sin \vartheta, \\ y' &= -x (\cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + \\ &\quad + y (-\sin \varphi \sin \vartheta + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta) + z \sin \psi \cos \vartheta, \\ z' &= x \sin \varphi \sin \psi - y \cos \varphi \sin \psi + z \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

### Задачи

**360.** В таблице, дающей косинусы углов между старыми и новыми осями координат, заполнить пустые клетки.

	$X$	$Y$	$Z$
$X'$	$\frac{1}{3}$		
$Y'$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}$	
$Z'$			

**361.** Дан треугольник  $A(-10, 5, 4)$ ,  $B(5, -3, 4)$ ,  $C(-9, 9, 1)$ . Найти преобразование координат, при котором этот треугольник окажется лежащим в плоскости  $X'Y'$ , причём  $A$  совпадёт с началом координат,  $B$  окажется на оси  $X'$  и будет иметь положительную абсциссу, а  $C$  будет иметь положительную ординату.

## ГЛАВА XIII

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

#### § 1. Одно уравнение с тремя переменными

##### 197. Геометрическое изображение функции двух переменных.

Читатель, изучавший аналитическую геометрию на плоскости, уже привык к той мысли, что уравнение, связывающее текущие координаты, есть ограничение, наложенное на переменную точку с этими координатами. На плоскости такое ограничение выделяло из всех точек плоскости точки некоторой линии; что оно будет выделять в пространстве?

Уточним вопрос. Три числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  определяют точку в пространстве. Если выбирать эти три числа совершенно произвольно, то может получиться *любая* точка пространства. Пусть теперь дано одно уравнение, содержащее  $x$ ,  $y$  и  $z$ ; тем самым из всех точек пространства выделяются некоторые точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Что представляет собой геометрическое место всех этих точек?

Предположим, что уравнение, о котором идёт речь, решено относительно  $z$ , т. е.  $z$  представлено как явная функция переменных  $x$  и  $y$ :

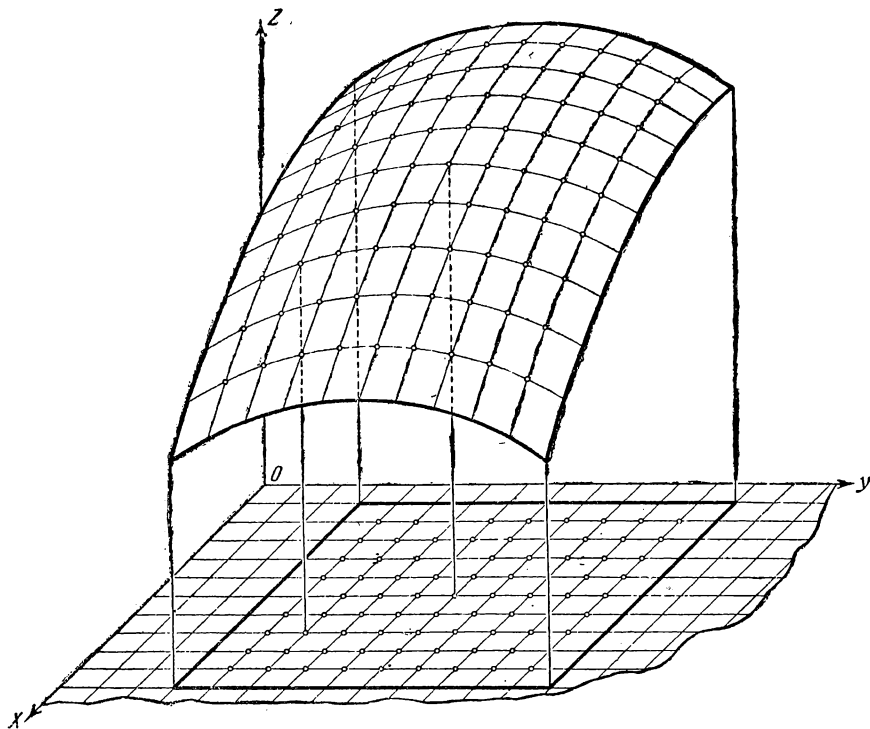
$$z = f(x, y). \quad (1)$$

Предположим пока, что  $f(x, y)$  — однозначная функция  $x$  и  $y$  (т. е. каждой паре значений  $x$  и  $y$  соответствует одно значение  $z$ ); случай многозначной функции будет рассмотрен в п 199.

В уравнении (1)  $x$  и  $y$  являются независимыми переменными. Придадим им произвольные значения; тем самым определится точка  $(x, y)$  на плоскости  $XOY$ . Восставим в этой точке перпендикуляр к плоскости  $XOY$  и отложим на нём то значение  $z$ , которое соответствует взятым значениям  $x$  и  $y$  в силу уравнения (1); мы получим точку  $M(x, y, z)$ , координаты которой удовлетворяют уравнению (1).

Возьмём теперь на плоскости  $XOY$  множество точек, густо усеивающее всю плоскость или какую-нибудь часть плоскости. Каждой из этих точек соответствует своё значение  $z$  [которое получится из уравнения (1), если подставить в него вместо  $x$  и  $y$  координаты этой точки]. В каждой из этих точек восставим перпендикуляр

к плоскости  $XU$ ; на каждом перпендикуляре отложим соответствующее значение  $z$  и рассмотрим геометрическое место концов этих перпендикуляров (черт. 195). Эти концы образуют нечто похожее на поверхность (как вершины деревьев в лесу); отличие от поверхности заключается в том, что концы перпендикуляров расположены не сплошь, а на некотором расстоянии друг от друга. Если бы на



Черт. 195.  $z = f(x, y)$ .

плоскости  $XU$  были взяты не только точки, густо усеивающие плоскость, а все без исключения точки плоскости или точки, сплошь заполняющие некоторую часть плоскости, то концы перпендикуляров образовали бы поверхность.

Почему мы утверждаем, что геометрическое место концов перпендикуляров есть именно поверхность, а не линия? Потому что это геометрическое место содержит столько же точек, сколько плоскость. Можно представить себе, что каждая точка плоскости поднята\*) по перпендикуляру (черт. 195). Иначе говоря, геометрическое место

\*) В алгебраическом смысле, т. е., может быть, и опущена.

концов перпендикуляров простирается над всей плоскостью\*), т. е. над каждой точкой плоскости находится одна точка этого геометрического места.

Итак, *функция двух переменных геометрически изображается поверхностью.*

**198. Область существования функции двух переменных.** В рассуждениях предыдущего п мы в уравнении (1) придавали  $x$  и  $y$  произвольные значения. Иногда бывает, что  $x$  и  $y$  можно придавать не любые значения, а лишь значения, удовлетворяющие некоторым неравенствам; при других же парах значений  $x$  и  $y$  действия, входящие в функцию (1), оказываются невозможными. Множество всех пар значений, которые можно придавать  $x$  и  $y$ , называется *областью существования* функций  $f(x, y)$ . Ввиду того, что понятие области существования функции двух переменных аналогично понятию области существования функции одного переменного [часть I, п 30 (стр. 60)], мы ограничимся лишь тремя примерами. В задаче № 362 (стр. 377) читатель найдёт более трудные примеры.

**Пример 1.** Определить область существования функции

$$f(x, y) = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Очевидно,  $x$  и  $y$  можно придавать любые пары значений, при которых подкоренное выражение не отрицательно. Значит, область существования данной функции определяется неравенством

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Область существования функции одного переменного графически изображается частью числовой прямой. Так как пара чисел  $(x, y)$  изображается точкой на плоскости  $XY$ , то область существования функции двух переменных графически изображается частью плоскости  $XY$ . Чтобы изобразить графически область существования функции  $+\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , рассмотрим окружность

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Во всех точках внутри этого круга

$$x^2 + y^2 < 1,$$

в точках, лежащих на самой окружности,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и в точках, лежащих вне круга,

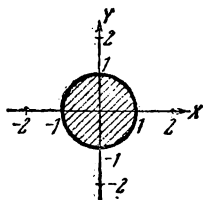
$$x^2 + y^2 > 1.$$

---

\*) Или над частью плоскости, что не меняет дела.

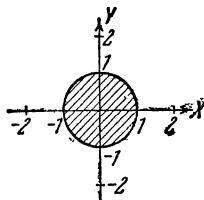


Следовательно, неравенство  $x^2 + y^2 \leq 1$  удовлетворяется для всех точек, лежащих внутри круга и на окружности, и не удовлетворяется для точек, лежащих вне круга. Область существования функции  $\sqrt{1-x^2-y^2}$  изображена на черт. 196. Окружность начерчена



Черт. 196. Область существования функции

$$f(x, y) = +\sqrt{1-x^2-y^2}.$$



Черт. 197. Область существования функции

$$f(x, y) = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

жирно; это — условное обозначение того, что точки окружности принадлежат к области существования данной функции.

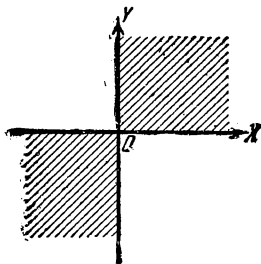
Область существования функции

$$f(x, y) = +\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

определяется неравенством

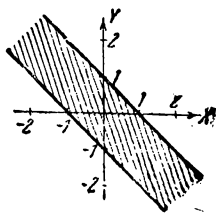
$$x^2 + y^2 < 1.$$

Равенство  $x^2 + y^2 = 1$  здесь невозможно ввиду невозможности деления на нуль. Графически область существования этой функции изо-



Черт. 198. Область существования функции

$$f(x, y) = +\sqrt{xy}.$$



Черт. 199. Область существования функции

$$f(x, y) = \arcsin(x+y).$$

бражена на черт. 197, окружность начерчена тонко; это — условное обозначение того, что точки окружности не принадлежат к области существования данной функции.

Пример 2. Определить область существования функции

$$f(x, y) = +\sqrt{xy}.$$

Ответ:

$$xy \geq 0.$$

Графическое изображение см. на черт. 198.

Пример 3. Определить область существования функции

$$f(x, y) = \arcsin(x + y).$$

Ответ:

$$-1 \leq x + y \leq 1.$$

Графическое изображение см. на черт. 199.

### 199. Геометрический смысл уравнения с тремя переменными.

В п 197 мы уже рассматривали уравнение с тремя переменными, в котором одно переменное было выражено как явная функция двух других. Рассмотрим теперь общий случай: пусть дано какое-нибудь уравнение, связывающее переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$F(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение можно решить относительно одного из переменных, например, относительно  $z$ :

$$z = f(x, y),$$

и повторить тогда все рассуждения п 197. Следовательно, уравнение (2) *геометрически изображается поверхностью*. Уравнение (2) называется *уравнением этой поверхности*. Дадим точное определение этого важного понятия:

*Уравнение поверхности есть такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты всех точек данной поверхности и притом только этих точек (т. е. этому уравнению не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной поверхности).*

Функция

$$z = f(x, y),$$

которая получилась у нас при решении уравнения (2), может оказаться многозначной, мы же рассматривали в п 197 однозначную функцию. Если функция  $f(x, y)$  многозначна, то придётся на каждом перпендикуляре к плоскости  $XU$  отложить несколько значений  $z$ ; в результате получится поверхность, имеющая несколько общих точек с каждым перпендикуляром к плоскости  $XU$ .

Итак, если функция  $f(x, y)$  — однозначная, то поверхность, изображающая уравнение (1) (стр. 368), встречает каждый перпендикуляр к плоскости  $XU$  один раз\*), если функция  $f(x, y)$  — многозначная, то

---

\*) Разумеется, если этот перпендикуляр восстановлен из точки, принадлежащей к области существования данной функции. В противном случае этот перпендикуляр вовсе не встретит поверхность.

поверхность (1) встречает каждый перпендикуляр к плоскости  $XU$  несколько раз.

Если поверхность определена геометрически, т. е. задано некоторое свойство, принадлежащее всем её точкам и не принадлежащее никаким другим точкам пространства, то можно составить уравнение этой поверхности. Заданное геометрическое свойство, переведённое на аналитический язык, т. е. выраженное как уравнение, связывающее текущие координаты, и будет уравнением поверхности.

**Пример.** Вывести уравнение сферы (сфера — поверхность шара) радиуса  $R$  с центром в начале.

Все точки этой сферы находятся на расстоянии  $R$  от начала. Возьмём произвольную точку  $M(x, y, z)$ , лежащую на сфере (черт. 200), и напомним, что её расстояние от начала, т. е. выражение  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  равно  $R$ :

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R.$$

Это и есть уравнение данной сферы. Освободимся от радикала:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (3)$$

Геометрически очевидно, что уравнение (3) удовлетворяется для всех точек сферы и только для них. Для точек, лежащих внутри шара, ограниченного сферой (3),

$$x^2 + y^2 + z^2 < R^2,$$

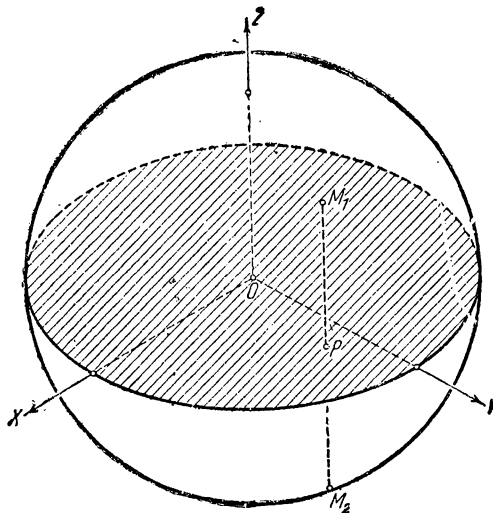
а для точек, лежащих вне этого шара,

$$x^2 + y^2 + z^2 > R^2.$$

Уравнение (3) можно решить относительно  $z$ :

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (4)$$

Оказывается,  $z$  есть двузначная функция от  $x$  и  $y$ . Геометрически это понятно: перпендикуляр к плоскости  $XU$  встречает нашу сферу



Черт. 200.  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

два раза (черт. 200). Если верхнюю точку пересечения перпендикуляра со сферой обозначить  $M_1$ , а нижнюю  $M_2$ , то  $PM_1$  и  $PM_2$  равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, как и должно быть по уравнению (4):

$$PM_1 = z_1 = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

$$PM_2 = z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Область существования функции (4) такова:

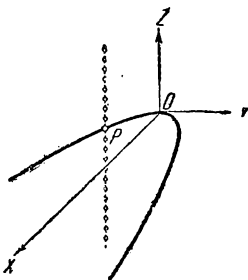
$$x^2 + y^2 \leq R^2.$$

Графически эта область существования изображается на плоскости  $XU$  кругом вместе с окружностью радиуса  $R$  с центром в начале. Этот круг заштрихован на черт. 200; как видно, сфера простирается только над \*) этим кругом.

**200. Уравнение, содержащее не все три координаты.** Рассмотрим тот частный случай уравнения (2) (стр. 372), когда оно не содержит одной из координат. Пусть, например, дано уравнение

$$y^2 = 4x. \quad (*)$$

Как геометрически изображается в пространстве это уравнение?



Черт. 201. Геометрический смысл уравнения, не содержащего  $z$ .

Читатель легко разберётся в этом, если продумает следующее положение:

*При геометрическом изображении уравнений в пространстве всякое уравнение рассматривается как условие, наложенное на три координаты. Если уравнение не содержит одной координаты, то это значит, что на неё не наложено никакого условия, т. е. ей можно придавать произвольные значения, не зависящие от значений двух других координат.*

Уравнение (\*) определяет в пространстве геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Например, точки  $(1, 2, 0)$ ,  $(1, 2, 5)$ ,  $(1, 2, -13)$  и вообще  $(1, 2, z)$  принадлежат этому геометрическому месту, независимо от того, какое значение мы придаём  $z$ .

Можно сказать, что в аналитической геометрии в пространстве мы всякое уравнение рассматриваем как уравнение с тремя координатами, даже если оно содержит их меньше. Для ясности можно написать уравнение (\*) в виде

$$y^2 = 4x + 0 \cdot z.$$

\*) И под.

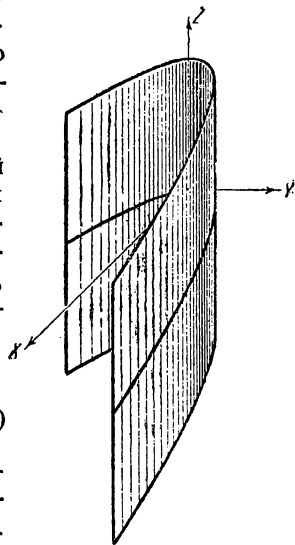
Уравнение (\*), если его изображать не в пространстве, а на плоскости  $XU$ , изображается параболой (см. черт. 201). Возьмём на этой параболе какую-нибудь точку  $P$ ; её координаты удовлетворяют уравнению. Восставим в точке  $P$  перпендикуляр к плоскости  $XU$ . Все точки этого перпендикуляра имеют координаты  $x$  и  $y$  те же, что у точки  $P$ , и отличаются друг от друга только координатой  $z$ . Следовательно, все точки этого перпендикуляра имеют координаты, удовлетворяющие уравнению (\*), и, значит, все точки этого перпендикуляра входят в состав геометрического места, изображающего уравнение (\*).

Это рассуждение относится ко всякой точке параболы. Поэтому мы можем во всех точках параболы восставить перпендикуляры к плоскости  $XU$ . Эти перпендикуляры образуют цилиндрическую поверхность, для которой наша парабола служит направляющей (черт. 202).

*Всякое уравнение*

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (5)$$

*не содержащее  $z$ , в пространстве изображается цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси  $Z$ . Это же уравнение, рассматриваемое в плоскости  $XU$ , есть уравнение направляющей этого цилиндра.*



Черт. 202.  $y^2 = 4x$ .

Аналогично изображаются уравнения, не содержащие  $x$  или  $y$ .

**Пример 1.** Какой поверхностью изображается уравнение

$$y^2 + z^2 = R^2?$$

Это уравнение не содержит  $x$ , и, следовательно, оно изображается цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси  $X$ . Направляющей этого цилиндра служит линия

$$y^2 + z^2 = R^2$$

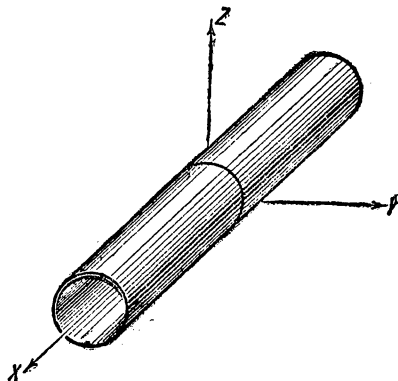
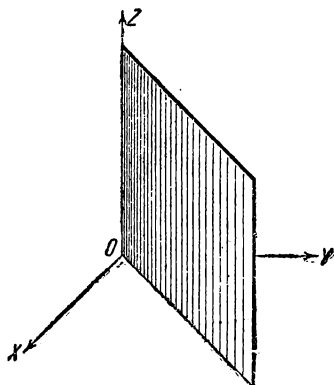
в плоскости  $YZ$ , т. е. окружность радиуса  $R$  с центром в начале (черт. 203).

**Пример 2.** Какой поверхностью изображается уравнение

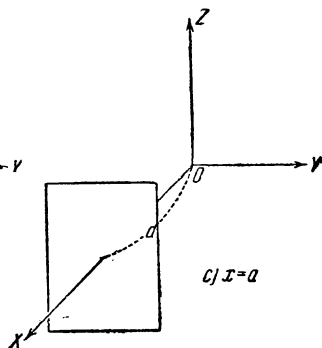
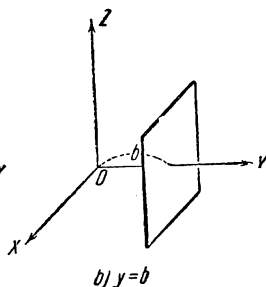
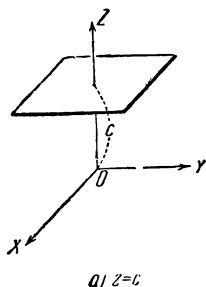
$$x - y = 0?$$

Можно сказать, что это — цилиндрическая поверхность с прямой линией в качестве направляющей, т. е. плоскость (черт. 204). Итак;

когда мы говорим, что уравнение, не содержащее одной координаты, изображается цилиндрической поверхностью, то следует помнить, что в частном случае эта цилиндрическая поверхность может

Черт. 203.  $y^2 + z^2 = R^2$ .Черт. 204.  $x - y = 0$ .

оказаться плоскостью (именно в том случае, когда уравнение — первой степени).



Черт. 205. Геометрический смысл уравнений, содержащих только одну координату.

Рассмотрим теперь уравнение, не содержащее двух координат, например

$$\Phi(z) = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения можно определить значение  $z$ , т. е. привести его к виду

$$z = c \quad (c = \text{const}). \quad (7)$$

(Если при решении уравнения получится несколько значений для  $z$ , то мы будем рассматривать каждое в отдельности.)

Рассматривая уравнение (6) [или, что — то же самое, (7)] как уравнение с тремя переменными, мы скажем, что ему удовлетворяет всякая тройка чисел  $x, y$  и  $z$ , в которой  $z=c$ , а  $x$  и  $y$  — какие угодно. Значит, поверхность (6) состоит из всех точек, у которых  $z=c$ , а  $x$  и  $y$  какие угодно. Разумеется, эти точки образуют плоскость, параллельную плоскости  $XU$  и отсекающую на оси  $Z$  отрезок, равный  $c$  (черт. 205а).

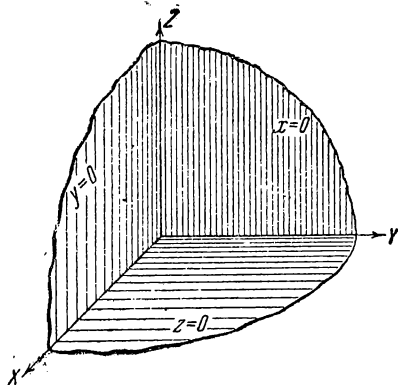
Если  $c=0$ , то эта плоскость совпадает с плоскостью  $XU$ . Значит, уравнение плоскости  $XU$  таково:

$$z=0. \quad (8)$$

Аналогично уравнение  $x=a$  есть уравнение плоскости, параллельной плоскости  $YZ$  и отсекающей на оси  $X$  отрезок  $a$ , а уравнение  $y=b$  есть уравнение плоскости, параллельной плоскости  $ZX$  и отсекающей на оси  $Y$  отрезок  $b$  (черт. 205).

Необходимо твёрдо помнить уравнения координатных плоскостей (черт. 206):

$$\begin{array}{lll} \text{уравнение плоскости } XY: & z=0, \\ \gg & \gg & YZ: x=0, \\ \gg & \gg & ZX: y=0. \end{array}$$



Черт. 206. Уравнения координатных плоскостей.

### Задачи

**362.** Найти область существования функции и изобразить её графически

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| a) $\sqrt{1-x-y}$ ;           | g) $\sqrt{x^2-y^2-1}$ ;                    |
| b) $\sqrt{x^2+y^2}$ ;         | h) $\sqrt{-x^2+y^2+1}$ ;                   |
| c) $\sqrt{x^2-y^2}$ ;         | i) $\sqrt{x^2+y^2-1}$ ;                    |
| d) $\frac{1}{x-y}$ ;          | j) $\sqrt{x^2+y^2-4} + \sqrt{9-x^2-y^2}$ ; |
| e) $\frac{1}{x^2+y^2}$ ;      | k) $\sqrt{x^2+y^2-4} + \sqrt{4-x^2-y^2}$ ; |
| f) $\arcsin x + \arcsin 2y$ ; | l) $\sqrt{x^2+y^2-4} + \sqrt{1-x^2-y^2}$ . |

**363.** а) Вывести уравнение сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $(a, b, c)$

б) Показать, что геометрическое место точек, для которых отношение расстояния от точки  $(2, 0, -3)$  к расстоянию от точки  $(4, -6, 6)$  равно  $\frac{3}{4}$ , есть сфера радиуса  $4\frac{1}{8}$  с центром в точке  $(4\frac{1}{4}, -6\frac{3}{4}, 7\frac{1}{8})$ .

**364.** Вывести уравнение геометрического места точек, равноудалённых от точек  $(2, 1, 0)$  и  $(1, -3, 6)$ .

**365.** Вывести уравнение геометрического места точек, равноудалённых а) от оси  $Z$  и точки  $(1, 3, -1)$ ;

б) от оси  $Z$  и начала координат.

**366.** Указать геометрический смысл в пространстве следующих уравнений:

а)  $y = \sin x$ ;

б)  $y - z = 0$ ;

с)  $z^2 - 2z + 1 = 0$ ;

д)  $zx = 0$ ;

е)  $x^2 - y^2 = 1$ ;

ф)  $x = 3$ ;

г)  $z - 2x + 3 = 0$ ;

h)  $y^2 - z^2 = 0$ ;

и)  $y^2 - 4y + 3 = 0$ ;

j)  $y^2 + z^2 = 0$ ;

к)  $\operatorname{tg} y = 0$ ;

л)  $z^2 + x^2 = -1$ ;

м)  $x^2 + x + 1 = 0$ ;

н)  $\sin(xy) = 1$ .

## § 2. Два уравнения с тремя переменными

**201. Геометрический смысл двух уравнений с тремя переменными.** В аналитической геометрии на плоскости мы рассматривали уравнения с двумя переменными  $x$  и  $y$ . Одно такое уравнение не определяло вполне  $x$  и  $y$ , а оставляло нам некоторый произвол в выборе пар чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих этому уравнению; это уравнение определяло не одну точку, а геометрическое место точек — линию.

Если бы мы имели два уравнения с двумя переменными и искали точки, координаты которых удовлетворяют этим уравнениям, то здесь никакого произвола не осталось бы: уравнения, будучи совместно решены, вполне определили бы координаты одной или нескольких точек.

В пространстве дело обстоит иначе благодаря тому, что мы рассматриваем уравнения с *тремя* переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Одно уравнение, связывающее эти переменные, не определяет их вполне; поэтому в пространстве существует не одна или несколько точек, а целое геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Это геометрическое место есть, как мы видели, поверхность.

Если даны два уравнения:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

то они тоже ещё не определяют вполне  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и у нас ещё остаётся произвол в выборе троек чисел, удовлетворяющих уравнениям (1). Следовательно, в пространстве существует геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям (1). Это геометрическое место беднее точками, чем поверхность, так как два условия, наложенные на координаты, представляют более сильное ограничение, чем одно.



Уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1_1)$$

изображается некоторой поверхностью. Все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению  $(1_1)$ , лежат на этой поверхности. Уравнение

$$\Phi(x, y, z) = 0 \quad (1_2)$$

изображается другой поверхностью. Все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению  $(1_2)$ , лежат на этой другой поверхности.

Мы разыскиваем точки, координаты которых удовлетворяют одновременно и уравнению  $(1_1)$  и уравнению  $(1_2)$  [т. е. уравнениям  $(1)$ ]. Ясно, что такие точки лежат одновременно на обеих поверхностях, т. е. на линии пересечения обеих поверхностей.

Итак, два уравнения изображаются в пространстве линией.

*Уравнения\*) линии суть два уравнения с тремя переменными, которым удовлетворяют координаты всех точек данной линии и притом только этих точек (т. е. координаты точек, не принадлежащих данной линии, не удовлетворяют обоим уравнениям одновременно, хотя могут иногда удовлетворять одному из них).*

*Линия, изображающая пару уравнений, есть линия пересечения поверхностей, изображающих каждое из этих двух уравнений в отдельности.*

Пример 1. Каков геометрический смысл пары уравнений

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25, \\ z &= 4. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Первое из уравнений  $(*)$  есть уравнение сферы с центром в начале, радиуса 5, второе — уравнение плоскости, параллельной плоскости  $XU$  и отсекающей на оси  $Z$  отрезок, равный 4.

Эти две поверхности (сфера и плоскость) пересекаются по окружности. Следовательно, уравнения  $(*)$  суть уравнения окружности; координаты всех точек этой окружности удовлетворяют одновременно обоим уравнениям  $(*)$ . Читатель легко сумеет установить, что центр этой окружности находится в точке  $(0, 0, 4)$ , радиус её равен 3, а её плоскость есть плоскость  $z = 4$ .

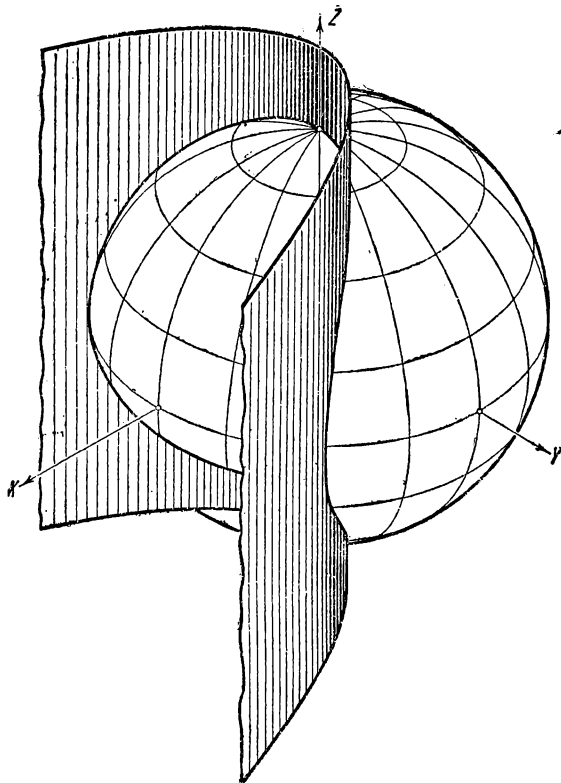
Пример 2. Какой линией изображается пара уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25, \\ y^2 &= 4x. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Мы уже знаем, что первое уравнение  $(**)$  есть уравнение сферы с центром в начале, радиуса 5, а второе — уравнение параболического цилиндра,

\*) Обращаем внимание читателя на множественное число этого слова.

изображённого на черт. 202 (стр. 375). Уравнения (\*\*) изображаются линией пересечения этих двух поверхностей (черт. 207). Эта линия — первый встречающийся нам пример пространственной (неплоской) кривой, т. е.



Черт. 207.  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ y^2 = 4x. \end{cases}$

кривой, не лежащей всеми точками в некоторой плоскости, как все кривые, рассмотренные нами в части I.

Может случиться, что даны два противоречивые уравнения. Например, с первого взгляда ясно, что уравнения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \quad (***)$$

противоречат друг другу. С аналитической точки зрения эта противоречивость проявляется в том, что не существует тройки чисел  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих одновременно обоим уравнениям (\*\*\*). В переводе на геометрический язык это значит, что не существует

точки, принадлежащей одновременно обеим поверхностям (\*\*\*), т. е. поверхности (\*\*\*). Действительно, поверхности (\*\*\*), суть две концентрические сферы.

Итак, два противоречивых уравнения не изображаются линией, потому что поверхности, изображающие каждое из этих уравнений в отдельности, не имеют общих точек. Тò же можно сказать об уравнениях, имеющих только мнимые решения\*), например,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ z &= 2.\end{aligned}$$

Важно заметить, что в то время как пара уравнений вполне определяет некоторую линию, обратное положение не имеет места: если дана линия в пространстве и нужно найти её уравнения, то это можно сделать бесконечным множеством способов, потому что можно взять различные пары поверхностей, пересекающихся по данной линии.

Например, уравнения (\*) (стр. 379) изображаются окружностью: первое уравнение есть уравнение сферы, а второе — плоскости. Если вместо первого уравнения взять уравнение цилиндра

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 9, \\ \text{то полученная пара уравнений} \quad x^2 + y^2 &= 9, \quad \left. \begin{aligned} & \\ & z = 4 \end{aligned} \right\} \quad (\dagger)\end{aligned}$$

будет изображаться той же окружностью, потому что цилиндр и плоскость (†) пересекаются по той же окружности, что и сфера, и плоскость (\*).

В данном примере мы, заменяя одну пару поверхностей другой парой поверхностей, пересекающихся по той же линии, руководствовались геометрическими соображениями. Читатель, усвоивший методы аналитической геометрии, не удовлетворится этим, а поставит вопрос: как, имея пару уравнений линии, получить из неё *путём алгебраических преобразований* другие пары уравнений той же линии?

Ввиду того что у нас мало конкретного материала (мы знаем мало уравнений поверхностей), мы откладываем решение этого вопроса до следующей главы (п 218).

**202. Вывод уравнений линии.** Вывод уравнений линии, заданной как геометрическое место точек, производится так же, как вывод уравнения поверхности: геометрические условия, определяющие данное геометрическое место, записываются в виде уравнений, связывающих текущие координаты, т. е. координаты произвольной точки данного геометрического места. Если определение геометрического места содержит одно условие, то это геометрическое место есть поверхность, и мы получим одно уравнение. Если же определение данного геометрического места содержит два условия, то это геометрическое место есть линия, и мы получим два уравнения.

\*) Напоминаем, что *решением* называется тройка чисел  $(x, y, z)$ , удовлетворяющих данным уравнениям. Решение называется мнимым, если хоть одно из этих трёх чисел мнимо.

Пример. Вывести уравнение (или уравнения) геометрического места точек, равноудалённых от осей координат.

Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка нашего геометрического места, а  $S$ ,  $T$  и  $U$  — соответственно её проекции на оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Тогда  $MS$ ,  $MT$  и  $MU$  суть расстояния точки  $M$  от осей координат. По условию задачи

$$MS = MT = MU.$$

Это двойное равенство эквивалентно двум независимым равенствам, а не трём, как может показаться. В самом деле, если написать три равенства:

$$MS = MT,$$

$$MT = MU,$$

$$MU = MS,$$

то любое из них есть следствие двух других, и писать его излишне. Ограничимся первыми двумя равенствами, которые запишем так [см., например, черт. 158 (стр. 277)]:

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + x^2},$$

$$\sqrt{z^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

После возведения в квадрат и уничтожения подобных членов эти уравнения принимают вид

$$y^2 = x^2,$$

$$z^2 = y^2.$$

Извлекая корень из каждого уравнения, получим

$$y = \pm x,$$

$$z = \pm y.$$

Беря различные комбинации знаков, получим четыре возможности

$$\left. \begin{matrix} y = x, \\ z = y; \end{matrix} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{matrix} y = x, \\ z = -y; \end{matrix} \right\} \text{(II)} \quad \left. \begin{matrix} y = -x, \\ z = y; \end{matrix} \right\} \text{(III)} \quad \left. \begin{matrix} y = -x, \\ z = -y. \end{matrix} \right\} \text{(IV)}$$

Наличие этих четырёх возможностей объясняется тем, что точки, равноудалённые от осей координат, имеются во всех октантах. Если мы возьмём только первую возможность

$$\left. \begin{matrix} y = x, \\ z = y, \end{matrix} \right\} \quad (\dagger\dagger)$$

которую можно короче записать в виде двойного равенства

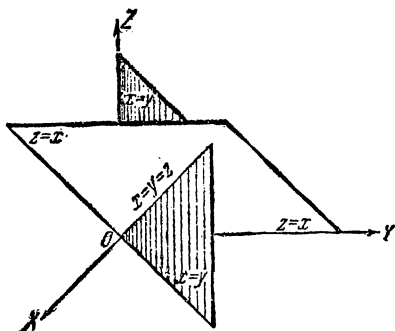
$$x = y = z, \quad (\dagger\dagger\dagger)$$

то это значит, что мы рассматриваем те точки, равноудалённые от

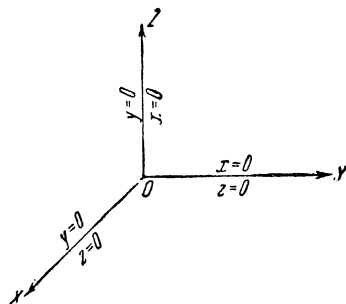
осей координат, которые лежат в октантах, где все координаты имеют одинаковые знаки, т. е. в первом и в седьмом.

Каждое из уравнений  $(\dagger\dagger)$  есть уравнение плоскости (см. п 200); эти плоскости изображены на черт. 208. Следовательно, геометрическое место точек, равноудалённых от осей координат, есть прямая\*) (пересечение двух плоскостей).

Уравнения  $(***)$  непосредственно показывают, что точка  $M(x, y, z)$  находится на одинаковых расстояниях от всех координатных плоскостей. Итак, оказывается, что прямая  $(\dagger\dagger)$  или  $(\dagger\dagger\dagger)$  является одно-



Черт. 208.  
 $x=y=z$ .



Черт. 209. Уравнения координатных осей.

временно и геометрическим местом точек, равноудалённых от координатных осей, и геометрическим местом точек, равноудалённых от координатных плоскостей\*\*).

Укажем читателю на простейшие уравнения координатных осей, которые необходимо помнить наизусть. У всех точек оси  $Z$  и только у них координаты  $x$  и  $y$  суть нули; поэтому уравнения оси  $Z$  суть

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Первое из уравнений (2) есть уравнение плоскости  $YZ$ , а второе — уравнение плоскости  $ZX$ ; линия пересечения этих плоскостей есть ось  $Z$ .

Аналогично легко написать уравнения двух других осей координат (черт. 209).

\*) Вернее четыре прямых: мы только условились рассматривать одну из них.

\*\*) Этот факт уже упоминался в задаче 289 (стр. 320).

**203. Три уравнения с тремя переменными.** Если даны три уравнения с тремя переменными:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0, \\ \Psi(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

то их, вообще говоря, можно решить совместно, т. е. найти определённые значения  $x$ ,  $y$  и  $z$ , удовлетворяющие всем трём уравнениям. Следовательно, в пространстве существует лишь одна точка или несколько отдельных точек [смотря по тому, сколько решений имеет система уравнений (3)], координаты которых удовлетворяют всем трём уравнениям (3). Эти точки, очевидно, принадлежат всем трём поверхностям (3), т. е. являются точками пересечения этих поверхностей.

Итак, чтобы найти точки пересечения трёх поверхностей, надо решить совместно их уравнения.

Выше мы сказали, что три уравнения с тремя переменными, вообще говоря, можно решить совместно. Этого нельзя сделать в двух случаях: 1) когда уравнения (3) противоречивы, 2) когда уравнения (3) зависимы. В первом случае нет ни одной тройки чисел, удовлетворяющих всем трём уравнениям; геометрический смысл этого ясен: нет ни одной точки, общей всем трём поверхностям. Геометрическое истолкование второго случая будет дано в следующей главе (п 218, стр. 414).

### Задача

**367.** Указать геометрический смысл в пространстве следующих пар уравнений:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x + y &= 1. \end{aligned} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned} \right. & \text{e)} \left\{ \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 4, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned} \right. \\ \text{b)} \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x + y &= 1,5. \end{aligned} \right. & \text{d)} \left\{ \begin{aligned} 2x - 3y &= 0, \\ 5x + y &= 0. \end{aligned} \right. & \text{f)} \left\{ \begin{aligned} y &= \sin x, \\ y &= 2z. \end{aligned} \right. \end{array}$$

## § 3. Параметрические уравнения линий. Векторные уравнения

**204. Параметрические уравнения линии в пространстве.** Пусть три координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  даны как функции некоторого параметра  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если мы придадим  $t$  определённое значение, то по формулам (1) можно вычислить  $x$ ,  $y$  и  $z$ ; значит, каждому значению параметра  $t$  соответствует определённая точка в пространстве. Если параметр  $t$  непрерывно изменяется, то соответствующая точка непрерывно перемещается в пространстве и, следовательно, описывает линию (след непрерывно движущейся точки есть линия)\*).

Представление линий в пространстве параметрическими уравнениями совершенно аналогично параметрическому представлению линий на плоскости. Поэтому мы лишь вкратце укажем основные свойства этого представления.

Прежде всего возникает следующий вопрос: если линия задана параметрическими уравнениями (1), то как получить из этих уравнений уравнения линии в обычной форме (в виде двух уравнений с тремя переменными). Как известно из алгебры, из системы уравнений можно исключить одно переменное; при этом количество уравнений станет на единицу меньше. Таким образом, можно исключить из уравнений (1) параметр  $t$ , после чего получим два уравнения, содержащие переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Пример 1. Дана линия

$$\left. \begin{aligned} x &= (t+1)^2, \\ y &= 2(t+1), \\ z &= -(2t+1). \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Общий способ исключения параметра заключается в следующем: берём из данных трёх уравнений какие-нибудь две пары и в каждой паре производим исключение параметра. В данном случае получим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= 4x, \\ z + y &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Теперь видно, что линия (\*) есть линия пересечения параболического цилиндра с плоскостью (черт. 210 на стр. 386).

Иногда проще бывает исключить параметр не из пары уравнений, а комбинируя все три уравнения.

Пример 2. Дана линия

$$\begin{aligned} x &= 3 \sin t, \\ y &= 4 \sin t, \\ z &= 5 \cos t. \end{aligned}$$

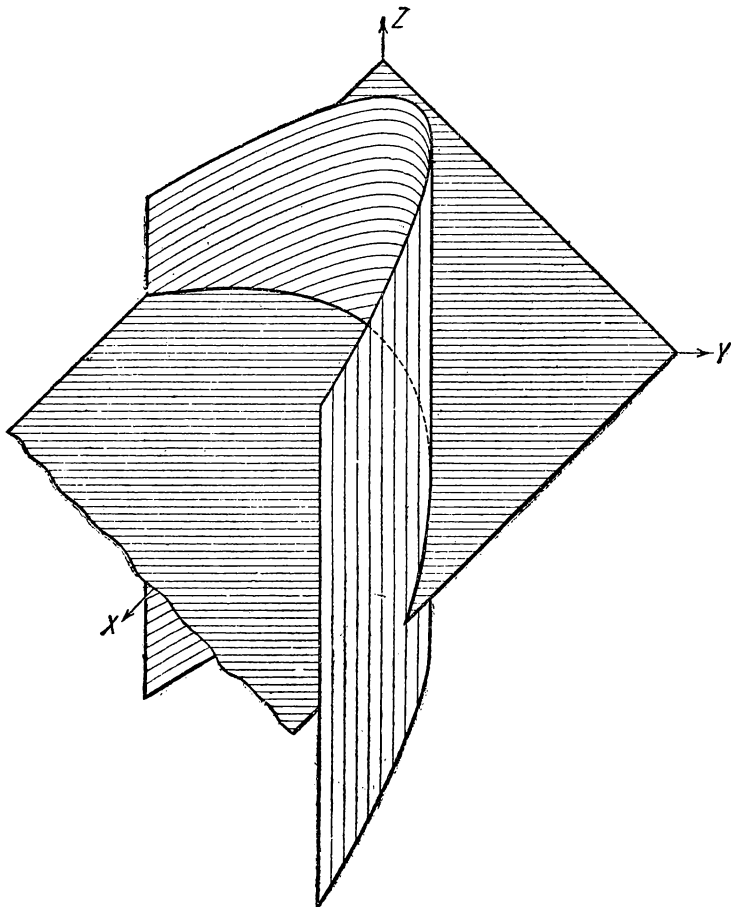
Нетрудно заметить, что параметр  $t$  исключится, если возвести все уравнения в квадрат и сложить. Кроме того, легко исключить  $t$  из первых двух уравнений. В результате получится два уравнения:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25, \\ 4x - 3y &= 0, \end{aligned}$$

геометрическое истолкование которых предоставляем читателю.

\*) Предполагается, что функции (1) однозначны и непрерывны.

В пространстве, как и на плоскости, параметрические уравнения линии не вполне эквивалентны обыкновенным уравнениям, так как параметрические уравнения определяют не только саму линию, но и некоторую шкалу на ней: около каждой точки можно поставить пометку, показывающую значение параметра, которому эта точка соответствует. Отсылаем читателя к п 34 (стр. 70).



Черт. 210.  $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ z + y = 1. \end{cases}$

Если параметр  $t$  есть время (точнее: количество единиц времени, протекшее от какого-нибудь момента, принятого за начальный), то уравнения (1) (стр. 384) определяют движение точки в пространстве, т. е. они позволяют определить положение движущейся точки



в любой момент времени. Если из этих уравнений исключить  $t$ , то получим пару уравнений, определяющих траекторию движущейся точки, но не дающих никаких указаний о том, в какие моменты времени движущаяся точка занимала различные положения на траектории.

**205. Винтовая линия.** Рассмотрим пример линии, уравнения которой наиболее естественны в параметрической форме.

Возьмём прямой круговой цилиндр, стоящий вертикально (разумеется, это говорится лишь для краткости выражений в дальнейшем). Рассмотрим точку, которая движется по поверхности этого цилиндра, обходя его кругом и одновременно поднимаясь вверх, причём величина её подъёма по вертикали пропорциональна углу, описываемому ею\*) при круговом обходе цилиндра. Линия, которую описывает точка, движущаяся таким образом, называется цилиндрической винтовой линией; для краткости мы будем называть её просто винтовой линией.

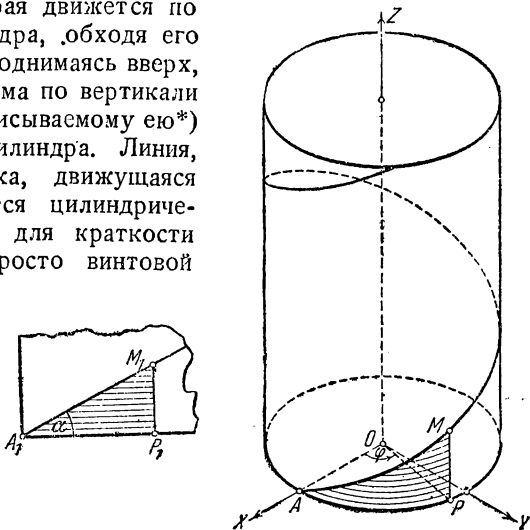
Винтовую линию легко получить, если навёртывать на цилиндр плоскость, на которой проведена прямая (черт. 211): эта прямая и перейдёт в винтовую линию на цилиндре (почему?). Взятая прямая может иметь любое направление, кроме горизонтального (тогда она перейдёт не в винтовую линию, а в окружность) и вертикального (тогда она перейдёт не в винтовую линию, а в прямую). Кроме того,  $\alpha$  (см. черт. 211) не должно быть отрицательно и не должно быть больше  $90^\circ$ , так как иначе при наворачивании плоскости на цилиндр в том направлении, как показано на черт. 211, винтовая линия пошла бы не вверх, а вниз (этот случай будет рассмотрен ниже). Итак,

$$0 < \alpha < 90^\circ.$$

Примем ось цилиндра за ось  $Z$ . Треугольник  $A_1P_1M_1$  (плоский) при наворачивании плоскости на цилиндр перейдёт в  $APM$  (точка  $A$  взята на оси  $X$ ). Обозначим через  $\varphi$  угол  $XOP$ :

$$\widehat{XOP} = \varphi,$$

\*) Точнее выражаясь, не «ею», а «её проекцией на горизонтальную плоскость».



Черт. 211. 
$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi, \\ z = \lambda \varphi. \end{cases}$$

и выразим через  $\varphi$  координаты точки  $M$ . Так как  $P$  есть проекция точки  $M$  на плоскость  $XY$ , то, проектируя  $OP$  на оси  $X$  и  $Y$ , мы определим соответственно  $x$  и  $y$  для точки  $P$  и, что то же, для точки  $M$ :

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi, \\y &= R \sin \varphi,\end{aligned}$$

где  $R$  обозначает  $OP$ , т. е. радиус основания цилиндра.

Находим  $z$ :

$$r = MP = M_1P_1 = A_1P_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

Замечая, что

$$A_1P_1 = \widetilde{AP} = R\varphi,$$

получим окончательно

$$z = R\varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Итак, параметрические уравнения винтовой линии:

$$\left. \begin{aligned}x &= R \cos \varphi, \\y &= R \sin \varphi, \\z &= R \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi\end{aligned} \right\} (0 < \alpha < 90^\circ). \quad (2)$$

Так как угол  $\alpha$  есть константа, то можно для краткости обозначить коэффициент пропорциональности  $R \operatorname{tg} \alpha$  одной буквой  $\lambda$ . Тогда уравнения винтовой линии запишутся так:

$$\left. \begin{aligned}x &= R \cos \varphi, \\y &= R \sin \varphi, \\z &= \lambda \varphi\end{aligned} \right\} (\lambda > 0). \quad (2')$$

По определению винтовой линии, при продвижении точки  $P$  по окружности на равные углы, высота точки  $M$  над плоскостью  $XY$  (т. е.  $z$ ) будет увеличиваться на равные отрезки. В частности, каждый раз, когда точка  $P$  будет совершать полный оборот,  $z$  будет увеличиваться на некоторую определённую величину  $l$ ; эта величина называется *шагом* или *ходом винтовой линии*. Иначе можно сказать, что шаг или ход винтовой линии, это — расстояние между последовательными точками пересечения винтовой линии с какой-нибудь одной образующей цилиндра, т. е.

$$l = M_1M_2 = M_2M_3 = \dots$$

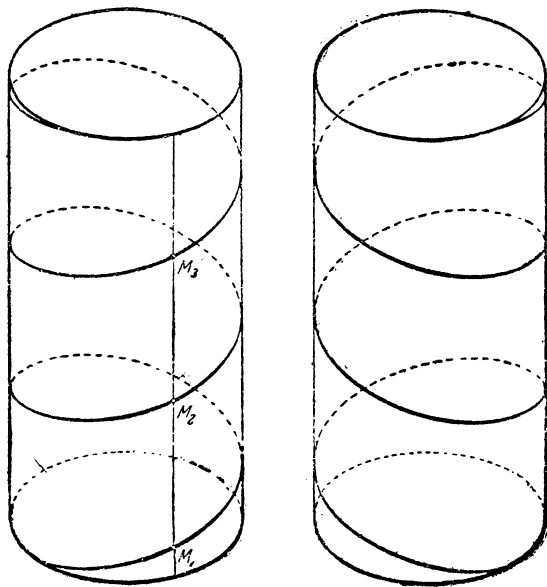
(черт. 212). Чтобы вычислить ход винтовой линии, следует в третьей формуле (2') или (2) придать  $\varphi$  последовательно значения  $\varphi_0$  и  $\varphi_0 + 2\pi$  и из второго значения  $z$  вычесть первое. Получим

$$l = 2\pi\lambda = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha = C \operatorname{tg} \alpha, \quad (3)$$

где  $C$  — длина окружности основания цилиндра.

Нарезка всякого штопора или винта имеет вид винтовой линии. В самом деле, если бы «вертикальное» продвижение по этой нарезке, т. е. поступательное продвижение винта, не было пропорционально углу поворота винта и, значит, ход нарезки не был постоянен; то каждый следующий оборот нарезки не мог бы пройти по пути, проложенному предыдущим оборотом \*).

Обычно употребляющиеся винты и штопоры имеют нарезки в виде *правой винтовой линии*, характеризующейся определённой связью между вращением винта и поступательным движением, которое он получит при этом. Именно, если правый винт (винт с нарезкой в виде правой винтовой линии) ввинчивать по оси  $Z$ , вращая его в положительном направлении (т. е. от положительной части оси  $X$  к положительной части оси  $Y$  по меньшему углу), то он будет ввинчиваться по оси  $Z$  в положительном направлении \*\*). Винтовая линия, изображённая на черт. 211 и 212,  $a$  — правая.



$a$ ) Правая винтовая линия.  $b$ ) Левая винтовая линия.

Черт. 212.

У левого винта связь между вращением и поступательным движением — противоположная по сравнению с правым винтом. Отсюда ясно, что для получения левой винтовой линии надо в правой винтовой линии переменить либо направление вращения, либо направление поступательного движения. Первое достигается аналитически заменой  $\varphi$  на  $-\varphi$  в уравнениях (2) или (2'), а второе — изменением знака у  $\alpha$  или у  $\lambda$ . Если  $\lambda$  отрицательно, то при наворачивании плоскости на цилиндр в прежнем направлении (как на черт. 211) винтовая линия

\*) Не только целый оборот, но никакой отрезок нарезки не мог бы пройти по проложенному пути.

\*\*) Разумеется, всюду подразумевается, что мы употребляем правую систему координат.

пойдёт вниз. Итак, уравнение (2') при  $\lambda > 0$  изображает правую винтовую линию, а при  $\lambda < 0$  — левую.

На черт. 212 изображены две винтовые линии — правая и левая — с одинаковым радиусом основания цилиндра и одинаковым ходом. Такие две линии не конгруэнтны, т. е. не могут быть совмещены никаким движением в пространстве так же, как не конгруэнтны правая и левая системы координат, правая и левая перчатки и вообще предмет несимметричной формы со своим зеркальным отражением. Зеркальное отражение правой винтовой линии есть левая винтовая линия.

**206. Общая точка зрения на вопросы о геометрическом смысле уравнений в пространстве.** Положение точки в пространстве определяется тремя числами, т. е. в пространстве существует  $\infty^3$  точек. Чтобы определить поверхность, надо из  $\infty^3$  точек пространства выделить  $\infty^2$  точек, а чтобы определить линию, надо из  $\infty^3$  точек пространства выделить  $\infty^1$  точек.

Поэтому поверхность задаётся одним уравнением, связывающим текущие координаты:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Одно условие выделяет из  $\infty^3$  троек чисел  $(x, y, z)$   $\infty^2$  точек, удовлетворяющих этому условию.

Линия задаётся двумя уравнениями, связывающими текущие координаты:

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

потому что два условия выделяют из  $\infty^3$  троек чисел  $(x, y, z)$   $\infty^1$  троек, удовлетворяющих этому условию.

С этой же точки зрения легко объяснить параметрическое представление линий. Пусть мы имеем уравнения:

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t),$$

$$z = \chi(t).$$

Эти уравнения каждому значению  $t$  ставят в соответствие тройку чисел  $(x, y, z)$ , т. е. точку в пространстве. Значит, они определяют столько точек, сколько существует значений *одного* параметра  $t$ , т. е.  $\infty^1$  точек, или линию.

Необходимо хорошо уяснить параллелизм между аналитическими ограничениями, накладываемыми на выбор тройки чисел, и геометрическими ограничениями, накладываемыми на выбор точки в пространстве. Указать тройку чисел  $(x, y, z)$ , это в переводе на геометрический язык значит — указать точку в пространстве.

Если числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  можно выбирать совершенно произвольно, то соответствующая точка может оказаться, где угодно в пространстве.

Если на выбор трёх чисел наложено ограничение

$$F(x, y, z) = 0,$$

т. е. можно выбирать лишь такие тройки чисел, которые удовлетворяют этому уравнению, то это ограничение сужает наш произвол в выборе тройки  $(x, y, z)$ , но не уничтожает его совсем. Соответствующая точка уже не может оказаться, где угодно в пространстве, а должна быть на определённой поверхности; но на этой поверхности это может быть любая точка.

Если на выбор трёх чисел наложены два ограничения:

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

то они ещё сильнее сужают наш произвол, но всё-таки не уничтожают его совсем. Соответствующая точка должна быть на определённой линии.

Наконец, три ограничения:

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$\Phi(x, y, z) = 0,$$

$$\Psi(x, y, z) = 0,$$

совсем уничтожают наш произвол: они вполне определяют одну или несколько троек чисел  $(x, y, z)$ , т. е. одну или несколько точек в пространстве.

**207. Векторные уравнения.** Положение точки в пространстве вполне определяется заданием её радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Пусть дано уравнение, содержащее радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Если это уравнение вполне определяет этот радиус-вектор, то тем самым оно вполне определяет некоторую точку в пространстве. Таково, например, уравнение

$$\mathbf{a} + \mathbf{r} = \mathbf{b}.$$

Если же уравнение таково, что существует бесконечное множество векторов, удовлетворяющих ему, то оно определяет некоторое геометрическое место точек в пространстве. Разумеется, мы предполагаем, что полюс выбран и все радиусы-векторы считаются от этого полюса.

Пусть, например, дано уравнение

$$\mathbf{a}\mathbf{r} = 0. \quad (4)$$

Существует бесконечное множество векторов  $\mathbf{r}$ , удовлетворяющих этому уравнению: все векторы, перпендикулярные вектору  $\mathbf{a}$ . Так как начало у них общее, то их концы образуют плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{a}$  и проходящую через полюс. Векторы, не перпендикулярные вектору  $\mathbf{a}$ , не удовлетворяют уравнению. Таким образом уравнение (4) есть уравнение плоскости. Это значит, что радиусы-векторы всех точек, лежащих в этой плоскости, удовлетворяют уравнению (4), а радиусы-векторы всех точек, не лежащих в этой плоскости, не удовлетворяют этому уравнению.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = 0. \quad (5)$$

Этому уравнению удовлетворяет всякий вектор  $\mathbf{r}$ , коллинеарный  $\mathbf{a}$ , и не удовлетворяет никакой вектор  $\mathbf{r}$ , не коллинеарный  $\mathbf{a}$ . Если из полюса выводить всевозможные векторы, коллинеарные  $\mathbf{a}$ , то концы этих векторов образуют прямую, проходящую через полюс и параллельную вектору  $\mathbf{a}$ . Уравнение (5) есть уравнение этой прямой.

Мы видим, что уравнение, содержащее радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , может изображаться отдельными точками, или поверхностью, или линией,

в зависимости от природы действий, входящих в это уравнение. Так, уравнение (4) есть уравнение поверхности, а уравнение (5) — уравнение линии. Это объясняется тем, что уравнение (5) накладывает больше стеснений на радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , чем уравнение (4), т. е. объясняется различной природой скалярного и векторного умножений.

Если радиус-вектор  $\mathbf{r}$  выражен как функция одного параметра  $t$ , то мы имеем *векторное параметрическое уравнение линии*. В самом деле, каждому значению параметра  $t$  соответствует определённый радиус-вектор. При непрерывном изменении параметра  $t$  конец этого радиуса-вектора описывает линию.

Пример 1. Каков геометрический смысл уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b} \quad (6)$$

Ответ: Уравнение (6) изображается прямой, проходящей через точку  $M_1(\mathbf{a})$  и параллельной вектору  $\mathbf{b}$ . Легко построить эту прямую по точкам (черт. 213):

$t$	$\mathbf{r}$
...	...
-2	$\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$
-1	$\mathbf{a} - \mathbf{b}$
0	$\mathbf{a}$
1	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$
2	$\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$
...	...

Точка  $M_1$  на черт. 213 соответствует значению параметра  $t = 0$ .

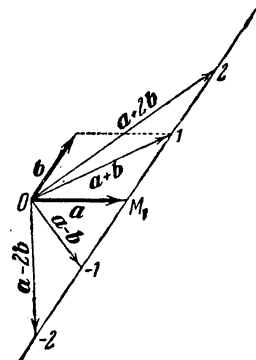
Пример 2. Найти векторное параметрическое уравнение винтовой линии.

Сделаем прежде всего общее замечание. Если координатные параметрические уравнения какой-нибудь линии суть:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

то векторное параметрическое уравнение этой линии таково:

$$\mathbf{r} = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}, \quad (8)$$



Черт. 213.  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ .

— факт, не требующий объяснений. Обратное, если радиус-вектор  $\mathbf{r}$  есть функция параметра  $t$ , то его координаты тоже суть функции этого параметра  $t$ , которые определяются по формулам (22) § 5 гл. XI (стр. 331).

Координатные параметрические уравнения винтовой линии были получены в п 205 [формулы (2') (стр. 388)]. Векторное параметрическое уравнение винтовой линии таково:

$$\mathbf{r} = R(\cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j}) + \lambda \varphi \cdot \mathbf{k}. \quad (9)$$

### Задачи

**368.** Указать геометрический смысл векторных уравнений:

- |  |  |
|--|--|
| a) $r^2 = R^2$ ;                         | c) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0$ ;  |
| b) $(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 = R^2$ ; | d) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$ . |

**369.** Точка  $M$  движется по сфере радиуса  $R$  с центром в начале координат так, что её подъём по вертикали пропорционален углу поворота (т. е. углу между осью  $X$  и  $OP$ , где  $P$  — проекция точки  $M$  на плоскость  $XY$ ). Найти параметрические уравнения линии, которую описывает точка  $M$ . Указать область изменения параметра. Найти концы этой линии.

**370.** Указать геометрический смысл векторного параметрического уравнения  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \sin t$ .

---

## ГЛАВА XIV

### ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ

#### § 1. Аналитическое задание плоскости

**208. Параметры, определяющие плоскость.** Плоскость в пространстве может быть задана различными способами. Наиболее употребительными являются следующие два.

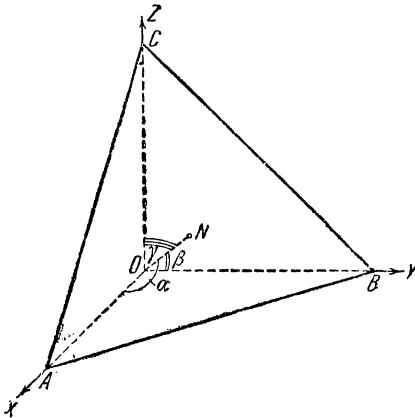
**Первый способ.** Из начала координат опускаем перпендикуляр  $ON$  на плоскость (черт. 214) и задаём длину этого перпендикуляра и его углы \*) с осями координат:

$$ON = p, \quad \widehat{XON} = \alpha, \quad \widehat{YON} = \beta, \quad \widehat{ZON} = \gamma. \quad (1)$$

Параметры (1) вполне определяют плоскость. В самом деле, зная углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , мы можем вывести из начала полупрямую, образующую такие углы с осями координат. Отложив на этой полупрямой из начала данный отрезок  $p$ , мы найдём точку  $N$ . Плоскость, проходящая через точку  $N$  и перпендикулярная  $ON$ , и есть данная плоскость.

Угол  $\alpha$  (а также  $\beta$  и  $\gamma$ ) всегда задаётся от  $0$  до  $180^\circ$ ;  $p$  — есть положительная величина (длина  $ON$ ):

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \alpha &\leq 180^\circ, \\ 0 \leq \beta &\leq 180^\circ, \\ 0 \leq \gamma &\leq 180^\circ, \\ 0 \leq p &< \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Черт. 214. Задание плоскости в пространстве.

\*) Под словами «его углы» мы подразумеваем углы, образованные осью  $ON$ , перпендикулярной к нашей плоскости, причём направлением этой оси считается направление от начала координат к плоскости. В том случае, если плоскость проходит через начало, мы имеем  $ON = p = 0$ . Направление прямой, перпендикулярной к плоскости, и в этом случае остаётся вполне определённым, но выбор на ней одного из двух возможных направлений оси в этом случае произволен.



Заметим, что, определяя плоскость параметрами (1), мы задаём не четыре, а три независимых параметра, так как углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  связаны между собой одной зависимостью. Итак, *плоскость в пространстве определяется тремя независимыми параметрами.*

Иначе говоря, в пространстве существует  $\infty^3$  плоскостей.

Второй способ. Зададим отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат:

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c. \quad (3)$$

Под  $a$ ,  $b$  и  $c$  здесь подразумеваются относительные числа, их знак указывает, в какую сторону откладывается от начала соответствующий отрезок.

По параметрам:

$$\left. \begin{aligned} -\infty < a < \infty, \\ -\infty < b < \infty, \\ -\infty < c < \infty \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

легко построить плоскость. Откладывая на осях  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно отрезки  $a$ ,  $b$  и  $c$ , мы найдём точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Плоскость, проходящая через эти три точки, и есть данная плоскость.

Мы опять видим, что плоскость в пространстве определяется тремя независимыми параметрами.

**209. Нормальное уравнение плоскости.** Будем задавать плоскость следующим образом. Зададим единичный вектор  $\mathbf{n}$ , перпендикулярный плоскости; тем самым уже вполне определено положение плоскости (см. сноску на стр. 335). Зададим, далее, расстояние  $p$  от начала координат до плоскости, т. е. длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость; разумеется,  $p$  есть величина существенно положительная. Эти данные ещё не вполне определяют плоскость: существуют две плоскости, перпендикулярные вектору  $\mathbf{n}$  и лежащие по разные стороны начала на расстоянии  $p$  от него. Чтобы устранить эту неопределённость, условимся всегда выбирать направление на векторе  $\mathbf{n}$  от начала координат к плоскости; тогда направление вектора  $\mathbf{n}$  не только определяет положение плоскости, но также указывает, с какой стороны от начала (из двух возможных) она находится \*).

Этот способ задания плоскости эквивалентен первому способу, изложенному в предыдущем п, потому что задание единичного вектора нормали эквивалентно заданию её направляющих косинусов.

---

\*) В случае  $p = 0$  за  $\mathbf{n}$  можно принимать любой из двух единичных векторов, перпендикулярных плоскости. Тем не менее плоскость и в этом случае вполне определена: она проходит через начало координат и перпендикулярна вектору  $\mathbf{n}$ .

Очевидно, мы имеем

$$\mathbf{n} = \overline{OE} = \frac{\overline{ON}}{ON} = \frac{\overline{ON}}{p} \quad |\mathbf{n}| = 1 \quad (5)$$

(черт. 215).

Если точка  $M(\mathbf{r})$  лежит на рассматриваемой плоскости, то вектор  $\overline{NM}$  перпендикулярен к  $\mathbf{n}$ :

$$\overline{NM} \perp \mathbf{n}, \text{ т. е. } \overline{NM} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (*)$$

Соотношение (\*) справедливо для всех точек  $M$ , лежащих в плоскости, и только для них, т. е. оно является уравнением плоскости.

Радиус-вектор точки  $N$  выражается так

$$\overline{ON} = p\mathbf{n}$$

[см. гл. XI, § 2, формула (15) (стр. 295)]. Следовательно,

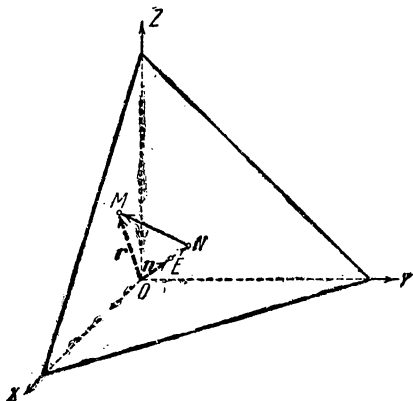
$$\overline{NM} = \mathbf{r} - p\mathbf{n},$$

и уравнение (\*) принимает вид

$$(\mathbf{r} - p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Раскрывая скобки и замечая, что  $\mathbf{n}^2 = 1$ , получим

$$\mathbf{r}\mathbf{n} - p = 0. \quad (6)$$



Черт. 215.  $\mathbf{r}\mathbf{n} - p = 0$ .

Уравнение (6) называется *нормальным векторным уравнением*

*плоскости*. Здесь  $\mathbf{r}$  — *текущий радиус-вектор*, т. е. радиус-вектор произвольной точки плоскости,  $\mathbf{n}$  — *единичный вектор*, нормальный к плоскости и направленный от начала к плоскости, и  $p$  — *расстояние* плоскости от начала.

Скалярное произведение какого-нибудь вектора на единичный вектор есть проекция первого вектора на направление этого единичного вектора. Таким образом уравнение (6), написанное в виде

$$\mathbf{r}\mathbf{n} = p, \quad (6')$$

непосредственно выражает следующий факт: проекция радиуса-вектора любой точки плоскости на нормаль к этой плоскости есть константа (равная расстоянию плоскости от начала координат).

Здесь полезно вспомнить то, что говорилось о неоднозначности скалярного деления [глава XI п 176 (стр. 328)]. В уравнении (6')  $\mathbf{n}$  и  $p$  заданы. Пытаясь найти из этого уравнения неизвестный вектор  $\mathbf{r}$ , т. е. разделить скаляр  $p$  на вектор  $\mathbf{n}$ , мы получаем для вектора  $\mathbf{r}$  бесконечное множество значений. Если откладывать все эти векторы от общего начала, то концы их образуют плоскость.

Чтобы от уравнения (6) перейти к координатному уравнению, выразим векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$  через их координаты:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где  $x$ ,  $y$  и  $z$  — координаты произвольной точки плоскости,

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k},$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы нормали к плоскости, причём эта нормаль идёт по направлению *от* начала координат *к* плоскости, с осями координат (мы знаем, что координаты единичного вектора суть его направляющие косинусы). Тогда уравнение (6) перейдёт в уравнение

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (7)$$

называемое *нормальным координатным уравнением плоскости*.

Мы видим, что уравнение

$$\mathbf{r}\mathbf{n} - p = 0,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, а свободный член отрицателен, изображается плоскостью, которая перпендикулярна вектору  $\mathbf{n}$ , расположена с той стороны от начала, в которую направлен вектор  $\mathbf{n}$ , и отстоит от начала на расстоянии  $p$ . Теперь можно показать, что уравнение

$$\mathbf{r}\mathbf{N} + D = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{N}$  — любой вектор, а  $D$  — любая константа, тоже всегда изображается плоскостью.

В самом деле, уравнение (8) можно привести к виду (6). Для этого надо разделить его на  $\pm N$ , так как тогда  $\mathbf{r}$  будет множиться на единичный вектор:

$$\mathbf{r} \frac{\mathbf{N}}{\pm N} + \frac{D}{\pm N} = 0.$$

Выберем перед  $N$  знак, противоположный знаку  $D$ . Тогда уравнение

$$\mathbf{r} \frac{\mathbf{N}}{\pm N} + \frac{D}{\pm N} = 0$$

будет подходить под тип (6) и, следовательно, изображается плоскостью. При этом

$$\frac{\mathbf{N}}{\pm N} = \mathbf{n}, \quad \frac{D}{\pm N} = -p, \quad (9)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости, направленный *от* начала *к* плоскости, а  $p$  — расстояние плоскости от начала.

Из первой формулы (9) видно, что векторы  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{n}$  коллинеарны. Значит вектор  $\mathbf{N}$ , фигурирующий в уравнении (8), есть вектор,

перпендикулярный к плоскости. Он называется короче *нормальным вектором*.

Обозначим координаты вектора  $\mathbf{N}$  через  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}, \quad (10)$$

тогда уравнение (8) примет вид:

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) + D = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) есть уравнение первой степени относительно текущих координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Оно может быть *любым* уравнением первой степени, так как его коэффициенты могут иметь любые значения.

Итак, *уравнение первой степени относительно текущих координат всегда изображается плоскостью. Первые три члена уравнения (11) представляют скалярное произведение текущего радиуса-вектора на вектор, перпендикулярный к плоскости.*

*Коэффициенты при текущих координатах в уравнении плоскости суть координаты нормального вектора.*

Уравнение (11) всегда можно привести к нормальному виду, умножив его на нормирующий множитель

$$M = \pm \frac{1}{N}, \quad (12)$$

знак которого противоположен знаку свободного члена  $D$ . Принимая во внимание выражение (10) для нормального вектора  $\mathbf{N}$ , получим:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (13)$$

Формальные признаки нормального координатного уравнения плоскости следующие: 1) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице, 2) свободный член отрицателен.

Если уравнение — нормальное, то коэффициенты при текущих координатах суть направляющие косинусы нормали к плоскости (направленной *от* начала *к* плоскости), потому что они суть координаты *единичного* нормального вектора. Абсолютная величина свободного члена в нормальном уравнении есть расстояние плоскости от начала.

**210. Уравнение плоскости в отрезках.** Пусть дана плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (11)$$

и требуется вычислить отрезки, отсекаемые этой плоскостью на осях координат.

Очевидно, чтобы вычислить отрезок, отсекаемый плоскостью на оси  $X$ , надо положить в уравнении  $y=z=0$  и определить из этого уравнения  $x$ ; это и будет искомый отрезок. Обозначая его через  $a$ , будем иметь

$$a = -\frac{D}{A}.$$

Аналогично найдём отрезки  $b$  и  $c$ , отсекаемые плоскостью (11) соответственно на осях  $Y$  и  $Z$ . Итак,

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{D}{A}, \\ b &= -\frac{D}{B}, \\ c &= -\frac{D}{C}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Уравнение (11) легко преобразовать так, чтобы коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  входили в него лишь в комбинациях, встречающихся в правых частях формул (14). Преобразованное таким образом уравнение (11) будет иметь вид

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

или, принимая во внимание формулы (14),

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (15)$$

Уравнение (15) называется *уравнением плоскости в отрезках*. Признаки этого вида уравнения таковы: свободный член находится в правой части и равен единице, коэффициенты при  $x$ ,  $y$  и  $z$  отнесены в знаменатели; в частности, знак минус, если он имеется перед каким-нибудь членом, относится в знаменатель.

**Пример.** Уравнение плоскости

$$2x + 15y - 3z - 6 = 0$$

привести к виду уравнения в отрезках.

Переносим свободный член вправо и делим уравнение на 6:

$$\frac{x}{3} + \frac{5y}{2} - \frac{z}{2} = 1.$$

Во втором члене относим в знаменатель 5, а в третьем члене минус:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{2}{5}} + \frac{z}{-2} = 1.$$

Полученное уравнение и есть уравнение в отрезках.

Если уравнение плоскости приведено к виду в отрезках, то знаменатели, стоящие под  $x$ ,  $y$  и  $z$ , непосредственно показывают отрезки, отсекаемые плоскостью соответственно на осях  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Например, рассмотренная только что плоскость отсекает на оси  $X$  отрезок  $a=3$ , на оси  $Y$  — отрезок  $b=\frac{2}{5}$  и на оси  $Z$  — отрезок  $c=-2$ .

Когда мы приводим уравнение плоскости к виду в отрезках, то нам приходится делить его на свободный член. Это возможно сделать лишь при условии, что свободный член не равен нулю. Таким образом уравнение можно привести к виду в отрезках во всех случаях за исключением того, когда свободный член равен нулю. Если свободный член равен нулю, то уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz = 0;$$

эта плоскость проходит через начало, потому что координаты начала удовлетворяют её уравнению. Следовательно, к виду в отрезках может быть приведено уравнение всякой плоскости, не проходящей через начало. Этот факт вполне понятен и с другой точки зрения: если плоскость проходит через начало, то отрезки, отсекаемые ею на осях, суть нули, и уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

теряет смысл.

**211. Составление уравнения плоскости по параметрам и вычисление параметров по уравнению.** Если даны три параметра, определяющие плоскость, то можно составить уравнение этой плоскости. Обратно, имея уравнение плоскости, можно определить все её параметры. Ввиду ясности этого вопроса ограничимся одним примером.

Пример. Даны отрезки, отсекаемые плоскостью на осях:

$$a=28, \quad b=21, \quad c=-16.$$

Требуется: 1) составить уравнение плоскости, 2) привести его к нормальному виду, 3) определить направляющие косинусы нормали к плоскости и расстояние плоскости от начала.

Зная отрезки, отсекаемые плоскостью на осях, мы можем написать уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{28} + \frac{y}{21} + \frac{z}{-16} = 1.$$

Можно освободиться от дробей:

$$12x + 16y - 21z - 336 = 0.$$

Находим нормирующий множитель

$$M = + \frac{1}{\sqrt{12^2 + 16^2 + 21^2}} = \frac{1}{29}.$$

Умножаем уравнение на  $\frac{1}{29}$  и тем самым приводим его к нормальному виду

$$\frac{12}{29}x + \frac{16}{29}y - \frac{21}{29}z - \frac{336}{29} = 0.$$

В нормальном уравнении коэффициенты при текущих координатах непосредственно показывают направляющие косинусы нормали к плоскости, а свободный член, взятый без знака минус, показывает расстояние плоскости от начала. Следовательно, для данной плоскости

$$\cos \alpha = \frac{12}{29}, \quad \cos \beta = \frac{16}{29}, \quad \cos \gamma = -\frac{21}{29}, \quad p = \frac{336}{29}.$$

Иногда может потребоваться найти углы, образуемые нормалью к плоскости с осями координат. Зная направляющие косинусы нормали, можно найти эти углы. При этом не следует забывать неравенств (2) (стр. 394). Так, например,  $\alpha = 65^\circ 33'$  \*), потому что *в пределах между 0 и 180°* существует лишь единственный угол, косинус которого равен  $\frac{12}{29}$ . Найдя углы нормали к данной плоскости со всеми осями координат, получим:

$$\alpha = 65^\circ 33',$$

$$\beta = 56^\circ 31',$$

$$\gamma = 136^\circ 24'.$$

**212. Отсутствие некоторых членов в уравнении плоскости.** Уравнение плоскости, вообще говоря, содержит четыре члена, но иногда некоторые из них могут отсутствовать, т. е. соответствующие коэффициенты могут быть нулями. Выясним, как влияет на расположение плоскости обращение в нуль отдельных коэффициентов в её уравнении.

Мы будем основываться на том факте, что уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{16}$$

может быть записано в виде

$$rN + D = 0, \tag{17}$$

где

$$r = xi + yj + zk \tag{18}$$

---

\*) Углы в этой книге всюду вычисляются с точностью до  $\frac{1'}{2}$ .

есть текущий радиус-вектор, а

$$\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} \quad (19)$$

есть вектор, нормальный к плоскости.

Пусть в уравнении (16) [или, что—то же самое, (17)] отсутствует свободный член, т. е.  $D=0$ . Тогда  $\mathbf{rN}=0$ , т. е. радиусы-векторы всех точек плоскости перпендикулярны вектору  $\mathbf{N}$ ; следовательно, плоскость проходит через начало\*). Впрочем, из уравнения (16) и непосредственно ясно, что при  $D=0$  координаты начала удовлетворяют этому уравнению, и, следовательно, плоскость проходит через начало.

Пусть в уравнении (16) нехватает члена, содержащего  $z$ , т. е.  $C=0$ . Мы уже знаем из главы XIII [п 200 (стр. 374)], что в этом случае наша плоскость параллельна оси  $Z$  (т. е. перпендикулярна плоскости  $XY$ ), но сейчас мы убедимся в этом другим способом. При  $C=0$  нормальный вектор плоскости таков:

$$\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j},$$

Таким образом, нормальный вектор компланарен с векторами  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , т. е. перпендикулярен оси  $Z$ . Отсюда следует, что сама плоскость параллельна оси  $Z$ .

Аналогично рассуждая, мы придём к выводу, что если уравнение (16) не содержит  $x$  (т. е.  $A=0$ ), то плоскость параллельна оси  $X$ , а если уравнение (16) не содержит  $y$  (т. е.  $B=0$ ), то плоскость параллельна оси  $Y$ .

Рассмотрим случай, когда в уравнении

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

нехватает двух членов. Этот случай целесообразно разбить на два: 1) нехватает одного члена с текущей координатой и свободного члена, 2) нехватает двух членов с текущими координатами.

Пусть, например,  $C=D=0$ , т. е. уравнение имеет вид

$$Ax + By = 0. \quad (20)$$

В этом случае, очевидно, плоскость параллельна оси  $Z$  и проходит через начало; это значит, что она проходит через ось  $Z$ . Аналогично, плоскость  $By + Cz = 0$  проходит через ось  $X$ , а плоскость  $Ax + Cz = 0$  проходит через ось  $Y$ .

Пусть нехватает двух членов с текущими координатами, например,  $A=B=0$ :

$$Cz + D = 0. \quad (21)$$

Мы уже знаем, что при  $A=0$  плоскость параллельна оси  $X$ , а при  $B=0$  она параллельна оси  $Y$ . Следовательно, плоскость (21)

---

\*) Рекомендуем читателю обратиться к главе XIII [уравнение (4) § 3 (стр. 391)], где это было разъяснено более подробно.

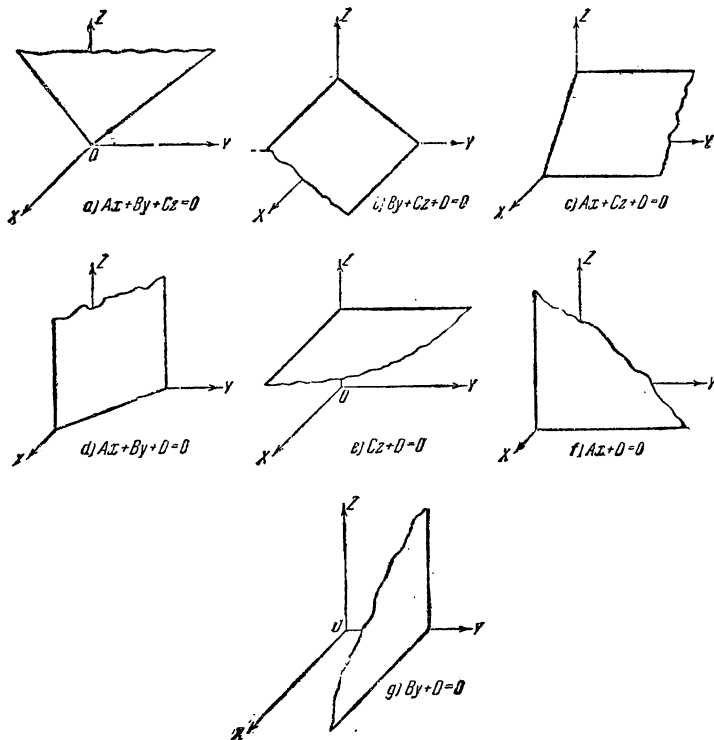


параллельна одновременно осям  $X$  и  $Y$ , т. е. она параллельна плоскости  $XY$ .

Этот факт легко установить и непосредственно. Решая уравнение (21) относительно  $z$ , получим

$$z = -\frac{D}{C}, \quad (22)$$

т. е.  $z$  равно постоянной величине. Строя всевозможные точки с одним и тем же  $z$ , мы, очевидно, получим плоскость, параллельную плоскости  $XY$ .



Черт. 216. Отсутствие некоторых членов в уравнении плоскости.

Аналогично, при  $B=C=0$  наша плоскость параллельна плоскости  $YZ$ , а при  $C=A=0$  она параллельна плоскости  $ZX$ .

Переходим к случаям, когда в уравнении плоскости отсутствуют три члена. Очевидно, случай  $A=B=C=0$ ,  $D \neq 0$  не может иметь места, так как при  $A=B=C=0$  уравнение плоскости превратилось бы в

$$D = 0.$$

Невозможность этого случая ясна и из геометрических соображений, так как в этом случае плоскость должна была бы быть параллельна всем трём осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , что невозможно. Поэтому надо рассмотреть лишь тот случай, когда нехватает двух членов с текущими координатами и свободного члена. Читатель сам легко убедится, что в этом случае плоскость совпадает с одной из координатных плоскостей.

Читателю рекомендуется изучить черт. 216 (стр. 403), иллюстрирующий результаты этого п.

### Задачи

**371.** По следующим данным составить уравнение плоскости, привести его к виду уравнения в отрезках и определить отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат

a)  $\cos \alpha = \frac{6}{7}$ ,  $\cos \beta = -\frac{2}{7}$ ,  $\gamma$  — острый угол,  $p = 5$ ;

b)  $\cos \alpha = \frac{6}{7}$ ,  $\cos \beta = -\frac{2}{7}$ ,  $\gamma$  — тупой угол,  $p = 5$ ;

c)  $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ ,  $\cos \beta = \frac{8}{17}$ ,  $p = 1$ ;

d)  $\cos \alpha = 1$ ,  $p = 1$ ;

e)  $\alpha = \beta = -\frac{\pi}{3}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ ,  $p = 0$ .

**372.** Непосредственно (без выкладок) указать параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $p$  для следующих плоскостей:

a) плоскость  $XY$ ;

b) плоскость  $YZ$ ;

c) плоскость  $ZX$ ;

d) плоскость  $x + y = 0$ ;

e) плоскость  $z - y = 0$ ;

**373.** Какие из следующих уравнений являются нормальными:

a)  $x - 2y + 5z - 3 = 0$ ; e)  $x - 2 = 0$ ;

b)  $\frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z - 2 = 0$ ; f)  $x - y = 0$ ;

c)  $\frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z + 2 = 0$ ; g)  $z = 0$ ;

d)  $\frac{4}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z = 0$ ; h)  $\frac{x - y + z - 2}{3} = 0$ .

**374.** Следующие уравнения привести к нормальному виду:

a)  $2x - 6y - 9z + 33 = 0$ ; d)  $\frac{2}{15}x - \frac{1}{3}y + \frac{14}{15}z + 2 = 0$ ;

b)  $\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y - \frac{11}{20}z - 1 = 0$ ; e)  $2x + 2y - z = 0$ .

c)  $x - y = 0$ ;

**375.** Зная отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, составить её уравнение, привести его к нормальному виду и определить параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\rho$

- a)  $a = 105$ ,  $b = -21$ ,  $c = 84$ ;  
 б)  $a = \infty$ ,  $b = 3$ ,  $c = -4$ ;  
 в)  $a = 1$ ,  $b = \infty$ ,  $c = \infty$ .

**376.** Отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, находятся в отношении

- a)  $a:b = 4:9$ ;  $b:c = 12:1$ ;  
 б)  $a:b:c = 12:\infty:-35$ .

Найти направляющие косинусы нормали к плоскости.

**377.** Выразить параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\rho$  через отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, и обратно: выразить отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, через параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\rho$ .

**378.** Указать особенности расположения следующих плоскостей

- a)  $x + y - 2 = 0$ ; c)  $y - z = 1$ ; h)  $z = 2x + 3$ ;  
 б)  $2x - 3y = 0$ ; f)  $y = 1$ ; i)  $z = x$ ;  
 в)  $y - 3z = 0$ ; g)  $z + 5 = 0$ ; j)  $x + y + z = 0$ .  
 д)  $x = 0$ ;

**379.** Лежит ли точка  $M_1(i + j + k)$  в плоскости  $r(3i - 2j - k) = 0$ ?

**380.** Какие из следующих уравнений являются нормальными?

- a)  $ri - 1 = 0$ ; c)  $r(i + j) = 0$ ;  
 б)  $ri + 1 = 0$ ; d)  $r\left(\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j\right) + 2 = 0$ .

**381.** Указать особенности расположения следующих плоскостей:

- a)  $r(2i - 3j + k) = 0$ ; d)  $(r + j)k = 0$ ;  
 б)  $(r - i)i = 0$ ; e)  $ri = 0$ .  
 в)  $r(i - j) = 0$ ;

**382.** Найти угол между плоскостями

- a)  $2x - y - 2z + 3 = 0$  и  $3x + 2y + 6z + 1 = 0$ ;  
 б)  $2x + 5y - z - 1 = 0$  »  $3x - 2y - 4z = 0$ ;  
 в)  $x + y - 3z = 0$  »  $2x + 2y - 6z + 1 = 0$ ;  
 д)  $3x + y - 8z - 1 = 0$  » плоскость  $XY$ ;  
 e)  $x = y$  »  $y = z$ .

## § 2. Основные задачи на плоскость

**213.** Угол между двумя плоскостями. Если две плоскости заданы векторными уравнениями:

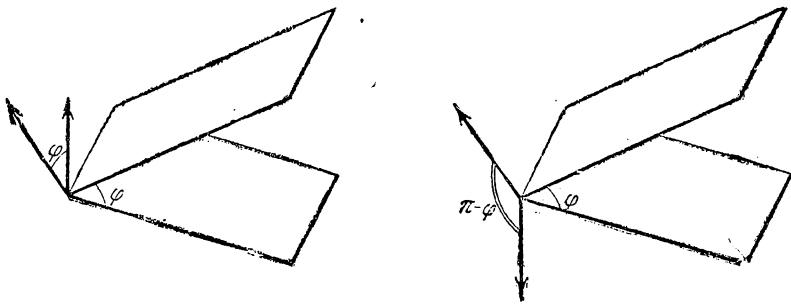
$$\left. \begin{aligned} rN_1 + D_1 &= 0, \\ rN_2 + D_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

то  $N_1$  есть вектор, нормальный к первой плоскости, а  $N_2$  — вектор, нормальный ко второй плоскости. Косинус угла между этими векто-

рами [этот угол равен углу между самими плоскостями или дополняет его до  $180^\circ$  (черт. 217)] определяется по формуле

$$\cos(N_1, N_2) = \frac{N_1 N_2}{N_1 N_2}.$$

Эта формула может дать для  $\cos(N_1, N_2)$  либо знак плюс, либо минус, причём это зависит не от данных плоскостей, а от того, как



Черт. 217. Угол между нормальными векторами равен углу между плоскостями или дополняет его до  $180^\circ$ .

поставлены стрелки на нормальных векторах. Чтобы устранить влияние этого случайного обстоятельства, напомним формулу для косинуса угла между двумя плоскостями в таком виде:

$$\cos \varphi = \left| \frac{N_1 N_2}{N_1 N_2} \right|, \quad (2)$$

т. е. условимся для  $\cos \varphi$  брать всегда положительное значение; таким образом мы всегда будем находить *острый* угол между плоскостями.

Если плоскости взаимно перпендикулярны, то и их нормальные векторы взаимно перпендикулярны; следовательно,

$$N_1 N_2 = 0. \quad (3)$$

Если плоскости взаимно параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны; условие коллинеарности двух векторов может быть записано либо в виде

$$N_1 = \lambda N_2, \quad (4)$$

либо в виде

$$N_1 \times N_2 = 0. \quad (5)$$

От полученных векторных формул легко перейти к координатным. Пусть уравнения двух плоскостей даны в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В таком случае векторы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}, \\ \mathbf{N}_2 &= A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

являются нормальными векторами соответственно к первой и второй плоскостям. Подставляя эти выражения для векторов  $\mathbf{N}_1$  и  $\mathbf{N}_2$  в формулу (2), получим:

$$\cos \varphi = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|. \quad (8)$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей, выражаемое формулой (3), в координатной форме запишется так:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (9)$$

Формула (4) [или (5)], выражающая условие параллельности двух плоскостей, в координатной форме запишется так:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (10)$$

Таким образом параллельность двух плоскостей аналитически характеризуется *двумя* условиями.

**214. Уравнение связки плоскостей.** Выведем уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M_1(\mathbf{r}_1)$ . Эта неопределённая задача является составной частью многих задач на нахождение плоскости.

Возьмём какую-нибудь плоскость, проходящую через  $M_1(\mathbf{r}_1)$  (черт. 218). Пусть  $\mathbf{N}$  — вектор, нормальный к этой плоскости. Возьмём *произвольную* (текущую) точку  $M(\mathbf{r})$ , лежащую в этой плоскости. Вектор  $\overline{M_1M} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$  лежит в этой плоскости \*) и, следовательно, перпендикулярен к  $\mathbf{N}$ . Запишем это:

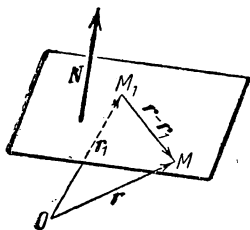
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \mathbf{N} = 0. \quad (11)$$

---

\*) Точнее говоря, параллелен этой плоскости, так как начало вектора можно перенести в произвольную точку.

Множество всех плоскостей, проходящих через некоторую точку  $M_1$ , называется *связкой плоскостей* \*), точка  $M_1$  называется *центром* связки. Уравнение (11) при *неопределённом* векторе  $N$  есть векторное уравнение *связки плоскостей* или, иначе говоря, уравнение *любой* плоскости, проходящей через точку  $M_1(r_1)$ . В этом уравнении  $r$  есть текущий радиус-вектор (т. е. радиус-вектор неопределённой точки плоскости),  $r_1$  — радиус-вектор какой-нибудь фиксированной точки плоскости и  $N$  — вектор, нормальный к плоскости (черт. 218). Если фиксировать вектор  $N$ , то уравнение (11) будет являться уравнением одной вполне определённой плоскости, проходящей через точку  $M_1(r_1)$  и перпендикулярной вектору  $N$ .

Дадим уравнение (11) в координатной форме. Для этого выразим входящие в него векторы через их координаты:



$$r = xi + yj + zk,$$

$$r_1 = x_1i + y_1j + z_1k,$$

$$N = Ai + Bj + Ck.$$

Тогда уравнение (11) примет вид:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \quad (12)$$

Черт. 218.  
( $r - r_1$ )  $N = 0$ .

где  $x$ ,  $y$  и  $z$  — текущие координаты,  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  — координаты некоторой фиксированной точки плоскости,  $A$ ,  $B$  и  $C$  — координаты вектора нормального к плоскости. Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  неопределённые, то уравнение (12) есть уравнение *любой* плоскости, проходящей через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ .

**215. Плоскость, проходящая через три данные точки.** Рассмотрим задачу: провести плоскость через три данные точки  $M_1(r_1)$ ,  $M_2(r_2)$  и  $M_3(r_3)$ .

Мы сумеем написать уравнение плоскости, если будем знать: 1) какую-нибудь точку этой плоскости, 2) нормальный вектор. Точка нам известна (любая из трёх данных), а нормальный вектор можно определить следующим образом. Векторы

$$\overline{M_1M_2} = r_2 - r_1,$$

$$\overline{M_1M_3} = r_3 - r_1$$

---

\*) Предостерегаем читателя от употребления в данном случае термина «пучок плоскостей». Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую; эта прямая называется осью пучка [черт. 220 (стр. 413)].

лежат в нашей плоскости. Следовательно, их векторное произведение

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$$

является вектором, нормальным к плоскости. Согласно формуле (11), уравнение искомой плоскости таково:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\} = 0.$$

Левая часть этого уравнения есть смешанное произведение; знак  $\times$  и фигурные скобки можно опустить

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно получить из других соображений. Возьмём в плоскости  $M_1M_2M_3$  произвольную точку  $M(\mathbf{r})$  и рассмотрим векторы

$$\overline{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1,$$

$$\overline{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

$$\overline{M_1M_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1.$$

При любом положении точки  $M$  в рассматриваемой плоскости эти три вектора компланарны, т. е. имеет место равенство (13), которое и является уравнением плоскости, проходящей через  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ .

В координатной форме уравнение (13) переписывается так:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

**216. Расстояние от точки до плоскости.** Пусть плоскость задана нормальным уравнением

$$\mathbf{r}\mathbf{n} - p = 0, \quad (15)$$

и требуется найти расстояние от точки  $M_1(\mathbf{r}_1)$  до этой плоскости. Опустим из  $M_1$  перпендикуляр на данную плоскость и обозначим через  $P$  точку, в которую упадёт этот перпендикуляр (черт. 219). Длину отрезка  $PM_1$  обозначим через  $d$ ; это и есть искомое расстояние.

Векторы  $\mathbf{n}$  и  $\overline{PM_1}$  коллинеарны, потому что оба они нормальны к плоскости (15). Следовательно,

$$\overline{PM_1} = \delta \mathbf{n}. \quad (*)$$

Так как  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, то множитель  $\delta$  по абсолютной величине равен длине вектора  $\overline{PM_1}$ , т. е.  $|\delta| = d$ . Ясно, что если точка  $M_1$  лежит от плоскости по противоположную сторону от начала (черт. 219, а),

то векторы  $\overline{PM_1}$  и  $\mathbf{n}$  направлены в одну сторону и

$$\delta = d_r \quad (**)$$

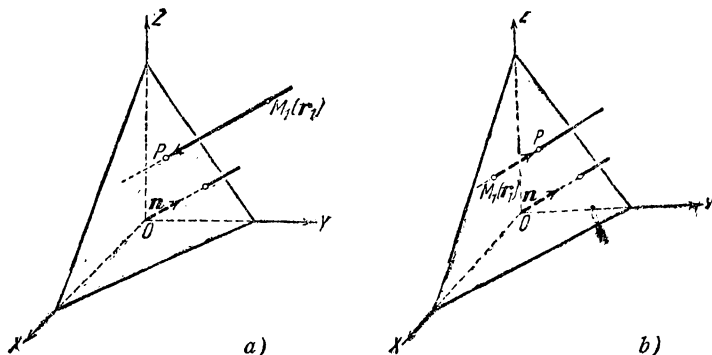
если же точка  $M_1$  лежит от плоскости по ту же сторону, что и начало, то векторы  $\overline{PM_1}$  и  $\mathbf{n}$  направлены в противоположные стороны и

$$\delta = -d. \quad (***)$$

Найдём радиус-вектор точки  $P$

$$\mathbf{r}_P = \overline{OP} = \overline{OM_1} + \overline{M_1P} = \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{n}.$$

Этот радиус-вектор должен удовлетворять уравнению плоскости, потому что точка  $P$  лежит в плоскости. Подставим найденное выра-



Черт. 219.  $\delta = \mathbf{r}_1 \mathbf{n} - p$ .

жение для  $\mathbf{r}_P$  в уравнение (15) вместо текущего радиуса-вектора  $\mathbf{r}$

$$(\mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{n}) \mathbf{n} - p = 0$$

или, раскрывая скобки,

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{n} - \delta - p = 0,$$

откуда

$$\delta = \mathbf{r}_1 \mathbf{n} - p. \quad (16)$$

Заменяя векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{n}$  их координатными выражениями

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$$

(здесь  $x_1, y_1, z_1$  — координаты точки  $M_1$ , а  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  — направляющие косинусы нормали к плоскости), получим для  $\delta$  выражение

$$\delta = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p. \quad (17)$$

Учитывая формулы (\*\*) и (\*\*\*), приходим к следующему правилу:

*Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, следует подставить в нормальное векторное уравнение плоскости вместо*



текущего радиуса-вектора радиус-вектор данной точки (или в нормальное координатное уравнение плоскости вместо текущих координат координаты данной точки). Левая часть уравнения при этом обратится в число, абсолютная величина которого покажет расстояние от точки до плоскости, а знак покажет, с какой стороны от плоскости расположена точка: при знаке минус она лежит с той же стороны от плоскости, что и начало, а при знаке плюс — с противоположной.

### Задачи

**383.** Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями

$$\text{a) } 19x - 4y + 8z + 21 = 0 \quad \text{и} \quad 19x - 4y + 8z + 42 = 0;$$

$$\text{b) } 3x + 6y - 2z - 7 = 0 \quad \gg \quad 3x + 6y - 2z + 14 = 0.$$

**384.** Провести плоскость, параллельную плоскости  $5x - 14y + 2z + 36 = 0$  и отстоящую от неё на расстоянии

$$\text{a) } 3; \quad \text{b) } 2,$$

причём начало координат должно находиться между данной плоскостью и искомой.

**385.** Какие углы образует плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

a) с осями координат;

b) с координатными плоскостями.

**386.** Показать, что шесть плоскостей  $2x + 10y - 11z + 6 = 0$ ,  $28x - 10y - 4z - 11 = 0$ ,  $8x + 40y - 44z - 15 = 0$ ,  $3x + 6y + 6z + 1 = 0$ ,  $14x - 5y - 2z + 3 = 0$  и  $x + 2y + 2z - 5 = 0$  образуют прямоугольный параллелепипед. Показать, что начало координат находится внутри этого параллелепипеда.

**387.** Показать, что плоскости

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$

$$Bx + Cy + Az + D_2 = 0,$$

$$Cx + Ay + Bz + D_3 = 0$$

могут быть приняты за боковые грани правильной треугольной пирамиды.

**388.** Через точку  $(3, 0, -5)$  провести плоскость, параллельную

a) плоскости  $2x - 8y + z - 2 = 0$ ;

b) плоскости  $XY$ ;

c) плоскости  $YZ$ ;

d) плоскости  $ZX$ .

**389.** Даны точки  $A(-5, 2, 0)$  и  $B(6, 0, -3)$ . Провести через точку  $B$  плоскость, перпендикулярную отрезку  $AB$ .

**390.** Провести плоскость

a) проходящую через точки  $(3, -5, 1)$  и  $(4, 1, 2)$  и перпендикулярную плоскости  $x - 8y + 3z - 1 = 0$ ;

b) проходящую через точки  $(1, -2, 6)$  и  $(3, -3, 7)$  и перпендикулярную плоскости  $4x - 2y + 2z - 11 = 0$ ;

c) проходящую через ось  $X$  и перпендикулярную плоскости  $5x + y - 2z + 3 = 0$ .

**391.** Через точку  $(2, 0, -8)$  провести плоскость, перпендикулярную двум данным плоскостям

$$\text{a) } x - 2y + 4z - 7 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 5y - 2z + 1 = 0;$$

$$\text{b) } y = 2z \quad \gg \quad \text{плоскости } YZ;$$

$$\text{c) } x + 2y - 5z - 3 = 0 \quad \gg \quad 2x + 4y - 10z + 1 = 0.$$

**392.** Провести плоскость, проходящую через ось  $X$  и образующую угол в  $30^\circ$  с плоскостью  $XY$ .

**393.** а) Через точку  $(5, -3, 1)$  провести плоскость, отсекающую на осях  $X$  и  $Y$  отрезки  $a=1$  и  $b=2$ .

б) Через точку  $(x_1, y_1, z_1)$  провести плоскость, отсекающую на осях  $X$  и  $Y$  отрезки  $a$  и  $b$ .

**394.** Через точки  $(1, 2, -1)$  и  $(-5, 2, 7)$  провести плоскость, параллельную

а) оси  $X$ ; б) оси  $Y$ .

**395.** Даны две параллельные плоскости .

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0,$$

$$Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

Провести две плоскости, параллельные им и делящие расстояние между ними на три равные части.

**396.** Зная, что отрезок, соединяющий точки  $A(3, 10, -5)$  и  $B(0, 12, z)$ , параллелен плоскости  $7x + 4y + z - 1 = 0$ , определить неизвестную координату точки  $B$ .

**397.** Из точки  $(7, -1, 5)$ , лежащей в плоскости  $x - 2y - 2z + 1 = 0$ , восставлен к этой плоскости перпендикуляр, длина которого равна 12. Найти конец этого перпендикуляра.

**398.** Даны три точки  $A(2, 1, 5)$ ,  $B(0, 4, -1)$  и  $C(3, 4, -7)$ . Через точку  $M_1(2, -6, 3)$  провести плоскость, параллельную плоскости треугольника  $ABC$ .

**399.** Даны три точки:  $A(-5, -11, 3)$ ,  $B(7, 10, -6)$  и  $C(1, -3, -2)$ . Провести плоскости, параллельные плоскости треугольника  $ABC$  и отстоящие от неё на расстоянии 2.

Имеющиеся три плоскости (плоскость треугольника и две найденные параллельные ей плоскости) делят пространство на четыре части. Указать, в какой из этих частей лежит начало координат.

**400.** Провести плоскость через точки

$$а) (1, 1, 8), \quad (2, -5, 0) \quad \text{и} \quad (4, 7, 1);$$

$$б) (3, 0, -2), \quad (5, -2, -1) \quad » \quad (9, -6, 1).$$

**401.** Можно ли провести плоскость через данные четыре точки  $A, B, C$  и  $D$ ? Если можно, то найти её уравнение

$$а) A(0, 2, -4), \quad B(5, 1, 2), \quad C(3, 8, 3), \quad D(2, -2, 1);$$

$$б) A(3, 1, 6), \quad B(4, 0, 8), \quad C(1, 5, 7), \quad D(0, 8, 10);$$

$$с) A(2, -4, 5), \quad B(3, -1, 4), \quad C(0, -10, 7), \quad D(0, 1, 6);$$

$$д) A(0, 2, 10), \quad B(-2, -1, 14), \quad C(10, 17, -10), \quad D(4, 8, 2).$$

**402.** Найти точку пересечения трёх плоскостей:

$$x - 2y + 8z + 9 = 0,$$

$$x - 4z - 13 = 0,$$

$$2x + y + 5z + 1 = 0.$$

**403.** Показать, что четыре плоскости

$$5x + 2y - z - 12 = 0,$$

$$2x - 7y + 3z + 22 = 0,$$

$$x - y + 10z + 12 = 0,$$

$$6x + 3y - 8z - 23 = 0$$

имеют общую точку.

**404.** В тетраэдре через середину каждого ребра проведена плоскость, перпендикулярная этому ребру. Показать, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке.

**405.** Показать, что в следующих случаях задача о нахождении точки пересечения трёх плоскостей неопределённа или невозможна:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 3x - 8y + 21z - 46 = 0, \\ 11x - 12y + 25z - 17 = 0, \\ 14x + y - 17z + 76 = 0; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0, \\ 3x + 5y - 4z + 8 = 0, \\ 4x - 2y + 2z + 1 = 0; \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 2x + y + 7z - 7 = 0, \\ x - 2z - 4 = 0, \\ x + y + 9z + 8 = 0; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x - y + 3z + 2 = 0, \\ x - y + 3z - 3 = 0, \\ 2x - 2y + 6z + 5 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Указать разницу между этими случаями.

**406.** Решить в общем виде задачу о нахождении точки пересечения трёх плоскостей. Исследовать задачу и классифицировать случаи невозможности и неопределённости.

**407.** Через точку  $A_1(i - j + 2k)$  провести плоскость, параллельную векторам  $a = i - 3k$  и  $b = 2i + j - 4k$ .

**408.** Параллелепипед построен на трёх радиусах-векторах  $\overline{OA} = r_1$ ,  $\overline{OB} = r_2$  и  $\overline{OC} = r_3$ . Составить уравнение плоскости, проведённой через середину ребра  $OC$  параллельно грани  $OAB$ . Показать (аналитически), что эта плоскость делит пополам диагональ параллелепипеда.

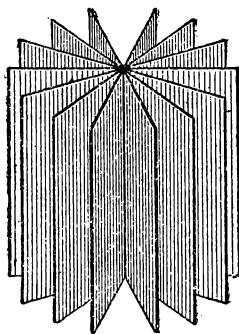
### § 3. Аналитическое задание прямой в пространстве

**217. Два линейных уравнения.** Мы уже знаем, что линия в пространстве задаётся двумя уравнениями, т. е. определяется как пересечение двух поверхностей. Так как прямую можно рассматривать как пересечение двух плоскостей, то её можно задавать двумя линейными уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Итак, уравнения (1) суть уравнения прямой. Это значит, что координаты всякой точки этой прямой удовлетворяют одновременно обоим уравнениям (1). Координаты любой точки, не лежащей на этой прямой, не могут удовлетворять одновременно обоим уравнениям (1), хотя могут удовлетворять одному из них.

Мы определяем прямую как пересечение двух плоскостей. Через данную прямую можно провести бесконечное множество плоскостей. Множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую, называется *пучком плоскостей* (черт. 220); прямая, через которую проходят все плоскости пучка, называется *осью пучка*. Любые две



Черт. 220. Пучок плоскостей.

плоскости пучка пересекаются по одной и той же прямой. Итак, оказывается, что если дана прямая в пространстве, то в нахождении уравнений этой прямой [уравнений (1)] есть известный произвол. Можно взять уравнения

$$\left. \begin{aligned} A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 &= 0, \\ A'_2x + B'_2y + C'_2z + D'_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и, если все четыре плоскости, изображающие каждое из уравнений (1) и (2) отдельно взятое, принадлежат одному пучку, то уравнения (2) суть уравнения той же прямой, что и уравнения (1).

Таким образом, возникает следующий вопрос: при каком условии две пары линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 &= 0, \\ A'_2x + B'_2y + C'_2z + D'_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

изображаются одной и той же прямой?

Такой же вопрос относится не только к прямым, но и ко всяким линиям. Пусть дана пара уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и другая пара уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F'(x, y, z) &= 0, \\ \Phi'(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Может случиться, что все четыре поверхности, изображающие эти уравнения,—разные, но поверхности (3) пересекаются по той же линии, что и поверхности (4); в этом случае система (3) изображается той же линией, что и система (4).

При каком условии две пары уравнений (3) и (4) изображаются одной и той же линией?

Оба эти вопроса будут разрешены в следующем п.

**218. Следствия из данной системы уравнений.** Пусть дана пара уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Каждое из этих уравнений, рассматриваемое в отдельности, есть уравнение некоторой поверхности; будем называть эти поверхности соответственно «поверхность  $F$ » и «поверхность  $\Phi$ ».

Рассмотрим теперь уравнение

$$\Psi(x, y, z) = 0, \quad (5)$$

которое является следствием из уравнений (3), т. е. получено из них путём каких-либо преобразований. Спрашивается, как расположена поверхность  $\Psi$  относительно поверхностей  $F$  и  $\Phi$ ?

Другими словами: из того аналитического факта, что уравнение (5) есть следствие из уравнений (3), какие вытекают геометрические свойства поверхности  $\Psi$  относительно поверхности  $F$  и  $\Phi$ ?

Если уравнение (5) есть следствие уравнений (3), то каждая тройка чисел  $(x, y, z)$ , удовлетворяющая системе уравнений (3), удовлетворяет и уравнению (5).

Это значит, что каждая точка, принадлежащая линии (3), принадлежит также поверхности (5). Иначе говоря, поверхность (5) содержит все точки линии (3), т. е. поверхность (5) проходит через линию (3).

Итак, если даны два уравнения поверхностей, то всякое третье уравнение, являющееся их следствием, есть уравнение некоторой поверхности, проходящей через линию пересечения данных поверхностей.

Пример 1. Пусть даны два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 169, \\ z &= 12. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

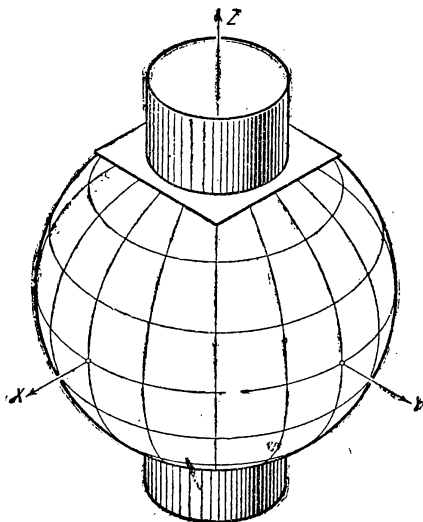
Первое уравнение (\*) есть уравнение сферы радиуса 13 с центром в начале, а второе — уравнение плоскости, параллельной плоскости  $XU$  и отсекающей на оси  $Z$  отрезок, равный 12. Эти две поверхности в пересечении дают окружность радиуса 5 (черт. 221). Значит, система уравнений (\*) изображается окружностью.

Возводя второе уравнение (\*) в квадрат и вычитая из первого (т. е. исключая  $z$ ), мы получим уравнение

$$x^2 + y^2 = 25, \quad (**)$$

являющееся следствием уравнений (\*).

Уравнение (\*\*) есть уравнение цилиндрической поверхности, проходящей, как легко убедиться, через нашу окружность.



Черт. 221.  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 169, \\ z = 12, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

Пример 2. Даны два уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} x=0, \\ y=0. \end{array} \right\} \quad (***)$$

Получим из них какое-нибудь следствие, например, сложим их

$$x+y=0. \quad (\dagger)$$

Уравнение  $x=0$  есть уравнение плоскости  $YZ$ , а  $y=0$  — уравнение плоскости  $ZX$ . Эти две плоскости пересекаются по оси  $Z$ . Уравнение  $(\dagger)$  есть уравнение плоскости, проходящей через ось  $Z$  (черт. 222).

Из всевозможных следствий, которые можно вывести из данной системы уравнений (3), обратим особое внимание на следствия, не содержащие одной координаты, т. е. на следствия, получаемые путём исключения из данных уравнений одной координаты.

Пусть, например, мы, исключив из уравнений (3)  $z$ , получили

$$\phi(x, y) = 0. \quad (6)$$

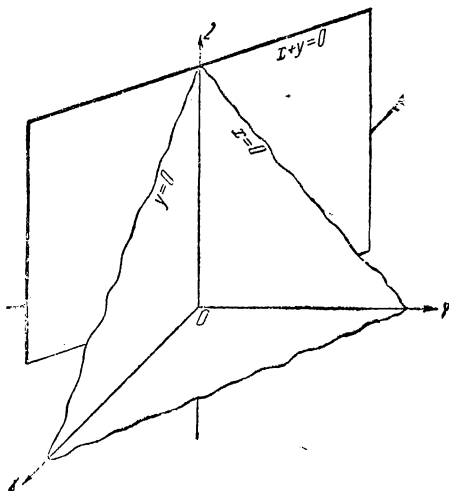
Во-первых, уравнение (6), как следствие из уравнений (3), изображается поверхностью, проходящей через линию (3). Во-вторых, уравнение (6), как не содержащее  $z$ , есть уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси  $Z$ . Следовательно, *уравнение (6) есть уравнение цилиндрической поверхности, проектирующей линию (3) на плоскость  $XY$* . Если же рассматривать уравнение (6) не в пространстве, а в плоскости  $XY$ , то оно есть уравнение линии, по которой плоскость  $XY$  сечёт эту цилиндрическую поверхность. *Другими словами, уравнение (6), рассматриваемое в плоскости  $XY$ , есть уравнение проекции линии (3) на плоскость  $XY$ .*

Аналогичные замечания можно сделать о следствиях из системы (3), не содержащих  $x$  или  $y$ .

Пример 3. Дана линия:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ 3y + 4z = 0. \end{array} \right\} \quad (\dagger\dagger)$$

Определить её проекции на координатные плоскости.



Черт. 222.  $\left\{ \begin{array}{l} x=0, \\ y=0, \\ x+y=0. \end{array} \right.$

Чтобы найти проекцию линии  $(\dagger \dagger)$  на плоскость  $XU$ , надо получить из системы  $(\dagger \dagger)$  следствие, не содержащее  $z$ , т. е. исключить  $z$  из уравнений  $(\dagger \dagger)$ . Пропедевывая это, мы получим уравнение

$$16x^2 + 25y^2 = 400,$$

которому можно придать более знакомый вид, разделив его на 400:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad (\dagger \dagger \dagger)$$

Уравнение  $(\dagger \dagger \dagger)$ , если его рассматривать в пространстве, есть уравнение эллиптического цилиндра; это — тот цилиндр, который проектирует линию  $(\dagger \dagger)$  на плоскость  $XU$ . Если же рассматривать уравнение  $(\dagger \dagger \dagger)$  на плоскости  $XU$ , то оно есть уравнение эллипса. Значит проекция линии  $(\dagger \dagger)$  на плоскость  $XU$  есть эллипс.

Чтобы найти проекцию линии  $(\dagger \dagger)$  на плоскость  $YZ$ , надо получить из системы  $(\dagger \dagger)$  следствие, не содержащее  $x$ . Таким следствием является само второе уравнение  $(\dagger \dagger)$ :

$$3y + 4z = 0.$$

Это есть уравнение плоскости; следовательно, цилиндрическая поверхность, проектирующая линию  $(\dagger \dagger)$  на плоскость  $YZ$ , превращается в плоскость. Проекция линии  $(\dagger \dagger)$  на плоскость  $YZ$  есть прямая и уравнение этой прямой в плоскости  $YZ$  есть  $3y + 4z = 0$ .

Подчеркиваем это явление. Когда мы хотим «исключить из системы уравнений  $x$ », т. е. «найти следствие из данной системы, не содержащее  $x$ », то таким следствием может оказаться одно из данных уравнений (если оно уже не содержит  $x$ ). Наконец, исключая из уравнений  $(\dagger \dagger)$   $y$ , получим

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1. \quad (\S)$$

Следовательно, проекция линии  $(\dagger \dagger)$  на плоскость  $ZX$  есть эллипс.

В настоящем примере мы, кроме уравнений  $(\dagger \dagger)$ , получили ещё два уравнения, являющиеся следствием данных уравнений. Теперь мы имеем всего четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25, \\ 3y + 4z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\dagger \dagger)$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad (\dagger \dagger \dagger)$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1. \quad (\S)$$

Каждое из этих уравнений есть уравнение некоторой поверхности, проходящей через линию пересечения первых двух поверхностей. Следовательно, эта линия может быть задана любой парой из этих уравнений.

Примечание. Чтобы не отвлекать внимания читателя от основной идеи этого п., мы обошли молчанием некоторую тонкость, которая заставляет внести оговорку в высказанные выше положения.

Когда мы имеем пару уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

то переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$  могут иметь ограниченную область изменения.

Если мы исключим из уравнений (3), например  $z$ , то в полученном уравнении

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (6)$$

переменные  $x$  и  $y$  могут иметь большую область изменения\*). В этом случае не вполне точно говорить, что уравнение  $\varphi(x, y) = 0$ , рассматриваемое в плоскости  $XU$ , есть уравнение проекции линии (3) на плоскость  $XU$ . Уравнение (3) в плоскости  $XU$  будет изображаться некоторой линией; проекция линии (3) на плоскость  $XU$  будет частью этой линии [ $\varphi(x, y) = 0$ ].

Такой случай мы имеем в примере 3 (стр. 416). Там было сказано, что проекция линии ( $\dagger\dagger$ ) на плоскость  $YZ$  есть прямая

$$3y + 4z = 0,$$

но геометрически очевидно, что проекция линии ( $\dagger\dagger$ ) на плоскость  $YZ$  есть не вся прямая, а лишь её отрезок. Аналитическая характеристика этого отрезка получится, если к уравнению прямой добавить ограничения, вытекающие из уравнений ( $\dagger\dagger$ ), т. е. написать

$$\left. \begin{aligned} 3y + 4z &= 0, \\ y^2 + z^2 &\leq 25 \end{aligned} \right\}$$

(черт. 223).

Далее, надо иметь в виду следующую возможность. Пусть из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

получены два следствия:

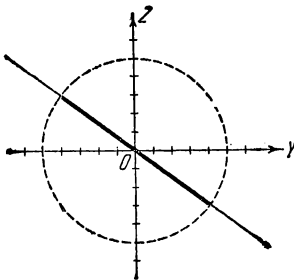
$$\left. \begin{aligned} F'(x, y, z) &= 0, \\ \Phi'(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Как было выяснено, обе поверхности (4) проходят через линию пересечения поверхностей (3), но это ещё не значит, что линия пересечения поверхностей (4) совпадает с линией пересечения поверхностей (3), так как поверхности (4) могут пересекаться ещё и в других точках, кроме точек линии (3). В этом случае линия (3) является частью линии (4). Возьмём, например, уравнения (\*) (стр. 415):

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 169, \\ z &= 12, \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

и заменим их другой парой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 169, \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned} \right\} \quad (§§)$$



Черт. 223.

[мы знаем, что второе уравнение (§§) есть следствие уравнений (\*)]. Две поверхности (\*) (сфера и плоскость) пересекаются по окружности, а две поверхности (§§) (сфера и круговой цилиндр) пересекаются, кроме этой окружности, ещё по одной окружности (черт. 221).

\*) Обратного явления [т. е. чтобы  $x$  и  $y$  в уравнении (6) имели меньшую область изменения, чем в уравнениях (3)] не может быть, потому что уравнение (6) есть следствие уравнений (3), и, значит, всякая пара  $(x, y)$ , которая удовлетворяет уравнениям (3) *может быть* подставлена в уравнение (6) и будет удовлетворять ему.



**219. Проекция прямой на координатные плоскости.** Пусть даны уравнения прямой:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Систему уравнений (1) можно заменить другой системой, изображающей той же прямой; для этого надо уравнения (1) заменить какими-нибудь их следствиями. Условимся при выводе следствий из уравнений (1) ограничиваться только линейным комбинированием этих уравнений, т. е. умножать их на какие-либо константы и складывать, тогда всякое следствие из уравнений (1) будет уравнением плоскости\*), проходящей через прямую (1). Любые две из этих плоскостей определяют своим пересечением ту же прямую, что и плоскости (1). Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы определить данную прямую наиболее простыми плоскостями. Проще всего взять плоскости, параллельные координатным осям, т. е. плоскости, проектирующие данную прямую на координатные плоскости; уравнения таких плоскостей не содержат одной координаты и, следовательно, получаются исключением соответствующей координаты из уравнений (1). Таким путём мы можем получить три уравнения, но для определения прямой достаточно двух из них.

**Пример.** Дана прямая:

$$\left. \begin{aligned} 6x + 4y + z - 26 &= 0, \\ 2x + 4y - 3z - 2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Исключая из этих уравнений поочерёдно  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} 4y - 5z + 10 &= 0, \\ z + x - 6 &= 0, \\ 5x + 4y - 20 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Все три плоскости (\*\*) проходят через прямую (\*). Рассмотрим подробнее одно из уравнений (\*\*), например, третье. Это есть уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной оси  $Z$ . Другими словами, это есть *уравнение плоскости, проектирующей данную прямую на плоскость  $XY$* . Если же рассматривать третье уравнение (\*\*) в плоскости  $XY$ , то оно даёт нам проекцию прямой (\*) на плоскость  $XY$ . Таким образом, по уравнениям (\*\*) можно построить проекции данной прямой на все координатные плоскости, что и сделано на черт. 224.

Так как для задания прямой достаточно двух из уравнений (\*\*), то для определённости *условимся раз навсегда \*\*) задавать прямую*

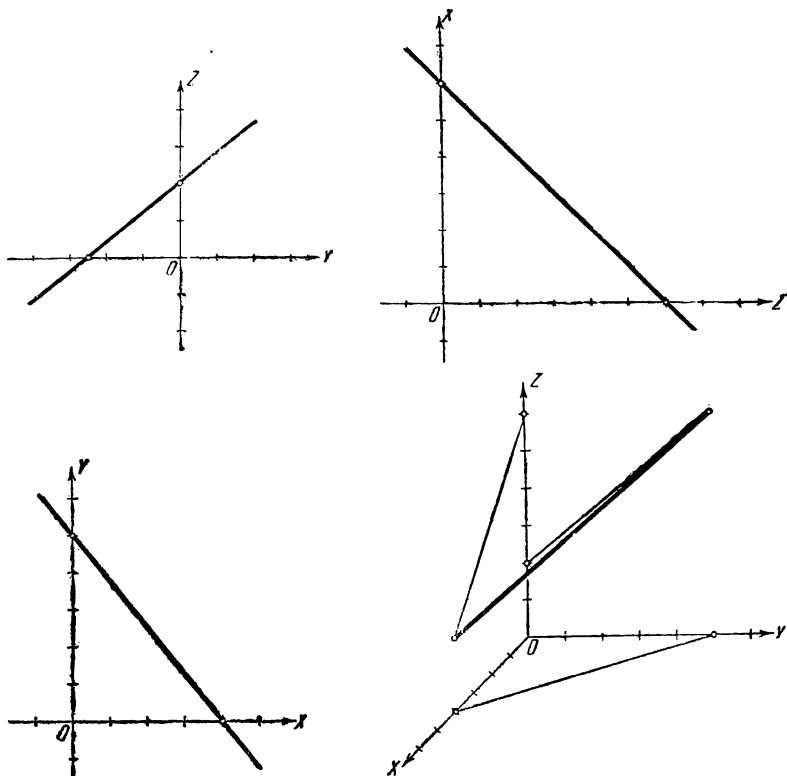
\*) Так как оно будет первой степени.

\*\*) Кроме исключительных случаев, когда это невозможно. О них будет речь ниже.

её проекциями на плоскости  $YZ$  и  $ZX$ . Таким образом мы возьмём первые два уравнения (\*\*). При этом условимся выражать из этих уравнений  $x$  и  $y$  в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= -z + 6, \\ y &= \frac{5}{4}z - \frac{5}{2} \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

Итак, уравнения (\*) мы заменили уравнениями (\*\*\*), выражающими ту же прямую. Действуя аналогичным образом, мы



Черт. 224. Прямая в пространстве и её проекции на координатные плоскости.

будем заменять уравнения (1) (стр. 413) уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

т. е. задавать всякую прямую, как пересечение плоскостей, проектирующих её на плоскости  $ZX$  и  $YZ$ .

Уравнения (7) называются «уравнениями прямой в проекциях на координатные плоскости».

Параметры  $p$  и  $q$  имеют очень простое геометрическое значение. Если мы положим в уравнениях (7)  $z=0$  (а это значит, что мы находим на данной прямой точку её пересечения с плоскостью  $XU$ ), то мы получим  $x=p$ ,  $y=q$ . Следовательно, прямая (7) пересекается с плоскостью  $XU$  в точке

$$(p, q, 0).$$

Точка пересечения прямой с плоскостью называется *следом* этой прямой на этой плоскости. Итак, параметры  $p$  и  $q$ , фигурирующие в уравнениях (7), суть координаты следа данной прямой на плоскости  $XU$ .

Укажем также геометрический смысл параметров  $a$  и  $b$ . Рассматривая первое уравнение (7) в плоскости  $ZX$ , мы видим, что  $a$  есть угловой коэффициент (в том смысле, в каком мы употребляли этот термин в аналитической геометрии на плоскости), т. е.  $a$  есть тангенс угла между проекцией нашей прямой на плоскость  $ZX$  и осью  $Z$ . Аналогично,  $b$  есть тангенс угла между проекцией нашей прямой на плоскость  $YZ$  и осью  $Z$ .

Отметим, что в уравнениях (7) фигурируют четыре параметра. Значит, *множество всех прямых в пространстве зависит от четырёх параметров, т. е. в пространстве существует  $\infty^4$  прямых*. С этим фактом мы неоднократно будем сталкиваться в дальнейшем.

В заключение поставим вопрос, всегда ли уравнения прямой могут быть приведены к виду (7) (т. е. нет ли здесь каких-нибудь исключительных случаев)? Геометрически этот вопрос формулируется так: всегда ли можно определить прямую её проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости  $ZX$  и  $YZ$ ? Непосредственное геометрическое размышление приводит нас к тому, что этого нельзя сделать, если прямая параллельна плоскости  $XU$ . В самом деле, если прямая параллельна плоскости  $XU$ , то через неё можно провести плоскость, перпендикулярную оси  $Z$ . Эта плоскость проектирует данную прямую на плоскости  $ZX$  и  $YZ$ . Если данную прямую как угодно перемещать в этой плоскости (перпендикулярной оси  $Z$ ), то это не отразится на её проекциях на плоскости  $ZX$  и  $YZ$ ; следовательно, эти проекции не определяют прямой.

Рассмотрим этот вопрос с аналитической точки зрения. Если прямая

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

параллельна плоскости  $XU$ , то при исключении из системы (1)  $x$  или  $y$  получится одно и то же уравнение:  $z = \text{const}$ . Это значит, что при исключении  $x$  должно автоматически исключаться и  $y$ . Это будет иметь место, если

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (8)$$

Читатель может проверить всё это для прямой:

$$2x + 3y - z + 4 = 0,$$

$$4x + 6y + 3z - 1 = 0.$$

Уравнения этой прямой нельзя привести к виду (7).

В частности, может оказаться, что прямая, параллельная плоскости  $XU$ , параллельна, кроме того, одной из осей  $X$  или  $Y$ . Если прямая параллельна, например, оси  $X$ , то всякая плоскость, проходящая через неё, параллельна оси  $X$  и, следовательно, не содержит  $x$  в своём уравнении.

Например, прямая

$$3y + 2z - 9 = 0,$$

$$5y - 4z + 7 = 0$$

параллельна оси  $X$ . Её уравнения нельзя представить в виде (7), простейший вид для уравнения этой прямой:

$$y = 1,$$

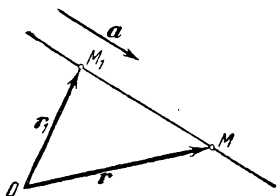
$$z = 3.$$

Здесь прямая задаётся как пересечение двух плоскостей, одна из которых перпендикулярна оси  $Y$ , а другая оси  $Z$ .

Проекция этой прямой на плоскость  $YZ$  есть точка  $(0, 1, 3)$ .

Итак, уравнения прямой нельзя представить в виде (7), если эта прямая параллельна плоскости  $XU$ . Во всех остальных случаях (рекомендуем читателю самому продумать это) уравнения прямой можно представить в виде (7).

**220. Векторное уравнение прямой. Симметричные уравнения прямой.** Зададим прямую следующим образом: она проходит через данную точку  $M_1(\mathbf{r}_1)$  (т. е. проходит через конец данного радиус-вектора  $\mathbf{r}_1$ ) и она параллельна данному вектору  $\mathbf{a}$ ; вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой. Очевидно, эти данные вполне определяют прямую. Выведем векторное уравнение этой прямой.



Черт. 225.  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{a}$ .

Возьмём на данной прямой текущую точку  $M(\mathbf{r})$  (черт. 225). При движении точки  $M$  по прямой вектор  $\overline{M_1M}$  как вектор, лежащий на прямой, всё время коллинеарен вектору  $\mathbf{a}$ . Заметим, что  $\overline{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ , и запишем условие коллинеарности векторов  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{a}$ :

Возьмём на данной прямой текущую точку  $M(\mathbf{r})$  (черт. 225). При движении точки  $M$  по прямой вектор  $\overline{M_1M}$  как вектор, лежащий на прямой, всё время коллинеарен

вектору  $\mathbf{a}$ . Заметим, что  $\overline{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ , и запишем условие коллинеарности векторов  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{a}. \quad (9)$$

Здесь  $\lambda$  — некоторый скаляр. Заметим, что  $\lambda$  — переменная, т. е. каждой точке данной прямой соответствует своё значение  $\lambda$ . В самом

деле, абсолютная величина  $\lambda$  показывает отношение длины вектора  $\overline{M_1M}$  к длине вектора  $\mathbf{a}$ , а знак  $\lambda$  показывает, направлены ли векторы  $\overline{M_1M}$  и  $\mathbf{a}$  в одну сторону или в противоположные. При  $\lambda=0$  уравнение (9) даёт  $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ , т. е. точке  $M_1$  соответствует значение  $\lambda=0$ . Точкам прямой, лежащим по одну сторону от  $M_1$ , соответствуют положительные значения  $\lambda$ , а по другую — отрицательные.

Ясно, что уравнение (9) есть *векторное параметрическое уравнение прямой*: оно выражает радиус-вектор переменной точки прямой (текущий радиус-вектор) в функции переменного параметра  $\lambda$ . Можно из уравнений (9) выразить  $\mathbf{r}$  явно

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a}. \quad (10)$$

Отметим особо случай, когда направляющий вектор — единичный; обозначим его  $\mathbf{a}^0$ . Уравнение (9) напишется так же, как прежде:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{a}^0, \quad (9')$$

но в этом случае можно сказать, что абсолютная величина  $\lambda$  есть длина вектора  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ .

От уравнения (9) легко перейти к координатным уравнениям прямой. Обозначая координаты данного вектора  $\mathbf{a}$  через  $l$ ,  $m$  и  $n$ :

$$\mathbf{a} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k},$$

и заменяя, как обычно, радиусы-векторы  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_1$  и вектор  $\mathbf{a}$  их координатными выражениями, мы получим вместо уравнения (9) три координатных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x - x_1 &= \lambda l, \\ y - y_1 &= \lambda m, \\ z - z_1 &= \lambda n. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Уравнения (11) суть координатные параметрические уравнения прямой: они выражают текущие координаты в функции переменного параметра  $\lambda$ . Здесь  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  — координаты фиксированной точки  $M_1$ , через которую данная прямая проходит, а  $l$ ,  $m$  и  $n$  — координаты направляющего вектора (т. е. какого-нибудь вектора, параллельного данной прямой).

Чтобы получить обыкновенные координатные уравнения данной прямой, исключим из уравнений (11) параметр  $\lambda$ . Определяя  $\lambda$  из каждого из уравнений (11) и приравнявая найденные выражения, получим

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \quad (12)$$

Уравнения (12) (здесь — два независимые уравнения) называются *симметричными уравнениями прямой*. Здесь  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  — координаты некоторой фиксированной точки прямой, а  $l$ ,  $m$  и  $n$  — координаты направляющего вектора прямой.

Уравнения (12) приобретут особенно наглядный смысл, если обратить внимание на то, что числители  $x - x_1$ ,  $y - y_1$  и  $z - z_1$  суть координаты вектора  $\overline{M_1M}$ , лежащего на прямой, а знаменатели  $l$ ,  $m$  и  $n$  суть координаты направляющего вектора данной прямой. Уравнения же (12), которые выражают тот факт, что координаты одного вектора пропорциональны координатам другого вектора, суть условия параллельности этих двух векторов.

Если за направляющий вектор прямой принять единичный вектор [уравнение (9')], то, переходя к координатной форме, вспомним, что координаты единичного вектора суть его направляющие косинусы:

$$\mathbf{a}^0 = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}.$$

Преобразуя уравнение (9') так же, как выше было преобразовано уравнение (9), получим:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}. \quad (12')$$

Когда мы составляли векторное уравнение прямой, нам надо было записать, что вектор  $\overline{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ , лежащий на прямой, и направляющий вектор  $\mathbf{a}$  коллинеарны. Условие коллинеарности можно было написать и в другой форме: приравнять нулю векторное произведение этих векторов

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{a} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) есть векторное уравнение прямой, которое, в отличие от уравнения (9), не является параметрическим. Уравнение (13) можно было получить непосредственно из уравнения (9), умножая его векторно на  $\mathbf{a}$ .

Если требуется уравнение (13) перевести в координатную форму, то выражаем векторное произведение в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки и вспомним, что вектор равен нулю тогда и только тогда, когда все его координаты равны нулю:

$$n(y - y_1) = m(z - z_1),$$

$$l(z - z_1) = n(x - x_1),$$

$$m(x - x_1) = l(y - y_1).$$

Деля первое уравнение на  $nm$ , второе — на  $ln$  и третье — на  $ml$ , мы приведём их к виду (12). Достаточно, впрочем, взять какие-либо два из полученных уравнений, так как третье есть их следствие.

**221. Симметричные уравнения прямой, параллельной координатной плоскости.** Зная какую-нибудь точку на прямой и направление этой прямой, читатель легко составит уравнение этой прямой. Некоторые затруднения могут возникнуть лишь в том случае, когда прямая параллельна какой-нибудь координатной плоскости.

Пусть, например, прямая проходит через точку  $(2, 4, 1)$  и имеет направляющий вектор  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ , т. е.

$$l = 3, \quad m = 4, \quad n = 0.$$

Эта прямая, очевидно, перпендикулярна к оси  $Z$ , т. е. параллельна плоскости  $XY$ . Подстановка данных чисел в уравнение (12) даёт

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{0}. \quad (\dagger)$$

Так как делить на нуль нельзя, то нельзя пользоваться равенством, где встречается нуль в знаменателе. Поэтому напомним уравнения прямой  $(\dagger)$  в другом виде.

Очевидно,

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4}$$

есть уравнение плоскости, проектирующей прямую  $(\dagger)$  на плоскость  $XY$ . Далее, так как наша прямая параллельна плоскости  $XY$ , то ясно, что у всех точек этой прямой координата  $z$  одна и та же:

$$z = \text{const.}$$

Зная, что прямая проходит через точку  $(2, 4, 1)$ , мы определяем значение этой константы:

$$z = 1.$$

Следовательно, уравнения данной прямой могут быть записаны так:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4}; \quad z = 1. \quad (\dagger \dagger)$$

Однако уравнениями  $(\dagger)$  тоже можно пользоваться, если истолковать их следующим образом. При движении точки  $M(x, y, z)$  по нашей прямой выражения

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4}$$

суть переменные величины, равные между собой и всегда конечные. Если мы придадим  $z$  значение, отличное от 1:

$$z \neq 1,$$

то выражение  $\frac{z-1}{0}$  будет бесконечно большим и, следовательно, равенства  $(\dagger)$  не будут удовлетворены. Если же положить

$$z = 1,$$

то выражение  $\frac{z-1}{0} = \frac{0}{0}$  будет неопределённым, т. е. ему можно приписать любое числовое значение, и, следовательно, равенства (†) удовлетворяются. Значит, единственное значение  $z$ , при котором равенства (†) могут удовлетворяться, это  $z=1$ . Таким образом, уравнения (†) эквивалентны уравнениям (††).

Несмотря на нежелательность употребления нуля в знаменателе и необходимость особых оговорок по этому поводу, уравнения типа (†) весьма употребительны. Причина этого заключается в том, что уравнения прямой часто пишут не для того, чтобы производить над ними алгебраические выкладки и находить значения  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а для того, чтобы описать, о какой прямой идёт речь, а в таком случае уравнения типа (†) удобны тем, что они сразу показывают направляющий вектор прямой. С этой точки зрения уравнения

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{0}$$

вполне эквивалентны такой словесной записи:

*прямая, проходящая через точку (2, 4, 1) и имеющая направляющий вектор с координатами 3, 4 и 0.*

С этой точки зрения знаменатель, равный нулю, ничем существенным не выделяется из других знаменателей.

Однако, если уж мы пользуемся уравнениями (†), то будем пользоваться ими так же, как и всякими другими уравнениями, т. е. производить над ними алгебраические операции. Если в нужных случаях пользоваться вышеприведённым рассуждением (о том, что  $\frac{z-1}{0}$  должно быть неопределённым), то мы никогда не придём к ошибочным результатам.

**Пример.** Написать в симметричном виде уравнения прямой, параллельной оси  $Z$  и проходящей через точку (1, 1, 0).

Направляющие косинусы данной прямой суть 0, 0 и 1. Симметричные уравнения примут вид:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}. \quad (\dagger\dagger\dagger)$$

Эти уравнения будут удовлетворяться, если выражения  $\frac{x-1}{0}$  и  $\frac{y-1}{0}$  будут неопределёнными, т. е. при

$$\left. \begin{aligned} x &= 1, \\ y &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (\S)$$

при этом  $z$ , как ясно из уравнений (†††), может быть каким угодно. Таким образом уравнения (†††) эквивалентны уравнениям (§). Для всех точек данной прямой  $x=1$  и  $y=1$ .



Легко убедиться, что в случае наличия нулей в знаменателе можно, как и обычно, перемножать накрест члены пропорции, и это приводит к правильным результатам.

Прямая  $(\dagger)$  была параллельна одной координатной плоскости, а прямая  $(\dagger \dagger \dagger)$  параллельна двум координатным плоскостям:  $YZ$  и  $ZX$ .

*В симметричной форме можно представить уравнения всякой прямой.*

## 222. Приведение уравнений прямой к симметричной форме.

Покажем на примере, как уравнения прямой приводятся к симметричной форме. Пусть даны уравнения прямой:

$$\left. \begin{aligned} 16x - 2y - z + 5 &= 0, \\ 20x + y - 3z + 15 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (§§)$$

и требуется составить симметричные уравнения этой прямой.

Чтобы написать симметричные уравнения прямой, надо знать:  
1) какую-нибудь точку, через которую эта прямая проходит,  
2) направляющий вектор этой прямой. Чтобы узнать точку, придаём в уравнениях (§§) одной из координат произвольное значение, например, полагаем  $x=0$  и находим из них две другие координаты:  $y=0$ ,  $z=5$ . Следовательно, данная прямая проходит через точку  $(0, 0, 5)$ .

Направляющий вектор легко узнать, если помнить, что в уравнении плоскости коэффициенты при текущих координатах суть координаты вектора, нормального к этой плоскости. Следовательно, векторы

$$\mathbf{N}_1 = 16\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{N}_2 = 20\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

суть векторы, перпендикулярные соответственно к первой и второй плоскостям (§§). Ясно, что прямая пересечения плоскостей (§§) перпендикулярна к обоим этим векторам, т. е. параллельна их векторному произведению  $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ . Следовательно, вектор  $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$  может служить направляющим вектором нашей прямой.

Вычисляем  $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 16 & -2 & -1 \\ 20 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} + 28\mathbf{j} + 56\mathbf{k} = 7(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}).$$

Отбрасывая множитель 7 (так как длина направляющего вектора не играет роли), напомним уравнения прямой в виде

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{8}.$$

## Задачи

409. Дана прямая

$$2x - y + z - 7 = 0,$$

$$3x - 2y - z - 1 = 0.$$

Какие из следующих точек лежат на ней:  $A(6, 1, -5)$ ,  $B(7, 9, 2)$ ,  $C(5, 2, -1)$ ,  $D(1, -1, 4)$ ,  $E(4, -2, 15)$ ,  $F(-2, -6, 5)$ ?

410. Показать, что каждая из двух пар уравнений

$$5x + 17y - 5z + 10 = 0, \quad x - 2y + 8z - 1 = 0,$$

$$4x + y + 17z + 1 = 0, \quad 2x + 5y + z + 3 = 0$$

изображается одной и той же прямой.

411. Найти проекции на координатные плоскости линии

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25, \\ y^2 &= 4x. \end{aligned} \right\}^*)$$

412. Найти проекции винтовой линии

$$x = R \cos t,$$

$$y = R \sin t,$$

$$z = \lambda t$$

на координатные плоскости.

413. Найти проекции прямой

$$6x - 6y - z + 16 = 0,$$

$$2x + 5y + 2z + 3 = 0$$

на координатные плоскости.

414. Найти проекции прямой

$$x = 3 - \lambda,$$

$$y = -1 + 2\lambda,$$

$$z = 5 + 8\lambda$$

на координатные плоскости.

415. Зная проекции прямой на плоскости  $YZ$  и  $ZX$ , найти её проекцию на плоскость  $XY$ :

	Проекция на плоскость $YZ$	Проекция на плоскость $ZX$
a)	$2y - z + 1 = 0$	$3z + 5x - 2 = 0;$
b)	$y = 1$	$x = -3;$
c)	$y = 3$	$2z - 5x + 4 = 0;$
d)	$z = 2$	$z = 2$

416. Проекция прямой на плоскость  $ZX$  образует с осью  $Z$  угол в  $30^\circ$ ; проекция той же прямой на плоскость  $YZ$  образует с осью  $Z$  угол в  $45^\circ$ . Какой угол образует с осью  $X$  проекция этой прямой на плоскость  $XY$ ?

417. Проекция прямой на плоскость  $ZX$  образует с осью  $Z$  угол, тангенс которого равен  $\frac{3}{2}$ ; проекция той же прямой на плоскость  $YZ$

\*) Эта линия изображена на черт. 207 (стр. 380).

образует с осью  $Z$  угол, тангенс которого равен  $-\frac{1}{3}$ . Найти направляющие косинусы этой прямой.

**418.** Привести уравнения прямой к симметричной форме:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x - y + z + 5 = 0, \\ 5x - 8y + 4z + 36 = 0; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x - 5y + 2z - 1 = 0, \\ z = 2; \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z + \frac{9}{2}, \\ y = -\frac{1}{8}z + \frac{23}{8}; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x - 3z + 2 = 0, \\ 4x + z - 1 = 0; \end{cases} \\ & \text{e) ось } X. \end{array}$$

**419.** Лежит ли точка  $M_1(5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$  на прямой  $(\mathbf{r} - 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 0$ ?

**420.** Даны три точки  $A_1(\mathbf{r}_1)$ ,  $A_2(\mathbf{r}_2)$ ,  $A_3(\mathbf{r}_3)$ . Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A_1$  и параллельной прямой  $A_2A_3$ .

**421.** Каков геометрический смысл уравнения

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

где  $\mathbf{ab} = 0$ ?

**422.** При каком условии плоскости

$$\mathbf{rN}_1 + D_1 = 0,$$

$$\mathbf{rN}_2 + D_2 = 0,$$

$$\mathbf{rN}_3 + D_3 = 0$$

пересекаются по параллельным прямым?

**423.** Привести уравнения прямой

$$\mathbf{rN}_1 + D_1 = 0,$$

$$\mathbf{rN}_2 + D_2 = 0$$

к векторной параметрической форме [формулы (9) (стр. 422)].

## § 4. Основные задачи на прямую и плоскость

В этом параграфе рассмотрим различные задачи, в формулировке которых участвуют прямые или одновременно прямые и плоскости.

**223. Угол между двумя прямыми и между прямой и плоскостью.** Для решения задач о нахождении углов между плоскостями и прямыми следует только помнить, что в уравнении плоскости:

$$\mathbf{rN} + D = 0$$

или

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{N} = 0,$$

$\mathbf{N}$  есть нормальный вектор плоскости, т. е. вектор, перпендикулярный к плоскости, а в уравнении прямой:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{a}$$

или

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{a} = 0,$$

**a** есть направляющий вектор прямой, т. е. вектор, параллельный прямой. Ясно, что все задачи о нахождении углов между прямыми и плоскостями сводятся к нахождению углов между векторами и решаются по формуле (24) § 5 гл. XI (стр. 331).

Формула для угла между двумя плоскостями уже приводилась [§ 2, формула (2) (стр. 406)]. Угол между двумя прямыми:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 &= \lambda_1 \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 &= \lambda_2 \mathbf{a}_2, \end{aligned} \right\}^* \quad (1)$$

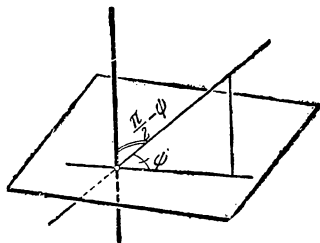
находится по формуле

$$\cos \varphi = \left| \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}{a_1 a_2} \right| \quad (0 \leq \varphi \leq 90^\circ). \quad (2)$$

Знак абсолютной величины взят потому, что мы ищем острый угол между прямыми, независимо от того, в какую сторону направлены стрелки на направляющих векторах. Неравенство в скобках указывает, что из двух углов, соответствующих данному положительному косинусу в пределах от 0 до  $360^\circ$ , следует выбрать тот, который заключён между 0 и  $90^\circ$ .

Угол между плоскостью и прямой:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{rN} + D &= 0, \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 &= \lambda \mathbf{a} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Черт. 226. Угол между прямой и плоскостью.

определяется при помощи следующего соображения. Пусть искомый угол между данной прямой и данной плоскостью равен  $\psi$ . В таком случае угол между данной прямой и нормалью к данной плоскости равен  $90^\circ - \psi$  (черт. 226). Косинус этого последнего угла легко найти (косинус угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{N}$ ). Замечая, что  $\cos(90^\circ - \psi) = \sin \psi$ , мы получим формулу для синуса угла между прямой и плоскостью:

$$\sin \psi = \left| \frac{\mathbf{Na}}{Na} \right| \quad (0 \leq \psi \leq 90^\circ). \quad (4)$$

\*) Если бы параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  были обозначены одной буквой, то тем самым было бы установлено соответствие между точками данных прямых: каждому числовому значению параметра соответствовала бы одна точка на первой и одна точка на второй прямой; эти точки двух прямых (т. е. соответствующие одному и тому же значению параметра) и были бы соответствующими друг другу. Обозначая параметры разными буквами, мы рассматриваем данные прямые, не устанавливая соответствия между их точками.

Приводим условия параллельности и перпендикулярности двух прямых или прямой и плоскости. Условие параллельности прямых (1) таково:

$$\mathbf{a}_2 = \alpha \mathbf{a}_1 \quad (5)$$

или

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = 0, \quad (5')$$

а условие перпендикулярности:

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = 0. \quad (6)$$

Условие параллельности прямой и плоскости (3):

$$\mathbf{N} \mathbf{a} = 0, \quad (7)$$

а условие перпендикулярности:

$$\mathbf{N} = \alpha \mathbf{a} \quad (8)$$

или

$$\mathbf{N} \times \mathbf{a} = 0. \quad (8')$$

Подставляя вместо векторов их координатные выражения, легко перевести все формулы этого п в координатную форму.

Угол между прямыми:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \\ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \left| \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \right| \quad (0 \leq \varphi \leq 90^\circ), \quad (10)$$

а угол между плоскостью и прямой:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

вычисляется по формуле

$$\sin \psi = \left| \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right| \quad (0 \leq \psi \leq 90^\circ). \quad (12)$$

Условия параллельности прямых (9) таковы:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (13)$$

а условие перпендикулярности:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (14)$$

Условие параллельности прямой и плоскости (11):

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad (15)$$

а условия перпендикулярности:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \quad (16)$$

Даём сводку всех полученных выше условий параллельности и перпендикулярности

	Условия параллельности	Условия перпендикулярности
Для двух плоскостей . .	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
Для двух прямых . . . .	$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$	$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$
Для прямой и плоскости	$Al + Bm + Cn = 0$	$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$

**224. Точка пересечения прямой и плоскости.** Пусть даны прямая и плоскость

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a}, \\ \mathbf{r} \mathbf{N} + D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и требуется найти точку пересечения. Первое уравнение (17) при различных значениях  $\lambda$  даёт различные точки прямой. При *некотором определённом*  $\lambda$  оно даёт именно ту точку прямой, которая принадлежит также и данной плоскости. Радиус-вектор этой точки должен удовлетворять уравнению плоскости

$$(\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a}) \mathbf{N} + D = 0$$

или

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{N} + \lambda \mathbf{a} \mathbf{N} + D = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{N} + D}{\mathbf{a} \mathbf{N}}.$$

Итак, точка пересечения прямой и плоскости (17) определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a}, \\ \lambda &= -\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{N} + D}{\mathbf{a} \mathbf{N}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

Если прямая и плоскость заданы координатными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}, \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

то точка их пересечения определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \lambda l, \\ y &= y_1 + \lambda m, \\ z &= z_1 + \lambda n, \\ \lambda &= -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

Исследование задачи. Если знаменатель  $Al + Bm + Cn$  отличен от нуля, то формулы (20) дают вполне определённую точку пересечения. Случай же, когда знаменатель равен нулю, распадается на два.

Первый случай:

$$\left. \begin{aligned} Al + Bm + Cn &= 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &\neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В этом случае для  $\lambda$  получается бесконечное значение, и, как видно из первых трёх формул (20), точка пересечения оказывается бесконечно удалённой. Геометрическое объяснение этого следующее. Первая формула (21), как известно из п 223, означает, что прямая параллельна плоскости. Вторая формула (21) гласит, что координаты  $(x_1, y_1, z_1)$  не удовлетворяют уравнению плоскости, т. е. точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , являющаяся одной из точек нашей прямой, не лежит в плоскости. Таким образом прямая параллельна плоскости и расположена на некотором расстоянии от неё.

Второй случай:

$$\left. \begin{aligned} Al + Bm + Cn &= 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

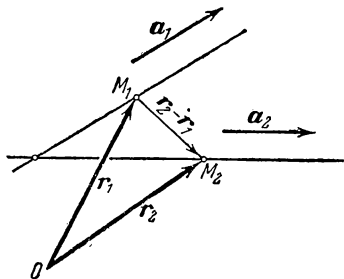
В этом случае для  $\lambda$  получается неопределённое значение, и, следовательно, первые три формулы (20) дают *любую* точку нашей прямой. Геометрическое объяснение этого результата таково. Прямая параллельна плоскости [первое условие (22)] и некоторая точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  этой прямой лежит в плоскости [второе условие (22)]. В таком случае прямая целиком лежит в плоскости, т. е. каждая её точка есть общая точка с плоскостью.

В п 223 было выведено условие параллельности прямой и плоскости. Но случай параллельности включает и ту возможность, когда прямая лежит в плоскости, и условие параллельности (15), не позволяет отличить этого случая. Теперь мы уточнили

прежний результат. В случае (21) прямая параллельна плоскости и проходит на расстоянии от неё, а в случае (22) она лежит в плоскости.

*Условия (22) суть условия лежания прямой в плоскости.*

**225. Условие пересечения двух прямых.** Из элементарной геометрии известно, что две прямые в пространстве, вообще говоря, не пересекаются, а скрещиваются, т. е. не имеют общей точки. Этот факт вполне ясен также и с аналитической точки зрения. Каждая прямая задаётся парой уравнений. Если точка принадлежит одновременно обеим прямым, то её координаты должны удовлетворять одновременно всем четырём уравнениям. Так как четыре уравнения с тремя неизвестными, вообще говоря, не имеют решения, то две прямые, вообще говоря, не пересекаются.



Черт. 227. Условие пересечения двух прямых:  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = 0$ .

Из этого рассуждения ясно также, при каком условии две прямые пересекаются: это будет в том случае, когда четыре уравнения имеют общее решение. Следует из данных четырёх уравнений решить какие-нибудь три и найденные значения  $x$ ,  $y$  и  $z$  подставить в четвёртое уравнение. Если оно удовлетворится, то прямые пересекаются.

Эти рассуждения относятся не только к прямым, но и ко всяким двум линиям в пространстве. Чтобы не приходилось прибегать каждый раз к решению четырёх уравнений, следует иметь в готовом виде условие пересечения двух прямых. Если две прямые

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 &= \lambda_1 \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 &= \lambda_2 \mathbf{a}_2 \end{aligned} \right\}^* \quad (23)$$

пересекаются, то они лежат в одной плоскости. Возьмём на первой прямой (23) какую-нибудь точку, например  $M_1(\mathbf{r}_1)$ , и на второй прямой какую-нибудь точку, например,  $M_2(\mathbf{r}_2)$ , и соединим их (черт. 227). Вектор  $M_1M_2$ , равный  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , должен лежать в плоскости этих прямых, т. е. быть компланарным с направляющими векторами этих прямых  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ . Условие компланарности трёх векторов заключается в том, что их смешанное произведение равно нулю:

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = 0. \quad (24)$$

Таким образом равенство (24) есть условие пересечения прямых (23).

\*) Относительно параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  см. сноску на стр. 430.



Условие (24) выводилось на основании того соображения, что две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости. Но две параллельные прямые тоже лежат в одной плоскости. Отсюда можно предвидеть, что условию (24) удовлетворяют не только пересекающиеся, но и параллельные прямые. В самом деле, для параллельных прямых векторы  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  коллинеарны, и, следовательно, смешанное произведение  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$  равно нулю.

Пусть две прямые заданы координатными симметричными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-x_1}{l_1} &= \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \\ \frac{x-x_2}{l_2} &= \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Чтобы получить условие пересечения прямых (25), заменим векторы, входящие в равенство (24), их координатными выражениями и запишем смешанное произведение в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Равенство (26) есть условие пересечения прямых (25).

**226. Прямая, проходящая через две данные точки.** Пусть даны две точки:  $M_1(\mathbf{r}_1)$  и  $M_2(\mathbf{r}_2)$  и требуется составить уравнение прямой  $M_1M_2$ . Очевидно, вектор  $\overline{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  является направляющим вектором прямой  $M_1M_2$ . Подставляя в уравнение (9) § 3 [(стр. 422)] вместо направляющего вектора  $\mathbf{a}$  вектор  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , получим

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (27)$$

или [уравнение (13) § 3 (стр. 424)]

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0. \quad (28)$$

Читатель сам легко сумеет перейти от уравнения (27) или (28) к соответствующим координатным уравнениям. При этом получится

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (29)$$

Уравнения (29) суть уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .

**227. О числе условий, определяющих плоскость и прямую.** Мы видели, что уравнение плоскости содержит три параметра [п 208 (стр. 394)], а уравнения прямой — четыре параметра [п 219 (стр. 421)]. Следовательно, во всякой задаче, где требуется найти некоторую плоскость, должны быть даны три условия, а во всякой задаче, где требуется найти некоторую прямую, должны быть даны

четыре условия (для того чтобы эти задачи были определёнными). Под *условием* мы здесь понимаем *аналитическое условие*, т. е. уравнение, связывающее параметры, определяющие плоскость или прямую.

Проанализируем с этой точки зрения некоторые задачи, которые решались в настоящей главе.

Пример 1. Провести плоскость через три данные точки  $A, B, C$ .

Пример 2. Провести прямую через две данные точки  $A, B$ .

В примере 1 мы имеем условия:

1) Искомая плоскость проходит через точку  $A$ ,

2) » » » » »  $B$ ,

3) » » » » »  $C$ .

В примере 2 мы имеем условия:

1) Искомая прямая проходит через точку  $A$ ,

2) » » » » »  $B$ .

На первый взгляд в примере 2 мы имеем только два условия, а между тем две точки вполне определяют прямую. Это кажущееся противоречие с высказанным выше общим положением (прямая определяется четырьмя условиями) устраняется следующим образом.

Условие «плоскость проходит через точку  $A$ » в переводе на аналитический язык значит, что координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Беря уравнение искомой плоскости в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0^*),$$

где коэффициенты неизвестны, и подставляя вместо текущих координат координаты точки  $A(x_1, y_1, z_1)$ , получим:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \quad (*)$$

Равенство  $(*)$  связывает неизвестные параметры.

Иначе обстоит дело с условием «прямая проходит через точку  $A$ ». Разница заключается в том, что прямая задаётся *двумя* уравнениями, например,

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Если она проходит через точку  $A(x_1, y_1, z_1)$ , то это значит, что координаты точки  $A$  должны удовлетворять *двум* уравнениям прямой, т. е.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= az_1 + p, \\ y_1 &= bz_1 + q. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Таким образом, прохождение прямой через точку даёт *два* условия.

Итак:

*Геометрическое условие «плоскость проходит через данную точку» равносильно одному аналитическому условию.*

---

\*) Напоминаем, что здесь не четыре параметра, а три, так как параметрами являются не самые коэффициенты  $A, B, C, D$ , а их отношения.

*Геометрическое условие «прямая проходит через данную точку» равносильно двум аналитическим условиям\*).*

**Пример 3.** Через данную точку  $A$  провести прямую, перпендикулярную данной плоскости  $\alpha$ .

**Пример 4.** Через данную точку  $A$  провести прямую, параллельную данной плоскости  $\alpha$ .

В примере 3 мы имеем вполне определённую задачу, а в примере 4 — неопределённую: через данную точку проходит бесконечное множество прямых, параллельных данной плоскости.

Причина этого явления заключается в следующем (см. сводку условий параллельности и перпендикулярности на стр. 432):

*Геометрическое условие «прямая перпендикулярна данной плоскости» равносильно двум аналитическим условиям.*

*Геометрическое условие «прямая параллельна данной плоскости» равносильно одному аналитическому условию.*

Следовательно, подсчёт условий в примере 3 даёт:

искомая прямая проходит через точку $A$ .....	2 условия
» » перпендикулярна плоскости $\alpha$ .....	2 условия

---

Всего..... 4 условия

В примере 4:

искомая прямая проходит через точку $A$ .....	2 условия
» » параллельна плоскости $\alpha$ .....	1 условие

---

Всего..... 3 условия

Поэтому задача в примере 4 — неопределённая.

Мы видим, что *число условий нельзя считать по их словесной формулировке*. То, что словесно формулируется как одно условие, может в переводе на аналитический язык выражаться несколькими уравнениями, связывающими коэффициенты, и тогда должно считаться за несколько условий.

### Задачи

**424.** Найти косинус угла и сам угол между двумя прямыми:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{7}, \\ \frac{x+6}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, & 3x-2y+z-1=0, \\ 2x+2y-z+23=0, & 3x+8y+z-18=0. \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x+8y+15=0, & 4y+z+8=0, \\ x+5z+8=0, & 2y+11z+1=0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \text{и} \end{aligned}$$

---

\*) Эти положения относятся не только к плоскостям и прямым, но и к любым поверхностям и линиям.

**425.** Найти угол между прямой и плоскостью:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + 4z - 2 = 0 \end{array} \right\} \text{ и } x - 8y + 3z + 6 = 0;$$

б)  $x = y = z$  и  $x + y = 0$ .

**426.** Проекция прямой на плоскость  $ZX$  образует с осью  $Z$  угол, тангенс которого равен  $\frac{1}{3}$ ; проекция той же прямой на плоскость  $ZY$  образует с осью  $Z$  угол, тангенс которого равен  $\frac{1}{2}$ . Для другой прямой те же тангенсы равны соответственно  $\frac{2}{9}$  и  $\frac{2}{3}$ . Найти косинус угла между этими двумя прямыми.

**427.** Пересекаются ли две прямые:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-4} & \text{и } \frac{x-9}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}; \\ \text{б) } \frac{x+3}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} & \gg \frac{x-6}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+1}{0}; \\ \text{в) } \left. \begin{array}{l} x = 1-s, \\ y = 8s, \\ z = 5-3s \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} x = 3+4t, \\ y = 21+5t, \\ z = -11-10t; \end{array} \right\} \\ \text{г) } \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{4} & \gg \frac{x}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z+5}{4}; \\ \text{д) } \left. \begin{array}{l} 5x - 2y + 5z + 3 = 0, \\ x + y - 4z - 10 = 0 \end{array} \right\} & \gg \left. \begin{array}{l} 3x + 10y - z - 47 = 0, \\ 6x - 2y + 7z + 3 = 0; \end{array} \right\} \\ \text{е) } \left. \begin{array}{l} x + 5y - 4z + 2 = 0, \\ 2x + y + 9z + 1 = 0 \end{array} \right\} & \gg \left. \begin{array}{l} 4x + 11y + z + 5 = 0, \\ 3x - 3y + 22z = 0. \end{array} \right\} \\ \text{ф) } & \end{array}$$

**428.** Показать, что для прямой

$$\frac{x+9}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-2}{1}$$

одна из точек пересечения с координатными плоскостями делит пополам отрезок между двумя другими.

**429.** Опустить перпендикуляр:

а) из точки  $(12, -4, -3)$  на прямую

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 4y + 4z - 13 = 0, \\ z = 12,5 - 2,5x; \end{array} \right\}$$

б) из точки  $(11, -3, 1)$  на прямую

$$\frac{x-6}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{2}.$$

**430.** Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1} & \text{и } \frac{x+31}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{6}; \\ \text{б) } \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{8} & \gg \left. \begin{array}{l} x - 4y - z - 6 = 0, \\ z = y - 7; \end{array} \right\} \\ \text{в) } \left. \begin{array}{l} 7x - 2y - 7z - 21 = 0, \\ 14x - 13y + 7z = 0 \end{array} \right\} & \gg \left. \begin{array}{l} 2x - y - z + 3 = 0, \\ 13x - 5y - 10z + 45 = 0. \end{array} \right\} \end{array}$$

**431.** Найти кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$$a) \frac{x-5}{1} = \frac{y}{-16} = \frac{z+4}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-27}{2} = \frac{y+25}{1} = \frac{z-1}{-2};$$

$$b) \begin{cases} 13x + y - z - 7 = 0, \\ 10x + y + 2z - 19 = 0 \end{cases} \quad \rangle \quad \begin{cases} 11x - 3y + 3z + 18 = 0, \\ x - 6y - 3z = 0; \end{cases}$$

$$c) \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{6} \quad \rangle \quad \frac{x}{3} = \frac{y+3}{8} = \frac{z+11}{-4};$$

$$d) \begin{cases} x + y - 4z - 18 = 0, \\ 2x - y + 10z + 21 = 0 \end{cases} \quad \rangle \quad \begin{cases} 5x - 3y + 28z - 97 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

**432.** Через точку  $(0, -1, 8)$  провести прямую, пересекающую две данные прямые

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y}{0} = \frac{z-9}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{10} = \frac{z-9}{-1}.$$

**433.** Через точку  $(2, 6, 3)$  провести прямую, параллельную плоскости

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

и пересекающую прямую

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-6}{2}.$$

**434.** Найти проекцию

a) точки  $(11, 17, -9)$  на плоскость  $5x + 8y - 6z + 5 = 0$ ;

b) точки  $(4, -2, -5)$  на плоскость  $4x - y + 10z + 32 = 0$ .

**435.** Найти проекцию

a) точки  $(22, 3, -4)$  на прямую

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{-4};$$

b) точки  $(8, -3, 10)$  на прямую

$$\begin{cases} 2x - 5y - z - 21 = 0, \\ 4x + 3y - 6z + 37 = 0. \end{cases}$$

**436.** В четырёхугольнике  $ABCD$  найти угол между диагоналями и точку пересечения диагоналей, если она существует:

a)  $A(-5, 4, -1)$ ,  $B(-7, -7, 2)$ ,  $C(4, -20, 5)$ ,  $D(8, 2, -1)$ ;

b)  $A(3, 0, -1)$ ,  $B(-8, 6, 2)$ ,  $C(7, 12, -3)$ ,  $D(-13, 8, 4)$ .

**437.** Провести плоскость

a) через прямую  $2x - 5y + z - 4 = 0$ ,  $x - 6y + 2z - 3 = 0$  и точку  $(2, 0, -1)$ ;

b) через прямую  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-8}{-6}$  и точку  $(4, -1, -4)$ .

**438.** Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{12},$$

$$\frac{x-15}{1} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-11}{12}.$$

**439.** Найти проекцию прямой  $\frac{x}{8} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-2}$  на плоскость  $2x + y + 4z - 16 = 0$ .

**440.** Провести плоскость через две параллельные прямые

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+6}{-10}, \quad \frac{x}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-2}{-10}.$$

**441.** Провести плоскость, проходящую через прямую

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+1}{-1}$$

и параллельную прямой:

$$a) \frac{x}{2} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z+2}{-1};$$

$$b) \frac{x}{1} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{-1}.$$

**442.** Даны две параллельные прямые:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{6} = \frac{z-5}{-1}, \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+9}{-1}.$$

Провести прямую, параллельную им, лежащую в одной с ними плоскости и делящую расстояние между ними пополам.

**443.** Найти плоскость, перпендикулярную плоскости  $18x - 3y - 13z - 51 = 0$  и пересекающуюся с ней по прямой, лежащей в плоскости  $XU$ .

**444.** Найти расстояние от точки  $(-3, 1, 0)$  до плоскости

$$15x - 6y + 10z + 70 = 0.$$

**445.** Даны две плоскости:

$$2x - y + 2z - 6 = 0,$$

$$9x + 2y - 6z + 11 = 0.$$

Найти плоскости, проходящие через их линию пересечения и делящие пополам углы между ними.

**446.** Три некопланарные вектора **a**, **b** и **c**, выходящие из полюса, приняты за рёбра тетраэдра. Найти уравнение высоты тетраэдра, опущенной из полюса.

**447.** Параллелепипед построен на тройке векторов **a**, **b** и **c**, имеющих общее начало в полюсе. Грань, образованная векторами **a** и **b**, принята за основание параллелепипеда. Составить уравнение прямой, проведённой через точку пересечения диагоналей основания параллельно боковому ребру. Показать (аналитически), что эта прямая проходит через середину диагонали параллелепипеда.

## ГЛАВА XV

### НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОВЕРХНОСТЯХ

#### § 1. Поверхности второго порядка\*)

**228. Метод сечений.** В аналитической геометрии на плоскости, имея уравнение кривой

$$f(x, y) = 0,$$

мы для определения вида этой кривой иногда прибегали к построению её по точкам, т. е. придавали произвольные значения  $x$ , вычисляли  $y$  и строили соответствующие точки. Сейчас мы ознакомимся с аналогичным методом для изучения поверхностей.

Пусть дано уравнение поверхности

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

Пересечём эту поверхность плоскостью, параллельной плоскости  $XU$ , и выясним, какая кривая получится в сечении. Эта кривая имеет уравнения:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ z &= h, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

потому что для всех точек, лежащих в плоскости, параллельной  $XU$ ,  $z$  имеет одно и то же значение; мы его обозначим через  $h$ . В то же время  $h$  есть отрезок, отсекаемый этой плоскостью на оси  $Z$ .

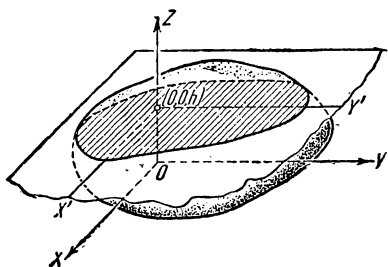
Подставляя в первое уравнение (2)  $h$  вместо  $z$ , мы получим уравнение

$$F(x, y, h) = 0. \quad (3)$$

---

\*) Термин «поверхность второго порядка», вероятно, не покажется читателю непонятным, хотя в этой книге ещё нигде не говорилось, что такое «порядок поверхности». Понятие «порядок поверхности» вполне аналогично понятию «порядок линии» в аналитической геометрии на плоскости. Классификация алгебраических поверхностей по их порядкам основана на том, что степень уравнения поверхности не зависит от выбора системы декартовых координат. Причина этой независимости, как и в аналитической геометрии на плоскости [п 71 (стр. 140)], заключается в том, что формулы преобразования декартовых координат [гл. XII, § 1, формулы (14) (стр. 360)] линейны.

Уравнение (3), содержащее две координаты  $x$  и  $y$ , если его рассматривать не в пространстве, а на плоскости, есть уравнение кривой пересечения поверхности (1) с плоскостью  $z=h$ .



Черт. 228. Сечение поверхности  $F(x, y, z)=0$  плоскостью  $z=h$ .

При этом подразумевается, что плоскость, в которой мы интерпретируем уравнение (3), есть плоскость  $z=h$ , и что оси координат, в которых мы строим кривую (3), параллельны осям  $X$  и  $Y$  нашей системы координат в пространстве, а начало лежит в точке  $(0, 0, h)^*$ ) (черт. 228).

Итак, уравнение (3) показывает нам, по какой кривой плоскость  $z=h$  пересекает поверхность (1). Придавая различные значения  $h$ , можно узнать сечения поверхности различными плоскостями, параллельными плоскости  $XY$ .

Придавая в уравнении (1) постоянное значение  $x$  и  $y$ , мы узнаём сечения поверхности плоскостями, параллельными  $YZ$  или  $ZX$ .

Все найденные сечения позволяют составить представление о поверхности.

Пример. Исследовать поверхность

$$z^2 = x^2 + y^2. \quad (4)$$

Исследуем сечение нашей поверхности плоскостью  $XY$ , для чего подставляем в её уравнение  $z=0$ :

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Это уравнение может удовлетворяться только при  $x=y=0$ . Следовательно, поверхность (4) имеет с плоскостью  $XY$  только одну общую точку: начало координат.

Исследуем сечение нашей поверхности плоскостью, параллельной  $XY$ , для чего подставляем в её уравнение  $z=h$

$$x^2 + y^2 = h^2.$$

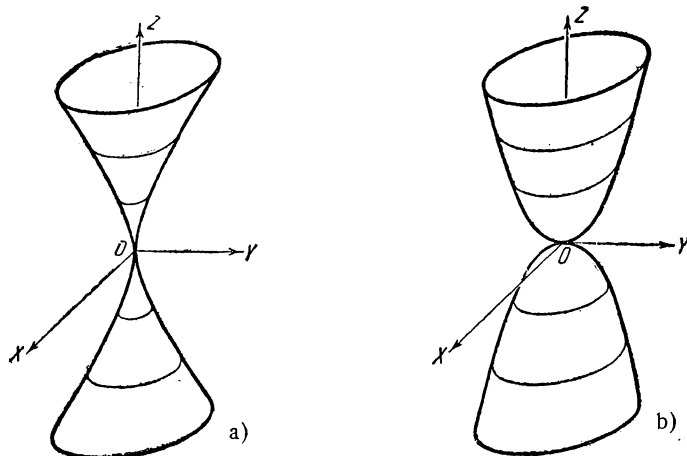
Это есть уравнение окружности. Следовательно, плоскость  $z=h$  пересекает нашу поверхность по окружности радиуса  $h^{**})$  с центром в начале координат (т. е. на оси  $Z$ ).

\*) Отметим (хотя это не будет использовано в настоящей главе), что уравнение (3), рассматриваемое в пространстве, есть уравнение цилиндра, проектирующего на плоскость  $XY$  сечение нашей поверхности плоскостью  $z=h$ .

\*\*) Если секущая плоскость расположена ниже плоскости  $XY$  (т. е.  $h$  отрицательно), то радиус окружности равен  $-h$ . Вообще же радиус окружности равен  $|h|$ .

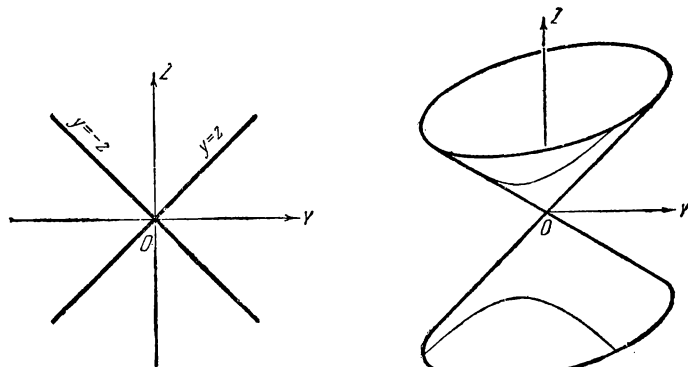
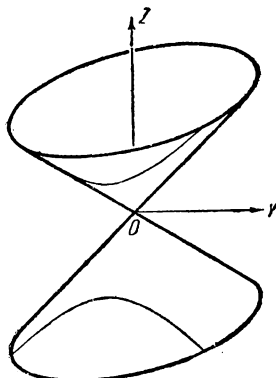


Если секущая плоскость отдаляется от плоскости  $XU$  вверх (т. е.  $h$  увеличивается), то радиус окружности увеличивается. То же происходит и при удалении секущей плоскости вниз.



Черт. 229.

Теперь ясно, что наша поверхность образована кругами, наложенными друг на друга («слоями»). Центры этих кругов лежат на оси  $Z$ , их плоскости параллельны  $XU$ . В плоскости  $XU$  мы имеем одну точку — начало координат, а по мере удаления от плоскости  $XU$  вверх или вниз радиусы кругов возрастают.

Черт. 230. Сечение поверхности  $z^2 = x^2 + y^2$  плоскостью  $YZ$ .Черт. 231.  $z^2 = x^2 + y^2$ .

Всё сказанное ещё не даёт возможности судить о виде поверхности: на черт. 229 изображены две различные поверхности, удовлетворяющие приведённому описанию. Чтобы вполне определить

вид поверхности, проведём ещё сечение плоскостью  $YZ$  (плоскостью чертежа). Подставляем в уравнение (4)  $x=0$ .

$$z^2 = y^2.$$

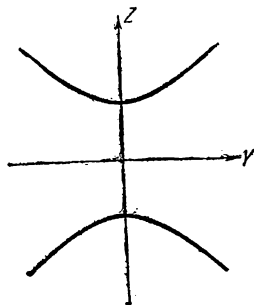
Это уравнение даёт

$$z = \pm y$$

и изображается парой прямых ( $z=y$  и  $z=-y$ ), изображённых на черт. 230.

Теперь ясно, что поверхность (4) есть прямой круговой конус, у которого осью служит ось  $Z$ , а вершиной начало координат. Угол между осью и образующей равен  $45^\circ$  (черт. 231). Прямые, изображённые на отдельном черт. 230, определяют границы окружностей (теперь исключается возможность черт. 229).

Можно исследовать другие сечения поверхности (4) плоскостями, параллельными координатным плоскостям (хотя для выяснения вида поверхности в этом уже нет необходимости). Положим  $x=h$  (плоскость, параллельная  $YZ$ ):



Черт. 232.

$$z^2 - y^2 = h^2.$$

или

$$z^2 = h^2 + y^2$$

$$z^2 - y^2 = h^2.$$

Это уравнение изображается равносторонней гиперболой, у которой действительная ось расположена по оси  $Z$  и равна  $2h$  (черт. 232). Напоминаем читателю, что оси  $Y$  и  $Z$  чертежа 232 не совпадают с осями  $Y$  и  $Z$  нашей системы координат в пространстве, а лишь параллельны им; расположение гиперболы относительно системы координат в пространстве видно на черт. 231.

Так как расстояние между вершинами гиперболы равно  $2h$ , то по мере удаления сечущей плоскости от плоскости  $YZ$  вершины гиперболы раздвигаются.

Аналогично можно исследовать сечения нашего конуса плоскостями, параллельными  $ZX$ .

**229. Эллипсоид.** При изучении кривых второго порядка мы сначала давали геометрическое определение кривой, а затем выводили её уравнение. Поверхности второго порядка не удастся достаточно просто определить как геометрические места точек и поэтому мы пойдём другим путём: мы будем брать различные уравнения второй степени и исследовать изображающие их поверхности.

Выбирая уравнения поверхностей второго порядка, мы будем руководствоваться аналогиями с уравнениями кривых второго порядка. Там большую роль играли уравнения, содержащие квад-

раты координат и свободный член (канонические уравнения эллипса и гиперболы). Такие уравнения с тремя переменными всегда могут быть приведены к виду.

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5)$$

Здесь  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$  — положительные числа, геометрический смысл которых нам пока неизвестен. Вид поверхности зависит от комбинации знаков в левой части. Мы рассмотрим поочерёдно все возможные комбинации.

Случай первый. *Все три члена в левой части уравнения (5) взяты с плюсом:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (6)$$

Поверхность, изображающая уравнение (6), называется эллипсоидом. Исследуем эллипсоид по методу сечений. Предполагая, что читатель внимательно рассмотрел пример, приведённый в предыдущем п, мы проведём это исследование кратко.

Пересекаем эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости  $XU$  ( $z = h$ ):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1.$$

Это есть уравнение эллипса. Приведём его к каноническому виду (переносим  $\frac{h^2}{c^2}$  направо и делим уравнение на  $1 - \frac{h^2}{c^2}$ ):

$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{c^2(c^2 - h^2)}{c^2}} + \frac{\frac{y^2}{b^2}}{\frac{c^2(c^2 - h^2)}{c^2}} = 1. \quad (7)$$

При  $h = 0$  уравнение (7) даёт

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. плоскость  $XU$  пересекает наш эллипсоид по эллипсу с полуосями  $a$  и  $b$  (черт. 233).

Пусть теперь секущая плоскость поднимается над плоскостью  $XU$  (т. е.  $h$  увеличивается). В сечении будет получаться эллипс с полуосями:

$$\lambda = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - h^2}, \mu = \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - h^2}, \quad (8)$$

потому что знаменатели при  $x^2$  и  $y^2$  в уравнении (7) суть квадраты полуосей (черт. 234).

Из формул (8) видно, что  $\lambda$  и  $\mu$  уменьшаются при увеличении  $h$ . Следовательно, чем выше секущая плоскость, тем меньший эллипс получится в сечении.

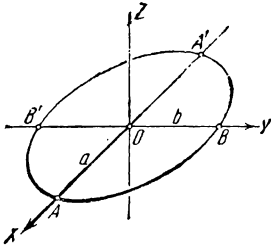
Когда  $h$ , увеличиваясь, дойдёт до  $c$ , то  $\lambda$  и  $\mu$  обратятся в нули, т. е. получится одна точка (эллипс с нулевыми полуосями). Если

$h > c$ , то  $\lambda$  и  $\mu$  получаются мнимые, и, следовательно, эллипс не существует.

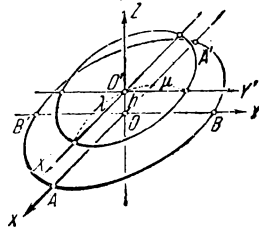
Из уравнения (6) непосредственно видно, что при  $h > c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0,$$

а так как ни одна точка в пространстве не удовлетворяет этому условию, то плоскость  $z = h$  при  $h > c$  не пересекает эллипсоида.



Черт. 233. Сечение эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  плоскостью  $XY$ .



Черт. 234. Сечение эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  плоскостями  $z = h$ .

Все эллипсы, получающиеся в сечении эллипсоида плоскостями, параллельными  $XY$ , подобны между собой. В самом деле, определяя из формул (8) отношение полуосей, получим:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b},$$

т. е. отношение полуосей не зависит от  $h$ .

Если секущую плоскость опускать под плоскость  $XY$  (т. е. полагать  $h < 0$ ), то результаты исследования будут те же, так как во все наши уравнения  $h$  входит в квадрате: пересекая поверхность двумя плоскостями, параллельными плоскости  $XY$  по разные её стороны, на *одинаковом* расстоянии от неё ( $h_2 = -h_1$ ), получим в сечении *одинаковые* эллипсы.

Резюмируем всё сказанное. Плоскость  $XY$  сечёт эллипсоид (6) по эллипсу с полуосями  $a$  и  $b$ . Если секущую плоскость поднимать, оставляя ее параллельной плоскости  $XY$ , то в сечении будут получаться подобные эллипсы, непрерывно уменьшающиеся и превращающиеся в точку, когда секущая плоскость достигнет высоты  $h$ . Эта точка  $(0, 0, c)$  есть наивысшая точка эллипсоида. Если секущую плоскость опускать под плоскость  $XY$ , то в сечении тоже будут получаться уменьшающиеся подобные эллипсы, которые стянутся в точку, когда секущая плоскость опустится до положения  $z = -c$ . При дальнейшем опускании плоскость  $z = h$

не встречает эллипсоида; следовательно, точка  $(0, 0, -c)$  есть наименьшая точка эллипсоида.

Из всех рассмотренных эллипсов эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , лежащий в плоскости  $XY$ , является, очевидно, наибольшим.

Пересекая эллипсоид плоскостью  $YZ$  ( $x = 0$ ), получим

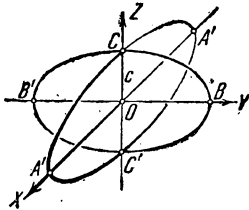
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

это есть эллипс,  $BCB'C'$ , изображённый на черт. 235.

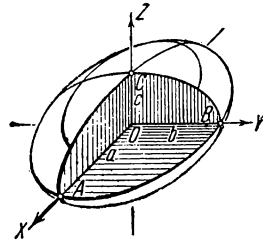
Теперь вид эллипсоида (6) вполне выяснен. Для большей наглядности можно ещё пересечь его плоскостью  $ZX$  ( $y = 0$ )

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

На черт. 235 изображены оба сечения эллипсоида плоскостями  $YZ$  и  $ZX$ . Весь эллипсоид изображён на черт. 236.



Черт. 235. Сечения эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  плоскостями  $YZ$  и  $ZX$ .



Черт. 236. Эллипсоид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Читатель может исследовать сечения эллипсоида плоскостями, параллельными  $YZ$ ; они оказываются подобными между собою эллипсами. То же относится и к сечениям плоскостями, параллельными  $ZX$ .

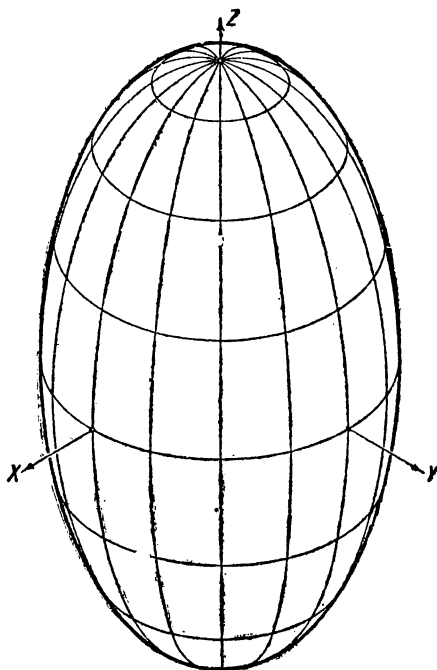
Каждая из координатных плоскостей является для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6)$$

плоскостью симметрии [это следует из того, что каждая из текущих координат входит в уравнение (6) только в чётной степени]. Сечения эллипсоида его плоскостями симметрии называются *главными сечениями*. На черт. 236 в вырезе показано по одной четверти каждого главного сечения. Вершины этих эллипсов (т. е. точки  $A, A', B, B', C$  и  $C'$ ) называются *вершинами эллипсоида*, а их оси называются *осями эллипсоида*. Очевидно, оси эллипсоида равны  $2a, 2b$  и  $2c$ . Начало координат

нат есть центр эллипсоида (6), т. е. всякая хорда эллипсоида, проходящая через эту точку, делится в ней пополам [рекомендуем читателю доказать это непосредственно на основании уравнений (6)].

В общем случае, когда величины всех трёх осей эллипсоида различны, эллипсоид называется *трёхосным*. На черт. 236 изображён



Черт. 237. Вытянутый эллипсоид вращения.

трёхосный эллипсоид, у которого  $2a$  — *большая ось*,  $2b$  — *средняя ось* и  $2c$  — *малая ось*. Рассмотрим частный случай, когда две оси эллипсоида равны между собой. Пусть, например,  $a = b$ . Тогда уравнение (6) примет вид:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (9)$$

У этого эллипсоида сечение плоскостью  $XU$  есть окружность, и все сечения плоскостями, параллельными  $XU$ , тоже суть окружности (черт. 237). Ясно, что такой эллипсоид произошёл от вращения эллипса вокруг оси. Эллипсоид, две оси которого равны между собой, называется *эллипсоидом вращения* (в противоположность трёхосному эллипсоиду).

Если эллипс вращается вокруг своей большой оси, то получается эллипсоид, у которого две оси равны между

собой, а третья, неравная им, *больше* их (черт. 237). Такой эллипсоид называется *вытянутым эллипсоидом вращения*. Если же эллипс вращается вокруг своей малой оси, то получается эллипсоид, у которого две оси равны между собой, а третья, неравная им, *меньше* их (черт. 238). Такой эллипсоид называется *сжатым эллипсоидом вращения* или *сфероидом*. Примером сжатого эллипсоида вращения служит Земля; меньшая ось, это — земная ось.

У эллипсоида вращения положение вершин  $A, A', B$  и  $B'$  не вполне определённое: за вершину  $A$  может быть принята любая точка окружности  $ABA'B'$ . Не вполне определены также положения осей  $AA'$  и  $BB'$  (*величины* же всех трёх осей вполне определены) и главных сечений  $ACA'C'$  и  $BCB'B'$ .

Если в эллипсоиде все три оси равны между собой, т. е.  $a = b = c$ , то уравнение (6) примет вид

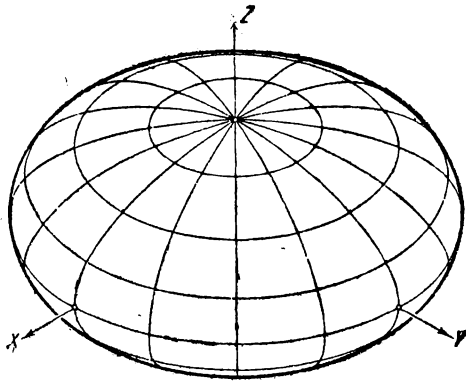
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Это есть уравнение сферы. Таким образом эллипсоид с равными осями есть сфера.

Читатель, вероятно, заинтересуется вопросом, нельзя ли дать непосредственное геометрическое определение эллипсоида. У человека, впервые обдумывающего этот вопрос, мысль обычно идёт в таком направлении: условие, определяющее геометрическое место точек, иногда применимо и в плоскости, и в пространстве. Например, рассмотрим геометрическое место точек, равноудалённых от некоторой данной точки. На плоскости это геометрическое место есть окружность, а в пространстве — сфера. Нельзя ли непосредственно перенести в пространство фокальное определение эллипса, т. е. рассмотреть *геометрическое место всех точек пространства, сумма расстояний которых от двух данных точек есть постоянная величина*?



Черт. 238. Сжатый эллипсоид вращения.

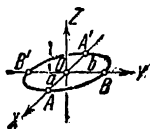
Легко убедиться, что геометрическое место, о котором идёт речь, есть поверхность вращения эллипса около большой оси, т. е. вытянутый эллипсоид вращения. Таким образом, фокальное определение эллипса, будучи перенесено в пространство, не даст нам трёхосного эллипсоида, а даст вытянутый эллипсоид вращения.

Однако существует ряд других определений эллипса. Например, эллипс может быть определён как кривая, полученная равномерным сжатием окружности в некотором направлении [п 79 (стр. 156)]. Это определение можно обобщить на пространство; трёхосный эллипсоид может быть получен двумя равномерными сжатиями сферы.

**230. Однополостный гиперболоид.** Если члены левой части уравнения (5) (стр. 445) имеют разные знаки, то соответствующая поверхность называется *гиперболоидом*. Рассмотрим случай, когда

один член, например,  $\frac{z^2}{c^2}$ , имеет знак минус, а два члена плюс. Соответствующая поверхность называется *однополостным гиперboloидом* (основания для этого названия выяснятся по прочтении этого и следующего пп).

Итак, мы рассматриваем поверхность



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (10)$$

Пересекая эту поверхность плоскостью, параллельной плоскости  $XU$

$$z = h,$$

и проделывая те же преобразования, что и в предыдущем п, получим

Черт. 239. Сечение однополостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

плоскостью  $XU$ .

$$\frac{x^2}{a^2(h^2 + c^2)} + \frac{y^2}{b^2(h^2 + c^2)} = 1. \quad (11)$$

При  $h=0$  уравнение (11) даёт

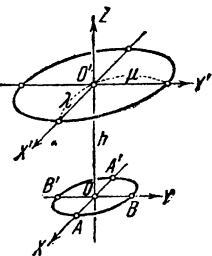
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. плоскость  $XU$  пересекает нашу поверхность по эллипсу с полуосями  $a$  и  $b$  (черт. 239). Если поднимать секущую плоскость, оставляя её параллельной  $XU$ , то в сечении будет получаться эллипс с полуосями

$$\lambda = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 + h^2}, \quad \mu = \frac{b}{c} \sqrt{c^2 + h^2} \quad (12)$$

(черт. 240).

Из формул (12) видно, что с увеличением  $h$  полуоси  $\lambda$  и  $\mu$  увеличиваются. Следовательно, наша поверхность образована увеличивающимися эллипсами, наложенными друг на друга. Так как  $h$  входит в уравнение (11) в квадрате, то при изменении знака  $h$  мы будем получать такую же кривую, т. е. две плоскости, параллельные плоскости  $XU$  и расположенные по разные стороны от неё на одинаковых расстояниях, дают в сечении с нашей поверхностью *одинаковые* эллипсы. Значит, если опускать секущую плоскость ниже плоскости  $XU$ , оставляя её параллельной  $XU$ , то в сечении тоже будем получать увеличивающиеся эллипсы. Эллипс, лежащий в самой плоскости  $XU$  и имеющий полуоси  $a$  и  $b$ , является наименьшим из всех рассматриваемых эллипсов. Он называется *горловым эллипсом*.



Черт. 240. Сечения однополостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

плоскостями  $z = h$ .



Все рассматриваемые эллипсы подобны, так как из формул (12) следует

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{a}{b},$$

т. е. отношение полуосей не зависит от  $h$ .

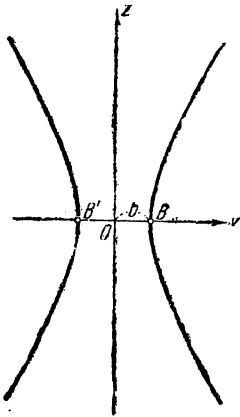
Пересечём нашу поверхность плоскостью  $YZ$ . Полагая в уравнении (10)  $x = 0$ , получим

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Это есть уравнение гиперболы (черт. 241). Пересекая нашу поверхность плоскостью  $ZX$ , получим

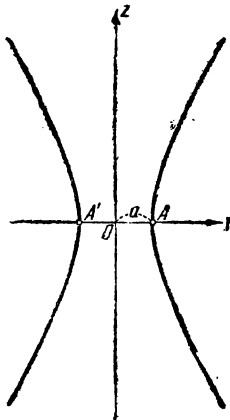
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Это — уравнение гиперболы, изображённой на черт. 242. На черт. 243 изображены оба сечения. Теперь вид нашего однополостного гиперболоида окончательно выяснен (черт. 244).



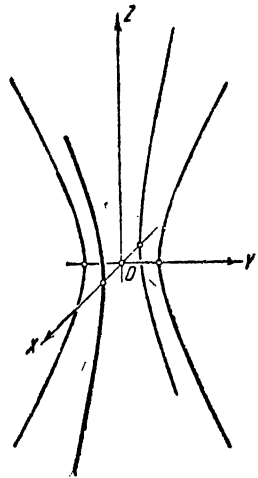
Черт. 241. Сечение однополостного гиперболоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

плоскостью  $YZ$ .



Черт. 242. Сечение однополостного гиперболоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

плоскостью  $ZX$ .



Черт. 243. Сечения однополостного гиперболоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

плоскостями  $YZ$  и  $ZX$ .

Мы займёмся ещё исследованием сечений нашего однополостного гиперболоида плоскостями, параллельными  $YZ$  и  $ZX$ , так как при этом исследовании выясняются некоторые интересные свойства.

Сечём поверхность (10) плоскостью

$$x = h,$$

В сечении получаем кривую

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

или, после обычных преобразований:

$$\frac{y^2}{b^2(a^2 - h^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2 - h^2)} = 1. \quad (13)$$

Уравнение (13) изображается гиперболой; важно установить, где у этой гиперболы действительная ось и где мнимая. Вспомним, что в каноническом уравнении гиперболы положительный член соответствует действительной оси, а отрицательный — мнимой [черт. 43 (стр. 83) и черт. 79 (стр. 171)]. Знаки обоих членов уравнения (13) зависят от величины  $h$ . Допустим, что секущая плоскость весьма близка к плоскости  $YZ$ , т. е.  $h$  весьма мало. Тогда  $a^2 - h^2 > 0$ , и в уравнении (13) первый член положителен, а второй отрицателен. Мы имеем гиперболу, у которой действительная ось расположена по оси  $Y$ , а мнимая — по оси  $Z$  (черт. 245).

Действительная полуось этой гиперболы такова:

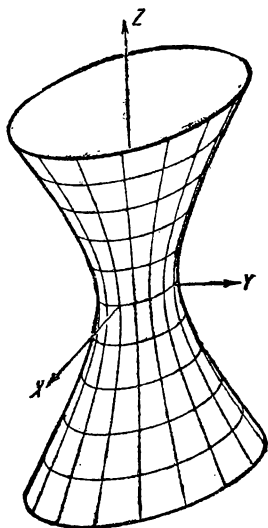
$$\lambda = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - h^2}, \quad (14)$$

а расстояние между вершинами гиперболы есть  $2\lambda$ . Вершины гиперболы лежат на горловом эллипсе; этот факт, очевидный геометрически, может быть также проверен вычислением.

Черт. 244. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассмотрим, как будет меняться сечение гиперболоида плоскостью  $x = h$  при удалении этой плоскости от плоскости  $ZY$ , т. е. при увеличении  $h$ . Очевидно, действительная ось гиперболы будет уменьшаться, стремясь к нулю, т. е. вершины гиперболы будут стягиваться к одной точке. Это ясно, во-первых, из того, что вершины гиперболы лежат на эллипсе, а, во-вторых, из того, что с увеличением  $h$ , как показывает формула (14),  $\lambda$  уменьшается. Это будет происходить до тех пор, пока  $h$  не достигнет величины  $a$ . При  $h = a$  рассматриваемое сечение перестанет быть гиперболой, так как вершины совпадут. Уравнение сечения не может быть написано в виде (11), так как при  $h = a$  мы не имеем права делить на  $a^2 - h^2$ . Следует обратиться



к уравнению (10) (стр. 450), которое при  $z = h = a$  даёт

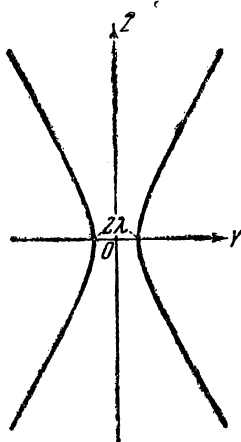
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (15)$$

Левая часть этого уравнения разлагается на множители, и, следовательно, это уравнение изображается парой прямых

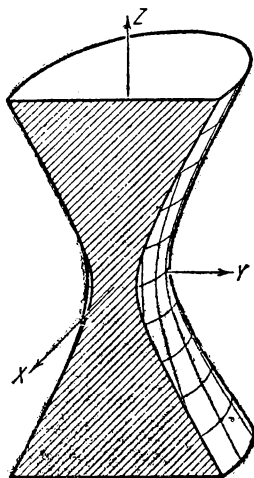
$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 0 \\ \text{и} \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Эти прямые изображены на черт. 246 (стр. 454).

Оказывается, существуют прямые линии, целиком лежащие на однополостном гиперboloиде. Читатель ещё в элементарной геомет-



a) 
$$\frac{y^2}{b^2(a^2-h^2)} - \frac{z^2}{c^2(a^2-h^2)} = 1 \quad (h < a).$$



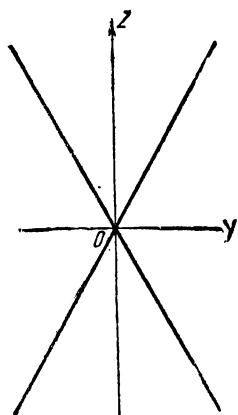
b) сечение однополостного гиперboloида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  плоскостью  $x = h$  ( $h < a$ ).

Черт. 245.

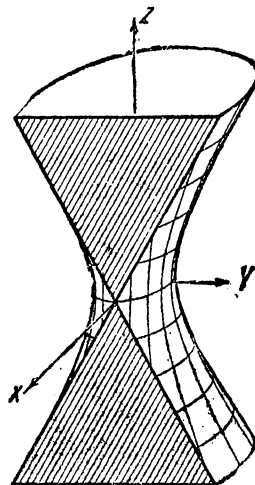
рии встречался с кривыми поверхностями, на которых могут целиком укладываться прямые линии; это — цилиндр и конус. Однако через любую точку, взятую на поверхности цилиндра или конуса, можно провести лишь одну прямую, лежащую на этой поверхности\*), а через точку  $B$  однополостного гиперboloида проходят две различные прямые, лежащие на этом гиперboloиде\*\*).

\*) Исключение представляет лишь вершина конуса.

\*\*) Ниже мы увидим, что точка  $B$  не является исключительной: через всякую точку однополостного гиперboloида проходят две прямые, лежащие на этом гиперboloиде.

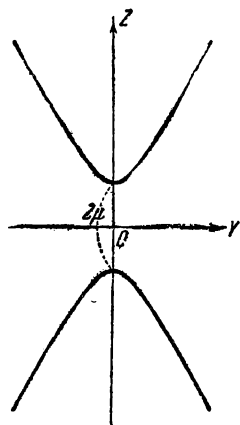


а)  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

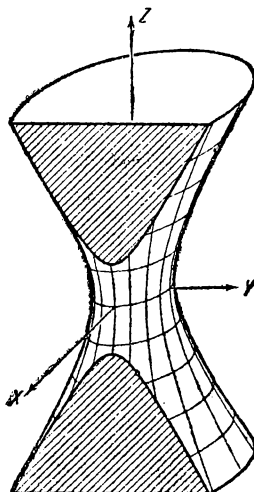


б) сечение однополостного гиперболоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$   
плоскостью  $x = h$  ( $h = a$ )

Черт. 246.



а)  $\frac{y^2}{\frac{b^2(a^2 - h^2)}{a^2}} - \frac{z^2}{\frac{c^2(a^2 - h^2)}{a^2}} = 1$  ( $h > a$ )



б) сечение однополостного гиперболоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$   
плоскостью  $x = h$  ( $h > a$ )

Черт. 247.

Пусть теперь секущая плоскость продолжает удаляться от плоскости  $YZ$ . Так как теперь  $h > a$ , то в уравнении (13) первый член отрицателен, а второй — положителен. Следовательно, это есть уравнение гиперболы, у которой действительная ось идёт по оси  $Z$ , а мнимая — по оси  $Y$  (черт. 247). Действительная полуось этой гиперболы

$$\mu = \frac{c}{a} \sqrt{h^2 - a^2},$$

а расстояние между вершинами гиперболы есть  $2\mu$ . Отсюда ясно, что при увеличении  $h$  вершины гиперболы раздвигаются.

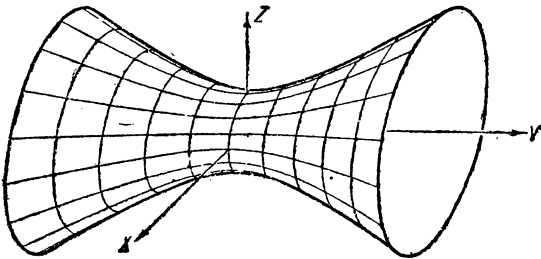
Аналогичное исследование можно провести относительно сечений гиперболоида плоскостями, параллельными  $ZX$ .

Каждая из координатных плоскостей является для однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (10)$$

плоскостью симметрии. Начало координат есть центр однополостного гиперболоида (10).

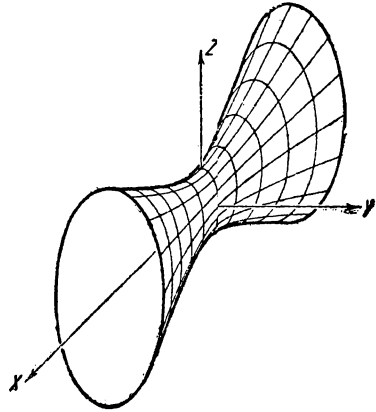
При  $a = b$  уравнение (10) принимает вид



Черт. 249. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

том случае, когда у него в левой части один член отрицателен, причём мы предположили, что отрицателен член, содержащий  $z$ . Мы не проводим исследования случаев, когда отрицателен какой-нибудь другой член, так как это отразится лишь на расположении однополостного гиперболоида относительно координатных осей (черт. 248 и 249).



Черт. 248. Однополостный гиперболоид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (17)$$

Очевидно, все сечения этой поверхности плоскостями, параллельными  $XY$ , суть окружности. Поверхность (17) называется *однополостным гиперболоидом вращения*. Она образуется вращением гиперболы вокруг её мнимой оси.

В этой мы исследовали уравнение (5) в

**231. Двухполостный гиперболоид.** Продолжая исследование уравнения (5), рассмотрим случай, когда в нём отрицательны два члена:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (18)$$

Поверхность, изображающая уравнение (18), называется *двухполостным гиперболоидом*.

Пересечём поверхность (18) плоскостью  $XU$ . Полагая в уравнении (18)  $z = 0$ , получим:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение, очевидно, невозможно, т. е. в плоскости  $XU$  нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению. Следовательно, плоскость  $XU$  не пересекает поверхности (18).

Проводим плоскость, параллельную  $XU$ ,

$$z = h.$$

В сечении с поверхностью (18) она даёт:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

или, после обычных преобразований,

$$\frac{\frac{x^2}{a^2(h^2 - c^2)}}{c^2} + \frac{\frac{y^2}{b^2(h^2 - c^2)}}{c^2} = 1. \quad (19)$$

Положим для определённости, что  $h$  положительно, т. е. секущая плоскость расположена выше плоскости  $XU$ . При малом  $h$  оба знаменателя в левой части уравнения (19) отрицательны; следовательно, уравнение невозможно, и плоскость не пересекает нашу поверхность. Это имеет место до тех пор, пока секущая плоскость, поднимаясь, не достигнет высоты  $c$ . При  $h = c$  уравнение (19) не имеет смысла (деление на  $h^2 - c^2$  было незаконным), но уравнение (18) непосредственно даёт

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

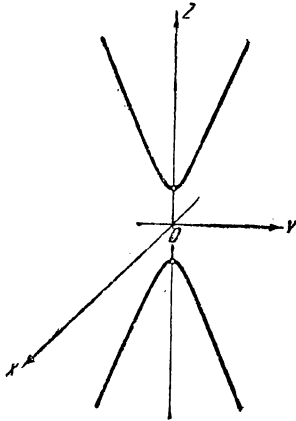
Это уравнение удовлетворяется лишь при  $x = 0, y = 0$ . Следовательно, плоскость  $z = c$  имеет с нашим двухполостным гиперболоидом одну общую точку:  $(0, 0, h)$ .

При  $h > c$  оба знаменателя в левой части уравнения положительны. Уравнение изображается эллипсом с полуосями

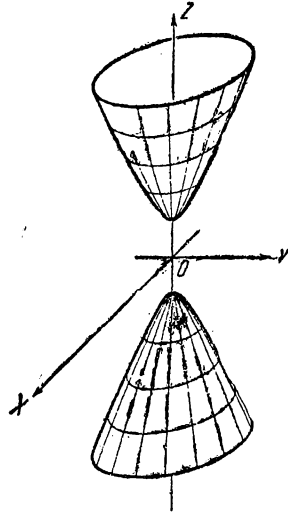
$$\lambda = \frac{a}{c} \sqrt{h^2 - c^2}, \quad \mu = \frac{b}{c} \sqrt{h^2 - c^2}. \quad (20)$$

Из формул (20) видно, что с увеличением  $h$  полуоси  $\lambda$  и  $\mu$  увеличиваются. Далее, видно, что все получающиеся эллипсы подобны (так как отношение  $\frac{\lambda}{\mu}$  не зависит от  $h$ ).

Рассматриваемая поверхность симметрична относительно плоскости  $XU$  [потому что в уравнении (18)  $z$  фигурирует только в чётной степени]. Следовательно, если секущая плоскость, параллельная плоскости  $XU$ , будет опускаться под плоскость  $XU$ , то сначала она не будет иметь общих точек с нашей поверхностью, затем она прикоснётся к ней в точке  $(0, 0, -c)$ , а затем, при дальнейшем опускании секущей пло-



Черт. 250. Сечение двухполостного гиперboloида  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  плоскостью  $YZ$ .



Черт. 251. Двухполостный гиперboloид  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

скости, в сечении будут получаться увеличивающиеся подобные эллипсы.

В сечении нашего двухполостного гиперboloида плоскостью  $XU$  получается гипербола

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

у которой действительная ось расположена на оси  $Z$ , а мнимая — на оси  $Y$  (черт. 250).

Теперь вид нашей поверхности вполне выяснен (черт. 251).

Сравнивая черт. 244 и 251, читатель поймёт, почему один гиперboloид называется однополостным, а другой двухполостным.

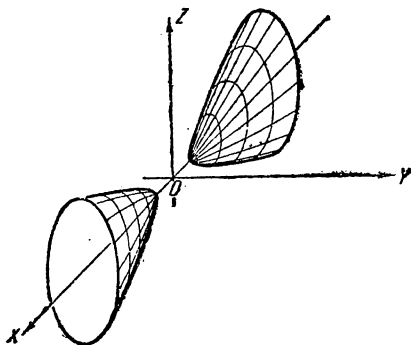
Каждая из координатных плоскостей является для двухполостного гиперboloида

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (18)$$

плоскостью симметрии. Начало координат есть центр двухполостного гиперболоида (18).

При  $a=b$  уравнение (18) принимает вид:

$$-\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (21)$$



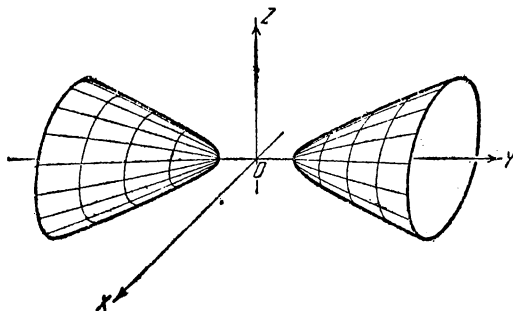
Черт. 252. Двухполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

В этом случае сечения, параллельные плоскости  $XY$ , суть окружности. Поверхность (21) называется *двухполостным гиперболоидом вращения*; она образуется при вращении гиперболы вокруг её действительной оси.

В этом п мы исследовали уравнение (5) (стр. 445) в том случае, когда у него в левой части два члена отрицательны, причём мы предположили, что положителен член, содержащий  $z$ .

Мы не проводим исследования случаев, когда положителен какой-либо другой член, так как это отразится лишь на расположении двухполостного гиперболоида относительно координатных осей (черт. 252 и 253).



Черт. 253. Двухполостный гиперболоид  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

Исследуя уравнение (5), мы рассмотрели следующие комбинации знаков в левой части:

- 1) Все три члена положительны (эллипсоид).
- 2) Один член отрицателен (однополостный гиперболоид).
- 3) Два члена отрицательны (двухполостный гиперболоид).

Все три члена отрицательны быть не могут, так как тогда сумма их не может давать единицы. Поэтому мы можем считать наше исследование уравнения (5) законченным.



**232. Эллиптический параболоид.** Исследуем поверхность

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0 \text{ и } q > 0). \quad (22)$$

Это уравнение напоминает каноническое уравнение параболы  $y^2 = 2px$ . Поверхность (22) называется *эллиптическим параболоидом*. Происхождение названия «эллиптический» выяснится после прочтения этого и следующего пп.

В знаменателях взяты буквы  $p$  и  $q$  в первой степени для того, чтобы уравнение было однородным относительно всех букв. Если взять неоднородное уравнение, например

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

то  $a$  и  $b$  не будут интерпретироваться отрезками.

Полагая в уравнении (22)  $z = 0$ , получим

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0 \quad (p > 0, q > 0).$$

Это уравнение удовлетворяется лишь при  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Следовательно, плоскость  $XU$  имеет с нашей поверхностью лишь одну общую точку (начало координат). Положим в уравнении (22)  $z = h$ :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \quad (p > 0, q > 0)$$

или

$$\frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \quad (p > 0, q > 0).$$

При положительном  $h$  это уравнение изображается эллипсом с полуосями:

$$\lambda = \sqrt{2ph}, \quad \mu = \sqrt{2qh}. \quad (23)$$

С увеличением  $h$  эти полуоси увеличиваются. Все получающиеся эллипсы подобны, так как отношение  $\frac{\lambda}{\mu}$  не зависит от  $h$ .

При отрицательном  $h$  уравнение (23) невозможно. Следовательно, поверхность (22) не имеет точек, расположенных ниже плоскости  $XU$ .

В сечении нашего эллиптического параболоида плоскостью  $YZ$  имеем параболу

$$y^2 = 2qz.$$

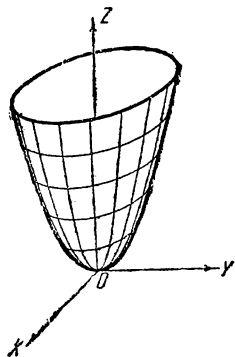
Теперь вид этой поверхности выяснен (черт. 254).

При  $p = q$  уравнение (18) принимает вид

$$x^2 + y^2 = 2pz. \quad (24)$$

В этом случае сечения, параллельные плоскости  $XU$ , суть окружности. Поверхность (24) называется *параболоидом вращения*. Она образуется вращением параболы вокруг её оси.

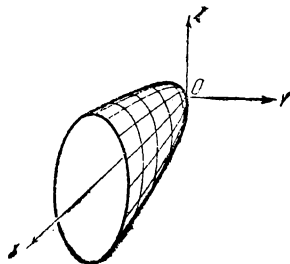
На черт. 255 и 256 изображены эллиптические параболоиды, иначе расположенные относительно координатных осей.



Черт. 254. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

( $p > 0, q > 0$ ).



Черт. 255. Эллиптический параболоид

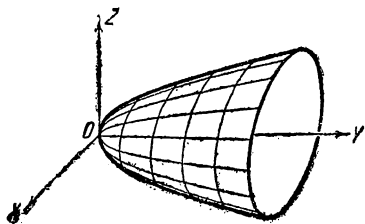
$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x$$

( $p > 0, q > 0$ ).

Случай, когда в уравнении (22) оба члена левой части отрицательны

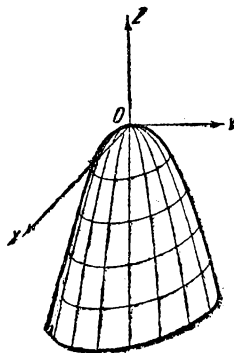
$$-\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0),$$

не представляет ничего существенно нового. Уравнение попрежнему изображается эллиптическим параболоидом, но расположенным, как



Черт. 256. Эллиптический па-

раболоид  $\frac{z^2}{p} + \frac{x^2}{q} = 2y$   
( $p > 0, q > 0$ ).



Черт. 257. Эллиптический па-

раболоид  $-\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$   
( $p > 0, q > 0$ ).

показано на черт. 257, случай же, когда эти члены имеют разные знаки, является существенно новым; он рассмотрен в следующем п.

**233. Гиперболический параболоид. Поверхность**

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (25)$$

называется *гиперболическим параболоидом*.

Пересечём поверхность (25) плоскостью  $XU$

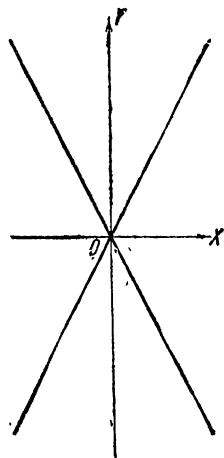
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0. \quad (*)$$

Левая часть уравнения (\*) разлагается на множителей

$$\left( \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \left( \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 0,$$

и, следовательно, уравнение (\*) изображается парой прямых:

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0 \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$



Итак, плоскость  $XU$  пересекает нашу поверхность по паре прямых (26). Эти прямые проходят через начало координат и симметричны относительно осей координат (черт. 258).

Черт. 258.  $\frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$   
( $p > 0, q > 0$ ).

Проведём секущую плоскость параллельно плоскости  $XU$  и притом выше неё:

$$z = h \quad (h > 0).$$

В сечении с поверхностью (25) эта плоскость даёт

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \quad (p > 0, q > 0, h > 0)$$

или

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1 \quad (p > 0, q > 0, h > 0). \quad (27)$$

Уравнение (27) изображается гиперболой. У этой гиперболы действительная ось расположена по оси  $X$ , а мнимая — по оси  $Y$  (черт. 259). Величина действительной полуоси

$$\lambda = \sqrt{2ph}.$$

Расстояние  $AB$  между вершинами гиперболы

$$AB = 2\lambda = 2\sqrt{2ph}.$$

Эта формула показывает, что при продвижении секущей плоскости вверх (т. е. при увеличении  $h$ )  $AB$  увеличивается. При опускании секущей плоскости  $AB$  уменьшается, и, когда секущая плоскость совпадает с плоскостью  $XY$ ,  $AB$  превращается в нуль, и гипербола превращается в пару прямых.

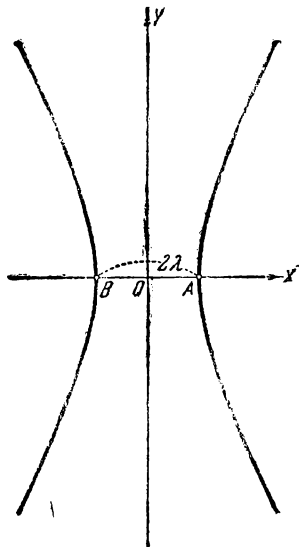
Теперь проведём секущую плоскость параллельно плоскости  $XY$  и притом ниже неё

$$z = \bar{h} \quad (h < 0).$$

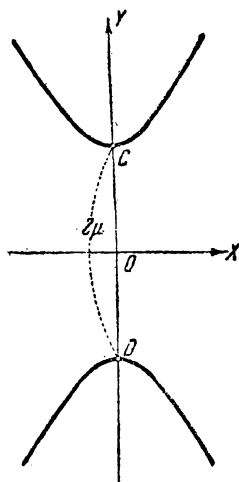
В сечении с поверхностью (25) эта плоскость даёт

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1 \quad (p > 0, q > 0, h < 0). \quad (28)$$

Уравнение (28) отличается от уравнения (27) тем, что у него оба знаменателя отрицательны; таким образом в левой части уравнения (28)



Черт. 259.  $\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$   
( $p > 0, q > 0, h > 0$ ).



Черт. 260.  
 $\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$   
( $p > 0, q > 0, h < 0$ ).

первый член отрицателен, а второй положителен. Уравнение (28) изображается гиперболой, у которой действительная ось расположена по оси  $Y$ , а мнимая по оси  $X$  (черт. 260). Величина действительной полуоси

$$\mu = \sqrt{-2qh} \quad (h < 0).$$

Расстояние  $CD$  между вершинами гиперболы

$$CD = 2\sqrt{-2qh} \quad (h < 0).$$

Из этой формулы видно, что при опускании секущей плоскости (т. е. при увеличении абсолютной величины  $h$ ) расстояние  $CD$  увеличивается.

Рассмотрим сечение нашего гиперболического параболоида плоскостью  $ZX$ . Полагая в уравнении (25)  $y = 0$ , получим

$$x^2 = 2pz \quad (p > 0). \quad (29)$$

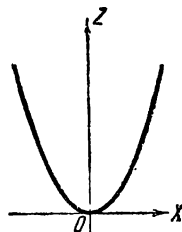
Уравнение (29) изображается параболой, расположенной как на черт. 261.

На черт. 262 изображены одновременно парабола черт. 261 и гипербола черт. 259. Обращаем внимание читателя на то, что вершины гиперболы (точки  $A$  и  $B$ ) лежат на параболе, изображённой на чертеже. Когда секущая плоскость, параллельная  $XY$ , поднимается, вершины  $A$  и  $B$ , как уже было сказано, раздвигаются. Теперь можно сказать, что  $A$  и  $B$  движутся вверх, оставаясь на параболе.

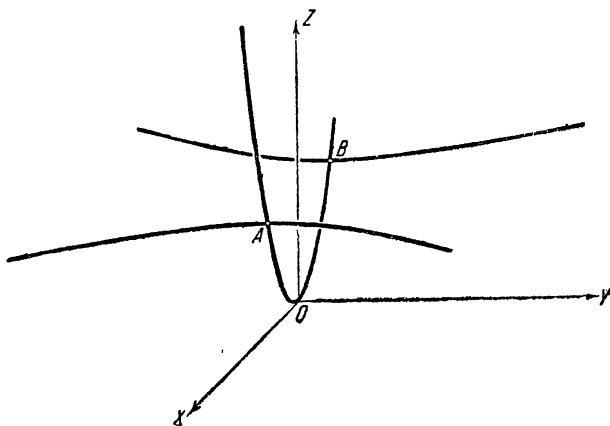
Пересечём наш гиперболический параболоид плоскостью  $YZ$ . Полагая в уравнении (25)  $x = 0$ , получим:

$$y^2 = -2qz \quad (q > 0). \quad (30)$$

Уравнение (30) изображается параболой, расположенной как на черт. 263.



Черт. 261.  
 $x^2 = 2pz$   
( $p > 0$ ).

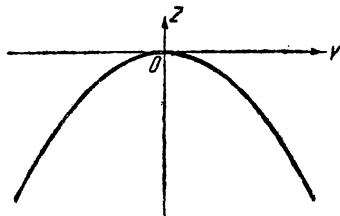


Черт. 262. Сечения гиперболического параболоида  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$   
( $p > 0, q > 0$ ) плоскостью  $ZX$  и плоскостью  $z = h$  ( $h > 0$ ).

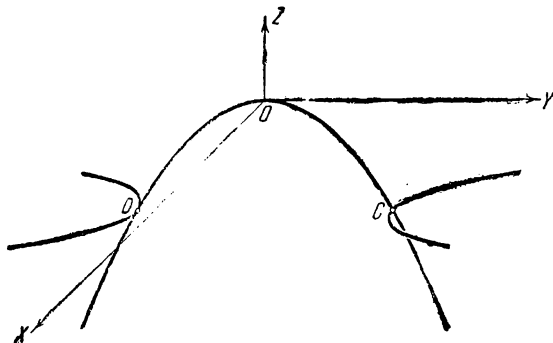
На черт. 264 изображена эта же парабола и гипербола (черт. 260) в системе пространственных координат.

Относительно черт. 264 можно сделать замечание, аналогичное тому, которое было сделано относительно черт. 262: при опускании секущей плоскости, параллельной плоскости  $XU$  и находящейся ниже неё, вершины гиперболы (точки  $C$  и  $D$ ) раздвигаются, двигаясь по параболе.

Всего сказанного достаточно, чтобы вычертить гиперболический параболоид. Для этого прежде всего наносим на чертёж две параболы черт. 262 и 264. Затем чертим ряд гипербол таких, как на черт. 262: их вершины лежат на верхней параболе. Затем чертим ряд гипербол таких, как на черт. 264: их вершины лежат на нижней параболе. Вычерченные сечения дают представление об общем виде гиперболического параболоида (черт. 265). Гиперболический параболоид похож на седло, но надо иметь в виду, что гиперболический параболоид продолжается до бесконечности (т. е. на черт. 265 изображён лишь кусок гиперболического параболоида).



Черт. 263.  $y^2 = -2qz$  ( $q > 0$ ).



Черт. 264. Сечения гиперболического параболоида  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$  ( $p > 0, q > 0$ ) плоскостью  $YZ$  и плоскостью  $z = h$  ( $h < 0$ ).

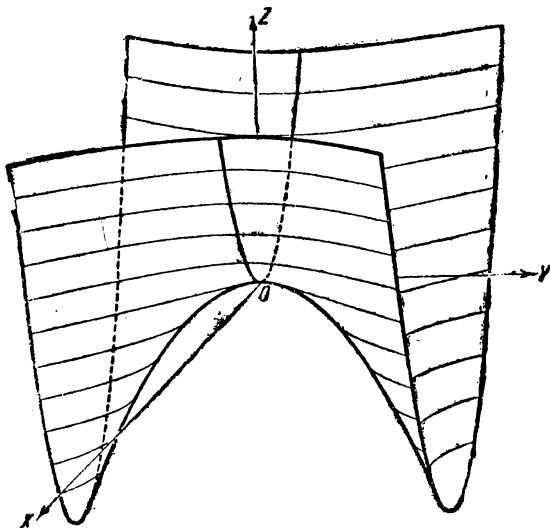
Дадим ещё другой способ вычерчивания гиперболического параболоида, основанный на исследовании сечений, параллельных плоскости  $YZ$ . Полагая в уравнении (25)  $x = h$ , получим

$$\frac{h^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0)$$

или

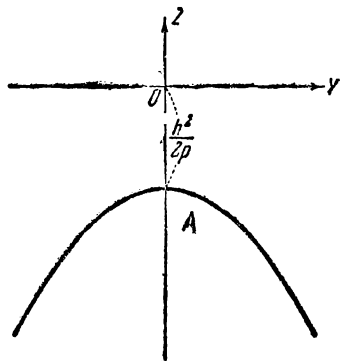
$$z = -\frac{1}{2q}y^2 + \frac{h^2}{2p} \quad (p > 0, q > 0), \quad (31)$$

Уравнение (31) изображается параболой, расположенной как показано на черт. 266. При движении секущей плоскости, т. е. при



Черт. 265. Гиперболический параболоид  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$  ( $p > 0$ ,  $q > 0$ ).

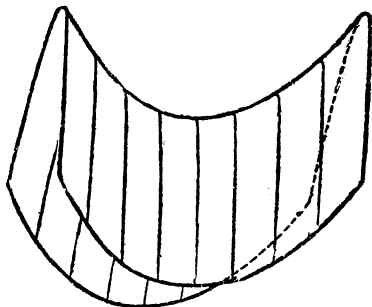
изменении  $h$ , размеры параболы (31) не изменяются, так как эти размеры определяются коэффициентом при  $y^2$  [п 99 (стр. 185)], который не зависит от  $h$ . Геометрически очевидно, что вершина  $A$  этой параболы лежит на параболе  $x^2 = 2pz$  (черт. 262), представляющей сечение нашего гиперболического параболоида плоскостью  $ZX$ . Отсюда вытекает следующее построение. Чертим параболу  $x^2 = 2pz$  (черт. 262). Затем чертим ряд *одинаковых* парабол, плоскости которых перпендикулярны плоскости первой параболы, вершины которых лежат на первой параболе, но которые раскрываются в противоположную сторону по отношению к первой параболе (черт. 267). Можно сказать, что мы имеем семейство парабол, навешанных на одну параболу, как бублики на нитку.



Черт. 266.  $z = -\frac{1}{2q}y^2 + \frac{h^2}{2p}$ .

Подчеркнем ещё раз тот факт, что на гиперболическом параболоиде существуют прямые, целиком на нём укладывающиеся (например, сечение плоскостью  $XU$ ).

Гиперболический параболоид не может быть поверхностью вращения, так как все его сечения являются незамкнутыми линиями и, следовательно, не могут оказаться окружностями. Если  $p = q$ , то уравнение (25) примет вид



Черт. 267. Образование гиперболического параболоида конгруэнтными параболойдами.

$$x^2 - y^2 = 2pz. \quad (32)$$

В этом случае гипербола, изображённые на черт. 259 и 260, являются равносторонними.

Уравнение (32) может быть упрощено поворотом системы координат вокруг оси  $Z$  на  $135^\circ$ . При этом координата  $z$ , очевидно, не изменится, а координаты  $x$  и  $y$  преобразуются по формулам поворота осей,

известным из аналитической геометрии на плоскости:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ z &= z'. \end{aligned} \right\}$$

Уравнение (32) преобразуется так:

$$\left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right]^2 - \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right]^2 = 2pz'$$

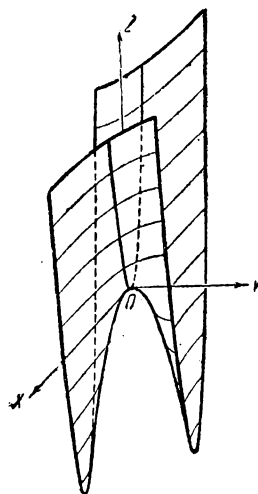
или, после упрощений,

$$x'y' = pz'.$$

Отбрасывая штрихи, запомним, что уравнение

$$xy = pz \quad (33)$$

изображается гиперболическим параболоидом, расположенным, как показано на черт. 268. Сечение этого гиперболического параболоида плоскостями, параллельными плоскости  $XU$ , суть равносторонние гипербола. Сама плоскость  $XU$  пересекает гиперболический параболоид (33) по осям координат.



Черт. 268. Гиперболический параболоид  $xy = pz$ .

**234. Линейчатость как следствие седлообразности.** В этом параграфе читатель узнал о существовании линейчатых поверхностей, отличных от ци-



линдра и конуса. Тот факт, что кривая поверхность может быть образована прямыми линиями, при первом поверхностном размышлении иногда кажется противоречащим геометрической интуиции. В этом мы укажем на одно глубокое основание этого факта, после чего он будет казаться вполне естественным.

Пусть на некоторой поверхности взята точка  $M$ . Проведём в этой точке нормаль\*)  $MN$  к поверхности. Проведём плоскость  $P$ , проходящую через эту нормаль. Плоскость  $P$  пересечёт нашу поверхность по некоторой линии; эта линия называется *нормальным сечением*.

Если через нормаль  $MN$  проводить всевозможные плоскости, то они в пересечении с поверхностью дадут всевозможные нормальные сечения, проходящие через точку  $M$  (пучок нормальных сечений).

Представим себе наблюдателя, находящегося в какой-нибудь точке нормали и рассматривающего из этой точки нормальные сечения. Для некоторых поверхностей, например, для сферы, если наблюдатель находится на нормали с одной стороны, то ему *все* нормальные сечения кажутся выпуклыми, если же он смотрит с противоположной стороны, то *все* нормальные сечения кажутся ему вогнутыми.

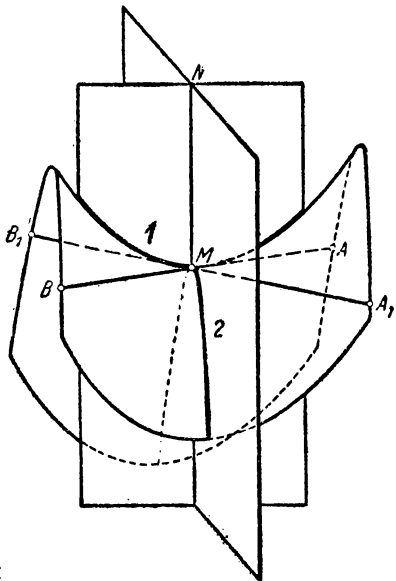
Однако существуют такие поверхности, у которых при рассматривании пучка нормальных сечений с одной стороны одни нормальные сечения кажутся выпуклыми, а другие вогнутыми (черт. 269). Примером таких поверхностей может служить седло.

На черт. 270 изображено седло.  $M$  — центральная точка седла,  $MN$  — нормаль к седлу. Если провести через  $MN$  секущую плоскость по направлению от головы лошади к хвосту, то полученное нормальное сечение (линия 1 на черт. 269) кажется при рассматривании из точки  $N$  вогнутым. Если же провести через  $MN$  секущую плоскость «поперёк лошади», то полученное нормальное сечение (линия 2 на черт. 269) кажется при рассматривании из точки  $N$  выпуклым.

Точка  $M$ , в которой пучок нормальных сечений имеет такое устройство, называется *седлообразной*. Все точки однополостного гиперболоида, а также гиперболического параболоида — седлообразные. Пример поверхности с седлообразными точками читатель может найти у себя на руке (черт. 271).

Мы сейчас покажем, что через седлообразную точку всегда проходят две прямые, лежащие (хотя, может быть, не на всём своём протяжении) на поверхности.

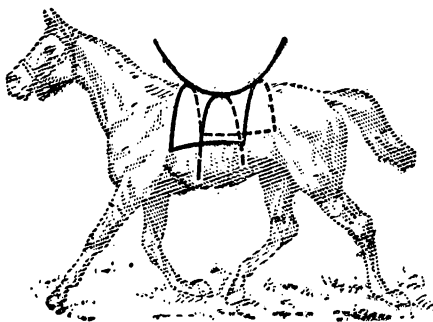
Рассмотрим поверхность, изображённую на черт. 269 (гиперболический параболоид). Возьмём на ней точку  $M$  и рассмотрим нормаль  $MN$ . Примем за секущую плоскость плоскость чертежа. Сечение 1 кажется из точки  $N$



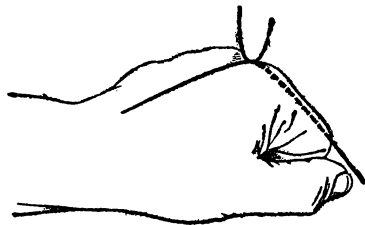
Черт. 269. Линейчатость как следствие седлообразности.

\*) О нормали к поверхности см. Н. Н. Лузин, Дифференциальное исчисление, Москва, 1946. § 182 (стр. 418) или А. Ф. Бермант, Курс математического анализа для вузов, ч. 2-ая, Москва, 1946, гл. IX (стр. 88).

вогнутым. Будем непрерывно поворачивать секущую плоскость вокруг нормали  $MN$ ; тогда нормальное сечение будет непрерывно деформироваться. Когда секущая плоскость повернётся на  $90^\circ$ , то она пересечёт поверхность по линии 2; эта линия кажется из точки  $N$  выпуклой. Ясно, что нормальное сечение, непрерывно деформируясь из вогнутого 1 в выпуклое 2, должно было пройти через прямолинейную форму. Сечение 1 при вращении секущей плоскости постепенно «разгибалось», наконец, стало прямой



Черт. 270. Седло.



Черт. 271. Седлообразная поверхность на руке у человека.

линией  $AMB$ , а затем «загнулось» в противоположную сторону, т. е. стало казаться из точки  $N$  выпуклым.

Другая прямая линия  $A_1MB_1$  получится при вращении секущей плоскости в другом направлении. Все нормальные сечения, проходящие через точку  $M$  и расположенные внутри углов  $AMA_1$  и  $BMB_1$ , кажутся из точки  $N$  вогнутыми, а сечения, расположенные внутри углов  $AMB$  и  $A_1BM_1$ , — выпуклыми. Таким образом из факта седлообразности точки вытекает существование на поверхности двух прямых, проходящих через эти точки. Седлообразная поверхность (т. е. поверхность, у которой все точки седлообразные) всегда линейчатая.

### Задача

**448.** Описать следующие поверхности второго порядка:

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| a) $16x^2 + 16y^2 + 3z^2 - 48 = 0$ ; | k) $5x^2 + 5y^2 + z^2 - 25 = 0$ ;  |
| b) $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 4 = 0$ ;     | l) $x^2 - z^2 + 3y = 0$ ;          |
| c) $3x^2 + 5y^2 - 15z^2 - 45 = 0$ ;  | m) $3x^2 + y^2 - 9z = 0$ ;         |
| d) $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ ;       | n) $36x^2 + 4y^2 + z^2 - 36 = 0$ ; |
| e) $3y^2 - 5z^2 - 15x = 0$ ;         | o) $4x^2 - 4y^2 - 3z^2 - 12 = 0$ ; |
| f) $2x^2 - y^2 + 2z^2 + 10 = 0$ ;    | p) $10x^2 - y^2 + 10z = 0$ ;       |
| g) $6x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6 = 0$ ;    | q) $y^2 + z^2 - x = 0$ ;           |
| h) $y^2 - z^2 + x = 0$ ;             | r) $x^2 - y^2 - 2z = 0$ ;          |
| i) $9x^2 - 25y^2 + 9z^2 - 225 = 0$ ; | s) $x^2 + 2z^2 - 8y = 0$ .         |
| j) $x^2 - 8z^2 + 8y = 0$ ;           |                                    |

## § 2. Некоторые дополнительные сведения о поверхностях

**235. Поверхности вращения.** Пусть дана в пространстве некоторая прямая  $a$  и некоторая плоская линия  $(C)$ , лежащая в одной плоскости с этой прямой. Мы говорим, что линия  $(C)$  вращается около прямой  $a$ , если каждая точка линии  $(C)$  описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна прямой  $a$  и центр которой лежит на прямой  $a$  (черт. 272). Прямая  $a$  называется *осью вращения*, а поверхность, описываемая линией  $(C)$ , называется *поверхностью вращения*.

Сечение поверхности вращения любой плоскостью, перпендикулярной оси вращения, есть круг. Эти круги называются *параллельными кругами*.

Сечение поверхности вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, называется *меридиональным сечением*, или, короче, *меридианом*. Все меридианы, очевидно, конгруэнтны: это — линия  $(C)$  в разных положениях.

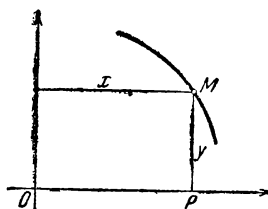
Случай, когда поверхность вращения образована не плоской линией, а также случай, когда она образована плоской линией, но не лежащей в одной плоскости с осью вращения, не приводят нас к новым поверхностям. В самом деле, после того как такая поверхность вращения уже образована, можно провести меридиональное сечение: это — плоская линия, лежащая в одной плоскости с осью вращения. Рассматриваемая поверхность вращения может быть также образована вращением *этой* линии.

В этом п мы рассмотрим следующую задачу: зная уравнение линии  $(C)$ , образующей своим вращением поверхность (т. е. уравнение меридиана), составить уравнение поверхности вращения. За

ось вращения мы всегда будем принимать одну из координатных осей.

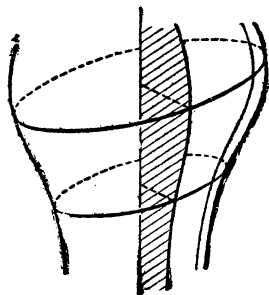
Итак, пусть в системе координат на плоскости дана некоторая линия

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$



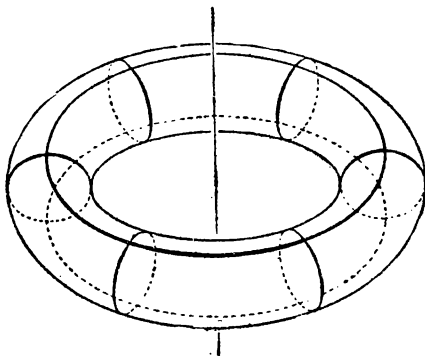
Черт. 273.

Представим себе, что эта линия вращается вокруг оси  $Y$ . Вообразим ось  $Z$ , проведенную перпендикулярно плоскости черт. 273. Если  $M$  есть любая точка нашей линии, то её координаты  $PM = x$ , и  $MQ = y$  удовлетворяют уравнению (1). Но при вращении вокруг оси  $Y$  расстояние точки  $M$  от плоскости  $ZX$ , т. е.  $y$ , всё время



Черт. 272. Поверхность вращения.

будет оставаться равным  $MP$ , а расстояние точки  $M$  от оси  $Y$ , т. е.  $\sqrt{z^2 + x^2}$ , всё время будет оставаться равным  $MQ$ . Следовательно, выражения  $y$  и  $\sqrt{z^2 + x^2}$  должны удовлетворять тому же уравнению, которому удовлетворяли  $y$  и  $x$ , т. е.



Черт. 274. Тор.

$$F(\sqrt{z^2 + x^2}, y) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) удовлетворяется для любой точки линии (1) всё время при её вращении вокруг оси  $Y$ , т. е. оно удовлетворяется для всех точек рассматриваемой поверхности вращения. Итак, чтобы получить уравнение поверхности вращения линии  $F(x, y) = 0$  вокруг оси  $Y$ , следует заменить в уравнении этой линии  $x$  через  $\sqrt{z^2 + x^2}$ .

Читатель сам разберётся, как видоизменяется это правило, если уравнение меридиана дано в другой координатной плоскости или вращение происходит вокруг другой оси.

Пример 1. Получить уравнение поверхностей вращения гиперболы около её действительной и мнимой осей.

Возьмём уравнение гиперболы в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Эта гипербола лежит в плоскости  $ZX$ ; её действительная ось расположена на оси  $X$ , а мнимая — на оси  $Z$ . Чтобы получить уравнение поверхности вращения около оси  $Z$ , следует заменить в уравнении данной гиперболы  $x$  через  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Производя это, получим

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Это есть уравнение однополостного гиперболоида вращения. Замена в уравнении данной гиперболы  $z$  через  $\sqrt{y^2 + z^2}$ , получим уравнение двухполостного гиперболоида, описываемого данной гиперболой при вращении около оси  $x$ :

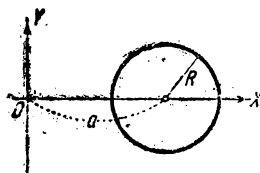
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Пример 2. Пусть дан круг и прямая, лежащая в плоскости этого круга и не пересекающая его. Если круг будет вращаться около этой прямой, то он опишет тело, называемое *тором* (черт. 274);

автомобильная шина имеет форму тора. Выведем уравнение поверхности тора.

Расположим исходную окружность в плоскости  $ZX$ ; центр её поместим на оси  $X$  (черт. 275). Уравнение этой окружности таково:

$$(x - a)^2 + z^2 = R^2.$$



$$(x - a)^2 + z^2 = R^2.$$

Черт. 275.

За ось вращения примем ось  $Z$ . Обращаем внимание читателя на то, что перенос центра взятого круга параллельно оси вращения не влияет на форму и размеры тора (поэтому мы и взяли центр на оси  $X$ ), а перенос этого центра ближе к оси вращения или дальше от неё — влияет. Вообще форма и размеры тора зависят от двух параметров: от радиуса  $R$  вращающегося круга и от расстояния  $a$  центра этого круга от оси вращения.

Заменяя в уравнении окружности  $x$  через  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , получим

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = R^2$$

или, после избавления от радикалов

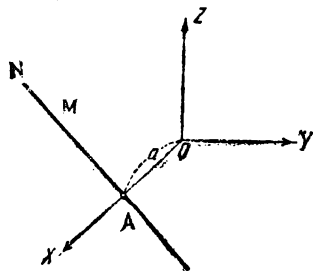
$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \quad (3)$$

Таким образом поверхность тора есть поверхность четвёртого порядка.

**236. Однополостный гиперболоид вращения как поверхность вращения прямой линии.** В предыдущем п речь шла о нахождении уравнения поверхности, получающейся при вращении плоской линии около оси, *лежащей в плоскости этой линии*. Однако читатель усвоивший изложенный там метод, легко сумеет расширить рамки этой задачи. Не касаясь общих вопросов, мы рассмотрим лишь один пример, приводящий к интересному результату.

Пусть даны две скрещивающиеся прямые. Какую поверхность опишет одна из них, вращаясь около другой?

Примем ось вращения за ось  $Z$ , а общий перпендикуляр двух данных прямых — за ось  $X$  (черт. 276). Прямая  $AN$  проходит через точку  $A(a, 0, 0)$  и имеет направляющий вектор  $mf + nk$  (потому что она перпендикулярна оси  $X$ ). Следовательно, уравнения этой прямой таковы:



$$\frac{x - a}{0} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

Черт. 276.

$$\frac{x - a}{0} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \quad (4)$$

или

$$x = a, \quad y = \frac{m}{n} z. \quad (4')$$

Пусть  $M$  — произвольная точка нашей прямой. При вращении точка  $M$  опишет окружность. При этом координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  будут изменяться. Сумма квадратов этих координат, т. е.  $x^2 + y^2$ , будет оставаться неизменной (это — квадрат расстояния точки  $M$  от оси вращения), координата  $z$  тоже будет оставаться неизменной. В начальном положении сумма  $x^2 + y^2$  выражалась [см. уравнения (4')] так:

$$x^2 + y^2 = a^2 + \frac{m^2}{n^2} z^2. \quad (5)$$

Ввиду неизменности  $x^2 + y^2$  и  $z$  это уравнение будет иметь место всё время при вращении точки  $M$ . Оно справедливо для всех точек  $M$  прямой  $AN$  всё время при вращении этой прямой и только для них, т. е. оно есть уравнение поверхности вращения этой прямой.

Приводя уравнение (5) к виду

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{\left(\frac{an}{m}\right)^2} = 1, \quad (5')$$

мы узнаём, что рассматриваемая поверхность есть однополостный гиперболоид вращения [§ 1, уравнение (17) (стр. 455)].

Черт. 277. Две серии образующих однополостного гиперболоида.

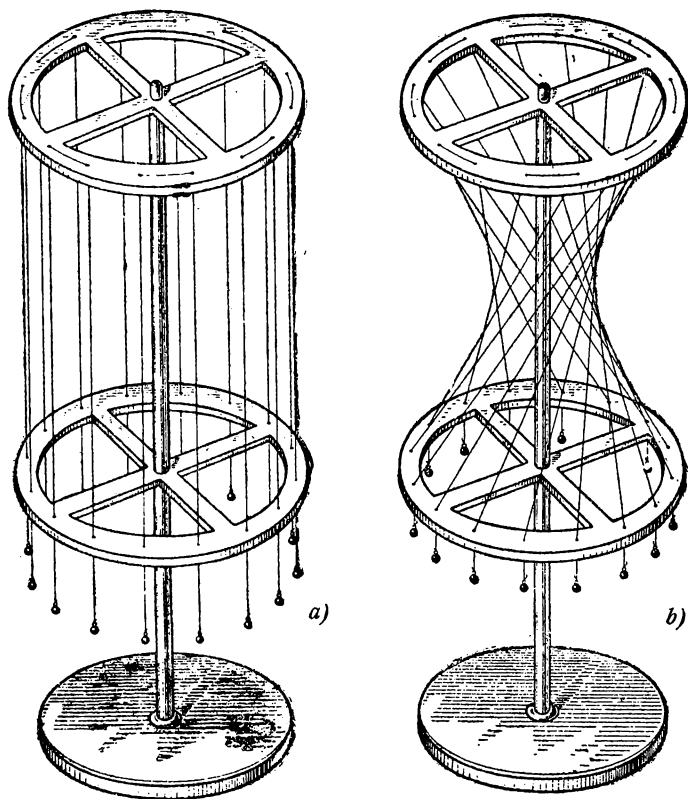
Таким образом однополостный гиперболоид вращения может быть целиком составлен из прямых линий (все положения, занимаемые прямой  $AN$  при её вращении), т. е. является *линейчатой* поверхностью. Ясно, что через каждую точку нашего гиперболоида проходит прямая линия, лежащая на нём целиком; такие прямые называются *образующими*. Заметим, что прямая

$$\frac{x - a}{0} = \frac{y}{-m} = \frac{z}{n} \quad (6)$$

при вращении около оси  $Z$  опишет *тот же самый* гиперболоид, что и прямая (4), так как знак  $m$  не оказывает влияния на уравнение (5').

Таким образом подтверждается, что через каждую точку гиперболоида проходят две различные прямые, лежащие на нём, т. е. две образующие [см. п 234 (стр. 467)]. Все положения вращающейся прямой (4) составляют так называемую одну *серию* образующих; различные положения прямой (6) дают другую серию образующих. На

черт. 277 изображены обе серии образующих гиперboloида \*). Прямые (4) и (6) симметричны одна другой относительно плоскостей  $XU$  и  $ZX$ .



Черт. 278. Прибор для образования однополостного гиперboloида вращения из нитей.

На том факте, что однополостный гиперboloид вращения может быть образован вращением прямой около скрещивающейся оси, основана следующая модель этой поверхности.

На черт. 278 а) изображены два одинаковых круга, укрепленные на оси, перпендикулярной их плоскостям и проходящей через их центры. В точках,

\*) Принадлежность двух образующих к одной серии или к разным сериям может быть связана с более общим свойством, чем происхождение от вращения одной или разных прямых, так две серии образующих существуют не только на однополостном гиперboloиде вращения, но и на других линейчатых поверхностях. Вот это свойство: две образующие, принадлежащие одной серии, скрещиваются; две образующие, принадлежащие разным сериям, пересекаются.

расположенных вдоль окружности верхнего круга, прикреплены нити, которые идут вертикально вниз и пропущены через отверстия, расположенные вдоль окружности нижнего круга. К нижнему концу каждой нити прикреплен груз, удерживающий её в натянутом состоянии. Очевидно, эти нити образуют круговой цилиндр.

Если повернуть нижний круг около оси на некоторый угол  $\alpha$ , то нити образуют однополостный гиперboloид вращения (черт. 278 б). Это ясно из того, что любая из этих нитей при вращении около оси займёт последовательно положения всех остальных нитей.

Если повернуть нижний круг на тот же угол  $\alpha$  в противоположную сторону от начального положения, то получится другая серия образующих *того же самого* гиперboloида.

Если однополостный гиперboloид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7)$$

подвергнуть равномерному сжатию вдоль оси  $Y$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= x', \\ y &= \frac{a}{b} y', \\ z &= z', \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

то он перейдёт в однополостный гиперboloид общего вида

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c} = 1. \quad (9)$$

Так как при равномерном сжатии прямые линии остаются прямыми, то у всякого однополостного гиперboloида (а не только у однополостного гиперboloида вращения) через каждую его точку проходят две образующие, т. е. прямые, целиком лежащие на этом гиперboloиде.

**237. Конические поверхности.** Предполагается, что читатель, приступающий к чтению этого п, знаком из курса анализа с понятием однородной функции нескольких переменных. Ограничимся напоминанием: функция  $F(x, y, z)^*$  называется однородной, если для неё удовлетворяется следующее тождество:

$$F(tx, ty, tz) = t^n \cdot F(x, y, z); \quad (10)$$

$n$  называется *измерением* однородной функции.

Пусть дано уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \quad (11)$$

---

\*) Разумеется, функция любого числа аргументов может быть однородной. В этом п нас интересуют функции трёх аргументов.



где  $F(x, y, z)$  — однородная функция; такое уравнение называется однородным уравнением. Выясним, какой поверхностью изображается это уравнение.

Пусть  $A(x_1, y_1, z_1)$  есть какая-нибудь одна точка, принадлежащая поверхности (11). Значит координаты этой точки удовлетворяют уравнению (11):

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим другую точку  $B(tx_1, ty_1, tz_1)$ ; координаты этой точки получены из соответственных координат точки  $A$  умножением на один и тот же множитель  $t$ . Легко показать, что координаты точки  $B$  тоже удовлетворяют уравнению (11). В самом деле, при подстановке координат точки  $B$  в левую часть уравнения (11) получим

$$F(tx_1, ty_1, tz_1).$$

Это выражение в силу однородности функции  $F$  равно

$$t^n \cdot F(x_1, y_1, z_1),$$

а это последнее выражение равно нулю в силу уравнения (12) [т.е. в силу того, что точка  $A$  лежит на поверхности (11)].

Итак, если точка  $A(x_1, y_1, z_1)$  лежит на поверхности (11), то и точка  $B(tx_1, ty_1, tz_1)$  при *любом*  $t$  тоже лежит на поверхности (11).

Точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(tx_1, ty_1, tz_1)$  лежат на прямой, проходящей через начало координат. При изменении  $t$  точка  $B$  описывает эту прямую. Её параметрические уравнения:

$$x = tx_1,$$

$$y = ty_1,$$

$$z = tz_1,$$

а симметричные уравнения:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}.$$

Значит, если какая-нибудь точка  $A$  принадлежит поверхности (11), то и вся прямая  $OA$  ( $O$  — начало координат) принадлежит этой поверхности. Следовательно, поверхность (11) состоит из прямых, проходящих через начало, т. е. она является конической поверхностью с вершиной в начале координат.

Итак, *уравнение*

$$F(x, y, z) = 0,$$

где левая часть есть однородная функция, изображается конической поверхностью с вершиной в начале координат.

Пример. В уравнении

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

левая часть есть однородная функция, и, следовательно, это есть уравнение конуса \*) с вершиной в начале.

Это уравнение было исследовано в § 1 этой главы методом сечений [см. уравнение (4) (стр. 442)], и там было обнаружено, что оно изображается конусом с вершиной в начале [черт. 231 (стр. 443)].

Заметим, что коническая поверхность с вершиной в начале, в частности, может превратиться в плоскость, проходящую через начало [если в левой части уравнения (11) стоит однородная функция первой степени].

Заметим далее, что когда мы доказывали, что уравнение (11) изображается конусом с вершиной в начале, то мы предполагали, что можно найти одну точку  $A$ , отличную от начала, принадлежащую поверхности (11). Если же такой точки найти нельзя, т. е. не существует ни одной точки, кроме начала координат, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (11) \*\*), то это уравнение изображается не конусом, а одной точкой — началом координат. Таково, например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Может также встретиться случай, когда можно найти несколько *отдельных* точек  $A_1, A_2, \dots$ , из которых никакие две не лежат на одной прямой с началом координат и которые удовлетворяют уравнению (11), но нельзя найти линию, состоящую из таких точек. В этом случае однородное уравнение изображается не конусом, а отдельными прямыми  $OA_1, OA_2, \dots$

Например, однородное уравнение

$$x^2 + y^2 = 0,$$

равносильное двум уравнениям  $x = 0$  и  $y = 0$ , изображается осью  $Z$ .

Читателя, вероятно, заинтересует вопрос, какой вид имеет уравнение конуса с вершиной не в начале. Если вершина конуса находится в точке  $(a, b, c)$ , то левая часть его уравнения должна быть однородной функцией от разностей  $x - a$ ,  $y - b$  и  $z - c$ . В самом деле, если мы перенесём начало в точку  $(a, b, c)$ :

$$x = x_1 + a,$$

$$y = y_1 + b,$$

$$z = z_1 + c,$$

\*) Словом «конус» мы обозначаем коническую поверхность.

\*\*) Начало координат принадлежит поверхности (11) если  $n > 0$ , так как нулевые значения аргументов всегда обращают однородную функцию положительного измерения в нуль. В этом можно убедиться, подставив в тождество (10)  $t = 0$ .

то после такого преобразования должно получиться уравнение, однородное относительно  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$ . Но наше преобразование, которое можно написать так:

$$\begin{aligned}x - a &= x_1, \\ y - b &= y_1, \\ z - c &= z_1,\end{aligned}$$

заключается в замене разностей  $x - a$ ,  $y - b$  и  $z - c$  соответственно через  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$ . Следовательно, до преобразования уравнение было однородным относительно  $x - a$ ,  $y - b$  и  $z - c$ .

Например, уравнение

$$(x - 1)^2 + (y + 2)(z - 5) - (z - 5)^2 + 4(y + 2)^2 = 0 \quad (*)$$

есть уравнение конуса с вершиной в точке  $(1, -2, 5)$ .

По виду уравнения не всегда можно сразу распознать, что оно является однородным относительно выражений  $x - a$ ,  $y - b$  и  $z - c$ . Например, если бы уравнение  $(*)$  было дано в раскрытом виде

$$x^2 + 4y^2 + yz - z^2 - 2x + 11y + 12z - 18 = 0,$$

то мы вряд ли сумели бы установить, что его левая часть есть однородная функция от  $x - 1$ ,  $y + 2$  и  $z - 5$  и что оно может быть представлено в виде  $(*)$ . Эта задача не будет рассматриваться в настоящей книге.

**238. Замечания об исследовании общего уравнения второй степени.** Общее уравнение второй степени с тремя переменными может быть написано в виде

$$\begin{aligned}Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + 2Gx + \\ + 2Hy + 2Iz + J = 0. \quad (13)\end{aligned}$$

Задача исследования этого уравнения формулируется так же, как аналогичная задача в аналитической геометрии на плоскости [п 112 (стр. 202)], но решение её теми элементарными методами, какими мы пользовались в части первой, очень громоздко. Здесь требуется привлечение некоторых более совершенных методов.

Не занимаясь в этой книге исследованием уравнения (13), сообщим читателю, что это исследование приводит к следующим двенадцати случаям:

- 1) Эллипсоид.
- 2) Однополостный гиперболоид.
- 3) Двухполостный гиперболоид.
- 4) Эллиптический параболоид.
- 5) Гиперболический параболоид.
- 6) Конус второго порядка.
- 7) Цилиндр второго порядка.
- 8) Пара плоскостей. Пример:

$$(2x - y + 3z - 6)(x + 3y + 8z - 1) = 0.$$

- 9) Двойная плоскость. Пример:  $(3x - 8y + z + 2)^2 = 0$ .

10) Прямая линия. Пример:

$$(2x + y + z - 3)^2 + (x - 3y + 6z - 5)^2 = 0.$$

11) Точка. Пример:

$$(2x + y - z - 7)^2 + (x + 3y + z - 8)^2 + (4x - y - 2z - 5)^2 = 0.$$

12) Уравнение невозможно. Пример:

$$(2x + y - z - 7)^2 + (x + 3y + z - 8)^2 + (4x - y - 2z - 5)^2 = -1.$$

В общей теории поверхностей второго порядка доказывается, что этими двенадцатью случаями исчерпываются все возможности, которые могут встретиться при исследовании уравнения второй степени, т. е. уравнение (13) при любых значениях коэффициентов относится к одному из этих двенадцати случаев.

Отсюда между прочим следует, что существуют только следующие поверхности второго порядка в собственном смысле (случаи, начиная с восьмого, мы не считаем за поверхности второго порядка в собственном смысле): эллипсоид, однополостный гиперболоид, двухполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид, различные \*) цилиндры и конусы второго порядка.

### Задачи

**449.** Составить уравнение поверхности вращения

- а) прямой  $y = kx$  вокруг оси  $X$ ;
- б) эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  вокруг оси  $Y$ ;
- в) синусоиды  $y = \sin x$  вокруг оси  $X$ ;
- д) параболы  $y^2 = 2px$  вокруг оси  $X$ ;
- е) параболы  $y^2 = 2px$  вокруг оси  $Y$ .

**450.** Указать геометрический смысл в пространстве следующих уравнений:

- а)  $x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$ ;    в)  $x^2 + y^2 + 5z^2 = 0$ ;    г)  $x^2 - y^2 = 0$ ;
- б)  $x^2 - y^2 - 3z^2 = 0$ ;    д)  $x^2 + y^2 = 0$ ;    е)  $\frac{z}{y} = \left(\frac{y}{x}\right)^3$ .

---

\*) То-есть эллиптические, гиперболические и параболы.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Если ответ не выражается точно десятичным числом, то следует наряду с точным ответом давать приближённый с тремя значащими цифрами. Если в ответе фигурирует несколько чисел, то все они округляются до одного и того же десятичного разряда, а именно до наиболее крупного. Пусть, например, получилась точка с координатами  $\left(\frac{2}{7}, \sqrt{113}\right)$ . Выражая приближённо эти числа десятичными дробями с тремя значащими цифрами, получим (0,286; 10,6). Так как большее из полученных чисел оканчивается десятичными долями, то мы округляем и меньшее до десятых и даём ответ в виде (0,3; 10,6). Это правило объясняется тем, что при обычных условиях четвертую и следующие значащие цифры трудно реализовать на чертеже. Если мы пожелаем нанести полученную точку на чертеже, то нам придётся выбрать масштаб так, чтобы отрезок 10,6 мог уместиться на этом чертеже. При таком масштабе десятые доли будут наименьшими, какие можно принять во внимание, а следовательно, указание у числа 0,286 более мелких долей бесполезно.

Тригонометрические функции, когда они служат ответом, даются с тремя десятичными знаками, а для вычисления углов используются тригонометрические функции с четырьмя десятичными знаками.

Углы вычисляются с точностью до минут.

Звёздочка перед ответом обозначает, что к данной задаче имеется указание.

- 
1.  $\text{пр}_{\overline{AC}} \overline{AE} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \approx 0,866a$ ,  $\text{пр}_{\overline{AC}} \overline{EF} = -\frac{a\sqrt{3}}{2} \approx -0,866a$ ,  $\text{пр}_{\overline{AC}} \overline{FA} = 0$ . \*2. (1,  $\overline{BC}$ ) =  $a + 72^\circ$ ; (1,  $\overline{CD}$ ) =  $a + 144^\circ$ ; (1,  $\overline{DE}$ ) =  $a + 216^\circ$ ; (1,  $\overline{EA}$ ) =  $a + 288^\circ$ . 3. а) 7; б) -6; в) -13,99; д) 0; е) 1. 4. а)  $x=3$ ,  $y=-5$ ; б)  $x=2$ ,  $y=0$ ; в)  $x=\frac{18}{19} \approx 0,947$ ,  $y=-\frac{16}{19} \approx -0,842$ . 5. а) При  $k=21$  — зависящая, при  $k \neq 21$  — противоречивая; б) при  $k=16$  — зависящая, противоречивой эта система не может быть; в) при  $k=10$  — противоречивая, зависимость эта система не может быть. 6. а) 146; б) -128,77; в)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$ . 7. а)  $x=3$ ,  $y=-2$ ,  $z=5$ ; б)  $x=2$ ,  $y=0$ ,  $z=-11$ ; в)  $x=\frac{147}{58} \approx 2,53$ ,  $y=-\frac{73}{58} \approx -1,26$ ,  $z=-\frac{47}{58} \approx -0,81$ . 8. а)  $x=3$ ; б)  $x_1=5$ ,  $x_2=\frac{32}{3} \approx 10,7$ . 9. а)  $x:y:z=2:3:-1$ ; б)  $x:y:z=1:2:0$ . 10.  $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ,  $\left(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$  и  $\left(0, -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ ; пригл.: (0,707a; 0); (0; 0,707a); (-0,707a; 0)

- и  $(0; -0,707a)$ . **13.** а)  $(-3, -7)$ ; б)  $(3, -7)$ ; в)  $(3, -7)$ . **14.** а)  $(a, -b)$ ; б)  $(-a, b)$ ; в)  $(-a, -b)$ . **15.** а)  $\rho = 10$ ; б)  $\rho = \sqrt{13} \approx 3,61$ . **16.** а)  $(5, 12)$  и  $(5, -12)$ ; б)  $(\sqrt{91}, -3)$  и  $(-\sqrt{91}, -3)$ ; прибл.:  $(9, 54; -3)$  и  $(-9, 54; -3)$ . в) невозможно; д)  $(-2, 0)$ . **17.**  $\rho = |x|$ , если точка лежит на оси  $X$ ;  $\rho = |y|$ , если точка лежит на оси  $Y$ . **18.** а)  $\text{пр}_X \overline{AB} = 3$ ,  $\text{пр}_Y \overline{AB} = -7$ ; б)  $\text{пр}_X \overline{AB} = 3$ ,  $\text{пр}_Y \overline{AB} = 0$ . **19.**  $(-2, 2)$ . **21.**  $AB = \sqrt{41} \approx 6,40$ ,  $AC = \sqrt{101} \approx 10,0$ ,  $AD = 13$ ,  $HI = 0,001$ ,  $\sqrt{41} \approx 0,00640$ ,  $JK = 1000$ . **22.** а) тупоугольный; б) тупоугольный; в) остроугольный. **23.** а)  $y_1 = 13$ ,  $y_2 = -3$ ; б)  $x_1 = 7 + \sqrt{13} \approx 10,6$ ,  $x_2 = 7 - \sqrt{13} \approx 3,4$ ; в)  $x = 0$ ; д) невозможно. **24.** а)  $(1, 5)$ ; б)  $\left(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$ ; прибл.:  $(3,33; 4,33)$ . **25.** а)  $\text{tg } \varphi = -\frac{3}{4}$ ; б)  $\text{tg } \varphi = \infty$ . **26.** а)  $\cos \varphi = \frac{5}{13} \approx 0,3846$ ,  $\sin \varphi = -\frac{12}{13} \approx -0,9231$ ,  $\varphi \approx 292^\circ 37'$ ; б)  $\cos \varphi = \frac{3\sqrt{13}}{13} \approx 0,8321$ ,  $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{13}}{13} \approx 0,5547$ ,  $\varphi \approx 33^\circ 41'$ ; в)  $\cos \varphi = 0$ ,  $\sin \varphi = -1$ ,  $\varphi = 270^\circ$ . **27.**  $(2, -6)$ . **28.** а)  $(-4, 2)$ ; б)  $\left(-3 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ ; прибл.:  $(-2,29; 2,22)$ . **29.** а)  $(0, 7)$ ; \*б)  $(1, 2)$ ; в)  $\left(\frac{5}{9}, \frac{37}{9}\right)$ ; прибл.:  $(0,56; 4,11)$ ; д) прибл.:  $(-5,83; 2,94)$ . **30.**  $B(10, 7)$ . **31.** а)  $(-2, -3)$ ; б)  $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ . **32.**  $(-4, 3)$ ,  $(1, 1)$  и  $(6, -1)$ . **33.**  $(3, 1)$ . **34.**  $(2, 5)$ ,  $(-6, 3)$ ,  $(0, -1)$ . \***35.**  $(6, 1)$ . \***36.**  $(-1, 1)$ . **37.**  $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ; прибл.:  $(1,33; 0,33)$ . **38.**  $\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right)$ . **39.** а)  $17\frac{1}{2}$ ; б) 0. Эти три точки лежат на одной прямой. **40.**  $(0, 5)$  и  $\left(0, -\frac{13}{7}\right)$ ; прибл.:  $(0; -1,86)$ . **41.**  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{61}{11} \approx 3,81$ . **42.** а)  $\left. \begin{array}{l} x = x' + 3 \\ y = y' + 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{array} \right\}$ ; б)  $\left. \begin{array}{l} x = x' \\ y = y' - 5 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y + 5 \end{array} \right\}$ ; в)  $\left. \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{array} \right\}$ ; д)  $\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y') \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\ y' = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{array} \right\}$ ; е)  $\left. \begin{array}{l} x = -y' \\ y = x' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \end{array} \right\}$ ; ф)  $\left. \begin{array}{l} x = -x' \\ y = -y' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x' = -x \\ y' = -y \end{array} \right\}$ ; г)  $\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y') - 3 \\ y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y') + 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) + \frac{3}{2} - \sqrt{3} \\ y' = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y) + \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1 \end{array} \right\}$ .

**43. а)**  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$ ; прикл.: (2,12; -4,95); **б)**  $(2\sqrt{10}, 0)$ ; прикл.:

(6,32; 0). **44. а)**  $(-7,10)$ ; **б)**  $\operatorname{Arctg} \frac{2}{3} \approx 38^\circ 41' + 180^\circ n$ . **45. а)** 0; **\*б)** 0,2965.

**47. а)** 1)  $x$  возводится в квадрат, 2) результат умножается на 2, 3) из результата вычитается 3; **б)** 1)  $x$  умножается на 2, 2) результат возводится в квадрат, 3) из результата вычитается 3; **в)** 1)  $x$  умножается на 2, 2) из результата вычитается 3, 3) результат возводится в квадрат; **г)** 1) из  $x$  вычитается 2, 2) единица делится на полученный результат, 3) из результата извлекается квадратный корень; **е)** 1) от  $t$  берётся синус, 2) результат умножается на 2; **ф)**  $t$  умножается на 2, 2) от результата берётся синус; **г)** 1)  $x$  умножается на 2, 2) из результата вычитается 3, 3) от результата берётся тангенс, 4) от результата берётся десятичный логарифм; **и)** 1)  $x$  умножается на 2, 2) из результата вычитается 3, 3) от результата берётся десятичный логарифм, 4) от результата берётся тангенс; **й)** 1) от  $u$  берётся косинус, 2) 3 возводится в степень полученного результата; **ж)** 1)  $v$  возводится в квадрат, 2) к единице прибавляется  $v$ , 3) из результата второго действия вычитается результат первого действия; порядок действий в этом примере может быть изменён; **к)** 1) от  $w$  берётся косинус, 2)  $w$  возводится в пятую степень, 3) к единице прибавляется результат второго действия, 4) результат первого действия делится на результат третьего действия; порядок действий в этом примере может быть изменён. **48. а)**  $f(x) = (x-5)^2$ ; **б)**  $f(x) = x^2 - 5$ ; **в)**  $f(x) = (x-1)^2 + \sqrt{x+2}$ ; **г)**  $f(x) = \sin x$ ; **е)**  $f(x) = \sin^2 x$ ; **ф)**  $f(x) = 2^{3x}$ ;

**г)**  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ . **49. а)**  $-\infty < x < \infty$ ; **б)**  $0 \leq x < \infty$ ; **в)**  $-\infty < x \leq 0$ ;

**д)**  $5 \leq x < \infty$ ; **е)**  $-\infty < x \leq -3$  и  $3 \leq x < \infty$ ; **ф)**  $-\infty < x < \infty$ ;

**г)**  $-\infty < x < \infty$ ; **и)**  $1 \leq x < \infty$ ; **ж)**  $2n\pi < x < (2n+1)\pi$ , где  $n$  — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль); **з)**  $-1 \leq x < 1$ ; **к)**  $-\infty < x \leq -1$  и  $1 < x < \infty$ ; **\*и)**  $-\infty < x \leq 3$  и  $5 \leq x < \infty$ ; **\*м)**  $1 \leq x \leq 2$ ; **\*н)**  $-\infty < x < \infty$ ; **\*о)** не существует ни при каких значениях  $x$ ; **р)**  $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ , где  $n$  — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль); **с)**  $x=0$ ; **г)**  $-\infty < x \leq -1$  и  $1 \leq x < \infty$ ; **д)** все значения, кроме  $x=0$ ;

**е)** все значения, кроме  $x=-1$  и  $x=1$ ; **в)**  $-1 \leq x \leq 1$ ; **г)**  $-\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{5}$ ;

**з)**  $-\infty < x \leq -1$  и  $1 \leq x < \infty$ ; **и)**  $-\infty < x \leq -2$  и  $2 \leq x < \infty$ ;

**у)**  $-\infty < x < \infty$ . **54. а)**  $y = \frac{2x+8}{5}$ ; **б)**  $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ ; **в)**  $y = \pm \frac{\sqrt{1-3x^2}}{2}$ ;

**д)**  $y = \frac{k}{x}$ ; **е)**  $y = \operatorname{Arcsin} x$ ; **ф)**  $y = \lg x$ ; **г)**  $y = \log_2 x$ . **55.  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ .**

**56. а)**  $5x - 2y + 9 = 0$ ; **б)**  $y = \frac{1}{9}(x^2 - 14x + 85)$ ; **в)**  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ ;

**д)**  $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ . **58. В и Е. 59. В и D** — на окружности, **А и Е** — внутри,

**С** — вне. **60.  $2x + y - 11 = 0$ . 61.  $x^2 + y^2 + 14x - 2y + 10 = 0$ . 62.  $(x^2 + y^2)^2 -$**

**$- 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4$ . 63.  $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ . 64. а)** (0, 0) и

**(-1,5); б)**  $\left(\frac{7+10\sqrt{35}}{58}, -\frac{32-25\sqrt{35}}{58}\right)$  и  $\left(\frac{7-10\sqrt{35}}{58}, -\frac{32+25\sqrt{35}}{58}\right)$ ;

прикл.: (1,14; -3,10) и (-0,90; 2,00); **с)** не пересекаются; **д)** (7,8; 9,6),

(-7,8; 9,6), (-7,8; -9,6) и (7,8; -9,6); **е)** не пересекаются. **65. а)**  $(x-3)^2 +$

**$+(y+4)^2 - 36 = 0$ ; б)**  $x^2 + y^2 - 53 = 0$ ; **в)**  $(x-2)^2 + (y-10)^2 - 169 = 0$ ;

**д)**  $(x-7)^2 + (y-3)^2 - 9 = 0$ . **66. а)**  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ ; **б)**  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$ ; **в)**  $\frac{x^2}{169} +$

- $+ \frac{y^2}{144} = 1$ ; d)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{96} = 1$ ; e)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ; f)  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ . **67.** a)  $(-\sqrt{21}, 0)$  и  $(\sqrt{21}, 0)$ ; прикл.:  $(-4,58; 0)$  и  $(4,58; 0)$ ; b)  $(-\sqrt{7}, 0)$  и  $(\sqrt{7}, 0)$ ; прикл.:  $(-1,91; 0)$  и  $(1,91; 0)$ . **68.** a)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ; b)  $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1$ ; c)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ; d)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ ; e)  $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$ ; f)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{85} = 1$ . **69.** a)  $(-5, 0)$  и  $(5, 0)$ ; b)  $(-\sqrt{21}, 0)$  и  $(\sqrt{21}, 0)$ ; прикл.:  $(4,58; 0)$  и  $(4,58; 0)$ . **71.** a)  $2x + y - 2a = 0$ ; b)  $kx - y + k = 0$ ; c)  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - 3 = 0$ . **72.** a)  $y = 2x - 1$ ; b)  $y = -\frac{1}{3}x + 5$ ; c)  $y = \frac{1}{2}x$ ; d)  $y = -2$ . **73.** Нормальное:  $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 = 0$ , с угловым коэффициентом:  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , в отрезках:  $\frac{x}{2} + \frac{y}{2\sqrt{3}} = 1$ . **74.** a)  $y = x + 10$ ; b)  $y = -\sqrt{3}x - 2$ ; прикл.:  $y = -1,73x - 2$ ; c)  $y = -x - 1$ ; d)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ; прикл.:  $y = -0,577x$ ; e) прикл.:  $y = 0,470x + 14$ ; f) прикл.:  $y = -0,839x + 1$ ; g) прикл.:  $y = 3,60x$ ; h) прикл.:  $y = -0,747x - 5$ . **75.** a)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ ,  $\varphi = 150^\circ$ ,  $b = \sqrt{3} \approx 1,73$ ; b)  $y = \frac{2}{5}x + \frac{8}{5}$ ,  $\varphi \approx 21^\circ 48'$ ,  $b = 1,6$ ; c)  $y = -3x + 2$ ,  $\varphi \approx 108^\circ 26'$ ,  $b = 2$ ; d)  $y = -7$ ,  $\varphi = 0$ ,  $b = -7$ ; e) это уравнение не может быть приведено к виду с угловым коэффициентом,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $b = \infty$ . **76.** a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2 = 0$ ; прикл.:  $y = -x + 2,83$ ; b)  $y - 5 = 0$ ; c)  $-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 = 0$ ; прикл.:  $y = 0,577x + 3,46$ ; d)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$ ; прикл.:  $y = 1,732x$ ; e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 4 = 0$ ; прикл.:  $y = x - 5,66$ ; f) прикл.:  $-0,666x + 0,746y - 1 = 0$ ; иначе прикл.  $y = 0,893x + 1,34$ ; g) прикл.:  $-0,654x + 0,757y - 10 = 0$ ; иначе прикл.  $y = 0,861x + 15,3$ . **77.** d), e) и g). **78.** a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$ ;  $p = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$ ;  $\alpha = 45^\circ$ ; b)  $\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ;  $p = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ ;  $\alpha = 300^\circ$ ; c)  $\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - 2 = 0$ ;  $p = 2$ ;  $\alpha \approx 73^\circ 44'$ ; d)  $\frac{12}{37}x - \frac{35}{37}y - 3 = 0$ ;  $p = 3$ ;  $\alpha \approx 288^\circ 55'$ ; e)  $-\frac{2\sqrt{29}}{29}x - \frac{5\sqrt{29}}{29}y - \frac{4\sqrt{29}}{29} = 0$ ;  $p = \frac{4\sqrt{29}}{29} \approx 0,743$ ;  $\alpha \approx 248^\circ 12'$ ; f)  $-\frac{2\sqrt{29}}{29}x + \frac{5\sqrt{29}}{29}y - \frac{3\sqrt{29}}{58} = 0$ ;  $p = \frac{3\sqrt{29}}{58} \approx 0,278$ ;  $\alpha \approx 111^\circ 48'$ . **79.**  $\alpha = 315^\circ$ ,  $p = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $a = 3$ ,  $b = -3$ . **80.** a)  $\alpha = 328^\circ$ ,  $p = 3$ ; b)  $\alpha = 200^\circ$ ,  $p = 5$ ; c)  $\alpha = 40^\circ$ ,  $p = 4$ .



**81.** а)  $5x + 3y - 15 = 0$ ; б)  $2x - y + 4 = 0$ . **82.** а)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ ;  $a = 2$ ,  $b = 3$ ;  
 б)  $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$ ;  $a = -3$ ,  $b = 5$ ; в)  $\frac{x}{-1,5} + \frac{y}{-8} = 1$ ;  $a = -1,5$ ,  $b = -8$ ;  
 д)  $\frac{x}{\frac{5}{11}} + \frac{y}{-\frac{7}{3}} = 1$ ;  $a = \frac{5}{11} \approx 0,46$ ;  $b = -\frac{7}{3} \approx -2,33$ . **83.** а)  $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} = 0$ ;

$p = 1,6$ ;  $\alpha \approx 306^\circ 52'$ ; б)  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}x + \frac{\sqrt{10}}{10}y - \frac{\sqrt{10}}{10} = 0$ ;  $p = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0,316$ ;

$\alpha \approx 161^\circ 34'$ . **84.** а)  $\frac{x}{7,5} + \frac{y}{-3} = 1$ ; б)  $\frac{x}{2,5} + \frac{y}{10} = 1$ . **85.** а)  $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$ ;  
 прибл.:  $y = 1,732x - 6,93$ ; б)  $y = -4,95x + 15,15$ ; в)  $y = 4,95x + 15,15$ ;

д)  $y = \frac{\sqrt{6}}{12}x - \frac{25\sqrt{6}}{12}$ ; прибл.:  $y = 0,204x - 5,10$ . **86.** а)  $y = -\sqrt{3}x + 5$ ;

$\varphi = 120^\circ$ ; б)  $y = 2x + 3$ ;  $\varphi \approx 63^\circ 26'$ ; в)  $y = -x - 4$ ;  $\varphi = 135^\circ$ ; д)  $y = \frac{1}{2}x - 6$ ;

$\varphi \approx 26^\circ 34'$ . **87.** а)  $\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - 4 = 0$ ;  $p = 4$ ,  $\alpha \approx 61^\circ 56'$ ; б)  $\frac{2\sqrt{29}}{29}x - \frac{5\sqrt{29}}{29}y -$

$-1 = 0$ ;  $p = 1$ ,  $\alpha \approx 291^\circ 48'$ ; в)  $-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2 = 0$ ;  $p = 2$ ,  $\alpha = 240^\circ$ ;

д)  $\frac{2\sqrt{13}}{13}x - \frac{3\sqrt{13}}{13}y - \frac{51\sqrt{13}}{65} = 0$ ;  $p = \frac{51\sqrt{13}}{65} \approx 2,83$ ;  $\alpha \approx 303^\circ 47'$ . **89.**  $k =$

$= -\frac{A}{B} = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{b}{a}$ ;  $\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{k}{\pm \sqrt{1 + k^2}} = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  
 $\sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-1}{\pm \sqrt{1 + k^2}} = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $p = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| =$   
 $= \left| \frac{b}{\sqrt{1 + k^2}} \right| = \left| \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ ;  $a = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{k} = \frac{p}{\cos \alpha}$ ,  $b = -\frac{C}{B} = \frac{p}{\sin \alpha}$ .

Знаки радикалов  $\sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\sqrt{1 + k^2}$  и  $\sqrt{a^2 + b^2}$  противоположны соответственно знакам  $C$ ,  $b$  и  $ab$ . Можно указать также непосредственную связь между  $\alpha$  и  $\varphi$ :  $\alpha - \varphi = 90^\circ (2n + 1)$ , где  $n$  в различных случаях может иметь

одно из трёх значений 0, 1 и 2. **90.** а) (2,5); б)  $\left(\frac{110}{21}, -\frac{108}{35}\right)$ ; прибл.:

(5,24; -3,09); в) (-4,25; 0). **91.** а)  $y - 7 = k(x - 3)$ ; б)  $y - 5 = k(x + 2)$ ;

в)  $y + \frac{7}{3} = kx$ ; д)  $y = kx$ . **92.** а)  $6x + y - 13 = 0$ ; б)  $4x + 3y - 5 = 0$ ;

в)  $y - 3 = 0$ ; д)  $2x - y = 0$ ; е)  $x - 3 = 0$ . **93.** а)  $\beta = 45^\circ$ ; б)  $\beta = 0$ ; в)  $\beta = 90^\circ$ ;

д)  $\beta \approx 37^\circ 53'$ ; е)  $\beta = 90^\circ$ ; ж)  $\beta \approx 26^\circ 34'$ ; г)  $\beta = 30^\circ$ . **94.** Первая:  $x - 3y + 10 = 0$ ,  
 третья:  $13x - 9y - 50 = 0$ , четвёртая:  $24x - 7y - 150 = 0$ . **96.** (-1,3);

$\beta \approx 29^\circ 45'$ . **99.** а)  $3x - y - 1 = 0$ ; б)  $x - y - 10 = 0$ ; в)  $2x + 5y - 1 = 0$ ;

д)  $3x + y - 13 = 0$ ; е)  $15x + 2y + 53 = 0$ ; ж)  $2x - y + 1 = 0$  и  $x + 2y - 7 = 0$ ;

г) прибл.:  $y = -1,017x + 7,97$  и  $y = -0,033x + 9,93$ . **100.** а) (2,2); б)  $\left(\frac{21}{53}, \frac{6}{53}\right)$ ;

прибл.: (0,396; 0,113). **101.**  $3x + 2y - 23 = 0$  и  $2x - 3y + 2 = 0$ . **102.** а)  $\delta = 8,7$ ;

б)  $\delta = 0$ ; в)  $\delta = -\frac{5\sqrt{34}}{17} \approx -1,72$ ; д)  $\delta = \frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4,95$  (знак в этом случае

неопределённый). \***103.**  $2x + 10y - 19 = 0$  и  $5x - y + 5 = 0$ . **104.** а)  $h_a =$   
 $= \frac{56}{13} \approx 4,31$ ;  $h_b = \frac{56}{5} = 1,12$ ;  $h_c = \frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4,95$ ; б)  $h_a = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$ ;

$h_b = \frac{20\sqrt{13}}{13} \approx 5,55$ ;  $h_c = \frac{20\sqrt{37}}{37} \approx 3,29$ . **105.** а) 2; б)  $\frac{5}{2}$ . **106.**  $7x + 24y - 80 = 0$  и  $7x + 24y + 70 = 0$ . **107.**  $4x - 3y + 14 = 0$  и  $3x + 4y - 27 = 0$ . **108.**  $24x - 7y + 217 = 0$ ,  $3x - 4y - 26 = 0$ ,  $7x + 24y + 6 = 0$  и  $4x + 3y + 7 = 0$ . **109.**  $3x - 8y - 5 = 0$ . **110.**  $x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0$ ,  $x \cos \varphi + y \sin \varphi \pm a = 0$ ,  $x \sin \varphi - y \cos \varphi \pm a = 0$  и  $x \cos \varphi + y \sin \varphi = 0$ ; комбинации знаков — любые, т. е. задача имеет четыре решения. **111.** а)  $x + 4y - 8 = 0$  и  $x + y - 5 = 0$ ; б)  $x + 2y - 6 = 0$ ; в) невозможно. **112.** а)  $3x + 8y - 36 = 0$ ;  $3x + 2y - 18 = 0$ ;  $3(\sqrt{17} - 3)x - 4(\sqrt{17} + 3)y + 72 = 0$ ; прил.:  $y = 0,118x + 2,53$ ;  $3(\sqrt{17} + 3)x - 4(\sqrt{17} - 3)y - 72 = 0$ ; прил.:  $y = 4,76x - 16,0$ ; б)  $3x + 4y - 24 = 0$ ;  $3(1 - \sqrt{2})x + 4(1 + \sqrt{2})y - 24 = 0$ ; прил.:  $y = 0,879x - 2,49$ ;  $3(1 + \sqrt{2})x + 4(1 - \sqrt{2})y - 24 = 0$ ; прил.:  $y = 5,12x + 14,5$ ; в)  $3x - y - 9 = 0$  и  $3x - 16y + 36 = 0$ . **113.**  $8x + 5y - 61 = 0$ ,  $x - 4y - 3 = 0$  и  $10x - 3y + 7 = 0$ . **114.** а) Уравнение  $AB$ :  $4x - 3y - 68 = 0$ , уравнение  $BC$ :  $24x + 7y - 308 = 0$ , уравнение  $CA$ :  $84x - 13y + 572 = 0$ ; б)  $A \approx 28^\circ 04'$ ,  $B \approx 126^\circ 52'$ ,  $C \approx 25^\circ 04'$ ; в) уравнение медианы из  $A$ :  $3x - y - 1 = 0$ , из  $B$ :  $12x + 51y - 4 = 0$ , из  $C$ :  $132x + y - 44 = 0$ ; точка пересечения медиан:  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ ; прил.:  $(0,333; 0)$ ; д) уравнение высоты из  $A$ :  $7x - 24y - 869 = 0$ , из  $B$ :  $13x + 84y + 154 = 0$ , из  $C$ :  $3x + 4y - 176 = 0$ ; точка пересечения высот:  $\left(77, -\frac{55}{4}\right)$ ; е) уравнение биссектрисы из  $A$ :  $19x - 8y - 73 = 0$ , из  $B$ :  $2x + 11y + 16 = 0$ , из  $C$ :  $46x + 3y - 132 = 0$ ; точка пересечения биссектрис:  $(3, -2)$ . **118.**  $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ; прил.:  $A(1,41; 1,41)$ ;  $B(-2\sqrt{3}, 2)$ ; прил.:  $B(-3,46; 2)$ ;  $C(-3,0)$ ;  $D(10,0)$ ;  $E(0,6)$ ;  $F(0, -8)$ ; прил.:  $G(-4,97; 0,56)$ ; прил.:  $H(1,13; -3,84)$ ; прил.:  $I(-2,39; -6,58)$ ;  $K(0,0)$ ;  $L(0,0)$ . **119.**  $A[3,0]$ ;  $B[2\sqrt{2}; 45^\circ]$ ; прил.:  $[2,83; 45^\circ]$ ; прил.:  $C[13; 157^\circ 22']$ ; прил.:  $D[2\sqrt{10}; 347^\circ 19']$ ; иначе прил.:  $D[6,32; 347^\circ 19']$ ;  $E[8,270^\circ]$ ;  $F[8,90^\circ]$ ; прил.:  $G[\sqrt{29}, 201^\circ 48']$ ; иначе прил.:  $G[5,39; 201^\circ 48']$ ;  $H[0, \text{любой угол}]$ . **120.** Да; в том и только в том случае, если точка лежит на положительной части оси  $X$ . \***121.**  $\rho = k(\vartheta_0 + 2k\pi)$ ,  $\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$  ( $k$  — произвольное целое число). \***122.**  $\left[R, \frac{R}{k}\right]$  и  $\left[-R, -\frac{R}{k}\right] \equiv \left[R, \pi - \frac{R}{k}\right]$ . **123.** а)  $5x' - 3y' = 0$ ; б)  $y' = 4\sqrt{2}$ ; прил.:  $y' = 5,66$ ; в)  $(5\sqrt{3} + 8)x' - 11y' + 2(2\sqrt{3} + 1) = 0$ ; прил.:  $y' = 1,515x' + 0,812$ ; д)  $x'^2 + 6x' + y'^2 = 0$ ; е)  $x'^2 + y'^2 - r^2 = 0$ ; ф)  $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ . **124.** а) Трансцендентная; б) второго порядка; в) третьего порядка; д) второго порядка; е) трансцендентная; ф) второго порядка; г) второго порядка; \*г) третьего порядка; и) первого порядка; ж) второго порядка; к) второго порядка; л) второго порядка; м) второго порядка. **125.** а) Обе оси координат; б) ось  $Y$  и прямая  $2x - 3y + 5 = 0$ ; в) обе оси координат и обе биссектрисы координатных углов; д) дважды взятая прямая  $2x + 5y = 0$ ; е) дважды взятая ось  $X$ ; ф) ось  $X$  и парабола  $y^2 = 4x$ . **126.** а)  $(2, -5)$ ,  $r = 7$ ; б)  $(-1,0)$ ,  $r = \sqrt{15} \approx 3,87$ ; в)  $\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ; прил.:  $(2,5; 0,67)$ ;  $r = \frac{\sqrt{139}}{2} \approx 5,89$ ; д) уравнение невозможно; е)  $(3,2)$ ,  $r = 0$ , т. е. уравнение изображается одной точкой. **127.**  $(x-5)^2 + (y+3)^2 - 13 = 0$ . **128.** а)  $(x-7)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0$ ; б)  $(x-7)^2 + (y-2)^2 - \left(\frac{37}{13}\right)^2 = 0$ ; в)  $(x-7)^2 + (y-2)^2 - \frac{25}{4} = 0$ ; д)  $(x-7)^2 + (y-2)^2 - \left(\frac{47}{\sqrt{29}}\right)^2 = 0$ . **129.** а)  $(x+2)^2 + (y+5)^2 - 25 = 0$ ; б)  $(x+20)^2 + (y+63)^2 - 65^2 = 0$ ; в)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$ ; д) невозможно; эти три

- точки лежат на одной прямой. **130.**  $3x - 4y - 4 = 0$  и  $4x + 3y - 22 = 0$ .
- 131.** а)  $(x - 6)^2 + (y - 10)^2 - 13^2 = 0$  и  $\left(x + \frac{183}{2}\right)^2 + (y + 55)^2 - \left(\frac{221}{2}\right)^2 = 0$ ;  
 б)  $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 - 5^2 = 0$  и  $(x + 53)^2 + (y + 37)^2 - 65^2 = 0$ . **134.** а) Симметрична относительно оси  $X$ , проходит через начало; б) симметрична относительно начала; в) симметрична относительно оси  $X$ , симметрична относительно оси  $Y$  и симметрична относительно начала; г) симметрична относительно начала; д) симметрична относительно оси  $Y$ ; е) симметрична относительно оси  $Y$ , симметрична относительно начала; ж) симметрична относительно начала, проходит через начало; з) симметрична относительно оси  $Y$ ; и) симметрична относительно начала, проходит через начало; j) симметрична относительно начала, проходит через начало.
- 135.**  $B = D = F = 0$ . **136.** а) Симметрична относительно биссектрисы нормального координатного угла; б) симметрична относительно биссектрисы нормального координатного угла. **137.** На вопрос а) не изменится, на вопрос б) изменится. **138.**  $2a = 20$ ,  $2b = 16$ . **139.** а)  $e = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,916$ ; б)  $e = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,832$ ;  
 в)  $e = \frac{5}{13} \approx 0,385$ ; д)  $e = 0,2$ ; е)  $e = 0,6$ ; ф)  $e = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,447$ . **140.** а)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;  
 б)  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$ ; в)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1$ ; д)  $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{2} = 1$ ; е)  $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{5} = 1$ ; ф)  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1$ .
- 141.** а)  $(-8,0)$  и  $(8,0)$ ;  $e = 0,8$ ; б)  $(0, -2)$  и  $(0,2)$ ;  $e = 0,4$ ; в)  $(-2\sqrt{2}, 0)$  и  $(2\sqrt{2}, 0)$ ; прибл.:  $(-2,83; 0)$  и  $(2,83; 0)$ ;  $e = \frac{2\sqrt{58}}{29} \approx 0,525$ ; д)  $(0; -0,1\sqrt{170})$  и  $(0; 0,1\sqrt{170})$ ; прибл.:  $(0; -1,30)$  и  $(0; 1,30)$ ;  $e = 0,1\sqrt{85} \approx 0,922$ . **142.** а)  $e = \frac{1}{2}$ ; б)  $e \approx 0,877$ . **143.** Прибл.:  $39^\circ 12'$ . **144.**  $e \approx 0,058$ . **145.** а) и б)  $e = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ ;  
 в) и д)  $e = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ . **146.**  $2a = 8\sqrt{3}$  см  $\approx 13,9$  см;  $2b = 12$  см;  $e = \frac{1}{2}$ .
- 147.**  $60^\circ$ . **148.** а)  $r_1 = \frac{5\sqrt{15} + \sqrt{165}}{5} \approx 6,44$ ;  $r_2 = \frac{5\sqrt{15} - \sqrt{165}}{5} \approx 1,30$ ; б) невозможно (на данном эллипсе нет такой точки). **149.**  $a = 5$ ,  $b = 3$ . **150.**  $(\pm 3, \pm 4)$ , комбинации знаков — любые. **151.** Исключить  $t$ . Этот эллипс получается из окружности  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$  равномерным сжатием к оси  $X$ :  $x = x^*$ ,  $y = \frac{a}{b} y^*$ . Если  $M^*$  — какая-нибудь точка эллипса, а  $M$  — точка окружности, имеющая ту же абсциссу, что и  $M^*$ , и ординату с тем же знаком, то параметр  $t$  для точки  $M^*$  есть полярный угол точки  $M$ .
- 152.** Прибл.:  $33^\circ 42'$ . \***153.** Касательная:  $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ , нормаль:  $\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = c^2$ . \***154.**  $A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2$ . \***155. 156.** а) Касательная:  $9x + 16y - 300 = 0$ , нормаль:  $16x - 9y - 84 = 0$ ; б) касательная  $3x + 20y - 7\sqrt{10} = 0$ ; прибл.:  $y = -0,15x + 1,11$ ; нормаль:  $20x - 3y - 6\sqrt{10} = 0$ ; прибл.:  $y = 6,667x - 6,32$ . **157.** а)  $3x + 16y \pm 100 = 0$ ; б)  $x - 2y \pm 25 = 0$ . **158.** а)  $24x - 5y \pm 180 = 0$ ; б)  $17x + 51y \pm 3\sqrt{85} = 0$ ; прибл.:  $y = -0,333x \mp 0,542$ . **159.** а)  $8x + 3y - 50 = 0$  и  $3x - 2y - 25 = 0$ ; б)  $4x - 15y - 289 = 0$ ; в) невозможно. \***163.**  $x^2 - y^2 = 18$ . **164.** а)  $2a = 16$ ; б)  $2a = 4\sqrt{2} \approx 5,66$ . **165.**  $2a = 48$ ,  $2b = 8$ . **166.** а)  $e = \frac{5}{3} \approx 1,67$ ;  
 б)  $e = \frac{\sqrt{26}}{5} \approx 1,02$ ; в)  $e = 1,25$ ; д)  $e = \frac{4}{3} \approx 1,33$ ; е)  $e = \frac{25}{24} \approx 1,04$ ; ф)  $e = \frac{11}{6} \approx 1,83$ .
- 167.** а)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ; б)  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ ; в)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ ; д)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ ; е)  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ .

- 168.** а)  $(-25, 0)$  и  $(25, 0)$ ;  $e = \frac{25}{7} \approx 3,57$ ; б)  $(-2\sqrt{2}, 0)$  и  $(2\sqrt{2}, 0)$ ; прил.:  $(-2,83; 0)$  и  $(2,83; 0)$ ;  $e = \frac{2\sqrt{10}}{5} \approx 1,26$ ; в)  $(0, -15)$  и  $(0, 15)$ ;  $e = \frac{15}{9} \approx 1,67$ ; д)  $(0, -4)$  и  $(0, 4)$ ;  $e = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1,63$ . **169.** а)  $x - y = 0$  и  $x + y = 0$ ;  $2\gamma = 90^\circ$ ; б)  $x - \sqrt{3}y = 0$  и  $x + \sqrt{3}y = 0$ ; прил.:  $y = 0,577x$  и  $y = -0,577x$ ;  $2\gamma = 60^\circ$ ; в)  $2x - \sqrt{10}y = 0$  и  $2x + \sqrt{10}y = 0$ ; прил.:  $y = 0,632x$  и  $y = -0,632x$ ;  $2\gamma \approx 64^\circ 18'$ ; д)  $3x - \sqrt{15}y = 0$  и  $3x + \sqrt{15}y = 0$ ; прил.:  $y = 0,775x$  и  $y = -0,775x$ ;  $2\gamma \approx 98^\circ 14'$ . **170.** а)  $2\gamma = 90^\circ$ ; б)  $2\gamma \approx 67^\circ 07'$ ; в)  $2\gamma \approx 156^\circ 56'$ . **171.** а)  $e = 2$ ; б)  $e \approx 1,07$ ; в)  $e \approx \sec \gamma$ . **172.**  $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$ . **173.** а)  $2a = 12$ ; б)  $2a = 4$   $\sqrt{5} \approx 8,94$ ; в)  $2a = 4$ . **175.** а)  $r_1 = \frac{20\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3} \approx 18,1$ ;  $r_2 = \frac{20\sqrt{6}}{3} - \sqrt{3} \approx 14,6$ ; б) невозможно (на данной гиперболе нет такой точки). **176.** а)  $a = 5$ ,  $b = 12$ ; б)  $a = 5$ ,  $b = \frac{5\sqrt{589}}{6} \approx 20,2$ . **177.** а)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2cx - b^2}{a^2}$ ; б)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -\frac{2cx - b^2}{a^2}$ . **\*178.** Касательная:  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ ; нормаль:  $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = c^2$ . **\*179.**  $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$ . **\*180. 181.** а) Касательная:  $17x + 16y + 450 = 0$ ; нормали:  $16x - 17y + 680 = 0$ ; б) касательная:  $x - 2y + \sqrt{2} = 0$ ; прил.:  $y = 0,5x + 0,707$ ; нормаль:  $2x + y + 5\sqrt{2} = 0$ ; прил.:  $y = -2x - 7,07$ . **182.** а)  $5x - 6y \pm 27 = 0$ ; б)  $5x - 6y \pm 24 = 0$ . **183.** а)  $18x - 10y \pm 225 = 0$ ; б)  $12x + 13y \pm 312 = 0$ . **184.** а)  $5x - 6y - 9 = 0$  и  $13x + 18y + 15 = 0$ ; б)  $10x - 9y - 24 = 0$ ; в) невозможно. **185.** а) Невозможно; б) невозможно. **186.** а) Нет. Если уравнение гиперболы имеет вид  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , то к ней можно провести касательную с угловым коэффициентом  $k$  при условии  $|k| < \frac{b}{a}$ . В переводе на геометрический язык это значит, что острый угол всякой касательной к гиперболе с её действительной осью меньше острого угла асимптоты с действительной осью; б) у эллипса существуют касательные всех направлений. **188.** а)  $(\frac{5}{4}, 0)$ ;  $x = -\frac{5}{4}$ ; б)  $(-\frac{1}{2}, 0)$ ;  $x = \frac{1}{2}$ ; в)  $(0, \frac{1}{4})$ ;  $y = -\frac{1}{4}$ ; д)  $(0, -\frac{3}{4})$ ; прил.:  $(0, -0,75)$ ;  $y = \frac{3}{4}$ ; прил.:  $y = 0,75$ . **189.** а) Вершина:  $(4, -1)$ ; расходитсЯ вверх; точки пересечения с осью  $X$ :  $(3, 0)$  и  $(5, 0)$ ; точка пересечения с осью  $Y$ :  $(0, 15)$ ; б) вершина:  $(3, 0)$ ; расходитсЯ вниз; касается оси  $X$  в точке  $(3, 0)$ ; точка пересечения с осью  $Y$ :  $(0, -9)$ ; в) вершина:  $(-6, 125; 0,75)$ ; расходитсЯ вправо; точка пересечения с осью  $X$ :  $(-5, 0)$ ; точки пересечения с осью  $Y$ :  $(0, -1)$  и  $(0, 2,5)$ ; д) вершина:  $(2, 1)$ ; расходитсЯ вправо; точка пересечения с осью  $X$ :  $(3, 0)$ ; с осью  $Y$  не пересекается; е) вершина  $(5, -1)$ ; расходитсЯ вверх; с осью  $X$  не пересекается; точка пересечения с осью  $Y$ :  $(0, 29)$ . **190.** а) Если  $b^2 - 4ac > 0$ ;

- б) если  $b^2 - 4ac = 0$ ; с) если  $b^2 - 4ac < 0$ . **191.**  $p = 4$ . **192.** а) Вершина:  $\left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ ; точки пересечения с осью  $X$ : (2,0) и (5,0); расходитс я вверх; б) вершина: (2, -9); точки пересечения с осью  $X$ : (-1,0) и (5,0); расходитс я вниз; с) вершина:  $\left(\frac{3}{4}, -\frac{73}{8}\right)$ ; точки пересечения с осью  $X$ :  $\left(\frac{3-\sqrt{73}}{4}, 0\right)$  и  $\left(\frac{3+\sqrt{73}}{4}, 0\right)$ ; пригл.: (-1,39; 0) и (2,89; 0); расходитс я вверх; д) вершина:  $\left(-\frac{5}{6}, \frac{23}{12}\right)$  пригл.: (-0,83; 1,92); с осью  $X$  не пересекается; расходитс я вверх; е) вершина  $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ ; точки пересечения с осью  $X$ : (1,0) и  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ; расходитс я вверх. \* **193.** Касательная:  $y_1 y = p(x + x_1)$ ; нормаль:  $y_1 x + p y = = y_1 (x_1 + p)$ . **194.**  $x + 6y + 18 = 0$ . **195.** а)  $x - 6y + 27 = 0$ ; б)  $x - 2y + 2 = 0$ . **196.** а)  $x = 0$  и  $x - 2y + 6 = 0$ ; б)  $3x + 2\sqrt{3}y + 6 = 0$ ; пригл.:  $y = = -0,866x - 1,73$ ; с) невозможно. **197.** У параболы существуют касательные всех направлений, кроме направления, параллельного оси параболы. **198.** а)  $s_n = uy$ ; б)  $s_n = p$ . \* **199.** \* **200.**  $x + 2y - 4 = 0$ . **201.**  $3x - 5y + 10 = 0$ . **202.** 60°. **203.** Одна пара:  $y = (\sqrt{2} + 1)x$  и  $y = (\sqrt{2} - 1)x$ ; пригл.:  $y = 2,414x$  и  $y = 0,414x$ ; другая пара:  $y = -(\sqrt{2} + 1)x$  и  $y = -(\sqrt{2} - 1)x$ ; пригл.:  $y = -2,414x$  и  $y = -0,414x$ . **206.** а)  $x = \pm \frac{9\sqrt{5}}{5}$ ; пригл.:  $x = \pm 4,02$ ; б)  $y = \pm \frac{25}{3} \approx \pm 8,33$ ; с)  $x = \pm \frac{5\sqrt{13}}{13} \approx \pm 1,39$ ; д)  $y = \pm \frac{\sqrt{11}}{11} \approx \pm 0,301$ . **207.** а) Эллипс. Если перенести начало координат в точку  $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{20}{7}\right)$  и повернуть оси на острый угол  $\alpha$ , для которого  $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3}$ , то уравнение примет вид:  $14x''^2 + 49y''^2 - 103 = 0$ . Уравнение оси  $X''$ :  $14x - 7y + 8 = 0$ ; уравнение оси  $Y''$ :  $7x + 14y + 29 = 0$ . Полуось эллипса, лежащая на оси  $X''$  (большая):  $p = \frac{\sqrt{1442}}{14} \approx 2,71$ ; полуось, лежащая на оси  $Y''$  (малая):  $q = \frac{\sqrt{103}}{7} \approx 1,45$ . б) Гипербола. Если перенести начало координат в точку (-1,2) и повернуть оси на острый угол  $\alpha$ , для которого  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{12}{5}$ , то уравнение примет вид  $12x''^2 - y''^2 + 9 = 0$ . Действительная полуось гиперболы лежит на оси  $Y''$ ; она равна  $a = 3$ ; мнимая полуось лежит на оси  $X''$ ; она равна  $b = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$ . Уравнение оси  $X''$ :  $2x - 3y + 8 = 0$ ; уравнение оси  $Y''$ :  $3x + 2y - 1 = 0$ . с) Эллипс. Если перенести начало координат в точку (-11,6) и повернуть оси на острый угол  $\alpha$ , для которого  $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3}$ , то уравнение примет вид  $7x''^2 + 2y''^2 - 100 = 0$ . Уравнение оси  $X''$ :  $2x - y + 28 = 0$ ; уравнение оси  $Y''$ :  $x + 2y - 1 = 0$ . Полуось эллипса, лежащая на оси  $X''$  (малая):  $p = \frac{10\sqrt{7}}{7} \approx 3,78$ ; полуось, лежащая на оси  $Y''$  (большая):  $q = 5\sqrt{2} \approx 7,07$ . д) Парабола. Если повернуть оси на острый угол  $\varphi$ , для которого  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$ , то уравнение

параболы примет вид:  $y' = \frac{1}{6} x'^2 - x' + \frac{39}{6}$ . е) Пара пересекающихся  
 прямых:  $(12 - 2\sqrt{34})x + y + 9 - 2\sqrt{34} = 0$  и  $(12 + 2\sqrt{34})x + y + 9 + 2\sqrt{34} = 0$ ; прикл.:  $y = -0,338x + 2,66$  и  $y = -23,662x - 20,7$ .  
 ф) Невозможно. г) Невозможно. н) Пара параллельных  
 прямых:  $3x - y - 5 = 0$  и  $6x - 2y + 3 = 0$ . и) Двойная прямая:  
 $(3x - 5y + 2)^2 = 0$ . j) Гипербола: Если перенести начало координат в точку  
 $\left(\frac{19}{14}, -\frac{9}{7}\right)$  [прикл.:  $(1,36; -1,29)$ ] и повернуть оси на острый угол  $\alpha$ ,  
 для которого  $\operatorname{tg} 2\alpha = -6$ , то уравнение примет вид:  $14(3 + \sqrt{37})x''^2 + 14(3 - \sqrt{37})y''^2 + 205 = 0$ ; прикл.:  $y''^2 = 2,95x''^2 + 4,75$ . Уравнение  
 оси  $X''$ :  $14(1 + \sqrt{37})x - 84y - 127 - 19\sqrt{37} = 0$ ; прикл.:  $y = 1,180x - 2,89$ ;  
 уравнение оси  $Y''$ :  $14(1 - \sqrt{37})x - 84y - 127 + 19\sqrt{37} = 0$ ; прикл.:  
 $y = -0,847x - 1,38$ . Действительная полуось гиперболы лежит на оси  $Y''$ ;  
 она равна  $a = \frac{\sqrt{410(\sqrt{37} + 3)}}{28} \approx 2,18$ ; мнимая полуось лежит на оси  $X''$ ; она  
 равна  $b = \frac{\sqrt{410(\sqrt{37} - 3)}}{28} \approx 1,27$ . к) Эллипс. Если перенести начало  
 координат в точку  $\left(-11, -\frac{31}{5}\right)$  и повернуть оси на острый угол  $\alpha$ , для  
 которого  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{10}{7}$ , то уравнение примет вид  $5(13 - \sqrt{149})x'^2 +$   
 $+ 5(13 + \sqrt{149})y'^2 - 644 = 0$ ; прикл.:  $y'^2 = -0,03x'^2 + 5,11$ . Уравнение оси  $X'$ :  
 $(7 - \sqrt{149})x + 10y + 139 - 11\sqrt{149} = 0$ ; прикл.:  $y = 0,521x - 4,73$ ; уравне-  
 ние оси  $Y'$ :  $(7 + \sqrt{149})x + 10y + 139 + 11\sqrt{149} = 0$ ; прикл.:  $y = -1,921x -$   
 $- 27,3$ . Полуось эллипса, лежащая на оси  $X'$  (большая):  $p = \frac{\sqrt{161(13 + \sqrt{149})}}{5} \approx$   
 $\approx 12,7$ ; полуось, лежащая на оси  $Y'$  (малая):  $q = \frac{\sqrt{161(13 - \sqrt{149})}}{5} \approx 2,3$ .  
 л) Парабола. Если повернуть оси координат на острый угол  $\varphi$ , для кото-  
 рого  $\operatorname{tg} \varphi = 2$ , то уравнение примет вид:  $y' = \frac{15\sqrt{5}}{26} x'^2 - \frac{1}{13} x' + \frac{\sqrt{5}}{13}$ ;  
 прикл.:  $y' = 1,29x'^2 - 0,08x' + 0,17$ . **208.**  $32x^2 + 21xy + 46y^2 - 106x - 162y -$   
 $- 340 = 0$ . **209.**  $21x^2 - 2(21 \pm \sqrt{210})xy + (31 \pm 2\sqrt{210})y^2 - 189x +$   
 $+ (89 \pm 2\sqrt{210})y + 378 = 0$  (знаки — одновременно верхние либо нижние);  
 прикл.:  $21x^2 - 72xy + 61y^2 - 189x + 119y + 378 = 0$  и  $1050x^2 - 600xy + 51y^2 -$   
 $- 9450x + 2950y + 18900 = 0$ . **213.**  $x = r(\psi + \sin \psi)$ ,  $y = -r(1 + \cos \psi)$ ;  
 геометрический смысл параметра:  $\psi = t - \pi$ . **214.**  $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}; 1,5\right)$  и  
 $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}; 1,5\right)$ ; прикл.:  $(1,23; 1,5)$  и  $(2,96; 1,5)$ . **215.** Шестого. \* **216.** Эллипс.  
**217.** а)  $y - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right)$ ; прикл.:  $y = 3,73x + 0,0459$ ; б)  $x = 0$ .

**218.** Касательная:  $y - y_1 = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot (x - x_1)$ , нормаль:  $x + y \cdot \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = rt$ .

**220.** а)  $x - y - \frac{\pi}{2} + 2 = 0$ ; прибл.:  $y = x + 0,429$ ; б) прибл.:  $y = -0,667x + 1,57$ ;

с)  $x + y \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ ; прибл.:  $y = -x \pm 0,707$ . **221.** Он равен  $a$ . **224.**  $k \cdot \frac{3}{2}$ .

**225.**  $b = 3$ . **226.** а)  $b \approx 1,12$ ; б)  $b = q^{\frac{1}{2\pi}}$ . **227.**  $\beta \approx 112^\circ 58'$ . **\*228. 230.** На  $90^\circ 19'$  против часовой стрелки. **231.** а)  $S_t = \frac{\rho^2}{d\theta}$ ; б)  $S_t = -k$ . **232.** а)  $S_n = \frac{d\rho}{d\theta}$ ;

б)  $S_n = k$ . **\*233. \*237.** а) См. черт. 131; б) тип черт. 135; в) см. пунктирную линию на черт. 125; д) см. черт. 130; е) см. черт. 131; ф) тип черт. 129; г) тип черт. 134; h) тип черт. 128; и) см. черт. 129; j) тип черт. 125; k) тип черт. 135; l) тип черт. 124; m) см. черт. 133; n) см.

пунктирную линию на черт. 124. **238.** а)  $y = \frac{x-1}{2}$ ; б)  $y = \frac{\pm \sqrt{3x+15}}{3}$ ;

с)  $y = \frac{5-3x}{3}$ ; д)  $y = 2x$ ; е)  $y = \frac{\log_4 x + 7}{5}$ ; ф)  $y = \frac{\pm \sqrt{2x^2+6}}{2}$ ; г)  $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ ;

h)  $y = \frac{1}{x}$ ; \*и)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}(x^2-1)$ . **\*240. 241.** Она симметрична относительно прямой  $y = x$ . **243.** Построить прямые  $y = k$  ( $k$  — любое целое

число), т. е. «разлиновать» бумагу. Каждую дугу кривой  $y = f(x)$ , заключённую между двумя последовательными «линейками»  $y = n$  и  $y = n+1$ , включая левый конец этой дуги и исключая правый, заменить проекцией этой дуги на нижнюю «линейку». **\*245. 247.** Эллипс, оси которого параллельны осям координат (если  $d > 0$ ,  $a < 0$ , где  $d = b^2 - 4ac$ ); гипербола, действительная ось которой лежит на оси  $X$ , а мнимая параллельна оси  $Y$  (если  $d > 0$ ,  $a > 0$ ); гипербола, мнимая ось которой лежит на оси  $X$ , а действительная параллельна оси  $Y$  (если  $d < 0$ ,  $a > 0$ ); невозможно (если  $d < 0$ ,  $a < 0$ ). **252.**  $\overline{OA} = \overline{EF}$ ,  $\overline{OB} = \overline{FA}$ ,  $\overline{OC} = \overline{AB}$ ,  $\overline{OD} = \overline{BC}$ ,  $\overline{OE} = \overline{CD}$ ,  $\overline{OF} = \overline{DE}$ . **253.**  $\pm a \pm b \pm c$ , где возможны все комбинации знаков

(т. е. всего восемь векторов). **254.** а)  $\overline{A_1 A_2} = -\overline{A_4 A_5} = a$ ,  $\overline{A_2 A_3} = -\overline{A_5 A_6} = a + b$ ,  $\overline{A_3 A_4} = -\overline{A_6 A_1} = b$ ; б)  $\overline{A_1 A_2} = -\overline{A_4 A_5} = a - \frac{1}{2}b$ ,  $\overline{A_2 A_3} = -\overline{A_5 A_6} = \frac{1}{2}b$ ,  $\overline{A_3 A_4} = -\overline{A_6 A_1} = -a + b$ ; в)  $\overline{A_1 A_2} = -\overline{A_4 A_5} = -b$ ,  $\overline{A_2 A_3} = -\overline{A_5 A_6} = a + b$ ,  $\overline{A_3 A_4} = -\overline{A_6 A_1} = a + 2b$ ; д) невозможно (данные векторы  $a$  и  $b$  коллинеарны). **255.**  $3a + 3b - 5c$ . **258.**  $a$  и  $b$  коллинеарны. **259.**  $|a| = |b|$ .

**260.**  $a \perp b$ . **261.** а) и д)  $a$  и  $b$  коллинеарны и одинаково направлены; б) и с)  $a$  и  $b$  коллинеарны и противоположно направлены. **\*262. \*263.**  $l_c = \frac{ba + ab}{a + b}$ .

**264.**  $ba + ab$ . **267.**  $\lambda = \frac{1}{3}$ . **268.**  $AC = AB$ . **269.** Если  $a$  и  $b$  неколлинеарны, то  $\alpha + \beta = 1$ . Если  $a$  и  $b$  коллинеарны, то  $\alpha$  и  $\beta$  произвольны. **\*270.**  $\frac{AN}{NB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MA}$ ; эти условия необходимы и достаточны. **271.**  $\overline{LB} : \overline{LC} = -\frac{c}{b}$ ,  $\overline{NL} : \overline{AC}$  вообще говоря (при  $a \neq c$ ) не имеет смысла,  $\overline{OM} : \overline{MB} =$

$$= -\frac{b}{a+b+c}; \overline{BO}:\overline{OM} = \frac{a+c}{b}. \textbf{272.} \overline{OA}:\overline{OL} = -2, \overline{MN}:\overline{CB} = 2, \overline{AN}:\overline{AM}$$

не имеет смысла,  $\overline{LN}:\overline{CM} = 1, \overline{AO}:\overline{OC}$  не имеет смысла. \***273.** \***274.** \***275.**  $|a| = |b|$ .

$$\textbf{277.} 3a - b + 2c = 0. \textbf{278.} d = 2a - \frac{1}{3}b + c. \textbf{279.} a) a = \frac{1}{7}(2c - d), b =$$

$$= \frac{1}{14}(c + 3d); b) \text{ невозможно: } c \text{ и } d \text{ коллинеарны. } \textbf{280.} a) \text{ Некомпланарны;}$$

$$b) 2d + e - f = 0. \textbf{282.} 14a + 23b - c. \textbf{283.} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0. \textbf{284.} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\textbf{285.} |a| = 17; a_{xy} = 4\sqrt{13} \approx 14,4; a_{yz} = 15; a_{zx} = \sqrt{145} \approx 12,0.$$

$$\textbf{285.} a) (-x, y, z), (x, -y, z) \text{ и } (x, y, -z); b) (x, -y, -z), (-x, y, -z) \text{ и } (-x, -y, z); c) (-x, -y, -z). \textbf{287.} (-8, -15, 6). a) \textbf{288.}$$

Три координатные плоскости; b) все точки I, III, VI и VIII октантов; c) все внутренние точки шара радиуса  $|a|$  с центром в начале координат; d) все внутренние точки кругового цилиндра радиуса  $|a|$ , осью которого служит ось  $Z$ ; e) все точки куба (и внутренние, и лежащие на его поверхности), ребро которого равно 1; вершинами этого куба служат точки  $(1, -2, 4)$ ,  $(2, -2, 4)$ ,  $(2, -1, 4)$ ,  $(1, -1, 4)$ ,  $(1, -2, 5)$ ,  $(2, -2, 5)$ ,  $(2, -1, 5)$  и  $(1, -1, 5)$ ; f) все внутренние точки двух вертикальных двугранных углов, один из которых образован I и V октантами, а другой — III и VII октантами. **290.** a)  $z_1 = -5, z_2 = 7$ ; b) невозможно; c)  $x = 2$ .

$$\textbf{291.} a) 35; b) \frac{\sqrt{506}}{2} \approx 11,2; c) 0. \textbf{292.} a) \text{ Центр: } (2, -1, 5), \text{ радиус равен } 15;$$

b) невозможно; точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат в одной плоскости. **293.** a) Да; b) нет; все его стороны равны между собой, но он неплоский. **294.**  $r_{xy} = 8$ .

**295.** a)  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , знаки либо верхние, либо нижние, т. е. таких точек две; b)  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , комбинации знаков — любые, т. е. таких точек восемь.

**296.** a) Во II; b) в I и II; c) во всех; d) в I, II, III и IV; e) во всех, кроме VII и VIII; f) во всех, кроме V, VII и VIII; g) во всех, кроме VIII; h) в I, II и III. **299.** a)  $a^0 = \pm \frac{a}{15} = \pm \frac{5i - 2j - 14k}{15}$ ; b)  $a^0 = \pm 5a = \pm \frac{6i - 3j + 22k}{23}$ ;

$$c) a^0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (i - j). \textbf{300.} a^0 = \frac{4i - 19j + 8k}{21}. \textbf{301.} B_1(18, 17, -17),$$

$$B_2(-14, -19, 31). \textbf{302.} \alpha_1 \approx 19^\circ 28', \beta_1 \approx 106^\circ 36', \gamma_1 \approx 80^\circ 08'; \alpha_2 \approx 160^\circ 32',$$

$$\beta_2 \approx 73^\circ 24', \gamma_2 \approx 99^\circ 52'. \textbf{303.} a) (-2, 3, 0); b) 9. \textbf{304.} a) \gamma_1 = 45^\circ,$$

$$\gamma_2 = 135^\circ; b) \gamma_1 = 73^\circ 25', \gamma_2 = 106^\circ 35'; c) \text{ невозможно; } d) \gamma = 90^\circ. \textbf{305.} 44i -$$

$$-5j \pm 8k. \textbf{306.} \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 \approx 54^\circ 44', \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 \approx 125^\circ 16'. \textbf{307.} \alpha_1 = \beta_1 = 45^\circ,$$

$$\gamma_1 = 90^\circ; \alpha_2 = \beta_2 = 90^\circ, \gamma_2 = 180^\circ. \textbf{308.} 180^\circ; \text{прибл.: } 69^\circ 54'; \text{прибл.: } 249^\circ 54'.$$

$$\textbf{309.} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2; \cos^2(l, XY) + \cos^2(l, YZ) + \cos^2(l, ZX) = 2,$$

$$\textbf{311.} M(2, 10, \pm 11), \cos \alpha = \frac{2}{15}, \cos \gamma = \pm \frac{11}{15}. \textbf{312.} r_3 - r_1 = \lambda(r_2 - r_1).$$

$$\textbf{313.} \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}. \textbf{315.} a) r = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}; b) r = \frac{ar_1 + br_2 + cr_3}{a + b + c},$$

$$\text{где } a = |r_2 - r_3|, b = |r_3 - r_1|, c = |r_1 - r_2|. \textbf{316.} a) r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2};$$

$$b) r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \textbf{317. 318.}$$

Слева — если  $a$  и  $b$  коллинеарны и направлены в противоположные стороны, справа — если  $a$  и  $b$  коллинеарны и

направлены в одну сторону. **320.** a) 70; b) —126. **321.**  $\text{пра } b = \frac{ab}{|a|}$ .



**323.** Параллелограмм является ромбом. **324.** Они должны иметь равные модули. **\*325. 326.**  $BC = 2 \cdot AB$ . **328.**  $AB = AC$ . **329.** Если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, свойство сочетательности умножения. **330.** а)  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны; б)  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  коллинеарны. **331.** а) Работа равнодействующей двух сил равна сумме работ слагающих сил (на том же перемещении); б) работа некоторой силы на геометрической сумме двух перемещений равна сумме работ той же силы на этих перемещениях. **334.**  $\mathbf{x} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ . **335.** а) Плоскость, перпендикулярная вектору  $\mathbf{a}$  и отсекающая на его оси, считая от точки  $A$ , вектор  $\frac{m}{a^2}\mathbf{a}$ ; б) прямая, перпендикулярная к векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Эта прямая есть пересечение плоскостей, перпендикулярных соответственно к векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и отсекающих на их осях, считая от точки  $A$ , соответственно векторы  $\frac{m}{a^2}\mathbf{a}$  и  $\frac{n}{b^2}\mathbf{b}$ . **\*336. 337.**  $\pi R^2 \mathbf{i}$ . **338.**  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 4$ . **339.** При  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

**340.**  $(a_x b_y - a_y b_x)^2 + (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)$ . **341.** а) и д) Правая; б) и с) левая; е) во-

прос не имеет смысла: векторы компланарны. **342.**  $\pm \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}$ . **344.**  $7\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

**345.**  $\frac{45}{2}$ . **346.** 0. **348.**  $(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . **350.** 27 abc. **351.** Векторы  $\mathbf{a}$ ,

$\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны **352.** а) Правая; б) левая; с) вопрос не имеет смысла: векторы компланарны. **353.** Да. **\*354. 0.** **\*355.**  $\mathbf{r} = \frac{\alpha \mathbf{b} + \mathbf{u} \times \mathbf{a}}{ab}$ . **356.** -60. **357.**  $56 \frac{1}{3}$ .

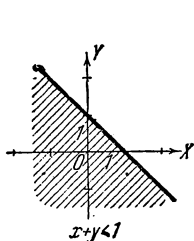
**358.**  $\mathbf{r}_1' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ,  $\mathbf{r}_2' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ . В частности:  $\mathbf{r}_1' = -(i + 2j + k)$ ,  $\mathbf{r}_2' = i + 2j + k$ . **359.** 0' (-5, 1, 0).

360.	X	Y	Z		X	Y	Z		X	Y	Z		X	Y	Z	
	X'	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	X'	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	X'	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	X'	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	Y'	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{15}$	Y'	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{15}$	Y'	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{15}$	Y'	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{15}$
	Z'	$\frac{14}{15}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	Z	$-\frac{14}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{15}$	Z'	$\frac{14}{15}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{15}$	Z'	$\frac{14}{15}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{15}$

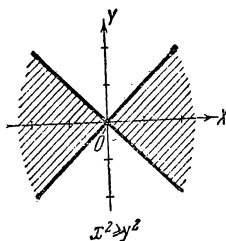
$$\left. \begin{aligned}
 x &= \frac{15}{17}x' + \frac{32}{85}y' \pm \frac{24}{85}z' - 10 \\
 \mathbf{361.} \quad y &= -\frac{8}{17}x' + \frac{12}{17}y' \pm \frac{9}{17}z' + 5 \\
 z &= -\frac{3}{5}y' \pm \frac{4}{5}z' + 4
 \end{aligned} \right\} \text{, знаки либо все верхние, либо все нижние.}$$

**362.** а)  $x + y \leq 1$  (черт. 279); б)  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ , т. е. вся плоскость; в)  $x^2 \geq y^2$  (черт. 280); д)  $x \neq y$ , т. е. вся плоскость кроме прямой  $x = y$  (черт. 281); е) вся плоскость кроме начала координат; ф)  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$  (черт. 282); г)  $x^2 - y^2 \geq 1$  (черт. 283); h)  $x^2 - y^2 \leq 1$

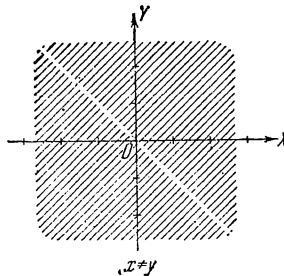
(черт. 284); i)  $x^2 + y^2 \geq 1$  (черт. 285); j)  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$  (черт. 286); k)  $x^2 + y^2 = 4$  (черт. 287); l) не существует ни при каких значениях  $x$  и  $y$ . **363.** а)  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ . **364.**  $2x + 8y - 12z + 41 = 0$ . **365.** а)  $z^2 = 2x + 6y - 2z - 11$ ; б)  $z = 0$ , т. е. плоскость  $XY$ . **366.** а) Синусоидальный цилиндр; направляющая синусоида  $y = \sin x$  в плоскости  $XY$ , образующие параллельны оси  $Z$ ; б) биссекторная плоскость двугранного угла,



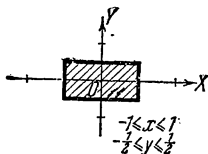
Черт. 279.



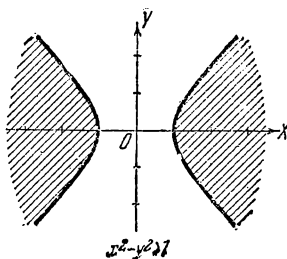
Черт. 280.



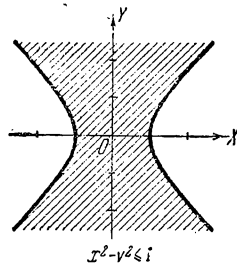
Черт. 281.



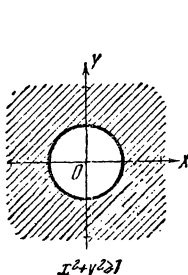
Черт. 282.



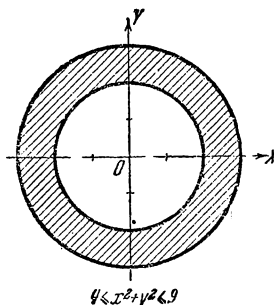
Черт. 283.



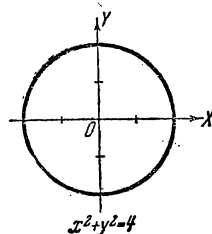
Черт. 284.



Черт. 285.



Черт. 286.



Черт. 287.

образованного плоскостями  $XY$  и  $ZX$ , проходящая в I, II, VII и VIII октантах; с) двойная плоскость, параллельная плоскости  $XY$  и отсекающая на оси  $Z$  отрезок, равный 1; d) пара плоскостей:  $XY$  и  $YZ$ ; e) гиперболический цилиндр; направляющая — гипербола  $x^2 - y^2 = 1$  в плоскости  $XY$ , образующие параллельны оси  $Z$ ; f) плоскость, параллельная плоскости  $YZ$  и отсекающая на оси  $X$  отрезок, равный 3; g) плоскость, параллельная оси  $Y$  и

пересекающая плоскость  $ZX$  по прямой  $z - 2x + 3 = 0$ ; h) пара биссекторных плоскостей двугранного угла, образованного плоскостями  $XY$  и  $ZX$ ; i) пара плоскостей, параллельных плоскости  $ZX$  и отсекающих на оси  $Y$  отрезки 1 и 3; j) ось  $x$ ; k) семейство плоскостей, параллельных плоскости  $ZX$  и отсекающих на оси  $Y$  отрезки, равные  $k\pi$  ( $k$  — любое целое число); l) невозможно; m) невозможно; n) семейство гиперболических цилиндров;

направляющими служат гиперболы  $xu = \frac{\pi}{2}(4k+1)$  ( $k$  — любое целое чи-

сло), расположенные в плоскости  $XY$ ; образующие параллельны оси  $Z$ .

**367.** а) Окружность; б) невозможно; в) пара эллипсов; г) прямая; е) геометрического смысла не имеет; ф) линия пересечения синусоидального цилиндра с плоскостью. **368.** а) Сфера с центром в полюсе радиуса  $R$ ; б) сфера с центром в точке (а) радиуса  $R$ ; в) плоскость, проходящая через точку (а) и перпендикулярная к вектору **b**; г) прямая, проходящая через точку (а) и

параллельная вектору **b**. **369.** Уравнения:  $x = \sqrt{R^2 - \lambda^2 t^2} \cos t$ ,  $y = \sqrt{R^2 - \lambda^2 t^2} \sin t$ ,  $z = \lambda t$ , где  $t = \angle XOP$ ,  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности; концы:  $(0, 0, -R)$  и  $(0, 0, R)$ . **370.** Отрезок длиной  $2|\mathbf{b}|$ , параллель-

ный вектору **b** и имеющий середину в точке (а). **371.** а)  $a = \frac{35}{6}$ ,  $b = -\frac{35}{2}$ ,

$c = \frac{35}{3}$ ; б)  $a = \frac{35}{6}$ ,  $b = -\frac{35}{2}$ ,  $c = -\frac{35}{3}$ ; в)  $a = \frac{17}{15}$ ,  $b = \frac{17}{8}$ ,  $c = \infty$ ; г)  $a = 1$ ,

$b = \infty$ ,  $c = \infty$ ; е)  $a = b = c = 0$ ; в этом случае привести уравнение к виду «в отрезках» нельзя. **372.** а)  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 0$ ,  $p = 0$ ; б)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = 90^\circ$ ,  $p = 0$ ; в)  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ,  $\beta = 0$ ,  $p = 0$ ; г)  $\alpha = \beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ ,  $p = 0$ ; е)  $\alpha = 90^\circ$ ,

$\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 135^\circ$ ,  $p = 0$ . **373.** б), д), е) и г). **374.** а)  $-\frac{2}{11}x + \frac{6}{11}y + \frac{9}{11}z - 3 = 0$ ;

б)  $\frac{2}{15}x + \frac{2}{3}y - \frac{11}{15}z - \frac{4}{3} = 0$ ; в)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) = 0$ ; г)  $-\frac{2}{15}x + \frac{1}{3}y - \frac{14}{15}z - 2 = 0$ ; е)  $\pm \frac{2x + 2y - z}{3} = 0$ . **375.** а)  $\frac{4}{21}x - \frac{20}{21}y + \frac{5}{21}z - 20 = 0$ ;  $\alpha \approx 79^\circ 01'$ ,

$\beta \approx 162^\circ 15'$ ,  $\gamma \approx 76^\circ 12'$ ;  $p = 20$ ; б)  $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0$ ;  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta \approx 36^\circ 52'$ ,

$\gamma \approx 126^\circ 52'$ ;  $p = 2,4$ ; в)  $x - 1 = 0$ ;  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \gamma = 90^\circ$ ;  $p = 1$ . **376.** а)  $\cos \alpha = \pm \frac{9}{49}$ ,  $\cos \beta = \pm \frac{4}{49}$ ,  $\cos \gamma = \pm \frac{48}{49}$ ; знаки — либо все верхние, либо все ниж-

ние; б)  $\cos \alpha = \pm \frac{35}{37}$ ,  $\cos \beta = 0$ ,  $\cos \gamma = \mp \frac{12}{37}$ ; знаки — либо оба верхние, либо оба

нижние. **377.**  $\cos \alpha = \frac{bc}{\pm \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ ,  $\cos \beta = \frac{ca}{\pm \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ ,

$\cos \gamma = \frac{ab}{\pm \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ , знаки — всюду верхние, если  $abc > 0$ , или

всюду нижние, если  $abc < 0$ ,  $p = \left| \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \right|$ ,  $a = \frac{p}{\cos \alpha}$ ,  $b = \frac{p}{\cos \beta}$ ,

$c = \frac{p}{\cos \gamma}$ . **378.** а) Параллельно оси  $Z$ ; б) проходит через ось  $Z$ ; в) проходит

через ось  $X$ ; г) плоскость  $YZ$ ; е) параллельна оси  $X$ ; ф) параллельна плоскости  $ZX$ ; г) параллельна плоскости  $XY$ ; h) параллельна оси  $Y$ ; i) проходит через ось  $Y$ ; j) проходит через начало. **379.** Да. **380.** а) **381.** а) Проходит через начало; б) параллельна плоскости  $YZ$ ; в) проходит через ось  $Z$ ; г) параллельна

плоскости  $XY$ ; е) плоскость  $YZ$ . **332.** а)  $\varphi \approx 67^\circ 36'$ ; б)  $\varphi = 90^\circ$ ; в)  $\varphi = 0$ ; д)  $\varphi \approx 18^\circ 53'$ ; е)  $\varphi = 60^\circ$ . **333.** а)  $d = 1$ ; б)  $d = 3$ . **334.** а)  $5x - 14y + 2z - 9 = 0$ ;

б) невозможно. **335.**  $\sin(\alpha, X) = \cos(\alpha, ZY) = \left| \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$ ,  $\sin(\alpha, Y) =$   
 $= \cos(\alpha, ZX) = \left| \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$ ,  $\sin(\alpha, Z) = \cos(\alpha, XY) = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$ ,

где  $\alpha$  — данная плоскость. **338.** а)  $2x - 8y + z - 1 = 0$ ; б)  $z = -5$ ; в)  $x = 3$ ; д)  $y = 0$ . **339.**  $11x - 2y - 3z - 75 = 0$ . **390.** а)  $13x - y - 7z - 37 = 0$ ; б) задача неопределённая, так как данные точки лежат на прямой, перпендикулярной к данной плоскости; общий ответ  $\lambda x + y - (\lambda + 6)z - 2\lambda + 11 = 0$ , где  $\lambda$  — произвольный параметр; в)  $2y - z = 0$ . **391.** а)  $16x - 14y - 11z - 120 = 0$ ; б)  $2y + z + 8 = 0$ ; в) задача неопределённая, так как две данные плоскости параллельны; общий ответ  $x + (5\lambda + 2)y + (2\lambda + 1)z + 16\lambda + 6 = 0$ , где  $\lambda$  — произвольный

параметр. **392.**  $y \pm \sqrt{3}z = 0$ . **393.** а)  $2x + y - 5z - 2 = 0$ ; б)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} -$

$-\frac{z}{z_1} \left( \frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} - 1 \right) - 1 = 0$ . **394.** а)  $y = 2$ ; б)  $4x + 3z - 1 = 0$ . **395.**  $Ax +$   
 $+ By + Cz + \frac{2D_1 + D_2}{3} = 0$  и  $Ax + By + Cz + \frac{D_1 + 2D_2}{3} = 0$ . **396.**  $z = 8$ .

**397.**  $(11, -9, -3)$  или  $(3, 7, 13)$ . **398.**  $6x + 10y + 3z + 39 = 0$ . **399.**  $11x - 2y +$   
 $+ 10z - 27 = 0$  и  $11x - 2y + 10z + 33 = 0$ ; начало координат лежит между

первой из указанных плоскостей и плоскостью треугольника  $ABC$ . **400.** а)  $90x - 17y + 24z - 265 = 0$ ; б) задача неопределённая, так как данные точки лежат на одной прямой; общий ответ  $x + \lambda y + 2(\lambda - 1)z + 4\lambda - 7 = 0$ , где  $\lambda$  — произвольный параметр. **401.** а) Нельзя; б) можно:  $9x + 5y - 2z - 20 = 0$ ; в) можно при любом положении точки  $D$ , так как точки  $A, B$  и  $C$  лежат на одной прямой;  $8x + y + 11z - 67 = 0$ ; д) можно провести  $\infty^1$  плоскостей, так как все четыре точки лежат на одной прямой; общий ответ  $38x + 4(\lambda - 5)y + (3\lambda + 4)z - 38\lambda = 0$ ,  $\lambda$  — произвольный параметр. **402.**  $(5, -1, -2)$ . **403.** Это — точка  $(1, 3, -1)$ . **405.** а) Задача неопределённая: все три плоскости проходят через прямую  $x = -3 + \lambda$ ,  $y = -3\lambda$ ,  $z = 2 + \lambda$ ; б) задача невозможна: данные плоскости пересекаются по трём параллельным прямым (направляющий вектор этих прямых  $2i + 3j - k$ ); в) задача невозможна: две из данных плоскостей параллельны; д) задача невозможна: все три плоскости параллельны. **406.** В векторной форме

$$r = - \frac{D_1 N_2 \times N_3 + D_2 N_3 \times N_1 + D_3 N_1 \times N_2}{N_1 N_2 N_3},$$

в координатной форме:  $x = \frac{-\Delta_1}{\Delta}$ ,  $y = \frac{-\Delta_2}{\Delta}$ ,  $z = \frac{-\Delta_3}{\Delta}$ , где

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

Задача имеет единственное решение, если  $N_1 N_2 N_3 \neq 0$  (или если  $\Delta \neq 0$ ), т. е. если векторы  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  некопланарны. Для классификации остальных

случаев введём в рассмотрение матрицу  $M = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$ . Случаи, когда

$N_1 N_2 N_3 = 0$ , распадаются на три группы: I. Все три векторных произведения  $N_1 \times N_2$ ,  $N_2 \times N_3$ ,  $N_3 \times N_1$  отличны от нуля (или в определителе  $\Delta$  нет пропорциональных строк). II. Одно из указанных векторных произведений равно нулю (положим для определённости  $N_1 \times N_2 = 0$ ), а два другие отличны от нуля (или в определителе  $\Delta$  первые две строки пропорциональны, а третья

им не пропорциональны). III. Все три векторных произведения суть нули (или в определителе  $\Delta$  все три строки пропорциональны). В первой группе имеем два случая. Ia.  $D_1N_2 \times N_3 \neq 0$ ,  $D_2N_3 \times N_1 \neq 0$ ,  $D_3N_1 \times N_2 \neq 0$  (или из определителей  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  хотя бы один отличен от нуля). Плоскости пересекаются по параллельным прямым (образуют бесконечную призму). Задача невозможна. Ib.  $D_1N_2 \times N_3 \neq 0$ ,  $D_2N_3 \times N_1 + D_3N_1 \times N_2 = 0$  (или все три определителя  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  суть нули). Плоскости проходят через одну прямую. Задача неопределённая. Во второй группе имеем два случая. IIa.  $D_1N_2 - D_2N_1 \neq 0$  (или в матрице  $M$  первые две строки не пропорциональны). Первые две плоскости параллельны, а третья пересекает их по параллельным прямым. Задача невозможна. IIb.  $D_1N_2 - D_2N_1 = 0$  (или в матрице  $M$  первые две строки пропорциональны). Первые две плоскости совпадают, а третья пересекает их. Задача неопределённая. В третьей группе имеем три случая. IIIa. Все три вектора  $D_1N_2 - D_2N_1$ ,  $D_2N_3 - D_3N_2$ ,  $D_3N_1 - D_1N_3$  отличны от нуля (или в матрице  $M$  нет пропорциональных строк). Все три плоскости параллельны. Задача невозможна. IIIb. Один из векторов  $D_1N_2 - D_2N_1$ ,  $D_2N_3 - D_3N_2$ ,  $D_3N_1 - D_1N_3$  равен нулю (или в матрице  $M$ ) имеются две пропорциональные строки. Две плоскости совпадают, а третья параллельна им. Задача невозможна. IIIc. Все три вектора  $D_1N_2 - D_2N_1$ ,  $D_2N_3 - D_3N_2$ ,  $D_3N_1 - D_1N_3$  суть нули (или в матрице  $M$  все строки пропорциональны). Все три плоскости совпадают. Задача неопределённая. **407.**  $r(3i - 2j + k) = 7$ .

**408.**  $(r - \frac{1}{2} r_3) r_1 r_2 = 0$ ; проверка:  $\frac{r_1 + r_2}{2} r_1 r_2 = 0$ . **409.**  $B$ ,  $D$  и  $F$ . **411.** Проекция на плоскость  $XY$ :  $y^2 = 4x$  (парабола), на плоскость  $YZ$ :  $y^4 + 4y^2 + 4z^2 - 100 = 0$ , на плоскость  $ZX$ :  $(x + 2)^2 + z^2 - 29 = 0$  (окружность).

**412.** Проекция на плоскость  $XY$ :  $x^2 + y^2 = R^2$  (окружность), на плоскость  $YZ$ :  $y = R \sin \frac{z}{\lambda}$  (синусоида), на плоскость  $ZX$ :  $x = R \cos \frac{z}{\lambda}$  (синусоида).

**413.** Проекция на плоскость  $XY$ :  $2x - y + 5 = 0$ , на плоскость  $YZ$ :  $3y + z - 1 = 0$ , на плоскость  $ZX$ :  $z + 6x + 14 = 0$ . **414.** Проекция на плоскость  $XY$ :  $2x + y - 5 = 0$ , на плоскость  $YZ$ :  $4y - z + 9 = 0$ , на плоскость  $ZX$ :  $8x + z - 29 = 0$ . **415.** а)  $5x + 6y + 1 = 0$ ; б) точка  $(-3, 1, 0)$ ; в)  $y = 3$ ; г) задача неопределённая: прямая может занимать любое положение в плоскости  $z = 2$ , т. е. любая прямая в плоскости  $XY$  может служить её проекцией.

**416.**  $30^\circ$ . **417.**  $\cos \alpha = \frac{9}{11}$ ,  $\cos \beta = -\frac{2}{11}$ ,  $\cos \gamma = \frac{6}{11}$ . **418.** а)  $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{1} =$

$= \frac{z+1}{-3}$ ; б)  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{-8}$ ; в)  $\frac{x+3}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}$ ; г)  $\frac{x-13}{0} = \frac{y-9}{0} = \frac{z}{1}$ ; е)  $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ . **419.** Да. **420.**  $(r - r_1) \times (r_3 - r_2) = 0$ .

**421.** Прямая, проходящая через точку, имеющую радиус-вектор  $r_1 = \frac{a \times b}{a^2}$ , и параллельная вектору  $a$ . **422.** При  $N_1N_2N_3 = 0$ . Это условие не исключает случаев, когда прямые совпадают или становятся бесконечно удалёнными; подробнее см. ответ к задаче № 406.

**423.**  $r = \frac{(N_1 \times N_2) \times (D_1N_2 - D_2N_1)}{(N_1 \times N_2)^2} + \lambda N_1 \times N_2$ . **424.** а)  $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{27} \approx 0,1048$ ;

$\varphi \approx 83^\circ 59'$ ; б)  $\cos \varphi = 0$ ;  $\varphi = 90^\circ$ ; в)  $\cos \varphi = \frac{61}{135} \approx 0,4519$ ;  $\varphi \approx 63^\circ 08'$ . **425.** а)  $\psi \approx 50^\circ 03'$ ; б)  $\psi \approx 54^\circ 44'$ . **426.**  $\cos \varphi = \frac{67}{77} \approx 0,870$ . **427.** а) Да [в точке  $(3, -1, -2)$ ];

б) нет; с) да [в точке  $(-1, 16, -1)$  при  $s=2, t=-1$ ]; д) нет, они параллельны; е) да [в точке  $(2, 4, -1)$ ]; ф) совпадают. **429.** а)  $\frac{x-7}{5} =$

$$= \frac{y+4}{0} = \frac{z+5}{2}; \text{ б) задача, неопределённая, так как данная точка лежит на}$$

данной прямой; общий ответ  $\frac{x-11}{1} = \frac{y+3}{2t+1} = \frac{z-1}{3t-1}$ . **430.** а)  $\frac{x+2}{26} =$

$$= \frac{y+7}{-15} = \frac{z-1}{-8}; \text{ б) } \frac{x-4}{8} = \frac{y-1}{-43} = \frac{z+6}{3}; \text{ в этом случае данные прямые}$$

пересекаются, что не влияет на однозначность решения; с) задача неопределённая, так как данные прямые параллельны; общий ответ  $\frac{x-5\lambda-1}{107} =$

$$= \frac{y-7\lambda}{17} = \frac{z-3\lambda+2}{-218}; \text{ при различных значениях параметра } \lambda \text{ полу-}$$

чаются различные прямые, пересекающие обе данные и перпендикулярные им. **431.** а) 15; б) 9; с) 0; д) 7 (в этом случае данные прямые параллельны, и их общий перпендикуляр — неопределённый).

$$\textbf{432. } \frac{x}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-8}{2}. \textbf{433. } \frac{x-2}{5} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-3}{1}. \textbf{434. а) } (1, 1, 3);$$

б)  $(4, -2, -5)$ . **435.** а)  $(10, 5, -7)$ ; б)  $(8, -3, 10)$ . **436.** а)  $\varphi \approx 77^\circ 46'$ , точка

пересечения диагоналей  $(-2, -4, 1)$ ; б)  $\varphi = 90^\circ$ , диагонали не пересекаются.

**437.** а)  $5x - 9y + z - 9 = 0$ ; б) задача неопределённая, так как данная точка

лежит на данной прямой, общий ответ  $(1+2\lambda)x + 3y + \lambda z - 1 - 4\lambda = 0$ ,

где  $\lambda$  — произвольный параметр. **438.** 18. **439.**  $\frac{x-2}{25} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-13}$ . **440.**  $80x -$

$$-14y + 17z + 22 = 0. \textbf{441. а) } 3x - y + 8z - 1 = 0; \text{ б) задача неопределённая,}$$

так как данные прямые параллельны; общий ответ:  $x + \lambda y + (1 - 5\lambda)z -$

$$- (1 + 2\lambda) = 0. \textbf{442. } \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+2}{-1}. \textbf{443. } 78x - 13y + 111z - 221 = 0.$$

$$\textbf{444. } \delta = 1. \textbf{445. } 5x + 17y - 40z + 99 = 0 \text{ и } 49x - 5y + 4z - 33 = 0.$$

$$\textbf{446. } \mathbf{r} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}). \textbf{447. } \mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{c}; \text{ проверка: при}$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \text{ получим } \frac{1}{2}\mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}. \textbf{448.}$$

Даём лишь названия поверхностей,

предоставляя читателю описание их расположения относительно координатной системы. а) Сжатый эллипсоид вращения; б) и с) однополостный гиперболоид; д) и ф) двухполостный гиперболоид вращения; е), г), ж), з), и) и г) гиперболический параболоид; г) невозможно; и) однополостный гиперболоид вращения; к) вытянутый эллипсоид вращения; м) и с) эллиптический параболоид; п) трёхосный эллипсоид; о) двухполостный гиперболоид; q) параболоид вращения. **449.** а)  $k^2x^2 = y^2 + z^2$ ; б)  $\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; с)  $y^2 + z^2 =$

$$= \sin x$$
; д)  $y^2 + z^2 = 2\rho x$ ; е)  $y^2 = 4\rho^2(x^2 + z^2)$ . **450.** а) Круговой конус с вершиной в начале; осью его служит ось  $Y$ ; угол между осью и образующей равен  $\operatorname{arctg} 2$ ; б) эллиптический конус с вершиной в начале; осью его служит ось  $X$ ; сечения плоскостями, параллельными плоскости  $YZ$ , суть эллипсы с эксцентриситетом  $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ; с) одна точка: начало координат; д) ось  $Z$ ;

е) пара плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $YZ$  и  $ZX$ ; ф) конус четвёртого порядка с вершиной в начале.

## УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

**2.** Сумма проекций равна  $a [\cos \alpha + \cos (\alpha + 72^\circ) + \cos (\alpha + 144^\circ) + \cos (\alpha + 216^\circ) + \cos (\alpha + 288^\circ)]$ , где  $a$  — сторона пятиугольника. Выражение в квадратных скобках после некоторых преобразований приводится к виду  $\cos \alpha (4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1)$ . Подставляя  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  (это легко полу-

чить, заметив, что  $\sin 18^\circ = \frac{a_{10}}{2R}$ , где  $a_{10}$  — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ ), обнаружим, что сумма проекций равна нулю. **29.** б) Значение  $y$  в этом примере, очевидно, без вычислений.

**35.** Диагонали  $AC$  и  $BD$  имеют общую середину. Следовательно,  $x_A + x_C = x_B + x_D$ ,  $y_A + y_C = y_B + y_D$ . **36.** Точка пересечения диагоналей делит диагональ  $AC$  в некотором (пока неизвестном) отношении  $\lambda$ . Следовательно,  $x = \frac{1-2\lambda}{1+\lambda}$ ,  $y = \frac{5-\lambda}{1+\lambda}$ . Эта же точка делит диагональ  $BD$  в некотором отношении  $\mu$ . Следовательно,  $x = \frac{8-4\mu}{1+\mu}$ ,  $y = \frac{-5+3\mu}{1+\mu}$ . Приравняв получен-

ные выражения, получим два уравнения  $\frac{1-2\lambda}{1+\lambda} = \frac{8-4\mu}{1+\mu}$ ,  $\frac{5-\lambda}{1+\lambda} = \frac{-5+3\mu}{1+\mu}$ ,

из которых определим  $\lambda$  и  $\mu$  (достаточно найти одно из них), а затем найдём  $x$  и  $y$ . **45.** б) См. сноску на стр. 68. **49.** 1), m), n), o) Квадратный трёхчлен меняет знак только при переходе  $x$  через корни, квадратный трёхчлен с мнимыми корнями имеет один и тот же знак при всех значениях  $x$ . **103.** Можно воспользоваться тем, что биссектриса есть геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла. Возьмём точку  $M(x, y)$  и обозначим через  $\delta_1$  и  $\delta_2$  её расстояния (снабжённые знаком) соответственно

от первой и второй прямых. Имеем:  $\delta_1 = \frac{2x-3y+8}{\sqrt{4+9}}$ ,  $\delta_2 = \frac{6x+4y-3}{\sqrt{36+16}}$ .

Если точка  $M$  лежит на одной из биссектрис, то  $\delta_1 = \pm \delta_2$ . **121.** Для нахождения точки пересечения двух линий, заданных полярными уравнениями, недостаточно решить совместно эти уравнения. Так, в данном случае, решив совместно уравнения, мы получили бы лишь одну точку  $[k\delta_0, \delta_0]$ . Причина этого заключается в том, что координаты одной и той же точки могут быть представлены в разных видах (полярные углы могут различаться на несколько полных оборотов), причём для того, чтобы уравнение удовлетворялось, не безразлично, какое из значений полярного угла мы выберем. Возможно, что координаты точки пересечения двух линий удовлетворяют двум уравнениям при разных значениях полярного угла; тогда они не могут быть найдены совместным решением этих уравнений. Для нахождения точек пересечения надо решить совместно данные уравнения, в одном из которых вместо  $\vartheta$  положено  $\vartheta + 2\pi i$ , где  $i$  — неопределённое целое число. **122.** См. указание

к задаче № 121. **124.** h) Возводим данное уравнение в куб:  $x + 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt[3]{xy^2} + y = 1$ . Далее  $3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 1 - x - y$ . Учитывая, что выражение в скобках в силу данного уравнения равно 1 и снова возводя в куб, получим  $27xy = (1-x-y)^3$ . **153.** Уравнение прямой, проходящей через точку  $(x_1, y_1)$ :  $y - y_1 = k(x - x_1)$ . Ищем точки пересечения этой прямой с эллипсом, для чего подставляем в уравнение эллипса  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  вместо  $y$  выражение  $y = kx + y_1 - kx_1$ . После некоторых преобразований получаем для определения  $x$  квадратное уравнение. Чтобы наша прямая была касательной, это уравнение должно иметь совпадающие корни, для чего его дискриминант должен равняться нулю, что после некоторых преобразо-

ваний приводит к следующему уравнению второй степени для определения  $k$ :

$$(a^2 - x_1^2)k^2 + 2x_1y_1k + b^2 - y_1^2 = 0. \text{ Находим } k = -\frac{x_1y_1}{a^2 - x_1^2}. \text{ Учитывая, что}$$

точка  $(x_1, y_1)$  принадлежит эллипсу, можем заменить знаменатель через  $\frac{a^2y_1^2}{b^2}$ , после чего получим:  $k = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$ . Это же можно получить дифферен-

цируя уравнение эллипса по  $x$  и рассматривая  $y$  как неявную функцию  $x$ . Теперь (ещё раз учитывая, что точка  $(x_1, y_1)$  принадлежит эллипсу, легко получим уравнение, приведённое в ответе. **154.** Либо исходить из того, что при совместном решении уравнения прямой с уравнением эллипса должны получиться совпавшие точки, либо из того, что коэффициенты в уравнении прямой должны быть пропорциональны коэффициентам в уравнении касательной к эллипсу, полученном в предыдущей задаче. **155.** Используя уравнение нормали, полученное в задаче № 153, найдём точку пересечения нормали с осью  $X$ . Докажем, что эта точка делит отрезок между фокусами на части, пропорциональные фокальным радиусам-векторам; при этом использовать формулы (10) § 2 гл. VI (стр. 159). **162.** Имеем  $pv = RT$ , где  $T$  — абсолютная температура, а  $R$  — константа Авогадро, равная для грамм-молекулы всякого газа 1,985 малой калории или 0,08207 литр-атмосферы. В 1 кг кислорода 31,25 г-мол. Учитывая, что  $15^\circ\text{C} = 288,07^\circ\text{A}$ , получим  $pv = 0,08207 \cdot 31,25 \cdot 288,07 \text{ л-ат} = 738,8 \text{ л-ат}$ . Рекомендуется принять по оси абсцисс одну клетку за 0,1 атмосферы, а по оси ординат — одну клетку за 20 литров. **178.** Действовать аналогично тому, как указано в задаче № 153. **179.** Аналогична задаче № 154. **180.** Аналогична задаче № 155. **193.** Аналогична задаче № 153. **199.** Пусть  $M(x_1, y_1)$  — точка параболы, в которой мы проводим касательную,  $L$  — проекция этой точки на директрису,  $F$  — фокус параболы. Зная угловой коэффициент касательной к параболе (см. ответ задачи № 193), убедимся, что касательная перпендикулярна прямой  $LF$ , т. е. служит высотой треугольника  $LMF$ . А так как, по определению параболы, этот треугольник — равнобедренный, то касательная одновременно является биссектрисой. **200.** Угловой коэффициент диаметра,

проходящего через точку  $(2,1)$  равен  $\frac{1}{2}$ . Хорда, делящаяся в этой точке

пополам, сопряжена этому диаметру, и её угловой коэффициент определяется по формуле (2) § 5 главы VI (стр. 191). **216.** Пусть  $O$  — центр большой окружности,  $AB$  — диаметр малой окружности и  $C$  — точка на этом диаметре. Угол  $\angle AOB$  — прямой, как вписанный угол (малой окружности), опирающийся на диаметр. При качении малой окружности точка  $A$ , в силу теоремы Кардана (п 133, стр. 240), будет описывать диаметр большой окружности точка  $B$  — тоже. Таким образом, при движении отрезка  $AB$  его концы всё время будут оставаться на двух взаимно-перпендикулярных прямых, а следовательно, точка  $C$  будет описывать эллипс (последнее положение доказывается весьма просто). **228.** В дифференциальном исчислении доказывается, что угол касательной с радиусом-вектором, проведённым в точку касания,

определяется по формуле  $\operatorname{tg} \tau = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}$ . Находим  $\frac{d\rho}{d\theta} = \ln b \cdot b^\theta$  из уравнения ло-

гарифмической спирали [уравнение (4) § 2 гл. VIII (стр. 245)]. Следовательно,  $\operatorname{tg} \tau = \frac{1}{\ln b}$ . Можно не обращаться к дифференцированию. Если  $A$  и  $B$  суть

две точки на логарифмической спирали, то можно подвергнуть спираль подобному растяжению с таким коэффициентом, чтобы радиус-вектор точки  $A$  после растяжения стал таким, каков был радиус-вектор точки  $B$  до растяжения. При растяжении угол между касательной и радиусом-вектором не



изменится, а так как после растяжения мы получим спираль, конгруэнтную первоначальной, то тем самым наше утверждение доказано. **233.** Если в уравнения (11) § 1 гл. VIII (стр. 240) подставить  $r = \infty$ ,  $m = 0$ , то для  $x$  и  $y$  получатся неопределённые значения. Чтобы избежать этого, преобразуем уравнения (11). Заменим  $r = \frac{R}{m}$ :  $x = R \left[ \cos t + \frac{\cos t - \cos(m+1)t}{m} \right]$ .

$y = R \left[ \sin t + \frac{\sin t - \sin(m+1)t}{m} \right]$ . Преобразуя разности косинусов и синусов в произведения и проделявая ещё некоторые преобразования, получим:

$$x = R \left[ \cos t + \sin \left( \frac{m}{2} + 1 \right) t \cdot \frac{\sin \frac{m}{2} t}{\frac{m}{2}} \right], \quad y = R \left[ \sin t - \cos \left( \frac{m}{2} + 1 \right) t \cdot \frac{\sin \frac{m}{2} t}{\frac{m}{2}} \right].$$

Переходя к пределу при  $m \rightarrow 0$  (учитывая, что  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ ), получим:

$$\lim_{m \rightarrow 0} x = R(\cos t + t \sin t), \quad \lim_{m \rightarrow 0} y = R(\sin t - t \cos t).$$

Эти выражения совпадают с выражениями текущих координат точек эволюенты окружности [уравнения (8) § 2 гл. VIII (стр. 249)]. **238.** i) Возвести данное равенство в квадрат. **240.** Равносторонняя гипербола, асимптоты которой параллельны осям координат, при переворачивании чертежа вокруг биссектрисы нормального координатного угла перейдёт в равностороннюю гиперболу, асимптоты которой параллельны осям координат. **245.** а) Применить аффинное преобразование к графику черт. 130 (стр. 253); б) применить аффинное преобразование к соответствующей кривой черт. 151 (стр. 270); с) применить аффинное преобразование к сплошной линии черт. 125 (стр. 251). **262.** Для многоугольника с чётным числом сторон это очевидно. В общем случае рассуждаем так. Пусть  $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n} = \mathbf{p}$ . Повернём многоугольник вокруг его центра на угол  $\frac{360^\circ}{n}$ . При этом все векторы  $\overline{OA_1}$ ,

$\overline{OA_2}, \dots, \overline{OA_n}$  повернутся на угол  $\frac{360^\circ}{n}$  и, следовательно, вектор  $\mathbf{p}$ , являющийся их суммой, тоже повернётся на тот же угол. С другой стороны, при таком повороте вектор  $\mathbf{p}$  не должен измениться, так как многоугольник перейдёт сам в себя. Вектор, не изменяющийся при повороте, неизбежно является нуль-вектором. Следовательно,  $\mathbf{p} = 0$ , что и требовалось доказать. **263.** Этот вектор должен иметь вид  $\lambda(\mathbf{ba} + \mathbf{ab})$  (см. ответ задачи № 264). Для того чтобы конец этого вектора оказался на прямой  $AB$ , сумма коэффициентов при векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  должна равняться единице (см. ответ задачи № 269). **270.** Обозначим  $\overline{AB} = \mathbf{c}$ ,  $\overline{BC} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{CA} = \mathbf{b}$ ,  $\frac{BL}{LC} = \lambda_1$ ,  $\frac{CM}{MA} = \lambda_2$ ,

$\frac{AN}{NB} = \lambda_3$ . Тогда  $\overline{AL} = \frac{\mathbf{c} - \lambda_1 \mathbf{b}}{1 + \lambda_1}$ ; векторы  $\overline{BM}$  и  $\overline{CN}$  получаются циклической перестановкой. Должно быть  $\overline{AL} + \overline{BM} + \overline{CN} = 0$ , т. е.  $\frac{\mathbf{c} - \lambda_1 \mathbf{b}}{1 + \lambda_1} + \frac{\mathbf{a} - \lambda_2 \mathbf{c}}{1 + \lambda_2} + \frac{\mathbf{b} - \lambda_3 \mathbf{a}}{1 + \lambda_3} = 0$ . После некоторых преобразований (с учётом условия  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ ) получим, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . **273.** Обозначим  $\overline{AB} = \mathbf{c}$ ,  $\overline{BC} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{CA} = \mathbf{b}$ , причём  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$ . Вычислим медианы  $\overline{AL} = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{2}$ ,  $\overline{BM} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{2}$ ,

$\overline{CN} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{2}$ . Отложим на каждой медиане  $\frac{2}{3}$  её, считая от вершины;

$\overline{AO_1} = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{3}$ ,  $\overline{BO_2} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{c}}{3}$ ,  $\overline{CO_3} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{3}$ . Докажем, что векторы  $\overline{AO_1}$ ,  $\overline{AO_2} = \overline{AB} + \overline{BO_2}$ ,  $\overline{AO_3} = \overline{AC} + \overline{CO_3}$  совпадают, т. е. точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  совпадают. **274.** Обозначим  $\overline{AB} = \mathbf{c}$ ,  $\overline{BC} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{CA} = \mathbf{b}$ . В таком случае  $\overline{AL} = \frac{\mathbf{c} - \lambda_1 \mathbf{b}}{1 + \lambda_1}$ ,  $\overline{BM} = \frac{\mathbf{a} - \lambda_2 \mathbf{c}}{1 + \lambda_2}$ ,  $\overline{CN} = \frac{\mathbf{b} - \lambda_3 \mathbf{a}}{1 + \lambda_3}$ . Если прямые  $AL$ ,  $BM$ ,  $CN$  пересекаются в одной точке  $O$ , вектор  $\overline{AO}$  можно выразить тремя способами:  $\overline{AO} = \frac{\alpha(\mathbf{c} - \lambda_1 \mathbf{b})}{1 + \lambda_1}$ ,  $\overline{AO} = \overline{AB} + \overline{BO} = \mathbf{c} + \frac{\beta(\mathbf{a} - \lambda_2 \mathbf{c})}{1 + \lambda_2}$ ,  $\overline{AO} = \overline{AC} + \overline{CO} = -\mathbf{b} + \frac{\gamma(\mathbf{b} - \lambda_3 \mathbf{a})}{1 + \lambda_3}$ . Заменим всюду вектор  $\mathbf{c}$  через  $-\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , приравняем

друг другу три выражения для вектора  $\overline{AO}$  и затем приравняем коэффициенты при векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в этих равенствах. Получим:

$$\frac{-\alpha}{1 + \lambda_1} = -1 + \frac{\beta(1 - \lambda_2)}{1 + \lambda_2} = \frac{-\lambda_2 \gamma}{1 + \lambda_2}, \quad -\alpha = -1 - \frac{\lambda_2 \beta}{1 + \lambda_2} = -1 + \frac{\gamma}{1 + \lambda_2}.$$

Эти уравнения должны быть совместны, т. е. из них должно быть возможно определить  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Исключая из этих четырёх уравнений  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , получим условие совместности:  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ . Обратная теорема легко доказывается от противного. **317.** Обозначим через  $L$  центр тяжести масс  $m_B$  и  $m_C$ ; он лежит на стороне  $BC$  и делит её в отношении  $\frac{c}{b}$ , откуда видно, что  $AL$  есть биссектриса угла  $A$ . Центр тяжести масс  $m_A$  и  $m_L = m_B + m_C$  делит  $AL$  в отношении  $\frac{b+c}{a}$ ; легко доказать, что точка пересечения биссектрис

делит биссектрису  $AL$  именно в таком отношении. **325.** Если один угол образован векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а смежный угол — векторами  $-\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то, перемножая скалярно векторы-биссектрисы этих углов (см. ответ задачи № 264), получим  $(\mathbf{ba} + \mathbf{ab})(-\mathbf{ba} + \mathbf{ab}) = a^2 b^2 - a^2 b^2 = 0$ . **336.** Пусть  $\overline{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{OB} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{OC} = \mathbf{c}$ . Первое уравнение определяет проекцию искомого вектора на ось  $OA$ . Откладывая по оси  $OA$  от точки  $A$  эту проекцию, в полученной точке проведём плоскость, перпендикулярную  $OA$ . Конец искомого вектора (если его начало помещено в точку  $O$ ) должен лежать в этой плоскости. Повторяя аналогичные рассуждения применительно к другим двум уравнениям, получим три плоскости, точка пересечения которых определит конец искомого вектора. Другое рассуждение: данные три уравнения в координатной форме запишутся так:

$$a_x X + a_y Y + a_z Z = m, \quad b_x X + b_y Y + b_z Z = n, \quad c_x X + c_y Y + c_z Z = p,$$

где  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — координаты искомого вектора. Задача является вполне определённой, если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  некопланарны. Подробная классификация случаев, когда они компланарны, дана в ответе задачи № 406. **354.** Данные три вектора суть линейные комбинации двух векторов; следовательно, они компланарны, и их смешанное произведение равно нулю. **355.** Умножаем второе уравнение векторно на  $\mathbf{a}$ :  $(\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{a} = \mathbf{u} \times \mathbf{a}$ . Преобразуем двойное векторное произведение по формуле (13) § 7 гл. XI (стр. 355), учитывая, что  $\mathbf{ar} = \mathbf{a}$ . Получим для  $\mathbf{r}$  выражение, приведённое в ответе. Подставляя его в данные уравнения для проверки, убеждаемся, что оно удовлетворяет второму уравнению лишь при  $\mathbf{u} \perp \mathbf{b}$ ; необходимость этого условия очевидна и непосредственно из второго уравнения.

