Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Институт экономики и управления

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета в качестве учебного пособия
для студентов вуза, обучающихся по направлениям подготовки
38.03.01 «Экономика», 38.03.05 «Бизнес-информатика»,
по специальностям 38.05.01 «Экономическая безопасность»,
38.05.02 «Таможенное дело»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2020

УДК 330.4(075.8)
ББК 65.290+65.05я73
М54

А в т о р ы:
О. Я. Шевалдина, А. В. Зенков, О. Ю. Жильцова,
Е. А. Трофимова, Д. В. Гилёв, Н. В. Кисляк

П о д о б щ е й р е д а к ц и е й
Е. А. Трофимовой

Р е ц е н з е н т ы:
отдел аппроксимации и приложений
Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
(заведующий отделом доктор физико-математических наук *А. Г. Бабенко*);
Г. Б. Захарова, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник
научно-исследовательской части Уральского государственного
архитектурно-художественного университета

М54 **Методы** оптимальных решений : учебное пособие / О. Я. Шевалдина, А. В. Зенков, О. Ю. Жильцова [и др.] ; под общ. ред. Е. А. Трофимовой ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский федеральный университет. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2020. — 187 с. : ил. — 100 экз. — ISBN 978-5-7996-2956-4. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-7996-2956-4

В учебном пособии представлен блок теоретического материала и задачи, как подробно разобранные, так и предназначенные для самостоятельного решения. К каждому математическому понятию дается экономическая интерпретация.

Для студентов, изучающих дисциплину «Методы оптимальных решений».

УДК 330.4(075.8)
ББК 65.290+65.05я73

ISBN 978-5-7996-2956-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нередко нам приходится вырабатывать некоторую стратегию решения той или иной проблемы. Это касается и экономики. Как выработать наилучшее решение в сложной экономической ситуации? Каким образом получить максимальную прибыль, минимизировав затраты? Как добиться эффективного управления предприятием?

На эти и многие другие вопросы можно ответить, применив особые приемы на стыке экономики и математики, которые называются «экономико-математические методы». Именно им и будет посвящено данное учебное пособие, предназначенное для студентов-экономистов, аспирантов, преподавателей экономических дисциплин, предпринимателей, менеджеров и всех, кому интересны способы решения проблем эффективного управления.

Предпосылками написания данного пособия являлись необходимость систематизировать материал, накопленный при многолетнем прочтении лекций и проведении практических занятий у авторов данного пособия, а также возможность иметь полный комплект материалов, учитывающий новые разработки и обеспечивающий дисциплину «Методы оптимальных решений».

Авторы пособия выработали свое особое видение на изложение экономико-математических методов, отказавшись везде, где это возможно, от громоздких математических доказательств, но при этом дополнив материал экономическими примерами, показывая прикладную значимость методов в современном мире.

Данное учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов, в его содержании учтены современные реалии и компетенции.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1. Векторы. Действия с *n*-мерными векторами

Упорядоченная совокупность n действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *n-мерным вектором* и обозначается $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Числа $a_i, i = \overline{1,n}$ называются компонентами вектора $\boldsymbol{a}$.

Два n-мерных вектора $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называются равными, если равны соответствующие компоненты векторов, то есть

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n.$$

Нулевым вектором называют вектор $\theta = (0, \ldots, 0)$.

Суммой двух векторов $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется вектор

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \left(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n\right).$$

Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ справедливо $\boldsymbol{a} + \theta = \boldsymbol{a}$.

Произведением действительного числа λ на вектор $\boldsymbol{a}$ называется вектор

$$\lambda\boldsymbol{a} = \left(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n\right).$$

Вектор $(-1)\cdot\boldsymbol{a}$ называют вектором, противоположным $\boldsymbol{a}$, и обозначают $-\boldsymbol{a}$, таким образом:

$$(-1)\cdot\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

Свойства линейных операций над векторами:

1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;
2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$;
3) $\forall\lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;
4) $\forall\lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$;
5) $\forall\lambda \in \mathbf{R} \quad \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$;
6) $\exists\theta = (0, 0, \ldots, 0)$: $\boldsymbol{a} + \theta = \boldsymbol{a}, \quad \forall\boldsymbol{a}$;

7) $\forall \boldsymbol{a}\ \exists(-\boldsymbol{a})$ (противоположный вектор): $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\theta$;

8) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}, \quad \forall\boldsymbol{a}$.

Множество всех n-мерных векторов с введенными операциями сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющими свойствам 1–8 (рассматриваемым как аксиомы), называется *пространством арифметических векторов* (*n-мерным векторным пространством*) и обозначается $\mathbf{R}^n$.

Скалярное произведение двух n-мерных векторов $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ определяется формулой

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

Операция скалярного произведения векторов обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ (*симметричность*);

2) $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b})$ (*аддитивность*);

3) $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b})(\forall\lambda\in\mathbf{R})$ (*однородность*);

4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0, \quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\theta$ (*невырожденность*).

Ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$.

Система векторов называется *ортогональной*, если векторы этой системы попарно ортогональны.

Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные вещественные числа:

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2\ldots+\lambda_s\boldsymbol{a}_s, \quad \lambda_i\in\mathbf{R}, \quad i=\overline{1,s}.$$

Числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ называются *коэффициентами линейной комбинации*.

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ называется *линейно зависимой*, если найдутся такие числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$, одновременно не равные нулю, что

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\lambda_s\boldsymbol{a}_s=\theta.$$

В противном случае эта система называется линейно независимой, то есть

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2\ldots+\lambda_s\boldsymbol{a}_s=\theta \Leftrightarrow \lambda_i=0, \quad i=\overline{1,s}.$$

Пусть Q — произвольное множество арифметических векторов.

Упорядоченная система векторов $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_s\}\subset Q$ называется *базисом* в Q, если:

1) система $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_s\}$ линейно независима;

2) для любого вектора $\boldsymbol{a}\in Q$ существуют такие действительные числа λ_i, что

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2\ldots+\lambda_s\boldsymbol{e}_s=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\boldsymbol{e}_i. \tag{1.1}$$

Формула (1.1) называется *разложением вектора* $\boldsymbol{a}$ по базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_s\}$. Коэффициенты λ_i называются *координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_s\}$.

Справедливы утверждения:

1. Разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_s\}$ единственно.

2. Если система векторов $Q \subset \mathbf{R}^n$ обладает базисами, то все они состоят из *одинакового числа* векторов, называемого *рангом системы* Q и обозначаемого $\operatorname{rang}(Q) = r(Q)$.

Максимальное число линейно независимых векторов системы Q равно рангу матрицы А (см. далее п. 1.3), составленной из компонент векторов этой системы.

3. Ранг пространства $\mathbf{R}^n$ равен n и называется *размерностью* этого пространства: $n = \dim \mathbf{R}^n$ — число векторов в любом базисе $\mathbf{R}^n$.

4. **Теорема Штейница**[*]. Если каждый из векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ и $m > n$, то векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m$ линейно зависимы.

Следствие. В любой системе n-мерных векторов не может быть более чем n линейно независимых векторов.

В качестве базиса в $\mathbf{R}^n$ можно взять систему единичных векторов $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$, где

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \\ \boldsymbol{e}_1 = (0, 1, \dots, 0), \\ \qquad \dots \\ \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \dots, 1). \end{cases}$$

Этот базис называют *каноническим* (*единичным*).

Любому вектору $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$: $\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k$ можно сопоставить координатный вектор-столбец вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и наоборот. То есть

$$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n\colon \boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k \boldsymbol{e}_k \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

[*] Эрнст Штейниц (также Штайниц, 1871–1928) — немецкий математик. Основные труды посвящены теории графов и топологии. Штейниц также внес фундаментальный вклад в теорию многогранников.

Также $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \Leftrightarrow C = A + B, \boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a} \Leftrightarrow B = \lambda A.$

Каждый n-мерный вектор можно записать в виде линейной комбинации векторов канонического базиса с коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$:

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + a_n(0,0,\ldots,1)$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots a_n E_n = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Следует различать компоненты вектора и его координаты. При этом, используя для них одинаковые обозначения, мы должны помнить, что координаты вектора совпадают с его компонентами только в каноническом базисе.

Приведем ряд утверждений.

1. Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией остальных, т. е. $\exists\, j \in \{1,\ldots,m\}$:

$$A_j = \beta_1 A_1 + \ldots + \beta_{j-1} A_{j-1} + \beta_{j+1} A_{j+1} + \ldots + \beta_m A_m.$$

2. Если система векторов включает нулевой вектор, то она линейно зависима.

3. Если система векторов включает часть линейно зависимых векторов, то и вся система будет линейно зависимой.

Вопросы, связанные с нахождением базиса и ранга системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m \left(A_i \in \mathbf{R}^n\right),$ будут рассмотрены позже.

1.2. Матрицы и определители

Матрица чисел a_{ij}

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей размера* $m \times n$. Числа a_{ij} называются ее элементами (индекс i указывает номер строки, индекс

j — номер столбца, на пересечении которых находится элемент). Используют сокращенную запись: $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m,\,n}$.

При $m = n$ матрица называется *квадратной матрицей* n*-го порядка*. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы n-го порядка образуют ее *главную диагональ*.

Матрица, состоящая из одного столбца (т. е. если $n = 1$) или из одной строки (т. е. если $m = 1$), называется вектором-столбцом (или, соответственно, вектором-строкой):

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Квадратная матрица n-го порядка, у которой все элементы, находящиеся выше и ниже главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица называется *единичной*, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

Матрица любого размера называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.

Две матрицы $\mathrm{A} = (a_{ij})$ и $\mathrm{B} = (b_{ij})$ размера $m \times n$ называются *равными*, если они совпадают поэлементно, то есть

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.$$

Операция *умножения матрицы* $\mathrm{A} = (a_{ij})$ на число $\lambda \in \mathbf{R}$ задается по правилу:

$$\lambda\mathrm{A} = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n,$$

то есть при умножении матрицы на число λ нужно каждый элемент матрицы A умножить на число λ.

Операция *сложения матриц* $\mathrm{A} = (a_{ij})$ и $\mathrm{B} = (b_{ij})$ одного и того же размера $m \times n$ задается по правилу:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right), \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.$$

Матрица $(-1)\,\mathrm{A} = -\mathrm{A}$ называется *противоположной* к A.

Матрица A^{T}, полученная из матрицы A заменой строк на соответствующие столбцы, называется *транспонированной* к матрице A:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A = (a_{ij}) размера $m \times n$ на матрицу B = (b_{ij}) размера $n \times l$ называется матрица C = (c_{ij}) размера $m \times l$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right)\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, l.$$

Каждой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определенному закону (правилу) некоторое число, называемое *определителем* n-го порядка этой матрицы.

Определитель n-го порядка обозначается символом

$$\left|\mathrm{A}\right| = \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителей n-го порядка на практике используют *теорему Лапласа**. Для ее рассмотрения введем некоторые понятия. Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка.

Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число M_{ij}, равное определителю матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

---

* Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (1749–1827) — французский математик, механик, физик и астроном; известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Лаплас состоял членом шести академий наук и королевских обществ, в том числе Петербургской академии (1802), и членом Французского географического общества. Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещенный на первом этаже Эйфелевой башни.

Теорема 1.1 (*теорема Лапласа о разложении определителя*). Определитель квадратной матрицы порядка n равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\left|\mathrm{A}\right| = \Delta_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

(разложение по элементам i-й строки, $i = 1, \ldots, m$);

$$\left|\mathrm{A}\right| = \Delta_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

(разложение по элементам j-го столбца, $j = 1, \ldots, n$).

Квадратная матрица B называется *обратной* по отношению к матрице A того же порядка, если

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{E}.$$

Обратная матрица обозначается символом A^{-1}.

Матрица A называется *невырожденной* (*неособенной*), если ее определитель $\left|\mathrm{A}\right| \neq 0$.

1.3. Ранг матрицы

В матрице $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{m\times n}$ вычеркиванием каких-либо строк или столбцов можно получить квадратную матрицу порядка $k \times k$. Определитель M_k такой матрицы называется *минором k-го порядка*, $k \leq \min(m, n)$.

Рангом матрицы $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{m\times n}$ называется наивысший порядок r отличных от нуля миноров этой матрицы. Любой минор порядка r, отличный от нуля, называется *базисным минором*, если при этом все миноры порядка $r + 1$ равны нулю или таковых нет.

Ранг матрицы A обозначается rang A или $r(\mathrm{A})$.

Очевидно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров, и все они имеют один и тот же порядок.

Столбцы и строки, на пересечении которых расположен базисный минор, называются *базисными столбцами и строками*.

Каждую строку (столбец) матрицы $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{m\times n}$ будем рассматривать как вектор из $\mathrm{R}^n(\mathrm{R}^m)$.

Теорема 1.2. Ранг матрицы A равен рангу системы ее векторов-строк (векторов-столбцов); при этом система векторов-строк (векторов-столбцов), содержащая базисный минор, образует базис в системе всех строк (столбцов) этой матрицы.

Назовем *элементарными преобразованиями* матрицы следующие операции:

1) перестановка строк или столбцов матрицы;

2) умножение всех элементов строки или столбца матрицы на число, не равное нулю;

3) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк или удаление нулевой строки;

4) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число;

5) транспонирование матрицы.

При элементарных преобразованиях строк (столбцов) матриц их определители либо сохраняются, либо изменяют свою величину, не обращаясь при этом в нуль. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т. е. ранг сохраняется.

Теорема 1.3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Матрицы, полученные в результате элементарных преобразований, называются *эквивалентными*.

1.4. Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

или в краткой записи:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{1.3}$$

Здесь x_j — неизвестные, $j = \overline{1, n}$; a_{ij} — коэффициенты при j-м неизвестном в i-м уравнении, $i = \overline{1, m}$; b_i — свободный член i-го уравнения.

Если $b_1 = \ldots = b_m = 0$, то систему линейных уравнений называют *однородной*.

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *матрицей системы*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} —$$

векторы-столбцы коэффициентов при неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и столбец свободных членов. Система линейных уравнений (1.2) в *векторной форме* имеет вид:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = \mathrm{B}. \tag{1.4}$$

Удобной и компактной является матричная форма записи системы уравнений:

$$\mathrm{A}X = \mathrm{B},$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ — вектор-столбец неизвестных, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор-столбец свободных членов.

Матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*:

$$(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} & b_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Решением системы линейных уравнений (1.2) называется такая совокупность n чисел $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство. Если такая совокупность чисел существует, то система линейных уравнений называют *совместной*. В противном случае систему называют *несовместной*. Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения (точнее, бесконечное множество решений). Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Две совместные системы линейных уравнений *одинаковых* размеров называются *равносильными* или *эквивалентными*, если их множества решений совпадают. Любые две несовместные системы, имеющие одинаковое число неизвестных, по определению равносильны.

1.5. Метод Гаусса — Жордана построения общего решения системы линейных уравнений

Назовем *элементарными преобразованиями* системы линейных уравнений следующие:

1) перестановка i-го и k-го уравнений системы;

2) умножение i-го уравнения системы на число $\lambda \neq 0$;

3) прибавление к i-му уравнению j-го уравнения, умноженного на любое число;

4) вычеркивание уравнения $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$;

5) удаление уравнений, являющихся линейными комбинациями других уравнений системы.

Метод Гаусса[*] *— Жордана*[**] решения систем линейных уравнений основан на последовательном исключении неизвестных из уравнений с помощью элементарных преобразований. Для этого расширенная матрица системы $(A \mid B)$ преобразуется к виду, при котором r переменных системы ($r = \operatorname{rang}(A \mid B)$) образуют диагональную матрицу с точностью до перестановки строк или столбцов, что позволяет сразу, без дополнительных преобразований, получить решение системы.

Неизвестное x_j называют *разрешенным*, если существует уравнение системы, содержащее это неизвестное с коэффициентом 1, а в остальных уравнениях системы коэффициенты при этом неизвестном равны нулю.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \phantom{{}+ x_3} + 2x_4 - x_5 = 5, \\ \phantom{x_1 +{}} 3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

Здесь x_1, x_3 — разрешенные неизвестные.

Если каждое уравнение системы содержит одно разрешенное неизвестное, то такую систему называют *разрешенной* или *приведенной к единичному базису*.

---

[*] Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — немецкий математик, механик, физик, астроном и геодезист. Считается одним из величайших математиков всех времен, «королем математиков». Лауреат медали Копли (1838), иностранный член Шведской (1821) и Петербургской (1824) академий наук, английского Королевского общества.

[**] Вильгельм Йордан (1842–1899) — немецкий геодезист. Занимался также и математикой — в этой области известен модификацией метода Гаусса, получившей название метод Гаусса — Йордана (часто называемого методом Гаусса — Жордана).

Общим решением совместной системы линейных уравнений называют решение равносильной ей разрешенной системы.

С помощью элементарных преобразований можно преобразовать данную систему линейных уравнений в равносильную ей разрешенную.

Общее решение системы линейных уравнений получают исходя из исходной с помощью элементарных преобразований.

Алгоритм метода Гаусса — Жордана

Систему линейных уравнений записывают в виде матрицы:

$$
\left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right)=\left(\begin{array}{cccc:c:cc|c}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{il} & \dots & a_{in} & b_i \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hdashline
a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{kn} & b_k \\
\hdashline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right).
$$

Шаг 1. Возьмем любой отличный от нуля коэффициент a_{kl} (*разрешающий* или *ведущий* элемент) (строку и столбец, в которых он находится, называют *разрешающими*) и k-е уравнение системы разделим на a_{kl}. Затем, умножая полученное уравнение на $(-a_{il})$ и прибавляя его к i-му уравнению $(i=\overline{1,m},\ i\neq k)$, исключим x_l из всех уравнений, кроме k-го. В результате первого шага (состоящего из двух элементарных преобразований) система линейных уравнений (1.2) преобразуется в эквивалентную ей систему

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j=b'_i \quad (i=\overline{1,m})$$

или

$$
\left(A'\,|\,B'\right)=\left(\begin{array}{cccc:c:cc|c}
a'_{11} & \dots & a'_{1j} & \dots & 0 & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a'_{i1} & \dots & a'_{ij} & \dots & 0 & \dots & a'_{in} & b'_i \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hdashline
a'_{k1} & \dots & a'_{kj} & \dots & 1 & \dots & a'_{kn} & b'_k \\
\hdashline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a'_{m1} & \dots & a'_{mj} & \dots & 0 & \dots & a'_{mn} & b'_m
\end{array}\right),
$$

где

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} a_{il}, \quad b'_i = b_i - \frac{b_k}{a_{kl}} a_{il} \quad (i \neq k). \tag{1.5}$$

Здесь

$$a'_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1, m},\ i \neq k);$$

$$a'_{kl} = 1,\ b'_k = \frac{b_k}{a_{kl}},\ a'_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}} \quad (j = \overline{1, n}).$$

Совокупность преобразований шага 1 называют *жордановым преобразованием.*

Замечание. На практике в учебных задачах вместо формул (1.5) рассматривают формулы

$$a'_{ij} = a_{ij} a_{kl} - a_{kj} a_{il}, \quad b'_i = b_i a_{kl} - b_k a_{il} \quad (i \neq k).$$

Числа в правых частях последних равенств находятся в вершинах некоторого прямоугольника (рис. 1.1), причем попарно перемножаются числа, расположенные в противоположных вершинах этого прямоугольника: заменяемый элемент a_{ij} умножается на разрешающий a_{kl} (соответственно, элемент b_i умножается на разрешающий a_{kl}), и затем вычитается произведение элементов второй диагонали прямоугольников. В таком случае сохраняется «целочисленность» всех коэффициентов. Если при решении системы линейных уравнений использовать формулы (1.5), то придется иметь дело с дробными числами.

Шаг 2. Описанную операцию повторяют, выбирая разрешающий элемент в другой строке.

Теорема 1.4 (*Штейница*). Максимальное число переходов не зависит от выбора ведущих элементов и равно рангу матрицы A (r(A) = r).

Метод исключения неизвестных заканчивается при получении матрицы вида

$$\left(\mathrm{A}^r \mid \mathrm{B}^r\right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \dots & 0 & q_{1,r+1} & \dots & q_{1n} & d_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & q_{r,r+1} & \dots & q_{rn} & d_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right),$$

где r(A) = r.

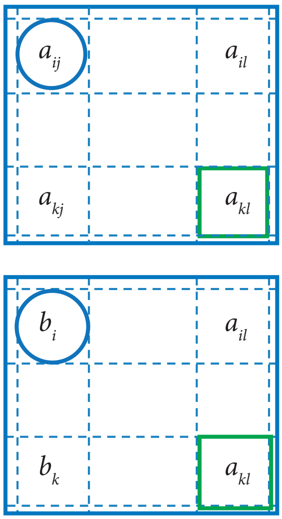


Рис. 1.1. «Правило прямоугольника»

Если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, \ldots, d_m \neq 0$, то система линейных уравнений несовместна (получаем противоречивое уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = d$ $(d \neq 0)$). Если же все $d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$, то система линейных уравнений совместна, причем она преобразуется в эквивалентную ей систему вида

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + q_{1,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + q_{1n}x_n = d_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_r + q_{r,\,r+1}x_{r+1} + \ldots + q_{rn}x_n = d_r. \end{cases} \tag{1.6}$$

Система (1.6) является разрешенной относительно *базисных неизвестных* $x_1, \ldots, x_r$ (на практике номер уравнения и номер базисных переменных могут не совпадать). Переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ называются *свободными*. Полагая

$$x_{r+1} = C_1, \ldots, x_n = C_{n-r},\ C_1, \ldots, C_{n-r} \in \mathbf{R}, \tag{1.7}$$

получим значения базисных переменных, т. е. найдем общее решение системы линейных уравнений (1.6) и, следовательно, системы (1.2).

В частности, если свободные неизвестные равны нулю ($C_1 = \ldots = C_{n-r} = 0$), то получаем так называемое *базисное решение* системы линейных уравнений: $X = \left(d_1, d_2, \ldots, d_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r} \right)$. При этом базисное решение называется *невырожденным*, если число его ненулевых координат равно числу базисных неизвестных в выбранном наборе. Если ненулевых координат в базисном решении меньше числа разрешенных, то такое базисное решение называется *вырожденным*.

Частным решением системы уравнений называется решение, получающееся из общего при конкретных значениях свободных неизвестных (1.7).

Сформулируем у с л о в и я с о в м е с т н о с т и системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема 1.5 (*Кронекера** — *Капелли***). Система линейных уравнений (1.2) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:

$$\mathrm{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{r}(\mathrm{A} \,|\, \mathrm{B}).$$

Следствие 1. Если система уравнений (1.6) совместна и ранг матрицы системы равен числу переменных ($r = n$), то система имеет единственное решение.

---

* Леопольд Кронекер (1823–1891) — немецкий математик. Иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук (1872), член Берлинской АН (1861), профессор университета в Берлине. Основные труды по алгебре и теории чисел.

** Альфредо Капелли (1855–1910) — итальянский математик, член Национальной академии деи Линчеи. Известен прежде всего как человек, который открыл тождество Капелли.

Следствие 2. Если система (1.6) совместна и ранг матрицы системы меньше числа переменных ($r < n$), то система имеет бесконечное множество решений. При этом число свободных неизвестных равно $n - r$.

Так как $X = \left(d_1, d_2, \ldots, d_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r} \right)$ — решение системы уравнений, то используя векторную форму записи системы линейных уравнений (1.4), получаем:

$$A_1 d_1 + \ldots + A_r d_r = \mathrm{B}, \tag{1.8}$$

где d_j — компонента базисного решения; A_j — соответствующий столбец матрицы системы; B — вектор-столбец свободных членов. То есть вектор-столбец свободных членов является линейной комбинацией векторов базиса $\{A_1, \ldots, A_r\}$ с коэффициентами $d_1, \ldots, d_r$. В этом заключается векторный смысл базисного решения.

Пример 1.1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -23, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -13, \\ -3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

методом Гаусса — Жордана.

Решение. Запишем расширенную матрицу данной системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -7 & 8 & -23 \\ 2 & -4 & 5 & -13 \\ -3 & 11 & 2 & 15 \end{array} \right).$$

Шаг 1. Обратимся к первому столбцу расширенной матрицы. Наша цель: выбрать какой-либо ненулевой *разрешающий элемент*. В первом столбце три ненулевых элемента: 4, 2, –3. Мы можем выбрать любой из них. Предпочтительно выбрать тот элемент, модуль которого ближе всего к единице. В нашем случае таким элементом является 2. Наша цель: обнулить все элементы в первом столбце, кроме разрешающего элемента. То есть обнулению подлежат числа 4 и (–3).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -7 & 8 & -23 \\ \boxed{2} & -4 & 5 & -13 \\ -3 & 11 & 2 & 15 \end{array} \right).$$

Элементы разрешающей второй строки перепишем. Заполним свободные места (кроме элемента в рамочке) в первом разрешающем столбце нулями; остальные элементы матрицы пересчитаем по «правилу прямоугольника»:

$$a'_{12} = \boxed{\begin{matrix} 4 & -7 \\ 2 & -4 \end{matrix}} = -7 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) = 2, \quad a'_{13} = \boxed{\begin{matrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{matrix}} = 8 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = -4;$$

$$b'_1 = \boxed{\begin{matrix} 4 & -23 \\ 2 & -13 \end{matrix}} = (-23) \cdot 2 - 4 \cdot (-13) = 6, \quad a'_{32} = \boxed{\begin{matrix} 2 & -4 \\ -3 & 11 \end{matrix}} = 11 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) = 10;$$

$$a'_{33} = \boxed{\begin{matrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{matrix}} = 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 19, \quad b'_3 = \boxed{\begin{matrix} 2 & -13 \\ -3 & 15 \end{matrix}} = 15 \cdot 2 - (-3) \cdot (-13) = -9.$$

В результате первого шага получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 10 & 19 & -9 \end{array}\right)$.

Замечание. В основе метода прямоугольника лежат два элементарных преобразования. Так, например, элементы a'_{32}, a'_{33}, b'_3, вычисленные по «правилу прямоугольника», можно было бы получить с помощью двух элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -7 & 8 & -23 \\ 2 & -4 & 5 & -13 \\ -3 & 11 & 2 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I} + (-2)\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \cdot 3 \\ \mathrm{III} \cdot 2 + 3 \cdot \mathrm{II} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 10 & 19 & -9 \end{array}\right),$$

то есть сначала третью строку умножили на 2, а потом к полученной строке прибавили вторую строку, умноженную на 3. Элементы первой строки получены прибавлением к ней второй строки, умноженной на (–2).

Шаг 2. Разделим элементы первой строки на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 10 & 19 & -9 \end{array}\right).$$

В качестве разрешающего элемента выберем $a'_{12} = 1 \neq 0.$ С помощью этого элемента обнулим два остальных элемента второго столбца. Это можно сделать по «правилу прямоугольника». Так как разрешающий элемент равен 1, то легче получить нули с помощью элементарных преобразований над строками:

II + 4 · I и III + (–10) · I. Запись II + 4 · I означает, что к элементам второй строки прибавляются соответствующие элементы первой строки, умноженные на 4. Запись III + (–10) · I говорит о том, что к элементам третьей строки прибавляются соответствующие элементы первой строки, умноженные на (–10).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 10 & 19 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mathrm{II}+4\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+(-10)\cdot\mathrm{I} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 39 & -39 \end{array}\right).$$

Шаг 3. Перейдем к обнулению элементов третьего столбца. Разделим элементы третьей строки на 39, разрешающим элементом может быть только число 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I}+2\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{II}+3\cdot\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Разделим элементы второй строки на 2 и поменяем местами первую и вторую строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Векторный смысл базисного решения:

$$-2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

методом Гаусса — Жордана. Если система является неопределенной, указать любые два базисных решения.

Решение. Приведенные выше вычисления (пример 1.1) удобно располагать в так называемых таблицах Гаусса — Жордана. В первой строке табл. 1.1 указаны: x_j — неизвестные; B — вектор-столбец свободных членов. Для предотвращения случайных ошибок в расчетах полезно ввести специальный контрольный столбец $\tilde{A}$. Его элементы представляют собой суммы соответствующих элементов по строкам таблицы: $\tilde{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i$. С другой стороны, строки преобразуются по тем же формулам, что и остальные элементы таблицы. Поэтому, выполняя их расчет указанными двумя способами и сравнивая результаты, можно выявить вкравшуюся ошибку. При проведении преобразований каждого шага разрешающие элементы выделяются. В первом столбце будут указываться базисные неизвестные (начиная с табл. 1.2).

Таблица 1.1

Базис	x_1	x_2	$x_3\downarrow$	x_4	x_5	B	$\tilde{A}$	Примечания
	2	–1	**1**	2	3	2	9	
	6	–3	2	4	5	3	17	II + (–2) · I
	6	–3	4	8	13	9	37	III + (–4) · I
	4	–2	1	1	2	1	7	IV + (–1) · I

Выбираем ведущий элемент $a_{13} = 1 \neq 0$ и получим нули в третьем столбце. В столбце «Примечания» описаны выполняемые действия. В результате шага 1 получим табл. 1.2.

Таблица 1.2

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	$\tilde{A}$
x_3	2	–1	**1**	2	3	2	9
	2	–1	0	0	–1	–1	–1
	–2	1	0	0	1	1	1
	2	–1	0	–1	–1	–1	–2

Вторая и третья строки пропорциональны, одну из них, например вторую, удалим, получим табл. 1.3.

Таблица 1.3

Базис	x_1	$x_2\downarrow$	x_3	x_4	x_5	B	$\tilde{A}$	Примечания
x_3	2	–1	**1**	2	3	2	9	I + II
	–2	1	0	0	1	1	1	
	2	–1	0	–1	–1	–1	–2	III + II

В качестве разрешающего элемента выберем элемент второй строки $a_{22} = 1 \neq 0$. Обнулим элементы столбца x_2, получим табл. 1.4.

Таблица 1.4

Базис	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	x_5	B	$\tilde{A}$	Примечания
x_3	0	0	**1**	2	4	3	10	$\mathrm{I} + 2 \cdot \mathrm{III}$
x_2	–2	**1**	0	0	1	1	1	
	0	0	0	–1	0	0	–1	

Итак, разрешающий элемент выбран в первой и во второй строке, осталось выбрать в третьей строке. Единственный элемент этой строки $a_{14} = -1$. Обнулению подлежит лишь один элемент столбца x_4 (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	$\tilde{A}$
x_3	0	0	**1**	0	4	3	8
x_2	–2	**1**	0	0	1	1	1
x_4	0	0	0	**–1**	0	0	–1

Умножим третью строку на (–1) и поменяем местами первую и вторую строки, получим табл. 1.6.

Таблица 1.6

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	$\tilde{A}$
x_2	–2	**1**	0	0	1	1	1
x_3	0	0	**1**	0	4	3	8
x_4	0	0	0	**1**	0	0	1

В каждой строке таблицы выбран разрешающий элемент. Базисные неизвестные x_2, x_3, x_4. Количество неизвестных $n = 5$, поэтому нужно выбрать $n - r = 2$ свободных. Так как $r < n$, то согласно следствию 2 из теоремы Кронекера — Капелли данная система является неопределенной (т. е. имеет бесконечное множество решений). В результате исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_3 + 4x_5 = 3, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Выбрав переменные x_2, x_3, x_4 в качестве базисных, а x_1, x_5 — в качестве свободных, найдем общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 2x_1 - \quad x_5, \\ x_3 = 3 \qquad\quad - 4x_5, \\ x_4 = 0, \\ \quad x_1 \in \mathrm{R}, x_5 \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

В частности, при $x_1 = x_5 = 0$ получим базисное решение: $X_1 = (0, 1, 3, 0, 0)$.

Заметим, что базисные неизвестные находятся в левом столбце, а их значения, соответственно — в столбце свободных членов табл. 1.5, поэтому можно сразу по таблице записать базисное решение системы. Отметим также, что число ненулевых координат в базисном решении примера меньше числа разрешенных (базисных), поэтому полученное базисное решение является вырожденным.

Замечание. Если разрешенная система уравнений, равносильная исходной системе, содержит n неизвестных и r уравнений, то число общих и соответствующих базисных решений исходной системы не превосходит числа сочетаний C_n^r. Количество сочетаний можно вычислить по формуле

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Для того чтобы найти второе общее и соответствующее ему базисное решение, в полученной разрешенной системе в каком-либо уравнении необходимо выбрать какой-либо другой разрешающий элемент.

Таблица 1.7

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_5 \downarrow$	B	$\tilde{A}$
x_2	–2	**1**	0	0	1	1	1
$\leftarrow x_3$	0	0	**1**	0	$\boxed{4}$	3	8
x_4	0	0	0	**1**	0	0	1

В нашем примере (табл. 1.7) можно выбрать в качестве разрешающего элемента одно из чисел: (–2), 1 или 4. Выберем, например, число 4 и обнулим элементы столбца x_5. Таким образом, из базиса будет *выведен* третий вектор-столбец и *введен* пятый. Обнулению подлежит число 1. Элементы разрешающей второй строки перепишем. На месте элемента 1 запишем 0, остальные элементы матрицы пересчитаем по «правилу прямоугольника»:

$$a'_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 0 \cdot 1 = -8, \quad a'_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 1 = 4;$$

$$a'_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = -1, \quad b'_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 1, \quad \tilde{a}'_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 8 = -4.$$

В результате вычислений получим табл. 1.8.

Таблица 1.8

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	$\tilde{A}$	Примечания
x_2	–8	$\boxed{\mathbf{4}}$	–1	0	0	1	–4	I : 4
x_5	0	0	1	0	$\boxed{\mathbf{4}}$	3	8	II : 4
x_4	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	1	

Элементы первой и второй строк разделим на 4. В каждой строке матрицы выбран ведущий элемент. Базисными неизвестными (табл. 1.9) являются x_2, x_4, x_5. Свободные неизвестные — x_1, x_3.

Таблица 1.9

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	$\tilde{A}$
x_2	–2	$\boxed{\mathbf{1}}$	–1/4	0	0	1/4	–1
x_5	0	0	1/4	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	3/4	2
x_4	0	0	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	1

Второе базисное решение исходной системы уравнений $X_2 = (0, 1/4, 0, 0, 3/4)$.

1.6. Обращение матриц методом Гаусса — Жордана

Пусть матрица $\mathrm{A} = (a_{ij})$, $i,\ j = \overline{1, n}$ невырожденная, т. е. ее определитель не равен нулю. Матрица A обратима тогда и только тогда, когда для каждого j соответствующая система уравнений $\mathrm{A}X = E_j$ $(j = \overline{1, n})$ имеет единственное решение, где E_j — j-й столбец единичной матрицы E, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Если матрица A обратима, то j-й столбец матрицы A^{-1} совпадает с единственным решением системы уравнений $\mathrm{A}X = E_j$ $(j = \overline{1, n})$ $(X = \mathrm{A}^{-1}E_j)$.

Для определения A^{-1} необходимо решить n систем линейных уравнений с n неизвестными. Так как эти системы отличаются только набором свободных членов, то их можно решать параллельно в одной таблице. То есть для матрицы A построим матрицу (A | E). Используя элементарные преобразования над строками матрицы (A | E), приведем ее к виду (E | B), что всегда возможно, если A обратима. Тогда $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$. Таким образом, мы осуществляем переход:

$$(\mathrm{A} \,|\, \mathrm{E}) \to \left(\mathrm{E} \,|\, \mathrm{A}^{-1}\right).$$

Решение матричных уравнений методом Гаусса — Жордана

Рассмотрим матричное уравнение AX = B. Пусть матрица $A = (a_{ij})$, $i,\ j = \overline{1, n}$ невырожденная. Для решения матричного уравнения запишем матрицу (A | B), приписывая к A справа матрицу B. Далее с помощью преобразований Гаусса — Жордана матрицу (A | B) приводим к виду (E | X), где $X = A^{-1}B$:

$$(A\,|\,B) \to \left(E\,|\,A^{-1}B\right).$$

1.7. Нахождение базиса системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ($A_j \in \mathbf{R}^n$)

Начнем изложение этого параграфа с примера.

Пример 1.3. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (5, 2, 3, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 4, 7, -2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 0, 3, 2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (0, 0, 0, 9)$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 2, -2)$, $\boldsymbol{a}_3 = (4, 0, 2)$.

1. Составим векторное равенство

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = \boldsymbol{\theta}.$$

Запишем его в векторно-матричном виде, представив векторы как векторы-столбцы:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) является однородной системой уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} 5\alpha_1 = 0, \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 9\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что все $\alpha_1 = \ldots = \alpha_4 = 0$, а это означает, что система векторов линейно независима.

2. Составим векторное равенство

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \boldsymbol{\theta}.$$

Запишем его в векторно-матричном виде:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Равенство (1.9) является однородной системой уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 \qquad = 0, \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу из коэффициентов и определим ее ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :4 \\ :(-6) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I}+(-2)\cdot\mathrm{II} \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ранг матрицы равен 2. Система (1.10) имеет, кроме нулевого решения $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, бесконечное множество решений. Базисными переменными являются α_1, α_2. Свободная переменная α_3. Общее решение системы:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 = -\alpha_3, \\ \alpha_3 \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

Полагая $\alpha_3 = 1$, найдем решение однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2, \\ \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

То есть значения коэффициентов $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$ реализуют линейную зависимость векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$:

$$-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \theta.$$

Таким образом, вопрос о *линейной зависимости системы n*-мерных векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ($A_j \in \mathbf{R}^n$) сводится к исследованию существования *ненулевого решения* однородной системы линейных уравнений:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_m A_m = \boldsymbol{\theta}.$$

Если система имеет только *нулевое решение*, то система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *линейно независима*. В частности, при $m = n$ система $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно независима тогда и только тогда, когда определитель системы $|\,\mathrm{A}\,| \neq 0$.

Для отыскания базиса системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ находят общее решение однородной системы линейных уравнений:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_m A_m = \boldsymbol{\theta}. \tag{1.11}$$

С помощью преобразований Гаусса — Жордана матрица из коэффициентов при неизвестных α_j приводится к виду:

$$\begin{array}{c} \underline{\begin{array}{cccccc} A'_1 & \ldots & A'_r & A'_{r+1} & \ldots & A'_m \end{array}} \\ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & q_{1,r+1} & \ldots & q_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & q_{r,r+1} & \ldots & q_{r,m} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{1.12}$$

Векторы $A_1, \ldots, A_r$ преобразовались в единичные $A'_1, \ldots, A'_r$, поэтому они линейно независимы и составляют базис системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

На практике номер базисной переменной и номер уравнения не обязательно совпадают. Векторы — коэффициенты уравнения (1.11) при неизвестных — базисных переменных образуют базис системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Так как разложение каждого из векторов A_j по векторам найденного базиса $A_1, \ldots, A_r$ совпадает с разложением вектора A'_j по полученному единичному базису $A'_1, \ldots, A'_r$, то из (1.12) вытекает:

$$\begin{cases} A_{r+1} = q_{1,r+1} A_1 + \ldots + q_{r,r+1} A_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m \;\;= q_{1,m}\, A_1 + \ldots + q_{r,m} A_r \end{cases}$$

или кратко:

$$A_{j+r} = \sum_{i=1}^{r} q_{i,r+j} A_i \quad \left(j = \overline{1, m-r}\right).$$

То есть элементы каждого из столбцов $A'_{r+1}, \ldots, A'_m$ матрицы (1.12) являются, соответственно, коэффициентами разложения вектора A_j по векторам найденного базиса $A_1, \ldots, A_r$.

Пример 1.4. Найти базис и ранг системы векторов:

$A_1 = (9, 8, -3, 9)$, $A_2 = (4, 1, -2, 3)$, $A_3 = (1, 1, -1, -2)$, $A_4 = (3, 4, -1, 2)$, $A_5 = (1, 2, 1, 6)$.

Решение. Заметим, что так как пространство четырехмерное, а векторов пять, то система линейно зависима (см. следствие из теоремы Штейница, с. 8). Составим векторное равенство

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 + \alpha_5 A_5 = \theta.$$

Запишем его в матричном виде, представив векторы как векторы-столбцы:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу из коэффициентов и воспользуемся элементарными преобразованиями со строками матрицы по методу Гаусса — Жордана (табл. 1.10).

Таблица 1.10

Базис	A_1	A_2	$A_3 \downarrow$	A_4	A_5	B
	9	4	$\boxed{\mathbf{1}}$	3	1	0
	8	1	1	4	2	0
	–3	–2	–1	–1	1	0
	9	3	–2	2	6	0

Здесь в верхней строке указаны векторы-столбцы коэффициентов при неизвестных, в левом столбце — векторы, входящие в базис системы векторов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. В следующих таблицах (табл. 1.11–1.16) вектор B не указываем, так как он состоит из нулей. В качестве разрешающего выбираем элемент в первой строке и в столбце A_3 табл. 1.10. С помощью элементарных преобразований получаем табл. 1.11.

Таблица 1.11

Базис	A_1	A_2	A_3	$A_4 \downarrow$	A_5
A_3	9	4	1	3	1
	–1	–3	0	$\boxed{\mathbf{1}}$	1
	6	2	0	2	2
	27	11	0	8	8

Далее выбираем разрешающий элемент в столбце A_4 и во второй строке, получаем табл. 1.12.

Таблица 1.12

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	12	13	1	0	–2
A_4	–1	–3	0	1	1
	8	8	0	0	0
	35	35	0	0	0

Третья и четвертая строки пропорциональны. Одну из них удаляем. Третью строку разделим на 8, получим табл. 1.13.

Таблица 1.13

Базис	A_1	$A_2\downarrow$	A_3	A_4	A_5
A_3	12	13	1	0	–2
A_4	–1	–3	0	1	1
	1	**1**	0	0	0

В качестве разрешающего элемента выбираем число 1 (отмечено рамкой (табл. 1.13)).

Таблица 1.14

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_3	–1	0	1	0	–2
A_4	2	0	0	1	1
A_2	1	1	0	0	0

Наконец, поменяем в табл. 1.14 местами строки (обратим внимание, что это мы можем сделать $3! = 6$ раз), получим табл. 1.15.

Таблица 1.15

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	1	1	0	0	0
A_3	–1	0	1	0	–2
A_4	2	0	0	1	1

Итак, α_2, α_3, α_4 — базисные переменные, векторы A_2, A_3, A_4 образуют базис системы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Запишем разложения оставшихся векторов в базисе $\{A_2, A_3, A_4\}$:

$$A_1 = 1 \cdot A_2 - 1 \cdot A_3 + 2 \cdot A_4 = A_2 - A_3 + 2A_4;$$
$$A_5 = 0 \cdot A_2 - 2 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4 = -2A_3 + A_4.$$

В нашем примере базис образуют три вектора: A_2, A_3, A_4. Но если выбрать другие базисные неизвестные, то, соответственно, изменится и базис. Количество способов выбора базиса не превышает величины $C_5^3 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10.$ Кроме того, для каждого набора трех векторов можно выбрать 3! упорядоченных совокупностей. Общее количество способов выбора трех линейно независимых векторов не превзойдет $10 \times 6 = 60$.

Для того чтобы найти другой базис, необходимо выбрать какой-либо другой разрешающий элемент. В нашем примере в табл. 1.15 можно выбрать в качестве разрешающего элемента, например, число 1 в первой строке и в столбце A_1, получим табл. 1.16.

Таблица 1.16

Базис	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	1	0	0	0
A_3	0	1	1	0	–2
A_4	0	–2	0	1	1

В базис введен вектор A_1 и выведен A_2. Базисными переменными являются α_1, α_3, α_4. Векторы A_1, A_3, A_4 образуют базис системы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Запишем разложения оставшихся векторов (табл. 1.16) в базисе $\{A_1, A_3, A_4\}$:

$$A_2 = A_1 + A_3 - 2A_4, \quad A_5 = -2A_3 + A_4.$$

Аналогичным образом можно перебрать все наборы базисных переменных и соответствующих наборов линейно независимых систем.

1.8. Нахождение неотрицательного базисного решения

Применение математических методов в экономике приводит к необходимости отыскания *неотрицательных базисных решений* системы линейных уравнений. Напомним вид базисного решения:

$$X = \left(d_1, \ldots, d_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r} \right).$$

Следовательно, чтобы базисное решение было неотрицательным, необходимо так изменить метод Гаусса — Жордана, чтобы все $d_j \geq 0$ $(j = \overline{1, r})$.

Пусть в исходной системе AX = B все свободные члены $b_i \geq 0$ (иначе умножим соответствующие отрицательным свободным членам уравнения на (–1)). За разрешающий элемент выберем $a_{kl} > 0$. Тогда после первой итерации $b_i' = \dfrac{b_i a_{kl} - b_k a_{il}}{a_{kl}}$. Потребуем, чтобы для любого *i* было справедливо $b_i' \geq 0$.

Так как $a_{kl} > 0$, то необходимо требовать, чтобы $b_i a_{kll} -_l b_k a_{il} \geq 0$, то есть

$$b_i a_{kl} \geq b_k a_{il}. \tag{1.13}$$

Если $a_{il} \leq 0$, то неравенство (1.13) выполняется без других дополнительных условий. Если $a_{il} > 0$, то необходимо, чтобы для каждого *i* выполнялось неравенство $\dfrac{b_i}{a_{il}} \geq \dfrac{b_k}{a_{kl}}$. То есть разрешающие элементы для преобразований Гаусса — Жордана необходимо выбирать из условия

$$\min_{i:\forall a_{il} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \right\} = \frac{b_k}{a_{kl}}.$$

После очередного шага (*преобразование однократного замещения*) мы вновь получим матрицу с неотрицательными свободными членами. Если разрешающий элемент выбирать так для каждого шага, то после последнего шага все $d_j \geq 0$ $(j = \overline{1, r})$. Следовательно, базисное решение будет неотрицательным либо будет установлено, что неотрицательного базисного решения не существует.

Приведем а л г о р и т м нахождения неотрицательного базисного решения:

1) выбираем любой *l*-й столбец, в котором есть хотя бы один положительный элемент a_{il}, если такого столбца нет, то неотрицательного базисного решения не существует;

2) для каждого $a_{il} > 0$ выбранного столбца находим отношение $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{il}}$ и выбираем среди них наименьшее:

$$\theta_{0l} = \min_i \theta_i,$$

выбранная *k*-я строка называется *разрешающей*, элемент на пересечении разрешающей строки и *l*-го столбца a_{kl} также называется *разрешающим*;

3) пересчитываем таблицу (A | B) методом Гаусса — Жордана с выбранным разрешающим элементом a_{kl} и переходим к первому пункту.

После r таких преобразований мы либо получим неотрицательное базисное решение, либо придем к заключению, что его не существует.

Преобразования матрицы $(A\,|\,B)$ по указанному алгоритму называются *симплексными преобразованиями*.

Теорема 1.6 (*о симплексных преобразованиях*). Если все свободные члены системы линейных уравнений неотрицательны, то после симплексных преобразований системы они останутся неотрицательными.

Пример 1.5. Найти все неотрицательные базисные решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad + 2x_4 - \ x_5 = 5, \\ \qquad x_2 \qquad - \ x_4 + 3x_5 = 3, \\ \qquad\qquad x_3 \qquad + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение. Представим решение задачи в виде табл. 1.17.

Таблица 1.17

БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$\tilde{a}_i$	θ_5	θ_4	θ_2	θ_3	Базисное решение
x_1	1	0	0	2	–1	5	7	—				
x_2	0	1	0	–1	**3**	3	6	**1**				$X_1 = (5, 3, 4, 0, 0)$
x_3	0	0	1	0	2	4	7	2				
x_1	3	1	0	5	0	18	27		3,6			
x_5	0	1	0	–1	3	3	6		—			$X_2 = (6, 0, 2, 0, 1)$
x_3	0	–2	3	**2**	0	6	9		**2**			
x_1	6	**12**	–15	0	0	6	9			**1/2**		
x_5	0	0	3	0	6	12	21			—		$X_3 = (1, 0, 0, 3, 2)$
x_4	0	–2	3	2	0	6	9			—		
x_2	6	12	–15	0	0	6	9				—	
x_5	0	0	**3**	0	6	12	21				**4**	$X_4 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{7}{2}, 2\right)$
x_4	12	0	6	24	0	84	126				14	
x_2	6	12	0	0	30	66	114					
x_3	0	0	3	0	6	12	21					$X_5 = \left(0, \frac{11}{2}, 4, \frac{5}{2}, 0\right)$
x_4	12	0	0	24	–12	60	84					

При проведении базисных преобразований (БП) каждого шага базисные столбцы выделяются. Использовались преобразования Гаусса — Жордана. Для предотвращения случайных ошибок в расчетах был введен специальный контрольный столбец $\tilde{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i$.

Далее, если выбирать в качестве ведущего столбца x_1, то ведущий элемент нужно выбирать в третьей строке, так как min{66/6; 60/12} = 5, и тогда мы бы пришли к базису, состоящему из векторов $\{A_1, A_2, A_3\}$, но это базис исходной системы. Если же выбрать столбец x_5, то за разрешающий элемент следует выбирать число 6, и тогда мы получим базис третьего шага.

Итак, получили пять возможных неотрицательных решений. Заметим, что всего базисных решений могло быть $C_5^3 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$.

Пример 1.6. Найти все неотрицательные базисные решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 +{}} 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Решение. Представим решение задачи в виде табл. 1.18.

Выберем в качестве разрешающего элемента коэффициент при x_2. Так как min {2/2, 1/1} = 1, то возникает неопределенность в выборе разрешающей строки. В таких ситуациях будем выбирать строку с наименьшим номером, в нашем случае — первую. Разрешающий элемент выбран в первой и в третьей строке, осталось выбрать во второй. Далее неотрицательные элементы содержатся только в столбце x_4, но min {2/2, 12/12} = 1. Так как разрешающие элементы выбраны в первой строке и в третьей, то выберем в оставшейся второй. Предварительно разделим элементы второй строки на 3. В результате получим первое неотрицательное базисное решение $X_1 = (\underline{0}, \underline{0}, 0, 1, 0)$. В этом решении равными нулю оказались не только свободные неизвестные x_3 и x_5, но и два базисных — x_1 и x_2. Так как количество ненулевых неизвестных меньше числа уравнений, то это решение вырожденное. Далее вводим в базис столбец x_3, при этом столбец x_1 будет выведен из базиса. В результате получим $X_2 = (0, \underline{0}, \underline{0}, 1, 0)$. Мы получили то же решение, но нулю равны другие базисные неизвестные: x_2 и x_3. Аналогичным образом можно провести еще две операции однократного замещения. В результате получим $X_3 = (0, 0, \underline{0}, 1, \underline{0})$ и $X_4 = (\underline{0}, 0, 0, 1, \underline{0})$. На самом деле это одно и то же решение, но «базисные нули» занимают четыре позиции.

Таблица 1.18

Шаг	БП	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$\tilde{a}_i$	θ_l	Базисное решение
1		0	$\boxed{2}$	–4	2	1	2	3	1	
		0	–3	3	3	–6	3	0	—	
	x_1	2	1	–1	1	2	1	6	1	
2	x_2	0	2	–4	2	1	2	3	1	
		0	0	–6	12	–9	12	9	1	
	x_1	4	0	2	0	3	0	9		
	x_2	0	2	–4	2	1	2	3	1	
	x_4	0	0	–2	$\boxed{4}$	–3	4	3	1	
	x_1	4	0	2	0	3	0	9	—	
3	x_2	0	8	–12	0	10	0	6		$X_1=(\underline{0},\underline{0},0,1,0)$
	x_4	0	0	–2	4	–3	4	3		
	$\leftarrow x_1$	4	0	$\boxed{2}$	0	3	0	9	0	
4	x_2	24	8	0	0	28	0	60		
	x_4	4	0	0	4	0	4	12		
	x_3	4	0	2	0	3	0	9		
	x_2	6	2	0	0	7	0	15		$X_2=(0,\underline{0},\underline{0},1,0)$
	x_4	1	0	0	1	0	1	3		
	x_3	4	0	2	0	3	0	9		

Замечание. Неотрицательное решение можно было получить и ранее: в последней строке второго шага имеем уравнение $4x_1+2x_3+3x_5=0$. Так как $x_j\geq 0$, то $x_1=x_3=x_5=0$. Тогда система относительно остальных неизвестных записывается в виде

$$\begin{cases} 2x_2+2x_4=2, \\ \qquad 12x_4=12, \end{cases}$$

откуда $x_2=0$, $x_4=1$.

1.9. Линейная балансовая модель Леонтьева

Балансовые модели (в частности модель Леонтьева*) предназначены для определения сбалансированных объемов производства и потребления различных товаров и услуг в рамках замкнутой экономической системы (страны, региона, предприятия, банка) в течение того или иного фиксированного временного интервала (интервала планирования).

Пусть весь *производственный сектор экономики* разбит на n отраслей (производственных технологических процессов), каждая из которых производит *один* (*свой*) продукт.

Будем считать, что в процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продуктах лишь рассматриваемых отраслей (в том числе может быть и своей), т. е. внешние по отношению к экономической системе ресурсы отсутствуют.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год).

Введем обозначения:

- x_i — *общий* (*валовой*) объем продукции i-й отрасли $x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n})$;
- x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, потребляемой j-й отраслью в процессе производства (*межотраслевые потоки сырья*);
- y_i — объем *конечного продукта* i-й отрасли $y_i \geq 0$ для непроизводственного потребления (конечный продукт используется для накопления и возмещения основных фондов, прироста запасов, на личное потребление и обслуживание населения, оборону, чистый экспорт, содержание государственных институтов и т. д.).

Так как валовой объем каждой i-й отрасли равен *суммарному объему продукции*, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то в самой простой форме (гипотеза линейности или простого сложения) *балансовые соотношения* имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1, \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n. \end{cases} \tag{1.14}$$

---

* Василий Васильевич Леонтьев (1905–1999) — американский экономист российского происхождения, создатель теории межотраслевого анализа. Доктор Брюссельского (1961), Парижского (1972) и Ленинградского (1990) университетов. Офицер ордена Почетного легиона (Франция, 1968), награжден орденами Восходящего солнца (Япония, 1984) и Искусств и литературы (Франция, 1985). Лауреат премии Б. Хармса (1970) и Нобелевской премии (1973) «за развитие метода “затраты — выпуск” и его применение к важным экономическим проблемам».

Будем предполагать, что взаимосвязи между отраслями носят устойчивый характер (не меняются от года к году). Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, будем в дальнейшем рассматривать *стоимостный межотраслевой баланс*, когда все величины, входящие в (1.14), имеют *стоимостное выражение*.

Объемы валовой продукции и межотраслевые потоки сырья выражаются *неотрицательными числами*. Напротив, объемы конечной продукции *могут быть отрицательными*, если в течение отчетного планового периода потребности отраслей в сырье покрывались не только за счет его производства, но также за счет его запасов или за счет поступления недостающей продукции извне.

Определим *технологические коэффициенты* (*коэффициенты прямых затрат) a_{ij}*, равные средним затратам продукции i-й отрасли на производство единицы продукции для j-й отрасли, то есть:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad \left(i,\, j = \overline{1, n}\right). \tag{1.15}$$

Матрица $\mathrm{A} = (a_{ij})$ называется *технологической матрицей* (*матрицей прямых затрат*). Из (1.15) следует:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right),$$

то есть затраты *линейно* зависят от валового выпуска.

Тогда *балансовые соотношения* (*модель межотраслевого баланса Леонтьева*) можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases}$$

или в матричной форме

$$X = \mathrm{A}X + Y, \tag{1.16}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор валового производства; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ — вектор конечного потребления; $\mathrm{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — технологическая *матрица прямых затрат*.

В. В. Леонтьевым на основании анализа экономики был установлен важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = x_{ij} / x_j$ меняются очень слабо (технологии производства остаются на одном и том же уровне довольно длительное время) и могут рассматриваться как постоянные числа. Поэтому валовые объемы производства x_i и объемы конечной продукции y_i следующего планового периода должны удовлетворять тем же самым уравнениям. Эти уравнения и составляют ядро *статической балансовой модели Леонтьева* для чистых отраслей.

В случае, когда матрица $\mathrm{E} - \mathrm{A}$ обратима ($|\mathrm{E} - \mathrm{A}| \neq 0$), модель (1.16) перепишем в виде

$$\mathrm{E}X - \mathrm{A}X = Y$$

или

$$(\mathrm{E} - \mathrm{A})X = Y. \tag{1.17}$$

Так как матрица $\mathrm{E} - \mathrm{A}$ невырожденная, то $X = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}Y$ или $X = \mathrm{S}Y$.

Итак, получена еще одна форма записи модели межотраслевого баланса Леонтьева:

$$X = \mathrm{S}Y,$$

где

$$\mathrm{S} = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}.$$

Матрица $\mathrm{S} = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*. Укажем экономический смысл ее элементов. Зададим конечный спрос (конечный продукт), например, в виде вектора $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е. требуется обеспечить спрос на одну единицу продукции первой отрасли. Матрица (вектор) выпусков отраслей будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \dots \\ s_{n1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каждый элемент $s_{i1}, i = \overline{1, n}$ матрицы полных затрат **S** есть выпуск продукции каждой из отраслей для обеспечения единицы конечного продукта на продукцию первой отрасли.

Итак, элемент матрицы полных затрат s_{ij} показывает, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли, чтобы обеспечить появление единицы конечного продукта j-го вида.

Замечание. На практике балансовые равенства не точны, так как некоторые значения округляются. Возникает вопрос о точности счета обратной матрицы, чтобы новые балансовые равенства удовлетворяли заданной точности. В модели Леонтьева для чистых отраслей число уравнений не превосходит количество переменных. Как правило, системы уравнений имеют много решений, среди которых экономисты выбирают «лучшие». Ряд недостатков и возможных упрощений позволяют, однако, сделать модель практичной и легко используемой, например, в практике прогнозирования вектора конечной продукции по заданным объемам их валового производства на очередной плановый период.

1.9.1. Применение модели Леонтьева в планировании

Первая задача межотраслевого баланса предполагает фиксирование валовой продукции следующего года по отраслям и при известной матрице прямых затрат $\mathrm{A} = (a_{ij})$ определение плана следующего года по потреблению, сохраняющего балансовые соотношения:

$$Y = X - \mathrm{A}X = (\mathrm{E} - \mathrm{A})X, \quad X \geq 0.$$

Кратко:

Дано: X
Найти: $Y = (\mathrm{E} - \mathrm{A})X$

Вторая задача межотраслевого баланса состоит в отыскании отраслевых заданий на валовые объемы их производства X, которые при известной матрице прямых затрат $\mathrm{A} = (a_{ij})$ обеспечивают желаемые (заданные) объемы потребления следующего года Y, сохраняющего балансовые соотношения:

$$X = \mathrm{A}X + Y, \quad X \geq 0.$$

Кратко:

Дано: Y
Найти: $X = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}Y$

Рассматриваются и другие задачи смешанного типа.

Для решения матричного уравнения (1.17) полезно использовать преобразования Гаусса — Жордана: $\mathrm{A}X = \mathrm{B}$, $(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \to (\mathrm{E}|X)$, $X = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$.

(В нашем случае: $(\mathrm{E} - \mathrm{A})X = Y$: $((\mathrm{E} - \mathrm{A})|Y) \to (\mathrm{E}|X)$, $X = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}Y$.)

При большом объеме данных прибегают, например, к помощи Microsoft Excel (пример 1.8).

1.9.2. Продуктивность балансовой модели

Модель Леонтьева (матрица A) называется *продуктивной*, если при подходящем выборе неотрицательных объемов производства она может обеспечить любые наперед заданные неотрицательные объемы конечной продукции (т. е. способна обеспечить наполнение «прилавков» без привлечения внешних производителей), иначе, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует вектор $X \geq 0$, удовлетворяющий балансовой модели.

Как правило, технологические матрицы задаются из априорных политических, экономических, социальных задач (берутся, например, из отчетного баланса предыдущего года). А значит, вопросы *продуктивности* носят важный самостоятельный характер. Существует несколько *критериев продуктивности* матрицы A. Приведем некоторые из них.

Утверждение 1. Модель Леонтьева (матрица A) продуктивна, если для любых $i, j = \overline{1, n}$ $a_{ij} \geq 0$ и $\max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, и если существует номер j такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Утверждение 2. Модель Леонтьева продуктивна тогда и только тогда, когда матрица E – A неотрицательно обратима, т. е. существует обратная матрица $(\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}$, все элементы которой неотрицательны.

Пример *непродуктивной матрицы*: пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, находим $\mathrm{E} - \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $(\mathrm{E} - \mathrm{A})X = Y$

или

$$\begin{cases} 0,5x_1 - 0,5x_2 = y_1, \\ -0,5x_1 + 0,5x_2 = y_2. \end{cases}$$

Последняя система линейных уравнений не имеет решений, поэтому матрица не является продуктивной: если сложить последние два уравнения, то получим $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = y_1 + y_2$. Так как $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, то $y_1 = y_2 = 0$, т. е. обеспечивается только нулевое потребление.

Пример 1.7. Рассмотрим модель Леонтьева на простом примере, где $n = 2$ (две отрасли производства). В табл. 1.19 приведены данные об исполнении баланса за отчетный период, усл. ден. ед. На основании этих данных необходимо:

Таблица 1.19

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		A	B		
Производство	A	10	15	75	100
	B	20	30	100	150

1. Вычислить конечное (непроизводственное) потребление отраслей, если валовой продукт отрасли A увеличить в два раза, а отрасли B сохранить на прежнем уровне.

По каждой строке выполнены уравнения распределения продукции:

$$\begin{cases} 10+15+75=100 \text{ (отрасль A)}, \\ 20+30+100=150 \text{ (отрасль B)}. \end{cases}$$

По формуле (1.15) находим матрицу прямых затрат:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \dfrac{10}{100} & \dfrac{15}{150} \\ \dfrac{20}{100} & \dfrac{30}{150} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы неотрицательны и удовлетворяют критерию продуктивности:

$$\max\{0,1+0,2;\ 0,1+0,3\}=0,4<1.$$

Найдем матрицу $\mathrm{E}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$

Тогда $Y=(\mathrm{E}-\mathrm{A})X=\begin{pmatrix} 0,9 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 165 \\ 65 \end{pmatrix}$. Итак, $y_1=165$, $y_2=65$, т. е. конечный продукт отрасли A увеличился на 96 ед., в то время как для отрасли B уменьшился на 55 ед.

Имеем $x_1=200$, $x_2=150$. Вычисляем потребности отраслей в сырье по формулам $x_{ij}=a_{ij}x_j\ (i,j=\overline{1,n})$:

$$x_{11}=a_{11}x_1=0,1\cdot 200=20,\quad x_{12}=a_{12}x_2=0,1\cdot 150=15;$$

$$x_{21}=a_{21}x_1=0,2\cdot 200=40,\quad x_{22}=a_{22}x_2=0,3\cdot 150=45.$$

Оформим новое распределение продукции в виде табл. 1.20.

Таблица 1.20

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		A	B		
Производство	A	20	15	165	200
	B	40	45	65	150

Баланс составлен!

2. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли A увеличится на 40 усл. ед., а отрасли B, соответственно, на 10 усл. ед.

Матрица прямых затрат из предыдущего пункта $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Для любого вектора конечного продукта Y можно найти необходимый объем валового продукта X по формуле $X = (E - A)^{-1}Y$.

Матрица $E - A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Новый вектор конечного потребления $Y = \begin{pmatrix} 115 \\ 110 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся преобразованиями Гаусса — Жордана $((E - A) \mid Y) \to (E|X)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9 & -0{,}1 & 115 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & 110 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9 & -0{,}1 & 115 \\ 0 & 0{,}61 & 122 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9 & -0{,}1 & 115 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}9 & 0 & 135 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right).$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix}$, т. е. валовой выпуск в отрасли A надо увеличить до 150 усл. ед., а в отрасли B — до 200 усл. ед.

Рассчитываем новые значения межотраслевых потоков сырья:

$$x_{11} = a_{11}x_1 = 0{,}1 \cdot 150 = 15, \quad x_{12} = a_{12}x_2 = 0{,}1 \cdot 200 = 20;$$
$$x_{21} = a_{21}x_1 = 0{,}2 \cdot 150 = 30, \quad x_{22} = a_{22}x_2 = 0{,}3 \cdot 200 = 60.$$

Оформим новое распределение продукции в виде табл. 1.21.

Таблица 1.21

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		A	B		
Производство	A	15	20	115	150
	B	30	60	110	200

Баланс составлен!

Пример 1.8. По данным В. В. Леонтьева матрица технологических коэффициентов для восьми отраслей экономики США в 1958 г. и вектор конечного потребления Y (млрд долларов США) имеют вид (табл. 1.22).

Таблица 1.22

Отрасль	1	2	3	4	5	6	7	8	Y
1. Продукты питания, лекарства	0,1993	0,0149	0,0076	0,0065	0,0074	0,0059	0,0054	0,0328	52,728
2. Ткани, одежда, мебель	0,0045	0,3511	0,0043	0,0152	0,0110	0,0061	0,0016	0,0052	21,369
3. Оборудование, машины	0,0056	0,0059	0,1093	0,0382	0,0202	0,0291	0,0101	0,1070	13,385
4. Транспортные средства, бытовая техника	0,0048	0,0043	0,0384	0,2187	0,0198	0,0172	0,0045	0,0045	38,691
5. Строительные материалы	0,0152	0,0060	0,0054	0,0057	0,0007	0,0101	0,0382	0,0059	65,117
6. Металлы	0,0135	0,0130	0,1447	0,1120	0,0933	0,2827	0,0096	0,0407	2,244
7. Энергия	0,0283	0,0179	0,0175	0,0149	0,0400	0,0605	0,1708	0,0957	23,851
8. Химические продукты	0,0256	0,0282	0,0095	0,0088	0,0176	0,0163	0,0177	0,2124	3,218

Построить по этим данным таблицу межотраслевого баланса.

1.9.3. Процесс решения задачи средствами Microsoft Excel

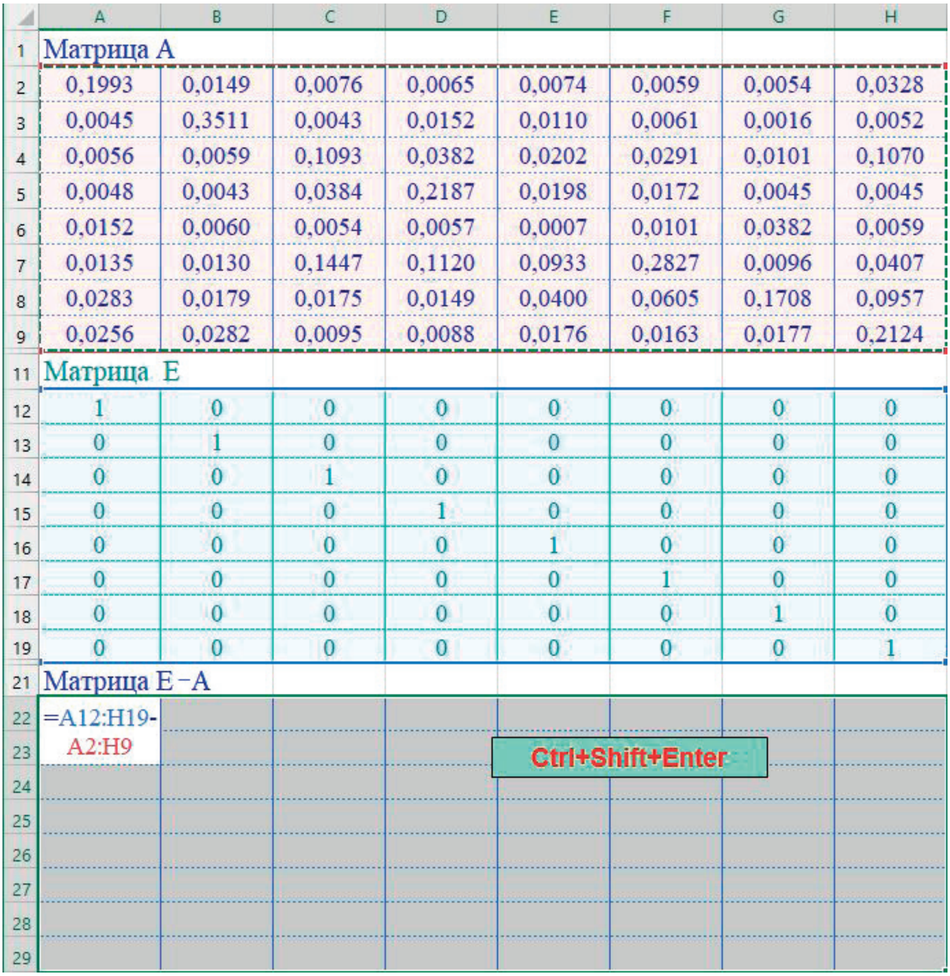
Для решения задачи межотраслевого баланса необходимо уметь выполнять с помощью Excel следующие операции над матрицами:

- умножение матрицы на вектор;
- сложение двух матриц;
- умножение двух матриц;
- обращение матриц;
- транспонирование матрицы или вектора.

Решение. Введем матрицу A в ячейки A2:H9 (рис. 1.2) и вектор *Y* в ячейки *J*32:*J*39 (рис. 1.7). Введем единичную матрицу E в ячейки с номерами A12:H19 (рис. 1.2).

Вычислим матрицу E – A. Для вычисления разности двух матриц необходимо выделить диапазон A22:H29, в котором будет вычислен результат, затем нажать клавишу <F2> , ввести знак «=», выделить диапазон A12:H19, содержащий матрицу E, нажать на клавиатуре знак вычитания «–» и выделить диапазон A2: H9 второй матрицы A (рис. 1.2).

После ввода формулы нажимаем сочетание клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>, чтобы значениями заполнился весь диапазон. В результате в ячейках A22:H29 появится искомая матрица E – A, равная разности двух исходных матриц E и A (рис. 1.3).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Матрица A							
2	0,1993	0,0149	0,0076	0,0065	0,0074	0,0059	0,0054	0,0328
3	0,0045	0,3511	0,0043	0,0152	0,0110	0,0061	0,0016	0,0052
4	0,0056	0,0059	0,1093	0,0382	0,0202	0,0291	0,0101	0,1070
5	0,0048	0,0043	0,0384	0,2187	0,0198	0,0172	0,0045	0,0045
6	0,0152	0,0060	0,0054	0,0057	0,0007	0,0101	0,0382	0,0059
7	0,0135	0,0130	0,1447	0,1120	0,0933	0,2827	0,0096	0,0407
8	0,0283	0,0179	0,0175	0,0149	0,0400	0,0605	0,1708	0,0957
9	0,0256	0,0282	0,0095	0,0088	0,0176	0,0163	0,0177	0,2124
11	Матрица E							
12	1	0	0	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	0	0	0	0
14	0	0	1	0	0	0	0	0
15	0	0	0	1	0	0	0	0
16	0	0	0	0	1	0	0	0
17	0	0	0	0	0	1	0	0
18	0	0	0	0	0	0	1	0
19	0	0	0	0	0	0	0	1
21	Матрица E – A							
22	=A12:H19-							
23	A2:H9							
24								
25								
26								
27								
28								
29								

Рис. 1.2. Задание исходных данных задачи и вычисление матрицы E–A

Найдем матрицу $S = (E - A)^{-1}$ с помощью функции «= МОБР()». Для этого выделим диапазон A32:H39, который будет содержать элементы обратной матрицы, на вкладке «Формулы» выберем «Вставить функцию». В диалоговом окне в поле «Категория» выбрать «Математические», а в поле «Выберите функцию» — «МОБР» (рис. 1.4). Нажать «ОК».

В диалоговом окне «Аргументы функции» указываем диапазон массива A22:H29, содержащего элементы матрицы E – A. Нажимаем на клавиатуре сочетание клавиш <Ctrl> + <Shift> и щелкаем левой кнопкой мыши по кнопке «ОК» (рис. 1.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H
21	Матрица E – A							
22	0,8007	-0,0149	-0,0076	-0,0065	-0,0074	-0,0059	-0,0054	-0,0328
23	-0,0045	0,6489	-0,0043	-0,0152	-0,0110	-0,0061	-0,0016	-0,0052
24	-0,0056	-0,0059	0,8907	-0,0382	-0,0202	-0,0291	-0,0101	-0,1070
25	-0,0048	-0,0043	-0,0384	0,7813	-0,0198	-0,0172	-0,0045	-0,0045
26	-0,0152	-0,0060	-0,0054	-0,0057	0,9993	-0,0101	-0,0382	-0,0059
27	-0,0135	-0,0130	-0,1447	-0,1120	-0,0933	0,7173	-0,0096	-0,0407
28	-0,0283	-0,0179	-0,0175	-0,0149	-0,0400	-0,0605	0,8292	-0,0957
29	-0,0256	-0,0282	-0,0095	-0,0088	-0,0176	-0,0163	-0,0177	0,7876

Рис. 1.3. Разность матриц E – A

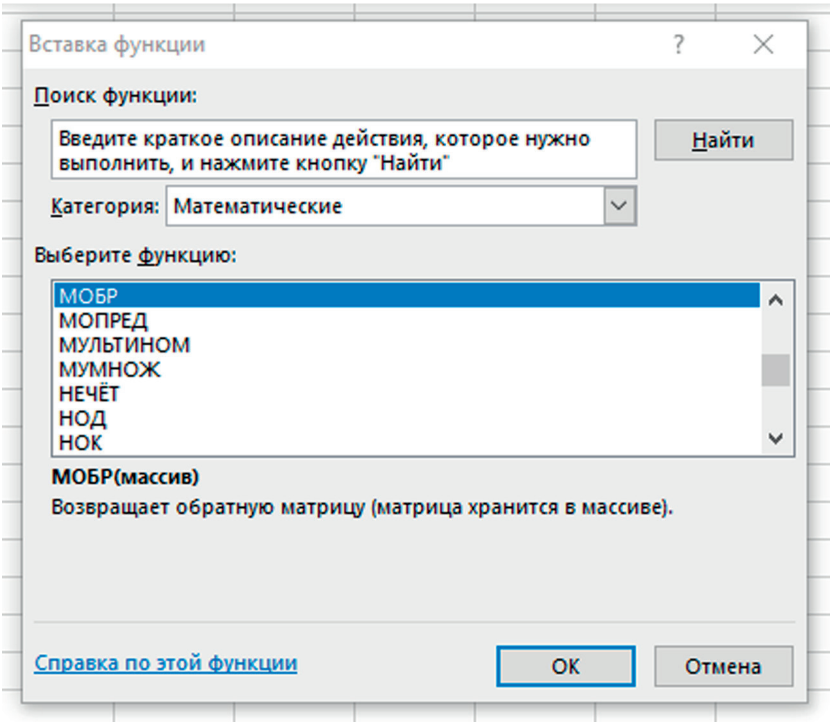


Рис. 1.4. Диалоговое окно «Вставка функции»

Если просто нажать «ОК», то программа вычислит значение только первой ячейки диапазона матрицы $S = (E - A)^{-1}$.

В результате в ячейках A32:H39 появится искомая матрица $S = (E - A)^{-1}$ (рис. 1.6).

Замечание. При выделении массивов следует использовать меню «Формат ячеек». Для этого выделяем ячейки, в которых расположены искомые матрицы, и нажатием правой кнопки мыши выбираем в раскрывающемся меню «Формат ячеек». В появившемся окне выбираем «Числовые форматы»: например, «Числовой», «Число десятичных знаков». Закрыть диалоговое окно нажатием кнопки «ОК».

Проверка продуктивности матрицы A. Все элементы матрицы $S = (E - A)^{-1}$ неотрицательны, поэтому матрица A продуктивна.

Вычисление вектора валового выпуска X

Вычисление вектора валового выпуска X находим по матричной формуле $X = SY = (E - A)^{-1}Y$, в которой матрица S вычислена, а вектор Y задан. Про-

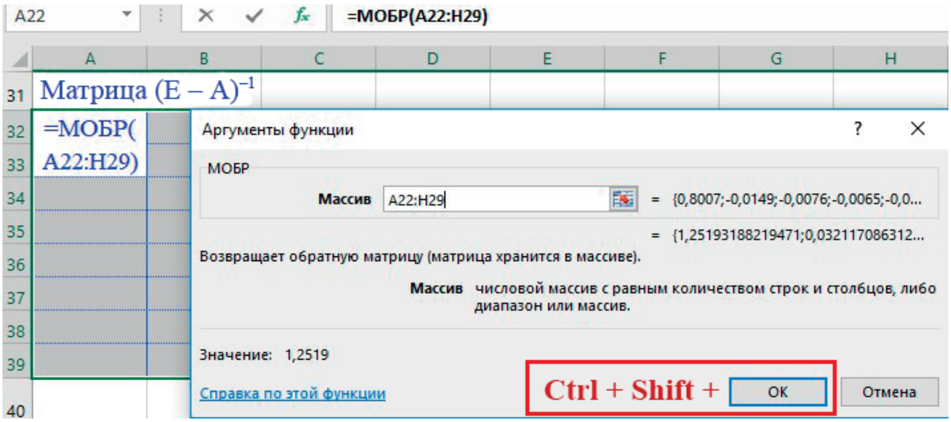


Рис. 1.5. Диалоговое окно функции обращения матриц «МОБР»

	A	B	C	D	E	F	G	H
31	Матрица (E-A)$^{-1}$							
32	1,2519	0,0321	0,0146	0,0147	0,0129	0,0139	0,0104	0,0565
33	0,0102	1,5429	0,0118	0,0333	0,0198	0,0155	0,0048	0,0139
34	0,0159	0,0201	1,1369	0,0663	0,0333	0,0538	0,0199	0,1611
35	0,0104	0,0115	0,0621	1,2890	0,0310	0,0353	0,0101	0,0196
36	0,0218	0,0124	0,0112	0,0122	1,0055	0,0196	0,0473	0,0169
37	0,0346	0,0400	0,2428	0,2190	0,1454	1,4170	0,0300	0,1139
38	0,0521	0,0453	0,0466	0,0450	0,0646	0,1109	1,2150	0,1629
39	0,0437	0,0588	0,0216	0,0227	0,0288	0,0343	0,0298	1,2806

Рис. 1.6. Матрица полных затрат

изведение матриц $S = (E - A)^{-1}$ и Y найдем с помощью встроенной функции «МУМНОЖ()». Получим матрицу размерностью 8×1. Для этого выделим диапазон A42:A49, в котором будет находиться вектор X. На вкладке «Формулы» выберем «Вставить функцию». В диалоговом окне «Вставка функции» в поле «Категория» выберем «Математические» — функция «МУМНОЖ» — «ОК».

В диалоговом окне «Аргументы функции» выберем диапазоны, содержащие матрицы $S = (E - A)^{-1}$ и Y. Для этого напротив массива 1 щелкнем по красной стрелке. Выделим диапазон A32:H39, содержащий элементы матрицы S (имя диапазона появится в строке аргументов), и щелкнем по красной стрелке. Для массива 2 выполним те же действия. Щелкнем по стрелке напротив массива 2. Выделим диапазон $J32{:}J39$, содержащий элементы матрицы Y, и щелкнем по красной стрелке. В диалоговом окне рядом со строками ввода диапазонов матриц появятся элементы матриц, а внизу — элементы произведения SY. После ввода значений нажимаем на клавиатуре сочетание клавиш <Ctrl> + <Shift> и щелкаем левой кнопкой мыши по кнопке «ОК» (рис. 1.7).

В диапазоне ячеек A42:A49 появится искомый вектор $X = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} Y$ (рис. 1.8).

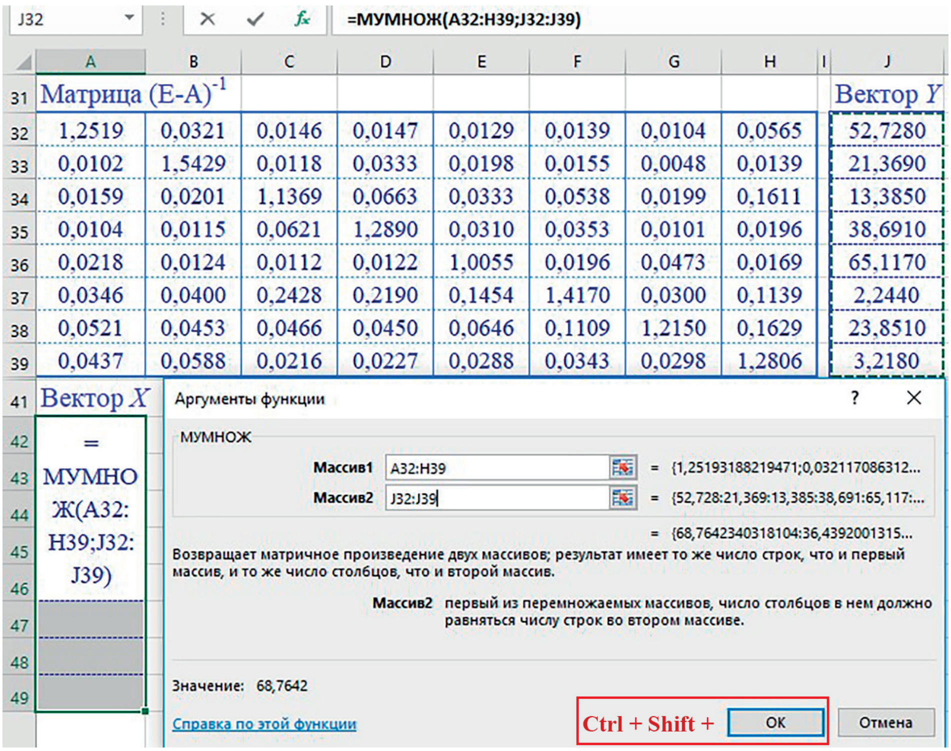


Рис. 1.7. Диалоговое окно функции умножения матриц «МУМНОЖ»

Вычисление межотраслевых поставок продукции x_{ij}

Межотраслевые поставки продукции x_{ij} вычисляются по формуле $x_{ij} = a_{ij}x_j$ $(i, j = \overline{1,n})$, где a_{ij} — элементы исходной матрицы А, расположенной в ячейках A2:H9; x_j — элементы вектора X, найденного выше, расположенные в ячейках A42:A49.

Для проведения вычислений x_{ij} необходимо проделать следующее:

1. Получить транспонированный вектор X^{T}. Для этого ввести диапазон вектора X^{T} в ячейки A52:H52. Это необходимо для согласования размерностей дальнейшего умножения элементов векторов.

На вкладке «Формулы» выберем «Вставка функции», далее категорию «Ссылки и массивы» — функция «ТРАНСП» — «ОК».

В диалоговом окне «Аргументы функции» указываем диапазон массива A3:C4, содержащего элементы матрицы А. Нажимаем на клавиатуре сочетание клавиш <Shift> + <Ctrl> и щелкаем левой кнопкой мыши по кнопке «ОК». В результате в поле ячеек A52:H52 расположится транспонированный вектор X^{T} (рис. 1.8).

2. Вычислить межотраслевые поставки продукции x_{ij}. Для этого:

- поставить курсор мыши в ячейку A55, в которой будет расположено значение x_{11}. В этой ячейке набрать формулу: « = A2*A$52», которая означает, что $x_{11} = a_{11}x_1$, при этом наличие знака «$» в формуле фиксирует строку A52;
- введенную формулу скопировать во все ячейки матрицы x_{ij} (A55:H62), протащив мышью крестик в правом нижнем углу от ячейки A55 при нажатой левой кнопке мыши до ячейки H55 и затем выделенную строку до ячейки H62.

В результате все межотраслевые поставки продукции будут найдены и расположены в матрице с ячейками A55:H62 (рис. 1.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
41	Вектор X							
42	68,7642							
43	36,4392							
44	22,3282							
45	53,9000							
46	68,7382							
47	28,1333							
48	40,0347							
49	11,5152							
51	Вектор X^{T}							
52	68,7642	36,4392	22,3282	53,9000	68,7382	28,1333	40,0347	11,5152

Рис. 1.8. Вектор валового производства

Наконец, проверяем балансовые соотношения (объем внутриотраслевого потребления $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y = X$) (рис. 1.10).

	A	B	C	D	E	F	G	H
54	Матрица межотраслевых поставок x_{ij}							
55	13,7047	0,5429	0,1697	0,3503	0,5087	0,1660	0,2162	0,3777
56	0,3094	12,7938	0,0960	0,8193	0,7561	0,1716	0,0641	0,0599
57	0,3851	0,2150	2,4405	2,0590	1,3885	0,8187	0,4044	1,2321
58	0,3301	0,1567	0,8574	11,7879	1,3610	0,4839	0,1802	0,0518
59	1,0452	0,2186	0,1206	0,3072	0,0481	0,2841	1,5293	0,0679
60	0,9283	0,4737	3,2309	6,0368	6,4133	7,9533	0,3843	0,4687
61	1,9460	0,6523	0,3907	0,8031	2,7495	1,7021	6,8379	1,1020
62	1,7604	1,0276	0,2121	0,4743	1,2098	0,4586	0,7086	2,4458

Рис. 1.9. Матрица межотраслевых поставок

	A	B	C
64	$\sum x_{ij}$	Вектор Y	Вектор X
65	16,0362	52,7280	68,7642
66	15,0702	21,3690	36,4392
67	8,9432	13,3850	22,3282
68	15,2090	38,6910	53,9000
69	3,6212	65,1170	68,7382
70	25,8893	2,2440	28,1333
71	16,1837	23,8510	40,0347
72	8,2972	3,2180	11,5152

Рис. 1.10. Проверка балансовых соотношений

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Исследовать совместность данных систем линейных уравнений и в случае совместности найти общее решение и не менее двух базисных решений:

а) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 11x_4 = 3; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

1.2. Найти не менее двух базисных неотрицательных решений для системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 10, \\ 2x_1 + 5x_2 + 12x_3 - x_4 = 24, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + 12x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

1.3. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой:

а) $A_1 = (1, 1, -1, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0, 1)$, $A_3 = (0, 0, 1, -1)$, $A_4 = (-2, 0, 0, 4)$;

б) $A_1 = (-1, 2, 1, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0, 1)$, $A_3 = (1, 2, -2, 2)$, $A_4 = (0, -1, 1, 0)$.

1.4. Найти базис системы векторов и векторы, не входящие в базис, разложить по векторам базиса:

$A_1 = (2, 1, -1, 1)$, $A_2 = (1, 2, 1, -1)$, $A_3 = (1, 1, 2, 1)$, $A_4 = (3, 1, -4, 1)$, $A_5 = (-1, -3, 0, 3)$.

1.5. Найти все базисы системы векторов; векторы, не входящие в базис, разложить по векторам базиса:

$A_1 = (2, 3, -4)$, $A_2 = (1, -2, 1)$, $A_3 = (5, -3, -1)$, $A_4 = (3, 8, -9)$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.1. а) $X_1 = (1, 0, 5, 0)$, $X_2 = (4, 0, 0, 1)$, $X_3 = (0, 5, 0, -2)$, $X_4 = (0, -1, 8, 0)$,

$$X_5 = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0\right), \quad X_6 = \left(0, 0, \frac{20}{3}, -\frac{1}{3}\right);$$

б) система несовместна.

1.2. $X_1 = (6, 0, 1, 0)$, $X_2 = (2, 4, 0, 0)$, $X_3 = (14, 0, 0, 4)$.

1.3. а) векторы A_1, A_2, A_3, A_4 линейно зависимы, например, в базисе (A_1, A_2, A_3), $A_4 = -2A_1 + 2A_2 - 2A_3$;

б) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_4 = 0$, система векторов линейно независима.

1.4. Например, в базисе (A_1, A_2, A_3), $A_4 = 2A_1 - A_3$, $A_5 = -2A_2 + A_3$.

1.5. В базисе $\{A_1, A_2\}$: $A_3 = A_1 + 3A_2$, $A_4 = 2A_1 - A_2$;

в базисе $\{A_1, A_3\}$: $A_2 = -\frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_3$, $A_4 = \frac{7}{3}A_1 - \frac{1}{3}A_3$;

в базисе $\{A_1, A_4\}$: $A_2 = 2A_1 - A_4$, $A_3 = 7A_1 - 3A_4$;

в базисе $\{A_3, A_4\}$: $A_1 = \frac{1}{7}A_3 + \frac{3}{7}A_4$, $A_2 = \frac{2}{7}A_3 - \frac{1}{7}A_4$;

в базисе $\{A_2, A_3\}$: $A_1 = -3A_2 + A_3$, $A_4 = -7A_2 + A_3$;

в базисе $\{A_2, A_4\}$: $A_1 = \frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4$, $A_3 = \frac{7}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_4$.

2. ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И СОСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Необходимость экономико-математического моделирования

Основной целью экономики является рациональное функционирование хозяйствующих субъектов, или иными словами, оптимальная деятельность при ограниченных ресурсах.

Для того чтобы увидеть все элементы и взаимные связи экономической деятельности еще до начала реализации идеи, необходимо визуализировать механизм бизнеса изначально при помощи экономико-математического моделирования. Более того, это поможет лучше понимать, на что направить усилия, внимание и какие действия следует еще предпринять, какие управленческие решения принять. Возможно, в простой коммерции «купить подешевле — продать подороже» модели несколько избыточны, но если нужно развивать свой бренд, совершенствовать предложения о своих услугах и товарах, лучше прорабатывать технологию производства с целью получения максимальной прибыли, то без моделирования не обойтись.

Экономико-математические методы представляют собой своеобразный инструментальный набор, с помощью которого экономисты, бизнесмены, менеджеры, стремясь добиться наилучшего эффекта, «обрабатывают» свой материал. Этот инструментарий имеет свою историю.

В 1938 г. к двадцатипятилетнему профессору Ленинградского университета Леониду Витальевичу Канторовичу обратились представители фанерного треста с необычной для того времени просьбой. Требовалось рассчитать самое выгодное распределение работы восьми станков при условии, что известна производительность каждого станка по каждому из пяти видов материалов. Оказалось, что на тот момент еще не было методов, позволяющих решить эту экономико-производственную задачу. Тогда молодой ученый разработал свой оригинальный метод решения поставленной перед ним задачи. Отталкиваясь от этой частной задачи, Л. В. Канторович нашел общий метод решения целого ряда важнейших экономико-производственных проблем. Новый метод, названный линейным программированием, дал ответ на вопрос, как управлять предприятием, чтобы обеспечить максимально возможную прибыль. За разработку метода линейного программирования и экономических моделей академик Л. В. Канторович совместно с американским профессором К. Купмансом в 1975 г. получил Нобелевскую премию по экономике.

Линейное и, шире, математическое программирование сейчас один из основных методов обоснования производственно-экономических решений, но не единственный. Сегодня наряду с ним существует целый арсенал математических средств выработки наилучших (или как принято говорить, оптимальных) решений.

Решение реальных экономико-производственных проблем, как правило, не обходится без моделирования. Стоит отметить, что процесс этот долгий и требует совместной работы многих отделов: аналитических, IT, планирования и пр. Не обойтись и без знаний реальной ситуации, исходящих от клиента, для которого и решается та или иная проблема.

На практике реализация данного процесса должна включать следующие этапы:

1. Формализация исходной проблемы.
2. Построение математической модели.
3. Решение модели.
4. Проверка адекватности модели.
5. Реализация решения (т. е. перевод результатов решения модели в рекомендации, представленные в форме, понятной для лица, принимающего решение).

Линейное программирование предназначено для выработки оптимального решения экономической задачи для случая, когда ее условия и имеющиеся ограничения описываются уравнениями или неравенствами первой степени.

Нелинейное программирование служит для выработки оптимального решения экономической задачи в том случае, когда ее условия и ограничения описываются уравнениями или неравенствами второй и более степени.

2.2. Разные формы постановки задачи линейного программирования

Как было сказано выше, линейное программирование изучает задачи оптимизации линейных функций нескольких переменных при наличии ограничений в форме системы линейных уравнений и неравенств, т. е. является частным случаем задачи математического программирования.

Линейное программирование главным образом применяется в экономических задачах планирования, управления и распределения ресурсов. Наиболее популярны транспортные задачи, распределительные задачи, задачи об упаковке, раскрое, о смеси, задачи производственного планирования и различные смешанные постановки. Спектр решаемых данным методом задач действительно широк.

Для того чтобы привести более формализованную формулировку задачи линейного программирования, сначала приведем постановку *общей формы задачи математического программирования.*

Необходимо найти решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы, обеспечивающее достижение экстремума (максимума или минимума) функции задачи:

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min)$$

и удовлетворяющее системе ограничений (уравнений и неравенств):

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, & i = 1, 2, \ldots, l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, & i = l+1, l+2, \ldots, m, \\ \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0, & i = m+1, m+2, \ldots, k. \end{cases}$$

В *общем случае задача линейного программирования* может быть записана в виде

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \\ a_{(l+1)1}x_1 + a_{(l+1)2}x_2 + \ldots + a_{(l+1)n}x_n \le b_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ a_{(m+1)1}x_1 + a_{(m+1)2}x_2 + \ldots + a_{(m+1)n}x_n \ge b_{m+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k, \\ x_j \ge 0, \ \forall j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Функцию $Z(X)$ называют *целевой функцией*, а приведенную выше систему — *системой ограничений* задачи, причем ограничения на неотрицательность переменных $x_j \ge 0, \ \forall j = \overline{1, n}$ еще называют *прямыми ограничениями* задачи, а остальные ограничения — *функциональными*. Решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$

системы ограничений называют *планом* (или *допустимым решением*) задачи линейного программирования. Все допустимые решения образуют область определения задачи, или область допустимых решений. Допустимое решение, которое доставляет максимум или минимум целевой функции, называется *оптимальным планом* задачи.

Существуют разные формы записи задачи линейного программирования.

Стандартная форма задачи линейного программирования имеет следующий вид:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_n + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_n + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_n + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Канонической задачей линейного программирования будем называть следующую задачу:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при ограничениях, имеющих вид равенств и неотрицательности переменных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

При этом еще добавляется требование на неотрицательность чисел, стоящих в правых частях $b_i \ge 0, \ \forall i = \overline{1,m}.$

2.3. Правила перехода от одной формы задачи линейного программирования к другой

Выше были приведены несколько форм задачи линейного программирования, и, естественно, может возникнуть вопрос, а возможно ли перейти от одной формы к другой, и если да, то как это сделать.

Ответить на поставленный вопрос помогут правила перехода, которые приведены ниже.

1. Для перехода от задачи максимизации целевой функции к задаче минимизации достаточно взять все коэффициенты c_j целевой функции с обратными знаками и решить полученную задачу на максимум. После нахождения максимума значение целевой функции надо взять с обратным знаком. Оптимальное решение останется прежним.

2. Для перехода от ограничения типа «меньше или равно» к равенству в него необходимо ввести дополнительную неотрицательную переменную со знаком «плюс»:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i.$$

3. Для перехода от ограничения типа «больше или равно» к равенству в него необходимо ввести дополнительную неотрицательную переменную со знаком «минус»:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i.$$

При этом в каждое неравенство вводится своя $(n+i)$-я дополнительная переменная.

4. Все равенства, имеющие отрицательные свободные члены, делятся на -1 для того, чтобы выполнялось условие неотрицательности чисел, стоящих в правой части.

5. Если на некоторую переменную x_j не накладывается условие неотрицательности, то делают замену переменных $x_j = x_j' - x_j''$, $x_j' \ge 0, x_j'' \ge 0.$ В преобразованной задаче все переменные неотрицательные.

Таким образом, любая задача линейного программирования может быть сведена к общей, стандартной или канонической задаче.

Пример 2.1. Преобразовать следующую задачу в каноническую форму. Целевая функция и система ограничений выглядят следующим образом:

$$Z(X) = 3x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Введем в первое неравенство дополнительную переменную $x_3 \ge 0$ со знаком «плюс», во второе $x_4 \ge 0$ со знаком «минус» и в третье $x_5 \ge 0$ также со знаком «плюс». В результате получим систему ограничений задачи в канонической форме:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2; \end{cases}$$

$$x_{1,2,3,4,5} \ge 0.$$

При этих ограничениях нужно найти максимальное значение функции:

$$Z(X) = 3x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max.$$

В дальнейшем рассмотрим экономический смысл дополнительных переменных в канонической задаче оптимального использования ресурсов.

2.4. Построение экономико-математических моделей, сводящихся к задачам линейного программирования

Теперь, когда мы познакомились с теоретической постановкой задачи линейного программирования, стоит привести конкретные виды экономических проблем, сводящихся к подобным задачам.

Перед тем как построить экономико-математическую модель реальной проблемы, нужно внимательно рассмотреть экономическую ситуацию, описанную в условии. Необходимо разобраться, что является искомыми величинами задачи, что планируется получить, т. е. какова цель задачи и какой параметр задачи (прибыль, время, издержки и т. д.) мы хотим оптимизировать. Также стоит задать вопрос: чем мы ограничены?

Затем, когда ответы на вышезаданные вопросы получены, можно приступать к записи математической модели. А именно, вводим переменные — искомые величины, формулируем критерий оптимальности и составляем целевую функцию, определяем ограничения, накладываемые на переменные.

В процессе записи экономико-математической модели необходимо указывать единицы измерения переменных.

Рассмотрим несколько конкретных постановок.

Простейшая задача производственного планирования

Пусть имеется некоторый экономический объект (предприятие, цех, артель и т. п.), который может производить некоторую продукцию n видов. В процессе производства допустимо использование m видов ресурсов (сырья). Применяемые технологии изготовления характеризуются нормами затрат единицы сырья на единицу производимого продукта. Обозначим через a_{lj} количество i-го ресурса $(i \in 1,\ldots,m)$, которое тратится на производство единицы j-го продукта $(j \in 1,\ldots,n)$.

Обозначим x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — количество единиц продукции P_j, запланированной к производству; b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — запас ресурса S_i; a_{ij} — число единиц ресурса, затрачиваемого на изготовление единицы продукции P_j (числа a_{ij} часто называют *технологическими коэффициентами*); c_j — доход от реализации единицы продукции P_j.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Тогда экономико-математическая модель задачи об использовании ресурсов в общей постановке имеет вид: найти такой план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ выпуска продукции, удовлетворяющей ограничениям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

и условиям

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0,$$

при которых функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

принимает максимальное значение.

Стоит отметить, что это одна из простейших постановок задачи планирования производства, которую можно расширить. Например, при составлении плана производства нередко приходится учитывать не только ограниченность ресурсов, но и директивные задания по выпуску продукции (госзаказы или уже заключенные договоры по отдельным видам продукции).

Пример 2.2. Фабрика может выпускать два сорта мороженого: молочное и сливочное. При производстве мороженого используется три вида сырья: молоко, дешевые наполнители и дорогие наполнители, недельные запасы которых составляют 5 т, 3 т и 5,7 т соответственно. Известны удельные затраты сырья для каждого из сортов. Для молочного мороженого — 0,5 кг, 0,1 кг и 0,4 кг на 1 кг мороженого. Для сливочного мороженого — 0,2 кг, 0,3 кг и 0,5 кг на 1 кг мороженого. Цена молочного мороженого 200 руб. за килограмм. Цена сливочного мороженого 300 руб. за килограмм. Требуется так спланировать производство, чтобы обеспечить максимум дохода. Составить экономико-математическую модель данной задачи.

Решение. Для простоты формализации данной задачи занесем все имеющиеся данные в табл. 2.1, внимательно отследив соответствие единиц измерения.

Таблица 2.1

Вид сырья	Количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы мороженого, кг		Запасы сырья, кг
	молочного	сливочного	
Молоко	0,5	0,2	5 000
Дешевые наполнители	0,1	0,3	3 000
Дорогие наполнители	0,4	0,5	5 700
Прибыль от единицы продукции, руб.	200	300	—

Обратите внимание, что так как удельные затраты сырья у нас приведены в килограммах, то и запасы сырья необходимо перевести в килограммы.

Далее задаемся вопросом, какова наша цель? Получить максимальный доход. Откуда доход? С продажи мороженого. Как найти доход? Умножить цену килограмма мороженого на предполагаемое количество. А нам как раз и нужно спланировать, т. е. понять, сколько нужно изготовить того или иного вида мороженого, чтобы получить максимальный доход. Значит, вводим переменные: x_1 — планируемое количество молочного мороженого, x_2 — планируемое количество сливочного мороженого. Тогда целевая функция (она же функция дохода в данном случае) имеет вид:

$$Z(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2.$$

У нее будем искать максимум. При этом мы ограничены запасами сырья. Составим эти ограничения. Например, известно, что на производство одного килограмма молочного мороженого затрачивается 0,5 кг молока, всего планируется изготовить x_1 килограмм этого вида мороженого, значит, на производство молочного мороженого уйдет $0{,}5x_1$ кг молока, аналогично на изготовление сливочного мороженого потребуется $0{,}2x_2$ кг молока. Следовательно, весь расход молока на производство всего мороженого составит $0{,}5x_1 + 0{,}2x_2$, а всего запасов молока — 5 000 кг. Таким образом, имеем первое ограничение: $0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 \le 5\,000$. Заметим, что для составления мы использовали данные из таблицы, расположенные в строке с заголовком «молоко». Аналогично составим ограничения на дешевые и дорогие наполнители, получим:

$$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \le 3\,000,$$
$$0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 5\,700.$$

Помимо ограничений, которые явно описаны в условии, необходимо еще наложить ограничения, связанные с экономической спецификой, а именно, что планируемое количество мороженого не может быть отрицательно.

Резюмируя, получаем следующую экономико-математическую модель данной проблемы:

$$Z(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 \le 5\,000, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 \le 3\,000, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 5\,700, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача составления рациона (задача о диете, о смесях)

Для формулировки задачи в общей постановке обозначим: x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) — число единиц смеси n-го вида; b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — необходимый минимум содержания в рационе некоторого питательного вещества S_i; a_{ij} — число единиц питательного вещества S_i в единице смеси j-го вида; c_j — стоимость единицы смеси j-го вида. Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Тогда экономико-математическая модель задачи имеет вид:
найти такой рацион $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющий ограничениям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases}$$

и условиям

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0,$$

при которых функция

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

принимает минимальное значение.

Пример 2.3. Имеется два вида кормов: американский и белорусский, которые можно купить по ценам 8 и 10 ден. ед. за килограмм. В 1 кг американского корма содержится 50 г питательного вещества M и 100 г питательного вещества N. Для белорусского корма соответствующие цифры составляют 100 г и 50 г соответственно. Сколько требуется закупить американского и белорусского кормов, чтобы общее число питательных веществ M и N составило не менее 4 кг и 5 кг соответственно, и при этом расходы были бы минимальны. Составить экономико-математическую модель данной задачи.

Решение. Для формализации задачи удобно все данные занести в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Питательные вещества	Количество питательных веществ в корме, г		Необходимый минимум питательных веществ, г
	американском	белорусском	
M	50	100	4 000
N	100	50	5 000
Стоимость 1 кг корма, ден. ед.	8	10	—

Обратите внимание, что так как содержание в 1 кг корма питательных единиц у нас приведено в граммах, то и необходимый минимум приема питательных веществ нам также необходимо перевести в граммы, при этом нужно понимать, что количество корма у нас измеряется в килограммах.

Далее задаемся вопросом: какова наша цель? Минимизировать издержки. Какие? Те, которые мы несем с покупки корма. Введя переменные x_1 — количество американского корма (в кг), x_2 — количество белорусского корма (в кг), составим функцию издержек: $Z(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2$.

Затем учитываем ограничения, а именно, что питательное вещество M содержится и в американском корме, и в белорусском, получаем, что всего суммарно у нас будет $50x_1 + 100x_2$ г вещества M. По условию норма этого вещества составляет 4 000 г, значит, имеем: $50x_1 + 100x_2 \geq 4\,000$, аналогично ограничение на вещество N: $100x_1 + 50x_2 \geq 5\,000$. Учитывая, что количество неотрицательно, получаем следующую экономико-математическую модель данной задачи:

$$Z(x_1, x_2) = 8x_1 + 10x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 50x_1 + 100x_2 \ge 4\,000, \\ 100x_1 + 50x_2 \ge 5\,000, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить $n_1, n_2, \ldots, n_k$ единиц продукции $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Продукция производится на станках $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Для каждого станка известны производительность a_{ij} (т.е. число единиц продукции P_j, которое можно произвести на станке S_i) и затраты b_{ij} на изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо составить такой план работы станков (т.е. так распределить выпуск продукции между станками), чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_{ij} — время, в течение которого станок S_i будет занят изготовлением продукции P_j ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, k$).

Так как время работы каждого станка ограничено и не превышает T, то справедливы неравенства:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1k} \le T, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2k} \le T, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mk} \le T. \end{cases}$$

Для выполнения плана выпуска по номенклатуре необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \ldots + a_{m1}x_{m1} \le n_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{m2}x_{m2} \le n_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + \ldots + a_{mk}x_{mk} \le n_k. \end{cases}$$

Кроме того,

$$x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, k\right).$$

Затраты на производство всей продукции выразятся целевой функцией

$$Z = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \ldots + b_{mk}x_{mk}.$$

Экономико-математическая модель задачи об использовании мощностей примет вид: найти такое решение $X = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mk})^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющее вышеприведенным ограничениям, при котором целевая функция принимает минимальное значение.

Задача о раскрое материалов

На раскрой (распил, обработку) поступает материал одного образца в количестве a единиц. Требуется изготовить из него l разных комплектующих изделий в количествах, пропорциональных числам $b_1, b_2, \dots, b_l$ (условие комплектности). Каждая единица материала может быть раскроена n различными способами, причем использование i-го способа ($i = 1, 2, \dots, n$) дает a_{ik} единиц k-го изделия ($k = 1, 2, \dots, l$).

Необходимо найти план раскроя, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим x_i — число единиц материала, раскраиваемых i-м способом, и r — число изготавливаемых комплектов изделий.

Так как общее количество материала равно сумме его единиц, раскраиваемых различными способами, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a.$$

Требование комплектности выразится уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} = b_k r, \quad (k = 1, 2, \dots, l).$$

Очевидно, что $x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Экономико-математическая модель задачи: найти такое решение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющее всем вышеописанным условиям, при котором функция $z = r$ принимает максимальное значение.

Пример 2.4. Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2 : 1 : 3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Составить экономико-математическую модель задачи.

Решение. Сначала составим так называемую карту раскроя (в нашем случае распила бревен). Для этого определим, какое наибольшее количество брусьев по 1,2 м можно получить из шестиметрового бревна. Ответ очевиден: 6 : 1,2 = 5 штук. Это первый способ. Далее, так как необходимы все брусья разной длины, то аналогичным образом нужно найти все возможные способы распила. Удобно представить их в виде табл. 2.3.

Таблица 2.3

Число брусьев длиной, м	Способы распила			
	1-й	2-й	3-й	4-й
1,2	5	2	0	0
3	0	1	2	0
5	0	0	0	1

По данной таблице легко понять, что, например, пятиметровые брусья можно распилить только четвертым способом, причем из одного бревна получится всего только один брус.

Обозначим x_i — количество бревен, распиленных i-м способом, $i = 1, 2, 3, 4$; r — число комплектов трехметровых брусьев.

Далее учитываем, что все бревна должны быть распилены, то есть:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195.$$

Количество комплектов каждого вида брусьев должно находиться в отношении 2 : 1 : 3, т. е. брусьев по 1,2 м, а таких $5x_1 + 2x_2$ штук, должно быть точно $2r$ комплектов. Аналогично брусьев по 3 м $x_2 + 2x_3$ штук должно быть в количестве r комплектов, а пятиметровых в количестве x_4 штук нужно произвести $3r$ комплектов.

Учитывая неотрицательность количества, получаем следующую экономико-математическую модель данной задачи:

$$Z = r \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195, \\ 5x_1 + 2x_2 = 2r, \\ x_2 + 2x_3 = r, \\ x_4 = 3r, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Пример 2.5. В продаже есть трубы длиной по 5 м и по 2 м по цене 20 руб. и 8 руб. соответственно за штуку. Сколько нужно купить тех и других и как их распилить, чтобы с минимальными затратами обеспечить себя заготовками длиной 150 см и 70 см в количестве 140 и 220 штук соответственно? Составить экономико-математическую модель данной задачи.

Решение. Необходимо минимизировать расходы на изготовление заготовок, при этом распиливать мы можем только трубы длиной 5 м = 500 см и 2 м = 200 см и только на заготовки длиной 150 см и 70 см.

Составим карту распила на заготовки длиной 150 см и 70 см (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Число заготовок длиной, см	Способы распила трубы по 5 м				Способы распила трубы по 2 м	
	1-й	2-й	3-й	4-й	1-й	2-й
150	3	2	1	0	1	0
70	0	2	5	7	0	2

Обозначим переменные: x_i — число труб по 5 м, распиленных i-м способом; y_j — число труб по 2 м, распиленных j-м способом.

Составим экономико-математическую модель:

$$Z = 250(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 80(y_1 + y_2) \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 1\,400, \\ 2x_2 + \ 5x_3 + \ 7x_4 + 2y_2 = 2\,200, \\ x_i \geq 0,\ y_j \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4,\ j = 1, 2. \end{cases}$$

Модель транспортной задачи будет сформулирована в гл. 6 данного пособия. Сейчас приведем пример так называемых смешанных задач планирования.

Пример 2.6. Некоторая негосударственная банковская организация планирует вложить до 5 млн руб. в потребительский кредит и в автокредитование. При этом комиссионные организации составляют 19 % по потребительским кредитам и 15,5 % по автокредитам. Оба типа кредитов возвращаются в конце периода кредитования. Из опыта известно, что около 8,5 % потребительских и 3,5 % автомобильных кредитов не возвращаются. В связи с тем, что автокредитование менее рискованно, руководство банка решило предоставить их в 2,5 раза больше, чем потребительских. Необходимо найти оптимальное размещение средств по двум описанным видам кредитования. Составить экономико-математическую модель данной задачи.

Решение. Пусть x_1 — планируемая сумма потребительских кредитов, x_2 — сумма автокредитов, Z — функция прибыли от кредитования. Оптимальным будет размещение средств в случае, если прибыль будет максимальна. Прибыль — это доход за вычетом издержек. Доход банк получает с процента от выданных кредитов, а расходы несет в связи с невыплатой по ним.

Согласно условию не возвращается 8,5 % потребительских кредитов, т. е. банк получит доход только с 91,5 % выданных потребительских кредитов, соответственно, доход будет получен только с суммы, равной $0{,}915x_1$ руб. и составит $0{,}19 \cdot 0{,}915x_1$ руб. Аналогично доход с автокредитов составит $0{,}155 \cdot 0{,}965x_2$ руб. Расходы же формируются исходя из количества невыплаченных кредитов и составят $0{,}085x_1 + 0{,}035x_2$ руб. Таким образом, прибыль будет равна $0{,}19 \cdot 0{,}915x_1 + 0{,}155 \cdot 0{,}965x_2 - (0{,}085x_1 + 0{,}035x_2)$.

Изначально планируется вложить не более пяти миллионов в кредитование, т. е. вся сумма кредитования, равная $x_1 + x_2$ руб., не должна превышать 5 млн руб.

А условие, что руководство банка решило предоставить автокредитов в 2,5 раза больше, чем потребительских, можно записать в виде: $x_2 \geq 2{,}5x_1$.

Учитывая, что сумма кредитов неотрицательна, получаем следующую экономико-математическую модель данной задачи:

$$Z(X) = 0{,}17385x_1 + 0{,}149575x_2 - (0{,}085x_1 + 0{,}035x_2) \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5\,000\,000, \\ x_2 \geq 2{,}5x_1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Привести к канонической форме следующие задачи линейного программирования:

$$Z(X) = x_1 - x_2 + 4x_3 \to \min,$$

2.1.1. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 5, \\ x_1 - 8x_3 = 4, \\ -x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$Z(X) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \to \max,$$

2.1.2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 7x_4 \leq 3, \\ x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 \geq 7, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$$Z(X) = x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min,$$

2.1.3. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 \leq 3, \\ x_1 + 10x_3 - 8x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

2.1.4. $$Z(X) = x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 - x_4 \le 3, \\ 3x_1 + x_3 - 3x_4 \le 1, \\ 6x_1 + 10x_2 - 5x_4 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

2.2. Составить экономико-математическую модель следующих задач.

2.2.1. Фирма ООО «Ромашка» располагает следующими ресурсами: площадь — 120 ед., труд — 100 ед., тяга — 85 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Организация производства характеризуется следующей таблицей:

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы продукции
	Площадь	Труд	Тяга	
$П_1$	2	2	2	1
$П_2$	2	1	4	4
$П_3$	4	2	1	3
$П_4$	5	4	1	6

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

2.2.2. Предприятие выпускает заготовки двух видов. Для изготовления заготовок обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа — 4 т, проволоки — 20 т. На одну заготовку первого вида расходуются 6 кг железа и 3 кг проволоки, на вторую 5 кг железа и 2,5 кг проволоки. За каждую проданную заготовку первого вида предприятие получает 5 ден. ед., второго — 4 ден. ед.

Составить план выпуска заготовок, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

2.2.3. Совхоз отвел три земельных массива размером 5 тыс., 8 тыс., 9 тыс. га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в следующей таблице:

Посевы	Земельные массивы		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

За 1 ц ржи совхоз получает 2 ден. ед., за 1 ц пшеницы — 2,8 ден. ед., за 1 ц кукурузы — 1,4 ден. ед.

Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 190 тыс. т ржи, 158 тыс. т пшеницы и 30 тыс. т кукурузы?

2.2.4. Три типа самолетов следует распределить между четырьмя авиалиниями. Данные об организации процесса перевозок приведены в следующей таблице:

Тип самолета	Число самолетов, ед.	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям, ед.				Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям, ед.			
		I	II	III	IV	I	II	III	IV
«Ан»	60	15	10	20	50	19	20	25	40
«Ил»	30	20	20	15	10	65	28	15	45
«Ту»	40	35	50	30	45	40	70	50	65

Распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных затратах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 350, 250, 950, 450 ед. груза.

2.2.5. Имеются четыре оперативных базы и три цели. В силу различия в типах самолетов и высоте полета вес бомб, доставляемых с любой базы к любой цели, определяется по следующей таблице:

База	Цель		
	Ближняя	Дальняя	Смежная
Мурзинка	7	5	6
Хмелевка	6	5	5
Ягодная	9	9	5
Фруктовая	8	6	4

Дневная интенсивность каждой базы составляет 150 самолетов в день. На каждую цель необходимо организовать 200 самолето-вылетов в день.

Определить план вылетов с каждой базы к каждой цели, дающий максимальный общий вес бомб, доставляемых к целям.

2.2.6. В секретной лаборатории из трех материалов — образец А, образец Б, образец В — составляется смесь. В состав смеси должно входить не менее 6 ед. секретного вещества № 1, 8 ед. — вещества № 2 и не менее 12 ед. вещества № 3. Структура химических веществ приведена в следующей таблице:

Материал	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость 1 ед. продукции
	№ 1	№ 2	№ 3	
А	2,5	1,5	2,5	2
Б	1	2,5	4	3
В	3	1,5	2	4

Составить наиболее дешевую смесь.

2.2.7. В загородном центре «Таватуй» решили провести конкурс. Назначили ответственным вожатого, который должен был все подготовить. А именно купить гуашь по цене 50 руб. за коробку, маркеры по цене 25 руб. за мини-коробку, линейки по цене 13 руб., блокноты по цене 18 руб. При этом вожатому было четко указано, что красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов — столько, сколько коробок маркеров и гуаши вместе, линеек не более шести. На покупки выделяется не менее 400 руб. Сколько указанных предметов должен купить вожатый, чтобы общее число предметов было наибольшим?

2.2.8. Фирма «Всё Ок'ей» выпускает три вида секретных заготовок — важные, суперважные, сверхважные. Каждая заготовка обрабатывается тремя станками. Организация производства в фирме характеризуется следующей таблицей:

Станок	Длительность обработки детали, мин			Фонд времени, ч
	Важные	Суперважные	Сверхважные	
I	11	9	8	220
II	14	17	19	400
III	8	5	3	100
Цена за одну заготовку	29	31	30	

Составить план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

2.2.9. Два выпускника экономического факультета задумали открыть небольшое предприятие по выпечке пирожков. Начать решили с малого, а именно изготавливать пока только два вида пирожков: с капустой и с картошкой, используя при этом четыре чудо-печки. Данные о технологическом процессе указаны в следующей таблице:

Чудо-печка	Трудоемкость на один пирожок		Фонд времени, у. е.
	с капустой	с картошкой	
I	3	3	15
II	2	6	18
III	4	0	16
IV	1	2	8
Цена за один пирожок, ден. ед.	15	16	—

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

2.2.10. Предприятие для производства запасных частей для автомобилей использует три вида ресурсов. Выпускает три вида запасных частей. Организация производства на предприятии характеризуется следующей таблицей:

Ресурсы	Расход материалов на производство одной запасной части, кг			Запас ресурсов, кг
	1	2	3	
I	4	6	3	1 200
II	0	2	2	300
III	4	0	4	800
Прибыль от реализации одной запасной части, ден. ед.	7	9	6	—

Составить план производства запасных частей, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

2.2.11. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин A — 2 : 3 : 5 : 2, бензин B — 3 : 1 : 2 : 1, бензин C — 2 : 2 : 1 : 3. Стоимость 1 тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами 120 ден. ед., 100 ден. ед., 150 ден. ед. Составить план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

2.2.12. Планируется нанесение удара по некоторому объекту тремя различными видами оружия: оружием А — в течение 3 мин, оружием Б — в течение 5 мин, оружием В — в течение 4 мин. Возможности средств обеспечения стрельбы таковы, что при применении оружия А в течение 3 мин, оружия Б в течение 2 мин, оружия В в течение 4 мин общее количество залпов не должно превышать 15. При применении оружия А в течение 2 мин и оружия В в течение 3 мин общее количество залпов не должно превышать 8 ед. Кроме того, для преодоления противодействия противника необходимо, чтобы количество залпов оружием B за 1 мин было больше, чем 5 ед. Рассчитайте темп стрельбы (количество залпов в 1 мин) всеми видами оружия, при котором общее количество залпов будет наибольшим.

2.2.13. Для участия в соревнованиях спортклуб должен выставить команду, состоящую из спортсменов I и II разрядов. Соревнования проводятся по бегу, прыжкам в высоту, прыжкам в длину. В беге должны участвовать 5 спортсменов, в прыжках в длину — 8 спортсменов, а в прыжках в высоту — не более 10. Количество очков, гарантируемых спортсмену каждого разряда по каждому виду, указано в следующей таблице:

Разряд	Бег	Прыжки в высоту	Прыжки в длину
I	4	5	5
II	2	3	3

Распределить спортсменов в команды так, чтобы сумма очков команды была наибольшей, если известно, что в команде I разряд имеют только 10 спортсменов.

2.2.14. Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10 тыс. клеток. В одной клетке могут быть либо две лисы, либо один песец. По плану на ферме должно быть не менее 3 тыс. лис и 6 тыс. песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма — 4 ед., а каждому песцу — 5 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 200 тыс. ед. корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 10 ден. ед., а от реализации одной шкурки песца — 5 ден. ед. Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме, чтобы получить наибольшую прибыль?

2.2.15. Планируется вложить денежные средства для финансирования двух выгодных проектов. Проект «Альфа» гарантирует получение прибыли в размере 65 центов на вложенный доллар через год. Проект «Бэта» гарантирует получение прибыли в размере 1 доллара и 90 центов на каждый инвестированный доллар, но через два года. При финансировании проекта «Бэта» период инвестиций должен быть кратным двум годам. Как следует распорядиться капиталом в 120 тыс. долларов, чтобы максимизировать суммарную величину прибыли, которую можно получить через три года после начала инвестиций?

2.2.16. Предприятие выполняет сборку автомашин «Москвич» и «Жигули». Для суточного выпуска в наличии имеются следующие материалы: 20 комплектов заготовок металлоконструкций, необходимых для сборки автомашин в количестве 5 и 3 ед. соответственно; 14 комплектов подшипников (соответственно 1 и 2 ед.); 9 двигателей с арматурой и электрооборудованием, необходимых по одному для каждой машины «Москвич»; 10 двигателей с арматурой и электрооборудованием, необходимых по одному для каждой машины «Жигули».

Стоимость «Москвича» 70 тыс. руб., а «Жигулей» 62 тыс. руб. Суточный объем выпуска «Москвича» не должен превышать суточного объема выпуска «Жигулей» более чем на 6 автомашин. Найти план выпуска автомашин, доставляющего предприятию максимальную выручку.

2.2.17. Ежедневно в ресторане фирменный коктейль (порция составляет 0,33 л) заказывают в среднем 600 человек. Предполагается, что в ближайшее время их количество увеличится в среднем на 50 человек. Согласно рецепту в составе коктейля должно быть:

- не менее 20, но и не более 35 % спирта;
- не менее 2 % сахара;
- не более 5 % примесей;
- не более 76 % воды;
- не менее 7 и не более 12 % сока.

Процентный состав напитков, из которых смешивается коктейль, и их количество, которое ресторан может ежедневно выделять на приготовление коктейля, приведены в таблице.

Напиток	Состав напитка, %				Количество, л/сут
	Спирт	Вода	Сахар	Примеси	
Водка	40	57	1	2	50
Вино	18	67	9	6	184
Сок	0	88	8	4	46

Построить модель, на основании которой можно определить, хватит ли ресторану имеющихся ежедневных запасов напитков для удовлетворения возросшего спроса на коктейль.

2.2.18. Для изготовления четырех видов продукции используют три типа сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	—

Определить план выпуска продукции из условия максимизации его стоимости.

2.2.19. Частный инвестор предполагает вложить 500 тыс. руб. в различные ценные бумаги. После консультаций со специалистами фондового рынка он отобрал три типа акций и два типа государственных облигаций. Часть денег предполагается положить на срочный вклад в банк (см. таблицу).

Вложение	Доход, %	Риск
Акции *A*	15	Высокий
Акции *B*	12	Средний
Акции *C*	9	Низкий
Долгосрочные облигации	11	—
Краткосрочные облигации	8	—
Срочный вклад	6	—

Имея в виду качественные соображения диверсификации портфеля и неформализуемые личные предпочтения, инвестор выдвигает следующие требования к портфелю ценных бумаг:

- все 500 тыс. руб. должны быть инвестированы;
- по крайней мере 100 тыс. руб. должны быть на срочном вкладе в банке;
- по крайней мере 259 тыс. руб., инвестированных в акции, должны быть инвестированы в акции с низким риском;
- в облигации нужно инвестировать по крайней мере столько же, сколько в акции;
- не более чем 125 тыс. руб. должно быть вложено в бумаги с доходом менее 10 %.

Определить портфель бумаг инвестора, удовлетворяющий всем требованиям и максимизирующий годовой доход.

2.2.20. Старшему менеджеру банка были представлены четыре проекта, претендующие на получение кредита в банке. Доступная наличность банка, потребности проектов и прибыль по ним приведены в таблице (тыс. руб.).

Проект	Период 1	Период 2	Период 3	Период 4	Прибыль
А	7	8	11	10	20
Б	8	10	8	9	16
В	5	6	8	11	15
Г	8	9	8	7	18
Ресурс банка	22	25	38	10	—

При оценке этих предложений следует принять во внимание потребность проектов наличности и массу доступной наличности для соответствующих периодов. Какие проекты следует финансировать и какое количество наличности необходимо в течение каждого периода, если цель состоит в том, чтобы максимизировать прибыль?

3. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Геометрическая интерпретация задачи

Задача линейного программирования с двумя переменными легко решается графически. В случае трех переменных (соответственно, в трехмерном пространстве) графическое решение в принципе еще возможно, хотя и теряет преимущества наглядности; когда переменных больше, чем три, графический метод неприменим. Иногда количество переменных в задаче можно уменьшить (см. пример 3.5).

Казалось бы, случай двух переменных, возможный лишь в учебных задачах или как результат резкого огрубления реальных задач, не должен представлять интереса. В действительности его рассмотрение очень важно, поскольку позволяет уяснить свойства общей задачи линейного программирования и принципы ее решения.

Пусть дана задача:

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{3.3}$$

Если количество переменных $n = 2$, то (3.2)–(3.3) можно рассматривать как систему неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

на плоскости Ox_1x_2.

Каждое неравенство здесь определяет одну из двух полуплоскостей, на которые плоскость делится соответствующей прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_{i1}$ $(i = \overline{1,m})$, включая и саму прямую — границу полуплоскости. Если система (3.4) совместна, то пересечением полуплоскостей является выпуклый* многоугольник решений, заштрихованный на рис. 3.1 (для случая $m = 4$).

Если в системе ограничений (3.2)–(3.3) количество переменных $n = 3$, то каждое неравенство системы определяет полупространство трехмерного пространства с соответствующей граничной полуплоскостью $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ $(i = \overline{1,m})$.

Если система ограничений совместна, то полученные полупространства образуют в трехмерном пространстве выпуклую общую часть — многогранник решений, представляющий собой совокупность точек, координаты которых удовлетворяют системе (3.2)–(3.3).

При $n > 3$ каждое неравенство системы (3.2)–(3.3) описывает полупространство n-мерного пространства с соответствующей граничной гиперплоскостью

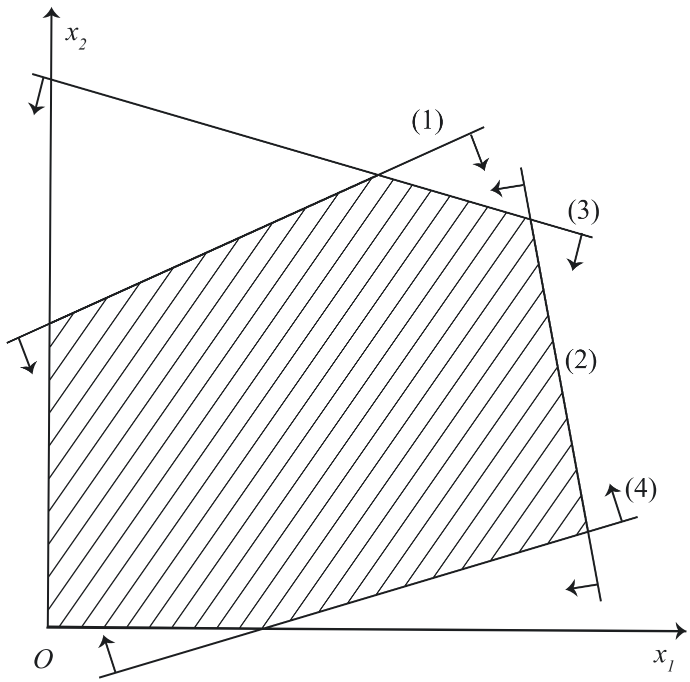


Рис. 3.1. Случай двух переменных с областью допустимых решений — выпуклый многоугольник. Стрелками по концам сегмента прямой здесь и ниже будем отмечать направление штриховки

---

* Напомним, что множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя его точками оно содержит и соединяющий их отрезок. Пустое и одноточечные множества выпуклы по определению. Пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \ (i = \overline{1,m})$. Если система ограничений совместна, то пересечением полупространств является *выпуклый n-мерный многогранник решений.*

Геометрически задача линейного программирования состоит в нахождении той точки n-мерного многогранника решений, координаты которой доставляют целевой функции оптимальное значение; при этом *допустимыми решениями* являются все точки многогранника решений.

Свойства решений задачи линейного программирования

Поскольку любая задача линейного программирования приводится к канонической форме:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{3.6}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{3.7}$$

ограничимся рассмотрением свойств допустимых решений задачи в канонической форме:

1. Область допустимых решений задачи линейного программирования *выпукла.*

2. Поскольку линейная функция не имеет экстремумов, целевая функция задачи линейного программирования достигает наибольшего значения на границе области, а именно в *угловой точке* области допустимых решений. Если наибольшее значение целевой функции достигается более чем в одной угловой точке, то это же значение достигается и в любой линейной комбинации этих угловых точек.

3. Каждому допустимому базисному решению задачи (3.5)–(3.7) соответствует угловая точка многогранника решений и, наоборот, каждой угловой точке многогранника соответствует допустимое базисное решение.

Следствие из свойств 2 и 3: если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по меньшей мере, с одним из ее допустимых базисных решений, т. е. с одной из угловых точек (вершин) многогранника решений, а это означает, что оптимальное решение задачи нужно искать среди конечного числа допустимых базисных решений.

3.2. Реализация графического метода решения

Графический способ решения задачи линейного программирования можно использовать:

- для решения задачи с двумя неизвестными, когда ограничения выражены неравенствами;
- для решения задачи со многими неизвестными при условии, что в канонической форме она содержит *две* свободных неизвестных.

Запишем задачу линейного программирования с двумя неизвестными:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\left(\min\right), \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ge b_m; \end{cases} \tag{3.9}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{3.10}$$

Каждое неравенство в (3.9)–(3.10) геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой соответственно $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i\ (i = \overline{1,m}),\ x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Если система (3.9)–(3.10) совместна, то область ее допустимых решений — это общая часть указанных полуплоскостей, называемая многоугольником решений. Областью допустимых решений системы (3.9)–(3.10) может быть:

- выпуклый многоугольник;
- выпуклая неограниченная многоугольная область;
- луч;
- отрезок;
- точка;
- пустая область.

Целевая функция $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ определяет на плоскости семейство *линий уровня* — прямых, на каждой из которых функция принимает постоянное значение $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

Градиент $\boldsymbol{c} = (c_1;\, c_2)$ целевой функции — это вектор, перпендикулярный ее линиям уровня и указывающий направление наискорейшего возрастания $Z(X)$ (противоположный вектор $-\boldsymbol{c}$ указывает направление наискорейшего убывания целевой функции). Отыскание наибольшего (наименьшего) целевой функции сводится к нахождению в допустимой области решений точки $X^0 = (x_1^0; x_2^0)$, через которую проходит линия уровня с экстремальным значением целевой функции.

3.3. Примеры графического решения задач линейного программирования

Для решения задач линейного программирования применяется следующий алгоритм:

1. Записать математическую модель (3.8)–(3.10) задачи.

2. Построить в системе координат Ox_1x_2 прямые, уравнения которых получаются заменой неравенств равенствами в ограничениях (3.9)–(3.10).

3. Заштриховать полуплоскости, определяемые каждым из неравенств (3.9)–(3.10) (границами полуплоскостей являются построенные прямые).

4. Выделить область допустимых решений (в ней накладываются все штриховки).

5. Построить градиент $\boldsymbol{c} = (c_1; c_2)$.

6. Построить прямую уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ (убедиться в том, что она перпендикулярна градиенту).

7. При решении задачи на max (min) совершать параллельный перенос прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ в направлении градиента (в противоположном направлении); в итоге либо найдется точка, в которой целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение, либо обнаружится неограниченность функции сверху (снизу) на области допустимых решений.

8. Найти координаты точки максимума (минимума) целевой функции и значение функции в этой точке.

Пример 3.1. Предприятие производит продукцию видов P_1 и P_2 по цене 3 и 7 у. е. соответственно. При этом используются два вида сырья A и B. Суточные запасы и расход сырья каждого вида на единицу продукции P_1 и P_2 указаны в таблице.

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		P_1	P_2
A	9	2	3
B	7	1	2

Суточный спрос на продукцию P_1 превышает спрос на продукцию P_2 не более чем на две единицы, а спрос на продукцию P_2 не бывает более двух единиц в сутки. Какое количество продукции каждого вида в сутки должно выпускать предприятие, чтобы получить максимальный доход от реализации продукции?

Решение. Пусть x_1 и x_2 — количество единиц продукции P_1 и P_2 соответственно, производимой в сутки. Математическая постановка задачи:

$$Z(X) = 3x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 \le x_2 + 2, \\ x_2 \le 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

На координатной плоскости покажем область допустимых решений, ограниченную осями координат и прямыми, соответствующими уравнениям:

$$2x_1 + 3x_2 = 9\,(1),\quad x_1 + 2x_2 = 7\,(2),\quad x_1 = x_2 + 2\,(3),\quad x_2 = 2\,(4).$$

Область допустимых решений — пятиугольник, заштрихованный на рис. 3.2.

Покажем вектор $\boldsymbol{v}$, сонаправленный градиенту* $\boldsymbol{c} = (3; 7)$ и исходящий из начала координат. Проведем через ту же точку перпендикулярно градиенту линию уровня (рис. 3.3). При параллельном переносе этой линии в направлении вектора $\boldsymbol{v}$ значение целевой функции возрастает. Мы хотим найти, в какой точке линия уровня покидает область допустимых решений. Судя по рис. 3.3,

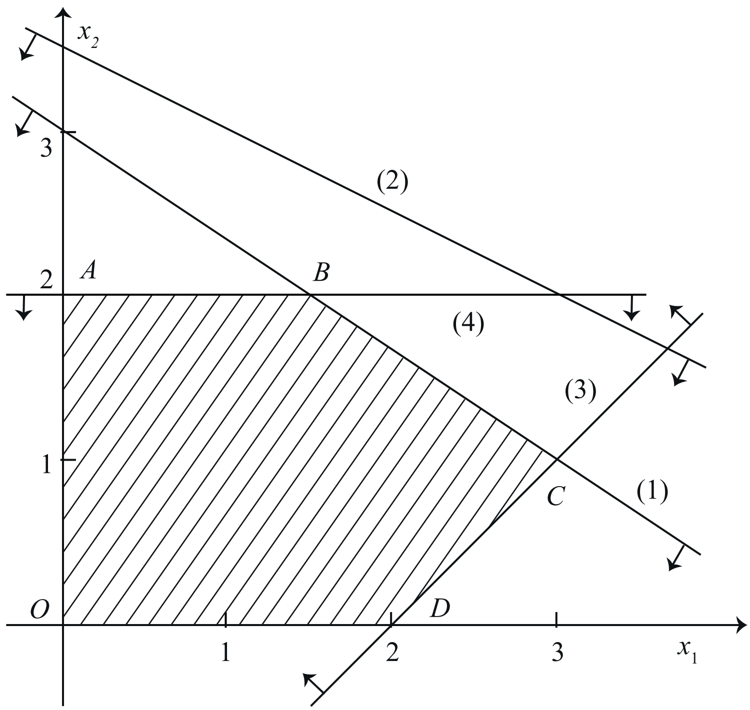


Рис. 3.2. Область допустимых решений для примера 3.1

* Сам градиент не уместится на рисунке в выбранном масштабе.

это точка B. Следовательно, именно в ней целевая функция примет наибольшее значение.

Точка B является точкой пересечения прямых (1) и (4) (см. рис. 3.2), поэтому ее координаты удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_2 = 2, \end{cases}$$

решая которую, находим $x_1 = 1{,}5$ и $x_2 = 2$. Целевая функция Z в точке B (1,5; 2) принимает значение:

$$\max Z(X) = Z\Big|_B = \left(3x_1 + 7x_2\right)\Bigg|_{\substack{x_1=1{,}5 \\ x_2=2}} = 3\cdot 1{,}5 + 7\cdot 2 = 18{,}5.$$

Итак, найдено оптимальное решение $X = (1{,}5;\ 2)$, для которого max $Z(X) = 18{,}5$.

Пример 3.2. Решить графически задачу:

$$Z(X) = 4x_1 + 6x_2 \to \max,$$

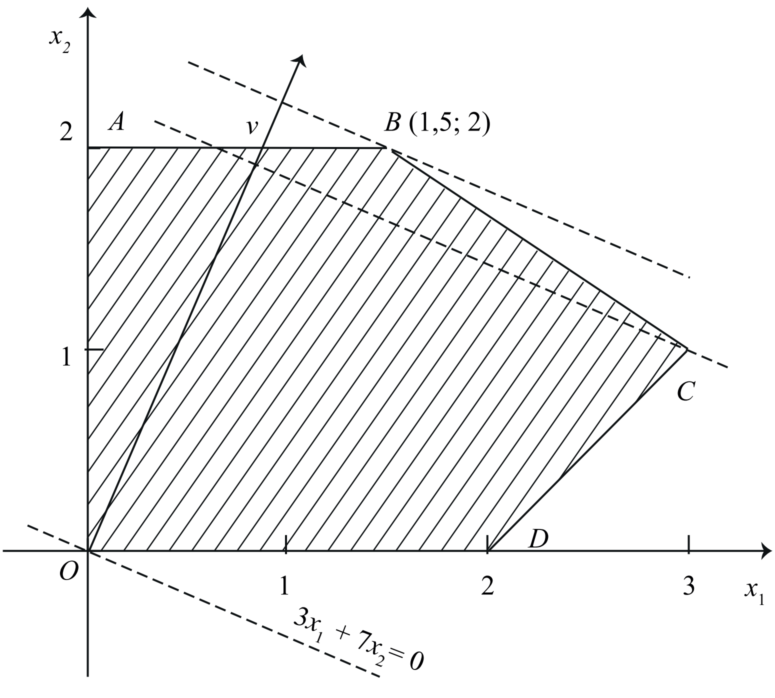


Рис. 3.3. Случай отыскания точки, в которой прямая, соответствующая целевой функции, покидает область допустимых решений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 \le x_2 + 2, \\ x_2 \le 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Заметим, что эта задача отличается от предыдущей лишь тем, что иначе определена целевая функция. Поэтому область допустимых решений по-прежнему будет такой, как показано на рис. 3.3. Надо лишь по-другому построить вектор, указывающий направление градиента $\boldsymbol{c} = (4; 6)$ и перпендикулярные ему линии уровня (рис. 3.4).

Теперь линия уровня при параллельном переносе в направлении градиента покидает область допустимых решений не в точке *B*, а по отрезку *BC*. Поэтому координаты любой точки отрезка *BC* будут определять оптимальное решение исходной задачи.

Выразим из уравнения $2x_1 + 3x_2 = 9$ прямой *BC* переменную x_2:

$$x_2 = \frac{9 - 2x_1}{3}.$$

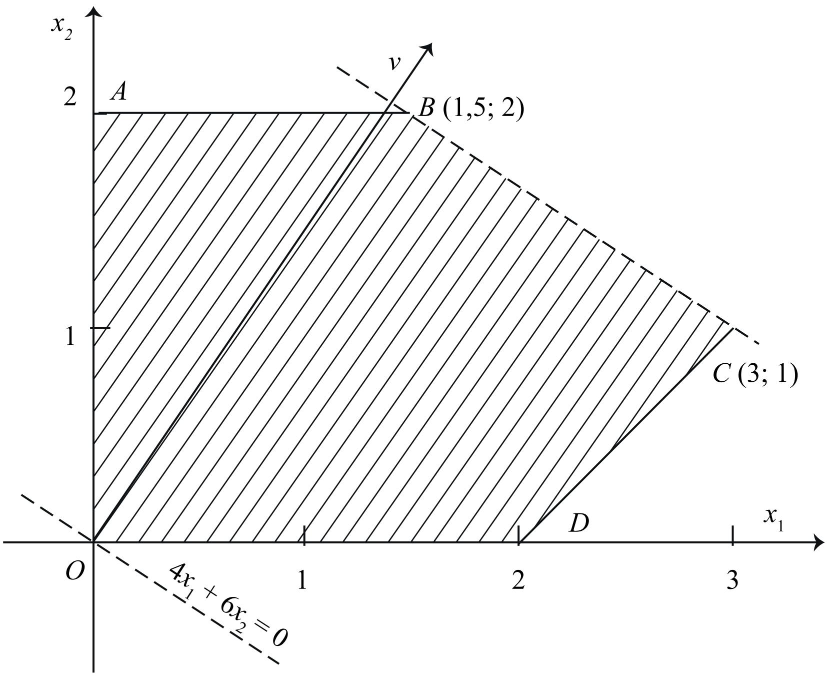


Рис. 3.4. Случай, когда целевая функция покидает область допустимых решений по отрезку — задача имеет бесконечно много решений

Тогда оптимальное решение есть $X = \left(x_1,\ \frac{1}{3}(9-2x_1)\right)$, где x_1 — любое значение из отрезка [1,5; 3], при этом

$$\max Z\left(X\right) = Z\Big|_B = \left(4x_1 + 6x_2\right)\Bigg|_{\substack{x_1=1,5 \\ x_2=2}} = 4\cdot 1,5 + 6\cdot 2 = 18.$$

Проверьте, что при подстановке в целевую функцию координат точки C (3; 1) получается то же оптимальное значение.

Пример 3.3. Решить задачу:

$$Z(X) = x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 1,5x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение. Построим область допустимых решений, ограниченную осями координат и прямыми, соответствующими уравнениям (рис. 3.5):

$$1,5x_1 - x_2 = 3\ (1),\quad 2x_1 + x_2 = 4\ (2),\quad x_1 + 2x_2 = 4\ (3).$$

Заметим, что область не ограничена сверху.

Построим вектор градиента $\boldsymbol{c} = (1, -1)$, исходящий из начала координат, и проведем линии уровня в направлении, противоположном $\boldsymbol{c}$, так как именно в этом направлении значение целевой функции $Z(X)$ убывает (рис. 3.5). Чем выше располагается линия уровня, тем меньше значение целевой функции на ней. В силу неограниченности области допустимых решений $Z(X) \to -\infty$ на этой области, и исходная задача не имеет решения.

Пример 3.4. Решить задачу:

$$Z(X) = x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 1,5x_1 - x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение. По сравнению с предыдущей задачей здесь изменен знак первых двух ограничений; это означает, что в обоих случаях штриховать придется полуплоскость по другую сторону от соответствующей прямой. Сейчас система ограничений противоречива: нет таких точек, которые удовлетворяли бы всем ограничениям сразу (рис. 3.6). И эта задача линейного программирования не имеет решения, но по другой причине, нежели предыдущая задача.

Итак, рассмотрены ситуации, встречающиеся при графическом решении задачи линейного программирования: оптимальное решение существует и единственно (пример 3.1); существует, но не единственно (бесконечное множество решений доставляют целевой функции одно и то же оптимальное значение — пример 3.2); оптимальное решение не существует — по причине неограниченности целевой функции в области допустимых решений (пример 3.3) или в силу несовместности ограничений задачи (пример 3.4).

Наконец, рассмотрим задачу, которая, на первый взгляд, вообще не допускает графического решения, поскольку содержит более двух переменных. В действительности, выражая одни переменные через другие, можно уменьшить количество переменных до двух.

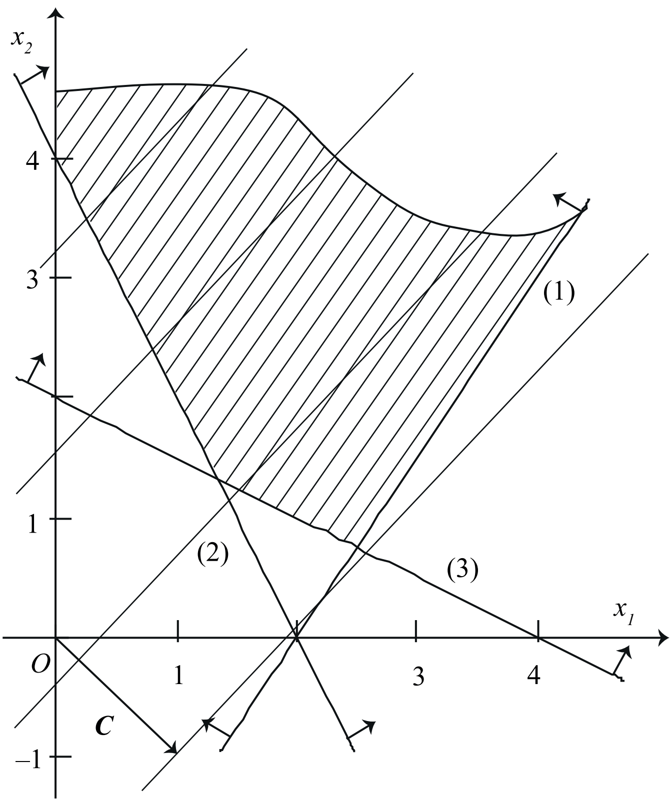


Рис. 3.5. Случай, когда область допустимых решений не ограничена — задача может не иметь решения

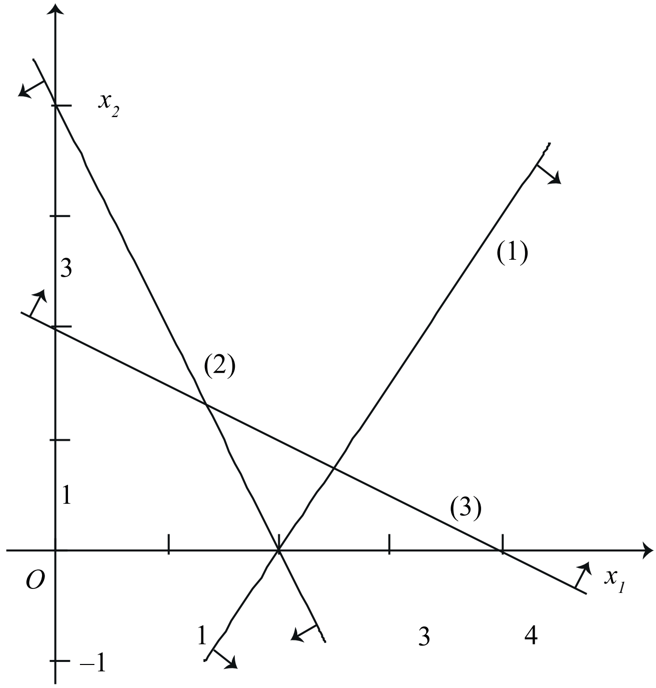


Рис. 3.6. Случай, когда система ограничений несовместна — задача не имеет решения

Пример 3.5. Привести задачу линейного программирования

$$Z(X) = 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1, 4} \right)$$

к виду, допускающему графическое решение.

Решение. Составим расширенную матрицу системы ограничений и выберем базисный минор, например, так, чтобы неизвестные x_1 и x_2 оказались базисными, а x_3 и x_4 — свободными*. Выполняя элементарные преобразования строк матрицы, выразим базисные переменные через свободные:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{2} & 0 \end{array} \right),$$

* В силу неоднозначности отнесения переменных к базисным и свободным можно по-разному привести исходную задачу к виду, допускающему графическое решение. Векторы оптимального решения при этом, естественно, будут различаться, но они доставляют своим

откуда

$$x_1 = 1 - \tfrac{3}{4}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4, \quad x_2 = \tfrac{13}{4}x_3 - \tfrac{5}{2}x_4.$$

Подставим эти выражения в целевую функцию; учтем также, что на x_1 и x_2 действовали естественные ограничения. В итоге получим стандартную задачу, допускающую графическое решение:

$$Z(X) = 4 - \tfrac{47}{4}x_3 + \tfrac{9}{2}x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 1 - \tfrac{3}{4}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 & \geq & 0, \\ \tfrac{13}{4}x_3 - \tfrac{5}{2}x_4 & \geq & 0; \end{cases}$$

$$x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить графически:

3.1. $Z(X) = 2x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq -4, \\ 5x_1 + x_2 \leq 40, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 7, \\ x_1 + x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

3.2. $Z(X) = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 - x_2 \leq 15, \\ 0 \leq x_1 \leq 7, \\ 0 \leq x_2 \leq 10. \end{cases}$$

3.3. $Z(X) = x_1 - 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 1 \leq x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2; \end{cases}$$

$x_2 \geq 0.$

3.4. $Z(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ 8x_1 - 3x_2 \geq -16, \\ x_1 \geq 2, \\ 0 \leq x_2 \leq 9. \end{cases}$$

целевым функциям *одинаковое* оптимальное значение. Это касается ответов к задачам 3.10–3.15. Иногда указываются несколько возможных ответов.

3.5. $Z(X)=5x_1+3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1+x_2 \ge 2, \\ -x_1+3x_2 \ge -2, \\ 4x_1-5x_2 \ge -16, \\ x_1 \ge 1, \\ 0 \le x_2 \le 4. \end{cases}$$

3.6. $Z(X)=3x_1+4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 0 \le x_1+2x_2 \le 3, \\ -1 \le x_1-x_2 \le 0, \\ 0 \le x_1 \le 2, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

3.7. $Z(X)=3x_1-x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 10, \\ 2x_1-x_2 \le 6, \\ x_1+2x_2 \ge 1; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0.$

3.8. $Z(X)=-5x_1+4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -1 \le -x_1+x_2 \le 1, \\ x_1+x_2 \ge -1, \\ -3x_1+2x_2 \le 2, \\ 2x_1-x_2 \le 2; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0.$

3.9. $Z(X)=2x_1+3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2 \ge 9, \\ -x_1+x_2 \ge 1, \\ 2x_1-x_2 \ge -2; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3.10. $Z(X)=5x_1+7x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 8x_1+4x_2-x_3-x_4 \quad =30, \\ 8x_1+16x_2-x_3 \quad -x_5=54, \\ 8x_1+18x_2 \quad -x_4-x_5=50; \end{cases}$$

$x_i \ge 0 \ \left(i=\overline{1,5}\right).$

3.11. $Z(X)=-x_1+x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 4x_1-3x_2-x_3+x_4+x_5=6, \\ x_1+\ 4x_2\ +x_3 \quad +x_5=15, \\ 2x_1-4x_2-x_3+x_4 \quad =-3; \end{cases}$$

$x_i \ge 0 \ \left(i=\overline{1,5}\right).$

3.12. $Z(X)=x_1+3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2 \quad +x_5+x_6=10, \\ 2x_1+2x_2 \quad +x_4 \quad +x_6=25, \\ 2x_1-3x_2-x_3 \quad +x_5 \quad =-9, \\ \quad 6x_2+x_3+x_4 \quad =36; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \ \left(i=\overline{1,6}\right).$

3.13. $Z(X)=3x_1-2x_2+3x_4+$
$+x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+x_4 \quad =2, \\ 4x_1-x_2 \quad +x_4+x_5 \quad =21, \\ 4x_1-x_2 \quad -x_4+x_5 \quad =13, \\ x_1+x_2 \quad -x_6=3; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \ \left(i=\overline{1,6}\right).$

3.14. $Z(X)=10x_1+x_2+$
$+x_3-4x_4-5x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=20, \\ 2x_1-3x_2-x_4=-12, \\ -2x_1-4x_2+x_5=-16; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \ \left(i=\overline{1,5}\right).$

3.15. $Z(X)=x_1+2x_2+x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5, \\ x_2+x_3+x_4-x_5=2, \\ x_3-x_4+x_5=1; \end{cases}$$

$x_i \ge 0 \quad \left(i=\overline{1,5}\right).$

3.16. $Z(X)=x_1+3x_2+5x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=5, \\ x_2-x_3-x_4+x_5=-2, \\ x_3-x_4-x_5=3; \end{cases}$$

$x_i \ge 0 \quad \left(i=\overline{1,5}\right).$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

3.1. $X=\left(3{,}8;\, 0{,}2\right);\ \max\ Z(X)=7{,}8.$

3.2. $X=\left(7,\ 3\right);\ \max\ Z(X)=5.$

3.3. Система ограничений несовместна.

3.4. Значение целевой функции не ограничено.

3.5. $X=\left(14,\ 4\right);\ \max\ Z(X)=82.$

3.6. $X=\left(0, 0\right);\ \min\ Z(X)=0.$

3.7. $X=\left(0, 10/3\right);\ \min\ Z(X)=-10/3.$

3.8. $X=\left(1,\ 0\right);\ \min\ Z(X)=-5.$

3.9. $X=\left(1{,}4;\ 2{,}4\right);\ \min\ Z(X)=10.$

3.10. $X=\left(3, 2, 2, 0, 0\right);\ \min\ Z(X)=29.$

3.11. $X=\left(4{,}1{,}7{,}0{,}0\right)$, а также $X=\left(3{,}0{,}9{,}0{,}3\right);\ \min Z(X)=-3.$

3.12. $X=\left(3, 6, 0, 0, 3{,}7\right);\ \max\ Z\left(X\right)=21.$

3.13. $X=\left(7{,}2; 11{,}8; 0; 4; 0; 16\right);\ \min\ Z\left(X\right)=10.$

3.14. $X=\left(6, 8, 0, 0, 28\right);\ \min\ Z\left(X\right)=-72.$

3.15. $X=\left(0,\ 3,\ 0, 1/2, 3/2\right)$, а также $X=\left(0, 0, 3/2, 2, 3/2\right);\ \min\ Z\left(X\right)=3/2.$

3.16. $X=\left(3,\ 1,\ 3, 0, 0\right);\ \min\ Z\left(X\right)=6.$

4. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Симплекс-метод

Симплексный метод — систематическая процедура решения задач линейного программирования, заданных в канонической форме. *Симплекс-метод* основывается на следующем:

- область допустимых решений является *выпуклым и многогранным множеством* с конечным числом *вершин*;
- оптимальным решением задачи линейного программирования является одна из вершин области допустимых решений;
- вершины области допустимых решений соответствуют некоторым *допустимым* (*неотрицательным*) *базисным решениям* системы ограничений задачи.

С помощью симплекс-метода осуществляется целенаправленный перебор вершин допустимой области задачи линейного программирования. Каждое базисное решение проверяется на оптимальность, а операции однократного замещения осуществляются таким образом, чтобы значение целевой функции не уменьшалось в задаче на максимум или не увеличивалось в задаче на минимум. Таким образом, с помощью симплекс-метода за конечное число шагов можно либо найти оптимальное решение, либо установить его отсутствие.

Симплекс-метод был предложен Дж. Данцигом[*] в 1949 г., но еще ранее близкие идеи были разработаны Л. В. Канторовичем[**].

Для задач небольшой размерности симплекс-метод реализуется «вручную». Для решения задач большой размерности используют ЭВМ и специальное программное обеспечение.

---

[*] Джордж Бернард Данциг (1914–2005) — американский математик, разработчик алгоритма, применяемого в решениях задач симплекс-методом. Считается основоположником линейного программирования, наряду с Леонидом Канторовичем и Джоном фон Нейманом.

[**] Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) — советский математик и экономист, один из создателей линейного программирования. Единственный в СССР лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 г. «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Далее рассмотрим два варианта оформления симплекс-метода. Первый вариант — это классическое изложение исполнения симплекс-процедуры, второй вариант, на наш взгляд, лучше (возможно, легче) использовать при решении задач «вручную».

Оба варианта реализуются по схеме:

1) определение начального (первого) допустимого базисного решения задачи;

2) осуществление перехода к лучшему решению;

3) прекращение перебора решений на оптимальном решении или заключение об отсутствии решения.

4.2. Теоретическое обоснование симплекс-метода

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования, в которой многогранное множество определено с помощью равенств, а на переменные накладывается условие неотрицательности:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min), \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}). \tag{4.3}$$

Будем считать, что:

1) $r(A) = m < n$, где $A = (a_{ij})_{m \times n}$, т. е. $r(A)$ совпадает с числом равенств-ограничений (4.2);

2) правые части системы ограничений неотрицательны, т. е. $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$.

Заметим, что любое многогранное множество может быть представлено в предложенной выше так называемой канонической форме (см. п. 2.2).

Решение задачи линейного программирования называется *допустимым* (*неотрицательным*) *базисным решением*, если векторы-столбцы коэффициентов при неизвестных в системе ограничений, соответствующие неотрицательным компонентам вектора, линейно независимы.

Векторы-столбцы, коэффициенты целевой функции (4.1) и неизвестные x_j, отвечающие базису, называются *базисными*.

В случае, когда число положительных компонент допустимого базисного решения равно m, это решение называют *невырожденным* базисным решением, в противном случае (меньше m) — *вырожденным*.

Пусть система линейных уравнений (4.2) приведена к единичному базису. Для определенности будем считать, что $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — базисные неизвестные, а $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ — свободные. В таком случае система линейных уравнений (4.2) будет эквивалентна разрешенной системе:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + \alpha_{1,\,m+1} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n} x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_m + \alpha_{m,\,m+1} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn} x_n = \beta_m. \end{cases} \tag{4.4}$$

где $\beta_i \geq 0,\ \forall i = \overline{1, m}.$ При этом начальное базисное решение имеет вид:

$$X_1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1, 0, \ldots, 0\right) = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0\right).$$

Тогда на основании векторного смысла базисного решения (см. п. 1.5, формула (1.8)) можно записать:

$$A_1 x_1^1 + A_2 x_2^1 + \ldots + A_m x_m^1 = \mathrm{B}, \tag{4.5}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — базис системы векторов-столбцов матрицы А; В = ($\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$) — вектор-столбец свободных членов.

Любой вектор-столбец матрицы А можно разложить по векторам-столбцам базиса $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то есть

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} A_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Иначе $A_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$ — вектор коэффициентов разложения вектора A_j по базису $A_1, A_2, \ldots, A_m$ допустимого решения.

Целевую функцию $Z(X)$ запишем так, чтобы она зависела только от свободных неизвестных $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} Z(X) &= c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1} + \ldots + c_n x_n = \\ &= c_1\left(\beta_1 - \alpha_{1,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n} x_n\right) + \ldots + c_m\left(\beta_m - \alpha_{m,m+1} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn} x_n\right) + \\ &+ c_{m+1} x_{m+1} + \ldots + c_n x_n = \\ &= \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j + \left(c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{i,\,m+1}\right) x_{m+1} + \ldots + \left(c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{in}\right) x_n. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} - c_j \quad \left(j = \overline{m+1, n} \right), \tag{4.6}$$

$$\Delta_0 = Z\left(X_1\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j, \tag{4.7}$$

или в векторно-матричной форме:

$$\Delta_j = \mathrm{C}\mathrm{A}_j - c_j \quad \left(j = \overline{m+1, n} \right), \ \Delta_0 = \mathrm{C}\mathrm{B}, \tag{4.8}$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — вектор коэффициентов целевой функции при базисных неизвестных; c_j — коэффициенты целевой функции при x_j.

Назовем Δ_j оценками разложения вектора A_j по базису допустимого решения (или оценками свободных неизвестных x_j). Тогда с учетом (4.5) и (4.6):

$$Z(X) + \Delta_{m+1} x_{m+1} + \ldots + \Delta_n x_n = \Delta_0.$$

Данное равенство можно рассматривать как еще одно уравнение системы (4.4). В результате получим расширенную систему:

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i \left(i = \overline{1, m} \right), \\ Z\left(X\right) + \sum\limits_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j = \Delta_0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Результаты проведенных преобразований, записанные в виде системы (4.9), можно занести в таблицу, называемую *симплексной* (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Базис	$C_{\text{баз}}$	B	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_n
			A_1	A_2	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_n
A_1	c_1	β_1	1	0	…	0	$\alpha_{1,\,m+1}$	…	α_{1j}	…	α_{1n}
A_2	c_2	β_2	0	1	…	0	$\alpha_{2,\,m+1}$	…	α_{2j}	…	α_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_m	β_m	0	0	…	1	$\alpha_{m,\,m+1}$	…	α_{mj}	…	α_{mn}
$Z(X)$	$\Delta_j \geq 0$	Δ_0	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_n

Последняя строка этой таблицы, называемая *оценочной* или *индексной*, рассчитывается по формулам (4.6)–(4.7). При переходе от одного базисного решения к другому оценочную строку можно рассчитывать также по «правилу прямоугольника», которое используется в методе Гаусса — Жордана.

Наша задача — от решения X_1 перейти к новому неотрицательному базисному решению X_2 с большим значением целевой функции для задачи на максимум и с меньшим для задачи на минимум.

Предположим, что в векторном равенстве

$$A_{m+1} = \alpha_{1,m+1}A_1 + \alpha_{2,m+1}A_2 + \ldots + \alpha_{m,m+1}A_m \tag{4.10}$$

$\alpha_{1,\,m+1} > 0$. Вычтем из (4.5) равенство (4.10), умноженное на θ:

$$\left(x_1^1 - \theta\alpha_{1,m+1}\right)A_1 + \ldots + \left(x_m^1 - \theta\alpha_{m,m+1}\right)A_m = \mathrm{B} - \theta A_{m+1}$$

или

$$\left(x_1^1 - \theta\alpha_{1,m+1}\right)A_1 + \ldots + \left(x_m^1 - \theta\alpha_{m,m+1}\right)A_m + \theta A_{m+1} = \mathrm{B}. \tag{4.11}$$

Обозначим $X_\theta = \left(x_1^1 - \theta\alpha_{1,m+1}, \ldots, x_m^1 - \theta\alpha_{m,m+1}, \theta, 0, \ldots, 0\right)$. Равенство (4.11) показывает, что решение X_θ будет допустимым в задаче (4.1)–(4.3), если все его компоненты будут неотрицательны, т. е. $x_j^1 - \theta\alpha_{i,m+1} \geq 0,\ \forall i = \overline{1, m}$ и $\theta \geq 0$.

Если $\theta = 0$, то $X_1 = X_\theta$ и мы не получим нового решения, поэтому такой случай рассматривать не будем.

Пусть $\theta > 0$. Если $\alpha_{i,\,m+1} \leq 0$, то $\beta_i - \theta\alpha_{i,\,m+1} \geq 0$. Если $\alpha_{i,\,m+1} > 0$, то $\beta_i \geq \theta\alpha_{i,\,m+1}$, следовательно, $\theta \leq \dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}}$. Чтобы данное неравенство было верно для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$, необходимо потребовать, чтобы $0 < \theta \leq \theta_{0,m+1} = \min\limits_{i:\,\alpha_{i,m+1} > 0} \left\{\dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}}\right\}$.

То есть, если $0 < \theta \leq \theta_{0,\,m+1}$, то X_θ — допустимое базисное решение (4.1)–(4.3).

Предположим, что $\theta_{0,\,m+1}$ достигается на $\alpha_{i,\,m+1}$, т. е. $\theta_{0,m+1} = \dfrac{x_1^1}{\alpha_{1,m+1}} = \dfrac{\beta_1}{\alpha_{1,m+1}}$.

В X_θ положим $\theta = \theta_{0,\,m+1}$ и обозначим $X_2 = X_\theta = \left(0, x_2^2, \ldots, x_m^2, x_{m+1}^2, 0, \ldots, 0\right)$, где

$$\begin{cases} x_i^2 = x_i^1 - \theta_{0,m+1}\alpha_{i,m+1} \quad i = \overline{2, m}, \\ x_{m+1}^2 = \theta_{0,m+1}. \end{cases}$$

Так как $A_2, \ldots, A_{m+1}$ линейно независимы (доказываем от противного), то X_2 — допустимое базисное решение.

Понятно, что X_2 получается из X_1 с помощью симплексных преобразований с выбором разрешающего элемента $\alpha_{1,\,m+1}$. Найдем теперь *приращение целевой функции* при переходе от X_1 к X_2:

$$CX_2 = \left(x_2^1 - \theta_{0,\,m+1}\alpha_{2,\,m+1}\right)c_2 + \ldots + \left(x_m^1 - \theta_{0,\,m+1}\alpha_{m,\,m+1}\right)c_m + \theta_{0,\,m+1}c_{m+1} =$$

$$= \left(\underbrace{x_1^1 - \theta_{0,\,m+1}\alpha_{1,\,m+1}}_{=0}\right)c_1 + \left(x_2^1 - \theta_{0,\,m+1}\alpha_{2,\,m+1}\right)c_2 + \left(x_m^1 - \theta_{0,\,m+1}\alpha_{m,\,m+1}\right)c_m + \theta_{0,\,m+1}c_{m+1} =$$

$$= CX_1 + \theta_{0,\,m+1}c_{m+1} - \theta_{0,\,m+1}\left(\alpha_{1,\,m+1}c_1 + \alpha_{2,\,m+1}c_2 + \ldots + \alpha_{m,\,m+1}c_m\right) =$$

$$= CX_1 + \theta_{0,\,m+1}\left(c_{m+1} - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,\,m+1}c_i\right) = CX_1 - \theta_{0,\,m+1}\Delta_{m+1}.$$

Итак, в векторно-матричной форме

$$CX_2 = CX_1 - \theta_{0,m+1}\Delta_{m+1}.$$

Если θ_{0j} достигается на α_{ij}, то при переходе от одного решения X_1 к другому X_2 приращение целевой функции находится по формуле

$$\boxed{\Delta Z_j = CX_2 - CX_1 = -\theta_{0j}\Delta_j}. \tag{4.12}$$

Здесь j — номер вектора, вводимого в базис допустимого решения, оценки Δ_j определяются формулами (4.6)–(4.8), параметр θ_{0j}, обеспечивающий неотрицательность базисного решения, необходимо выбирать из условия

$$\boxed{\theta_{0j} = \min_{i:\forall\alpha_{ij}>0}\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\right\} = \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}}}.$$

Далее J — множество индексов (номеров) базисных неизвестных.

Теорема 4.1 (*правило перехода к новой вершине*). Если хотя бы одна оценка Δ_j, $j \notin J$ разложения вектора A_j по базису допустимого решения отрицательна $\Delta_j < 0$ (положительна $\Delta_j > 0$), а при соответствующей переменной x_j есть хотя бы один положительный коэффициент $\alpha_{ij} > 0$, то $CX_2 > CX_1$ в задаче на максимум ($CX_2 < CX_1$ в задаче на минимум).

Таким образом, можно найти новое базисное решение, на котором значение целевой функции будет больше в задаче на максимум и меньше в задаче на минимум.

Чтобы обеспечить наибольшее изменение целевой функции при переходе от одного базисного решения к другому, векторы, исключаемый (выводимый) из базиса и вводимый в базис допустимого решения, согласно (4.12) необходимо выбирать из условий:

$$\text{в задаче на максимум } \max\{\Delta Z_j, j \notin J\} = \max\{-\theta_j \Delta_j, j \notin J\}; \qquad (4.13)$$

$$\text{в задаче на минимум } \min\{\Delta Z_j, j \notin J\} = \min\{-\theta_j \Delta_j, j \notin J\}. \qquad (4.14)$$

В упрощенном варианте вектор, вводимый в базис допустимого решения, выбирается из условий:

$$\text{в задаче на максимум } \min\{\Delta_j, j \notin J\}; \qquad (4.15)$$

$$\text{в задаче на минимум } \max\{\Delta_j, j \notin J\}. \qquad (4.16)$$

Теорема 4.2 *(правило неограниченности целевой функции)*. Если существует вектор A_j, для которого оценка $\Delta_j \leq 0$ и при соответствующей переменной x_j нет ни одного положительного коэффициента (все $\alpha_{ij} \leq 0,\ i = \overline{1,m}$), то в задаче на максимум целевая функция не ограничена в области допустимых решений, т. е. $\max Z(X) = +\infty$.

Аналогично, если существует A_j: $\Delta_j \geq 0$ и для любого $i = \overline{1,m}$ $\alpha_{ij} \leq 0$ (в задаче на минимум), то $\min Z(X) = -\infty$.

Теорема 4.3 (*правило оптимальности решения*). Допустимое базисное решение задачи линейного программирования является оптимальным, если для любого вектора A_j оценка разложения по базису допустимого решения неотрицательная (неположительная), то есть:

- все $\Delta_j \geq 0$ в задаче на максимум;
- все $\Delta_j \leq 0$ в задаче на минимум.

Признак единственности оптимального решения. Оптимальное решение задачи линейного программирования является *единственным*, если для любого вектора A_j, не входящего в базис, оценка вектора отлична от нуля, то есть:

$$\Delta_j \neq 0, \forall j \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}.$$

Здесь в базис входят первые m векторов.

Условие существования множества оптимальных решений. Задача линейного программирования имеет *бесконечное множество* оптимальных решений, если при оптимальном решении оценка хотя бы одного вектора, не входящего в базис, равна нулю, т. е. существует

$$j \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}: \Delta_j = 0.$$

4.3. Алгоритм решения задачи симплексным методом

Для решения задачи симплексным методом применяется следующий алгоритм:

1. Привести задачу линейного программирования к каноническому виду.

2. Найти первое допустимое решение с базисом из единичных векторов и коэффициенты разложений векторов по этому базису. Если это сделать трудно, то использовать метод искусственных переменных, который изложен в следующем пункте.

3. Если базисное решение найти невозможно, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

4. Вычислить оценки разложений векторов по базису допустимого решения и заполнить симплекс-таблицу.

5. Если выполнено правило оптимальности (теорема 4.3), то найденное решение оптимальное.

6. Если найденное решение задачи единственное, то решение задачи заканчивается.

7. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то найти все оптимальные решения.

8. Проверить, существует ли $\Delta_j < 0$ $(\Delta_j > 0)$ и $\forall i = \overline{1,m}$ $a_{ij} \le 0$. Если да, то $Z_{\max} = +\infty (Z_{\min} = -\infty)$.

9. Если не выполняются условия шагов 4–8, то выбрать любой небазисный столбец, где $\Delta_j < 0$, следуя условиям (4.13)–(4.14) или (4.15)–(4.16), и зафиксировать его номер l.

10. Определить для выбранного столбца параметр θ_{0l}, т. е. найти строку, где b_i / a_{il} минимально по всем i таким, что $a_{il} > 0$, и зафиксировать ее номер k. Элемент a_{kl} выбрать за разрешающий и вернуться к п. 4.

Алгоритм конечен, так как при каждой новой итерации осуществляется переход к новой вершине многоугольника решений, а вершин конечное число.

Пример 4.1. Решить симплексным методом следующую задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 7x_1 + x_3 - 4x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le -1; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,4}.$$

Решение. Приведем задачу линейного программирования к каноническому виду. Для этого сначала умножим обе части второго неравенства системы ограничений на (–1):

$$2x_1 + x_2 - x_3 \le -1 \quad |\times(-1).$$

Получим неравенство с положительной правой частью:

$$-2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1.$$

Далее вводим дополнительные (Д) переменные x_5 и x_6:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \le 6, & \Big| +x_5 \\ -2x_1 - x_2 + \quad x_3 \quad \ge 1; & \Big| -x_6 \end{cases} \quad \text{Д}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1, 4}.$$

Итак, задача принимает вид:

$$Z(X) = 7x_1 + \qquad x_3 - 4x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \qquad = 6, \\ -2x_1 - x_2 + \; x_3 \qquad\qquad - x_6 \; = 1; \end{cases} \tag{4.17}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1, 6}.$$

Используя метод Гаусса — Жордана, приведем систему ограничений (4.17) к равносильной разрешенной системе уравнений (табл. 4.2). Для сохранения неотрицательности правых частей уравнений вводим параметр θ_j. Получим первое базисное решение $X_1 = (0, 0, 1, 0, 6, 0)$ с базисом (A_5, A_3).

Таблица 4.2

Шаг	Базис	A_1	A_2	$A_3\downarrow$	A_4	A_5	A_6	B	θ_3	Базисное решение
1	A_5	1	–1	2	–1	1	0	6	3	
		–2	–1	**1**	0	0	–1	1	**1**	
2	A_5	5	1	0	–1	1	2	4		$X_1 = (0, 0, 1, 0, 4, 0)$
	A_3	–2	–1	1	0	0	–1	1		

Далее вычислим оценки разложений векторов по базису допустимого решения по формулам (4.6)–(4.7):

$$\Delta_0 = CB = (0,1)\cdot(4,1) = 0\cdot 4 + 1\cdot 1 = 1;$$

$$\Delta_1 = CA_1 - c_1 = (0,1)\cdot(5,-2) - 7 = 0\cdot 5 + 1\cdot(-2) - 7 = -9;$$

$$\Delta_2 = CA_2 - c_2 = (0,1)\cdot(1,-1) - 0 = 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -1;$$

$$\Delta_3 = CA_3 - c_3 = (0,1)\cdot(0,1) - 1 = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 - 1 = 0;$$

$$\Delta_4 = CA_4 - c_4 = (0,1)\cdot(-1,0) + 4 = 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 4 = 4;$$

$$\Delta_5 = CA_5 - c_5 = (0,1)\cdot(1,0) - 0 = 0\cdot(1) + 1\cdot 0 = 0;$$

$$\Delta_6 = CA_6 - c_6 = (0,1)\cdot(2,-1) - 0 = 0\cdot 2 + 1\cdot(-1) - 0 = -1.$$

Теперь можем составить симплексную таблицу (табл. 4.3).

Таблица 4.3

Базис	$C_{баз}$	B	7	0	1	–4	0	0	θ_1	θ_2	θ_6
			$A_1 \downarrow$	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6			
$\leftarrow A_5$	0	4	**5**	1	0	–1	1	2	4/5	4	2
A_3	1	1	–2	–1	1	0	0	–1			
$Z(X)$	Δ_j	1	–9	–1	0	4	0	–1			

В первом столбце «Базис» записываются векторы, входящие в базис допустимого решения. Порядок записи соответствует номерам разрешенных неизвестных в уравнениях-ограничениях. Во втором столбце «$C_{баз}$» записываются коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных в том же порядке. В последней строке с оценками Δ_j в столбце «B» записывается значение целевой функции $Z(X_1) = CB$. Заметим, что оценки единичных векторов, входящих в базис, всегда равны нулю.

Начальное базисное решение не является оптимальным, так как в рассматриваемой задаче на максимум векторам A_1, A_2, A_6 соответствуют отрицательные оценки $\Delta_1 = -9$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_6 = -1$ (признак оптимальности не выполняется). В данном случае можно найти новое решение, при котором значение целевой функции не уменьшится. Приращение целевой функции находится по формуле (4.13). Находим $\max \Delta Z_j = \max\limits_j \left\{ -\frac{4}{5}\cdot\left(-9\right), -4\cdot\left(-1\right), -2\cdot\left(-1\right) \right\} = \frac{36}{5}$ при $j = 1$.

Таким образом, вместо вектора A_5 в базис следует ввести вектор A_1. За разрешающий элемент принимаем число 5 (единственный положительный элемент этого столбца) (табл. 4.3). Выполняем преобразования Гаусса — Жордана.

Приходим к табл. 4.4 с новым базисным решением $X_2 = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{13}{5}, 0, 0, 0\right)$, базисом (A_1, A_3), значением целевой функции $Z(X_2) = 41/5$. В оценочной строке все оценки $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1,4}$, следовательно, полученное допустимое базисное решение является оптимальным.

Таблица 4.4

Базис	$C_{баз}$	B	7	0	1	–4	0	0
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	7	4/5	1	1/5	0	–1/5	1/5	2/5
A_3	1	13/5	0	–3/5	1	–2/5	2/5	–1/5
$Z(X)$	Δ_j	41/5	0	4/5	0	11/5	4/5	13/5

Так как исходная задача имеет четыре неизвестных, то в ответе две дополнительные неизвестные не записываем.

Итак, $\max Z(X) = \dfrac{41}{5}$ при $X^* = \left(\dfrac{4}{5}, 0, \dfrac{13}{5}, 0\right)$.

4.4. Альтернативный вариант оформления симплекс-метода

Запишем задачу линейного программирования (4.1)–(4.3) в компактном виде и рассмотрим для определенности задачу на максимум:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{4.18}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Будем считать, что $r(A) = m < n$, $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$.

Введем новую переменную $x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. Рассмотрим две системы линейных уравнений:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \\ x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}$$

и

$$
(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} x_0 - \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \end{cases}
$$

Утверждение. Совокупность действительных чисел $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ является решением системы (II) в том и только в том случае, если набор $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ — решение системы (I), причем $\tilde{x}_0 = C\tilde{X}$ — значение целевой функции на некотором решении $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ системы (I).

Это утверждение позволяет свести исходную задачу к задаче нахождения решения $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ системы (II) с максимальным (минимальным) значением компоненты $\tilde{x}_0$.

4.5. Симплекс-анализ

Пусть система линейных уравнений (I) приведена к единичному базису. Для определенности будем считать, что $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — базисные переменные, а $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ — свободные. Тогда система уравнений (II) будет эквивалентна системе:

$$
\begin{cases}
x_0 - c_1 x_1 - \ldots - c_m x_m - c_{m+1} x_{m+1} - \ldots - c_n x_n = 0, \\
\qquad x_1 \qquad\qquad + \alpha_{1,\,m+1} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n} x_n = \beta_1, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\qquad\qquad x_m + \alpha_{m,\,m+1} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn} x_n = \beta_m;
\end{cases}
\tag{4.19}
$$

$$
x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n},
$$

где $\beta_i \geq 0, \forall i = \overline{1, m}.$

Составим симплекс-таблицу (табл. 4.5), соответствующую системе уравнений (4.19).

В первом столбце указываются базисные переменные (БП) системы (4.19). В следующих столбцах записывают коэффициенты при неизвестных x_j, $j = \overline{0, n}.$ Понятно, что коэффициенты при x_0 (кроме коэффициента целевой функции) не изменяются при преобразованиях матрицы системы. Коэффициенты первого уравнения системы (4.19) записываются отдельной строкой. На самом деле это коэффициенты целевой функции (кроме коэффициента при x_0), *записанные с противоположными знаками.* В дальнейшем будем называть эту строку *строкой целевой функции* или *Z-строкой.* Коэффициенты каждого из остальных уравнений (ограничений) записываются в отдельную строку. Значения правых частей этих уравнений записаны в столбце «B».

Таблица 4.5

БП	x_0	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	B
$Z = x_0 \to \max$	1	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_m$	$-c_{m+1}$	…	$-c_n$	0
x_1	0	1	0	…	0	$\alpha_{1,\,m+1}$	…	α_{1n}	β_1
x_2	0	0	1	…	0	$\alpha_{2,\,m+1}$	…	α_{2n}	β_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	0	0	…	1	$\alpha_{m,\,m+1}$	…	α_{mn}	β_m

Умножим строки ниже Z-строки на $c_1, \ldots, c_m$ соответственно и прибавим к Z-строке, получим табл. 4.6.

Таблица 4.6

БП	x_0	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	B
$Z = x_0 \to \max$	1	0	0	…	0	$\tilde{c}_{m+1}$	…	$\tilde{c}_n$	β_0
x_1	0	1	0	…	0	$\alpha_{1,\,m+1}$	…	α_{1n}	β_1
x_2	0	0	1	…	0	$\alpha_{2,\,m+1}$	…	α_{2n}	β_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	0	0	0	…	1	$\alpha_{m,\,m+1}$	…	α_{mn}	β_m

В результате система (4.19) преобразуется в разрешенную относительно $x_0, x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{cases} x_0 & & & + & \tilde{c}_{m+1}x_{m+1} & +\ldots+ & \tilde{c}_n x_n & = \beta_0, \\ & x_1 & & + & \alpha_{1,\,m+1}x_{m+1} & +\ldots+ & \alpha_{1,n}x_n & = \beta_1, \\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & x_m & + & \alpha_{m,\,m+1}x_{m+1} & +\ldots+ & \alpha_{mn}x_n & = \beta_m; \end{cases} \qquad (4.20)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Итак, получено первое допустимое базисное решение системы (4.20): $\tilde{X}_0 = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, что это базисное решение системы (4.19). Из (4.20) находим:

$$
\begin{cases}
x_0 = \beta_0 - \tilde{c}_{m+1}x_{m+1} - \ldots - \tilde{c}_n x_n, \\
x_1 = \beta_1 - \alpha_{1,\,m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n}x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m = \beta_m - \alpha_{m,\,m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn}x_n;
\end{cases}
$$

$$
x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.
$$

Пусть в задаче на максимум все $\tilde{c}_{m+j} \geq 0.$ Тогда $x_0 \leq \beta_0$ и увеличить значение целевой функции за счет увеличения свободных неизвестных $x_{m+1}, \ldots, x_m$ невозможно.

Таким образом, $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)$ — оптимальное решение, причем $x_0 = \beta_0$ — оптимальное (максимальное) значение целевой функции.

Замечание. В задаче на минимум все $\tilde{c}_{m+j} \leq 0.$

Итак, справедлива теорема 4.4.

Теорема 4.4 (*правило оптимальности решения*). Допустимое базисное решение $\tilde{X}_0 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)$ является оптимальным в том и только в том случае, когда среди элементов Z-строки нет отрицательных в задаче на максимум (нет положительных в задаче на минимум). При этом $x_0 = \beta_0$ — оптимальное значение целевой функции.

Если коэффициенты целевой функции имеют разные знаки, то соответствующее неотрицательное базисное решение не является оптимальным.

Пусть существует $\tilde{c}_j < 0,$ например, $j = m + 1$, т. е. $\tilde{c}_{m+1} < 0.$

Есть возможность увеличения x_0 за счет увеличения x_{m+1}, но при этом остальные базисные переменные $x_1, \ldots, x_m$ должны быть неотрицательными:

$$
\begin{cases}
x_1 = \beta_1 - \alpha_{1m+1}x_{m+1} \geq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m = \beta_m - \alpha_{m,m+1}x_{m+1} \geq 0.
\end{cases}
\tag{4.21}
$$

Рассмотрим случаи:

1. Пусть все $\alpha_{i,m+1} \leq 0,$ тогда ввести в базис x_{m+1} нельзя: это приводит к недопустимому решению (x_{m+1} можно брать сколь угодно большим, что приводит к неограниченности целевой функции).

2. Пусть существует коэффициент $\alpha_{i,m+1} > 0$ при неизвестной $x_{m+1} > 0$, тогда

$x_{m+1}^{\max} = \min\limits_{i:\, a_{i,m+1}>0} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,m+1}}.$ Пусть $i = k$, где реализуется этот минимум. В системе (4.21)

для переменной x_k выполняется равенство: $0 = x_k = \beta_k - \alpha_{k,m+1}x_{m+1}^{\max}$, т. е. x_k становится свободной переменной, а x_{m+1} — базисной. Далее за разрешающий элемент берем $\alpha_{k,\, m+1}$ и пересчитываем симплекс-таблицу, используя преобразования Гаусса — Жордана.

Справедливы теоремы 4.5–4.6.

Теорема 4.5 (*правило неограниченности целевой функции*). Если среди элементов Z-строки найдется неположительное число $\tilde{c}_j \le 0$ и при этом все коэффициенты $\alpha_{ij} \le 0$ при переменной x_j в задаче на максимум, то $\max Z(X) = +\infty$, аналогично, если существует $\tilde{c}_j \ge 0$ и $\forall i = \overline{1, m}$ $\alpha_{ij} \le 0$ (в задаче на минимум), то $\min Z(X) = -\infty$.

Теорема 4.6 (*правило перехода к новому допустимому базисному решению*). Если существует $j \notin J$: $\tilde{c}_j < 0$ (существует $j \notin J$: $\tilde{c}_j > 0$) и среди коэффициентов при переменной x_j существуют $\alpha_{ij} > 0$, то можно найти новое базисное решение, на котором значение целевой функции будет больше в задаче на максимум и меньше — в задаче на минимум.

Чтобы обеспечить наибольшее изменение целевой функции при переходе от одного допустимого базисного решения к другому, векторы, выводимый из базиса и вводимый в базис решения, полезно выбирать из условий:

- в задаче на максимум

$$\min\{\tilde{c}_j, j \notin J\}; \qquad (4.22)$$

- в задаче на минимум

$$\max\{\tilde{c}_j, j \notin J\}. \qquad (4.23)$$

Замечание. Приведенные теоремы 4.4–4.6 слово в слово повторяют теоремы 4.1–4.3. В самом деле, в Z-строке табл. 4.6

$$\tilde{c}_j = c_1\alpha_{1j} + c_2\alpha_{2j} + \ldots + c_m\alpha_{mj} - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ij} - c_j \quad \left(j = \overline{m+1, n}\right), \qquad (4.24)$$

$$\beta_0 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_m\beta_m = \sum_{j=1}^{m} c_j\beta_j. \qquad (4.25)$$

Сравнивая правые части формул (4.24)–(4.25) и (4.6)–(4.7), заключаем, что

$$\boxed{\tilde{c}_j = \Delta_j \quad \left(j = m+1, \ldots, n\right) \quad \beta_0 = \Delta_0}.$$

В дальнейшем коэффициенты преобразованной целевой функции $\tilde{c}_j$ ($j = m + 1, \ldots, n$) будем также называть *оценками разложения вектора* A_j по базису допустимого решения (или *оценками свободных переменных* x_j), а Z-строку — *оценочной*.

Пример 4.2. Рассмотрим пример планирования для предприятия, выпускающего два вида продукции и расходующего при этом три вида сырья. Составим план выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход. Исходные данные задачи таковы (табл. 4.7).

Таблица 4.7

Виды сырья	Запасы сырья (ресурсы)	Расход сырья на единицу продукции	
		P_1	P_2
A	120	3	2
B	120	2	3
C	44	1	1
	Цена единицы продукции, ден. ед.	40	30

Кроме того, известно, что суточный спрос на продукцию P_1 превышает суточный спрос на продукцию P_2 не более чем на 30 ед.

Обозначим через x_1 и x_2 количество единиц продукции P_1 и P_2 соответственно.

Составим математическую модель задачи:

$$Z(X) = 40x_1 + 30x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 120, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 120, \\ x_1 + x_2 \le 44, \\ x_1 \le x_2 + 30; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение. Приведем задачу линейного программирования к каноническому виду. Для этого сначала последнее ограничение перепишем в виде

$$x_1 - x_2 \le 30.$$

Далее вводим *дополнительные* (Д) неизвестные x_3, x_4, x_5 и x_6 для преобразования неравенств в равенства:

$$\begin{array}{l|l} & \text{Д} \\ \left\{\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 120, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 120, \\ x_1 + x_2 \le 44, \\ x_1 - x_2 \le 30; \end{array}\right. & \begin{array}{l} +x_3 \\ +x_4 \\ +x_5 \\ +x_6 \end{array} \end{array}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 6}.$$

Итак, исходная задача принимает вид:

$$Z(X) = 40x_1 + 30x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 120, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 44, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 30; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, 6}.$$

Введем новую переменную $x_0 = 40x_1 + 30x_2$ и рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_0 - 40x_1 - 30x_2 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 120, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 44, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 30; \end{cases} \tag{4.26}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 6}.$$

Далее представим условия задачи в виде симплекс-таблицы, составленной аналогично табл. 4.5. Коэффициенты первого уравнения системы (4.26) записываются отдельной строкой. Они образуют Z-строку (или оценочную строку). Коэффициенты каждого из остальных уравнений (ограничений) записываем в отдельную строку. Значения правых частей этих уравнений записаны в столбце «В» (табл. 4.8).

Таблица 4.8

БП	x_0	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	В	θ_1
$Z = x_0 \to \max$	1	–40	–30	0	0	0	0	**0**	
x_3	0	3	2	1	0	0	0	120	40
x_4	0	2	3	0	1	0	0	120	60
x_5	0	1	1	0	0	1	0	44	44
$\leftarrow x_6$	0	**1**	–1	0	0	0	1	30	**30**

Заметим, что столбцы коэффициентов при неизвестных x_0, x_3, x_4, x_5 и x_6 образуют единичный базис и система уравнений (4.26) является разрешенной. Неизвестные x_1 и x_2 являются свободными и равны нулю, а базисные равны правым частям ограничений (4.26). Первое базисное решение $X_1 = (0, 0, 120, 120,$

44, 30). Это решение говорит о том, что предприятие ничего не производит, а все ресурсы остаются неизрасходованными. Значение целевой функции $Z(X_1) = 0$ не является оптимальным. Неизвестные x_1 и x_2 равны нулю, возрастание этих неизвестных хотя бы на единицу приводит к увеличению целевой функции $Z = x_0 = 40x_1 + 30x_2$ на 40 ед. (при увеличении x_1) или 30 ед. (при увеличении x_2). Поскольку коэффициент целевой функции при x_1 больше, чем при x_2, переменную x_1 вводят в число базисных. Если обратиться к табл. 4.8, то вводимая в базис неизвестная имеет в строке целевой функции наибольший по модулю отрицательный коэффициент, в нашем случае это (–40). Итак, наращиваем значение переменной $x_1 = t$. В этом случае значение целевой функции увеличивается на $40t$. Увеличение продукта на t уменьшает соответствующий ресурс тоже на t. Для сохранения строчных балансов следует изменить значения базисных неизвестных:

$$X(t) = (t, 0, 120 - 3t, 120 - 2t, 44 - t, 30 - t).$$

Заметим, что при $t = 30$ переменная $x_6 = 30 - t$ обращается в ноль, в то время как остальные неизвестные остаются положительными или не изменяются. То есть значение $t = 30$ является наименьшим значением, при котором неизвестные остаются неотрицательными. Так как переменная $x_6 = 30 - t$ при $t > 30$ становится отрицательной, то лучше ее вывести из базисных (в табл. 4.8 указано стрелкой). Итак, за разрешающий элемент примем число 1 в последней строке и в столбце переменной x_1. При этом x_1 переходит в базисные, а x_6 — в свободные. Таким образом мы пришли к пониманию условия, обеспечивающего неотрицательность правых частей уравнений системы:

$$\theta_{0l} = \min_{i:\,\forall\, a_{il} > 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \right\} = \frac{b_k}{a_{kl}}.$$

Напомним, что здесь l — номер вектора A_l, вводимого в базис, а k — номер вектора A_k, выводимого из базиса (номер строки матрицы системы, в которой следует выбирать разрешающий элемент для жорданова преобразования). Имеем: $\theta_{01} = \min \{40, 60, 44, 30\} = 30$. Выбираем в качестве разрешающего элемента указанное выше число 1. В результате из базиса выведем столбец A_6. Отметим число 1 рамкой. С помощью линейных преобразований над строками на месте остальных элементов этого столбца получим нули (табл. 4.9).

Мы получили новое допустимое базисное решение $X_2 = (30, 0, 30, 60, 14, 0)$, которому отвечает большее значение целевой функции $Z(X_2) = 1\,200 = 40 \cdot 30 + 30 \cdot 0$. На рис. 4.1 решение из начала координат переместилось в точку $A(30, 0)$.

Таблица 4.9

БП	x_0	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	θ_2
$Z = x_0$	1	0	–70	0	0	0	40	**1 200**	
← x_3	0	0	**5**	1	0	0	–3	30	**30/5 = 6**
x_4	0	0	5	0	1	0	–2	60	60/5 = 12
x_5	0	0	2	0	0	1	–1	14	14/2 = 7
x_1	0	1	–1	0	0	0	1	30	—

Будем наращивать теперь переменную $x_2 = t$. Строка целевой функции эквивалентна уравнению $Z = x_0 = 70x_2 - 40x_6 + 1\,200$. Поэтому значение целевой функции увеличится на $70t$. Находим $\theta_{02} = \min\{6, 12, 7\} = 6$. Разрешающий элемент выбираем в первой строке ограничений: число 5 (табл. 4.9). Используя жордановы преобразования, получим новую таблицу (табл. 4.10).

Таблица 4.10

max	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6 ↓	b_i	θ_6
$Z = x_0$	1	0	0	14	0	0	–2	**1 620**	
x_2	0	0	5	1	0	0	–3	30	—
x_4	0	0	0	–1	1	0	1	30	30
← x_5	0	0	0	–2	0	5	**1**	10	**10**
x_1	0	5	0	1	0	0	2	180	90

Следующее базисное решение $X_3 = (36, 6, 0, 30, 2, 0)$, которому отвечает значение целевой функции $Z(X_3) = 1\,620 = 40 \cdot 36 + 30 \cdot 6$. На рис. 4.1 из точки $A(30; 0)$ осуществлен переход в точку $B(36; 6)$. Аналогично предыдущему вводим в базис A_6 и выводим A_5. С помощью элементарных преобразований над строками получим табл. 4.11.

Таблица 4.11

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
$Z = x_0$	1	0	0	14	0	10	0	**1 640**
x_2	0	0	1	–1	0	3	0	12
x_4	0	0	0	1	1	0	0	20
x_6	0	0	0	0	0	–5	1	10
x_1	0	1	0	1	0	–2	0	32

Теперь наша таблица отвечает системе уравнений (4.26), разрешенной относительно базисных переменных x_0, x_1, x_2, x_4, x_6. Итак, мы получили базисное

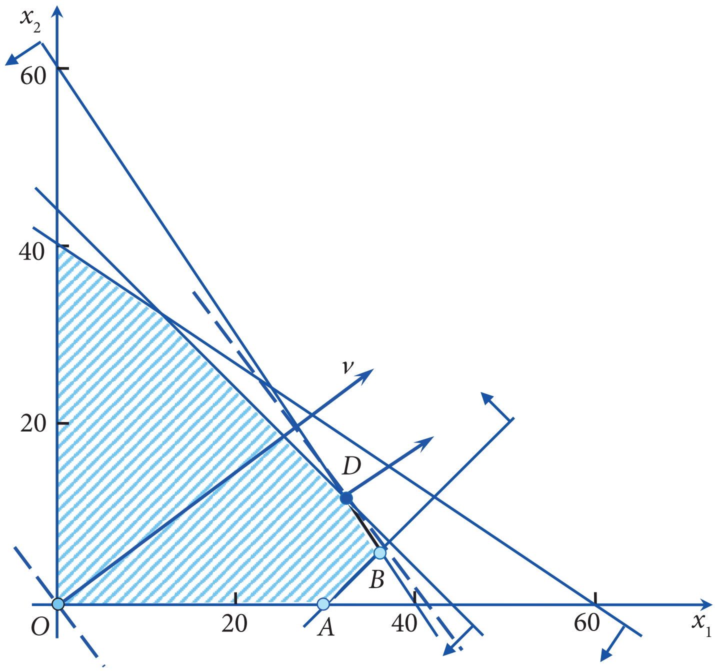


Рис. 4.1. Геометрическая иллюстрация примера 4.2

решение системы (4.24). Обратим внимание на то, что в оценочной строке нет отрицательных элементов! Это означает, что решение

$$X_4 = (32, 12, 0, 20, 0, 10)$$

и значение $Z(X_4) = 1\,640 = 40 \cdot 32 + 30 \cdot 12$ являются оптимальными.

Действительно, строка целевой функции эквивалентна уравнению $Z = x_0 \equiv$ $\equiv -14x_3 - 10x_5 + 1\,640$. В силу неотрицательности неизвестных верно неравенство

$$x_0 \equiv 1\,640 - 14x_3 - 10x_5 \leq 1\,640.$$

Следовательно, $X^* = X_{\max} = (32, 12, 0, 20, 0, 10), Z_{\max} = 1\,640.$

С экономической точки зрения получено перераспределение продукции и ресурсов так, что введенные новые продукты x_3, x_4, x_5 и x_6 имеют или отрицательные или нулевые цены и поэтому выпускаться не должны. Следует производить 32 ед. продукции P_1 и 12 ед. — P_2. Ежедневный доход составляет 1 640 (ден. ед.).

Замечание. В процессе жордановых преобразований строку целевой функции (Z-строку) не следует выбирать разрешающей, но преобразовывать ее нужно по правилам преобразования остальных строк. В результате каждого шага целевая функция, как и базисные переменные, окажется выраженной через свободные переменные.

Покажем на рис. 4.1 путь по вершинам многоугольника исходной задачи, начиная с первой (начало координат) и кончая оптимальной (вершина D) (весь путь: вершины $O \to A \to B \to D$). Заметим еще раз, что значение целевой функции при переходе к каждой следующей вершине увеличивалось.

Пример 4.3 (*бесконечное множество решений*). Решить симплексным методом следующую задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 5x_1 + 10x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 4; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение. Запишем задачу в канонической форме. Для этого введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_1 \quad +2x_2 \quad +x_3 \qquad\qquad = 10, \\ -x_1 \quad +2x_2 \qquad\quad +x_4 \qquad = 6, \\ x_1 \quad -x_2 \qquad\qquad\quad +x_5 = 4; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, 5}.$$

Обратим внимание на прямую $5x_1 + 10x_2 = \alpha$, представляющую целевую функцию, параллельную прямой, соответствующей неравенству $x_1 + 2x_2 \le 10$ (которое в точке максимума выполняется как точное равенство). В этом случае целевая функция принимает одно и то же оптимальное значение на некотором множестве точек границы области допустимых решений. Эти решения называют оптимальными *альтернативными* решениями.

На рис. 4.2 каждая точка отрезка BC соответствует оптимальному решению со значением целевой функции $Z(X) = 50$.

Построим таблицу Гаусса — Жордана (табл. 4.12). Для сохранения неотрицательности правых частей уравнений вводим параметр θ_l. Получим первое базисное решение $X_1 = (0, 0, 10, 6, 4)$ с базисом (A_3, A_4, A_5) и значением целевой функции $Z(X_1) = 0$. На рис. 4.2 это соответствует началу координат.

Будем наращивать x_2. Находим $\theta_2 = \min\ (5, 3) = 3$. Разрешающий элемент выбираем в столбце переменной x_2 и во второй строке: число 2 (выделено рамкой). Используя жордановы преобразования, получим новую таблицу (табл. 4.13).

Таблица 4.12

БП	x_0	x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_2
$Z = x_0 \to \max$	1	–5	–10	0	0	0	**0**	
x_3	0	1	2	1	0	0	10	5
$\leftarrow x_4$	0	–1	**2**	0	1	0	6	**3**
x_5	0	1	–1	0	0	1	4	—

Таблица 4.13

БП	x_0	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_1
$Z = x_0$	1	–10	0	0	5	0	**30**	
$\leftarrow x_3$	0	**2**	0	1	–1	0	4	**2**
x_2	0	–1	2	0	1	0	6	—
x_5	0	1	0	0	1	2	14	14

Получим второе неотрицательное базисное решение $X_2 = (0, 3, 4, 0, 7)$ с базисом (A_2, A_3, A_5) и значением целевой функции $Z(X_1) = 30$. На рис. 4.2 это точка $A(0,3)$. В Z-строке осталось одно отрицательное число (–10). Поэтому разрешающий столбец первый. Находим $\theta_{01} = \min\{2, 14\} = 2$. Разрешающая строка тоже первая. Используя жордановы преобразования, получим новую таблицу (табл. 4.14).

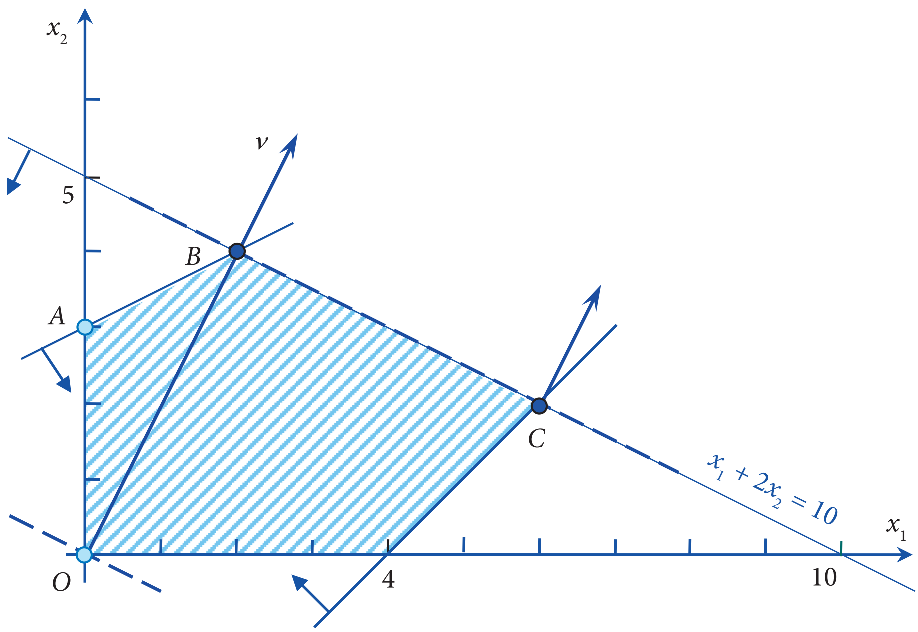


Рис. 4.2. Альтернативные оптимальные решения

Таблица 4.14

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	x_5	b_i	θ_4
$Z = x_0$	1	0	0	5	0	0	**50**	
x_1	0	2	0	1	–1	0	4	—
x_2	0	0	4	1	1	0	16	16
$\leftarrow x_5$	0	0	0	–1	**3**	4	24	**8**

Третье базисное решение $X_3 = (2, 4, 0, 0, 6)$ с базисом (A_1, A_2, A_5) и значением целевой функции $Z(X_3) = 50$. На рис. 4.2 этому решению соответствует точка B (2, 4). В Z-строке не осталось отрицательных чисел. Поэтому полученное допустимое базисное решение $X_3 = (2, 4, 0, 0, 6)$ и соотвествующее ему значение $Z(X_3) = 50$ оптимальны.

Обратим внимание на столбец x_4 табл. 4.14: коэффициент целевой функции при x_4 равен нулю, хотя x_4 — небазисная переменная. Это означает, что вектор A_4 можно ввести в базис без изменения значения целевой функции, но значение x_4 изменится. Аналогично находим $\theta_{04} = \min\{16, 8\} = 8$. Разрешающий элемент — число 3 в выделенной рамке (табл. 4.14). Используя жордановы преобразования, получим новую таблицу (табл. 4.15).

Таблица 4.15

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
$Z = x_0$	1	0	0	5	0	0	**50**
x_1	0	6	0	2	0	4	36
x_2	0	0	12	4	0	–4	24
x_4	0	0	0	–1	3	4	24

Итак, мы имеем еще одно оптимальное решение $X_4 = (6, 2, 0, 8, 0)$ с базисом (A_1, A_2, A_4) и значением целевой функции $Z(X_4) = 50$. На рис. 4.2 это точка $C(6, 2)$.

Итак, с помощью симплекс-метода мы нашли две вершины $B(2, 4)$ и $C(6, 2)$, значение целевой функции в которых одно и то же: $Z(X_3) = Z(X_4) = 50$. Понятно, что целевая функция принимает одно и то же значение во всех точках отрезка BC.

Таким образом, задача имеет *бесконечное множество решений*. Каждое из них представляет собой выпуклую линейную комбинацию решений $X_3 = (2, 4, 0, 0, 6)$ и $X_4 = (6, 2, 0, 8, 0)$. Записываем это в виде

$$X_{\max} = \alpha X_3 + (1-\alpha) X_4, \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

где

$$X_3 = (2, 4, 0, 0, 6), \quad X_4 = (6, 2, 0, 8, 0), \quad Z_{\max} = 50.$$

На практике альтернативные оптимальные решения позволяют сделать выбор среди множества решений (в нашем случае все точки отрезка *BC*) без ухудшения значения целевой функции. Если рассматривать задачу планирования производства двух видов товара, которые соответствуют неизвестным x_1 и x_2, то более выгодно производить два вида товара, а не один, что как раз соответствует нашему случаю.

Итак, $X_{max} = \alpha X_3 + (1 - \alpha)X_4$, $0 \le \alpha \le 1$, $X_3 = (2, 4)$, $X_4 = (6, 2)$, $Z_{max} = 50$.

Пример 4.4 (*неограниченная целевая функция*). Решить симплексным методом следующую задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5 \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 3; \end{cases}$$

$$x_2 \ge 0.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду. Для этого введем дополнительные неизвестные x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 5}.$$

Система линейных уравнений не является разрешенной. Можно вначале найти первое неотрицательное базисное решение, а потом применить симплекс-метод. Сделаем это сразу с помощью симплекс-таблиц.

Таблица 4.16

БП	x_0	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
$Z = x_0$	1	–3	–2	0	0	0	**5**
x_3	0	–1	2	$\boxed{1}$	0	0	8
	0	3	–1	0	–1	0	6
	0	1	0	0	0	–1	3

Вначале не будем обращать внимание на коэффициенты целевой функции: наша цель получить первое неотрицательное базисное решение. Выберем разрешающий элемент во второй строке и в столбце x_1 табл. 4.16, получим табл. 4.17.

Таблица 4.17

БП	x_0	x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	x_4	x_5	b_i
$Z = x_0$	1	0	–3	0	–1	0	**11**
x_3	0	0	5	3	–1	0	30
x_1	0	3	–1	0	–1	0	6
	0	0	**1**	0	1	–3	3

Далее в качестве разрешающего элемента выбираем число 1 на пересечении столбца x_2 и третьей строки. В результате жордановых преобразований приходим к табл. 4.18.

Таблица 4.18

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_5 \downarrow$	b_i
$Z = x_0$	1	0	0	0	2	–9	**20**
$\leftarrow x_3$	0	0	0	1	–2	**5**	5
x_1	0	1	0	0	0	–1	3
x_2	0	0	1	0	1	–3	3

Итак, первое допустимое решение получено: $X_1 = (3, 3, 5, 0, 0)$ с базисом (A_3, A_1, A_2) и значением $Z(X_1) = 20$. На рис. 4.3 этому решению соответствует точка $B(3, 3)$. Будем наращивать переменную x_5 (в оценочной строке при x_5 наименьший отрицательный коэффициент (–9)). Выбираем в качестве разрешающего элемента число 5 (это единственное положительное число в этом столбце).

Таблица 4.19

БП	x_0	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	x_4	x_5	b_i	θ_3
$Z = x_0 \to \min$	5	0	0	9	–8	0	**145**	
$\leftarrow x_5$	0	0	0	**1**	–2	5	5	**5**
x_1	0	5	0	1	–2	0	20	20
x_2	0	0	5	3	–1	0	30	10

Получено новое решение $X_2 = (4, 6, 0, 0, 1)$ с базисом (A_5, A_1, A_2) и значением целевой функции $Z(X_1) = 145/5 = 29$ (табл. 4.19). На рис. 4.3 это точка $C(4, 6)$. Это решение не является оптимальным, можно увеличить значение целевой функции за счет x_4 (отрицательная оценка (–8) переменной x_4). Но все коэффициенты этого столбца отрицательны, а это приводит к недопустимому решению. Вывод: целевая функция не ограничена в направлении переменной x_4, т. е. $Z_{\max} = +\infty$. Кроме того, множество ограничений также не ограничено в направлении возрастания x_4.

Рассмотрим теперь задачу $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + 5 \to \min$ при тех же ограничениях. Строка целевой функции (табл. 4.19) эквивалентна уравнению $Z = x_0 = -9/5x_3 + 8/5x_4 + 29$. Переменная x_3 равна нулю, ее возрастание хотя бы на единицу приводит к уменьшению целевой функции $Z = x_0 \equiv -9/5x_3 + 8/5x_4 + 29$ на 9/5. Среди оценок Z-строки положительная только при x_3, поэтому переменную x_3 вводят в число базисных. Находим $\theta_{03} = \min\{5, 20, 10\} = 5$. Разрешающий элемент выбираем в первой строке: число 1 (выделено рамкой). Используя жордановы преобразования, получим новую таблицу (табл. 4.20).

Таблица 4.20

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	x_5	b_i	θ_4
$Z = x_0$	1	0	0	0	2	–9	**20**	
x_3	0	0	0	1	–2	5	5	—
x_1	0	1	0	0	0	–1	3	—
$\leftarrow x_2$	0	0	1	0	$\boxed{1}$	–3	3	**3**

Получено следующее допустимое решение $X_3 = (3, 3, 5, 0, 0)$ с базисом (A_3, A_1, A_2) и значением $Z(X_3) = 20$. Обратим внимание на то, что значение целевой функции уменьшилось на 9 ед. В строке целевой функции имеется положительный коэффициент 2 при x_4. Единственное положительное число 1 в этом столбце находится в третьей строке, выбираем его в качестве разрешающего элемента и выделяем рамкой. В результате имеем табл. 4.21, в Z-строке которой нет положительных коэффициентов.

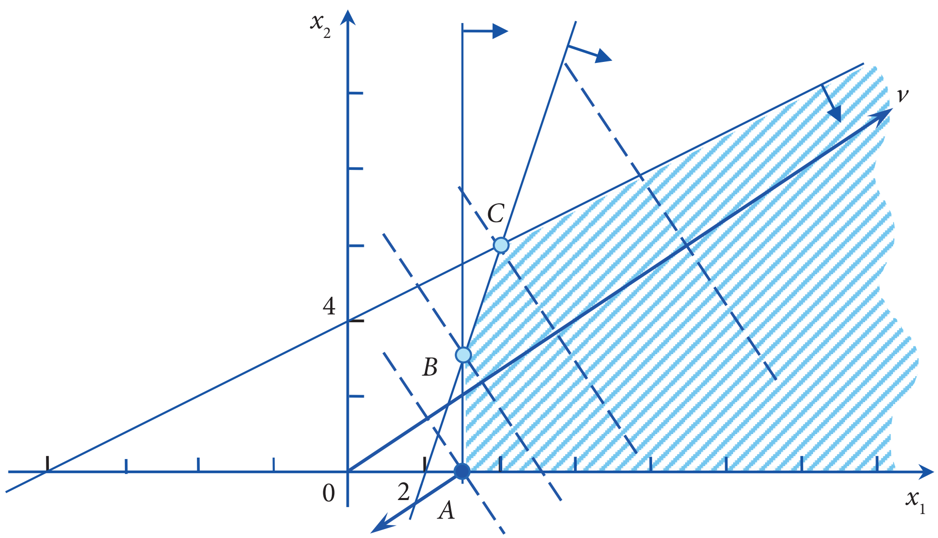


Рис. 4.3. Геометрическая иллюстрация неограниченного решения

Таблица 4.21

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
$Z = x_0$	1	0	–2	0	0	–3	**14**
x_3	0	0	2	$\boxed{1}$	0	–1	11
x_1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	–1	3
x_4	0	0	1	0	$\boxed{1}$	–3	3

Строка целевой функции эквивалентна уравнению $Z = x_0 \equiv 2x_2 + 3x_5 + 14$. В силу неотрицательности переменных верно неравенство

$$x_0 \equiv 2x_2 + 3x_5 + 14 \geq 14.$$

Итак, $X^* = X_{\min} = (3, 0, 11, 3, 0)$, $Z_{\min} = 14$. На рис. 4.3 решению $X^* = (3, 0, 11, 3, 0)$ соответствует точка $A(3, 0)$.

Ответ. $Z_{\min} = 14$ при $X^* = (3, 0)$; $Z_{\max} = +\infty$.

Пример 4.5 (*отсутствие допустимых решений*). Решить симплексным методом следующую задачу линейного программирования:

$$Z(X) = -6x_1 + 3x_2 + 3x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 18, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 \leq -9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 4}.$$

Решение. Приведем задачу линейного программирования к каноническому виду. Для этого введем дополнительные переменные x_5, x_6:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 18, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_6 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 6}.$$

Система линейных уравнений не является разрешенной. Можно вначале найти первое неотрицательное базисное решение, а потом применить симплекс-метод. Сделаем это, как и в предыдущем примере, сразу с помощью симплекс-таблиц. Заметим, что наш выбор определения базисного решения реализуется «легко» при небольшом числе переменных (табл. 4.22). При большом числе переменных это сделать трудно. Далее (п. 4.6) изложен метод искусственных переменных, решающий эту проблему.

Таблица 4.22

БП	x_0	x_1	$x_2\downarrow$	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
$Z=x_0$	1	6	–3	0	–3	0	0	**0**
	0	3	**2**	0	1	–1	0	18
	0	–2	–1	0	–2	0	–1	9
x_3	0	2	–4	2	0	0	0	10

В качестве разрешающего элемента выбираем число 2 на пересечении столбца x_2 и первой строки. В результате жордановых преобразований придем к табл. 4.23.

Таблица 4.23

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
$Z=x_0$	2	21	0	0	–3	–3	0	**54**
x_2	0	3	2	0	1	–1	0	18
	0	–1	0	0	–3	–1	–2	36
x_3	0	8	0	2	2	–2	0	46

Разрешающий элемент выбран в первой строке и в третьей, осталось выбрать во второй, но это невозможно: все коэффициенты при неизвестных второго уравнения отрицательны. То есть в уравнении, соответствующем второй строке:

$$-x_1 - 3x_4 - x_5 - 2x_6 = 36,$$

левая часть неположительна, а правая положительна. Таким образом, ограничения задачи линейного программирования несовместны, т. е. не могут выполняться одновременно. Поэтому задача не имеет допустимых решений.

Ответ. Система ограничений несовместна.

4.6. Метод искусственного базиса

В задачах линейного программирования, где все ограничения являются неравенствами типа « ≤ » (с неотрицательной правой частью), дополнительные переменные позволяют сформировать начальное допустимое базисное решение. В этом случае матрица системы уравнений канонической формы обязательно включает в себя единичную матрицу. И хотя мы уже находили первое базисное решение в задачах с ограничениями в виде равенств или неравенств типа « ≥ », изложим общий способ построения начального допустимого базисного решения задачи линейного программирования с помощью искусственных переменных.

4.6.1. *M*-метод

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме:

$$Z(X) = (c, x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\,(\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0\,(j = \overline{1, n}).$$

Будем считать, что:

1) $r(A) = m < n$, где $\mathrm{A} = (a_{ij})_{m \times n}$,

2) правые части системы ограничений неотрицательны, т. е. $b_i \geq 0$ $(\forall i = \overline{1, m})$.

Допустим, что единичный базис матрицы А *не выделен*. Составим расширенную задачу с использованием *искусственных переменных*, которые вводятся в ограничения-равенства для получения первого допустимого решения с единичным базисом. Каждая искусственная переменная вводится в левую часть одного из уравнений с коэффициентом +1 и в целевую функцию в задаче на максимум с коэффициентом (–*M*), а в задаче на минимум с коэффициентом +*M*. Число *M* считается «большим» ($M \gg 1$). Тем самым новые переменные «штрафуются». «Штраф» составляет произведение числа *M* на сумму искусственных переменных, взятое со знаком «минус», в задаче на максимум, и со знаком «плюс» — в задаче на минимум. Естественно считать, что процесс оптимизации симплекс-метода приведет к нулевому значению новых переменных.

Для определенности рассмотрим задачу на максимум:

$$\tilde{Z}\left(\tilde{X}\right) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - M x_{n+1} - M x_{n+2} - \ldots - M x_{n+m} \to \max, \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m; \end{cases} \quad (4.28)$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n+m}\right); \quad b_i \geq 0\left(i = \overline{1, m}\right). \quad (4.29)$$

Признак оптимальности решения: если расширенная задача линейного программирования (4.27)–(4.29) имеет оптимальное решение $\tilde{X}_0 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, 0, \ldots, 0)$, у которого все искусственные переменные равны нулю, то исходная задача имеет оптимальное решение $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$, которое получается из $\tilde{X}_0$ отбрасыванием нулевых искусственных переменных.

Признак отсутствия решения ввиду несовместности системы ограничений: если расширенная задача имеет оптимальное решение, у которого хотя бы одна искусственная переменная не равна нулю (т. е. существует j^* такое, что $\tilde{x}_{n+j^*} > 0$), то исходная задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Признак отсутствия решения ввиду неограниченности целевой функции: если расширенная задача не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то исходная задача не имеет решения по той же причине.

Алгоритм метода искусственного базиса:

1. Введем новую переменную

$$\tilde{Z} \equiv \tilde{x}_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - M x_{n+1} - M x_{n+2} - \ldots - M x_{n+m}$$

и перепишем это уравнение в виде

$$\tilde{x}_0 - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n x_n + M x_{n+1} + M x_{n+2} + \ldots + M x_{n+m} = 0.$$

2. Строим симплекс-таблицу (табл. 4.24).

Таблица 4.24

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	b_i
M-строка	0	0	0	…	0	M	M	…	M	0
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m

Шаг 1. Методом Гаусса — Жордана получаем нули в M-строке в столбцах с номерами $n + 1, \ldots, n + m$. Для этого последовательно выбираем в качестве разрешающих элементов коэффициенты при $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ (единицы) и далее прибавляем к элементам M-строки элементы всех строк, умноженные на $(-M)$.

При этом вся таблица, кроме верхней строки, не меняется, т. е. пересчитывается только M-строка.

Шаг 2. M — достаточно большое число, поэтому значение оценок зависит от M. Следовательно, в первую очередь, с помощью жордановых преобразований добиваемся того, чтобы в строке целевой функции все элементы были неотрицательными. По мере выведения неизвестных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ из базисных, соответствующие столбцы с искусственными переменными вычеркиваем. После выведения из базиса всех искусственных переменных M-строку, состоящую из нулей, также вычеркиваем.

Шаг 3. Решаем оставшуюся задачу симплекс-методом.

Замечание 1. В предыдущей табл. 4.24 коэффициенты при неизвестных целевой функции занесены в две строки. Это сделано для удобства и простоты вычислений. Можно аналогично для целевой функции использовать одну строку (табл. 4.25).

Таблица 4.25

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	b_i
$\tilde{Z}=\tilde{x}_0$	1	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	M	M	…	M	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m

Замечание 2. Иногда необязательно вводить все m искусственных переменных. Например, в следующем примере вводим четыре дополнительных и две искусственных переменных.

Пример 4.6. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования:

$$Z(X)=-x_1+3x_2\to\min,$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2\ge 6, \\ -x_1+2x_2\le 1, \\ x_1+\ \ x_2\le 5, \\ 3x_1-\ \ x_2\ge 6; \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Решение. Введем дополнительные (Д) и искусственные (И) переменные:

$$\begin{array}{l|c|c} & \text{Д} & \text{И} \\ \left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2\ge 6, \\ -x_1+2x_2\le 1, \\ x_1+\ \ x_2\le 5, \\ 3x_1-\ \ x_2\ge 6; \end{array}\right. & \begin{array}{c} -x_3 \\ +x_4 \\ +x_5 \\ -x_6 \end{array} & \begin{array}{c} +x_7 \\ \\ \\ +x_8 \end{array} \end{array}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Составим расширенную задачу. Так как рассматриваемая задача на минимум, неизвестные x_7 и x_8 вводятся в целевую функцию с коэффициентом $+M$. Имеем:

$$\tilde{Z}(\tilde{X}) = -x_1 + 3x_2 + M\,x_7 + M\,x_8 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_7 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_6 + x_8 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,8}\right).$$

Введем новую переменную $\tilde{x}_0 = -x_1 + 3x_2 + Mx_7 + Mx_8$ и перепишем это уравнение в виде $\tilde{x}_0 + x_1 - 3x_2 - Mx_7 - Mx_8 = 0.$ Рассмотрим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{x}_0 + x_1 - 3x_2 - Mx_7 - Mx_8 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_7 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_6 + x_8 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,8}\right).$$

Наша цель: найти неотрицательное базисное решение этой системы так, чтобы коэффициенты целевой функции при x_7 и x_8 обратились в ноль, кроме того, преобразования должны обеспечить минимум целевой функции. Рассмотрим табл. 4.26.

Таблица 4.26

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
M-строка	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	0
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	1	–3	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	3	–1	0	0	0	1	0	6
x_4	0	–1	2	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	1
x_5	0	1	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	5
	0	3	–1	0	0	0	–1	0	1	6

Прибавим к элементам M-строки элементы первой и четвертой строк ограничений, умноженные на M (табл. 4.27).

Таблица 4.27

БП	$\tilde{x}_0$	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i	θ_1
M-строка	0	$4M$	$2M$	$-M$	0	0	$-M$	0	0	$12M$	
$\tilde{x}_0$	1	1	–3	0	0	0	0	0	0	0	
x_7	0	1	3	–1	0	0	0	1	0	6	6
x_4	0	–1	2	0	1	0	0	0	0	1	—
x_5	0	1	1	0	0	1	0	0	0	5	5
$\leftarrow x_8$	0	**3**	–1	0	0	0	–1	0	1	6	**2**

Теперь таблица готова к применению симплекс-метода с использованием условий оптимальности и неотрицательности переменных. Первое допустимое решение $X_1 = (0, 0, 0, 1, 5, 0, 6, 6)$ с базисом (A_7, A_4, A_5, A_8) и значением целевой функции $Z(X_1) = 12M$ не является оптимальным, так как в M-строке имеются положительные коэффициенты. Наибольший коэффициент $4M$ соответствует переменной x_1, которая и будет разрешающей. Находим $\theta_{01} = \min\{6, 5, 2\} = 2$. Разрешающий элемент выделяем рамкой (табл. 4.27). Новую симплекс-таблицу получаем с помощью жордановых преобразований. Вектор A_8, выводимый из базиса (вводится A_1), исключаем из рассмотрения (вычеркиваем). Получим новое решение $X_2 = (2, 0, 0, 3, 3, 0, 4, 0)$ с базисом (A_7, A_4, A_5, A_1) и значением целевой функции $Z(X_2) = \frac{1}{3}(-6 + 12M)$ (табл. 4.28). Это решение, так же как и предыдущее, не является оптимальным. Выбираем наибольший положительный коэффициент M-строки $10M$ при x_2 и находим $\theta_{02} = \min\{6/5, 9/5, 9/4\} = 6/5$.

Таблица 4.28

БП	x_0	x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i	θ_2
M-строка	0	0	$10M$	$-3M$	0	0	M	0	—	$12M$	
x_0	3	0	–8	0	0	0	1	0	—	–6	
$\leftarrow x_7$	0	0	**10**	–3	0	0	1	3	—	12	**6/5**
x_4	0	0	5	0	3	0	–1	0	—	9	9/5
x_5	0	0	4	0	0	3	1	0	—	9	9/4
x_1	0	3	–1	0	0	0	–1	0	—	6	—

Новый разрешающий элемент число 10. В базис вводится A_2, выводится A_7, поэтому столбец при x_7 исключаем из рассмотрения (вычеркиваем). Также исключаем из рассмотрения целевой функции M-строку. С помощью преобразований Гаусса — Жордана получаем табл. 4.29.

Таблица 4.29

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6 \downarrow$	x_7	b_i	θ_6
$Z = x_0$	5	0	0	–4	0	0	3	—	**6**	
x_2	0	0	10	–3	0	0	1	—	12	12
x_4	0	0	0	5	10	0	–5	—	10	—
$\leftarrow x_5$	0	0	0	2	0	5	**1**	—	7	**7**
x_1	0	10	0	–1	0	0	–3	—	24	—

Получено решение $X_3 = \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1, \frac{7}{5}, 0, 0, 0\right)$ с базисом (A_2, A_4, A_5, A_1) и значением целевой функции $Z(X_3) = \frac{6}{5} = 1{,}2.$

Далее вводим в базис вектор A_6, выводим из базиса A_5. С помощью элементарных преобразований над строками получим решение $X_4 = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{9}{2}, 0, 7\right)$ с базисом (A_2, A_4, A_6, A_1) и значением целевой функции $Z(X_4) = -3$ (табл. 4.30). Полученное решение является *оптимальным решением расширенной задачи*, так как все оценки небазисных переменных отрицательные, что соответствует целевой функции $\tilde{Z}(\tilde{X}) \equiv \tilde{x}_0 = 2x_3 + 3x_5 - 3$. В силу неотрицательности неизвестных $\tilde{x}_0 \geq -3.$ Исходная задача также имеет оптимальное решение, которое получается из оптимального решения расширенной задачи отбрасыванием нулевых искусственных и дополнительных переменных, то есть

$$X^* = X_{\min} = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad Z_{\min} = -3.$$

Таблица 4.30

БП	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
$Z = x_0$	1	0	0	–2	0	–3	0	–3
x_2	0	0	2	–1	0	–1	0	1
x_4	0	0	0	3	2	5	0	9
x_6	0	0	0	2	0	5	1	7
x_1	0	2	0	1	0	3	0	9

Пример 4.7. Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования:

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1,3}.$$

Решение. Введем дополнительные (Д) и искусственные (И) переменные:

$$\begin{array}{l|c|c} & \text{Д} & \text{И} \\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6; \end{cases} & \begin{array}{c} -x_4 \\ \\ +x_5 \end{array} & \begin{array}{c} +x_6 \\ +x_7 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1,7}.$$

Составим расширенную задачу. Так как рассматривается задача на минимум, то неизвестные x_6 и x_7 вводятся в целевую функцию с коэффициентом $+M$. Имеем:

$$\tilde{Z}\left(\tilde{X}\right) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + M\,x_6 + M\,x_7 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} \tilde{o}_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \qquad + x_6 \qquad = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad\qquad\qquad + x_7 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \;\; j = \overline{1,7}$$

Введем $\tilde{x}_0 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + Mx_6 + Mx_7$ и аналогично предыдущему рассмотрим симплексные преобразования без введения дополнительной M-строки (табл. 4.31).

Таблица 4.31

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	–1	–2	–2	0	0	$-M$	$-M$	0
	0	1	1	–4	–1	0	1	0	1
	0	1	–2	2	0	0	0	1	2
x_5	0	1	2	–2	0	1	0	0	6

Прибавим к строке целевой функции первую и вторую строки, умноженные на M (табл. 4.32).

Таблица 4.32

БП	$\tilde{x}_0$	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	θ_1
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	$-1+2M$	$-2-M$	$-2-2M$	$-M$	0	0	0	$3M$	
$\leftarrow x_6$	0	**1**	1	–4	–1	0	1	0	1	**1**
x_7	0	1	–2	2	0	0	0	1	2	2
x_5	0	1	2	–2	0	1	0	0	6	6

Таблица готова к применению симплекс-метода. Разрешающий элемент на пересечении первой строки и столбца x_1. С помощью элементарных преобразований над строками получаем табл. 4.33.

Таблица 4.33

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	θ_3
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	0	$-1-3M$	$-6+6M$	$-1+M$	0	—	0	$1+M$	
x_1	0	1	1	–4	–1	0	—	0	1	
$\leftarrow x_7$	0	0	–3	**6**	1	0	—	1	1	**1/6**
x_5	0	0	1	2	2	1	—	0	5	5/2

Первое допустимое решение $X_1 = (1, 0, 0, 0, 5, 0, 1)$ с базисом (A_1, A_7, A_5) и значением целевой функции $Z(X_1) = 1 + \text{M}$ не является оптимальным, так как в строке целевой функции имеются положительные оценки. Наибольший коэффициент $-6 + 6M$ соответствует переменной x_3, которая и будет разрешающей. Находим $\theta_{03} = \min\{1/6, 5/2\} = 1/6$. Разрешающий элемент выделяем рамкой. Новую симплекс-таблицу (табл. 4.34) получаем с помощью жордановых преобразований.

Таблица 4.34

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	x_5	x_7	b_i	θ_4
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	3	0	–24	0	0	0	—	6	
x_1	0	3	–3	0	–1	0	—	5	
$\leftarrow x_3$	0	0	–3	6	**1**	0	—	1	**1**
x_5	0	0	6	0	5	3	—	14	14/5

Следующее решение $X_2 = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{14}{3}, 0, 0\right)$ с базисом (A_1, A_3, A_5) и значением целевой функции $Z(X_2) = 2$ является оптимальным (среди элементов Z-строки нет положительных). Далее замечаем, что коэффициент целевой функции при x_4 (*небазисная переменная*) равен нулю. Это означает, что мы можем ввести разрешающий элемент в столбце x_4, при этом значение целевой функции не изменится (табл. 4.35).

Таблица 4.35

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	0	–8	0	0	0	2
x_1	0	1	–2	2	0	0	2
x_4	0	0	–3	6	1	0	1
x_5	0	0	7	–10	0	1	3

Итак, получено еще одно оптимальное решение $X_3 = (2, 0, 0, 1, 3, 0, 0)$ с тем же значением целевой функции $Z(X_3) = 2$.

Таким образом, задача имеет бесконечное множество решений. Каждое из них представляет собой выпуклую линейную комбинацию решений $X_2 = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{6}\right)$ и $X_3 = (2, 0, 0)$; записываем это в виде

$$X_{\min} = \alpha X_2 + (1-\alpha) X_3, \quad 0 \le \alpha \le 1, \quad Z_{\min} = 2.$$

Замечание. В ответе отброшены дополнительные и искусственные переменные.

4.6.2. Вырожденность

При решении задач симплекс-методом проверка условия неотрицательности может привести к неоднозначному выбору исключаемой переменной. В этом случае на следующем шаге одна или более базисных переменных принимает нулевое значение. То есть новое решение будет вырожденным. С практической точки зрения *вырожденность* объясняется тем, что в исходной задаче в системе ограничений имеется, по крайней мере, одно или несколько «*избыточных*» ограничений (см. далее пример 4.8). Существуют примеры, показывающие, что при определенном выборе номеров строк и столбцов симплекс-метод может привести к циклическому перебору базисов одной и той же вершины. В таком случае говорят, что происходит *зацикливание* симплекс-процедуры. Существуют правила, предотвращающие зацикливание, однако, замедляющие вычислительный процесс. Простейшее правило (*правило Блэнда*[*]) в задаче вычисления максимального (минимального) значения целевой функции используется

[*] Роберт Гэри Блэнд (род. 25 февраля 1948 г.) — американский математик, профессор в области исследования операций в Корнеллском университете. Правило Блэнда разработано им в Центре исследования операций и эконометрики в Бельгии.

во время итерации симплекс-метода для определения, какой вектор вводится в базис (т. е. вводимое неизвестное) и какая строка (исключаемое неизвестное) выводится из базиса.

Напомним: J — множество индексов (номеров) базисных неизвестных. Для определенности сформулируем теорему для задачи на максимум.

Теорема 4.7 (*правило Блэнда для устранения зацикливания*). Пусть при выполнении условий перехода к новой вершине выбирается «первое подходящее l, а затем первое подходящее r», то есть

$$l = \min\left\{ j \notin J : \Delta_j < 0 \right\},$$

$$r = \min\left\{ k \in J : \alpha_{kl} > 0, \theta_l = \frac{\beta_k}{\alpha_{kl}} \right\},$$

где $\theta_l = \min\limits_{i:\forall a_{il}>0} \left\{ \dfrac{\beta_i}{\alpha_{il}} \right\}$.

Тогда зацикливание симплекс-метода невозможно.

Иначе, алгоритм Блэнда можно описать следующим образом:

1) выбираем небазисный столбец l с наименьшим индексом (т. е. самый левый) с отрицательной оценкой замещения;

2) среди всех строк выбираем ту, для которой достигается минимум отношения (преобразованной) правой части и коэффициента вводимого столбца в таблице при условии, что этот коэффициент больше нуля. Если такой минимум достигается на нескольких строках, выбираем строку, соответствующую вектору (переменной) с наименьшим индексом.

Замечание. В задаче на *минимум* условия $\Delta_j < 0$ $(\tilde{c}_j < 0)$ следует заменить на $\Delta_j > 0$ $(\tilde{c}_j > 0)$.

Пример 4.8 (*вырожденное оптимальное решение*). Решить методом искусственного базиса задачу линейного программирования:

$$Z(X) = 4x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \ge 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0.$$

Решение. Введем дополнительные (Д) и искусственные (И) неизвестные:

$$\begin{array}{l|c|c} & \text{Д} & \text{И} \\ \left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2\le 12, \\ x_1+\ x_2\le\ 9, \\ 2x_1-\ x_2\le 18, \\ x_1+\ x_2\ge\ 2; \end{array}\right. & \begin{array}{c} +x_3 \\ +x_4 \\ +x_5 \\ -x_6 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ +x_7 \end{array} \end{array}$$

$$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,7}.$$

Составим расширенную задачу. Так как рассматриваемая задача на максимум, то x_7 вводится в целевую функцию с коэффициентом $-M$. Имеем:

$$\tilde{Z}(\tilde{X})=4x_1+x_2-Mx_7\to\max,$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=12, \\ x_1+x_2+x_4=9, \\ 2x_1-x_2+x_5=18, \\ x_1+x_2-x_6+x_7=2; \end{cases}$$

$$x_j\ge 0\ \ \left(j=\overline{1,7}\right).$$

Строим симплекс-таблицу (табл. 4.36).

Таблица 4.36

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i
M-строка	0	0	0	0	0	0	0	M	0
$\tilde{Z}=\tilde{x}_0$	1	–4	–1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	1	2	1	0	0	0	0	12
x_4	0	1	1	0	1	0	0	0	9
x_5	0	2	–1	0	0	1	0	0	18
	0	1	1	0	0	0	–1	1	2

Прибавим к элементам M-строки элементы четвертой строки ограничений, умноженные на $(-M)$ (табл. 4.37).

Первое допустимое решение $X_1=(0, 0, 12, 9, 18, 0, 2)$ с базисом (A_3, A_4, A_5, A_7) и значением целевой функции $Z(X_1)=-2M$ не является оптимальным, так как в M-строке имеются отрицательные оценки, равные $(-M)$ и соответствующие неизвестным x_1 и x_2. По правилу Блэнда выбираем в качестве разрешающего столбец x_1 (альтернатива — x_2). Находим $\theta_{01}=\min\{12, 9, 9, 2\}=2$. Разрешающий элемент 1 выделяем рамкой (табл. 4.37). Так как вектор A_7 выводится из базиса, то далее его исключаем (вычеркиваем) из рассмотрения.

Таблица 4.37

БП	$\tilde{x}_0$	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	θ_1
M-строка	0	$-M$	$-M$	0	0	0	M	0	$-2M$	
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	–4	–1	0	0	0	0	0	0	
x_3	0	1	2	1	0	0	0	0	12	12
x_4	0	1	1	0	1	0	0	0	9	9
x_5	0	2	–1	0	0	1	0	0	18	9
$\leftarrow x_7$	0	**1**	1	0	0	0	–1	1	2	**2**

Таблица 4.38

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_6 \downarrow$	b_i	θ_6
M-строка	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	0	–3	0	0	0	–4	8	
x_3	0	0	1	1	0	0	1	10	10
$\leftarrow x_4$	0	0	0	0	1	0	**1**	7	**7**
x_5	0	0	–3	0	0	1	2	14	**7**
x_1	0	1	1	0	0	0	–1	2	—

Вычеркиваем M-строку (так как состоит из нулей) (табл. 4.38). Новое базисное решение $X_2 = (2, 0, 10, 7, 14, 0, 0)$ не является оптимальным. Разрешающий столбец выбираем при неизвестном x_6 (наименьшая отрицательная оценка). Находим $\theta_{06} = \min\{10, 7, 7\} = 7$. Строку выбираем по правилу Блэнда: наименьший номер строки с $\theta_{06} = 7$ второй (альтернатива — третий). Выделяем рамкой разрешающий элемент. С помощью симплексных преобразований получаем табл. 4.39.

Таблица 4.39

БП	$\tilde{x}_0$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
$\tilde{Z} = \tilde{x}_0$	1	0	0	0	4	0	0	36
x_3	0	0	1	1	–1	0	0	3
x_6	0	0	0	0	1	0	1	7
x_5	0	0	–3	0	–2	1	0	0
x_1	0	1	1	0	1	0	0	9

Оценочная строка содержит неотрицательные числа. Допустимое базисное решение $X_3 = (9, 0, 3, 0, 0, 7, 0)$ является оптимальным. Значение $Z(X_3) = 36$. Базисная переменная $x_5 = 0$, поэтому полученное оптимальное решение *вырож-*

денное. Итак, $X^* = X_{\max} = (9, 0, 3, 0, 0, 7)$, $Z_{\max} = 36$. На рис. 4.4 X^* соответствует точка B. Эта точка является точкой пересечения *трех* прямых. Поскольку эта точка на плоскости, то для ее задания достаточно двух прямых, и, следовательно, одно из ограничений «избыточно». На практике определить при большом числе неизвестных «избыточное» ограничение трудно.

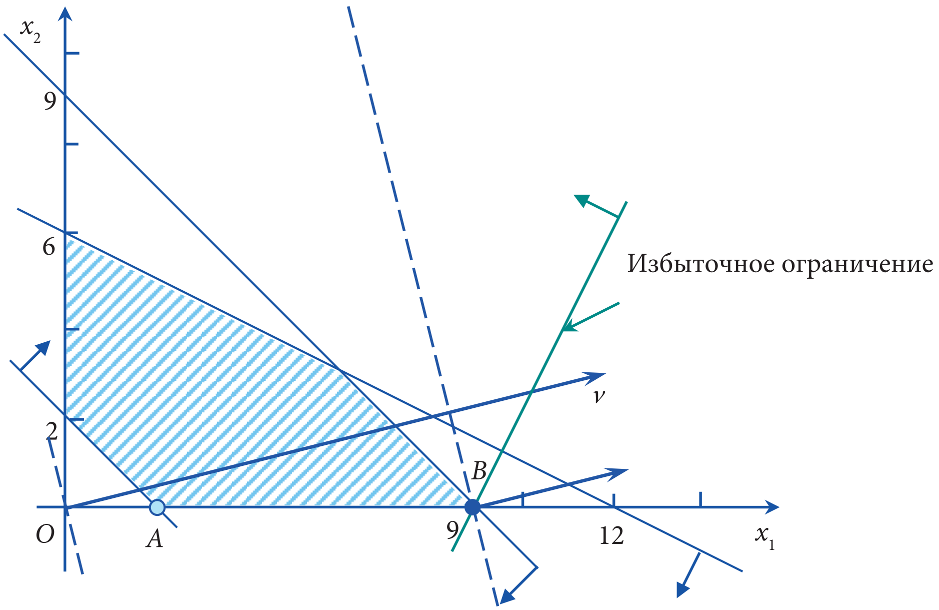


Рис. 4.4. Случай вырожденного оптимального решения

Замечание. При рассмотрении предыдущего примера вырожденное решение появилось на последнем шаге. Однако в процессе симплекс-процедуры обнаруженная вырожденность на каком-то шаге может исчезнуть. Так, изменим коэффициенты целевой функции в примере 4.7, а ограничения оставим прежними:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \ge 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

Из рис. 4.5 видно, что вырожденное решение соответствует точке B, а оптимальное невырожденное — точке C.

Упражнение. Показать путем выполнения симплекс-метода, что сформулированная задача линейного программирования имеет промежуточное вырожденное решение, а оптимальное — невырожденное.

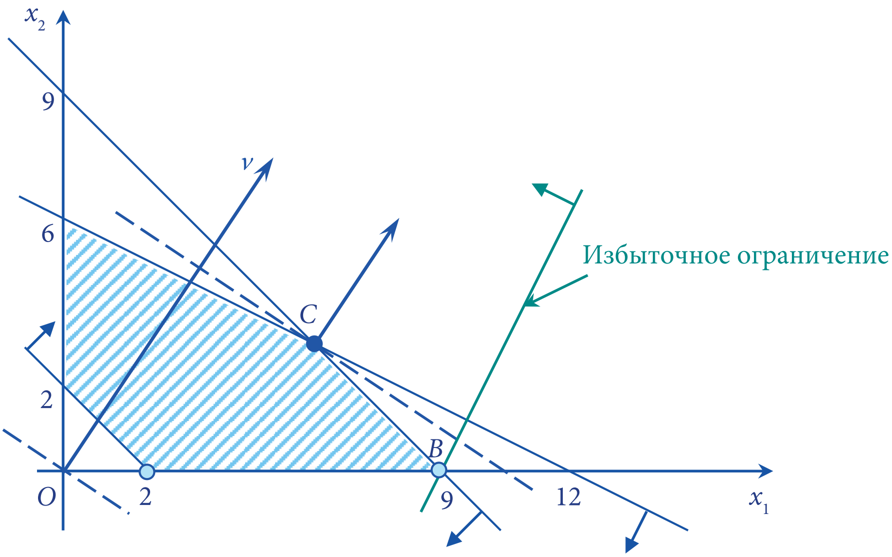


Рис. 4.5. Случай вырожденного промежуточного решения

Задачи для самостоятельного решения

Решить симплекс-методом следующие задачи линейного программирования с приведением геометрической интерпретации решения задач:

4.1. $Z(X) = 5x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 2; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, 2}.$

4.2. $Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 5; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, 2}.$

4.3. $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, 2}.$

Решить симплекс-методом следующие задачи:

4.4. $Z(X) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 5 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 \le 6; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 4}.$

4.5. $Z(X) = -5x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 3}.$

4.6. $Z(X) = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \le 3; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 3}.$

4.7. $Z(X) = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \max(\min),$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 8, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 5; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 3}.$

Решить задачи линейного программирования методом искусственного базиса:

4.8. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \le 5, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 5; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 3}.$

4.9. $Z(X) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 4, \\ -5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 3}.$

4.10. $Z(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, 3}$.

Решить графически и симплексным методом задачи линейного программирования:

4.11. $Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 6; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, 4}$.

4.12. $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 7 \to \max\ (\min)$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, 4}$.

4.13. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудования, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в таблице.

Вид ресурса	Вид товара				Объем ресурсов
	I	II	III	IV	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, ч	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-часы	10	14	8	16	130
Прибыль на ед. товара, ден. ед.	30	24	56	48	max

По этим исходным данным решить следующие задачи:

а) выяснить, какой ассортимент товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной;

б) определить оптимальный ассортимент при дополнительном условии: товара I выпустить не более 7 ед., II — не менее 8 ед., а III и IV — в отношении 1 : 2;

в) определить изменения в оптимальном ассортименте, найденные в случае «а», если ресурсы сырья увеличены на 50 %, а ресурсы рабочей силы и оборудования — на 30 %;

г) определить в оптимальном решении пункта «а», как повлияет на максимальную прибыль увеличение каждого из видов ресурсов на 1 ед.

4.14. Каждое из двух предприятий может производить три вида изделий. В таблице приведены данные о годовой производительности предприятий (тыс. шт.). Определить оптимальное распределение выпуска изделий по предприятиям (т.е. время работы каждого предприятия по производству каждого из изделий) из условия максимизации числа комплектов, в каждый из которых изделия I, II, III входят в соотношении 1 : 2 : 2.

Предприятие	Производительность		
	I	II	III
А	500	200	400
Б	250	300	150

Математическая модель задачи:

$$Z(X) = 2\left(500x_1 + 250x_4\right) \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ 2\left(500x_1 + 250x_4\right) = 200x_2 + 300x_5, \\ 200x_2 + 300x_5 = 400x_3 + 150x_6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Здесь x_j, $j = \overline{1,3}$ — время работы предприятия А по производству j-го изделия; x_j, $j = \overline{4,6}$ — время работы предприятия Б соответственно по производству каждого из изделий I, II, III.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

4.1. $Z_{\max} = 11$ при $X^* = (2, 1)$.

4.2. $Z_{\max} = 16$ при $X^\circ = tX_1^\circ + (1-t)X_2^\circ,\ 0 \leq t \leq 1,\ X_1^\circ = (3; 2), X_2^\circ = (1; 6)$.

4.3. $Z_{\max} = +\infty$.

4.4. $Z_{\max} = 21$ при $X^* = (3, 0, 2, 1)$.

4.5. $Z_{\min} = -18$ при $X^* = (0, 6, 0)$.

4.6. $Z_{\max} = +\infty$.

4.7. $Z_{\max} = 6$ при $X^\circ = \alpha X_1^\circ + (1-\alpha)X_2^\circ,\ 0 \leq \alpha \leq 1,\ X_1^\circ = (3, 0, 0), X_2^\circ = (4, 2, 0)$;

$$Z_{\min} = -\frac{5}{3} \text{ при } X^* = tX_1^* + (1-t)X_2^*,\ 0 \leq t \leq 1,\ X_1^* = \left(0, 0, \frac{5}{3}\right),\ X_2^* = \left(0, \frac{5}{3}, 0\right).$$

4.8. $Z_{\max} = \dfrac{110}{7}$ при $X^* = \left(\dfrac{25}{7}, 0, \dfrac{15}{7}\right)$.

4.9. Система ограничений несовместна.

4.10. $Z_{\min} = 4$ при $X^* = (0, 0, 2)$.

4.11. $Z_{\max} = +\infty$; $Z_{\min} = \dfrac{4}{3}$ при $X^* = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 0, 0\right)$.

4.12. $Z_{\min} = 0$ при $X^\circ = (0, 0, 4, 3)$; $Z_{\max} = 3$ при $X^* = (2, 1, 0, 0)$.

4.13. а) $x_3 = 16{,}25$, $Z_{\max} = 910$; б) $x_2 = 8$, $x_3 = 6{,}45$, $x_4 = 0{,}9$, $Z(X) = 286{,}4$; в) $x_3 = 21{,}25$, $Z(X) = 1183$; г) $x_3 = 16{,}375$, $Z(X) = 917$.

4.14. $X_{\text{опт}} = \left(\dfrac{17}{62}, 0, \dfrac{45}{62}, \dfrac{1}{31}, \dfrac{30}{31}, 0\right)$.

5. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

5.1. Понятие двойственной задачи линейного программирования

Рассмотренные выше задачи линейного программирования были статическими, т. е. их решения определялись из условий, которые были сформулированы в момент формирования модели. В действительности же условия, накладываемые на модель, могут меняться. Например, в случае с производственной задачей может увеличиться запас сырья, если нашли новое место для его хранения и нового поставщика. Вследствие этого необходимо иметь инструментарий, который позволил бы оценить изменение оптимального решения при изменении параметров исходной модели. Таким инструментом является анализ чувствительности, но перед тем как переходить к нему, нам нужно ввести понятие двойственной задачи. Чтобы у читателя не возникало вопросов по поводу целесообразности рассмотрения двойственных задач, вначале на примере обратимся к их экономическому смыслу. Для этого вернемся к модели планирования производства.

Пусть имеется некоторое предприятие, производящее продукцию n видов из m видов сырья. Обозначим через a_{ij} количество i-го ресурса ($i \in 1, \ldots, m$), которое тратится на производство единицы j-го продукта ($j \in 1, \ldots, n$); x_j — количество единиц продукции P_j, запланированной к производству; b_i — запас сырья S_i; a_{ij} — число единиц ресурса S_i, затрачиваемого на изготовление единицы продукции P_j; c_j — доход от реализации единицы продукции P_j.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Тогда экономико-математическая модель задачи об использовании сырья в общей постановке имеет вид:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\
x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,n}.
\end{cases} \tag{5.1}
$$

Помимо величины оптимального выпуска продукции, предприятие интересует рентабельность этого плана и мера дефицитности сырья. Например, если некоторая фирма посчитает нужным закупить сырье вышеуказанного предприятия, то необходимо будет установить оптимальные цены на это сырье. Естественно, что покупающая фирма заинтересована в том, чтобы затраты на сырье были минимальны, но при этом предприятию, продающему сырье, выгодно получить выручку с продажи не менее той, которую предприятие может получить при переработке сырья в готовую продукцию.

Иными словами, требуется оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции, таким образом, чтобы «цены» сырья были не меньше цены единицы продукции данного вида и при этом общие затраты на сырье будут минимальны.

Слово «цены» не случайно взято в кавычки, так как его смысл состоит в том, что это не рыночные цены сырья, а некоторая оценка его стоимости, которую еще называют учетной, теневой ценой, объективно обусловленной оценкой. По своему смыслу они являются оценками потенциальной возможности получения дополнительной прибыли за счет увеличения соответствующего ресурса в условиях оптимального функционирования управляемого экономического объекта. Мы будем придерживаться названия — теневые цены.

Итак, приведем математическую постановку вышеописанной задачи.

Обозначим теневые цены сырья за y_1, y_2, …, y_m, тогда суммарная «стоимость» (оценка затрат на всю продукцию) всего имеющегося сырья составит $b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$. Ее будем минимизировать. При этом есть условие, что доход от продажи сырья был не меньше, чем от реализации продукции, что математически можно записать так:

$$
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge
$$
$$
\ge c_2, \ldots, a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_m.
$$

Тогда, учитывая, что теневые цены не могут быть отрицательны, получаем следующую экономико-математическую модель:

$$
b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min,
$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \\ y_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m. \end{cases} \tag{5.2}$$

Задача (5.1) называется *прямой задачей линейного программирования*, а (5.2) — *двойственной*, а вместе они образуют пару задач, которую называют *двойственной парой* (в некоторой литературе их еще именуют симметричными взаимно двойственными задачами).

Чтобы читатель точно понял экономический смысл этих двух задач, еще раз сформулируем их основные идеи.

Прямая задача: сколько и какой продукции необходимо произвести, чтобы при заданных ценах продукции и фиксированных объемах имеющегося сырья, а также известных нормах его расхода максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении (доход).

Двойственная задача: какой должна быть оценка единицы каждого вида сырья, чтобы при заданных ценах на продукцию, запасах сырья и нормах его расхода минимизировать общую оценку затрат на всю продукцию.

5.2. Правила перехода от прямой задачи к двойственной

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть рассмотрена и решена независимо от другой задачи. С этой целью целесообразно рассмотреть правила составления двойственной задачи, т. е. распространить данное выше определение двойственной задачи для стандартной формы на случай общей задачи линейного программирования.

Стоит отметить, что часто рассматривают формулировки двойственной задачи в зависимости от различных видов прямой задачи, которые определяются типами ограничений, знаками переменных и типом оптимизации, но это не всегда оправдано.

В табл. 5.1 приведены правила перехода от прямой задачи линейного программирования L к двойственной L^*.

Стоит отметить, что построение двойственной задачи зависит от того, какой оптимум в прямой задаче: если максимум, то необходимо пользоваться первыми двумя столбцами перехода, если минимум, то последними двумя.

Таблица 5.1

L	L^*	L	L^*
max	min	min	max
А — матрица коэффициентов при неизвестных в системе ограничений	A^T — матрица коэффициентов при неизвестных в системе ограничений	А — матрица коэффициентов при неизвестных в системе ограничений	A^T — матрица коэффициентов при неизвестных в системе ограничений
m ограничений	m переменных	m ограничений	m переменных
n переменных	n ограничений	n переменных	n ограничений
x — переменная	y — переменная	x — переменная	y — переменная
Коэффициенты целевой функции	Правые части ограничений	Коэффициенты целевой функции	Правые части ограничений
Правые части ограничений	Коэффициенты целевой функции	Правые части ограничений	Коэффициенты целевой функции
Ограничения	Переменная	Ограничения	Переменная
Ограничения типа «≤»	$y \geq 0$	Ограничения типа «≤»	$y \leq 0$
Ограничения типа «≥»	$y \leq 0$	Ограничения типа «≥»	$y \geq 0$
Ограничения типа «=»	y свободная	Ограничения типа «=»	y свободная
$x \geq 0$	Ограничения типа « ≥ »	$x \geq 0$	Ограничения типа «≤»
$x \leq 0$	Ограничения типа « ≤ »	$x \leq 0$	Ограничения типа «≥»
x свободная	Ограничения типа « = »	x свободная	Ограничения типа «=»

Также необходимо четко понять, что в двойственной задаче знаки функциональных ограничений определяются по знакам переменных прямой задачи, а знаки переменных двойственной задачи определяются по знакам функциональных ограничений прямой задачи.

Пример 5.1. Составить двойственную задачу следующей задачи линейного программирования:

$$Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$$

$$L: \begin{cases} -x_1 + 4x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Сразу заметим, что в прямой задаче целевая функция максимизируется, значит, при построении двойственной будем пользоваться первыми двумя столбцами табл. 5.1, и целевая функция будет уже минимизироваться.

Двойственную задачу обозначим L^*. Переменных в ней будет столько, сколько функциональных ограничений в прямой задаче, т. е. две; сами переменные обозначим y_1 и y_2. Для удобства припишем их справа у ограничений прямой задачи следующим образом:

$$\begin{array}{l|l} -x_1 + 4x_3 \ge 1 & y_1, \\ 2x_1 + x_2 = 3 & y_2. \end{array} \tag{5.3}$$

Такая запись позволяет четко определить, что переменной y_1 соответствует первое ограничение прямой задачи, y_2 — второе.

Далее, согласно правилам перехода, числа, стоящие в правых частях ограничений, образуют коэффициенты целевой функции, т. е. получается:

$$y_1 + 3y_2.$$

Затем транспонированная матрица коэффициентов функциональных ограничений прямой задачи будет образовывать матрицу функциональных ограничений двойственной задачи. Стоит заметить, что можно не выписывать эти матрицы, а транспонировать и записывать левые части ограничений двойственной задачи, исходя из (4.3). Записываем коэффициент при x_1 из первого ограничения и умножаем его на y_1, затем аналогично выписываем коэффициент при x_1 из второго ограничения и умножаем его на y_2, подобным образом поступаем с коэффициентами при x_2 и x_3, получаем левые части ограничений двойственной задачи:

$$\begin{array}{l} -y_1 + 2y_2, \\ y_2, \\ 4y_1. \end{array}$$

В правой части ограничений будут располагаться коэффициенты из целевой функции. Таким образом, имеем:

$$\begin{array}{l} -y_1 + 2y_2, \\ y_2, \\ 4y_1. \end{array} \tag{5.4}$$

Теперь определяем знаки между левой и правой частями функциональных ограничений, исходя из знаков переменных прямой задачи. Согласно правилам перехода, знак функционального ограничения будет такой же, как и у соответствующей ему переменной, за исключением свободных переменных. Переменная x_1 неотрицательная, значит, в первом ограничении двойственной задачи имеет место знак « $\geq$ », x_2 не зависит от знака (может быть как положительной, так и отрицательной, и равной нулю), т. е. свободная, следовательно, знак второго ограничения двойственной задачи « $=$ », x_3 неположительная, значит, знак третьего ограничения « $\leq$ ».

Далее знаки переменных двойственной задачи определяем по знакам функциональных ограничений прямой задачи. Первое ограничение прямой задачи имеет знак « $\geq$ », значит, $y_1 \leq 0$, второе ограничение имеет знак « $=$ », значит, y_2 — свободная. Указанные знаки записываем в (5.4).

Все эти рассуждения про определение знаков ограничений и переменных мы провели, опираясь на первые два столбца табл. 5.1.

Таким образом, получаем двойственную задачу к исходной:

$$Z^*(Y) = y_1 + 3y_2 \to \min,$$

$$L^*: \begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ \qquad y_2 = 1, \\ \qquad 4y_1 \leq 1, \\ y_1 \leq 0. \end{cases}$$

Обратите внимание, что целевую функцию двойственной задачи принято обозначать Z^*.

Пример 5.2. Составить двойственную задачу следующей задачи линейного программирования:

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$L: \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \leq 0. \end{cases}$$

Решение. Сразу заметим, что в прямой задаче целевая функция минимизируется, значит, при построении двойственной будем пользоваться последними двумя столбцами табл. 5.1, и целевая функция будет уже максимизироваться.

Двойственную задачу обозначим L^*. Переменных в ней будет столько, сколько функциональных ограничений в прямой задаче, т. е. три; сами переменные обозначим y_1, y_2 и y_3. Для удобства припишем их справа у ограничений прямой задачи следующим образом:

$$\begin{array}{l|l} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 & y_1, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 & y_2, \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 & y_3. \end{array} \tag{5.5}$$

Такая запись позволяет четко определить, что переменной y_1 соответствует первое ограничение прямой задачи, y_2 — второе, y_3 — третье.

Далее, согласно правилам перехода, числа, стоящие в правых частях ограничений, образуют коэффициенты целевой функции, т. е. получается: $y_1 - 6y_2 + 3y_3$.

Затем транспонированная матрица коэффициентов функциональных ограничений прямой задачи будет образовывать матрицу функциональных ограничений двойственной задачи. Аналогично предыдущему примеру не будем выписывать эти матрицы, а будем транспонировать и записывать левые части ограничений двойственной задачи, исходя из (5.5). Записываем коэффициент при x_1 из первого ограничения и умножаем его на y_1, затем аналогично выписываем коэффициент при x_1 из второго ограничения и умножаем его на y_2, также коэффициент при x_1 из третьего ограничения умножаем на y_3. Аналогично поступаем с коэффициентами при x_2 и x_3, получаем левые части ограничений двойственной задачи:

$$\begin{array}{l} -y_1 - 2y_2 + y_3, \\ y_1 - 3y_2 + y_3, \\ y_1 - y_2 - y_3. \end{array}$$

В правой части ограничений будут располагаться коэффициенты из целевой функции. Между левой и правой частями пока оставим пропуск, в который в дальнейшем поместим знаки ограничений. Таким образом, имеем:

$$\begin{array}{r|l} -y_1 - 2y_2 + y_3 & 1, \\ y_1 - 3y_2 + y_3 & 2, \\ y_1 - y_2 - y_3 & 2. \end{array} \tag{5.6}$$

Теперь определяем знаки между левой и правой частями функциональных ограничений исходя из знаков переменных прямой задачи. Согласно правилам перехода, знак функционального ограничения двойственной задачи будет соответствовать противоположному знаку переменной прямой задачи. В этом заключается одно из отличий от предыдущего примера, так как здесь целевая функция минимизируется. Переменная x_1 неотрицательная, значит, в первом ограничении двойственной задачи имеет место знак « $\leq$ », x_2 не зависит от знака, т. е. свободная, следовательно, во втором ограничении имеет место знак « = », x_3 неположительная, значит, знак третьего ограничения « $\geq$ ».

Далее знаки переменных двойственной задачи определяем по знакам функциональных ограничений прямой задачи. Первое ограничение прямой задачи имеет знак « $\geq$ », значит, $y_1 \geq 0$, второе ограничение имеет знак « = », значит, y_2 — свободная. Первое ограничение прямой задачи имеет знак « $\leq$ », значит, $y_3 \leq 0$. Указанные знаки подписываем в (5.6).

Все эти рассуждения про определение знаков ограничений и переменных мы провели, опираясь на табл. 5.1.

Таким образом, получаем двойственную задачу к исходной:

$$Z^*(Y) = y_1 - 6y_2 + 3y_3 \to \max,$$

$$L^*: \begin{cases} -y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1, \\ y_1 - 3y_2 + y_3 = 2, \\ y_1 - y_2 - y_3 \geq 2, \\ y_1 \geq 0, \ y_3 \leq 0. \end{cases}$$

5.3. Теоремы двойственности и их экономический смысл

Вначале мы ввели понятие двойственной задачи исходя из ее экономического смысла, затем поняли, что эта задача может быть рассмотрена как самостоятельная задача, и для этого изучили правила ее построения. Сейчас же рассмотрим, что общего между прямой и двойственной задачами линейного программирования. Оказывается, что эти задачи тесно связаны друг с другом, и установить это удается благодаря так называемым теоремам двойственности.

Для простоты сформулируем эти теоремы для следующих взаимно двойственных задач линейного программирования:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$L: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

и

$$Z^*(Y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min,$$

$$L^*: \begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \geq c_n, \\ y_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m. \end{cases}$$

Теорема 5.1 (*слабая теорема двойственности*). Если $X = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_m)$ — допустимые решения задач L и L^* соответственно, то справедливо следующее неравенство:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \leq b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m,$$

(или так: $Z(X) \leq Z^*(Y)$).

Доказательство. Умножим каждое функциональное ограничение прямой задачи L соответственно на переменные $y_1, y_2, \ldots, y_m$, получим:

$$\begin{cases} \left(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n\right) y_1 \leq b_1 y_1, \\ \left(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n\right) y_2 \leq b_2 y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n\right) y_m \leq b_m y_m. \end{cases}$$

Сложив левые и правые части этих неравенств, получим:

$$\begin{gathered} a_{11} x_1 y_1 + a_{21} x_1 y_2 + \ldots + a_{m1} x_1 y_m + a_{12} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \ldots + a_{m2} x_2 y_m + \ldots + \\ + a_{1n} x_n y_1 + \ + a_{2n} x_n y_2 + \ + \ldots + a_{mn} x_n y_m \leq b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Аналогично преобразовав систему функциональных ограничений двойственной задачи L^* путем умножения обеих частей ее неравенства на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и последующего их сложения, получим:

$$\begin{gathered} a_{11} y_1 x_1 + a_{12} y_1 x_2 + \ldots + a_{1n} y_1 x_n + a_{21} y_2 x_1 + a_{22} y_2 x_2 + \ldots + a_{2n} y_2 x_n + \ldots + \\ + a_{m1} y_m x_1 + a_{m2} y_m x_2 + \ + \ldots + a_{mn} y_m x_n \geq c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Очевидно, что левые части (5.7) и (5.8) совпадают, таким образом, имеем:

$$\begin{gathered} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \leq a_{11} x_1 y_1 + a_{21} x_1 y_2 + \ldots + a_{m1} x_1 y_m + a_{12} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \ldots + \\ + a_{m2} x_2 y_m + \ldots + a_{1n} x_n y_1 + \ + a_{2n} x_n y_2 + \ + \ldots + a_{mn} x_n y_m \leq b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m. \end{gathered}$$

Следовательно, $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \le b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$, что и требовалось доказать.

Следствие (*достаточный признак оптимальности*). Если $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — допустимые решения взаимно двойственных задач, для которых выполняется равенство $Z(\overline{X}) = Z^*(\overline{Y})$, то $\overline{X}$ — оптимальное решение прямой задачи, а $\overline{Y}$ — двойственной задачи.

На основе приведенного следствия из слабой теоремы двойственности можно составить а л г о р и т м, позволяющий проверить, являются ли $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ оптимальными в прямой и двойственной задачах соответственно.

1. Проверить, принадлежит ли $\overline{X}$ множеству допустимых решений прямой задачи; если нет, то данные $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ неоптимальные.

2. Вычислить значение целевой функции прямой задачи в точке $\overline{X}$.

3. Составить двойственную задачу и проверить, принадлежит ли $\overline{Y}$ множеству ее допустимых решений; если нет, то данные $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ неоптимальные.

4. Вычислить значение целевой функции двойственной задачи в точке $\overline{Y}$.

5. Сравнить значения целевых функций прямой и двойственной задач, если совпадают, то данные $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ оптимальны, иначе — неоптимальные.

Пример 5.3. Определить, являются ли $\overline{X} = (1, 0, 2)$ и $\overline{Y} = (1; 0)$ оптимальными в прямой задаче L и двойственной к ней L^* соответственно, если прямая задача имеет следующий вид:

$$Z(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$$

$$L: \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Действуем по вышеописанному алгоритму.

1. Подставим $\overline{X}$ в ограничения прямой задачи L: $5 + 4 = 9$; $3 + 8 = 11$; $1 \ge 0$; $0 \ge 0$; $2 \ge 0$. Все ограничения выполняются, следовательно, переходим к следующему пункту.

2. Вычисляем значение целевой функции прямой задачи в точке $\overline{X}$: $Z(\overline{X}) = 1 + 2 = 3$.

3. Составляем двойственную задачу:

$$Z^*(Y) = 9y_1 + 11y_2 \to \min,$$

$$L^*: \begin{cases} 5y_1 + 3y_2 \ge 1, \\ 12y_1 + 10y_2 \ge 4, \\ 2y_1 + 4y_2 \ge 1. \end{cases}$$

Подставим в ограничения задачи L^* точку $\overline{Y}$: $5 \geq 0$; $12 \geq 0$; $2 \geq 0$. Все ограничения выполняются, следовательно, переходим к следующему пункту.

4. Вычисляем значение целевой функции двойственной задачи в точке $\overline{Y}$: $Z^*(\overline{Y}) = 9$.

5. Сравниваем $Z(\overline{X}) = 3$ и $Z^*(\overline{Y}) = 9$, получаем, что данные $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ не являются оптимальными в паре взаимно двойственных задач.

Теорема 5.2 (*сильная теорема двойственности*). Для взаимно двойственных задач имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1. В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают. Иными словами, если $\overline{X}$ — оптимальное решение прямой задачи, а $\overline{Y}$ — оптимальное решение двойственной, то $Z(\overline{X}) = Z^*(\overline{Y})$.

2. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.

3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.

4. Обе задачи имеют пустые допустимые множества.

Данную теорему примем без доказательства.

Заметим, что некоторые авторы называют приведенную теорему «первой теоремой двойственности».

Читателю стоит запомнить, что из сильной теоремы двойственности непосредственно следует, что если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, при этом оптимальные значения целевых функций совпадают.

Приведем *экономический смысл* сильной теоремы двойственности. План производства X и набор теневых цен Y оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда доход от продукции, найденный при «внешних» (известных заранее) ценах, равен затратам на сырье по внутренним (определяемым только из решения задачи) теневым ценам. Для всех же других планов обеих задач доход от продукции всегда меньше или равен затратам на сырье.

Экономическое содержание сильной теоремы двойственности состоит также и в следующем: если задача определения оптимального плана, максимизирующего выпуск продукции в стоимостном выражении, разрешима, то разрешима и задача определения теневых цен сырья. Причем цена продукта, полученного в результате реализации оптимального плана, совпадает с суммарной оценкой ресурсов. Совпадение значений целевых функций для соответствующих решений пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти решения были оптимальны.

Теневые цены выступают как инструмент балансирования затрат и результатов. Они гарантируют рентабельность оптимального плана, т. е. равенство общей оценки продукции и ресурсов обусловливает убыточность всякого другого плана, отличного от оптимального. Теневые цены позволяют сопоставлять и балансировать затраты и результаты системы.

Теорема 5.3 (*о дополняющей нежесткости*). Пусть $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ — допустимое решение прямой задачи, а $\overline{Y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_m)$ — допустимое решение двойственной задачи. Для того чтобы они были оптимальными решениями соответственно прямой и двойственной задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения, называемые *условиями дополняющей нежесткости* (или *условиями оптимальности*):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \overline{y}_1(a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + \ldots + a_{1n}\overline{x}_n - b_1) = 0, \\ \overline{y}_2(a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + \ldots + a_{2n}\overline{x}_n - b_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{y}_m(a_{m1}\overline{x}_1 + a_{m2}\overline{x}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{x}_n - b_m) = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \overline{x}_1(a_{11}\overline{y}_1 + a_{21}\overline{y}_2 + \ldots + a_{m1}\overline{y}_m - c_1) = 0, \\ \overline{x}_2(a_{12}\overline{y}_1 + a_{22}\overline{y}_2 + \ldots + a_{m2}\overline{y}_m - c_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{x}_n(a_{1n}\overline{y}_1 + a_{2n}\overline{y}_2 + \ldots + a_{mn}\overline{y}_m - c_n) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Условия дополняющей нежесткости позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимно двойственных задач, найти оптимальное решение другой.

Пример 5.4. Дана задача линейного программирования:

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$L: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_2 \leq 4, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2. \end{cases}$$

Известно ее решение: $\overline{x}_1 = 3$, $\overline{x}_2 = 4$, $\overline{Z} = 18$. Требуется составить двойственную задачу и с помощью условий дополняющей нежесткости найти ее решение.

Решение. Так как прямая задача на максимум, то при составлении двойственной пользуемся первыми двумя столбцами таблицы с правилами перехода, получим:

$$2y_1 + 2y_2 + 10y_3 + 4y_4 + 2y_5 \to \min,$$

$$L:\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_5 = 2, \\ y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3, \\ y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ y_5 \ge 0. \end{cases}$$

Теперь составим условия дополняющей нежесткости:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \overline{y}_1(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 - 2) = 0, \\ \overline{y}_2(\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - 2) = 0, \\ \overline{y}_3(2\overline{x}_1 + \overline{x}_2 - 10) = 0, \\ \overline{y}_4(\overline{x}_2 - 4) = 0, \\ \overline{y}_5(-2\overline{x}_1 + \overline{x}_2 - 2) = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \overline{y}_1(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + 2\overline{x}_3 - 2\overline{x}_5 - 2) = 0, \\ y_2(\overline{x}_1 - \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4 + \overline{x}_5 - 3) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставляя в условия известные $\overline{x}_1 = 3,\ \overline{x}_2 = 4$, получим:

$$\overline{y}_1 \cdot \left(6 + 4 - 2\right) = 0 \to \overline{y}_1 = 0,$$

$$\overline{y}_2 \cdot \left(3 - 4 - 2\right) = 0 \to \overline{y}_2 = 0,$$

$$\overline{y}_3 \cdot \left(6 + 4 - 10\right) = 0 \to \overline{y}_3 \text{ — любое},$$

$$\overline{y}_4 \cdot \left(4 - 4\right) = 0 \to \overline{y}_4 \text{ — любое},$$

$$\overline{y}_5 \cdot \left(-6 + 4 - 2\right) = 0 \to \overline{y}_5 = 0.$$

$$\begin{cases} 2\overline{y}_3 - 2 = 0 \\ \overline{y}_3 + \overline{y}_4 - 3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \overline{y}_3 = 1 \\ \overline{y}_4 = 2 \end{cases} \quad \overline{Z}^* = \overline{Z} = 18.$$

Ответ: $\overline{y}_1 = 0,\ \overline{y}_2 = 0,\ \overline{y}_3 = 1,\ \overline{y}_4 = 2,\ \overline{y}_5 = 0,\ \overline{Z}^* = 18.$

Приведем а л г о р и т м, позволяющий определить с помощью условий дополняющей нежесткости, будет ли некоторый X оптимальным решением задачи L.

1. Проверить, принадлежит ли данный X допустимому множеству прямой задачи L. Если не принадлежит, то X не является оптимальным решением.

2. Написать ограничения двойственной задачи L^*.

3. Составить условие дополняющей нежесткости и подставить в них данный X.

4. Решить систему, образованную условием дополняющей нежесткости, и найти ее решение, которое обозначим Y. Если система не имеет решений, то X не является оптимальным решением.

5. Проверить, что найденный Y принадлежит допустимому множеству двойственной задачи L^*. Если не принадлежит, то X не является оптимальным решением, в противном случае, является.

Покажем работу данного алгоритма на следующем примере.

Пример 5.5. Проверить, является ли $X = (1;\ 0;\ 1;\ 0)$ оптимальным в задаче:

$$Z(X) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max,$$

$$L\colon \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \ge -4, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \ge 0, \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решение. Действуем по описанному выше алгоритму.

1. Проверим, является ли X планом данной задачи (т. е. подставим X в ограничения):

$$3 - 0 + 0 \le 15,$$

$$1 + 0 - 1 + 0 \ge -4,$$

$$0 + 3 - 0 \ge 0,$$

$$1 \ge 0,\ 0 \ge 0,\ 1 \ge 0,\ 0 \ge 0.$$

Все неравенства верные, следовательно, X принадлежит допустимому множеству задачи L.

2. Составим ограничения L^*:

$$3y_1 - y_2 \ge 2,$$

$$-y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge -1,$$

$$-y_1 + 3y_3 \ge 4,$$

$$2y_1 - 2y_2 - y_3 \ge -6,$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \le 0.$$

3. Запишем условия оптимальности с подстановкой X:

$$\begin{cases} \overline{y}_1\left(3-15\right)=0, \\ \overline{y}_2\left(-1+4\right)=0, \\ \overline{y}_3\left(3-0\right)=0, \\ 1\cdot\left(3\overline{y}_1-\overline{y}_2-2\right)=0, \\ 0\cdot\left(-\overline{y}_1+2\overline{y}_2+3\overline{y}_3+1\right)=0, \\ 1\cdot\left(-\overline{y}_2+3\overline{y}_3-4\right)=0, \\ 0\cdot\left(2\overline{y}_1-2\overline{y}_2-\overline{y}_3+6\right)=0. \end{cases}$$

4. Получим систему:

$$\begin{cases} -12\overline{y}_1=0\rightarrow\overline{y}_1=0, \\ 5\overline{y}_2=0\rightarrow\overline{y}_2=0, \\ 3\overline{y}_3=0\rightarrow\overline{y}_3=0, \\ 3\overline{y}_1-\overline{y}_2-2=0, \\ -\overline{y}_2+3\overline{y}_3-4=0. \end{cases}$$

Заметим, что система несовместна, следовательно, данный X неоптимален.

Стоит также отметить, что условия дополняющей нежесткости имеют несколько важных следствий. Приведем их в следующем утверждении.

Теорема 5.4 (*вторая теорема двойственности*).

1. Если некоторое из решений $\overline{y}_i$ двойственной задачи положительно, то $a_{i1}\overline{x}_1+a_{i2}\overline{x}_2+\ldots+a_{im}\overline{x}_n=b_i$.

2. Если $a_{i1}\overline{x}_1+a_{i2}\overline{x}_2+\ldots+a_{im}\overline{x}_n<b_i$, то $\overline{y}_i=0$.

3. Если $\overline{x}_j>0$, то $a_{1j}\overline{y}_1+a_{2j}\overline{y}_2+\ldots+a_{mj}\overline{y}_m=c_j$.

4. Если $a_{1j}\overline{y}_1+a_{2j}\overline{y}_2+\ldots+a_{mj}\overline{y}_m>c_j$, то $\overline{x}_j=0$.

Приведем *экономическую интерпретацию условий* предыдущей теоремы.

Условие 1 говорит о том, что если теневая цена положительна, то по оптимальному плану соответствующий этой цене ресурс используется полностью, т. е., иными словами, является дефицитным.

Условие 2 показывает, что если согласно оптимальному плану некоторое сырье используется не полностью, то соответствующая теневая цена этого сырья равна нулю.

Условие 3 гласит: если при работе по оптимальному плану некоторая технология (вид продукции) вовлекается в производство, то в оптимальных теневых ценах эта технология неубыточна.

Условие 4 интерпретируется так: если в оптимальных теневых ценах некоторая технология (продукция) убыточна, то в оптимальном плане она не используется, т. е. данная продукция не производится.

Теперь покажем применение всех теорем двойственности на конкретной задаче.

Пример 5.6. В табл. 5.2 заданы суточные затраты сырья на изготовление некоторой продукции, а также суточные запасы сырья и цены, по которым планируется реализация изготовленной продукции.

Таблица 5.2

Вид сырья	Затраты сырья на изготовление единицы продукции, кг			Запасы сырья, кг
	А	Б	В	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Цена единицы продукции, руб.	10	14	12	

Требуется определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции таким образом, чтобы теневые цены используемого сырья были минимальны, а суммарная оценка сырья была не меньше цены единицы продукции данного вида.

Решение. Перед нами задача на планирование производства. Введем следующие обозначения:

x_j — планируемое количество продукции j-го вида, $j = 1, 2, 3$;

y_i — теневая цена сырья i-го вида, $i = 1, 2, 3$.

Тогда, исходя из того, что доход от реализации продукции должен быть максимальным, но при этом затраты сырья не должны превышать данных фиксированных затрат, имеем:

$$Z(X) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max,$$

$$L: \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Учитывая второе условие задачи, что суммарная оценка всего имеющегося сырья была минимальна и при этом доход от продажи сырья был не меньше, чем от реализации продукции, имеем:

$$Z^*(Y) = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min,$$

$$L^*: \begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили две взаимно двойственные задачи. Решим задачу L симплекс-методом. Для этого вначале необходимо перевести эту задачу в каноническую форму, введя дополнительные переменные: x_4, x_5, x_6 — излишки сырья I, II и III вида соответственно. Следовательно, каноническая форма задачи L будет иметь следующий вид:

$$Z(X) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 244, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Теперь эту задачу можно решить симплекс-методом, что предлагаем читателям сделать самостоятельно. В результате конечная симплекс-таблица будет иметь вид (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Z	14,25	0	0	5,75	0	1,25	1 340
x_2	2,375	1	0	0,625	0	–0,125	82
x_5	2,875	0	0	0,125	1	–0,625	80
x_3	–0,75	0	1	–0,25	0	0,25	16

Из таблицы находим решение прямой задачи L: $\overline{Z} = 1\,340$, $\overline{x}_1 = 0$, $\overline{x}_2 = 82$, $\overline{x}_3 = 16$, $\overline{x}_4 = 0$, $\overline{x}_5 = 80$, $\overline{x}_6 = 0$. Исходя из этих значений, понимаем, что для того, чтобы получить максимально возможный суточный доход в размере 1 340 руб., необходимо изготовить 82 ед. изделия Б и 16 ед. изделия В, а изделие А не производить. При данном плане производства остаются неиспользованными 80 кг сырья II вида.

Теперь найдем решение двойственной задачи L^*. Согласно сильной теореме двойственности $\overline{Z}^* = \overline{Z} = 1\,340$. Исходя из второй теоремы двойственности, так как при данном плане имеются излишки сырья II вида, теневая цена y_2 этого сырья будет равна нулю, а теневые цены сырья I и III видов располагаются в симплекс-таблице в Z-строке в столбцах x_4 и x_6 соответственно, т. е. $y_1 = 5{,}75$ и $y_3 = 1{,}75$. Таким образом, увеличение количества сырья I вида на один килограмм приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства продукции, при котором общая стоимость продукции возрастет на 5,75 руб. и станет 1 345,75 руб.

При этом числа, стоящие в столбце x_4 под Z-строкой, показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготовляемой продукции может быть достигнуто за счет увеличения выпуска продукции Б на 0,625 ед. и сокращения выпуска продукции В на 0,25 ед. Вследствие чего использование сырья II вида уменьшится на 0,125 кг.

Аналогично можно сделать вывод и об увеличении общей стоимости продукции за счет увеличения сырья III вида, воспользовавшись данными из столбца x_6.

Далее подставим получившиеся теневые цены в функциональные ограничения двойственной задачи, получим: $23 + 1{,}25 > 10$; $11{,}5 + 2{,}5 = 14$; $5{,}75 + 6{,}25 = 12$. В первом ограничении оценка сырья выше цены изделия А, следовательно, выпуск невыгоден, поэтому и производство продукции А не предусмотрено оптимальным планом.

Стоит отметить, что, помимо экономических приложений, теоремы двойственности в некоторых случаях позволяют решить задачу линейного программирования, не прибегая к методу искусственного базиса или M-методу. Например, если в некоторой задаче в канонической форме система функциональных уравнений не имеет единичной подматрицы, то симплекс-метод неприменим и нужно прибегать к более сложным методам. В этом случае можно составить двойственную задачу к исходной, и если ее возможно решить симплекс-методом, то решаем ее и из симплекс-таблицы находим решение прямой задачи.

Метод, в котором используется вышеописанный подход, называется *двойственным симплекс-методом*.

Пример 5.7. Найти решение следующей задачи линейного программирования:

$$Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min,$$

$$L: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 \geq 3, \\ x_i \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решение. Приведем данную задачу в канонический вид, введя две дополнительные переменные:

$$Z(X) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 - x_6 = 3, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Единичной подматрицы у системы ограничений нет, поэтому простой симплекс-метод неприменим. Составим двойственную задачу к исходной:

$$y_1 + 3y_2 \to \max,$$

$$L^*: \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 1, \\ 2y_1 + 3y_2 \leq 4, \\ 5y_1 + 6y_2 \leq 3, \\ y_1 - 2y_2 \leq 2, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Введем дополнительные переменные и составим каноническую форму двойственной задачи:

$$y_1 + 3y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = 1, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_4 = 4, \\ 5y_1 + 6y_2 + y_5 = 3, \\ y_1 - 2y_2 + y_6 = 2, \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Предлагаем читателю самостоятельно решить полученную задачу симплекс-методом и убедиться, что на последнем шаге симплекс-таблица будет выглядеть следующим образом (табл. 5.4).

Таблица 5.4

Z^*	1/2	0	3/2	0	0	0	3/2
y_2	1/2	1	1/2	0	0	0	1/2
y_4	1/2	0	–3/2	0	0	0	5/2
y_5	0	2	0	0	1	1	0
y_6	3	2	0	0	0	0	3

Из симплексной таблицы находим решение двойственной задачи: $\overline{y}_1 = 0$; $\overline{y}_2 = 0{,}5$; $\overline{Z}^* = 1{,}5$, а по сильной теореме двойственности $\overline{Z} = \overline{Z}^* = 1{,}5$. Оптимальные значения переменных в двойственной задаче находим в Z-строке в столбцах y_3, y_4, y_5, y_6: $\bar{x}_1 = 1{,}5$; $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \bar{x}_4 = 0$.

5.4. Анализ чувствительности задачи линейного программирования

Как было сказано выше, задача линейного программирования зависит от условий, которые задаются при составлении модели. При этом с течением времени эти условия могут поменяться, что может привести к недопустимости текущего оптимального решения. Например, подобная ситуация возможна при изменении правых частей ограничений или введением в множество ограничений задачи нового ограничения. В связи с этим очень важно исследовать влияние изменения доступности ресурсов (запасов сырья), что возможно сделать при помощи определения интервалов допустимости для правых частей ограничений. В этом нам поможет следующее утверждение.

Теорема 5.5 (*об оценках*). Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны значениям частных производных линейной функции $\bar{Z}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ по соответствующим аргументам, то есть:

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial b_i} = \bar{y}_i, \; i = \overline{1, m}.$$

Равенство в теореме об оценках означает, что изменение значений, стоящих в правых частях ограничений, приводит к увеличению или уменьшению оптимального значения целевой функции. Это изменение определяется величиной $|\bar{y}_i|$ и может быть охарактеризовано лишь тогда, когда при изменении величин b_i значения переменных $\bar{y}_i$ в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи остаются неизменными. Поэтому представляет интерес определить такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы ограничений задачи линейного программирования, в которых оптимальный план двойственной задачи не меняется.

Пример 5.8. Для следующей задачи из модели планирования производства

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$L: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

найти интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям запасов сырья каждого вида.

Решение. Предположим, что запасы сырья, равные первоначально 18, 16, 5 и 21 ед., изменились на величины Δb_1, $\Delta\, b_2$, $\Delta\, b_3$, $\Delta\, b_4$ соответственно. Составим двойственную задачу к исходной:

$$Z^*(Y) = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} y_1 + 2x_2 + 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 3, \\ y_i \ge 0,\, i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Тогда затраты на сырье составят:

$$Z^* = (18 + \Delta b_1)y_1 + (16 + \Delta b_2)y_2 + (5 + \Delta b_3)y_3 + (21 + \Delta b_4)y_4.$$

Заменяя переменные y_1 и y_2 их выражениями через небазисные переменные оптимального решения, имеем:

$$y_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}y_3 + \frac{3}{5}y_4 - \frac{1}{5}y_5 + \frac{2}{5}y_6,$$

$$y_2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}y_3 - \frac{9}{5}y_4 + \frac{3}{5}y_5 - \frac{1}{5}y_6.$$

После преобразований получим:

$$Z = \left(24 + \frac{4}{5}\Delta b_1 + \frac{3}{5}\Delta b_2\right) + \left(1 - \frac{2}{5}\Delta b_1 + \frac{1}{5}\Delta b_2 + \Delta b_3\right)y_3 +$$
$$+\left(3 + \frac{3}{5}\Delta b_1 - \frac{9}{5}\Delta b_2 + \Delta b_4\right)y_4 + \left(6 - \frac{1}{5}\Delta b_1 + \frac{3}{5}\Delta b_2\right)y_5 + \left(4 + \frac{2}{5}\Delta b_1 - \frac{1}{5}\Delta b_2\right)y_6.$$

Для того чтобы оптимальные теневые цены сырья остались неизменными и при изменении запасов сырья, достаточно, чтобы коэффициенты при небазисных переменных оставались неотрицательными, то есть:

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{5}\Delta b_1 + \frac{1}{5}\Delta b_2 + \Delta b_3 \ge 0, \\ 3 + \frac{3}{5}\Delta b_1 - \frac{9}{5}\Delta b_2 + \Delta b_4 \ge 0, \\ 6 - \frac{1}{5}\Delta b_1 + \frac{3}{5}\Delta b_2 \ge 0, \\ 4 + \frac{2}{5}\Delta b_1 - \frac{1}{5}\Delta b_2 \ge 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Предположим, что изменяется только запас первого вида сырья, а остальные остаются неизменными: $\Delta b_2 = \Delta b_3 = \Delta b_4 = 0$. Тогда вышеприведенная система примет вид:

$$\begin{cases} 1 - 0,4\Delta b_1 \geq 0, \\ 3 + 0,6\Delta b_1 \geq 0, \\ 6 - 0,2\Delta b_1 \geq 0, \\ 4 + 0,4\Delta b_1 \geq 0. \end{cases}$$

Преобразовав, имеем:

$$\begin{cases} \Delta b_1 \leq 2,5, \\ \Delta b_1 \geq -5, \\ \Delta b_1 \leq 30, \\ \Delta b_1 \geq -10. \end{cases}$$

Откуда получаем следующие ограничения:

$$-5 \leq \Delta b_1 \leq 2,5 \text{ и } 18 - 5 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 18 + 2,5 \text{ или } 13 \leq b_1 + \Delta b_1 \leq 20,5.$$

Иными словами, при неизменности теневых цен сырья запас сырья первого вида может изменяться в пределах от 13 до 20,5 ед. Аналогично можно получить, что

$$11 \leq b_2 + \Delta b_2 \leq 17\frac{2}{3},\ 4 \leq b_3 + \Delta b_3 < +\infty,\ 18 \leq b_4 + \Delta b_4 < +\infty.$$

Таким образом, при изменении запаса только одного первого вида сырья в пределах от 13 до 20,5 ед., или только второго вида в пределах от 11 до 17 ⅔ ед., или только третьего вида в пределах не менее 4 ед., или четвертого — в пределах не менее 18 ед. оптимальное решение двойственной задачи остается прежним.

Стоит отметить, что если запасы сырья изменяются одновременно, то исследование устойчивости теневых цен усложняется, поскольку в данном случае нужно найти решение системы неравенств (5.9). При этом всегда можно проверить, удовлетворяют ли конкретные изменения запасов ресурсов системе (5.9).

Заметим, что решить задачу линейного программирования и проанализировать полученные оптимальные решения возможно в программе Microsoft Excel, используя надстройку «поиск решения», но заменить человека полностью не получится, так как экономическую интерпретацию решения может сделать только человек. Как правило, полученное решение и его анализ оформляются также человеком, им же делаются выводы и приводятся рекомендации. В больших компаниях решением подобного рода задач занимается много отделов: статистический, планирования, IT и т. п.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Для данной задачи линейного программирования составить двойственную задачу и решить обе графически.

$$Z(X) = 2x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2.$$

5.2. Решить данную задачу графически. Составить для нее двойственную задачу и найти ее решение, используя условия дополняющей нежесткости.

$$Z(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 5x_1 \le 20, \\ 4x_2 \le 16; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2.$$

5.3. Решить данную задачу симплексным методом. Составить для нее двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

$$Z(X) = 2x_1 + 8x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_2 \le 5, \\ 2x_1 \le 10; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2.$$

5.4. Для данной задачи составить двойственную задачу и решить ее симплексным методом. Используя теоремы двойственности, получить решение исходной задачи.

$$Z(X) = 5x_1 + 3x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 17, \\ x_1 \quad + 2x_2 \leq 34, \\ -4x_1 + 9x_2 = 17; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

5.5. Решить данную задачу симплексным методом. Составить для нее двойственную задачу и найти ее решение, используя теоремы двойственности.

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \quad = 1, \\ \quad 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, 4.$$

5.6. Для данной задачи составить двойственную задачу и проверить оптимальность заданных векторов для этих задач.

$$Z(X) = x_1 + 10x_2 + 8x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}.$$

$$X^* = (1, 0, 1), \quad Y^* = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right).$$

5.7. Для данной задачи составить двойственную задачу. Решить одну из них и получить решение второй, используя теоремы двойственности.

$$Z(X) = 12x_1 + x_2 - 12x_3 + x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 \qquad + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}.$$

5.8. Для данной задачи составить двойственную задачу. Решить одну из них и получить решение второй, используя теоремы двойственности.

$$Z(X) = 10x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 12x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

5.9. Для производства настольных ламп и светильников используют сырье четырех видов. Запас материалов, технологические коэффициенты и прибыль от продажи одной лампы и одного светильника заданы в таблице.

Вид материала	Вид товара		Объем ресурсов
	Лампа	Светильник	
Металл	0	4	120
Пластик	4	0	180
Стекло	2	2	120
Латунь	1	2	80
Прибыль на ед. товара, ден. ед.	200	300	max

Решить следующие задачи:

а) найти план выпуска изделий, при котором прибыль от реализации изделий будет максимальной;

б) определить цены, по которым выгодно продать сырье, чтобы при этом получить выручку не меньше, чем от реализации готовых изделий.

5.10. Для изготовления четырех видов продукции используется три вида сырья. Расход сырья на единицу каждого вида продукции и запас сырья заданы в таблице.

Вид сырья	Вид продукции				Объем ресурсов
	I	II	III	IV	
S_1	1	0	2	1	180
S_2	0	1	3	2	210
S_3	4	2	0	4	800
Прибыль на ед. товара, ден. ед.	9	6	4	7	max

Решить следующие задачи:

а) найти план выпуска изделий, при котором прибыль от реализации продукции будет максимальной;

б) определить цены, по которым выгодно продать сырье, чтобы при этом получить выручку не меньше, чем от реализации готовых изделий;

в) как изменится общая стоимость изготовляемой продукции, определенной оптимальным планом при уменьшении сырья S_1 на 60 ед., увеличении сырья S_2 на 120 ед. и увеличении сырья S_3 на 160 ед.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

5.1. $Z_{\max} = Z^*_{\min} = 46$ при $X^* = (2, 6)$, $Y^* = (1, 4)$.

5.2. $Z_{\max} = Z^*_{\min} = 25$ при $X^* = (3, 4)$, $Y^* = \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{5}{8}\right)$.

5.3. $Z_{\max} = Z^*_{\min} = 44$ при $X^* = (2, 5)$, $Y^* = (0, 2, 4, 0)$.

5.4. $Z_{\max} = Z^*_{\min} = 50$ при $X^* = (7, 5)$, $Y^* = \left(\frac{57}{34}, 0, \frac{43}{34}\right)$.

5.5. $Z_{\max} = Z^*_{\min} = \frac{5}{2}$ при $X^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $Y^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

5.6. Решения оптимальные, $Z_{\max} = Z^*_{\min} = 9$.

5.7. $Z_{\max} = Z^*_{\min} = 10$ при $X^* = \left(\frac{2}{3}, 2, 0, 0\right)$, $Y^* = (3, 1)$.

5.8. $Z_{\max} = Z^*_{\min} = 15$ при $X^* = \left(0, 0, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$, $Y^* = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$.

5.9. а) $x_1 = 40$, $x_2 = 20$, $Z_{\max} = 14\,000$ (ден. ед.);

б) $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = \frac{1}{2}$, $y_4 = 1$, $Z^*_{\min} = 14\,000$ (ден. ед.).

5.10. а) $x_1 = 95$, $x_2 = 210$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $Z_{\max} = 2\,115$ (ден. ед.);

б) $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{3}{2}$, $y_3 = \frac{9}{4}$, $Z^*_{\min} = 2\,115$ (ден. ед.);

в) указанное изменение запасов ресурсов приведет к построению нового оптимального плана производства, при котором прибыль увеличится на 540 (ден. ед.).

6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

6.1. Постановка модели транспортной задачи

Транспортной задачей называется разновидность задач линейного программирования. Она была сформулирована с целью разработки наиболее рациональных способов транспортирования товаров, устранения повторных, неоптимальных, чрезмерно дальних перевозок, а также с целью определения объемов перевозок с минимальной суммарной стоимостью. При этом должны учитываться ограничения, накладываемые на объемы грузов, имеющихся в пункте отправления (предложение), и ограничения, учитывающие потребность грузов в пунктах назначения (спрос). Благодаря полученному в транспортной задаче решению, экономится время продвижения товаров, уменьшаются затраты предприятий на процессы, связанные со снабжением сырья, материалов, оборудования и т. п.

Приведем общую постановку транспортной задачи.

Имеется m пунктов производства (отправления) однородного продукта с объемами производства $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и n пунктов потребления (назначения) с объемами потребления $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Известна стоимость перевозки единицы продукта от каждого i-го пункта производства до каждого j-го пункта потребления: c_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Каждый элемент c_{ij} можно представить в виде матрицы, называемой матрицей перевозок (матрицей цен):

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Требуется составить план перевозок так, чтобы запасы груза у поставщиков были вывезены, потребности всех потребителей в грузе были удовлетворены и суммарная стоимость перевозок была минимальной. Как правило, условия транспортной задачи оформляют в виде *распределительной таблицы* (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Пункты отправления	Пункты назначения						Объемы поставок
	1	2	…	j	…	n	
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1}	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{i1}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Объемы потребления	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	

Обозначим x_{ij} — количество груза, перевозимого из каждого i-го пункта производства до каждого j-го пункта потребления, $i=1,m,\ \ j=1,n.$ Тогда, учитывая, что все грузы должны быть перевезены и все потребности должны быть удовлетворены, а стоимость перевозки можно выразить в виде двойной суммы, математическая модель транспортной задачи имеет вид:

$$Z(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\\ x_{ij}\ge 0,\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}.\end{cases}$$

Различают два типа транспортных задач. Если суммарные запасы продукта поставщиков равны суммарным объемам потребления, то есть:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j,$$

то это задача *закрытого типа* (замкнутая, *сбалансированная*). В противном случае задачу называют задачей *открытого типа* (*несбалансированной*).

Очень важно отметить, что в большинстве учебников авторы, как правило, изначально задают матрицу цен, но в реальной жизни часто может встретиться ситуация, когда изначально дана не матрица цен, а матрица расстояний от каждого i-го пункта производства до каждого j-го пункта потребления, а матрицу цен необходимо рассчитать самостоятельно.

Пример 6.1. Фирма производит пирожки в трех пекарных цехах, находящихся в разных районах города: Центральный, ЖБИ и Парк-Хаус. Помимо продажи своей продукции непосредственно в магазинах при цехах, часть пирожков планируется развозить на современных байках по четырем супермаркетам: «Вузовский», «Шарташский», «Академический» и «Московский». Расстояния (в км) от каждого пекарного цеха до определенной торговой точки приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Район	«Вузовский»	«Шарташский»	«Академический»	«Московский»
Центральный	4	8	10	2
ЖБИ	4	6	18	8
Парк-Хаус	6	8	40	10

Услуги транспортной компании по перевозке одного килограмма продукции составляют 50 коп. за километр. Суточный объем продукции, который готов произвести для супермаркетов центральный цех, равен 60 кг, цех на ЖБИ — 70 кг, цех на Парк-Хаусе — 20 кг. При этом каждый супермаркет также готов принять лишь определенное количество пирожков, а именно: «Вузовский» — 40 кг, «Шарташский» — 30, «Академический» — 30, «Московский» — 50. Определить оптимальное количество перевозимых пирожков, минимизирующее суммарные транспортные расходы и удовлетворяющее ограничениям, накладываемым на объемы груза. Требуется составить экономико-математическую модель данной задачи.

Решение. Для составления модели нам необходимо знать матрицу цен, т. е. таблицу со стоимостью перевозки единицы продукции. Например, расстояние от центрального цеха до супермаркета «Вузовский» составляет 4 км, чтобы узнать, сколько мы заплатим за перевозку одного килограмма продукции, умножим километраж на цену перевозки за километр, т. е. $4 \cdot 50 = 200$ коп., или 2 руб. Аналогично поступаем с другими данными из таблицы расстояний, получаем следующую матрицу цен:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы нам было проще формализовать данную задачу, перейдем от наименований к номерам, т. е. цеха занумеруем от 1 до 3: Центральный — 1, ЖБИ — 2, Парк-Хаус — 3. Аналогично поступим с супермаркетами.

Обозначим: x_{ij} — количество перевезенных пирожков из i-го пекарного цеха в j-й супермаркет, $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,4}$.

Нашей целью является минимизация транспортных расходов, то есть:

$$2x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 9x_{23} +$$
$$+ 4x_{24} + 3x_{31} + 4x_{32} + 20x_{33} + 5x_{34} \to \min.$$

При этом нужно учесть ограничения по имеющемуся предложению от пекарных цехов, т. е. все, что произведено в определенном цехе, должно быть развезено по супермаркетам:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20.$$

Аналогичные ограничения по спросу:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50.$$

Таким образом, учитывая неотрицательность количества, имеем следующую модель данной транспортной задачи:

$$Z = 2x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} +$$
$$+ 9x_{23} + 4x_{24} + 3x_{31} + 4x_{32} + 20x_{33} + 5x_{34} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими, поэтому для решения этого типа задач используется более простой метод, использующий распределительную таблицу.

Пример 6.2. Для примера 6.1 составим распределительную таблицу (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2	4	5	1	60
2	2	3	9	4	70
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	40	30	30	50	

6.2. Методы нахождения первоначального базисного решения транспортной задачи закрытого типа

Решение транспортной задачи начинают с нахождения первоначального плана поставок. Из общей модели транспортной задачи имеем $m+n$ ограничений в виде равенств. В данном параграфе мы будем рассматривать задачу закрытого типа, а это означает, что одно из этих равенств должно быть избыточным. Следовательно, задача имеет $m+n-1$ независимых ограничений, откуда вытекает, что начальное базисное решение (план поставок) состоит из $m+n-1$ базисных переменных. Наиболее часто применяют методы «северо-западного угла» и «минимальной стоимости».

Рассмотрим суть метода «северо-западного угла», используя распределительную таблицу транспортной задачи в общем виде. Распределение поставок начинается с верхней левой клетки (северо-западного угла) таблицы. В эту клетку помещаются наибольшие возможные необходимые поставки, т. е. максимум из предложения и спроса. Далее вычеркивается строка или столбец с полностью реализованным предложением или с удовлетворенным спросом, т. е. в дальнейшем в вычеркнутой строке или столбце не помещаются поставки. Если одновременно удовлетворяются спрос и предложение, вычеркивается только строка или только столбец. Если остается невычеркнутой только одна строка или только один столбец, процесс останавливается, иначе переходим к клетке справа, если вычеркнут столбец, или к нижележащей клетке, если вычеркнута строка, и повторяем вышеописанную процедуру.

Пример 6.3. Рассмотрим распределительную таблицу (табл. 6.3) из примера 6.2.

Найдем с помощью этой таблицы начальное базисное решение методом «северо-западного угла» (табл. 6.4).

Для удобства цены перевозок запишем в верхний левый угол каждой клетки (табл. 6.5).

Таблица 6.4

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2	4	5	1	60
2	2	3	9	4	70
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	40	30	30	50	

Таблица 6.5

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2	4	5	1	60
2	2	3	9	4	70
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	40	30	30	50	

Выполнение начинаем с верхней левой клетки, т. е. груз поставляется от первого пункта отправления в первый пункт назначения, при этом предложение составляет 60 ед. груза, а принять готовы только 40. Следовательно, возможно перевезти только 40 ед., значит, в верхней левой клетке записываем 40 и вычеркиваем первый пункт назначения, так как в него отправлен весь запрошенный им груз, при этом объемы поставок первого пункта отправления сокращаются до 20, что также отмечаем в распределительной таблице (табл. 6.6).

Таблица 6.6

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 40	4	5	1	~~60~~ 20
2	2	3	9	4	70
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	~~40~~	30	30	50	

Далее берем следующую невычеркнутую верхнюю левую клетку, т. е. груз поставляется от первого пункта отправления во второй пункт назначения, при этом предложение составляет 20 ед., а спрос — 30. Следовательно, возможно перевезти только 20 ед., значит, в невычеркнутую верхнюю левую клетку с ценой перевозки, равной 4, записываем 20 и вычеркиваем первый пункт отправления, так как весь имеющийся в нем груз отправлен, при этом объемы потребления второго пункта назначения сокращаются до 10, что отмечаем в распределительной таблице (табл. 6.7).

Таблица 6.7

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	^{2} 40	^{4} 20	^{5}	^{1}	~~60~~ 20
2	^{2}	^{3}	^{9}	^{4}	70
3	^{3}	^{4}	^{20}	^{5}	20
Объемы потребления	~~40~~	~~30~~ 10	30	50	

Продолжаем нашу процедуру, берем следующую невычеркнутую верхнюю левую клетку, т. е. груз поставляется от второго пункта отправления во второй пункт назначения, при этом предложение составляет 70 ед., а спрос — 10. Следовательно, возможно перевезти только 10 ед., значит, в невычеркнутую верхнюю левую клетку с ценой перевозки, равной трем, записываем 10 и вычеркиваем второй пункт назначения, так как в него отправлен весь запрошенный им груз. При этом объемы поставок первого пункта отправления сокращаются до 60, что также отмечаем в распределительной таблице (табл. 6.8).

Таблица 6.8

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	^{2} 40	^{4} 20	^{5}	^{1}	~~60~~ 20
2	^{2}	^{3} 10	^{9}	^{4}	~~70~~ 60
3	^{3}	^{4}	^{20}	^{5}	20
Объемы потребления	~~40~~	~~30~~ ~~10~~	30	50	

Аналогично переходим в следующую невычеркнутую верхнюю левую клетку, т. е. груз поставляется от второго пункта отправления в третий пункт назначения. Рассуждая таким же образом, как на предыдущем шаге, получаем табл. 6.9.

Таблица 6.9

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	^{2} 40	^{4} 20	^{5}	^{1}	~~60~~ 20
2	^{2}	^{3} 10	^{9} 30	^{4}	~~70~~ ~~60~~ 30
3	^{3}	^{4}	^{20}	^{5}	20
Объемы потребления	~~40~~	~~30~~ ~~10~~	~~30~~	50	

И вновь переходим в следующую невычеркнутую верхнюю левую клетку и с помощью подобных рассуждений получаем табл. 6.10.

Таблица 6.10

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 40	4 20	5	1	~~60~~ ~~20~~
2	2	3 10	9 30	4 30	~~70~~ ~~60~~ ~~30~~
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	~~40~~	~~30~~ ~~10~~	~~30~~	~~50~~ 20	

Остается последняя клетка, т. е. груз поставляется из третьего пункта отправления в четвертый пункт назначения. Здесь предложение и спрос равны 20, что естественно, так как задача закрытого типа. Следовательно, записываем в оставшуюся клетку 20, тогда итоговая таблица будет иметь вид (табл. 6.11).

Таблица 6.11

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 40	4 20	5	1	~~60~~ ~~20~~
2	2	3 10	9 30	4 30	~~70~~ ~~60~~ ~~30~~
3	3	4	20	5 20	~~20~~
Объемы потребления	~~40~~	~~30~~ ~~10~~	~~30~~	~~50~~ ~~20~~	

Начальное базисное решение найдено, проинтерпретировать его можно следующим образом. Исходя из заполненных клеток, имеем: 40 ед. груза необходимо перевезти из первого пункта отправления во второй пункт назначения, 20 из первого во второй, 10 из второго пункта отправления во второй пункт назначения, 30 из второго в третий, еще 30 из второго только уже в четвертый и 20 из третьего в четвертый. Для того, чтобы найти стоимость перевозки, нужно количество перевезенного груза из каждого пункта назначения в пункт отправления умножить на соответствующую стоимость перевозки. Опираясь на последнюю распределительную таблицу, получаем, что стоимость перевозки: $\overline{Z} = 2 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 9 \cdot 30 + 4 \cdot 30 + 5 \cdot 20 = 680$.

Стоит отметить, что метод «северо-западного угла» прост в применении, однако решение, полученное с помощью него, далеко не всегда оптимальное. Более выгодная стоимость перевозки чаще получается при использовании метода «минимальной стоимости», но в примере 6.4 будет показано, что это не всегда.

Рассмотрим суть метода «минимальной стоимости», используя распределительную таблицу транспортной задачи в общем виде.

Распределение поставок начинается с клеток, в которых цена перевозок c_{ij} наименьшая. Если таких клеток несколько, выбрать можно любую, договоримся выбирать первую встретившуюся при просмотре по строкам сверху вниз. В эти клетки помещаются наибольшие возможные необходимые поставки. Далее поставки распределяются по возрастанию тарифов по свободным клеткам с учетом запасов производителей и нужд потребителей. Более подробно рассмотрим работу этого метода на транспортной задаче из примера 6.3.

Пример 6.4. Выполнение начинаем с той клетки, где наименьшая цена перевозки (табл. 6.12), т. е. с клетки с ценой 1, при которой груз поставляется из первого пункта отправления в четвертый пункт назначения, при этом предложение составляет 60 ед. груза, а принять готовы только 50. Следовательно, возможно перевезти только 50 ед., значит, в выбранной клетке записываем 50 и вычеркиваем четвертый пункт назначения, так как в него отправлен весь запрошенный им груз, при этом объемы поставок первого пункта отправления сокращаются до 10, что также отмечаем в распределительной таблице (табл. 6.13).

Таблица 6.12

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2	4	5	1	60
2	2	3	9	4	70
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	40	30	30	50	

Таблица 6.13

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2	4	5	1 50	~~60~~ 10
2	2	3	9	4	70
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	40	30	30	~~50~~	

Далее выбираем следующую невычеркнутую клетку с минимальной ценой перевозки. Таких клеток две: единица груза из первого пункта отправления в первый пункт назначения и из второго пункта отправления в первый пункт назначения поставляется за 2 ден. ед. Как договорились ранее, выбираем в этом случае ту клетку, которая встретилась первой при просмотре таблицы по строкам сверху вниз, т. е. ту, которая отвечает за перевозку груза из первого пункта отправления в первый пункт назначения. Предложение в данном случае составляет 10, спрос — 40. Следовательно, возможно перевезти только 10 ед., значит, в выбранную клетку с ценой перевозки, равной 2, записываем 10 и вычеркиваем первый пункт отправления, так как весь имеющийся в нем груз отправлен, при этом объемы потребления второго пункта назначения сокращаются до 30, что отмечаем в распределительной таблице (табл. 6.14).

Таблица 6.14

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 10	4	5	1 50	~~60~~ ~~10~~
2	2	3	9	4	70
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	~~40~~ 30	30	30	~~50~~	

Продолжаем нашу процедуру, берем следующую невычеркнутую клетку с наименьшей ценой перевозки, т. е. груз поставляется от второго пункта отправления в первый пункт назначения, при этом предложение составляет 70 ед., а спрос — 30. Следовательно, возможно перевезти только 30 ед., значит, в выбранную клетку с ценой перевозки, равной двум, записываем 30 и вычеркиваем первый пункт назначения, так как в него отправлен весь запрошенный им груз. При этом объемы поставок первого пункта отправления сокращаются до 40, что отмечаем в распределительной таблице (табл. 6.15).

Таблица 6.15

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 10	4	5	1 50	~~60~~ ~~10~~
2	2 30	3	9	4	~~70~~ 40
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	~~40~~ ~~30~~	30	30	~~50~~	

Аналогично переходим в следующую клетку с минимальной ценой, т. е. груз поставляется от второго пункта отправления во второй пункт назначения. Рассуждая таким же образом, как на предыдущем шаге, получаем табл. 6.16.

И вновь переходим в клетку с минимальной ценой и с помощью подобных рассуждений получаем табл. 6.17.

Таблица 6.16

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 10	4	5	1 50	~~60~~ ~~10~~
2	2 30	3 30	9	4	~~70~~ ~~40~~ 10
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	~~40~~ ~~30~~	~~30~~	30	~~50~~	

Таблица 6.17

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 10	4	5	1 50	~~60~~ ~~10~~
2	2 30	3 30	9 10	4	~~70~~ ~~40~~ ~~10~~
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	~~40~~ ~~30~~	~~30~~	~~30~~ 20	~~50~~	

Остается последняя клетка, т. е. груз поставляется из третьего пункта отправления в третий пункт назначения. Здесь предложение и спрос равны 20, что естественно, так как задача закрытого типа. Следовательно, записываем в оставшуюся клетку 20, тогда итоговая таблица будет иметь вид (табл. 6.18).

Таблица 6.18

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 10	4	5	1 50	~~60~~ ~~10~~
2	2 30	3 30	9 10	4	~~70~~ ~~40~~ ~~10~~
3	3	4	20 20	5	~~20~~
Объемы потребления	~~40~~ ~~30~~	~~30~~	~~30~~ ~~20~~	~~50~~	

Начальное базисное решение найдено. Опираясь на последнюю распределительную таблицу, получаем стоимость перевозки: $\overline{Z} = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 50 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 30 + 9 \cdot 10 + 20 \cdot 20 = 710$. Заметим, что решая эту же задачу методом «северо-западного угла», мы находим план перевозки, стоимость которой составит 680 ден. ед. Таким образом, этот пример показывает, что не всегда метод «минимальной стоимости» дает лучшее решение. Более того, нет уверенности, что не существует еще более оптимального решения, при котором стоимость перевозки будет еще меньше, нежели получившаяся в данном методе.

6.3. Критерий оптимальности базисного решения транспортной задачи и метод потенциалов

Как уже было сказано выше, начальное базисное решение не всегда может являться оптимальным в транспортной задаче, поэтому для нахождения оптимального плана перевозок был разработан *метод потенциалов*. Принцип работы этого метода аналогичен симплекс-методу: сначала находят начальный базисный план, а затем последовательно его улучшают до получения оптимального.

Начальный базисный план будем находить методом «северо-западного угла» или «минимальной стоимости».

Теорема (*критерий оптимальности*). Если для некоторого базисного плана $X = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1j}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2j}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{in}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mj}, \ldots, x_{mn})$ существуют такие числа $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots, v_n$, что выражение, называемое оценками элементов (клеток распределительной таблицы), $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ для любых $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$, то данный базисный план X является оптимальным в транспортной задаче.

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots, v_n$ из сформулированной теоремы называются *потенциалами* соответственно пунктам отправления и пунктам назначения.

Кроме того, заметим, что можно расширить формулировку критерия оптимальности следующим образом.

Если для некоторого базисного плана $X = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1j}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2j}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{in}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mj}, \ldots, x_{mn})$ существуют такие числа $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots, v_n$, что

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0 \quad \text{и} \quad u_i + v_j \le c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} = 0$$

для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$, то данный базисный план X является оптимальным в транспортной задаче.

Такая запись критерия оптимальности позволяет понять, что потенциалы можно найти из условия $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$, а значит, возможно построить алгоритм нахождения оптимального решения транспортной задачи.

Алгоритм решения транспортной задачи закрытого типа:

1. Найти первоначальное базисное решение (распределение поставок) методами «северо-западного угла» или «минимальной стоимости».

2. Проверить решение на оптимальность методом потенциалов. Для этого найти потенциалы для каждой строки и столбца из условия $u_i - \nu_j = c_{ij}$, справедливого для всех занятых клеток распределительной таблицы. Первоначально положить $u_1 = 0$.

3. Для всех свободных клеток рассчитать оценки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Если все $\Delta_{ij} \le 0$, то найденное решение оптимально. Если среди оценок есть хотя бы одно положительное число, то найденное решение не является оптимальным.

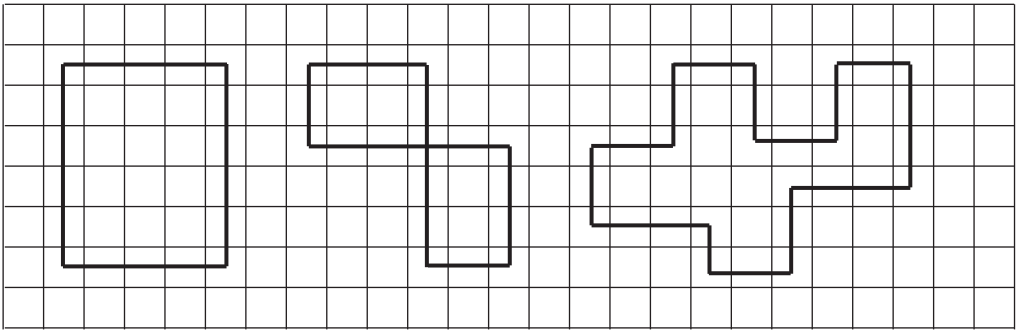
4. Если решение неоптимально, необходимо перейти к новому базисному решению (новому плану поставок), которое ближе к оптимальному, чем предыдущее. Необходимо ввести в базис свободную переменную θ, имеющую наибольшую положительную оценку, т. е. в клетку с наибольшей оценкой ставим θ. В случае, если наибольших положительных оценок несколько, то выбираем ту, у которой в клетке цена наименьшая. Далее проводим цикл для соответствующей этой переменной клетки. Цикл строится по занятым клеткам, начиная от θ, и имеет прямоугольную конфигурацию. Вершинам цикла приписывается определенный знак, причем клетке со свободной переменной θ — знак «плюс», а всем остальным клеткам поочередно знаки «минус» и «плюс» (будем называть эти клетки минусовыми и плюсовыми). Среди минусовых клеток находится наименьший объем поставок, и θ присваивается его значение, далее идет перераспределение по циклу: в плюсовых клетках его надо прибавить к поставке, в минусовых клетках вычесть. После вычитания получится, по крайней мере, один нулевой элемент (так как θ определяется как наименьший элемент плана, стоящий в минусовых клетках), этот ноль мы не пишем, и именно этот элемент выводится из базиса. Далее остается выписать новое решение и значение целевой функции и перейти в пункт 2 данного алгоритма.

Приведенный алгоритм решения транспортной задачи в некоторой литературе называют *методом потенциалов*.

Поясним некоторые моменты в приведенном алгоритме. Потенциалы находятся из условия $u_i - v_j = c_{ij}$, где $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$, т. е. потенциалы являются решением системы (именуемой *системой потенциалов*) из $n + m$ неизвестных с $n + m - 1$ неизвестными (так как именно столько будет занятых клеток (элементов) в базисном решении). Таким образом, число неизвестных превышает число переменных, именно поэтому одно из неизвестных необходимо взять за произвольную константу, для определенности всегда договоримся положить $u_1 = 0$.

Здесь стоит отметить очень важный случай. Если в процессе решения транспортной задачи получено решение, в котором количество занятых клеток меньше $m + n - 1$, то это решение называется *вырожденным*. Расчет потенциалов выполнить невозможно. В этом случае недостающее число занятых клеток выполняется путем введения нулевых поставок в некоторые клетки. Их выбор определяется возможностью расстановки потенциалов, а именно: если, согласно четвертому пункту алгоритма, после вычитания из минусовых клеток значения θ мы получим несколько нулей, то нельзя их отбрасывать все, так как из базисного решения выводится только один элемент. В этом случае выводят из базиса какой-нибудь один элемент, остальные нули оставляют. Таким образом, далее такие клетки считаются занятыми, и решение продолжается обычным образом.

Циклом в распределительной таблице называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках, а звенья — вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое — в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами. Примеры некоторых циклов показаны на рисунке.



Примеры циклов распределения груза

Теперь рассмотрим работу приведенного алгоритма на числовом примере.

Пример 6.5. Рассмотрим транспортную задачу, заданную распределительной таблицей из примера 6.4 (табл. 6.19).

Таблица 6.19

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2	4	5	1	60
2	2	3	9	4	70
3	3	4	20	5	20
Объемы потребления	40	30	30	50	

Ранее мы уже находили начальное базисное решение данной задачи и методом «северо-западного угла», и методом «минимальной стоимости», при этом значение целевой функции при первом методе получилось равным 680, а при втором — 710. Поскольку в транспортной задаче целевая функция минимизируется, то очевидно, что лучше решение, полученное методом «северо-западного угла», поэтому проверим сейчас его на оптимальность. Напомним, что это решение выглядело следующим образом (табл. 6.20).

Таблица 6.20

Пункты отправления	Пункты назначения				Объемы поставок
	1	2	3	4	
1	2 40	4 20	5	1	~~60~~ ~~20~~
2	2	3 10	9 30	4 30	~~70~~ ~~60~~ ~~30~~
3	3	4	20	5 20	~~20~~
Объемы потребления	~~40~~	~~30~~ ~~10~~	~~30~~	~~50~~ ~~20~~	

Вначале сразу проверим, что план не вырожден, т. е., что заполненных клеток будет в точности $m + n - 1$ штука, в нашем случае $3 + 4 - 1 = 6$. Более того, начальный базисный план и не мог получиться вырожденным согласно договоренностям в методе «северо-западного угла».

Далее составляем систему потенциалов. Всего у нас 3 пункта отправления и 4 пункта назначения, значит, потенциалы будут следующими: u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4. Напомним, что система составляется только для заполненных клеток. Например, у нас заполнена клетка первой строки и столбца «1», при этом цена в этой клетке равна 2, тогда $u_1 + v_1 = 2$. Аналогично составляя для других заполненных клеток, получаем систему:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_2 = 4, \\ u_2 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_3 = 9, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_4 = 5. \end{cases}$$

В данной системе семь неизвестных и шесть уравнений, как и обсуждалось после приведения алгоритма. При этом была договоренность взять $u_1 = 0$. Тогда из первого уравнения получаем $v_1 = 2$, далее аналогичным образом находим значения остальных потенциалов, в итоге получим следующее решение системы: $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 10$, $v_4 = 5$.

Затем необходимо проверить выполнение критерия оптимальности, т. е. условие: $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$. Сделать это будет удобно, если мы перепишем распределительную таблицу следующим образом (табл. 6.21).

То есть вместо номеров пунктов отправления и назначения мы записываем соответствующие значения потенциалов, объемы поставок и потребления в таблицу не включаем за их ненадобностью при дальнейшем решении. Далее для каждой клетки по составленной таблице считаем оценку Δ_{ij}, записываем ее значение в нижний правый угол соответствующей ячейки и для удобства восприятия обводим в прямоугольник, получаем табл. 6.22.

Таблица 6.21

u_i \ v_j	2	4	10	5
0	2 40	4 20	5	1
–1	2	3 10	9 30	4 30
0	3	4	20	5 20

Таблица 6.22

u_i \ v_j	2	4	10	5
0	2 40 $\boxed{0}$	4 20 $\boxed{0}$	5 $\boxed{5}$	1 $\boxed{4}$
–1	2 $\boxed{-1}$	3 10 $\boxed{0}$	9 30 $\boxed{0}$	4 30 $\boxed{0}$
0	3 $\boxed{-1}$	4 $\boxed{0}$	20 $\boxed{-10}$	5 20 $\boxed{0}$

Обратите внимание, что все оценки для заполненных клеток (элементов базисного плана) нулевые, что естественно следует из пояснения к критерию оптимальности. И такая ситуация будет всегда, поэтому можно не находить значения оценок для заполненных клеток, но советуем это делать для проверки правильности нахождения потенциалов. Ведь если хотя бы одна оценка на заполненной клетке будет ненулевой, то это указывает на ошибку в решении системы потенциалов. В нашем случае среди оценок пустых клеток имеются положительные, что говорит о неоптимальности первоначального базисного решения. Следовательно, необходимо перейти к новому базисному решению (новому плану поставок), которое ближе к оптимальному, чем предыдущее. Необходимо ввести в базис свободную переменную, имеющую наибольшую положительную оценку. В нашем примере наибольшая оценка равна пяти, и ей соответствует клетка, стоящая в первой строке в третьем столбце. Именно в эту клетку вводим новую переменную, которую обозначаем θ. Далее строим цикл по занятым клеткам, получим табл. 6.23.

Таблица 6.23

u_i \ v_j	2	4	10	5
0	2 40 $\boxed{0}$	4 20 $\boxed{0}$	5 θ $\boxed{5}$	1 $\boxed{4}$
–1	2 $\boxed{-1}$	3 10 $\boxed{0}$	9 30 $\boxed{0}$	4 30 $\boxed{0}$
0	3 $\boxed{-1}$	4 $\boxed{0}$	20 $\boxed{-10}$	5 20 $\boxed{0}$

Вершинам цикла присвоим знаки: в клетке, в которой стоит θ, ставим « + », далее поочередно «–», « + », «–», имеем табл. 6.24.

Далее находим θ как наименьшее значение из элементов плана, стоящих в минусовых клетках, т. е. в нашем случае θ = 20, далее в минусовых клетках вычитаем 20, а в плюсовых прибавляем. При этом в клетке, стоящей в первой строке во втором столбце, после вычитания получается ноль, это означает, что данный элемент плана выводится из базиса, и этот ноль не записываем. В итоге получим табл. 6.25.

Таблица 6.24

u_i \ v_j	2	4	10	5
0	2; 40; $\boxed{0}$	4; 20^-; $\boxed{0}$	5; θ^+; $\boxed{5}$	1; $\boxed{4}$
–1	2; $\boxed{-1}$	3; 10^+; $\boxed{0}$	9; 30^-; $\boxed{0}$	4; 30; $\boxed{0}$
0	3; $\boxed{-1}$	4; $\boxed{0}$	20; $\boxed{-10}$	5; 20; $\boxed{0}$

Таблица 6.25

u_i \ v_j	2	4	10	5
0	2; 40; $\boxed{0}$	4; $\boxed{0}$	5; 20; $\boxed{5}$	1; $\boxed{4}$
–1	2; $\boxed{-1}$	3; 30; $\boxed{0}$	9; 10; $\boxed{0}$	4; 30; $\boxed{0}$
0	3; $\boxed{-1}$	4; $\boxed{0}$	20; $\boxed{-10}$	5; 20; $\boxed{0}$

Имеем новое базисное решение, которое также невырожденное, так как элементов в нем по-прежнему шесть. Проверяем теперь его аналогичным образом на оптимальность, для чего составляем систему потенциалов для непустых клеток:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_3 = 9, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_4 = 5. \end{cases}$$

Учитывая договоренность, что $u_1 = 0$, имеем решением системы: $u_1 = 0$, $u_2 = 4$, $u_3 = 5$, $v_1 = 2$, $v_2 = -1$, $v_3 = 5$, $v_4 = 0$. Далее для каждой клетки по составленной таблице считаем оценку Δ_{ij} и записываем ее значение в нижний правый угол соответствующей ячейки и для удобства восприятия обводим в прямоугольник, получаем табл. 6.26.

И снова присутствуют положительные оценки, значит, полученный базисный план неоптимальный, необходимо его улучшать. Для этого вновь ищем наибольшую оценку, у нас это 4, причем их две одинаковых. Выбираем согласно алгоритму ту, у которой цена наименьшая, т. е. клетку, стоящую во второй строке, первом столбце, и присваиваем ей θ. Затем строим цикл, отмечаем плюсовые и минусовые клетки, получаем табл. 6.27.

Таблица 6.26

u_i \ v_j	2	−1	5	0
0	2; 40; $\boxed{0}$	4; $\boxed{-5}$	5; 20; $\boxed{0}$	1; $\boxed{-1}$
4	2; $\boxed{4}$	3; 30; $\boxed{0}$	9; 10; $\boxed{0}$	4; 30; $\boxed{0}$
5	3; $\boxed{4}$	4; $\boxed{0}$	20; $\boxed{-10}$	5; 20; $\boxed{0}$

Таблица 6.27

u_i \ v_j	2	−1	5	0
0	2; 40^-; $\boxed{0}$	4; $\boxed{-5}$	5; 20^+; $\boxed{0}$	1; $\boxed{-1}$
4	2; θ^+; $\boxed{4}$	3; 30; $\boxed{0}$	9; 10^-; $\boxed{0}$	4; 30; $\boxed{0}$
5	3; $\boxed{4}$	4; $\boxed{0}$	20; $\boxed{-10}$	5; 20; $\boxed{0}$

Величине θ присваиваем наименьшее значение из минусовых клеток, т. е. 10. В плюсовых клетках прибавляем 10, в минусовых — вычитаем 10. При этом стоит обратить внимание, что тем самым мы вывели из базиса элемент с самой дорогой ценой, равной 9, получаем табл. 6.28.

Таблица 6.28

u_i \ v_j	2	−1	5	0
0	2; 30; $\boxed{0}$	4; $\boxed{-5}$	5; 30; $\boxed{0}$	1; $\boxed{-1}$
4	2; 10; $\boxed{4}$	3; 30; $\boxed{0}$	9; $\boxed{0}$	4; 30; $\boxed{0}$
5	3; $\boxed{4}$	4; $\boxed{0}$	20; $\boxed{-10}$	5; 20; $\boxed{0}$

Имеем новое базисное невырожденное решение. Проверим его на оптимальность. Для этого составляем систему потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_4 = 4, \\ u_3 + v_4 = 5. \end{cases}$$

Ее решением являются $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 5$, $v_4 = 4$. Далее для каждой клетки по составленной таблице считаем оценку Δ_{ij}, записываем ее значение в нижний правый угол соответствующей ячейки и для удобства восприятия обводим в прямоугольник, получаем табл. 6.29.

И вновь имеется положительная оценка, следовательно, полученное новое решение не является оптимальным. Повторяем действия алгоритма, в клетку с положительной оценкой вводим элемент θ, строим цикл по указанным выше правилам, отмечаем плюсовые и минусовые клетки, получаем табл. 6.30.

Таблица 6.29

u_i \ v_j	2	3	5	4
0	2 30 $\boxed{0}$	4 $\boxed{-1}$	5 30 $\boxed{0}$	1 $\boxed{3}$
0	2 10 $\boxed{0}$	3 30 $\boxed{0}$	9 $\boxed{-4}$	4 30 $\boxed{0}$
1	3 $\boxed{0}$	4 $\boxed{0}$	20 $\boxed{-14}$	5 20 $\boxed{0}$

Таблица 6.30

u_i \ v_j	2	3	5	4
0	2 30^- $\boxed{0}$	4 $\boxed{-1}$	5 30 $\boxed{0}$	1 θ^+ $\boxed{3}$
0	2 10^+ $\boxed{0}$	3 30 $\boxed{0}$	9 $\boxed{-4}$	4 30^- $\boxed{0}$
1	3 $\boxed{0}$	4 $\boxed{0}$	20 $\boxed{-14}$	5 20 $\boxed{0}$

Величина θ равна наименьшему значению элементов, стоящих в минусовых клетках, т. е. 30. Далее в плюсовых клетках прибавляем 30, в минусовых вычитаем. После вычитания у нас в двух клетках получаются нули, но согласно алгоритму один ноль оставляем, а второй убираем, например тот, который стоит в клетке с наименьшей ценой, имеем табл. 6.31.

Благодаря тому, что один ноль мы оставили, новое базисное решение невырожденное. Проверим его на оптимальность. Для этого составляем систему потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 5, \\ u_1 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 3, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_3 + v_4 = 5. \end{cases}$$

Ее решением являются $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$, $v_1 = -1$, $v_2 = 0$, $v_3 = 5$, $v_4 = 1$. Далее для каждой клетки по составленной таблице считаем оценку Δ_{ij}, получаем табл. 6.32.

Таблица 6.31

u_i \ v_j	2	3	5	4
0	2 $\boxed{0}$	4 $\boxed{-1}$	5 30 $\boxed{0}$	1 30 $\boxed{3}$
0	2 40 $\boxed{0}$	3 30 $\boxed{0}$	9 $\boxed{-4}$	4 $\boxed{0}$
1	3 0 $\boxed{0}$	4 $\boxed{0}$	20 $\boxed{-14}$	5 20 $\boxed{0}$

Таблица 6.32

u_i \ v_j	−1	0	5	1
0	2 $\boxed{-3}$	4 $\boxed{-4}$	5 30 $\boxed{0}$	1 30 $\boxed{0}$
3	2 40 $\boxed{0}$	3 30 $\boxed{0}$	9 $\boxed{-1}$	4 $\boxed{0}$
4	3 0 $\boxed{0}$	4 $\boxed{0}$	20 $\boxed{-11}$	5 20 $\boxed{0}$

Все оценки неположительные, значит, полученное решение является оптимальным. Найдем значение целевой функции $\overline{Z}(X) = 5 \cdot 30 + 1 \cdot 30 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 30 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 20 = 450$. Заметим, что при первоначальном решении полученным методом «северо-западного угла» целевая функция была равной 680, что значительно больше, чем 450.

З а м е ч а н и я:

1. Если оценки равны нулю только в заполненных клетках (при базисных элементах), то решение определяется однозначно. Если нулевые оценки есть и в пустых клетках, то решение определяется неоднозначно. В предыдущем примере нулевые оценки имеются в пустых клетках, значит, решение определяется неоднозначно.

2. Метод потенциалов является относительно простым для решения транспортной задачи на бумаге, при этом схема расчетов не совсем очевидна, поэтому в большинстве случаев для решения с использованием ЭВМ применяется метод дифференциальных рент. В нем сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза и на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок.

6.4. Решение транспортной задачи открытого типа

При нарушении баланса между объемами производства и потребления в алгоритм решения транспортной задачи вносятся следующие дополнения.

Если суммарные поставки меньше суммарных потребностей, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то вводят фиктивный пункт производства с объемом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

При этом в распределительной таблице появляется дополнительная строка. Цены в клетках этой строки определяются издержками (штрафами, неустойками) ввиду недогрузки мощностей потребителей. Если информация об этих издержках неизвестна, то их принимают равными одному и тому же числу (чаще всего нулю).

Если суммарные поставки больше суммарных потребностей, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то вводят фиктивный пункт потребления с объемом

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

После вычисления в распределительной в таблице появляется дополнительный столбец. Цены в клетках этого столбца соответствуют затратам на хранение неотправленного груза (поставки последнего столбца — неотправленный груз для каждого из поставщиков). Если информация об этих затратах отсутствует, то их принимают равными одному и тому же числу (чаще всего нулю).

Модель задачи становится закрытой, и далее задачу решают по общей схеме. Оптимальное решение задачи выписывается из таблицы без фиктивной строки (столбца), и в расчете целевой функции фиктивные поставки (потребление) не учитываются.

6.5. Применение транспортных моделей в экономических задачах

Алгоритм и методы решения транспортной задачи могут быть использованы при решении некоторых экономических задач, не имеющих непосредственного отношения к транспортировке грузов. В этом случае величины цен c_{ij} имеют различный смысл в зависимости от конкретной задачи.

1. Оптимальное закрепление за станками операций по обработке деталей. В них величина c_{ij} является производительностью. Задача позволяет определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей. Так как транспортная задача требует нахождения минимума, то значения c_{ij} берутся с отрицательным значением.

2. Оптимальные назначения или проблема выбора. Имеется m механизмов, которые могут выполнять n различных работ с производительностью c_{ij}. Задача позволяет определить, какой механизм и на какую работу надо назначить, чтобы добиться максимальной производительности.

3. Задача о сокращении производства с учетом суммарных расходов на изготовление и транспортировку продукции.

4. Увеличение производительности автомобильного транспорта за счет минимизации порожнего пробега, сокращение которого позволит уменьшить количество автомобилей для перевозок за счет увеличения их производительности.

5. Решение задач с помощью метода запрещения перевозок. Используется в том случае, если груз от некоторого поставщика по каким-то причинам не может быть направлен одному из потребителей. Данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение цены.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. С трех оптовых баз осуществляется доставка товара в сеть из четырех магазинов. В таблице заданы количество товара, имеющегося на каждой базе, объем товара, необходимого каждому магазину, а также стоимость (ден. ед.) перевозки единицы товара с базы в магазин. Составить математическую модель транспортной задачи.

Оптовые базы	Магазины				Объемы поставок
	$М_1$	$М_2$	$М_3$	$М_4$	
1	5	1	3	4	30
2	1	2	4	3	10
3	7	1	2	8	40
Объемы потребления	24	16	25	15	

6.2. Данные для транспортной задачи приведены в таблице.

1) Определить, закрытого типа данная задача или открытого.

2) Найти первоначальный план перевозки методом «северо-западного» угла и соответствующую суммарную стоимость перевозки.

3) Найти первоначальный план перевозки методом «минимальной стоимости» и соответствующую суммарную стоимость перевозки.

4) Определить, какой план более выгодный.

Пункты отправки	Пункты потребления			Объемы поставок
	A	B	C	
1	2	5	3	25
2	4	1	5	15
3	3	6	7	60
Объемы потребления	20	30	50	

6.3. Решить транспортную задачу открытого типа двумя способами:
1) методом «северо-западного угла»;
2) методом «минимальной стоимости».
Сравнить результаты.

Пункты отправки	Пункты потребления			Объемы поставок
	A	B	C	
1	3	4	2	20
2	5	6	3	10
3	7	1	6	40
Объемы потребления	14	16	20	

6.4. Решить транспортную задачу.

Пункты отправки	Пункты потребления			Объемы поставок
	A	B	C	
1	4	2	3	40
2	5	10	8	80
3	5	8	12	90
Объемы потребления	50	70	75	

6.5. Решить транспортную задачу методом «минимальной стоимости».

Оптовые базы	Магазины				Объемы поставок
	M_1	M_2	M_3	M_4	
1	26	15	10	8	25
2	10	6	20	11	10
3	11	70	50	35	20
4	21	15	5	15	30
5	11	30	6	4	15
Объемы потребления	40	10	20	25	

6.6. Фирма поставляет бытовую технику с трех складов в четыре магазина. На складах имеется 120, 65 и 35 ед. техники соответственно. Магазинам требуется 90, 70, 40 и 20 ед. техники соответственно. Стоимость перевозки одной единицы техники приведена в таблице. Как спланировать перевозку, чтобы суммарные транспортные затраты были минимальны?

Склады	Магазины			
	M_1	M_2	M_3	M_4
1	2	3	1	4
2	3	2	4	6
3	5	3	6	3

6.7. Фирма договорилась с тремя частными авиакомпаниями о перевозке груза в пять стран. Планируется 70 перевозок в год, из которых 10 — в Германию, 15 — в Италию, 20 — в Турцию, 10 — в США и 15 — в Китай. Контракты с авиакомпаниями на перевозку предлагается заключить в соотношении 2 : 3 : 2. Стоимость перевозок задана в таблице. Найти общую минимальную стоимость перевозок.

Авиакомпании	Страны				
	Германия	Италия	Турция	США	Китай
1	24	16	8	10	14
2	21	15	7	12	16
3	23	14	7	14	20

6.8. Два завода производят 16 и 14 тыс. упаковок ламината в год и поставляют их в три строительных магазина, потребности которых составляют 10, 12 и 8 тыс. соответственно. Стоимость транспортировки 1 тыс. упаковок с заводов задана в таблице.

1) Составить план перевозки, минимизирующий общие транспортные расходы.

2) Как следует пересмотреть план перевозки, если производственные возможности первого завода увеличатся на 10 тыс., а потребности магазинов будут составлять 8, 10 и 16 тыс. соответственно?

Заводы	Магазины		
	M_1	M_2	M_3
1	5	4	6
2	6	3	2

6.9. Для транспортировки древесины требуются железнодорожные вагоны, которые необходимо доставить из депо $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ в 4 пункта загрузки древесины. Расстояния (км) от депо до пунктов загрузки, количество свободных вагонов в каждом депо и количество необходимых вагонов для загрузки древесины задаются в таблице. Составить оптимальный план поставки вагонов из депо, минимизирующий суммарно пройденное расстояние.

Депо	Пункты загрузки				Наличие вагонов
	1	2	3	4	
$Д_1$	5	4	1	2	120
$Д_2$	4	2	6	3	65
$Д_3$	7	3	5	4	35
Потребность в вагонах	90	70	40	20	

6.10. Сеть аптек поставляет лекарство от давления с двух складов в Екатеринбурге по городам области. Расстояния между городами заданы в таблице. На складах имеется 80 и 60 ед. лекарства соответственно. Запрос аптек городов области составляет 40, 60 и 30 ед. лекарства. Стоимость перевозки равна 30 руб. за 1 км.

1) Составить оптимальный план поставки лекарства в города области.

2) Как изменится суммарная стоимость перевозки, если на дороге Екатеринбург — Арамиль ведутся работы, увеличивающие путь на 10 км?

Склады	Города		
	Арамиль	Пышма	Первоуральск
1	50	40	60
2	20	60	30

Ответы к задачам для самостоятельного решения

6.1. $Z = 5x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + 3x_{24} + 7x_{31} + x_{32} + 2x_{33} + 8x_{34} \to \min,$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 10, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 24, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 16, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}.$$

6.2. 1) Задача закрытого типа; 2) $x_{11} = 20$, $x_{12} = 5$, $x_{22} = 15$, $x_{32} = 10$, $x_{33} = 50$, $Z = 490$ (ден. ед.); 3) $x_{11} = 20$, $x_{13} = 5$, $x_{22} = 15$, $x_{32} = 15$, $x_{33} = 45$, $Z = 475$ (ден. ед.); 4) план, составленный методом наименьшей стоимости, выгоднее, так как $475 < 490$ (ден. ед.).

6.3. 1) $x_{11} = 14$, $x_{13} = 6$, $x_{23} = 10$, $x_{32} = 16$, $x_{33} = 4$, $x_{34} = 20$, $Z_{\min} = 124$ (ден. ед.); 2) $x_{11} = 10$, $x_{13} = 10$, $x_{23} = 10$, $x_{31} = 4$, $x_{32} = 16$, $x_{34} = 20$, $Z_{\min} = 124$ (ден. ед.).

6.4. $x_{12} = 40$, $x_{21} = 5$, $x_{23} = 75$, $x_{31} = 45$, $x_{32} = 30$, $Z_{\min} = 1\,170$ (ден. ед.).

6.5. $x_{14} = 25$, $x_{15} = 0$, $x_{21} = 5$, $x_{22} = 5$, $x_{31} = 20$, $x_{42} = 5$, $x_{43} = 20$, $x_{45} = 5$, $x_{51} = 15$, $Z_{\min} = 840$ (ден. ед.).

6.6. $x_{11} = 80$, $x_{13} = 40$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 55$, $x_{32} = 15$, $x_{34} = 20$, $Z_{\min} = 445$.

6.7. $x_{14} = 10$, $x_{15} = 10$, $x_{21} = 10$, $x_{23} = 15$, $x_{25} = 5$, $x_{32} = 15$, $x_{33} = 5$, $Z_{\min} = 880$.

6.8. 1) $x_{11} = 10$, $x_{12} = 6$, $x_{22} = 6$, $x_{23} = 8$, $Z_{\min} = 108$ (ден. ед.); 2) $x_{11} = 8$, $x_{12} = 10$, $x_{13} = 2$, $x_{23} = 14$, $Z_{\min} = 120$ (ден. ед.), избыточное количество на 1 заводе составит 6 тыс. упаковок.

6.9. $x_{11} = 60$, $x_{13} = 40$, $x_{14} = 20$, $x_{21} = 30$, $x_{22} = 35$, $x_{32} = 35$, $Z_{\min} = 675$.

6.10. 1) $x_{12} = 60$, $x_{13} = 10$, $x_{21} = 40$, $x_{23} = 20$, $S_{\min} = 4\,400$, $Z_{\min} = 132\,000$ (ден. ед.); 2) $S_{\min} = 4\,800$, $Z_{\min} = 144\,000$ (ден. ед.).

Учебное издание

Шевалдина Ольга Яковлевна
Зенков Андрей Вячеславович
Жильцова Ольга Юрьевна
Трофимова Елена Александровна
Гилёв Денис Викторович
Кисляк Надежда Валерьевна

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *С. Г. Галинова*
Корректор *С. Г. Галинова*
Компьютерная верстка *В. К. Матвеев*

Подписано в печать 13.10.2020 г. Формат 70 × 100 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 15,16.
Уч.-изд. л. 11,0. Тираж 100 экз. Заказ 28

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: rio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

Для заметок

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2018

9785799629564