Математический анализ

А.А.Никитин

Version 0.0.1
17.08.2023

Введение. Основные обозначения.

ГЛАВА

I

1 Множества. Операции над множествами

Множество **состоит из объектов**, называемых его элементами. Запись $x \in \mathbf{A}$ означает, что объект x принадлежит множеству $\mathbf{A}$; является элементом множества $\mathbf{A}$. Запись $x \notin \mathbf{A}$ означает, что x не принадлежит множеству $\mathbf{A}$; не является элементом множества $\mathbf{A}$.

Множество может задаваться перечислением своих элементов:

$$\{1, 5, 14, 100\}, \quad \{\text{а}, \text{б}, \text{и}, \text{о}\},$$

а также указанием свойства (*принцип селекции*): множество всех элементов, удовлетворяющих свойству P, обозначение:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{M} \mid x - \text{удовлетворяет свойству } P\}.$$

> **Обычно рассматриваются элементы, принадлежащие некоторому основному множеству M (объёмлющему множеству, множеству допустимых элементов). Множество M либо ясно из контекста, либо явно указывается. Например, в планиметрии M – это плоскость.**

Пример 1.1. $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4\} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Пример 1.2. $\mathbf{F} = \{n \in \mathbb{N},\ n > 2 \mid \text{найдутся } x, y, z \in \mathbb{N}, \text{ для которых } x^n + y^n = z^n\}$.

Элементами множества могут быть множества. Например, во множестве

$$\{1, \{1\}, \{2, 3\}\}$$

три элемента: число 1, множество, единственным элементом которого является число 1, и множество из двух элементов – чисел 2 и 3.

?

- **Дайте определение множества. Можно ли ввести такое понятие?**
- **Что означает, что «множество может задаваться перечислением своих элементов»?**

Удобно ввести в рассмотрение *пустое множество* – множество, в котором нет ни одного элемента. Обозначение: $\varnothing$.

Общепринятые сокращения записи.

Если P и Q – два утверждения, то запись $P \Rightarrow Q$ называется *импликацией* и означает, что если верно P, то верно и Q (из P следует Q, P влечёт Q) или P достаточно для Q (Q необходимо для P).

Если $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, то говорят, что утверждения P и Q *равносильны* (или *эквивалентны*) или P необходимо и достаточно для Q. Обозначение: $P \Leftrightarrow Q$.

$\forall$ – ***квантор всеобщности***;

$\exists$ – ***квантор существования***;

$\exists!$ – «существует и единственный»;

$:=$ **или** $\overset{\text{def}}{=}$ – «равенство по определению»;

Определение. Если каждый элемент множества $\mathbf{A}$ принадлежит множеству $\mathbf{B}$[a], то говорят, что $\mathbf{A}$ *содержится в* $\mathbf{B}$ (или $\mathbf{A}$ подмножество $\mathbf{B}$).

Обозначение: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$.

[a] Т.е. $\forall x \in \mathbf{A} \Rightarrow x \in \mathbf{B}$

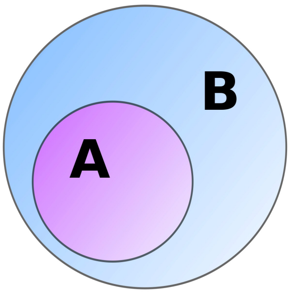


Рис. 1. Включение множеств

Определение. Если множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ состоят из одних и тех же элементов, то их называют *равными* и пишут $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Другими словами $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$:

$$(\forall x \in \mathbf{A} \Rightarrow x \in \mathbf{B}) \text{ и } (\forall y \in \mathbf{B} \Rightarrow y \in \mathbf{A}) \iff \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

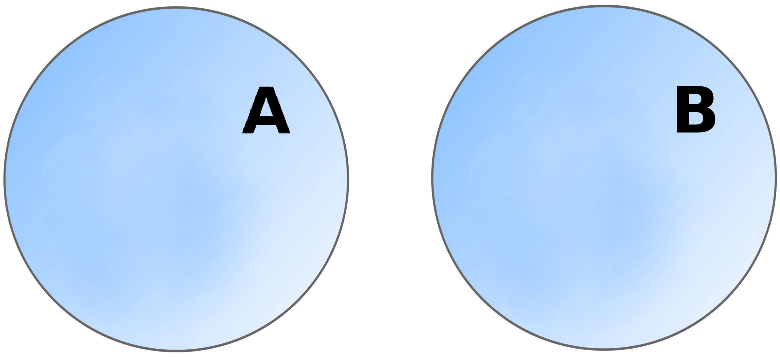


Рис. 2. Равенство множеств

Операции над множествами.

Бинарные операции.

1. *Объединением множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ называется множество всех элементов, лежащих в $\mathbf{A}$ или в $\mathbf{B}$. Обозначение: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} := \left\{ x \in \mathbf{M} \,\middle|\, x \in \mathbf{A} \text{ или } x \in \mathbf{B} \right\}.$$

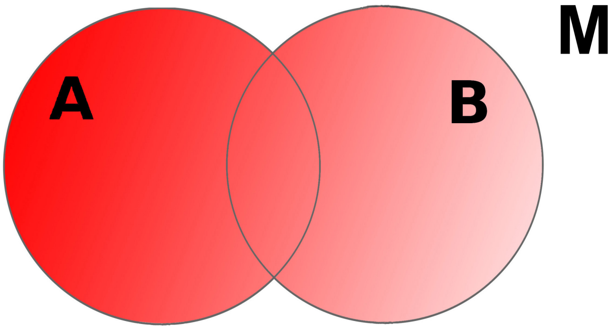


Рис. 3. Объединение множеств

2. *Пересечением множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ называется множество всех элементов, лежащих и в $\mathbf{A}$, и в $\mathbf{B}$. Обозначение: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} := \left\{ x \in \mathbf{M} \,\middle|\, x \in \mathbf{A} \text{ и } x \in \mathbf{B} \right\}.$$

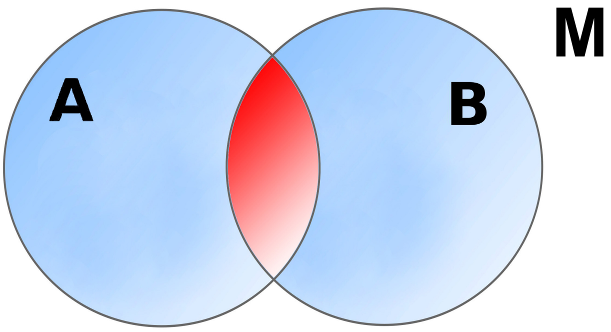


Рис. 4. Пересечение множеств

3. *Разностью множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ называется множество всех элементов, лежащих в $\mathbf{A}$, но не лежащих в $\mathbf{B}$. Обозначение: $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \setminus \mathbf{B} := \left\{ x \in \mathbf{M} \,\middle|\, x \in \mathbf{A} \text{ и } x \notin \mathbf{B} \right\}.$$

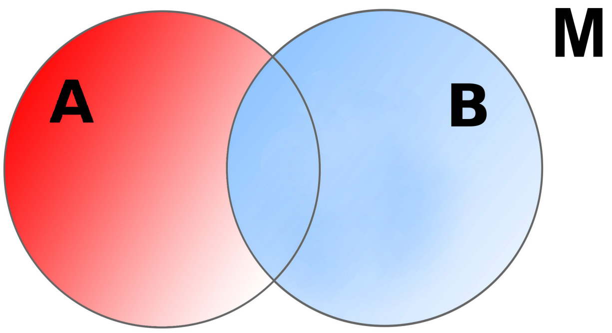


Рис. 5. Разность множеств

4. *Симметрическая разность множеств* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$.

$$\mathbf{A} \vartriangle \mathbf{B} := \left\{x \in \mathbf{M} \,\middle|\, (x \in \mathbf{A} \text{ и } x \notin \mathbf{B}) \text{ или } (x \in \mathbf{B} \text{ и } x \notin \mathbf{A})\right\} =$$

$$= (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \setminus (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}).$$

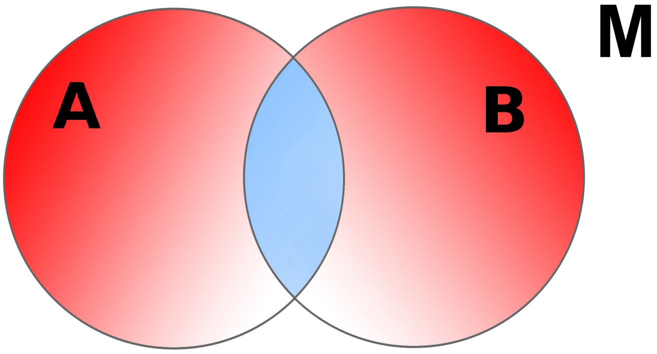


Рис. 6. Симметрическая разность множеств

Пример 1.3. $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения.

Доказательство. Пусть $x \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} \Rightarrow \big(x \in \mathbf{A}$ или $x \in \mathbf{B}\big)$ и $x \in \mathbf{C} \Rightarrow$
$\Rightarrow \big(x \in \mathbf{A}$ и $x \in \mathbf{C}\big)$ или $\big(x \in \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{C}\big) \Rightarrow x \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$.

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} \subset (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$.

Пусть $x \in (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \Rightarrow x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{C}$ или $x \in \mathbf{B} \cap \mathbf{C} \Rightarrow$
$\Rightarrow \big(x \in \mathbf{A}$ и $x \in \mathbf{C}\big)$ или $\big(x \in \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{C}\big) \Rightarrow x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ и $x \in \mathbf{C} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$. □

$(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) \subset (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$.

Задача 1. Докажите равенство: $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$.

5. Пусть мы работаем с подмножеством некоего объёмлющего множества $\mathbf{M}$. *Дополнением множества* $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$ (*дополнение* $\mathbf{A}$ *до* $\mathbf{M}$) называется множество

Унарная операция.

$$\mathbf{A}^C = \left\{x \in \mathbf{M} \,\middle|\, x \notin \mathbf{A}\right\}^{1}.$$

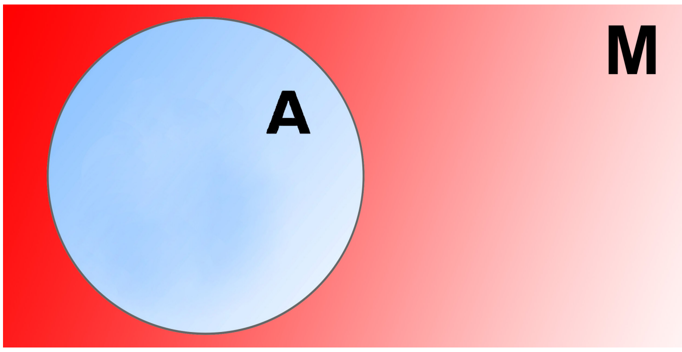


Рис. 7. Дополнение множества

[1] C – compliment.

Пример 1.4. $\mathbb{Q}^C = \mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел;

Пример 1.5. $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^C = \mathbf{A}^C \cap \mathbf{B}^C$.

правила двойственности или формулы де Моргана

Доказательство. $x \in (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})^C \Leftrightarrow x \notin (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \Leftrightarrow x \notin \mathbf{A}$ и $x \notin \mathbf{B} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbf{A}^C \text{ и } x \in \mathbf{B}^C \Leftrightarrow x \in \mathbf{A}^C \cap \mathbf{B}^C.$$

□

Задача 2. Докажите равенство: $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^C = \mathbf{A}^C \cup \mathbf{B}^C$.

Определение. *Упорядоченная пара* (a, b) – два элемента (возможно, совпадающие), для которых указано, какой из этих элементов первый, какой второй. При этом, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$.

$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$.

6. *Декартовым произведением множеств* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ называется множество $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{B}$.

Аналогично вводится понятие декартова произведения n множеств,

$$\mathbf{A}_1 \times \ldots \times \mathbf{A}_n.$$

Пример 1.6. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ – плоскость;

Пример 1.7. $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}\right\}$ – n-мерное пространство.

Задача 3. Мадемуазель Татьяна Пак любит домашних животных. Известно, что у неё не менее трёх животных. Все её животные, кроме двух – собаки; все кроме двух – кошки; все кроме двух – попугаи; все, кроме собак, кошек и попугаев – тараканы. Опишите множество животных у мадемуазель Татьяны Пак;

Задача 4. Проверьте, что выполнено равенство:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \setminus (\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}).$$

Можно ли выразить разность через пересечение и объединение?

Задача 5. Докажите, что если $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{C}$, то $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$;

Задача 6. Опишите множество, являющееся декартовым произведением двух окружностей;

2 Понятие отображения множеств.

Пусть заданы некоторые непустые множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Говорят, что f – *отображение множества* $\mathbf{A}$ *во множество* $\mathbf{B}$, или *функция, действующая из* $\mathbf{A}$ *в* $\mathbf{B}$, если указано правило, сопоставляющее (каждому) элементу множества $\mathbf{A}$ **единственный** элемент из множества $\mathbf{B}$. Тот элемент, который, посредством отображения f, сопоставляется x обозначается через $f(x)$[2]. Обозначение: $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

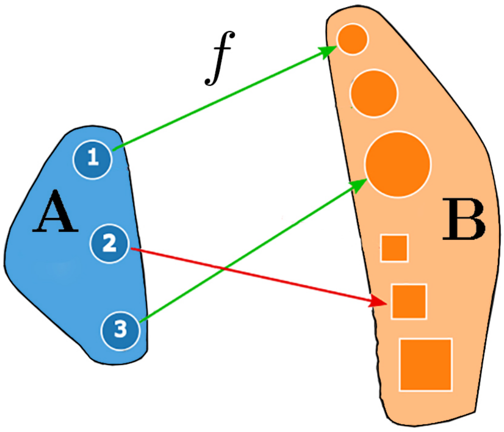


Рис. 8. Отображение множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

При этом множество $\mathbf{A}$ называется *областью определения отображения* f, а множество $\mathbf{B}$ – *областью значений.*

Определение. *Образом множества* $\mathbf{E} \subset \mathbf{A}$ называется множество

$$f(\mathbf{E}) = \left\{ y \in \mathbf{B} \,\middle|\, \exists x \in \mathbf{E},\ y = f(x) \right\}.$$

Определение. *Прообразом множества* $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}$ называется множество

$$f^{-1}(\mathbf{C}) = \left\{ x \in \mathbf{A} \,\middle|\, f(x) \in \mathbf{C} \right\}.$$

Пример 2.1. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \implies f^{-1}(1) = \{1, -1\}$, $f^{-1}(-1) = \varnothing$.

Пример 2.2. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 \implies f^{-1}(1) = \{1\}$.

Примеры функций.

Пусть $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

1. **$\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$. f называется *числовой функцией*;**
2. **$\mathbf{A}$ – произвольно, $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$. f называется *функционалом*;**
3. **$\mathbf{A} = \mathbb{N}$, $\mathbf{B}$ – произвольно. f называется *последовательностью*, а при $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ – *числовой последовательностью*.**
   Обозначение: f_n, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ вместо $f(n)$.

[2]Далее функции обозначаются без аргумента. Например, функция f. Обозначение $f(x)$ будет применяться для указания `значения функции` f `на элементе(в точке)` x.

Определение. *Графиком отображения* $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ называется подмножество Γ_f множества $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, такое что:

$$\Gamma_f = \big\{(a,b) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} \,\big|\, a \in \mathbf{A}, b = f(a)\big\}.$$

Определение. Отображение $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$, получающееся в результате последовательного выполнения двух отображений

$$\mathbf{A} \xrightarrow{f} \mathbf{B} \xrightarrow{g} \mathbf{C}$$

называется *композицией отображений g и f*. Обозначение: $g \circ f$. Таким образом,

$$\forall x \in \mathbf{A} \;\; (g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big).$$

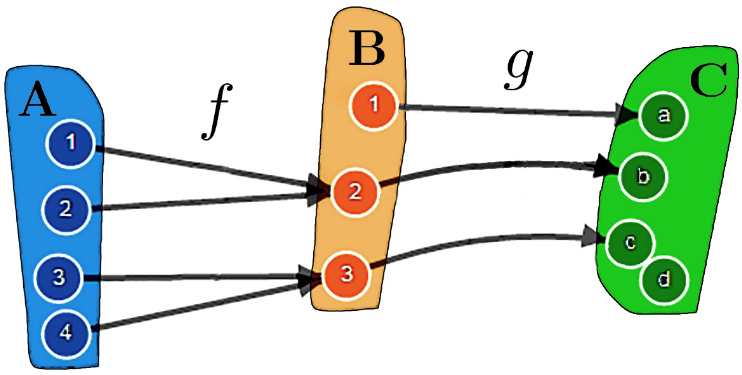


Рис. 9. Композиция отображений f и g

Композиция $g \circ f$ определена тогда и только тогда, когда образ f содержится в множестве, на котором определено отображение g.

Задача 1. Приведите пример ситуации, когда композиция $g \circ f$ определена, а $f \circ g$ – нет. Этим будет показано, что операция композиции отображений, вообще говоря, не коммутативна.

Композицию трёх отображений

$$\mathbf{A} \xrightarrow{f} \mathbf{B} \xrightarrow{g} \mathbf{C} \xrightarrow{h} \mathbf{D}$$

можно вычислять двумя способами: как $(h \circ g) \circ f$ или $h \circ (g \circ f)$. В обоих случаях получится отображение, переводящее точку $x \in \mathbf{A}$ в точку $h\big(g\big(f(x)\big)\big) \in \mathbf{D}$. Иначе говоря, композиция отображений ассоциативна:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Зависит ли композиция нескольких отображений

$$f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$$

(если она определена) от расстановки скобок?

Вопросы для самоконтроля.

- **Какие из операций над множествами не являются симметричными? Т.е. не выполняется равенство**

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{B} * \mathbf{A}.$$

- **Может ли разность множеств $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ быть пустым?**
- **Какие объекты являются элементами декартова произведения множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$?**

Теория множеств. Принципы полноты.

ГЛАВА

II

1 Теория вещественных чисел

Будем считать множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ целых чисел и $\mathbb{Q}$ рациональных чисел известными.

Наша ближайшая цель – построить множество вещественных (действительных) чисел, $\mathbb{R}$.

?

- **Какими свойствами обладают вещественные числа по сравнению с рациональными?**
- **Что у них общего? Что различного?**
- **Каким требованиям должны удовлетворять элементы множества вещественных чисел?**

Аксиоматика вещественных чисел

Аксиоматический метод обладает теми же преимуществами, что и воровство перед честным трудом.

Б. Рассел

I. Правила сложения.

На множестве $\mathbb{R}$ определено отображение *(операция сложения)*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый *суммой x и y*. При этом, выполнены следующие свойства:

I_1. существует *нейтральный элемент* $0 \in \mathbb{R}$ (называемый в случае сложения *нулём*), что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x + 0 = 0 + x = x;$$

I_2. $\forall x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый *противоположным к x*, такой что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

I_3. операция сложения *ассоциативна*, т.е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

I_4. операция сложения *коммутативна*, т.е. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x + y = y + x.$$

Если на множестве **G** определена операция, удовлетворяющая условиям $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$,

$\mathbf{I_3}$, то говорят, что на $\mathbf{G}$ задана *структура группы* или, что $\mathbf{G}$ есть *группа*. Если операцию называют сложением, то группа называется *аддитивной*. Если, кроме того, выполнено условие $\mathbf{I_4}$, то группу называют *коммутативной* или *абелевой*.

Определение. *Разность чисел b и a* – это такое число x, что $b = a + x$.

Утверждение 1.1. Разность чисел b и a существует, единственна и равна $b+(-a)$.

Доказательство. $b = a + x \overset{+(-a)}{\iff} b + (-a) = x$. ∎

II. Правила умножения.

На множестве $\mathbb{R}$ определено отображение *(операция умножения)*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый *произведением* x *и* y, для которого выполнены следующие условия:

$\mathbf{II_1}$. существует *нейтральный элемент* $1 \in \mathbb{R}$ (называемый в случае умножения *единицей*[a]), что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x;$$

$\mathbf{II_2}$. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеется элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый *обратным к* x, такой что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$$

$\mathbf{II_3}$. операция умножения *ассоциативна*, т.е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

$\mathbf{II_4}$. операция умножения *коммутативна*, т.е. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ является *(мультипликативной) группой*.

[a] Требуем, чтобы $1 \neq 0$, т.е., что рассматриваемая система не состоит из одного элемента.

Связь сложения и умножения.

(I, II) Умножение *дистрибутивно* по отношению к сложению, т.е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Если на множестве $\mathbf{G}$ действуют две операции, удовлетворяющие всем перечисленным правилам (аксиомам), то $\mathbf{G}$ называется *алгебраическим (числовым) полем*, или просто *полем*.

Упражнение. Докажем, что обратный элемент единственен как для операции сложения, так и для умножения.

Доказательство. Проведем рассуждения для операции сложения. Пусть $\exists x \in \mathbb{R}$ и два ему противоположных x_1 и x_2 : $x + x_1 = 0$, $x + x_2 = 0$. Тогда, используя ассоциативность операции сложения, получаем:

$$x_2 = 0 + x_2 = (x_1 + x) + x_2 = x_1 + (x + x_2) = x_1 + 0 = x_1.$$

$\square$

Упражнение. Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено $0 \cdot x = 0$.

Доказательство. Получаем, $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$.
Прибавим к обеим частям этого равенства обратный элемент $-(0 \cdot x)$:

$$-(0 \cdot x) + 0 \cdot x = -(0 \cdot x) + 0 \cdot x + 0 \cdot x \Leftrightarrow 0 = 0 \cdot x.$$

$\square$

Упражнение. Докажем, что $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено $-x = (-1) \cdot x$.

(-1) – обратный элемент к 1

Доказательство. Получаем,

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = \big(1 + (-1)\big) \cdot x = 0 \cdot x \overset{\text{упр.}}{=} 0.$$

$\square$

Упражнение. Докажем, что $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Доказательство. Используя, доказанные в предыдущих упражнениях равенства: $(-1) \cdot 0 = 0$ и $(-1) \cdot 1 = -1$, получаем:

$$1 + (-1) = 0 \overset{|\cdot(-1)}{\Longleftrightarrow} -1 + (-1) \cdot (-1) = 0 \overset{|+1}{\Longleftrightarrow} (-1) \cdot (-1) = 1$$

$\square$

III. Правила порядка.

Между любыми двумя элементами из $\mathbb{R}$ имеется *отношение неравенства*[a] „$\leqslant$“, которое можно рассматривать как отображение

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \{\textbf{истина}, \textbf{ложь}\},$$

т.е. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ установлено, выполняется ли отношение $x \leqslant y$ или нет. При этом должны быть справедливы следующие условия:

III$_1$. $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено $x \leqslant x$ *(рефлексивность)*;

III$_2$. из $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ следует $x = y$ *(антисимметричность)*;

III_3. из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ следует $x \leqslant z$ *(транзитивность)*;

III_4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ выполнено или $x \leqslant y$, или $y \leqslant x$.

Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение неравенства, удовлетворяющее свойствам $\mathrm{III}_1, \mathrm{III}_2, \mathrm{III}_3$ называют *частично упорядоченным*, а если кроме того, выполнено свойство III_4, т.е. любые два элемента множества сравнимы, то множество называется *линейно упорядоченным*.

[a]Бинарное отношение.

Задача 1. Докажите, что множество всех подмножеств некоего объёмлющего множества **частично упорядочено**, если определить между ними следующее отношение порядка: $\mathbf{M}_1 \leqslant \mathbf{M}_2$, если $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_2$.

Задача 2. Докажите, что множество натуральных чисел **частично упорядочено** (но не **вполне упорядочено**), если определить между ними следующее отношение порядка: $n \leqslant m$, если n делится без остатка на m.

(I, III) Связь сложения и порядка в $\mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \text{ и } \forall z \in \mathbb{R} \implies x + z \leqslant y + z;$$

(II, III) Связь умножения и порядка в $\mathbb{R}$:

Для $x, y, z \in \mathbb{R}$, таких что $x \leqslant y$ и $0 \leqslant z$ выполнено неравенство:

$$x \cdot z \leqslant y \cdot z.$$

Упражнение. Докажем, что $0 < 1$[a].

[a]Под обозначением «$x < y$» понимается $x \leqslant y$ и $x \neq y$.

Доказательство. То, что $1 \neq 0$ было постулировано в $\mathbf{II_1}$. Предположим, что $1 < 0$, и прибавим к обеим частям данного неравенства (-1). Получаем: $0 < -1$. Перемножая данное неравенство с самим собой[a], и используя свойство $(\mathbf{II,III})$, имеем $0 < (-1) \cdot (-1) \overset{\text{упр.}}{=} 1$. Противоречие! □

[a]Т.е. домножая обе части на (-1), и используя полученное неравенство $0 < -1$.

NB! Заметим, что всем уже перечисленным условиям (**аксиомам**) удовлетворяет и множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, но вот следующему требованию множество $\mathbb{Q}$ уже не отвечает.

IV. Принцип полноты Кантора-Дедекинда[a].

Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для $\forall x \in \mathbf{X}$ и $\forall y \in \mathbf{Y}$ выполнено $x \leqslant y$[b], то $\exists c \in \mathbb{R}$ (называемый *разделяющим элементом*), что $x \leqslant c \leqslant y$ для любых элементов **$x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$.**

[a]Аксиома полноты/непрерывности.
[b]В этом случае говорят, что *множество* $\mathbf{Y}$ *лежит правее множества* $\mathbf{X}$, или что *множество* $\mathbf{X}$ *лежит левее множества* $\mathbf{Y}$

в вещественных числах нет «дырок».

NB! Важным фактом является то, что элемент c найдётся не для каждой пары x и y в отдельности, а он **один и тот же для всех элементов из данных множеств.**

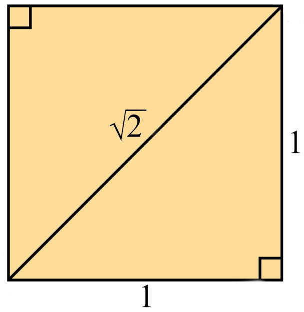


Рис. 10. Диагональ единичного квадрата

Пример 1.1. Существование $\sqrt{2}$.

$x = \sqrt{2}$ **– положительное число, которое в квадрате равно 2.**

? **Существует ли у уравнения $x^2 = 2$ корень во множестве $\mathbb{R}$?**

Вопрос актуален, т.к., например, во множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ это уравнение решений не имеет. Действительно, пусть существует несократимая **дробь $\frac{p}{q}$, для которой выполнено равенство** $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \xrightarrow{p-\text{чётное}} p = 2k \Longrightarrow p^2 = 4k^2 \xrightarrow{p^2=2q^2} q^2 = 2k^2.$$

То есть, q также чётно, а значит дробь $\frac{p}{q}$ – сократима. Противоречие(!)

? **Может быть, уравнение $x^2 = 2$ вообще не имеет решений? Докажем, что это не так.**

Рассмотрим два множества $\mathbf{A} = \left\{x > 0 \middle| x^2 < 2\right\}$ и $\mathbf{B} = \left\{x > 0 \middle| x^2 > 2\right\}$. Имеем $1 \in \mathbf{A}$, $2 \in \mathbf{B}$, поэтому данные множества не пусты.

Докажем, что множество $\mathbf{A}$ лежит левее множества $\mathbf{B}$. $\forall a \in \mathbf{A}$ и $\forall b \in \mathbf{B}$ получаем: $0 < b^2 - a^2 = (b-a)\overbrace{(b+a)}^{>0} \Rightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow a < b$. По принципу Кантора-Дедекинда **получаем, что $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall a \in \mathbf{A}$ и $\forall b \in \mathbf{B}$ выполнено $a \leqslant c \leqslant b$[a]. Докажем, что $c^2 = 2$. Предположим, что $c^2 < 2$ (случай $c^2 > 2$ рассматривается аналогично). Найдём $\delta \in (0, 1)$: $c + \delta > 0$ и $(c+\delta)^2 < 2$.**

Если мы найдём такое δ, то получится, что $c + \delta \in \mathbf{A}$, но $c + \delta > c$, т.е. c не разделяющий элемент.

Заметим, что

$$(c+\delta)^2 = c^2 + \delta(2c+\delta) <^{[b]} < c^2 + 5\delta.$$

Положим $\delta = \frac{2-c^2}{5} > 0$**, для него** $(c+\delta)^2 < 2$**.** □

[a]Разделяющий элемент c и есть «кандидат» на решение уравнения $x^2 = 2$. Как было отмечено выше, $1 < c < 2$.

[b]$c < 2$, $\delta < 1$

Зам. При **аксиоматическом** определении объекта возникают три вопроса.

? **Является ли построенная система аксиом**

1. **непротиворечивой (т.е. не следует ли из неё одновременно некоторое утверждение и его отрицание)?**
2. **независимой (т.е. не является ли одна из аксиом следствием остальных)?**
3. **полной (т.е. единственный ли объект описывается системой аксиом)?**

Мы не будем обсуждать эти вопросы и примем на веру, что для приведённой аксиоматики вещественных чисел ответ на них, после некоторых уточнений, положителен.

Определение. Множество $\mathbb{R}$, элементы которого удовлетворяют **всем** перечисленным условиям (**аксиомам**) называется *множеством действительных* (или *вещественных*) *чисел*.

Задача 3. Для каждого из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ укажите, какие из аксиом действительных чисел в них не выполняются.

2 Ограниченные и неограниченные множества

Определение. Говорят, что *множество* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху (снизу)*, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbf{X} \implies x \leqslant M \ (M \leqslant x).$$

Число M, в этом случае, называют *верхней (нижней) границей множества* $\mathbf{X}$ или также *мажорантой (минорантой) множества* $\mathbf{X}$.

Отрицание. *Множество* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ *не ограничено сверху (снизу)*, если

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbf{X} : x > M \ (x < M).$$

Определение. Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным.*

Зам. Если M (m) – верхняя (нижняя) граница множества $\mathbf{X}$, то всякое число большее M (меньшее m) **тоже верхняя (нижняя) граница множества** $\mathbf{X}$.

Зам. Ограниченность множества $\mathbf{X}$ равносильна «**ограниченности по модулю**», т.е.

$$\mathbf{X} - \text{ограничено} \iff \exists L > 0 : \forall x \in \mathbf{X} \implies |x| \leqslant L.$$

Доказательство. Пусть $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow m \leqslant x \leqslant M$. Берём в качестве $L = \max\{|m|, |M|\}$.

Обратно, выбираем $m = -|L|, \quad M = |L|$. □

Определение. Число a называется *максимумом* или *наибольшим элементом* (*минимумом* или *наименьшим элементом*) *множества* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если

$$a \in \mathbf{X} \text{ и } \forall x \in \mathbf{X} \implies x \leqslant a \ \ (a \leqslant x).$$

Обозначение: $a = \max \mathbf{X}$ $(a = \min \mathbf{X})$

NB! Из условия $\mathbf{III_2}$ порядка следует, что если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он **только один**. Однако, **не во всяком, даже ограниченном множестве имеется максимальный или минимальный** элемент.

Задача 1. Докажите, что во множестве

$$\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, 0 < x < 1\} = (0, 1)$$

нет, ни минимального, ни максимального элемента.

? **В каких числовых множествах всегда есть наибольший и наименьший элементы?**

Теорема 1. *(существование максимума и минимума конечного множества).* Во всяком конечном непустом подмножестве множества $\mathbb{R}$ есть наибольший и наименьший элементы.

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по числу n элементов множества. База индукции $n = 1$. Если во множестве всего один элемент, то он наибольший и наименьший.

Индукционный переход проведём для максимума. Пусть всякое n-элементное подмножество $\mathbb{R}$ имеет максимум, а $\mathbf{X}$ – $(n+1)$-элементное подмножество:

$$\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}.$$

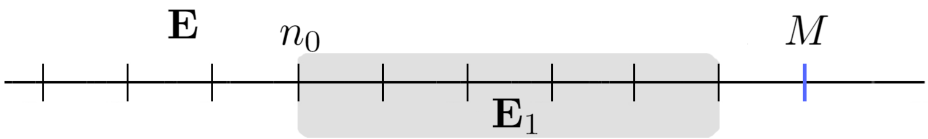
Обозначим $c = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Если $c \leqslant x_{n+1}$, то $x_{n+1} = \max \mathbf{X}$, иначе $c = \max \mathbf{X}$. □

***Следствие* 1.** Во всяком непустом ограниченном сверху (снизу) подмножестве $\mathbb{Z}$ есть наибольший (наименьший) элемент.

Доказательство. Не ограничивая общности, докажем данное утверждение для ограниченного сверху множества. Пусть $\mathbf{E} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbf{E} \neq \varnothing$, $\mathbf{E}$ – ограничено сверху. Выберем произвольный элемент $n_0 \in \mathbf{E}$, и положим $\mathbf{E}_1 = \left\{n \in \mathbf{E} \middle| n \geqslant n_0\right\}$.

Поскольку множество $\mathbf{E}$ ограничено сверху, множество $\mathbf{E}_1$ – конечно. Если $M \in \mathbb{N}$ – одна из верхних границ множества $\mathbf{E}$, то в множестве $\mathbf{E}_1$ не более $(M - n_0 + 1)$ элементов. По теореме 1 в множестве $\mathbf{E}_1$ есть наибольший элемент. Ясно, что он и будет наибольшим элементом $\mathbf{E}$.

□



На самом деле, данное утверждение равносильно принципу математической индукции. Действительно, пусть теорема 1 верна. Докажем, что: некоторое утверждение справедливо для всякого натурального n, если:

1. **оно справедливо для $n = 1$ и**
2. **из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$.**

Доказательство. Предположим противное, т.е. предположим, что утверждение справедливо не для всякого натурального n. Тогда существует такое натуральное m, что:

1. **утверждение для $n{=}m$ несправедливо,**
2. **для всякого n, меньшего m, утверждение справедливо (иными словами, m есть первое натуральное число, для которого утверждение несправедливо).**

Очевидно, что $m > 1$, так как для $n = 1$ утверждение справедливо (условие 1.). Следовательно, m - 1 —натуральное число. Выходит, что для *натурального* числа m - 1 утверждение справедливо, а для следующего натурального числа m оно несправедливо. Это противоречит условию 2. □

Здесь мы воспользовались тем, что в любой совокупности натуральных чисел содержится наименьшее. Поэтому, любое из этих утверждений можно принять за одну из аксиом, определяющих натуральный ряд, — тогда другое будет теоремой. Обычно за аксиому принимают сам принцип математической индукции, называя его *аксиомой натуральных чисел*.

Определение. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Наибольшее целое число, не превосходящее x, называется *целой частью* x. Обозначение: $[x]$.

Существование целой части обеспечивается следствием из теоремы 1; единственность –

следует из определения, и единственности максимума. Следовательно определение корректно.

Зам. Из определения следует, что

$$[x] \leqslant x < [x] + 1, \quad x - 1 < [x] \leqslant x.$$

Обратно, если $y \in \mathbb{Z}$ и $x - 1 < y \leqslant x$, то $y = [x]$.

Определение. Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ сверху называется *точной верхней гранью множества* $\mathbf{X}$. Обозначение: $\sup \mathbf{X}$.

Супремум.

$$\beta = \sup \mathbf{X} \iff \mathbf{1})\ \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \leqslant \beta;\ \ \mathbf{2})\ \forall \beta' < \beta\ \exists x \in \mathbf{X} : x > \beta' \iff$$

$$\iff \mathbf{1})\ \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \leqslant \beta;\ \ \mathbf{2})\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \mathbf{X} : x' > \beta - \varepsilon.$$

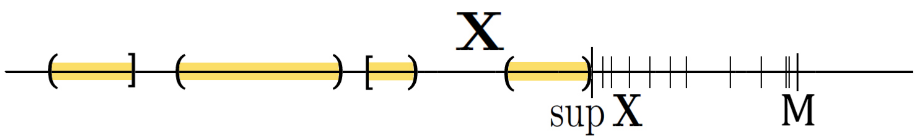


Рис. 11. Супремум множества

Определение. Наибольшее из чисел, ограничивающих множество $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ снизу называется *точной нижней гранью множества* $\mathbf{X}$. Обозначение: $\inf \mathbf{X}$.

Инфимум.

$$\alpha = \inf \mathbf{X} \iff \mathbf{1})\ \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \geqslant \alpha;\ \ \mathbf{2})\ \forall \alpha' > \alpha\ \exists x \in \mathbf{X} : x < \alpha' \iff$$

$$\iff \mathbf{1})\ \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \geqslant \alpha;\ \ \mathbf{2})\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \mathbf{X} : x' < \alpha + \varepsilon.$$

Выше говорилось, что не всякое (даже ограниченное) множество обладает минимальным и максимальным элементами. Выясним вопрос: всегда ли у числового множества существует его верхняя (нижняя) грань? Если множество не ограничено сверху (снизу), то не существует чисел, которые бы ограничивали его сверху (снизу). Таким образом, в данном случае у числового множества нет верхней (нижней) грани. Если же множество ограничено, ответ даёт следующая теорема:

Теорема 2. *(принцип существования точной верхней грани[a]).* Всякое непустое ограниченное сверху числовое множество $\mathbf{X}$ имеет, и притом единственную, точную верхнюю грань.

[a]Принцип полноты Вейерштрасса.

Второй принцип полноты

Доказательство.

Единственность точной грани моментально следует из единственности минимального элемента, но докажем её непосредственно.

Предположим, что каждое из чисел b и b' ($b \neq b'$) является точной верхней гранью $\mathbf{X}$. Не ограничивая общности считаем, что $b > b'$. Тогда, в силу того, что $b = \sup \mathbf{X}$, из определения точной верхней грани следует, что для числа b' найдётся $x \in \mathbf{X}$, что $x > b'$. Следовательно, b' не является верхней границей. **Противоречие**, доказывающее, что точная верхняя грань **единственна**.

Докажем **существование** верхней грани. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ – непустое ограниченное сверху множество, а $\mathbf{Y} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall x \in \mathbf{X} \Rightarrow x \leqslant y \right\}$ – множество верхних границ множества $\mathbf{X}$. По условию, $\mathbf{X} \neq \varnothing$ и $\mathbf{Y} \neq \varnothing$. Тогда в силу принципа полноты Кантора-Дедекинда найдётся число $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in \mathbf{X}$ и $\forall y \in \mathbf{Y}$ выполнено:

$$x \leqslant \gamma \leqslant y.$$

Число γ, таким образом, является мажорантой $\mathbf{X}$, и минорантой $\mathbf{Y}$. Как мажоранта $\mathbf{X}$, число γ является элементом множества $\mathbf{Y}$, но как миноранта $\mathbf{Y}$, число γ является его минимальным элементом. Итак, $\gamma = \min \mathbf{Y} = \sup \mathbf{X}$. □

Аналогично доказывается существование и единственность точной **нижней** грани у ограниченного снизу числового множества, т.е. верна следующая теорема:

Теорема 2*. *(принцип существования точной нижней грани)* Всякое непустое ограниченное снизу числовое множество имеет, и притом единственную, точную нижнюю грань.

NB! Заметим, что если числовое множество обладает максимальным элементом, то он всегда совпадает с его точной верхней гранью. Обратное неверно. Например, у множества $\mathbf{X} = (0, 1)$ нет максимального элемента, но $\exists \sup \mathbf{X} = 1$.

Аналогичные рассуждения имеют место и для $\inf / \min$.

Теорема 3. *(принцип Архимеда).* Каково бы ни было действительное число a, существует такое **натуральное** n, что $n > a$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists a \in \mathbb{R}$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $n \leqslant a$. Следовательно, множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда по теореме 2 $\exists \sup \mathbb{N} = \gamma$. Далее, т.к. $\gamma - 1 < \gamma$, то $\exists n^* \in \mathbb{N}$, что $n^* > \gamma - 1$, т.е. $n^* + 1 > \gamma$, но $(n^* + 1) \in \mathbb{N}$. Поэтому $\gamma \neq \sup \mathbb{N}$. **Противоречие!** □

У древних греков данное утверждение формулировалось *геометрически*: любые два отрезка *соизмеримы*. Т.е. какими бы ни были отрезки, один можно отложить несколько раз, так чтобы эта сумма стала больше другого.

Теорема 4. *(плотность множества рациональных чисел).* Во всяком интервале действительной прямой есть рациональное число.

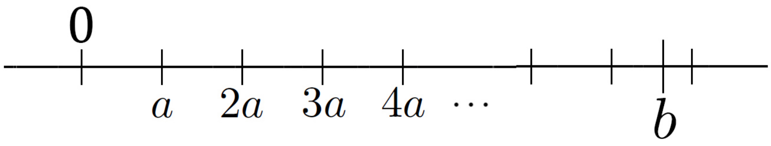


Рис. 12. Соизмеримость отрезков

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Тогда $\frac{1}{b-a} > 0$, и по принципу Архимеда $\exists n \in \mathbb{N}$, что $n > \frac{1}{b-a}$, т.е. $\frac{1}{n} < b - a$. Положим $c = \frac{[na]+1}{n}$. Тогда $c \in \mathbb{Q}$ и $c > \frac{na-1+1}{n} = a$, $c \leqslant \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b \Longrightarrow c \in (a, b)$. □

Свойство, выраженное в теореме 4, называют *(всюду) плотностью множества $\mathbb{Q}$ во множестве $\mathbb{R}$*.

***Следствие* 1.** Во всяком интервале бесконечно много рациональных чисел.

Доказательство. От противного. Пусть в некотором интервале (a, b) количество рациональных чисел конечно. Обозначим через x_1 наименьшее из них. Тогда в интервале (a, x_1) нет ни одного рационального числа, что противоречит теореме 4. □

3 Принцип вложенных отрезков

Определение. Система числовых отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется *системой вложенных отрезков*, если

$a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \qquad (*)$$

т.е. каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ содержится в предыдущем $[a_n, b_n]$:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots.$$

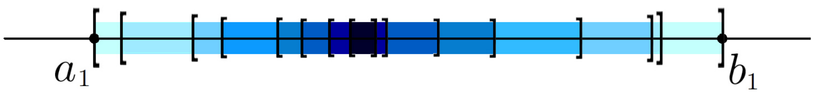


Рис. 13. Вложенные отрезки

Теорема 5. *(принцип вложенных отрезков Кантора).* Всякий набор вложенных отрезков имеет хотя бы одну общую точку. Более того, если среди этих отрезков встречаются отрезки сколь угодно малой длины[a], то такая общая точка – единственная.

Третий принцип полноты

[a]Т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists [a, b] \in \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : b - a < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} = \{a_n\}$ – множество левых концов отрезков, а $\mathbf{B} = \{b_n\}$ – множество правых концов. Данные множества непустые. В силу неравенств (*) получаем, что множество $\mathbf{A}$ ограничено сверху (любым b_n), а множество $\mathbf{B}$ ограничено снизу (любым a_n). Следовательно, по принципу точных граней существуют $\sup \mathbf{A}$ и $\inf \mathbf{B}$, которые мы обозначим α и β соответственно. Т.к. α ограничивает множество $\mathbf{B}$ снизу[a], а β – наибольшее из чисел, ограничивающих множество $\mathbf{B}$ снизу, то выполнено $\alpha \leqslant \beta$. Поэтому,

$$\forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b_n \implies [\alpha, \beta]^b \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Кроме того, из последнего неравенства вытекает, что $b_n - a_n \geqslant \beta - \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Откуда, если $\alpha \neq \beta$, т.е. $\beta > \alpha$, то $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\left(\text{например, } \varepsilon_0 = \frac{\beta-\alpha}{2} > 0\right)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \implies b_n - a_n > \varepsilon_0,$$

или среди вложенных отрезков не встречаются отрезки сколь угодно малой длины. □

[a] От противного. Пусть $\exists n \in \mathbb{N} : b_n < \alpha$. Т.к. $\alpha = \sup \mathbf{A}$, то $\exists m \in \mathbb{N} : a_m \in (b_n, \alpha)$, т.е $b_n < a_m$, что противоречит неравенствам (*).

[b] Данный отрезок может перероdиться в точку.

Видно, что мы доказали более сильное утверждение, а именно, что любой набор попарно пересекающихся отрезков имеет хотя бы одну общую точку (т.к. вложенность отрезков нами нигде не использовалась).

Теорема Хелли.

Определение. Если для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ выполнено, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists [a, b] \in \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : b - a < \varepsilon,$$

то данная система называется *стягивающейся системой отрезков*[a]. Обозначение: $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

[a] Или *стягивающейся системой сегментов* (с.с.с.).

Упражнение. Докажите справедливость обратного утверждения к принципу вложенных отрезков Кантора. Т.е., если существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам системы, то данная система отрезков является стягивающейся.

Доказательство. Рассмотрим систему вложенных сегментов $\{[a_n, b_n]\}$, т.к. $\sup\{a_n\}$ и $\inf\{b_n\}$ заведомо общие точки[a], то они совпадают. Обозначим $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. По определению точных граней для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие номера n_1 и n_2, что:

$$a_{n_1} > \xi - \frac{\varepsilon}{2}, \quad b_{n_2} < \xi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Не ограничивая общности считаем, что $n_1 < n_2$, тогда получаем: $[a_{n_2}, b_{n_2}] \subset [a_{n_1}, b_{n_1}]$, и $a_{n_2} \geqslant a_{n_1} > \xi - \frac{\varepsilon}{2}$. Откуда, $b_{n_2} - a_{n_2} < \xi + \frac{\varepsilon}{2} - \xi + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Используя то, что рассматриваемая система сегментов - вложенная, получаем требуемое. □

[a] Следует из того, что существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам си-

стемы

NB! Для системы других типов множеств данный факт уже, вообще говоря, может не иметь место. Рассмотрим, например, систему полуинтервалов: $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$. Имеем $\left(0, \frac{1}{n}\right] \supset \left(0, \frac{1}{n+1}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, но общей точки у данных полуинтервалов **нет**[a].

[a] См. также лемму при изучении модели множества бесконечных десятичных дробей далее.

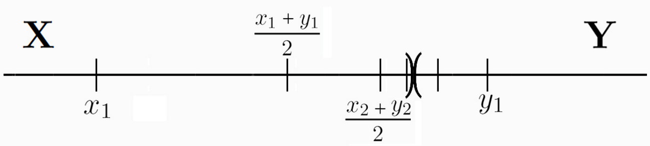
?

- **Существуют ли системы стягивающихся интервалов (полуинтервалов), имеющие непустое пересечение?**

Утверждение 3.1. Предположим, что имеет место **принцип Архимеда** и **принцип вложенных отрезков Кантора**. Тогда выполняется **принцип полноты Кантора-Дедекинда**.

Доказательство. Пусть для всякой системы вложенных отрезков $\left\{[a_n, b_n]\right\}$ найдётся хотя бы одна общая точка ξ, а также пусть каково бы ни было действительное число a найдётся $n \in \mathbb{N} : n > a$. Рассмотрим множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, обладающие тем свойством, что $\forall x \in \mathbf{X}$, $\forall y \in \mathbf{Y} \implies x \leqslant y$. Докажем, что существует $c \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant c \leqslant y$ для **любых** элементов $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$.

Выберем произвольные $x_1 \in \mathbf{X}$, $y_1 \in \mathbf{Y}$. Если $x_1 = y_1$, то $c = x_1 = y_1$ – разделяющий элемент. Иначе, поделим отрезок $[x_1, y_1]$ пополам. Если его середина, точка $\dfrac{x_1 + y_1}{2}$ уже разделяет множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, т.е. правее этой точки нет элементов из множества $\mathbf{X}$, а левее её – элементов множества $\mathbf{Y}$, то разделяющий элемент c нами найден. В противном случае, с одной из сторон средней точки найдутся элементы и из множества $\mathbf{X}$, и элементы из множества $\mathbf{Y}$. Обозначим эту половину через $[x_2, y_2]$[a]. Повторяем описанную процедуру ещё раз, и т.д.



В результате получаем следующее. Если наше построение заканчивается за конечное число шагов, то разделяющий элемент был нами построен. Если же нет, то мы получаем стягивающуюся систему сегментов, в каждом из которых существуют элементы и из множества $\mathbf{X}$, и из множества $\mathbf{Y}$. По принципу вложенных отрезков, существует точка c, принадлежащая каждому отрезку $[x_n, y_n]$. Докажем, что данная точка и является искомым "разделяющим элементом". Если

$\exists y \in \mathbf{Y}$ такой, что $y < c$, то по аксиоме Архимеда найдётся такой номер n, что $y < x_n$ (т.е. $y_n - x_n < c - y$[b]). Но в этом случае в отрезке $[x_n, y_n]$ отсутствуют элементы множества $\mathbf{X}$, что противоречит нашему предположению.

Аналогично рассматривается случай, когда $\exists x \in \mathbf{X}$ и $x > c$. □

[a] Безусловно, нами не утверждается, что $x_2 \in \mathbf{X}$, а $y_2 \in \mathbf{Y}$, но это в данном случае не важно.

[b] В силу того, что $y_n - x_n = \dfrac{l}{2^n} < c - y = \text{const}$, начиная с некоторого n.

Зам. От принципа (**аксиомы**) Архимеда в условиях теоремы отказаться нельзя. Существуют упорядоченные поля (**неархимедовы**), в которых выполняется принцип вложенных отрезков, но не выполнен принцип Архимеда.

Зам. Нами было доказано, что в архимедовых полях все три «принципа полноты»: принцип Кантора-Дедекинда, принцип точных граней и принцип вложенных отрезков, выводятся один из другого, а значит эквивалентны друг другу.

Изобразим все вышесказанное в виде диаграммы.

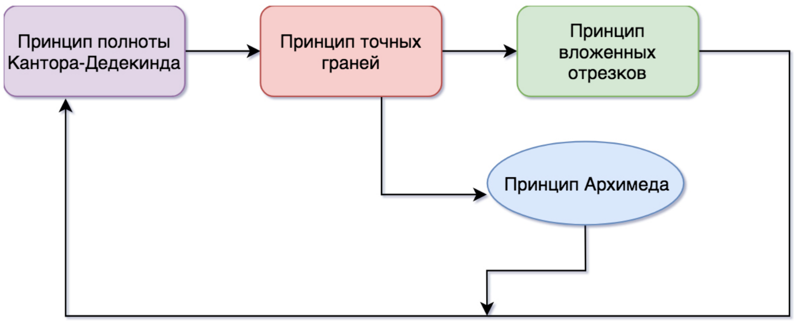


Рис. 14. Принципы полноты **I**

Задача 1. Пусть α - иррациональное число. Докажите, что для любых чисел $a < b$ можно выбрать *целые* числа m и n, для которых $a < m\alpha - n < b$. Можно ли выбрать числа m и n *натуральными*?

Задача 2. Докажите, используя принцип Архимеда, что каковы бы ни были числа a и b, $0 < a < b$, существует такое натуральное число k, что

$$(k-1)a \leqslant b < ka.$$

Задача 3. Покажите, что множество $\left\{\frac{m}{n}\right\}$ всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов.

Найдите точные нижнюю и верхнюю грани этого множества.

Задача 4. Существует ли такой набор I интервалов, лежащих в интервале $(0;1)$, что каждая рациональная точка интервала $(0;1)$ принадлежит конечному числу интервалов из I, а каждая иррациональная точка этого отрезка - бесконечному числу интервалов из I.

Зам. Обратим внимание на то, что набора интервалов $\widetilde{I}$ такого, что каждая рациональная точка интервала $(0;1)$ принадлежит бесконечному числу интервалов из $\widetilde{I}$, а каждая иррациональная точка этого отрезка - конечному числу интервалов из $\widetilde{I}$, не существует.

Задача 5. Пусть из каждой точки интервала $(0;1)$ проведен отрезок положительной длины. Докажите, что сумма длин всех таких отрезков бесконечна.

4 Множество бесконечных десятичных дробей

Может быть, множество $\mathbb{R}$, которое мы ввели аксиоматически на самом деле не существует? Единственный способ объяснить, что определение, которое мы ввели жизнеспособно – предъявить модель, некоторое множество, на котором выполняются все перечисленные свойства множества $\mathbb{R}$. Рассмотрим следующую

`модель множества действительных чисел,`

построенную с помощью объекта, который мы будем называть `бесконечной десятичной дробью`.

Рассмотрим $\forall x \in [0,1)$. Делим $[0,1)$ на 10 частей:

$$\left[0,\tfrac{1}{10}\right),\ \left[\tfrac{1}{10},\tfrac{2}{10}\right),\dots,\left[\tfrac{9}{10},1\right) \text{ – } \textit{полуинтервалы первого ранга.}$$

Точка x принадлежит одному из этих полуинтервалов (например, с номером ε_1). Обозначим его I_1. Длина этого отрезка, $|I_1| = \frac{1}{10}$. Делим его на 10 полуинтервалов второго ранга, выбираем один из них и т.д. На шаге k выбираем полуинтервал I_k (ранга k), $|I_k| = \frac{1}{10^k}$. Если так строить бесконечную дробь, заведомо не получаются разложения, где с некоторого разряда стоят одни девятки. Этим мы избегаем неоднозначности представления вещественного числа в виде бесконечной десятичной дроби $\big(1,0 = 0,(9)\big)$.

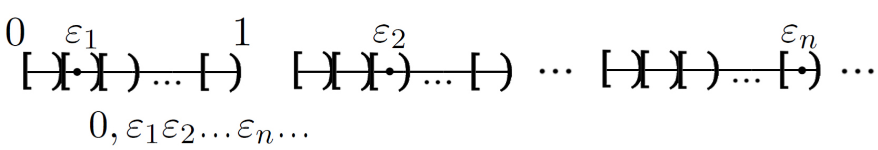


Рис. 15. Построение десятичной дроби

Последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ определяется по числу $x \in [0,1)$ однозначно. Обратно, если есть некоторая последовательность цифр $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, без периода из девяток, можно ли построить по ней единственное вещественное число?

Лемма. Пусть $J_n = [a_n, b_n)$, $J_{n+1} \subset J_n$, и среди них встречаются сколь угодно малые. Тогда $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n = \varnothing$, тогда и только тогда, когда начиная с некоторого места их правые концы совпадают.

Доказательство. Пересечение замкнутых отрезков $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ по принципу вложенных отрезков состоит ровно из одной точки, и если с некоторого момента их правые концы совпадают, то это и есть общая точка стягивающейся системы сегментов. □

NB! Следующее утверждение использует последнюю лемму для установления соответствия между объектами «вещственные числа» и бесконечными последовательностями цифр (десятичными дробями).

Утверждение 4.1. Пусть $0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$, $\varepsilon_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ – последовательность цифр, в которой **нет периода из девяток**. Тогда $\exists! \, x \in [0, 1)$, для которого эта последовательность есть её десятичное разложение.

Доказательство. Пусть I_1 – полуинтервал ранга 1 с номером ε_1; $I_2 \subset I_1$ – полуинтервал ранга 2 с номером ε_2 и т.д. Получаем последовательность

$$I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

полуинтервалов, среди длин которых есть сколь угодно малые.

Для того, чтобы их пересечение было не пусто, требуется, чтобы **не** выполнялось условие – начиная с некоторого места их правые концы совпадают. Это как раз и означает, что в этой последовательности нет периода из девяток. По принципу вложенных отрезков их пересечение состоит из **единственной** точки $\{x\}$. Ясно, что $0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$ – есть её десятичное разложение. □

Определение. *Положительной бесконечной десятичной дробью* называется последовательность вида $a_0,\, a_1\, a_2\, \ldots a_n \ldots$, где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$[a]; последовательности, в которых с некоторого места стоят одни девятки **запрещены**.

[a] Считаем, что хотя бы один из элементов a_i отличен от 0. Дробь, все элементы которой равны 0 называется *нулевой бесконечной десятичной дробью*.

Правила сравнения десятичных дробей

***Отрицательные бесконечные десятичные дроби* получаются приписыванием знака *минус* положительным бесконечным десятичным дробям.**

На положительных бесконечных десятичных дробях отношение порядка определяется так:

$$a_0,\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots \leqslant b_0,\, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$$

тогда и только тогда, когда $a_0 \leqslant b_0$ и для каждого k из равенств $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ следует неравенство $a_k \leqslant b_k$. Введённое отношение порядка естественным образом продолжается до отношения порядка на множестве всех бесконечных десятичных дробей.

Проверим, что на множестве бесконечных десятичных дробей выполняется принцип полноты Кантора-Дедекинда. Действительно, пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ и $\mathbf{A} \neq \varnothing$, $\mathbf{B} \neq \varnothing$. Причём множество $\mathbf{A}$ лежит левее множества $\mathbf{B}$. Построим бесконечную десятичную дробь $c = c_0, c_1 c_2 \ldots$, которая будет их разделять.

Если в $\mathbf{A}$ нет положительных элементов, а в $\mathbf{B}$ нет отрицательных, то в качестве c подойдет нулевой элемент. Рассмотрим случай, когда в $\mathbf{A}$ есть хотя бы один положительный элемент. По условию, в этом случае $\mathbf{B}$ состоит из положительных дробей. Следовательно[1], существует число b_0, наименьшее из всех чисел, с которых начинаются дроби из $\mathbf{B}$. Полагаем $c_0 = b_0$. Далее рассмотрим в множестве $\mathbf{B}$ только те десятичные дроби, у которых целая часть это c_0. Выберем среди них наименьшую первую цифру после запятой. Обозначим её c_1. Рассматриваем в $\mathbf{B}$ дроби, которые начинаются с $c_0, c_1 \ldots$, выбираем среди них наименьшую цифру после запятой и т.д. Построенная бесконечная десятичная дробь $c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ не является запрещённой[2] и она не больше всякого элемента из $\mathbf{B}$.

Покажем, что построенная дробь не меньше всякого элемента из $\mathbf{A}$. От противного. Пусть в $\mathbf{A}$ нашлась такая десятичная дробь $a_0, a_1 a_2 \ldots$, что $a_0 = c_0, \ldots, a_{k-1} = c_{k-1}$ и $c_k < a_k$. По построению найдётся дробь из $\mathbf{B}$, которая начинается с $c_0, c_1 \ldots c_k$. Следовательно, она тоже меньше $a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$, что противоречит условию: множество $\mathbf{A}$ левее $\mathbf{B}$.

Случай, когда в $\mathbf{B}$ есть хотя бы один отрицательный элемент, рассматривается аналогично.

5 Мощность множества. Кардинальные числа

Определение. Два множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ называются *эквивалентными* (или *равномощными*), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие , т.е. каждому элементу $x \in \mathbf{X}$ сопоставляется элемент $y \in \mathbf{Y}$, причём различным элементам множества $\mathbf{X}$ отвечают различные элементы множества $\mathbf{Y}$, и каждый $y \in \mathbf{Y}$ сопоставлен некоторому $x \in \mathbf{X}$. Обозначение: $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$

Кратко: каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y, и наоборот.

Зам. Иногда говорится, что $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$, если существует *биекция*

$$\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}.$$

Биективность отображения φ означает, что $\forall y \in \mathbf{Y}$ уравнение $\varphi(x) = y$ имеет ровно одно решение в $\mathbf{X}$.

[1] Т.к. во всяком непустом ограниченном снизу подмножестве $\mathbb{N} \cup \{0\}$ есть наименьший элемент.

[2] Т.к. в этом случае запрещённым было бы соответствующее число из множества $\mathbf{B}$

Биекция = сюръекция $\left(\varphi(X) = Y\right)$ **+ инъекция** $\left(\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)\right.$ **при** $\left.x_1 \neq x_2\right)$**.**

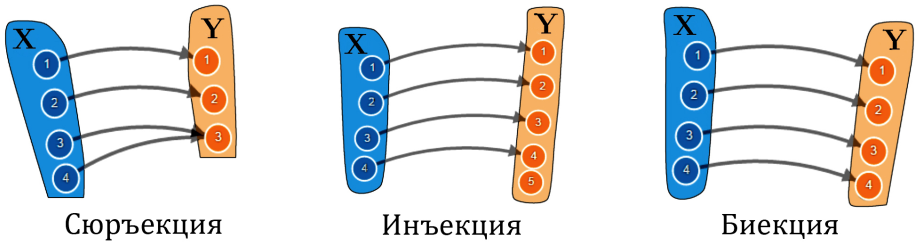


Рис. 16. Различные отображение множеств

Пример 5.1. Противоположные стороны прямоугольника равномощны: друг другу сопоставляются противоположные точки.

Пример 5.2. Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника равномощны[a]: взаимно однозначным соответствием будет проекция гипотенузы на катет.

[a]хотя и имеют различные длины

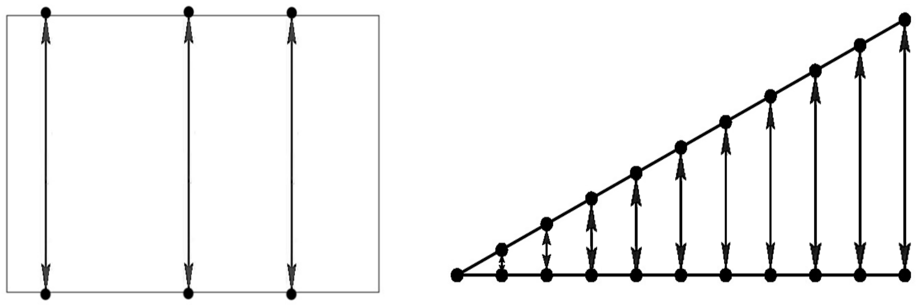


Рис. 17. Взаимно однозначные соответствия

Пример 5.3. Окружность без точки и прямая равномощны: взаимно однозначное соответствие строится, например, *стереографической проекцией.*

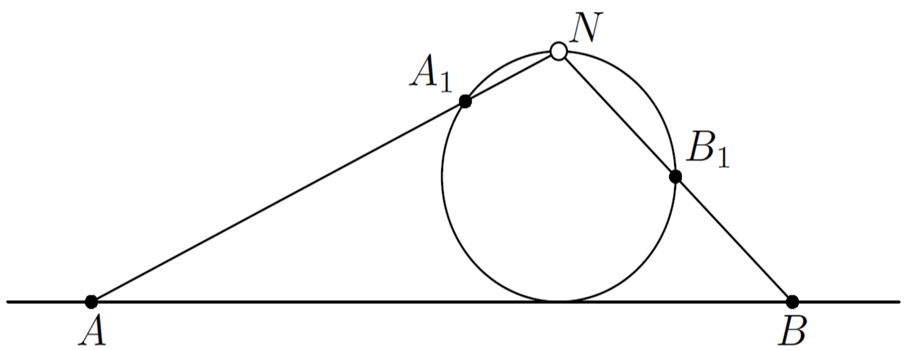


Рис. 18. Стереографическая проекция

Эквивалентность множеств является **частным случаем** общего понятия эквивалентности, которое определяется следующим образом.

Определение. Отношение „~“ между элементами некоторого множества называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

1. **Рефлексивность**: $\mathbf{X} \sim \mathbf{X}$;
2. **Симметричность**: если $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$, то $\mathbf{Y} \sim \mathbf{X}$;
3. **Транзитивность**: если $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y} \sim \mathbf{Z}$, то $\mathbf{X} \sim \mathbf{Z}$.

Пример 5.4. Примерами отношений эквивалентности служат: равенство и подобие треугольников, параллельность прямых (если договориться считать прямую параллельной самой себе)

Задача 1. Докажите, что равномощность множеств является отношением эквивалентности.

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое «количество» элементов (равномощны), а разных – разное.

Определение. Класс, которому принадлежит множество $\mathbf{X}$, называется *мощностью множества* $\mathbf{X}$, а также *кардиналом* или *кардинальным числом множества* $\mathbf{X}$. Обозначение: $\operatorname{card}\mathbf{X}$. Если $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$, то пишут $\operatorname{card}\mathbf{X} = \operatorname{card}\mathbf{Y}$.

Определение. Будем говорить, что *кардинальное число множества* $\mathbf{X}$ *не больше кардинального числа множества* $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{X}$ равномощно некоторому подмножеству $\mathbf{Y}$. Обозначение: $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$

Итак: $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y} \iff \exists \mathbf{Z} \subset \mathbf{Y} : \operatorname{card}\mathbf{X} = \operatorname{card}\mathbf{Z}$.

Определение. Будем говорить, что *кардинальное число множества* $\mathbf{X}$ *меньше кардинального числа множества*, если $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$ и в тоже время $\operatorname{card}\mathbf{X} \neq \operatorname{card}\mathbf{Y}$. $\mathbf{Y}$. Обозначение: $\operatorname{card}\mathbf{X} < \operatorname{card}\mathbf{Y}$.

Т.е. $\operatorname{card}\mathbf{X} < \operatorname{card}\mathbf{Y} \iff \exists \mathbf{Y}' \subset \mathbf{Y} : \mathbf{Y}' \sim \mathbf{X}$ и $\nexists \mathbf{X}' \subset \mathbf{X} : \mathbf{X}' \sim \mathbf{Y}$.

Класс кардинальных чисел линейно упорядочен, т.к.:

1. **$\forall\, \mathbf{X}$ выполнено $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{X}$ (очевидно);**
2. **Если $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$ и $\operatorname{card}\mathbf{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{X}$, то $\operatorname{card}\mathbf{X} = \operatorname{card}\mathbf{Y}$ *(теорема Кантора-Бернштейна)*[a];**
3. **Если $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$ и $\operatorname{card}\mathbf{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Z}$, то $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Z}$ (очевидно);**

4. $\forall\, \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ **выполнено: либо** $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{Y}$**, либо** $\operatorname{card}\mathbf{Y} \leqslant \operatorname{card}\mathbf{X}$ ***(следствие теоремы Цермело)***[b]**.**

[a]см., например, **[Н-Ф], с.23**
[b]см., например, **[Хаусдорф], с.65**

Определение. Множество $\mathbf{X}$ называется *конечным*, если оно не равномощно никакому своему **собственному** подмножеству[a]. В противном случае оно называется *бесконечным*.

[a]Т.е. отличного от всего $\mathbf{X}$.

Определение. Множество $\mathbf{X}$ называется *счётным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$, т.е. $\operatorname{card}\mathbf{X} = \operatorname{card}\mathbb{N} = \aleph_0$.

Т.о. X **– счётно, если его элементы можно расположить в виде последовательности:** $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$**, т.е. занумеровать их натуральными числами так, что каждый элемент будет занумерован ровно 1 раз, и при этом, для этого, израсходуются все натуральные числа.**

Определение. Множество $\mathbf{X}$ называется *не более, чем счётным*, если оно либо конечно, либо счётно. $\operatorname{card}\mathbf{X} \leqslant \operatorname{card}\mathbb{N}$.

Утверждение 5.1. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Доказательство. Пусть множество $\mathbf{X}$ бесконечно. Тогда $\exists x_1 \in \mathbf{X}$. Множество $\mathbf{X} \setminus \{x_1\}$ также бесконечно, поэтому $\exists x_2 \in \mathbf{X} \setminus \{x_1\}$. Далее найдётся $x_3 \in \mathbf{X} \setminus \{x_1, x_2\}$ и т.д. Ввиду бесконечности множества $\mathbf{X}$ этот процесс не оборвётся ни на каком шаге. В результате получим множество $\widetilde{\mathbf{X}} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, которое по построению будет счётным подмножеством множества $\mathbf{X}$. $\square$

Утверждение 5.2. Всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

Доказательство. Расположим элементы счётного множества $\mathbf{X}$ в виде последовательности $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть $\widetilde{\mathbf{X}}$ – некоторое бесконечное подмножество множества $\mathbf{X}$. Будем нумеровать его элементы в порядке их появления в этой последовательности. Тем самым, каждый элемент $\widetilde{\mathbf{X}}$ будет занумерован ровно один раз и, т.к. множество $\widetilde{\mathbf{X}}$ бесконечно, для нумерации будет использован весь натуральный ряд. $\square$

NB! Утверждения 5.1 и 5.2 показывают, что счётные множества – самые «маленькие» бесконечные множества (никакое несчётное множество не может быть подмножеством счётного).

Теорема 6. *(Кантор).* Вещественный отрезок $[0,1]$ несчётен.

Доказательство. Предположим, что отрезок $[0,1]$ счётен. Тогда его элементы могут быть записаны в виде последовательности:

$$x_1, x_2 \dots, x_n, \dots .$$

Возьмём $x_1 \in [0,1] = I_0$, и зафиксируем отрезок $I_1 \subset I_0$ ненулевой длины, не содержащий x_1. В отрезке I_1 строим отрезок I_2, не содержащий x_2, и т.д. Если уже построен I_n, то поскольку $|I_n| > 0$, строим в нём отрезок I_{n+1}, так что $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ и $|I_{n+1}| > 0$. По лемме о вложенных отрезках $\exists c \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n$, поэтому $c \in I_0 = [0,1]$, и по построению оно не может совпадать ни с одной из точек x_k. $\square$

Определение. Мощность отрезка $[0,1]$ называют *мощностью континуума*. Обозначение: $\mathfrak{c}$.

от лат. continuum - непрерывное, сплошное.

Утверждение 5.3. Множество **A** всех последовательностей вида $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $a_n \in \{0, 1, 2, 3\}$[a], несчётно.

[a] Множество четверичных последовательностей.

Доказательство. Пусть множество всех четверичных последовательностей можно пронумеровать. В этом случае все они могут быть расположены по строкам бесконечной матрицы. Выделим последовательность из цифр $\{0, 1, 2, 3\}$, стоящую на диагонали и „инвертируем“ её следующим образом: построим последовательность, в n-ой позиции которой стоит не 0, не 3, и не диагональный элемент n-ой последовательности. Построенная четверичная последовательность не лежит в рассматриваемой матрице. Т.к. она отличается от первой строки в первом элементе, от второй во втором, и т.д. $\square$

канторовский диагональный процесс.

Построим соответствие между вещественными числами отрезка $[0,1]$ и подмножеством двоичных последовательностей следующим образом. Выберем произвольное число $x \in [0,1]$, и разбиваем данный отрезок на две равные части: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Если x лежит в левом сегменте, положим $x_1 = 0$, если в правом - $x_1 = 1$[a]. Далее, разбиваем сегмент, в котором лежит x на две равные части, если x лежит в левой - положим $x_2 = 0$, иначе - $x_2 = 1$. И так

далее, продолжаем процесс бесконечное число раз. Если число x лежит на границе сегмента, т.е. представляет из себя число вида: $\frac{m}{2^n}$, $m = 1, \dots 2^n$, то кладём в качестве x_n единицу. Этим мы строим соответствие вещественных чисел отрезка $[0,1]$ и двоичных последовательностей, за исключением тех, у которых начиная с некоторого номера стоят нули, т.е. мощность отрезка $[0,1]$ не больше, чем мощность множества двоичных последовательностей.

[a]Случай $x = \frac{1}{2}$ будет рассмотрен ниже

Обратно, каждой двоичной последовательности, поставим в соответствие двоичную последовательность, у которой на всех чётных местах стоят нули, а на нечётных - элементы рассматриваемой последовательности, т.е.

$$\{0, 1, 1, 0, \dots\} \longleftrightarrow \{0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}.$$

Очевидно, что каждой двоичной последовательности можно поставить единственное вещественное число из отрезка $[0,1]$. И, т.к. мы избавились от случая периода из единиц, каждому из поставленных в соответствие вещественных чисел (безусловно, это будут не все числа отрезка $[0,1]$), будет соответствовать только одна двоичная последовательность, т.е. мощность сегмента $[0,1]$ не меньше, чем мощность множества двоичных последовательностей. Остаётся воспользоваться теоремой Кантора-Бернштейна[a].

[a]Если множество $\mathbf{A}$ эквивалентно некоторой части $\mathbf{B}'$ множества $\mathbf{B}$, а $\mathbf{B}$ эквивалентно некоторой части $\mathbf{A}'$ множества $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Теорема 7. *(Кантор).* Пусть $\mathbf{X}$ – произвольное множество, а $2^{\mathbf{X}}$ – множество всех его подмножеств, включая $\varnothing$ и $\mathbf{X}$. Мощность множества $\mathbf{X}$ (строго) меньше, чем мощность $2^{\mathbf{X}}$.

Доказательство. Поставим каждому элементу множества $\mathbf{X}$ в соответствие одноэлементное подмножество, содержащее только этот элемент. В общем случае кроме них могут существовать и другие подмножества. Поэтому, выполнено неравенство $\operatorname{card} 2^{\mathbf{X}} \geqslant \operatorname{card} \mathbf{X}$.

Докажем, что $\mathbf{X} \nsim 2^{\mathbf{X}}$. От противного. Пусть $\mathbf{X} \sim 2^{\mathbf{X}}$, и пусть φ – биекция между этими множествами, т.е. $\forall x \in \mathbf{X}\ \exists \varphi(x) \in 2^{\mathbf{X}}$, и каждый элемент множества $2^{\mathbf{X}}$ есть $\varphi(x)$ для одного и только одного $x \in \mathbf{X}$.

Назовём элемент $x \in \mathbf{X}$ – правильным, если $x \in \varphi(x)$[a], и неправильным в противном случае. Заметим, что элемент, который соответствует всему $\mathbf{X}$, очевидно, правильный, а тот, который соответствует пустому множеству – неправильный. Т.е. данные множества не пусты, и $\forall x \in \mathbf{X}$ лежит в одном, и только одном из данных множеств.

Обозначим далее через $\mathbf{B}$ множество всех неправильных (и только неправильных) элементов множества $\mathbf{X}$. Т.к. $\mathbf{B} \subset 2^{\mathbf{X}}$, то в соответствии φ этому множеству отвечает некоторый элемент $x_0 \in \mathbf{X}$, т.е. $\mathbf{B} = \varphi(x_0)$. Каков же этот элемент x_0? Ясно, что он не может быть ни правильным, ни неправильным. Противоречие. Следовательно, $\mathbf{X} \nsim 2^{\mathbf{X}}$. □

[a]Т.е. элемент x лежит во множестве, которому он соответствует.

***Континуум-гипотеза*: всякое бесконечное подмножество отрезка $[0,1]$ равномощно $\mathbb{N}$ или $[0,1]$. Эта гипотеза была сформулирована Г.Кантором: *существуют ли множества промежуточной мощности между счётными и континуальными?* Было высказано предположение, что промежуточные мощности отсутствуют.**

В 1934г. австрийский математик К.Гёдель доказал, что Континуум-гипотеза не противоречит остальным аксиомам теории множеств. Окончательно данный вопрос был решён в 1963г., когда американский математик П. Коэн доказал, что и её отрицание также не противоречит остальным аксиомам теории множеств, и поэтому, Континуум-гипотеза не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках этой аксиоматики.

Теория числовых последовательностей

1 Основные понятия. Бесконечно малые последовательности

Определение. Функция $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbf{X}$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется *последовательностью*.

Определение. Значения $f(n)$ функции f называются *членами последовательности*. Их принято обозначать символом элемента того множества, в которое идёт отображение, наделяя символ соответствующим индексом аргумента, $x_n = f(n)$. Саму последовательность обозначают x_n, и называют *последовательностью элементов множества* $\mathbf{X}$.

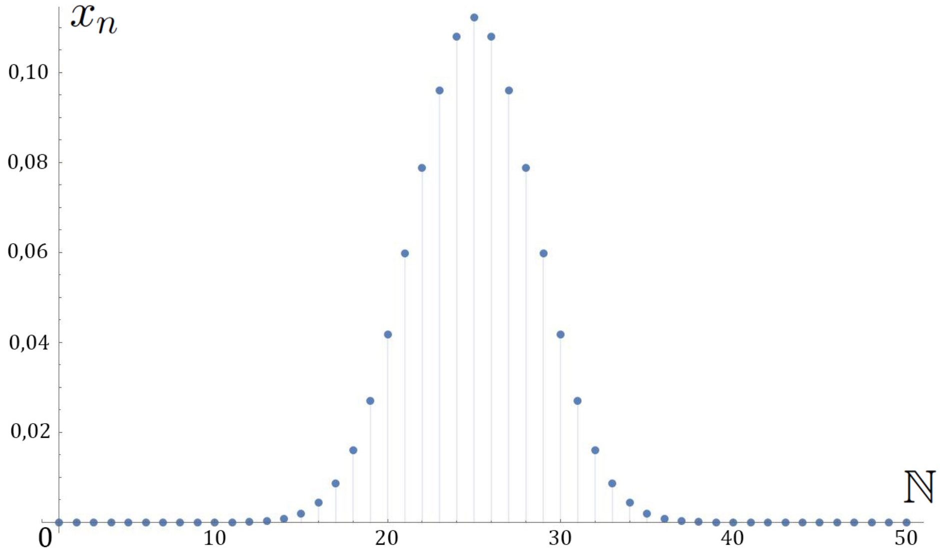


Рис. 19. Числовая последовательность

Всюду дальше будут рассматриваться последовательности

$$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbf{X} \subset \mathbb{R}$$

действительных чисел (*числовые последовательности*).

Пример 1.1. *Десятичное приближение вещественного числа* – приближённое изображение действительного числа конечной десятичной дробью:

$$3{,}1;\ \ 3{,}14;\ \ 3{,}141;\ \ 3{,}1415;\ \ 3{,}14159;\ \ 3{,}141592;\ \ 3{,}1415926;\ \ \ldots$$

Пример 1.2. *Арифметическая прогрессия* – числовая последовательность вида

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \ldots,\ a_1+(n-1)d,\ \ldots,$$

то есть последовательность чисел *(членов прогрессии)*, в которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа d *(шага*, или *разности прогрессии)*.

Пример 1.3. *Геометрическая прогрессия* – числовая последовательность, в которой первый член $b_1 \neq 0$, а каждый последующий член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число $q \neq 0$ *(знаменатель прогрессии)*:

$$b_1,\ \ b_1q,\ \ b_1q^2,\ \ b_1q^3,\ \ b_1q^4,\ \ \ldots$$

? **Можно ли рассматривать множество натуральных (вещественных) чисел, как пример числовой последовательности?**

Определение. Последовательность x_n называется *ограниченной сверху (снизу)*, если:

$$\exists M\in\mathbb{R}\ :\ \forall n\in\mathbb{N} \Longrightarrow x_n \leqslant M\ (x_n \geqslant M).$$

Определение. Последовательность x_n называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу одновременно, т.е.

$$\exists m, M\in\mathbb{R}\ :\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow m\leqslant x_n\leqslant M \iff \exists A>0\ :\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow |x_n|\leqslant A^{[a]}.$$

[a] $A = \max\{|m|, |M|\}$.

Определение. Последовательность x_n называется *неограниченной*, если

$$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists n(M)\in\mathbb{N}\ :\ |x_{n(M)}| > M.$$

Определение. Последовательность x_n называется *бесконечно большой*, если

$$\forall A>0\ \exists n_0(A)^{[a]}\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geqslant n_0 \Longrightarrow |x_n| > A.$$

[a] Не требуется, чтобы этот номер был наименьшим.

Пример 1.4. $x_n = (-1)^n\cdot n;$

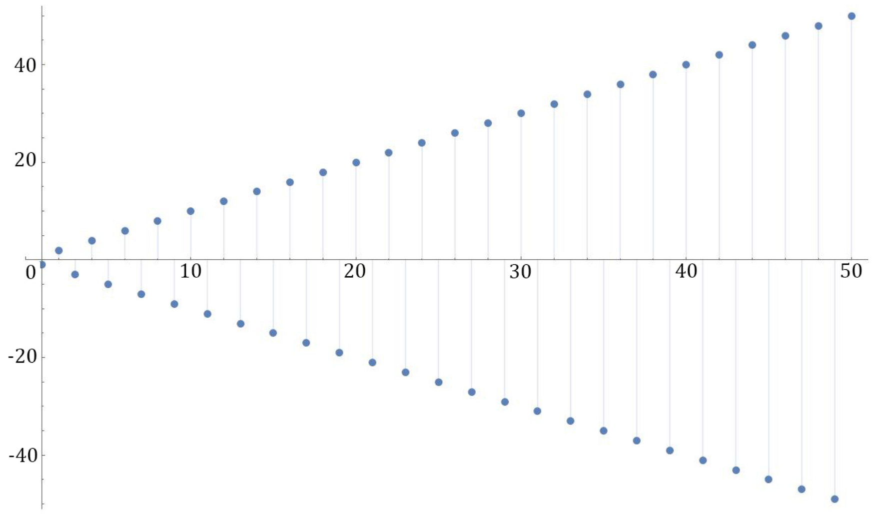


Рис. 20. $x_n = (-1)^n \cdot n$

Пример 1.5. $x_n = n!$;

Докажите, что последовательность $x_n = n!$ является бесконечно большой. Т.е. $\forall A > 0$ укажите номер $n_0(A)$, такой что $\forall n \geqslant n_0 \implies |x_n| > A$.

Зам. Иногда требуется знакопостоянство бесконечно большой последовательности. В этом случае различают положительные бесконечно большие последовательности, и отрицательные бесконечно большие последовательности[a].

[a]Определения данных последовательностей берутся без модулей.

Утверждение 1.1. Если последовательность x_n – бесконечно большая, то она неограничена. Обратное, вообще говоря, неверно.

Доказательство. Первая часть утверждения сразу вытекает из определения бесконечно большой последовательности. Вторая часть доказывается примером неограниченной, но не бесконечно большой последовательности. □

Пример 1.6. $x_n = n^{(-1)^n} = \left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$;

Пример 1.7. $x_n = n \cdot \sin n$;

Пример 1.8. $x_n = n + (-1)^n \cdot n$.

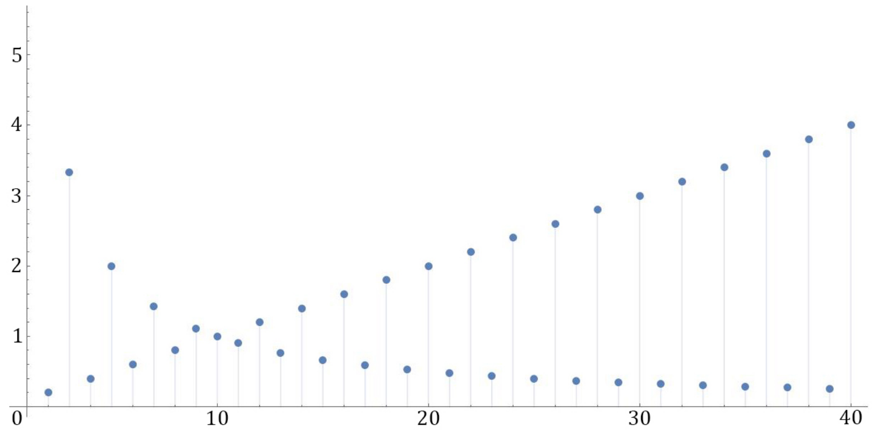


Рис. 21. Пример неограниченной, но не бесконечно большой последовательности

Определение. Последовательность x_n называется *бесконечно малой*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n| < \varepsilon,$$

т.е. вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ находится лишь конечное число элементов последовательности.

Отрицание: x_n **не является бесконечно малой**, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists n_0 > n \Longrightarrow |x_{n_0}| \geqslant \varepsilon_0.$$

Зам. Для того, чтобы записать отрицание к выражению, записанному в кванторах, обычно, требуется

- заменить квантор $\forall$ на $\exists$;
- заменить квантор $\exists$ на $\forall$;
- заменить соответствующие неравенства на противоположные.

Пример 1.9. $x_n = \frac{1}{n}$. Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0$ неравенство $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Такое $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ найдётся по принципу Архимеда. Положим $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ имеем $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Пример 1.10. $x_n = \frac{1}{q^n}, \quad q > 1$.

Доказательство. Проверим, что множество $\mathbf{A} = \left\{q^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ не ограничено сверху. От противного. Пусть $\mathbf{A}$ – ограничено. Тогда по принципу точных граней $\exists \sup \mathbf{A} = \ell$. По определению sup $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{\ell}{q} < q^{n_0} < \ell$, или $\ell < q^{n_0+1}$. Но, т.к. $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, то $\ell \neq \sup \mathbf{A}$. Противоречие, доказывающее, что $\mathbf{A}$ – не ограничено, поэтому $\forall M > 0 \ \exists N(M) : q^{N(M)} > M$.

Далее, т.к. $q > 1$, то $q^n > q^{N(M)}$ при $n > N(M)$. Следовательно,

$$\forall M > 0 \ \exists N(M) : \forall n \geqslant N(M) \Rightarrow q^n > M \Longleftrightarrow \frac{1}{q^n} < \frac{1}{M}.$$

Откуда, т.к. $\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \frac{1}{M} < \varepsilon$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\widehat{N}(\varepsilon) : \forall n \geqslant \widehat{N}(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{q^n} < \varepsilon,$$

и $\frac{1}{q^n}$ – бесконечно малая последовательность при $q > 1$. □

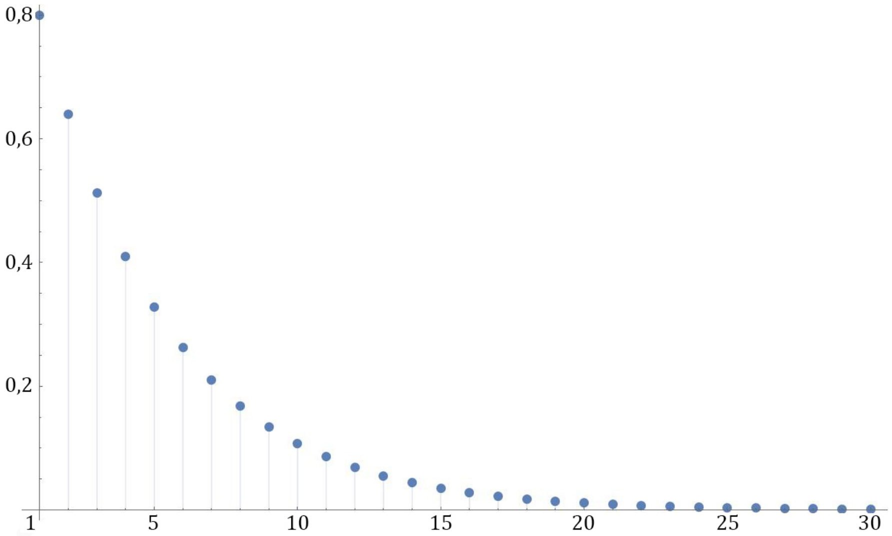


Рис. 22. $x_n = \frac{1}{(5/4)^n}$

Теорема 8. *(свойства бесконечно малых последовательностей).*

1. Если x_n – бесконечно малая, то x_n – ограничена;
2. Если x_n – бесконечно малая, y_n – ограниченная, то $x_n \cdot y_n$ – бесконечно малая;
3. Если x_n, y_n – бесконечно малые, то и $x_n \pm y_n$, $x_n \cdot y_n$ – бесконечно малые.

Доказательство.

1. Пусть последовательность x_n – бесконечно малая. Фиксируем $\forall\varepsilon > 0$ по нему находим $n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$. Теперь, если выбрать $M = \max\{\varepsilon, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|\}$, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |x_n| \leqslant M.$$

2. Пусть

$$\exists A > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |y_n| \leqslant A \text{ и } \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{A} \cdot A = \varepsilon,$$

т.е. последовательность $x_n \cdot y_n$ – бесконечно малая.

3. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon),\ n_2(\varepsilon)$, такие что:

$$\forall n \geqslant n_1(\varepsilon) \implies |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geqslant n_2(\varepsilon) \implies |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\} : \forall n \geqslant n_0 \implies$

$$|x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $x_n \pm y_n$ – бесконечно малая. То, что $x_n \cdot y_n$ – бесконечно малая вытекает из пунктов 1. и 2.

□

Теорема 9. *(связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей).* Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \neq 0$. Тогда последовательность x_n – бесконечно большая, тогда и только тогда, когда $\frac{1}{x_n}$ – бесконечно малая.

Доказательство. Докажем, например, необходимость[a]. Пусть x_n – бесконечно большая. Тогда задавая произвольное $\varepsilon > 0$, положим $A = \frac{1}{\varepsilon}$. По этому A находим номер $n_0(A)$, что $\forall n \geqslant n_0(A) \Rightarrow |x_n| > A$. Это равносильно условию $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$. □

[a] Достаточность доказывается аналогично.

2 Предел числовой последовательности

Определение 1. Число a называется *пределом числовой последовательности* x_n, если последовательность $x_n - a$ является бесконечно малой, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Обозначение: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Определение. Интервал, содержащий точку $x \in \mathbb{R}$, будем называть *окрестностью этой точки.* Обозначение: $\mathbf{U}(x)$ или $\mathbf{B}(x)$.

umgebungen (нем.)

Определение. При $\delta > 0$ интервал $(x - \delta, x + \delta)$ называется *δ-окрестностью точки* x. Обозначение: $\mathbf{U}_\delta(x)$. $\overset{\circ}{U}(x) = (x - \delta, x) \cup (x, x + \delta) = \mathbf{U}_\delta(x) \setminus \{x\}$ – *проколотая δ-окрестность точки* x.

Определение 2. Число a называется *пределом числовой последовательности* x_n, если для любой окрестности $\mathbf{U}(a)$ точки a существует такой номер N (выбирае-

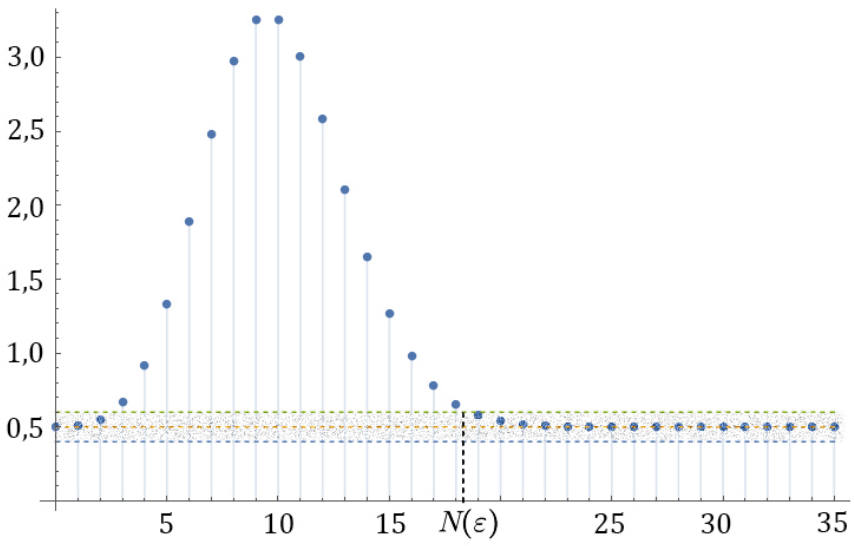


Рис. 23. Предел числовой последовательности 1

мый в зависимости от $\mathbf{U}(a)$), что все члены последовательности, номера которых больше N, содержатся в указанной окрестности точки a.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ если } \forall \mathbf{U}(a)\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \in \mathbf{U}(a).$$

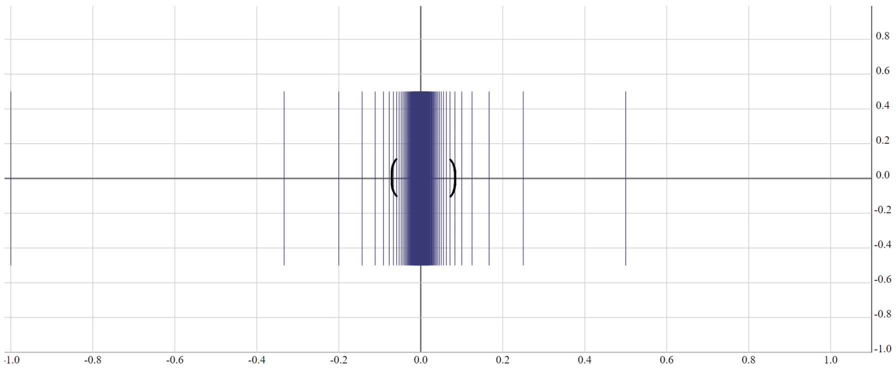


Рис. 24. Предел числовой последовательности 2

Зам. Эквивалентность определений 1 и 2 легко проверить, если заметить, что **в любой окрестности $\mathbf{U}(a)$ содержится некоторая ε-окрестность этой же точки.**

Определение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то говорят, что *последовательность x_n сходится к числу a*. Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*. Обозначение: $x_n \to$.

Определение. Последовательность, не имеющая **конечного** предела называется *расходящейся*. Обозначение: $x_n \not\to$.

$$x_n \not\to, \text{ если } \forall a \in \mathbb{R} \ \exists \varepsilon_0(a) : \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \geqslant n, |x_{n_0} - a| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пример 2.1. $x_n = \frac{\sin n}{n}$;

$$|x_n - 0| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ при } n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Пример 2.2. $x_n = \frac{n}{n+1}$;

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \text{ при } n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1.$$

Пример 2.3. $x_n = (-1)^n$; Предполагая, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = a$, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \left|(-1)^n - a\right| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда для чётных и нечётных n: $\begin{cases} |1 + a| \leqslant 1/2, \\ |1 - a| \leqslant 1/2. \end{cases} \quad (*)$

$$2 = |1 + 1| = \left|(1 + a) + (1 - a)\right| \leqslant |1 + a| + |1 - a| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Противоречие(!) Система $(*)$ не совместна.

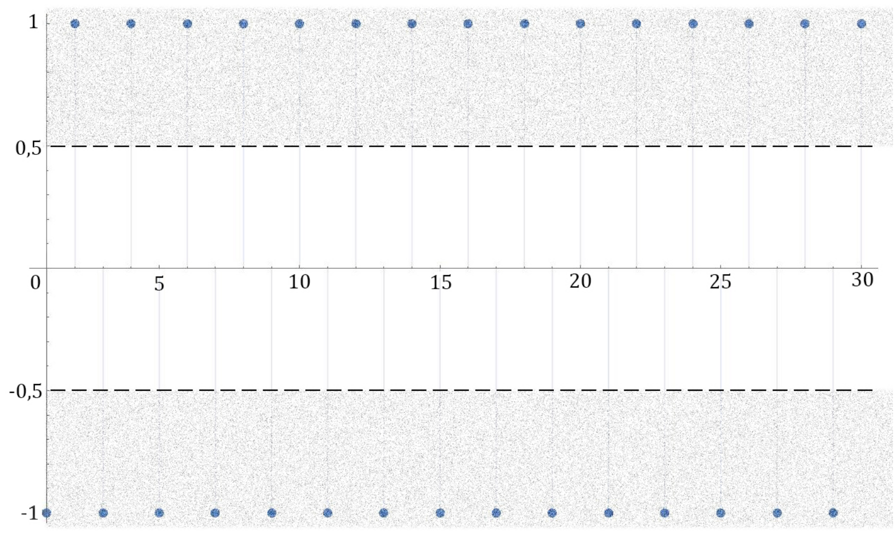


Рис. 25. $x_n = (-1)^n$

Теорема 10. *(свойства сходящихся последовательностей).*

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел;
2. Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной;

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = a \pm b; \quad \lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = a \cdot b; \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\text{[a]}.$$

[a]В случае частного, предполагаем, что $b \neq 0$. Тогда (как будет показано далее), начиная с некоторого номера и $y_n \neq 0$.

Доказательство.

1. От противного. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_2$, и $a_1 \neq a_2$. По определению предела: $x_n = a_1 + \alpha_n$, $x_n = a_2 + \beta_n$[a]. Откуда, $0 \neq a_1 - a_2 = \alpha_n - \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Противоречие(!)

2. Пусть x_n сходящаяся числовая последовательность, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Фиксируем $\forall\varepsilon > 0$ и находим по нему $N(\varepsilon)$, что $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено $|x_n - a| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Обозначим через

$$M = \max\left\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\right\}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leqslant M$.

NB! Но не всякая ограниченная числовая последовательность является сходящейся (см. Пример 2.3 выше).

3. Пусть $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$. Тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + \overbrace{(\alpha_n \pm \beta_n)}^{\text{б.м.}}; \quad x_n \cdot y_n = ab + \overbrace{(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)}^{\text{б.м.}};$$

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{ab+\alpha_n b - ab - a\beta_n}{y_n b}\right| = \frac{1}{|y_n b|} \cdot |\alpha_n b - a\beta_n|.$$

Не ограничивая общности считаем, что $b > 0$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon \Leftrightarrow \left\{\varepsilon = \frac{b}{2} > 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \tfrac{b}{2} < y_n < \tfrac{3b}{2} \Rightarrow \tfrac{1}{y_n} < \tfrac{2}{b} \Rightarrow \tfrac{1}{y_n b} < \tfrac{2}{b^2} \Rightarrow \overbrace{\tfrac{1}{y_n b}}^{\text{огр.}} \cdot \overbrace{|\alpha_n b - \beta_n a|}^{\text{б.м.}}.$$

Следовательно, $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ – бесконечно малая последовательность, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

□

[a]Здесь и далее α_n, β_n – бесконечно малые последовательности.

Теорема 11. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Причём $a < b$. Тогда, начиная с некоторого номера, выполнено: $x_n < y_n$.

Доказательство. Возьмём число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $a < c < b$. По определению предела найдём номера N_1 и N_2 , что при

$$\forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - a| < c - a \iff a - c + a < x_n < c - a + a.$$

$$\forall n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n - b| < b - c \iff c - b + b < y_n < b - c + b.$$

Откуда, при $\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow x_n < c - a + a = c = c - b + b < y_n$. □

***Следствие* 1** (предельный переход и неравенства)**.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если $\exists N : \forall n \geqslant N$ выполнено:

1) $x_n > y_n$, то $a \geqslant b$;
2) $x_n \geqslant y_n$, то $a \geqslant b$;
3) $x_n > b$, то $a \geqslant b$;
4) $x_n \geqslant b$, то $a \geqslant b$;

Доказательство. Утверждения 1) и 2) заключаются из теоремы 11 доказательством от противного. 3) и 4) – частные случаи 1) и 2), получающиеся при $y_n \equiv b$. □

***Следствие* 2** (*принцип двустороннего ограничения*)**.** Если все элементы (сходящейся) числовой последовательности x_n, начиная с некоторого номера, находятся на сегменте $[a, b]$, то и предел x этой последовательности лежит на $[a, b]$.

Теорема 12. *(теорема о двух милиционерах).* Пусть последовательности x_n, y_n, z_n таковы, что $\forall n \geqslant \widetilde{N} \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Если при этом последовательности x_n и z_n сходятся к одному и тому же пределу, то и последовательность y_n также сходится к тому же пределу.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. По $\forall \varepsilon > 0$ найдём числа N_1 и N_2 так, чтобы при $\forall n \geqslant N_1$ выполнялось $a - \varepsilon < x_n$,[a] а при $\forall n \geqslant N_2$ выполнялось $z_n < a + \varepsilon$. Тогда при $\forall n \geqslant N = \max\{\widetilde{N}, N_1, N_2\}$ получаем:

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon, \text{ или } |y_n - a| < \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

[a] $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

3 Монотонные последовательности

Определение. Последовательность x_n называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad (x_n \geqslant x_{n+1}).$$

Обозначение: $x_n \nearrow$ $(x_n \searrow)$.

Определение. Последовательность x_n называется *монотонной*, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

Зам. Если элементы неубывающей (невозрастающей) последовательности для всех номеров удовлетворяют **строгому неравенству** $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, то эту последовательность называют **строго** *возрастающей (убывающей)*. Обозначение: $x_n \uparrow$ $(x_n \downarrow)$.

Теорема 13. *(теорема Вейерштрасса[a]).* Для того, чтобы монотонная последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.

[a] *Критерий сходимости монотонной последовательности.*

Доказательство. То, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной, было доказано выше, поэтому интерес представляет только второе утверждение теоремы.

Рассмотрим неубывающую числовую последовательность x_n, ограниченную сверху[a]. По принципу Вейерштрасса (существования точных граней) у множества значений этой последовательности есть **точная** верхняя грань $s = \sup\limits_n x_n$. По определению **супремума**

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ s - \varepsilon < x_N \leqslant s.$$

Далее поскольку $x_n \nearrow$, то при $\forall n > N$ получаем:

$$s - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant s < s + \varepsilon, \text{ т.е. } |s - x_n| = s - x_n < \varepsilon.$$

Т.о. доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s = \sup\limits_n x_n$. □

[a] Ограниченность неубывающей последовательности снизу очевидна.

Зам. Для невозрастающей, ограниченной снизу числовой последовательности y_n получаем:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \ell = \inf_n y_n.$$

Зам. Если последовательность возрастает и не ограничена сверху, то она стремится к $+\infty$. Если последовательность убывает и не ограничена снизу, то она стремится к $-\infty$.

Доказательство. Пусть $x_n \uparrow$ и не ограничена. Тогда

$$\forall E > 0\ \exists N(E) : x_{N(E)} > E.$$

Т.к. $x_n \uparrow$, то $\forall n > N(E)$ тем более выполнено $x_n > E$. □

В этом случае, $\sup\limits_n x_n = +\infty$.

Утверждение 3.1. *(Неравенство Я. Бернулли).* Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $-1 < \alpha \in \mathbb{R}$, тогда

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n.$$

Доказательство. При $n = 0$ или $n = 1$ имеем верные равенства. Пусть справедливо неравенство $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$. Тогда

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geqslant (1+\alpha n)(1+\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha.$$

□

Пример 3.1. *(число* e*)*

Докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Для этого рассмотрим последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и изучим отношение:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n\cdot n^{n+1}}{(n-1)^n\cdot(n+1)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1} \geqslant \{^a\} \geqslant \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1.$$

Следовательно, $y_n\downarrow$. Кроме того, ясно, что $y_n \geqslant 1$. Поэтому, по теореме Вейерштрасса, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, а тогда по теореме о пределе частного, и последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{y_n}{1+1/n}$ сходится к тому же пределу.

[a] Неравенство Бернулли.

Определение. Предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ называют *числом Эйлера* (или *числом Непера*), или *основанием натуральных логарифмов*. Обозначение: e.

Зам. Можно доказать, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, а следовательно, сходится к своему пределу снизу.

Упражнение. Докажем, что к числу **e** сходится и последовательность
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Доказательство. Воспользовавшись биномом Ньютона, получаем:
$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots\big(n-(n-1)\big)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{<1} + \ldots + \frac{1}{n!}\overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{<1}\cdot\ldots\cdot\overbrace{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}^{<1} <$$
$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = s_n, \text{ т.е. } e_n < s_n.$$
Зафиксируем теперь `произвольное` k, и будем рассматривать $n > k$. Имеем,
$$2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) <$$
$$< 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \overbrace{\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}^{>0}.$$
Заметим теперь, что левая часть данного неравенства при $n \to \infty$ и фиксированном k, стремится к s_k, а правая к числу e (см. выше). Следовательно, для $\forall k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство: $s_k < e$. Объединяя данное неравенство с предыдущим, получаем важный результат:
$$e_k < s_k < e \text{ для всех } k \in \mathbb{N},$$
откуда, и из теоремы о двух милиционерах вытекает требуемое. □

Зам. Отметим, что последовательность s_n сходится к числу e существенно быстрее последовательности e_n, и поэтому, применима к вычислениям числа e значительно лучше. Например, $e - e_5 \approx 0,2299$; $e - s_5 \approx 0,0016$.

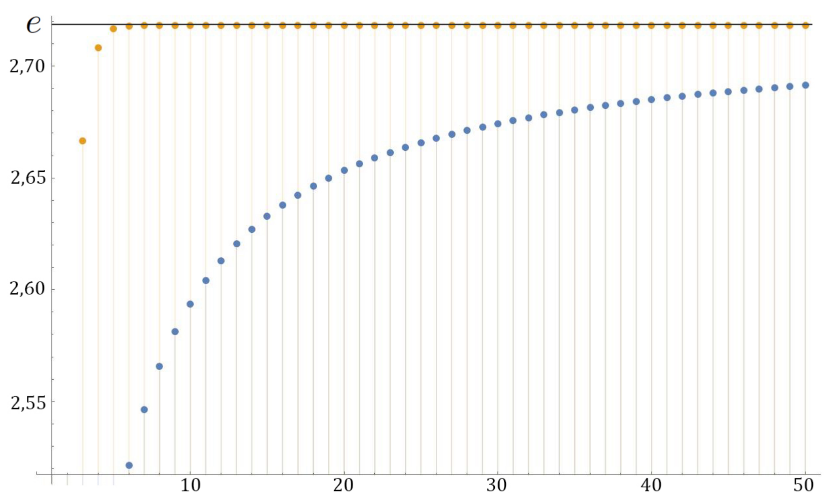


Рис. 26. Сходимость к числу **e**

4 Принципы полноты. Продолжение

Определение. Говорят, что *система* $S = \{\mathbf{X}\}$ *множеств* $\mathbf{X}$ *покрывает множество* $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{Y} \subset \bigcup\limits_{\mathbf{X} \in S} \mathbf{X}$, т.е. если $\forall y \in \mathbf{Y}$ содержится по крайней мере в одном из множеств системы S.

Определение. Если $S = \{\mathbf{X}\}$ — покрытие множества $\mathbf{Y}$, то любая система множеств $\mathbf{D} \subset S$, также являющееся покрытием $\mathbf{Y}$, называется её *подпокрытием*.

Теорема 14. *(лемма Гейне-Бореля*[a]*).* В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечное подпокрытие[b], покрывающее этот отрезок.

[a] Принцип Гейне-Бореля или принцип Бореля-Лебега
[b] Конечная подсистема.

Доказательство. Пусть $S = \{\mathbf{E}\}$ – система интервалов $\mathbf{E}$, покрывающая отрезок $[a, b] = \mathbf{I}_0$. Если бы $\mathbf{I}_0$ не допускал покрытие конечным набором интервалов системы S, то поделив $\mathbf{I}_0$ пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок (обозначим её через $\mathbf{I}_1$) также не допускает конечного покрытия. С отрезком $\mathbf{I}_1$ проделаем ту же процедуру деления пополам, получим отрезок $\mathbf{I}_2$, и т.д.

Т.о., возникает последовательность $\mathbf{I}_0 \supset \mathbf{I}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{I}_n \supset \ldots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S. Т.к. длина отрезка, полученного на n-ом шаге по построению равна $|\mathbf{I}_n| = \frac{|\mathbf{I}_0|}{2^n}$, то (по принципу Архимеда) $\{|\mathbf{I}_n|\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Следовательно, $\{\mathbf{I}_n\}$ – стягивающаяся система сегментов, у которой (по принципу вложенных отрезков) существует единственная общая точка, которую мы обозначим c. Т.к. $c \in \mathbf{I}_0 = [a, b]$, то $\exists(\alpha, \beta) \in S$, содержащий точку c, т.е. $\alpha < c < \beta$. Пусть $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Найдём в построенной последовательности такой отрезок $\mathbf{I}_n$, что $|\mathbf{I}_n| < \varepsilon$. Поскольку $c \in \mathbf{I}_n$ и $|\mathbf{I}_n| < \varepsilon$, заключаем, что $\mathbf{I}_n \subset (\alpha, \beta)$. Но это противоречит тому, что отрезок $\mathbf{I}_n$ нельзя покрыть конечным набором интервалов системы S. $\square$

Определение. Точка $p \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой*[a] *множества* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества $\mathbf{X}$.

[a] Или *точкой сгущения множества* $\mathbf{X}$

cluster point (англ.).

Тоже самое: в любой окрестности точки p есть, по крайней мере одна, не совпадающая с p точка множества $\mathbf{X}$.

Множество предельных точек множества $\mathbf{X}$ обозначается через $\mathbf{X}^*$.

Пример 4.1. $\mathbf{X} = (0,1) \cup \{2\}, \quad \mathbf{X}^* = [0,1];$

Пример 4.2. $\mathbf{X} = \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \mathbf{X}^* = \{0\};$

Пример 4.3. $\mathbf{X} = \mathbb{Q}, \quad \mathbf{X}^* = \mathbb{R}.$

Теорема 15. *(лемма Больцано-Вейерштрасса[a]).* Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

[a] Принцип Больцано-Вейерштрасса

Доказательство. Пусть $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ – данное бесконечное множество. Из определения ограниченности $\mathbf{X}$ следует, что $\exists [a,b] = \mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ такой, что $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$. Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка $\mathbf{I}$ является предельной для $\mathbf{X}$.

Если бы это было не так, то $\forall x \in \mathbf{I}$ существовала бы окрестность $\mathbf{U}(x)$, в которой либо вообще нет точек множества $\mathbf{X}$, либо их там **конечное число**. Совокупность $\{\mathbf{U}(x)\}$ таких окрестностей, построенных для $\forall\ x \in \mathbf{I}$, образует покрытие отрезка $\mathbf{I}$ интервалами $\mathbf{U}(x)$, из которого по лемме Гейне-Бореля можно выделить **конечную** систему $\mathbf{U}(x_1), \dots, \mathbf{U}(x_n)$ интервалов, покрывающую отрезок $\mathbf{I}$. Но, т.к. $\mathbf{X} \subset \mathbf{I}$, эта же система покрывает всё множество $\mathbf{X}$. Однако, в каждой окрестности $\mathbf{U}(x_i)$ находится только конечное число точек множества $\mathbf{X}$, значит, и в их конечном объединении также конечное число точек $\mathbf{X}$, т.е. $\mathbf{X}$ – конечное множество. **Противоречие**(!) $\square$

Определение. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой множества* $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, если $\exists \delta > 0 : \mathbf{U}_\delta(a) \cap \mathbf{X} = \{a\}$.

Более кратко: все точки множества X не являющиеся предельными, называются изолированными.

Задача 1. Выведите из леммы Больцано-Вейерштрасса и принципа Архимеда принцип полноты Кантора-Дедекинда.

Тем самым, в архимедовом поле будет доказана эквивалентность пяти важнейших принципов полноты.

5 Подпоследовательности и частичные пределы последовательности

Определение. Если x_n – некоторая последовательность, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ – **строго** возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ называется *подпоследовательностью последовательности* x_n. Обозначение: x_{n_k}.

Пример 5.1. Последовательность $1, 3, 5, \ldots$ – нечётных натуральных чисел, взятых в их естественном порядке является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел. А последовательность $3, 1, 5, \ldots$ уже такой не является.

Утверждение 5.1. Если последовательность x_n сходится к пределу a, то и любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу a.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Т.к. $x_n \to a$, то

$$\exists N(\varepsilon) \ : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies |x_n - a| < \varepsilon.$$

Далее, т.к. $n_k \geqslant n$, то $\forall n_k \geqslant n \geqslant N(\varepsilon)$ элементы последовательности x_{n_k} удовлетворяют неравенству $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, а это и означает, что подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$. □

Очевидно, что если некоторая подпоследовательность последовательности x_n сходится к a, то сама последовательность может расходится. Однако, если $x_{n_k} \to a$, то x_n либо расходится, либо сходится к a.

Задача 1. Докажите, что любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности представляет собой бесконечно большую последовательность.

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой (частичным пределом) последовательности* x_n, если выполнено одно из этих условий:

а) в любой окрестности точки x содержится бесконечно много элементов этой последовательности;

б) из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу x.

Утверждение 5.2. Оба этих определения эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\forall \mathbf{U}(x)\ \exists n \in \mathbb{N} : x_n \in \overset{\circ}{U}(x)$. Рассмотрим совокупность окрестностей $\left\{\overset{\circ}{U}_{1/n}(x)\right\}$. В первой окрестности $\overset{\circ}{U}_1(x)$ выберем элемент x_{n_1}. В $\overset{\circ}{U}_{1/2}(x)$ – элемент x_{n_2}, так, чтобы выполнялось $n_2 > n_1$. В $\overset{\circ}{U}_{1/3}(x)$ – x_{n_3}, $n_3 > n_2$ и т.д.[a]. В результате мы получим подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится к x, т.к. $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. а) ⇒ б).

Пусть $\exists x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Тогда по определению предела числовой последовательности в каждой окрестности $\mathbf{U}(x)$ лежит бесконечно много элементов подпоследовательности x_{n_k} (все, начиная с некоторого номера). Остаётся заметить, что каждый элемент подпоследовательности является элементом последовательности x_n. □ б) ⇒ а).

[a]Этот процесс можно продолжать бесконечно, т.к. в любой окрестности найдётся бесконечно много элементов последовательности x_n.

Лемма. Каждая сходящаяся числовая последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с пределом этой последовательности.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Тогда (по формулировке **б)**), точка a является предельной для последовательности x_n. Из Утверждения 5.1 вытекает сходимость к a любой подпоследовательности последовательности x_n. Следовательно, других предельных точек у этой последовательности нет. □

Обратное утверждение (если у ограниченной числовой последовательности только одна предельная точка, то она сходится), безусловно, также верно.

Зам. Однако предельных точек у числовой последовательности может быть больше одной, причём как любое конечное число, так и бесконечно много.

Теорема 16. *(теорема Больцано-Вейерштрасса).* Каждая ограниченная числовая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ – множество значений ограниченной последовательности x_n. Если $\mathbf{X}$ – конечно, то существует по крайней мере одна точка $x \in \mathbf{X}$ и подпоследовательность x_{n_k} (последовательности x_n) такая, что $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x$. Последовательность x_{n_k} постоянна, а значит сходится.

Пусть $\mathbf{X}$ – бесконечно. Тогда по лемме Больцано-Вейерштрасса оно обладает по крайней мере одной предельной точкой x (которое будет предельной точкой последовательности x_n). Из определения предельной точки[a] заключаем существование, сходящейся к x подпоследовательности. □

[a]См. также Утверждение 5.2.

Заметим, что на множестве $\mathbb{Q}$ теорема Больцано-Вейерштрасса не имеет места.

Зам. Вспоминая определение бесконечно большой последовательности[a] (и бесконечно большой последовательности определённого знака):

$x_n \to +\infty$, если $\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists N(E) : \forall n \geqslant N(E) \Longrightarrow x_n > E$;

$x_n \to -\infty$, если $\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists N(E) : \forall n \geqslant N(E) \Longrightarrow x_n < E$;

$x_n \to \infty$, если $\forall E \in \mathbb{R} \quad \exists N(E) : \forall n \geqslant N(E) \Longrightarrow |x_n| > E$;

мы можем переписать теорему Больцано-Вейерштрасса следующим образом:

[a] Последовательности, стремящиеся к ∞ мы не причисляем к сходящимся.

Теорема 16*. Из каждой числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность или бесконечно большую подпоследовательность.

Доказательство. Новым, по сравнению с теоремой Больцано-Вейерштрасса, является только тот случай, когда x_n не ограничена. Тогда по $\forall k \in \mathbb{N}$ будем выбирать номер $n_k \in \mathbb{N}$ такой, что $|x_{n_k}| > k$ и $n_k > n_{k-1}$. Получим подпоследовательность x_{n_k}, которая стремится к бесконечности. □

Обозначим через $\mathbf{X}_n^*$ множество предельных точек последовательности x_n, и рассмотрим следующий пример.

Пример 5.2. Рассмотрим счётное множество $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ и по нему составим следующую числовую последовательность:

$$x_n = \{a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

Для неё, очевидно, множество предельных точек $\mathbf{X}_n^*$ включает в себя заданное счётное множество $\mathbf{A}$. Однако, равенство $\mathbf{X}_n^* = \mathbf{A}$ может и не выполняться: множество $\mathbf{X}_n^*$ содержит также все предельные точки последовательности x_n, которые могут и не принадлежать самой x_n.

Пример 5.3. Пусть $\mathbf{A} = \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Составим числовую последовательность

$$x_n = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 1, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}.$$

Тогда $\mathbf{X}_n^* = \mathbf{A} \cup \{0\}$, причём $0 \notin \mathbf{A}$.

Пример 5.4. Пусть последовательность $x_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$ состоит из всех рациональных точек интервала $(0,1)$. В этом случае, $\mathbf{X}_n^* = [0,1]$. Т.к. $\forall x \in [0,1]$ в $\forall \mathbf{U}(x)$, найдётся бесконечно много рациональных дробей, элементов последовательности x_n.

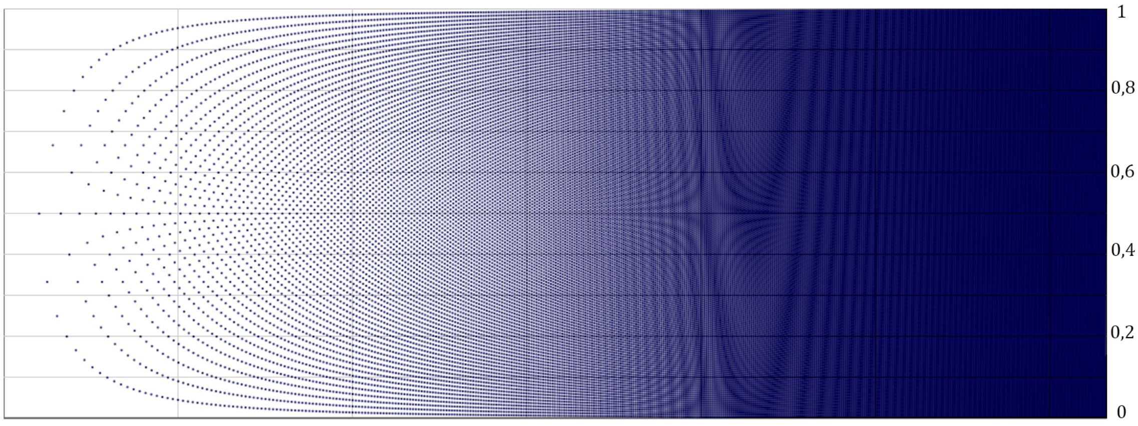
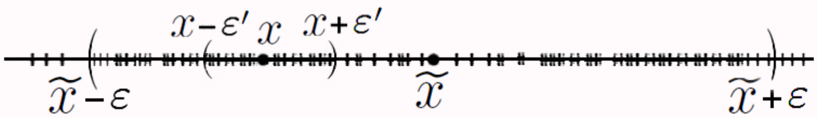


Рис. 27. Последовательность рациональных чисел

> **Отметим, что в последнем примере мощность $\mathbf{X}_n^*$ – континуум, хотя множество значений последовательности x_n, $\{x_n\}$ – счётно.**

Задача 2. Пусть $\mathbf{X}_n^*$ – множество предельных точек последовательности x_n, а $\widetilde{x}$ предельная точка множества $\mathbf{X}_n^*$. Докажите, что $\widetilde{x} \in \mathbf{X}_n^*$.



6 Верхний и нижний пределы последовательности

Рассмотрим некоторую ограниченную числовую последовательность x_n. В этом случае, очевидно, множество её предельных точек $\mathbf{X}_n^*$ также ограничено и не пусто[1]. Следовательно, для него существуют $\overline{x} = \sup \mathbf{X}_n^*$ и $\underline{x} = \inf \mathbf{X}_n^*$. Покажем, что $\overline{x}$, $\underline{x} \in \mathbf{X}_n^*$.

в общем случае, sup и inf могут не принадлежать множеству.

Т.к. $\overline{x} = \sup \mathbf{X}_n^*$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in \mathbf{X}_n^* : \overline{x} - \varepsilon < x_0 \leqslant \overline{x}$. $x_0 \in \mathbf{X}_n^* \Rightarrow x_0$ – предельная точка последовательности x_n. Поэтому, в любой её окрестности находится бесконечно много элементов x_n. Выберем $\varepsilon' > 0$ достаточно малым, так чтобы $\mathbf{U}_{\varepsilon'}(x_0) \subset \mathbf{U}_\varepsilon(\overline{x})$. Тогда в произвольной окрестности $\mathbf{U}_\varepsilon(\overline{x})$ находится бесконечно много элементов x_n, т.е. $\overline{x} \in \mathbf{X}_n^*$.

Аналогично доказывается, что $\underline{x} \in \mathbf{X}_n^*$. Следовательно, у ограниченной числовой последовательности всегда есть наименьшая и наибольшая предельные точки. Их называют *нижним* и *верхним пределами последовательности*. Обозначение: $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$

Из выше сказанного и определений вытекает следующее утверждение

[1] В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса.

Утверждение 6.1. *(критерий сходимости числовой последовательности).* Ограниченная числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда её верхний и нижний пределы совпадают.

***Следствие* 1.** Последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходится любая её подпоследовательность.

В случае неограниченной снизу (сверху) числовой последовательности из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $-\infty$ $(+\infty)$. Поэтому в таких случаях считают, что:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \Big(\varlimsup_{n\to\infty} x_n = +\infty\Big)$$

Т.о., для **любой** числовой последовательности определены 4 объекта, связанные следующими неравенствами:

$$\inf_n x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup_n x_n. \qquad (*)$$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ – sup **множества $\mathbf{X}_n^*$, предельных точек последовательности.**

$\sup\limits_n x_n$ – sup **множества, составленного из значений последовательности x_n.**

Для ограниченной последовательности это – конечные числа. При этом, в соотношении $(*)$ могут стоять как равенства, так и строгие неравенства.

Задача 1. Постройте пример последовательности x_n, для которой в данном соотношении стоят строгие неравенства.

Из этого же соотношения следует, что если все элементы последовательности x_n лежат на некотором отрезке $[a,b]$, то и $\mathbf{X}_n^* \subset [a,b]$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 6.1. $x_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$. Имеем, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, но на отрезке $[-1,1]$ нет ни одного элемента последовательности x_n.

Однако, имеет место следующее утверждение:

Утверждение 6.2. Пусть x_n – ограниченная числовая последовательность. $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow x_n \in (\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon).$$

Т.е. вне интервала $(\underline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$ лежит лишь конечное число элементов x_n.

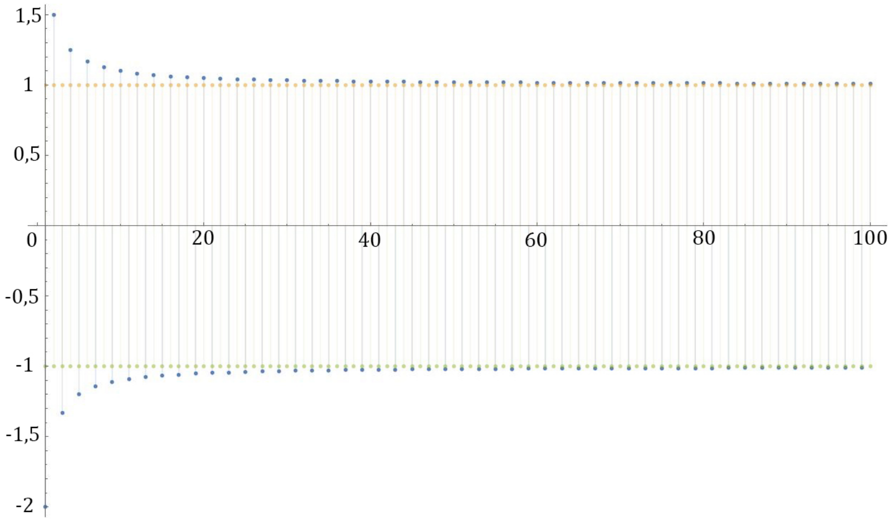


Рис. 28. $x_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

Доказательство. Доказательство от противного, используя теорему Больцано-Вейерштрасса и определения верхнего/нижнего пределов. □

Задача 2. Пользуясь введёнными выше определениями верхнего и нижнего пределов, докажите равенства:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k, \quad \overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k.$$

7 Критерий Коши сходимости последовательности

Определение. Последовательность x_n называется *фундаментальной*[a] (или *последовательностью Коши*), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n\geqslant N(\varepsilon) \text{ и } \forall p\in\mathbb{N} \Longrightarrow |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$$

Аналогично: x_n – фундаментальна, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n,m\geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon.$$

[a] *Или сходящейся в себе*

Лемма. Любая фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon = 1 > 0$. Для этого ε найдём номер N такой, что $\forall n,m \geqslant N$ выполнено: $|x_n - x_m| < 1$. В частности, тогда $|x_n - x_N| < 1$ для

$\forall n \geqslant N$. Следовательно для таких n:

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|.$$

Положим $M = \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\} \Longrightarrow |x_n| \leqslant M \quad$ для $\quad \forall n \in \mathbb{N}$. □

Теорема 17. *(критерий Коши сходимости числовой последовательности).* Для того, чтобы числовая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

критерий Больцано-Коши.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, $\forall m, n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| \leqslant |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Достаточность. По предыдущей лемме, фундаментальная последовательность ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса у неё найдётся сходящаяся подпоследовательность. Пусть $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Докажем, что и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Для этого выберем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Longrightarrow \exists K(\varepsilon) : \forall k \geqslant K(\varepsilon) \Rightarrow |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$x_n - \text{фундаментальна} \Longrightarrow \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $M(\varepsilon) = \max\{K(\varepsilon), N(\varepsilon)\}$. Тогда $n_M \geqslant n_N \geqslant N$, $n_M \geqslant n_K \geqslant K$. Следовательно, $\forall n \geqslant M(\varepsilon)$ выполнено:

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{n_M}| + |x_{n_M} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это и означает, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. □

Критерий Коши можно переформулировать так: числовая последовательность сходится, тогда и только тогда, когда её значения безгранично сближаются между собой по мере возрастания их номеров. То есть, числовая последовательность не может «попасть» в ε–трубку с «несблизившимися» членами. И, наоборот, если числовая последовательность «попала» в ε–трубку, то её члены заведомо сблизились между собой.

Таким образом, для числовой последовательности $x_n \subset \mathbb{R}$ фундаментальность эквивалентна сходимости. Но в общем случае (т.е. в случае x_n из какого-то другого множества) это не всегда так. Например, если x_n – рациональные приближения числа $\sqrt{2}$, то $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in \mathbb{Q}$, x_n – фундаментальна[2], но не существует предела этой последовательности в $\mathbb{Q}$, т.к. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Заметим, что из сходимости x_n в произвольном множестве (в том числе и в $\mathbb{Q}$)

[2] См. пример ниже.

следует её фундаментальность[3]. Т.о. **фундаментальность слабее сходимости.**

Определение. Множества, в которых фундаментальность влечёт за собой сходимость последовательности, называют *полными.* Из приведённых выше рассуждений множество $\mathbb{R}$ – полное, а $\mathbb{Q}$ – нет.

Пример 7.1. Пусть

десятичное разложение вещественного числа.

$$r_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{10} + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \ldots + \varepsilon_n \cdot \frac{1}{10^n}, \text{ где } \varepsilon_0 \in \mathbb{Z},\ \varepsilon_k \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ k = \overline{1, n};$$

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ получим:

$$|r_n - r_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k \cdot \frac{1}{10^k} \leqslant 9 \cdot \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{10^k} < 9 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n} < \varepsilon,$$

при $n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln 0{,}1}\right] + 1$.

Пример 7.2. $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

частичная сумма гармонического ряда.

Напишем **отрицание фундаментальности:**

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \,:\, \forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists p \in \mathbb{N} \text{ выполнено } |x_n - x_{n+p}| \geqslant \varepsilon_0.$$

Т.е. найдётся такой член, который выйдет из ε-трубки.

$$|H_n - H_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \left\{p = n\right\} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Следовательно, последовательность H_n не фундаментальна, т.е. $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} H_n$.

Т.к. $H_n \uparrow$, то $H_n \to +\infty$. Однако отметим, что H_n стремится к $+\infty$ очень медленно (чтобы вырасти на $\frac{1}{2}$ требуется взять ещё примерно столько же слагаемых[a]).

[a] Далее будет доказано, что H_n растёт со скоростью логарифма.

Пример 7.3. $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

Дзета-функция в точке 2.

$$|\gamma_n - \gamma_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n\,(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)\,(n+p)} =$$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

при $n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$[a].

[a] Можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \frac{\pi^2}{6}$.

[3] Доказательство необходимости опиралось лишь на определение сходимости и фундаментальности, но не на свойства множества $\mathbb{R}$.

Пример 7.4. $H_n^\alpha = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$; $|H_n^\alpha - H_{n+p}^\alpha| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^\alpha}$.

Дзета-функция, $\zeta(\alpha)$.

• Для $\alpha \leqslant 1$, получаем $|H_n^\alpha - H_{n+p}^\alpha| \geqslant |H_n - H_{n+p}| > \frac{1}{2}$ (см. Пример 7.2.) $\Longrightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} H_n^\alpha$.

• Для $\alpha \geqslant 2$, получаем $|H_n^\alpha - H_{n+p}^\alpha| \leqslant |H_n^2 - H_{n+p}^2| = |\gamma_n - \gamma_{n+p}| < \varepsilon$ (см. Пример 7.3.) $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} H_n^\alpha$.

Что происходит при $\alpha \in (1,2)$?

Утверждение 7.1. *(телескопический признак сходимости*[a]*).* Пусть $a_n \searrow$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $a_n > 0$[b]. Тогда последовательность

$$x_n = a_1 + \ldots + a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность

$$y_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}.$$

[a] Или *теорема Коши о прореживании.*
[b] Т.е. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots > 0$.

Доказательство. В силу не отрицательности последовательности a_n заключаем, что $x_n \nearrow$ и $y_n \nearrow$. Сложим неравенства, вытекающие из монотонности a_n:

$$a_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1, \quad 2a_4 \leqslant a_3 + a_4 \leqslant 2a_2, \quad 4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leqslant 4a_4, \ldots,$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \leqslant a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leqslant 2^n a_{2^n},$$

получаем: $\frac{y_{n+1} - a_1}{2} \leqslant x_{2^{n+1}} - a_1 \leqslant y_n$. Откуда, и из критерия сходимости монотонных последовательностей[a], вытекает требуемое. □

[a] Сходимость монотонных последовательностей эквивалентна их ограниченности.

Пример 7.5. Рассмотрим последовательность $H_n^\alpha = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$. По предыдущему утверждению, H_n^α сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность

$$1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = 1 + 2^{1-\alpha} + 2^{2(1-\alpha)} + \ldots + 2^{n(1-\alpha)}.$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $2^{1-\alpha}$, она сходится тогда и только тогда, когда $2^{1-\alpha} < 1$, т.е. $1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

Задача 1. Докажите, что последовательность

$$x_n = \frac{1}{2\,(\ln 2)^p} + \frac{1}{3\,(\ln 3)^p} + \ldots + \frac{1}{n\,(\ln n)^p}$$

сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Утверждение 7.2. Предположим, что имеет место принцип Архимеда и критерий Коши. Тогда выполняется принцип существования точных граней.

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}$ – непустое ограниченное множество. Построим убывающую фундаментальную последовательность (составленную из элементов, ограничивающих $\mathbf{S}$ сверху), сходящуюся к $\sup \mathbf{S}$.

Пусть b – одна из верхних границ множества $\mathbf{S}$ $\big($будем писать $b \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})\big)$, и $a \in \mathbf{S}$. По принципу Архимеда найдутся такие натуральные M и $-m$, что $m < a \leqslant b < M$. Для $\forall p \in \mathbb{N}$ определим множество

$$\mathbf{S}_p = \Big\{k \in \mathbb{Z} \,\Big|\, \frac{k}{2^p} \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})^{a} \text{ и } \frac{k}{2^p} \leqslant M\Big\}.$$

Тогда $2^p m$ – ограничивает $\mathbf{S}_p$ снизу[b], а $k = 2^p M \in \mathbf{S}_p$[c]. Следовательно,$\forall p \in \mathbb{N}$ $\mathbf{S}_p$ – конечное множество целых чисел. Поэтому, $\exists \min \mathbf{S}_p$, который мы обозначим через k_p. Определим последовательность $a_p := \frac{k_p}{2^p}$.

> **Постараемся выяснить, чему равно** $a_{p+1} = \frac{k_{p+1}}{2^{p+1}}$**.**

Получаем, $\frac{2k_p}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p} \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})$, а $\frac{2k_p-2}{k^{p+1}} = \frac{k_p-1}{2^p} \notin \mathcal{UB}(\mathbf{S})$[d]. Поэтому,

$$\text{либо } \; k_{p+1} = 2k_p, \; \text{ либо } \; k_{p+1} = 2k_p - 1^{e}.$$

$$\overbrace{\Longrightarrow}^{a_{p+1}=\frac{k_{p+1}}{2^{p+1}}} a_{p+1} = \frac{2k_p}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p} = a_p, \;\text{ либо }\; a_{p+1} = \frac{2k_p-1}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p} - \frac{1}{2^{p+1}} = a_p - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

$$\Longrightarrow \; a_p - a_{p+1} = 0, \;\text{ либо }\; a_p - a_{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Теперь, если $q > p \geqslant 1$, то

$$0 \leqslant a_p - a_q = (a_p - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_{p+2}) + \ldots + (a_{q-1} - a_q) \leqslant \frac{1}{2^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q+1}} <$$

$$< \frac{1}{2^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^p}.$$

Откуда, и из принципа Архимеда вытекает фундаментальность последовательности $\{a_p\}$, а значит и её сходимость, т.е. $\exists \lim\limits_{p\to\infty} a_p$. Обозначим данный предел – L, и заметим, что $a_p \searrow L$.

Докажем, что $L = \sup \mathbf{S}$. От противного. Пусть $L \notin \mathcal{UB}(\mathbf{S})$, тогда $\exists x \in \mathbf{S} : x > L$. Т.к. $x - L > 0$ и $a_p \searrow L$, то $\exists p \in \mathbb{N} : a_p - L < x - L \Rightarrow a_p < x \in \mathbf{S}$. Противоречие с тем, что $a_p = \frac{k_p}{2^p} \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})$ (!)

Теперь предположим, что L **не наименьшая** верхняя грань, т.е. $\exists L' \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})$, что $L' < L$. Выберем $p \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^p} < L - L' \Rightarrow a_p - \frac{1}{2^p} \overbrace{\geqslant}^{a_p \geqslant L} L - \frac{1}{2^p} > L',$$

но тогда $a_p - \frac{1}{2^p} = \frac{k_p - 1}{2^p} \in \mathcal{UB}(\mathbf{S})$, что входит в **противоречие** с тем, что $k_p = \min \mathbf{S}_p$. Следовательно, $L = \sup \mathbf{S}$. Существование $\inf \mathbf{S}$ доказывается аналогично. □

[a]Т.е. ограничивает $\mathbf{S}$ сверху.
[b]Т.к. $\frac{2^p m}{2^p} = m < a \in \mathbf{S}$.
[c]$2^p M + 1 \notin \mathbf{S}_p$, т.к. $\frac{2^p M + 1}{2^p} = M + \frac{1}{2^p} > M$.
[d]Иначе, $k_p - 1 \in \mathbf{S}_p \Rightarrow k_p \neq \min \mathbf{S}_p$.
[e]$2k_p - 2$ уже не подходит (см. выше), $2k_p + 1 \neq \min \mathbf{S}_{p+1}$, т.к. $2k_p \in \mathbf{S}_{p+1}$

Нами было доказано, что Критерий Коши (в архимедовом поле) эквивалентен каждому из шести основных принципов полноты, а значит может быть выбран в качестве первоначальной аксиомы.

Рис. 29. Основные принципы полноты

Отметим, что принцип Архимеда не может быть выведен из аксиом $\mathbb{R}$, минуя принцип полноты, см. [Зорич I, с.66].

Теория числовых функций

ГЛАВА IV

1 Понятие предела функции

Пусть $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$ – некоторое числовое множество и a – предельная точка множества $\mathbf{E}$[1]. Рассмотрим далее вещественнозначную функцию

$$f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}.$$

Мы хотим сказать, что означает, что при приближении точки $x \in \mathbf{E}$ к точке a значение $f(x)$ функции f приближается к некоторому числу b, которое мы будем называть пределом функции f при x, стремящемся к a. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Рассмотрим несколько наводящих на размышление примеров.

Пример 1.1.

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Пример 1.2.

$$y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

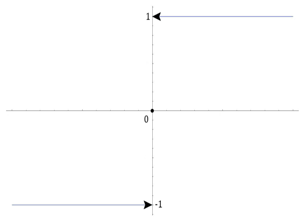


Рис. 30. Пример 1

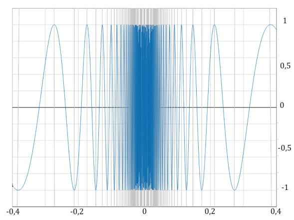


Рис. 31. Пример 2

Рассмотрим также и функцию Дирихле

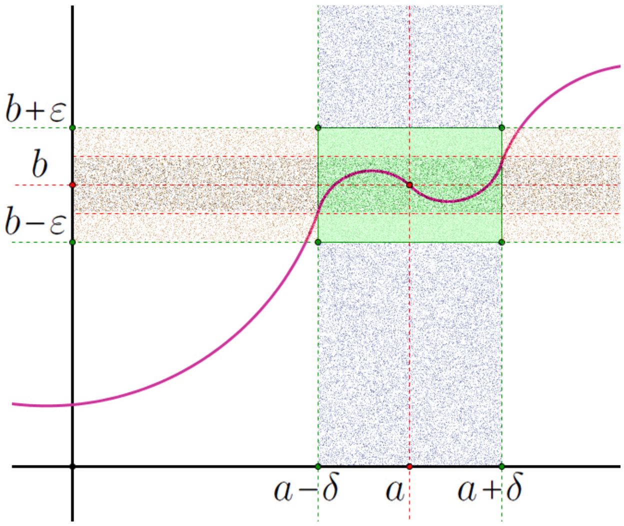
Пример 1.3. Функция Дирихле

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Определение. Коши определение на языке $\varepsilon - \delta$ $\lim\limits_{\mathbf{E} \ni x \to a} f(x) = b$, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\forall x \in \mathbf{E}$, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; : \; \forall x \in \mathbf{E} \cap \overset{\circ}{\mathbf{U}}_{\delta}(a) \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

[1] Точка a является предельной для множества $\mathbf{E}$, если в любой окрестности этой точки найдётся бесконечно много точек множества $\mathbf{E}$, или, если существует последовательность $\{x_n\}$ точек множества $\mathbf{E}$, отличных от a, стремящихся к a.



Определение. Запишем это определение, используя только понятие окрестности:

$$\lim_{\mathbf{E}\ni x\to a} f(x)=b,\ \text{ если }\ \forall\, \mathbf{V}_\varepsilon(b)\ \exists\, \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) : f\big(\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)\cap\mathbf{E}\big)\subset \mathbf{V}_\varepsilon(b)^{a}.$$

[a] $f\big(\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)\cap\mathbf{E}\big)\subset \mathbf{V}_\varepsilon(b)$ равносильно тому, что $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)\cap\mathbf{E} \Rightarrow f(x)\in\mathbf{V}_\varepsilon(b)$.

Эта запись говорит о том, что число b является пределом функции $f:\mathbf{E}\mapsto\mathbb{R}$ при $x\to a$ по множеству $\mathbf{E}$, если для любой ε-окрестности $\mathbf{V}_\varepsilon(b)$ точки b найдётся проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)$ точки a во множестве $\mathbf{E}$, образ которой $f\big(\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)\cap\mathbf{E}\big)$ при отображении f полностью содержится в $\mathbf{V}_\varepsilon(b)$.

Учитывая, что в любой окрестности точки числовой оси содержится также некоторая симметричная окрестность (δ-окрестность) этой же точки, мы приходим к следующей форме записи определения предела:

$$\lim_{\mathbf{E}\ni x\to a} f(x)=b,\ \text{ если }\ \forall\, V(b)\ \exists\, \overset{\circ}{\mathbf{U}}(a) : f\big(\overset{\circ}{\mathbf{U}}(a)\cap\mathbf{E}\big)\subset V(b).$$

Если будет понятно по какому множеству $\mathbf{E}$ берётся предел, будем просто писать: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Значение функции f в точке a не участвует в определении предела в точке a. Поэтому, для существования и значения предела в этой точке несущественно, задана ли f в точке a и, если задана, то как именно.

Пример 1.4.

$$y=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

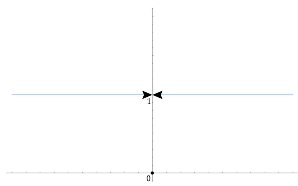


Рис. 32. Пример 4

Мы можем определить понятие предела отображения

$$f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y},$$

если нам будет сказано, что такое окрестность точки в $\mathbf{X}$ и в $\mathbf{Y}$, или, как говорят, если в $\mathbf{X}$ и в $\mathbf{Y}$ будет задана *топология*.

Определение. Гейне. Определение на языке последовательностей $\lim\limits_{\mathbf{E}\ni x\to a} f(x) = b$, если **для любой** последовательности $\{x_n\}$ точек множества $\mathbf{E}$, отличных от a, стремящейся к этой точке при $n \to \infty$, соответствующая им последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится, при $n \to \infty$, к числу b:

$$\forall \{x_n\} : x_n \in \mathbf{E} \setminus \{a\},\ x_n \to a \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} b.$$

Множество $\mathbf{E}$, на котором задана функция f, не обязана целиком покрывать всю окрестность $\mathring{\mathbf{U}}(a)$.

Определение предела легко обобщается на случай, когда a или b равны $-\infty$, $+\infty$ или ∞. Определение на языке окрестностей вообще не меняется. Определение на языке последовательностей не меняется, за исключением того, что незачем писать $x_n \neq (\pm)\infty$. Определение на языке „$\varepsilon - \delta$“ записывается в этих случаях по-разному.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \Delta > 0 : \forall x \in \mathbf{E},\ x > \Delta \Rightarrow |f(x)| > M;$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbf{E},\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 : \forall x \in \mathbf{E},\ |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если для $\forall \{x_n\}$ ($x_n \in \mathbf{E}$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$) последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел, то все эти пределы равны между собой, и таким образом, функция имеет предел в точке a.

Доказательство. Пусть $x_n, y_n \in \mathbf{E} \setminus \{a\}$, $x_n \to a$, $y_n \to a$, $f(x_n) \to x$, $f(y_n) \to y$. Построим новую числовую последовательность

$$\{z_n\} : z_{2n-1} = x_n,\quad z_{2n} = y_n.$$

Тогда $z_n \in \mathbf{E} \setminus \{a\}$, $z_n \to a$. Следовательно, $\{f(z_n)\}$ стремится к некоторому пределу, и $x = y$, как пределы подпоследовательностей последовательности, имеющей предел. $\square$

Теорема 18. Определения предела функции по Коши и по Гейне равносильны.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем $a, b \in \mathbb{R}$[a].

Пусть $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (*по Коши*). Из по Коши выводим по Гейне Следовательно, для любой ε-окрестности $V_\varepsilon(b)$ точки b найдется проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{\mathbf{U}}(a)$ точки a в $\mathbf{E}$, что $f\Big(\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \cap \mathbf{E}\Big) \subset V_\varepsilon(b)$. Если последовательность $\{x_n\}$ точек множества $\mathbf{E} \setminus \{a\}$ сходится к a, то $\forall\delta > 0$ найдётся номер $N(\delta) \in \mathbb{N}$, начиная с которого будет $x_n \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)$ и, значит $f(x_n) \in V_\varepsilon(b)$. На основании определения предела числовой последовательности заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Пусть $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (*по Гейне*). Из по Гейне выводим по Коши `От противного`. Предположим, что число b не является пределом функции f по Коши при $\mathbf{E} \ni x \to a$. Тогда

$$\exists\varepsilon_0 \,:\, \forall\delta > 0 \;\; \exists x \in \mathbf{E} \cap \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \,:\, |f(x) - b| \geqslant \varepsilon_0.$$

Т.о. можно взять последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$ и утверждать, что для каждого её элемента найдётся хотя бы одно значение аргумента x_n такое, что

$$0 < |x_n - a| < \tfrac{1}{n}, \;\text{ но }\; |f(x) - b| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (*)$$

Левое из неравенств $(*)$ означает, что $\{x_n\} \to a$ и $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Но в таком случае, согласно определению предела по Гейне соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ обязана сходится к числу b, а этому `противоречит` правое из неравенств $(*)$, справедливое $\forall n \in \mathbb{N}$. □

[a]Т.е. a и b – конечны.

Доказанная теорема показывает, что функция f может иметь в точке a только один предел. В самом деле, для определения предела функции по Гейне это вытекает из единственности предела числовой последовательности $\{f(x_n)\}$, а для определения предела по Коши – из установленной эквивалентности этого предела пределу функции по Гейне.

2 Основные утверждения теории функций

Определение. Будем говорить, что функция f – ограничена на множестве $\mathbf{X}$, если

$$\exists M > 0 \ : \ \forall x \in \mathbf{X} \implies |f(x)| \leqslant M.$$

Утверждение 2.1. *(финальная ограниченность функции, имеющей предел).* Если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, то f–ограничена на $\mathbf{U}_\delta(a) \cap \mathbf{E}$ для некоторого $\delta > 0$[a].

[a] Или, как говорится, *финально ограничена при* $x \to a$.

Доказательство.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Если $a \in \mathbf{E}$, то обозначим $m = \min\{b - \varepsilon, f(a)\}$, $M = \max\{b + \varepsilon, f(a)\}$. Тогда

$$\forall x \in \mathbf{U}_\delta(a) \cap \mathbf{E} \implies m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

$\square$

Введём понятие **одностороннего предела** функции $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ в точке a. Для этого потребуем, чтобы множество $\mathbf{E}$ для $\forall \delta > 0$ имело хотя бы один элемент, принадлежащий интервалу $(a, a + \delta)$ $\big($интервалу $(a - \delta, a)\big)$.

Определение. Число b называется *правым* (*левым*) *пределом функции* f *в точке* a *по Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ \forall x \in \mathbf{E}, \ a < x < a + \delta \ \ (a - \delta < x < a) \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b \ \big(f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b\big)$

Определение. Число b называется *правым* (*левым*) *пределом функции* f *в точке* a *по Гейне*, если $\forall \{x_n\} \to a$ и $x_n > a$ $(x_n < a)$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b.

Пример 2.1.

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет в точке $a = 0$ как правый, так и левый пределы, причём

$\mathrm{sgn}(0+0)=1$, $\mathrm{sgn}(0-0)=-1$. Действительно,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=1\ (\text{к примеру})\ :\ \forall x,\ 0<x<1\ \ (-1<x<0)\Rightarrow|1-1|=0<\varepsilon.$$

Из приведённых рассуждений вытекает, что у рассматриваемой функции $y=\mathrm{sgn}x$ не существует предела в точке $a=0$.

Утверждение 2.2. Функция f имеет в точке a предел равный b, тогда и только тогда, когда в этой точке существуют оба односторонних предела, каждый из которых равен числу b.

Доказательство. Необходимость. Следует из определения предела.

Достаточность. Если неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ справедливо для всех x, удовлетворяющих условиям $a<x<a+\delta_1$ и $a-\delta_2<x<a$, то оно справедливо и для $0<|x-a|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. □

Лемма (о стабилизации знака функции, имеющей предел). Пусть $f:\mathbf{E}\mapsto\mathbb{R}$, a – предельная точка множества $\mathbf{E}$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$, $B\neq0$. Тогда

$$\exists\mathbf{U}(a),\ \text{что}\ f(x)\cdot B>0\ \text{для}\ \forall x\in\mathbf{U}(a)\cap\mathbf{E}^{a}.$$

[a]Т.е. знаки $f(x)$ и B совпадают в данной окрестности.

Доказательство. Для определённости считаем, что $B>0$. От противного. Пусть $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in\mathbf{U}_{1/n}(a)\cap\mathbf{E}:\ f(x_n)\leqslant0$. Тогда $\{x_n\}\to a\implies\{f(x_n)\}\to B$. По теореме о предельном переходе в неравенствах заключаем, что $B\leqslant0$. Противоречие! □

Теорема 19. *(арифметические операции над функциями, имеющими предел).* Пусть две функции f и g заданы на одном и том же множестве $\mathbf{E}$, и имеют в точке a пределы, равные B и C соответственно. Тогда функции $f\pm g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ имеют в точке a пределы, соответственно равные: $B\pm C$, $B\cdot C$, $\frac{B}{C}$[a].

[a]В случае частного требуем, чтобы $C\neq0$, тогда из леммы о стабилизации знака, вытекает, что $g(x)\neq0$ в некоторой окрестности.

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из определения предела функции в точке a по Гейне и соответствующей теоремы об арифметических операциях над числовыми последовательностями. □

Определение. Если $f:\mathbf{X}\mapsto\mathbb{R}$, $g:\mathbf{Y}\mapsto\mathbb{R}$ и $f(\mathbf{X})\subset\mathbf{Y}$, то на множестве $\mathbf{X}$ определена *композиция* $g\circ f$ *функций* f и g или, как говорят, *сложная функция* $g(f)$.

Теорема 20. предел композиции функций Пусть $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{Z} \subset \mathbb{R}$, $f(\mathbf{X}) \subset \mathbf{Y}$ и существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Причём, существует такая проколотая окрестность $\widetilde{\mathbf{W}}(x_0)$, что $f(x) \neq y_0$ для $\forall x \in \widetilde{\mathbf{W}}(x_0) \cap \mathbf{X}$. Тогда при $x \to x_0$ существует предел (конечный или бесконечный) сложной функции $g \circ f$, причём $\lim\limits_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y)$.

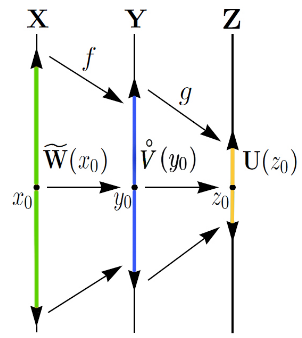


Рис. 33. Теорема 3

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$. Зафиксируем произвольным образом окрестность $\mathbf{U}(z_0)$. Тогда согласно определению предела, $\exists \overset{\circ}{V}(y_0)$ – такая проколотая окрестность точки y_0, что $\forall y \in \mathbf{Y} \cap \overset{\circ}{V}(y_0)$, выполнено $g(y) \in \mathbf{U}(z_0)$. Далее, т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, то $\exists \mathbf{W}(x_0) \subset \widetilde{\mathbf{W}}(x_0)$, что если $x \in \mathbf{X} \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}(x_0)$, то $f(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{V}}(y_0)$, а т.к. $f(\mathbf{X}) \subset \mathbf{Y}$, то $f(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{V}}(y_0) \cap \mathbf{Y}$. Следовательно, имеем: если выполнено условие $x \in \mathbf{X} \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}(x_0)$, то $g\big(f(x)\big) \in \mathbf{U}(z_0)$. А т.к. окрестность $\mathbf{U}(z_0)$ была выбрана произвольно, то это означает, что

$$\exists \lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = z_0 = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

□

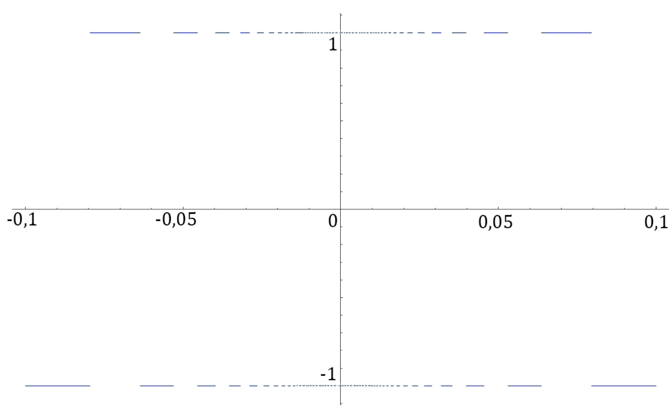
Доказанную в теореме 3 формулу $\lim\limits_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim\limits_{y \to y_0} g(y)$, **где** $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, **можно рассматривать как** правило замены переменного **для вычисления пределов сложных функций.**

Пример, показывающий, что от условия $\exists \widetilde{\mathbf{W}}(x_0) : f(x) \neq y_0$ **для** $\forall x \in \widetilde{\mathbf{W}}(x_0) \cap \mathbf{X}$ **избавиться нельзя:** $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$, $g(y) = |\mathrm{sgn} y|$. **Тогда:**

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{y \to 0} |\mathrm{sgn} y| = 1.$$

Но композиция $g\big(f(x)\big) = \left|\mathrm{sgn}\left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right)\right|$ **не имеет предела при** $x \to 0$**, т.к.**

$$g\Big(f\left(\tfrac{1}{\pi n}\right)\Big) \equiv 0 \to 0, \quad g\Big(f\Big(\tfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}\Big)\Big) \equiv 1 \to 1.$$



Теорема 21. предельный переход и неравенства. Теорема о двух милиционерах

а) Пусть $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ таковы, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = C$ и $B < C$. Тогда $\exists \overset{\circ}{\mathbf{U}}(a)$ такая, что $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}(a) \Rightarrow f(x) < g(x)$.

б) Пусть
функции $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$, $h : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ таковы, что $\forall x \in \mathbf{E}$ выполнено: $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = B$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$.

Доказательство.

а) Возьмём число $\gamma : B < \gamma < C$. По определению предела существуют такие проколотые окрестности $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_1(a)$,$\overset{\circ}{\mathbf{U}}_2(a)$,что

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_1(a) \Rightarrow |f(x) - B| < \gamma - B, \quad \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_2(a) \Rightarrow |g(x) - C| < C - \gamma.$$

Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_1(a) \cap \overset{\circ}{\mathbf{U}}_2(a)$ имеем:

$$f(x) < B + \gamma - B = \gamma = C - C + \gamma < g(x).$$

б) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = B$, то по `произвольному` $\varepsilon > 0$ найдём окрестности $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_1(a)$ и $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_2(a)$ такие, что:

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_1(a) \Rightarrow B - \varepsilon < f(x), \quad \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_2(a) \Rightarrow h(x) < B + \varepsilon.$$

Поэтому при $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_1(a) \cap \overset{\circ}{\mathbf{U}}_2(a)$ выполнено:

$$B - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < B + \varepsilon \iff |g(x) - B| < \varepsilon.$$

□

***Следствие* 1.** Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = C$. Если в некоторой окрестности $\overset{\circ}{\mathbf{U}}(a)$[a] выполнено одно из неравенств:

$$1) f(x) > g(x), \quad 2) f(x) \geqslant g(x), \quad 3) f(x) > C, \quad 4) f(x) \geqslant C,$$

то справедливо соотношение: $B \geqslant C$.

[a]Т.е. $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}(a)$.

Доказательство. Следования из неравенств 1) и 2) получаются из теоремы 4 доказательством от противного. Следования из 3), 4) – частные случаи 1) и 2), получающиеся при $g(x) \equiv C$. □

3 Критерий Коши существования предела функции

Определение. Будем говорить, что *функция* $f: \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ *удовлетворяет в точке* a *условию Коши*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \mathbf{E} \cap \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)^{a} \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

[a]Т.е. $\forall x', x'' \in \mathbf{E}, \ 0 < |x' - a| < \delta(\varepsilon), \ 0 < |x'' - a| < \delta(\varepsilon)$.

Теорема 22. *(Критерий Коши существования предела функции в точке a).* Для того, чтобы функция f имела в точке a конечный предел, **необходимо** и **достаточно**, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. По определению предела функции найдётся такая окрестность $\mathbf{U}(a)$ точки a, что $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \cap \mathbf{E} \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда, если $x', x'' \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \cap \mathbf{E}$, то

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - b| + |b - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть функция f удовлетворяет условию Коши в точке a. Возьмём **произвольную** числовую последовательность $\{x_n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} a$, $\mathbf{E} \ni x_n \neq a$. По $\forall \varepsilon > 0$ подберём окрестность $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)$ из условия Коши для функции. По определению предела последовательности $\{x_n\}$ найдётся такой номер $N = N(\delta)$, что при $\forall n \geqslant N \Rightarrow x_n \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)$. По выбору $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a)$ для всех $n, m \geqslant N$ будет выполнено: $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, т.е последовательность $\{f(x_n)\}$ – фундаментальна. Следовательно, по критерию Коши существования предела числовой последовательности, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

В силу произвольности $\{x_n\}$ ($x_n \neq a$, $x_n \to a$, $x_n \in \mathbf{E}$) и замечания 3[a] к определению предела функции по Гейне, заключаем существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. $\square$

[a]Если для $\forall \{x_n\}$ ($x_n \in \mathbf{E}$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$) последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел, то все эти пределы равны между собой

Аналогично формулируется и доказывается критерий Коши для случаев односторонних пределов в точке a и предела при $x \to (\pm)\infty$.

Определение. Колебанием функции $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ на множестве $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ называется величина $\omega(f, \mathbf{A}) = \sup\limits_{x', x'' \in \mathbf{A}} |f(x') - f(x'')|$.

Теорема 22*. Существование конечного предела функции $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ при $x \to a \in \mathbf{E}$ равносильно выполнению условия:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathbf{U}(a) : \omega(f, \mathbf{U}(a) \cap \mathbf{E}) < \varepsilon.$$

4 Сравнение асимптотического поведения функций

Цель следующих определений – придать чёткий смысл высказываниям типа: «одна функция стремится к 0 (или ∞) быстрее другой»; «две функции стремятся к 0 (или ∞) с одинаковой скоростью» и т.п.

Определение. Символы Ландау Пусть $f, g : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$, a – предельная точка множества $\mathbf{E}$ и существует функция $\varphi : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ и окрестность $\mathbf{U}(a)$ точки a такие, что

$$f(x) = \varphi(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \cap \mathbf{E}.$$

Тогда:

1. если φ

   ограничена на $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \cap \mathbf{E}$, то говорят, что *функция f ограничена по сравнению с g при $x \to a$. $f = \underline{\mathbf{O}}(g)$, $x \to a$.*

   Это равносильно следующему: $\exists C > 0$ **и** $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) : |f(x)| \leqslant C|g(x)|$, $\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \cap \mathbf{E}$.

2. если $\varphi \xrightarrow[x \to a]{} 0$, то говорят, что *функция f – бесконечно малая по сравнению с g при $x \to a$. $f = \overline{o}(g)$, $x \to a$.*

   Если $\exists\, \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \cap \mathbf{E}$ **выполнено** $g(x) \neq 0$, **а в случае** $a \in \mathbf{E}$, **кроме того,** $\varphi(a) = 0$, **то условие** $f = \overline{o}(g)$, $x \to a$ **равносильно** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

3. если $\varphi \xrightarrow[x \to a]{} 1$, то говорят, что *функции f и g эквивалентны или асимптотически равны при $x \to a$. $f \sim g$, $x \to a$.*

   Если $\exists\, \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) : \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_\delta(a) \cap \mathbf{E}$ **выполнено** $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, **то условие** $f \sim g$, $x \to a$ **равносильно** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$.

Определение. Если выполнено: $f = \underline{\mathbf{O}}(g)$, $g = \underline{\mathbf{O}}(f)$ при $x \to a$ (или $x \in \mathbf{D}$), то говорят, что *функции f и g сравнимы* или *функции одного порядка при $x \to a$* (*на множестве $\mathbf{D}$*). $f \asymp g$, $x \to a$ $(x \in \mathbf{D})$.

Пример 4.1. $\frac{1}{x} = \underline{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), x \to 0$, т.к. $\left|\frac{1}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|$ при $|x| \le 1$;

Пример 4.2. $\frac{1}{x^2} = \underline{O}\left(\frac{1}{x}\right), x \to \infty$, т.к. $\left|\frac{1}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$ при $|x| \ge 1$;

Пример 4.3. $f(x) = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$, $x \to 0$;

$\left|\frac{f}{g}\right| = \left|2 + \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 3 \Rightarrow |f| \leqslant 3|g|$, $\left|\frac{g}{f}\right| = \frac{1}{\left|2+\sin\frac{1}{x}\right|} \leqslant 1 \Rightarrow |g| \leqslant |f|$. Т.е. $f \asymp g$, $x \to 0$.

Пример 4.4. $\frac{x^6}{1+x^4} \sim x^6$, при $x \to 0$;

Пример 4.5. $\frac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$, при $x \to \infty$.

Утверждение 4.1. Если $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a$, то $f \sim h$ при $x \to a$.

Доказательство. Из условия утверждения вытекает, что $\exists \mathbf{U}(a)$ и функции $\varphi, \psi : \mathbf{E} \cap \mathbf{U}(a) \mapsto \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 1$, что

$$\forall x \in \mathbf{E} \cap \mathbf{U}(a) \Rightarrow f(x) = \varphi(x)\,g(x),\;\; g(x) = \psi(x)\,h(x) \Rightarrow f(x) = \underbrace{\varphi(x)\psi(x)}_{\xrightarrow[x\to a]{} 1}\,h(x)$$

Следовательно, $f \sim h$ при $x \to a$. $\square$

Непрерывность функции

ГЛАВА

V

1 Основные определения и утверждения.

Пусть $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbf{E}$.

Описательно говоря, функция f непрерывна в точке a, если её значения $f(x)$ по мере приближения x к a приближаются к $f(a)$, или что при малых изменениях аргумента, функция также изменяется не сильно. Далее мы уточним это понятие.

Определение. Функция f называется *непрерывной в точке* $a \in \mathbf{E}$, если **для любой** окрестности $\mathbf{V}\big(f(a)\big)$ значения $f(a)$ функции принимаемого ею в точке a, **найдётся** такая окрестность $\mathbf{U}(a)$ точки a во множестве $\mathbf{E}$ (т.е. $\mathbf{U}(a)\cap\mathbf{E}$), образ которой $f\big(\mathbf{U}(a)\cap\mathbf{E}\big)$ содержится в $\mathbf{V}\big(f(a)\big)$.

$$f \in \mathcal{C}(a) \iff \forall\, \mathbf{V}\big(f(a)\big)\ \exists \mathbf{U}(a) : f\big(\mathbf{U}(a) \cap \mathbf{E}\big) \subset \mathbf{V}\big(f(a)\big) \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbf{E},\ |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Отметим, что мы не пишем $0 < |x - a| < \delta$, т.к. функция f должна быть определена в точке a.

Пример 1.1. Пусть a – **изолированная точка множества** $\mathbf{E}$. Тогда найдётся такая окрестность $\mathbf{U}(a)$ точки a, в которой нет других точек множества $\mathbf{E}$, кроме самой точки a. В этом случае

$$f\big(\mathbf{U}(a) \cap \mathbf{E}\big) = f(a) \subset \mathbf{V}\big(f(a)\big),$$

какова бы ни была окрестность $\mathbf{V}\big(f(a)\big)$. Т.о., в любой изолированной точке области определения функция, очевидно, непрерывна. Но это – **вырожденный случай**. Заметим, что **понятие предела в изолированной точке не определено**.

Пусть далее a – **предельная точка множества** $\mathbf{E}$. Будем говорить, что функция $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{\mathbf{E}\ni x\to a} f(x) = f(a)$. Это тождество можно переписать так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\big(\lim_{x\to a} x\big),$$

т.е. непрерывные в точке функции, и только они, **перестановочны с операцией предельного перехода**.

Определение. Функция $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* $\mathbf{X} \subset \mathbf{E}$, если она непрерывна в каждой точке множества $\mathbf{X}$. Обозначение: $f \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$.

Пример 1.2. $f(x) = x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем:

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Пример 1.3. $f(x) = \sin x \in (C)(\mathbb{R})$. $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем:

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = \Big|\underbrace{2\cos\tfrac{x+a}{2}}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\sin\tfrac{x-a}{2}}_{\leqslant \frac{x-a}{2}}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| < \delta = \varepsilon.$$

Теорема 23. *(Арифметические операции над непрерывными функциями).* Пусть на одном и том же множестве заданы функции f и g, непрерывные в точке a. Тогда функции $f \pm g$, $f \cdot g$ и $\frac{f}{g}$ также непрерывны в точке a[a].

[a] В случае частного нужно дополнительно требовать $g(a) \neq 0$.

Доказательство. **Вытекает из теоремы об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.** □

Теорема 24. *(Непрерывность композиции функций).* Если $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbf{Y} \mapsto \mathbb{R}$, $f(\mathbf{X}) \subset \mathbf{Y}$ и функция f непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{X}$, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $g\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. **Доказательство аналогично доказательству теоремы о пределе композиции функций.** □

Пример 1.4. $f(x) = x\sin\frac{1}{x} \in \mathcal{C}(0)$ и $f(0) = 0$; $g(y) = |\mathrm{sgn}\, y| \notin \mathcal{C}(0)$ и $g\big(f(x)\big) = \left|\mathrm{sgn}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\right| \notin \mathcal{C}(0)$.

Определение. Функция f называется *непрерывной в точке a справа* (*слева*), если правый (левый) предел этой функции в точке a существует и равен частному значению $f(a)$ функции f в точке a.

Определение. Если функция $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ **не является** непрерывной в некоторой точке множества $\mathbf{E}$, то эта точка называется *точкой разрыва функции* f, т.е. $a \in \mathbf{E}$ – точка разрыва функции f, если:

$$\exists V\big(f(a)\big)\ \forall \mathbf{U}(a)\ \exists x \in \mathbf{U}(a) \cap \mathbf{E} : f(x) \notin V\left(f(a)\right) \iff$$

$$\iff \exists \varepsilon_0 > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists x \in \mathbf{E},\ |x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Рассмотрим следующие примеры разрывных функций:

1. $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$; $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, **но** $f(0) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$; $\exists \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$.
3. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0,\\ 0, & x = 0;\end{cases} \qquad \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Данные примеры объясняют следующую терминологию.

Классификация точек разрыва.

Определение. Точка a называется *точкой устранимого разрыва функции* f, если предел этой функции в точке a существует, но в данной точке функция f либо не определена, либо имеет частное значение $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Определение. Точка a называется *точкой разрыва первого рода для функции* f, если существуют, не равные между собой, односторонние пределы:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \neq f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Если все точки области определения функции f лежат по одну сторону от точки a, рассматривается только один из односторонних пределов. В таких случаях мы не будем применять термин «односторонний предел»[a]

[a]Хотя некоторые авторы и употребляют в данном случае этот термин.

Определение. Точка a называется *точкой разрыва второго рода для функции* f, если в этой точке функция f не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов, или если хотя бы один из них бесконечен.

Определение. Будем говорить, что *функция f непрерывна на сегменте* $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента $\big($т.е. в точках $(a,b)\big)$ и, кроме того, непрерывна в точке a справа и непрерывна в точке b слева.

Определение. Функция f называется *кусочно-непрерывной на сегменте* $[a,b]$, если эта функция определена всюду на $[a,b]$, непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода. И, кроме того, $\exists f(a+0)$, $f(b-0)$.

Пример 1.5. Функция Дирихле.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

Для $\forall x \in \mathbb{R}$ подберём две последовательности: рациональных чисел $\{x_n\}$ и иррациональных – $\{y_n\}$, такие что $x_n, y_n > x_0$, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Например, возьмём

$$x_n = \tfrac{[x_0 \cdot n]+1}{n}, \quad y_n = x_n + \tfrac{\sqrt{2}}{n}.$$

Тогда $D(x_n) \equiv 1 \to 1$, $D(y_n) \equiv 0 \to 0$. Поэтому, $\nexists \lim\limits_{x\to x_0+0} D(x)$. Аналогично доказывается, что $\nexists \lim\limits_{x\to x_0-0} D(x)$. Следовательно, D – разрывна в каждой точке. Все разрывы второго рода.

Пример 1.6. Функция Римана или функция Тома.

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\{0\};\end{cases}$$

Докажем, что $\forall x_0\in\mathbb{R}\ \exists\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$. Действительно, выберем $\forall\varepsilon>0$ и подберём такой номер N, что $\frac{1}{N}<\varepsilon$. Количество рациональных чисел со знаменателями, меньшими N, в проколотой 1-окрестности точки x_0 конечно; Обозначим через r расстояние от x_0 до ближайшего из них. Тогда в $\overset{\circ}{U}_{r/2}(x_0)$ нет рациональных чисел со знаменателями, меньшими N. Т.е. при $\forall x\in\overset{\circ}{U}_{r/2}(x_0)$ будет ли x – рационально или иррационально, выполняется неравенство $|R(x)|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$. Т.е. функция R непрерывна во всех иррациональных точках, и разрывна во всех рациональных[1] (терпит там **устранимый разрыв**).

Теорема 25. *(о точках разрыва монотонной функции).* Если функция f определена на сегменте $[a,b]$ и является на нём монотонной, то на интервале (a,b) она может иметь только точки разрыва первого рода.

Лемма. Если функция f монотонна на $[a,b]$, то $\forall c\in(a,b)$ существуют пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$. И, кроме того, $\exists f(a+0)$, $f(b-0)$. Пусть $f\nearrow$ на $[a,b]$.

Доказательство. Выберем $\forall c\in[a,b)$. Рассмотрим множество

$$F^*=\left\{f(x)\,\middle|\,x\in(c,b]\right\}.$$

$F^*\neq\varnothing$, т.к. $f(b)\in F^*$ и ограничено снизу, например, числом $f(c)$[a]. По принципу точных граней $\exists\inf F^*$, который мы обозначим через γ. Докажем, что $\gamma=f(c+0)$.
Фиксируем $\forall\varepsilon>0$. Т.к. $\gamma=\inf F^*$, то $\exists\delta\in(0,b-c)$[b] $: f(c+\delta)<\gamma+\varepsilon$. Т.к. $f\nearrow$, то $\forall x\in(c,c+\delta)$ и подавно будет $f(x)<\gamma+\varepsilon$. Но $f(x)\geqslant\gamma$. Поэтому,

$$\gamma-\varepsilon<\gamma\leqslant f(x)<\gamma+\varepsilon\iff|f(x)-\gamma|<\varepsilon,\quad\forall x\in(c,c+\delta).$$

Откуда, $\lim\limits_{x\to c+0}f(x)=\gamma$. Аналогично доказывается, что $\exists f(c-0)$ для $\forall c\in(a,b]$. □

[a] Т.к. $f\nearrow$.
[b] Ограничение на величину δ накладывается для того, чтобы $c+\delta$ не вылезло за границы отрезка $[a,b]$.

Доказательство. (теоремы о точках разрыва монотонной функции) Пусть далее, $f\nearrow$ и $x_0\in[a,b)$ – произвольная точка. Для $\forall x\in(x_0,b]$ выполнено $f(x)\geqslant f(x_0)$. По лемме $\exists f(x_0+0)$ и $f(x_0+0)\geqslant f(x_0)$. Аналогично, $\forall x_0\in(a,b]$ и $\forall x\in[a,x_0)$ выполнено $f(x)\leqslant f(x_0)$. По лемме $\exists f(x_0-0)$ и $f(x_0-0)\leqslant f(x_0)$.
Если данные пределы совпадают с $f(x_0)$, то $f\in\mathcal{C}(x_0)$. Иначе, разрыв первого рода. □

***Следствие* 1** (критерий непрерывности монотонной функции). Монотонная функция непрерывна тогда и только тогда, когда она принимает все свои промежуточные значения[a].

[a] Т.е. монотонная функция $f:\mathbf{E}=[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ – непрерывна тогда и только тогда, когда множество $f(\mathbf{E})$ её значений само является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

[1] Определённая выше функция R непрерывна также в точке $x=0$.

***Следствие* 2.** Множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счётное.

Доказательство. Пусть $f\nearrow$ и x_0 – точка разрыва функции f. Следовательно, $f(x_0-0) < f(x_0+0)$, и $\exists r(x_0) \in \mathbb{Q} : f(x_0-0) < r(x_0) < f(x_0+0)$. Остаётся заметить, что разным точкам разрыва x_1 и x_2 будут сопоставлены различные рациональные числа $r(x_1)$ и $r(x_2)$. Это вытекает из монотонности функции f, т.к., если $x_1 < x_2$, то

$$f(x_1+0) = \inf_{x'>x_1} f(x') \leq f(x') \leq \sup_{x'<x_2} f(x') = f(x_2-0), \quad \forall x' \in (x_1, x_2),$$

откуда $r(x_1) < r(x_2)$. □

Между тем, можно привести пример монотонной на $[a,b]$, функции со всюду плотным множеством точек разрыва (см., например, `[Н.Ф]`). Т.е. точки разрыва монотонной функции могут быть неизолироваными.

2 Локальные и глобальные свойства непрерывных функций.

Локальными называют такие свойства функции, которые справедливы в сколь угодно малой окрестности фиксированной точки области определения функции. Эти свойства характеризуют поведение функции при стремлении аргумента к исследуемой точке.

Примеры

- непрерывность функции в некоторой точке её области определения;
- финальная ограниченность функции, имеющей предел;
- арифметические операции над непрерывными функциями;
- непрерывность композиции функций.

Глобальные свойства – это свойства, связанные со всей областью определения функции.

Примеры

- монотонность функции на сегменте $[a, b]$;
- непрерывность функции на $[a, b]$.

Вспоминая локальные свойства `свойство финальной ограниченности` функции, имеющей предел, сформулируем следующее утверждение:

Утверждение 2.1. Если функция f непрерывна в точке a, то эта функция ограничена в некоторой окрестности данной точки, $\mathbf{U}(a)$.

Следующая теорема вытекает из леммы о стабилизации знака функции, имеющей предел. Дадим её независимое доказательство.

Теорема 26. *(Об устойчивости знака непрерывной в точке функции).* Пусть $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ – непрерывна в точке a этого множества, и её значение в данной точке $f(a) \neq 0$. Тогда $\exists \mathbf{U}(a) : f(x) \cdot f(a) > 0$ для $\forall x \in \mathbf{U}(a) \cap \mathbf{E}$[a].

[a]Т.е. существует окрестность, в которой функция f сохраняет свой знак.

Доказательство. Т.к. $f \in \mathcal{C}(a)$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbf{U}_\delta(a) \cap \mathbf{E} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Если в качестве ε взять положительное число $\frac{|f(a)|}{2}$, то оба числа $f(a) - \varepsilon$ и $f(a) + \varepsilon$ будут положительны при $f(a) > 0$ и отрицательны при $f(a) < 0$. Откуда и вытекает требуемое. □

Аналогичную теорему можно сформулировать для функции f непрерывной в точке a справа (слева). В этом случае найдётся правая (левая) полуокрестность, удовлетворяющая тем же свойствам.

Теорема 27. *(О прохождении непрерывной функции через нуль при смене знаков).* Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть $f(a) \cdot f(b) < 0$ (т.е. её значения на концах есть числа разных знаков). Тогда $\exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = 0$.

Доказательство. Делим отрезок $[a,b] = I_0$ пополам Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то на концах одного из двух, полученных в результате деления отрезков, функция снова принимает значения разных знаков. Делим данный отрезок, I_1 пополам и т.д.

Метод бисекции.

Тогда мы либо на каком-то шаге попадём в точку $\xi \in (a,b) : f(\xi) = 0$, либо получим стягивающуюся систему сегментов $\{I_n\}$ на концах которых функция f принимает значения разных знаков. В последнем случае, на основании **принципа вложенных сегментов**, $\exists! \xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. По построению $\exists \{a_n\}$, $\{b_n\}$ – две последовательности концов отрезков I_n такие, что $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$. По свойствам предела и определению непрерывности, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) \leqslant 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi) \geqslant 0 \Rightarrow f(\xi) = 0.$$

□

***Следствие* 1** (О промежуточном значении непрерывной функции). Пусть $f \in C[a,b]$, причём $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, а γ – произвольное число, заключённое между α и β. Тогда $\exists c \in [a,b] : f(c) = \gamma$.

теорема Больцано-Коши.

Доказательство. Если $\alpha = \beta = \gamma$, то в качестве c берём a или b. По этой же причине очевиден случай, когда $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$.

Пусть $\alpha \neq \beta$. Не ограничивая общности считаем, что $\alpha < \gamma < \beta$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \gamma$. Как разностью двух непрерывных функций, функция g – непрерывна на $[a,b]$, и принимает на концах этого сегмента значения разных знаков:

$$g(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0; \quad g(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0.$$

По теореме 5 $\exists \xi \in (a,b) : g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \gamma$. □

Безусловно, можно построить пример разрывной функции, проходящей через все свои промежуточные значения.

Пример 2.1. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на $[-1,1]$.

Существенным является факт, что отрезок является связным множеством. Построим пример несвязного множества, на котором утверждение последней теоремы (для непрерывной на этом множестве функции) не имеют смысла.

Пример 2.2. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1]; \\ 1, & x \in [2,3]. \end{cases}$

Теорема 28. *(Первая теорема Вейерштрасса).* Если f – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, то она ограничена на нём.

Доказательство. В силу утверждения о финальной ограниченности непрерывной функции, для $\forall x \in [a,b]$ найдётся окрестность $\mathbf{U}(x)$, что на множестве $[a,b] \cap \mathbf{U}(x)$ функция f – ограничена. Совокупность $\{\mathbf{U}(x)\}$ таких окрестностей, построенных для каждой точки отрезка, образуют покрытие $[a,b]$ интервалами. По лемме Гейне-Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{\mathbf{U}(x_1), \dots, \mathbf{U}(x_n)\}$. По построению,

$$\forall k = \overline{1,n} \;\; \exists m_k, M_k \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbf{U}(x_k) \Rightarrow m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k.$$

Поэтому, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \min\{m_1, \dots, m_n\} \leqslant f(x) \leqslant \max\{M_1, \dots, M_n\}$. □

Для интервала (конечного или бесконечного) данное утверждение уже не имеет места.

Пример 2.3. $f(x) = \frac{1}{x} \in \mathcal{C}(0,1)$;

Пример 2.4. $f(x) = x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Определение. Число M (число m) называется *точной верхней* (*точной нижней*) *гранью функции f на множестве* $\mathbf{E}$, если выполнены два требования:

1. $\forall x \in \mathbf{E} \Rightarrow f(x) \leqslant M \quad \big(f(x) \geqslant m\big)$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x' \in \mathbf{E} : f(x') > M - \varepsilon \quad \big(f(x') < m + \varepsilon\big)$.

Обозначение: $M = \sup\limits_{\mathbf{E}} f(x), \quad m = \inf\limits_{\mathbf{E}} f(x)$;

Утверждение 2.2. Если функция f – ограничена на $\mathbf{E}$ сверху (снизу), то $\exists \sup\limits_{\mathbf{E}} f(x)$ $\big(\exists \inf\limits_{\mathbf{E}} f(x)\big)$.

Пример 2.5. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1); \\ 1/2, & x = 0, x = 1. \end{cases}$

Верхняя грань ($M = 1$) и нижняя грань ($m = 0$) этой функции **не достижимы**, т.е.

$$\nexists x \in [0,1] : f(x) = 1, \; f(x) = 0.$$

***Следствие* 1** (вторая теорема Вейерштрасса)**.** Если функция f – непрерывна на $[a,b]$, то она достигает на нём своих точных верхней и нижней граней. Т.е. $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$.

Доказательство. По первой теореме Вейерштрасса функция f ограничена на $[a,b]$. Следовательно $\exists \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $\inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Обозначим их через M и m соответственно. Предположим, что точная верхняя грань не достижима, т.е. $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) < M$. Рассмотрим функцию $F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Т.к. $M - f(x) > 0$, то $F \in \mathcal{C}[a,b]$. Тогда по первой теореме Вейерштрасса функция F – ограничена на $[a,b]$:

$$\exists A>0\ :\ \frac{1}{M-f(x)}\leqslant A \overbrace{\iff}^{M-f(x)>0} f(x)\leqslant M-\frac{1}{A},\quad \forall x\in[a,b].$$

Это противоречит тому, что $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Аналогично доказывается достижимость $\inf\limits_{[a,b]} f(x)$. □

После того, как доказана достижимость $\sup\limits_{[a,b]} f(x)$ и $\inf\limits_{[a,b]} f(x)$, мы можем называть точную верхнюю грань M максимальным значением, а точную нижнюю грань m – минимальным значением функции f на $[a,b]$.

3 Равномерная непрерывность.

Напомним определение функции, непрерывной на множестве.

$$f \in \mathcal{C}(\mathbf{E}) \iff \forall \widetilde{x} \in \mathbf{E} \;\; f \in \mathcal{C}(\widetilde{x}) \iff$$

$$\iff \forall \widetilde{x} \in \mathbf{E} \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\cdot) \; : \; \forall x \in \mathbf{E}, \; |x - \widetilde{x}| < \delta(\cdot) \Rightarrow |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon.$$

В этом определении число $\delta(\cdot)$ зависит не только от ε, но и от $\widetilde{x}$. Возникает вопрос: можно ли определении непрерывности подобрать число δ, зависящее только от ε, подходящее для всех $\widetilde{x} \in \mathbf{E}$?

Определение. Функция $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $\mathbf{E}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; : \; \forall x, \widetilde{x} \in \mathbf{E}, \; |x - \widetilde{x}| < \delta(\varepsilon) \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon.$$

В данном определении требуется, чтобы неравенство $|f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$ выполнялось для всех пар точек из E, расстояние между которыми меньше δ.
Если мы зафиксируем в определении, например, точку $\widetilde{x}$, то получаем определение непрерывности в этой точке. Т.о., справедливо следующее утверждение:

Утверждение: Если функция f равномерно непрерывна на множестве $\mathbf{E}$, то она непрерывна во всех точках этого множества.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (см. примеры ниже).

Пример 3.1. $f(x) = x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. В определении выбираем $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Пример 3.2. $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Напишем `отрицание равномерной непрерывности` функции f на множестве $\mathbf{E}$:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; : \; \forall \delta > 0 \; \exists x_1, x_2 \in \mathbf{E}, \; |x_1 - x_2| < \delta, \text{ но } |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Для $f(x) = x^2$ выбираем $\forall \delta > 0$, $x_1 = \frac{1}{\delta}$, $x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Тогда $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но

$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = \big|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\big| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon_0.$$

Пример 3.3. $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, 1]$ не является равномерно непрерывной:

$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 \cdot x_2} \longrightarrow +\infty,$$

если при сколь угодно малой, `но фиксированной` разности $|x_2 - x_1|$ приближать меньшее из x_1 или x_2 к нулю.

Более строго:
Пусть $x_1 = \frac{\delta}{1+\delta} < 1$ **(и** $x_1 < \delta$**),** $x_2 = \frac{x_1}{2} = \frac{\delta}{2(1+\delta)} < 1 \Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\delta}{2(1+\delta)} < \delta$**.**

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{2}{x_1}\right| = \frac{1}{x_1} = \frac{1+\delta}{\delta} > 1 = \varepsilon_0.$$

Пример 3.4. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ не является равномерно непрерывной. Пусть $x_n^{(1)} = \frac{1}{\pi n}$, $x_n^{(2)} = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Тогда } f\left(x_n^{(1)}\right) \equiv 0,\ f\left(x_n^{(2)}\right) \equiv 1, \text{ но } |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отметим, что все рассмотренные функции являются непрерывными на изученных множествах.

Теорема 29. теорема Кантора Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём.

теорема Гейне-Кантора.

Доказательство. Пусть[a] $f \in C[a,b]$. Предположим, что функция f не является равномерно непрерывной на $[a,b]$. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n^{(1)}, x_n^{(2)} \in [a,b],\ |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| < \frac{1}{n}, \text{ но } |f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| \geqslant \varepsilon_0. \qquad (*)$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса, выделим из последовательности $\{x_n^{(1)}\}$ подпоследовательность $\{x_{n_k}^{(1)}\}$, сходящуюся к некоторому пределу $c \in \mathbb{R}$. По свойству замкнутости отрезка[b] $c \in [a,b]$.

Тогда и $\{x_{n_k}^{(2)}\} \xrightarrow[k\to\infty]{} c$, т.к.

$$\left|x_{n_k}^{(2)} - c\right| \leqslant \left|x_{n_k}^{(2)} - x_{n_k}^{(1)}\right| + \left|x_{n_k}^{(1)} - c\right| < \frac{1}{n_k} + \left|x_{n_k}^{(1)} - c\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

По непрерывности функции f в точке $c \in [a,b]$ получаем:

$$f\left(x_{n_k}^{(1)}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(c), \quad f\left(x_{n_k}^{(2)}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(c).$$

Следовательно, $f\left(x_{n_k}^{(1)}\right) - f\left(x_{n_k}^{(2)}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, что противоречит неравенству $(*)$. □

[a] Доказательство этой теоремы с помощью леммы Гейне-Бореля см., например, в **[Зорич, I]**.

[b] Т.е. отрезок содержит все свои предельные точки.

Вместо отрезка $[a,b]$ мы могли рассматривать произвольное замкнутое и ограниченное множество. Данные понятия играют в теореме Кантора весьма существенную роль. Для множеств другого типа утверждение теоремы, вообще говоря, неверно (см. примеры выше).

Утверждение: Пусть интервал (a,b) конечен. Функция f – равномерно непрерывна на (a,b) тогда и только тогда, когда $f \in C(a,b)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

4 Обратные функции.

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \supset \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}_f \subset \mathbb{R}$, заданную на множестве $\mathbf{X}$, а $\mathbf{Y}_f$ – множество её значений Пусть при $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$, $x_1 \neq x_2$ выполнено: $f(x_1) \neq f(x_2)$[2]. Тогда функция f задаёт взаимно однозначное соответствие: $\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Y}_f$. Поставим в соответствие каждому $y \in \mathbf{Y}_f$ именно то (**единственное**) значение $x \in \mathbf{X}$, для которого $f(x) = y$, и обозначим полученную функцию символом $f^{-1} : \mathbf{Y}_f \mapsto \mathbf{X}$.

Определение. Взаимно обратные функции. Функция f^{-1} называется *обратной по отношению к* f. В силу её определения: $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$;

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x,\ \forall x \in \mathbf{X}; \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y,\ \forall y \in \mathbf{Y}_f.$$

Графики функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Доказательство. Следует из того, что $(x, f(x)) = (x, y)$, $(y, f^{-1}(y)) = (y, x)$. □

Выясним условия, при которых непрерывная на отрезке функция имеет обратную, и в каких случаях f^{-1} – непрерывна.
Лемма 1: Непрерывное отображение $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ инъективно тогда и только тогда, когда функция f строго монотонна на $[a,b]$.

Доказательство. **Если f – строго монотонна на $[a,b]$, то отображение $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, очевидно, инъективно**[a]**.**

Докажем, что всякое инъективное отображение отрезка осуществляется строго монотонной функцией. От противного. **Пусть $\exists \underbrace{x_1 < x_2 < x_3}_{\in[a,b]}$ такие, что $f(x_2)$ не лежит между $f(x_1)$ и $f(x_3)$.**

Тогда выполняется,

$$\textbf{либо } f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)^{b}, \quad \textbf{либо } f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)^{c}.$$

Неравенства строгие в силу инъективности.

Рассмотрим, для определённости второй случай. В силу непрерывности функции f на $[x_2, x_3]$ и теоремы о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, найдётся $x_1' \in (x_2, x_3)$[d]**, что $f(x_1') = f(x_1)$. Следовательно, функция f не инъективна.** Противоречие.

Другой случай рассматривается аналогично. □

[a] Т.к. в различных точках $[a,b]$ функция f принимает различные значения.
[b] или $f(x_2) < f(x_3) < f(x_1)$, что неважно.
[c] или $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$, что неважно.
[d] Т.к. $x_1 < x_2$, то $x_1 < x_1'$.

Лемма 2. Любая строго монотонная функция $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}_f = f(\mathbf{X})$ обладает обратной функцией $f^{-1} : \mathbf{Y}_f \mapsto \mathbf{X}$, которая имеет на $\mathbf{Y}_f$ тот же характер монотонности, что и f на $\mathbf{X}$.

[2] Функция f – инъективна.

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $f\uparrow$ на $\mathbf{X}$:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{X},\;\; x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2). \qquad (*)$$

Поэтому, f – инъективно, а $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}_f$ – биективно. Тогда по определению, $\exists f^{-1} : \mathbf{Y}_f \mapsto \mathbf{X}$[a]. Сопоставляя определение отображение f^{-1} с соотношением $(*)$ приходим к выражению:

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbf{Y}_f, \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \iff y_1 < y_2,$$

Т.е. f^{-1} строго возрастает на $\mathbf{Y}_f$. □

[a] $x = f^{-1}(y)$, если $y = f(x)$.

Теорема 30. теорема об обратной функции Пусть функция $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ строго возрастает[a] и непрерывна. Тогда обратная функция f^{-1} задана на отрезке $[f(a), f(b)] = \left[\min\limits_{[a,b]} f(x), \max\limits_{[a,b]} f(x)\right]$, строго возрастает и непрерывна.

Доказательство. Существование и монотонность функции f^{-1} доказана в Лемме 2. Утверждение теоремы о том, что множество $f\big([a,b]\big)$ есть отрезок $\big[f(a), f(b)\big]$ следует из критерия непрерывности монотонной функции. Остаётся проверить, что функция $f^{-1} : \big[f(a), f(b)\big] \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна, но это следует из того, что $f^{-1}\uparrow$ и $f^{-1}\Big(\big[f(a), f(b)\big]\Big) = [a,b]$. □

[a] Случай строгого убывания аналогичен.

Отметим, что условия строгой монотонности и непрерывности функции не являются необходимыми для существования её обратной. Рассмотрим следующий пример:

$$y = f(x) = x + D(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbb{Q}, \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Данная функция нигде не монотонна и всюду разрывна. Однако, если $x \in \mathbb{Q}$, то $y = x + 1 \in \mathbb{Q}$, а если $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то $y = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Следовательно,

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y-1, & y \in \mathbb{Q}, \\ y, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = y - D(y).$$

Пример 4.1. $y = f(x) = \sin x$ возрастает и непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Значит **сужение** этой функции на данный отрезок имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, обозначаемую $x = \arcsin y$, определённую на

$$\left[\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right), \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1],$$

возрастающую от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и непрерывную на $[-1,1]$.

Теорема 31. Пусть функция $f : (a,b)$[a] $\mapsto \mathbb{R}$ строго возрастает и непрерывна. Тогда $\exists f^{-1}$, заданная на $(A,B) = \Big(\inf\limits_{(a,b)} f(x), \sup\limits_{(a,b)} f(x)\Big)$, которая также строго возрастает и непрерывна.

Доказательство. Существование и монотонность обратной функции доказано в лемме 2. Докажем её непрерывность на интервале.

Пусть $y_0 \in (A, B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$. Обозначим: $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$[a].

По лемме 1, функция f устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ и отрезка $[y_1, y_2] \subset [A, B]$. В силу возрастания функции f, получаем: $y_1 < y_0 < y_2$. Возьмём $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда $f\big(\mathbf{U}_\delta(y_0)\big) \subset f^{-1}\big((y_1, y_2)\big) = \mathbf{U}_\varepsilon(x_0)$. Т.е. f^{-1} – непрерывна в точке y_0 по определению. $\square$

[a]Т.к. $f\uparrow$, то $y_1 < y_2$.

[a]Интервал (a, b) конечный или бесконечный.

Элементарные функции

ГЛАВА

VI

Определение. Основными (простейшими) элементарными функциями называют следующие:

- Степенная: $x \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$[a];
- Показательная: $x \mapsto a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- Логарифмическая: $x \mapsto \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- Тригонометрические: sin, cos, tg, ctg;
- Обратные тригонометрические: arcsin, arccos, arctg, arcctg.

[a]При $\alpha = 0$ – постоянная.

Функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью **конечного числа** арифметических действий и операций композиции, называются *элементарными функциями*.

1 Показательная функция.

Буквами r и ρ будем обозначать рациональные числа.

Пусть $0 < a \neq 1$. Будем считать известными следующие свойства показательной функции

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

1. Если $r_1 < r_2$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;

   Доказательство. Докажем, что при $a > 1$ и $r = \frac{m}{n} > 0$ справедливо $a^r > 1$. **От противного**. Пусть $a^{m/n} \leqslant 1$, тогда, перемножив n таких неравенств, получим $a^m \leqslant 1$, но это **противоречит** неравенству $a^m > 1$, полученному почленным перемножением m неравенств вида $a > 1$.

   Далее получаем: $a^{r_2} - a^{r_1} = \overbrace{a^{r^1}}^{>0} \overbrace{\left(a^{r_2 - r_1} - 1\right)}^{>0} > 0$. **Второе неравенство следует из первого заменой** $b = \frac{1}{a} > 1$. ☐

2. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;
3. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;
4. $a^0 = 1$;
5. $(a\,b)^r = a^r \cdot b^r$.

***Следствие* 1.** $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$. Следовательно, $a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0$, т.е.

$$a^r > 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Лемма (Бернулли). Пусть $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \leqslant 1$. Тогда

$$\left|a^r - 1\right| \leqslant 2\,|r|\,(a-1).$$

Доказательство. Пусть сначала $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\lambda := a^{1/n} - 1 > 0 \Longrightarrow a^{1/n} = \lambda + 1 \Rightarrow {}^{a} \Rightarrow a \geqslant 1 + n\lambda.$$

Откуда,

$$\lambda \leqslant \tfrac{a-1}{n}, \text{ т.е. } a^{1/n} - 1 \leqslant \tfrac{1}{n}\,(a-1) < 2\,\tfrac{1}{n}\,(a-1). \qquad (*)$$

1. Пусть $0 < r \leqslant 1$. Тогда при некотором $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$. С помощью неравенства $(*)$ и монотонности a^r имеем:

$$a^r - 1 < a^{1/n} - 1 \leqslant \tfrac{1}{n}\,(a-1) \leqslant \tfrac{2}{n+1}(a-1) < 2r(a-1).$$

2. Пусть $-1 \leqslant r < 0$. Тогда

$$\left|a^r - 1\right| = a^r\left|a^{-r} - 1\right| \overbrace{\leqslant}^{1.} a^r \cdot 2\,(-r)(a-1) \overbrace{<}^{a^r<1} < 2|r|(a-1).$$

□

[a]Неравенство Бернулли

Определение. Пусть $a > 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Функция $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ называется *показательной с основанием a*.

Это определение корректно в следующем смысле:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$;
3. в случае $x = r \in \mathbb{Q}$ значение a^r по этому определению совпадает с прежним.

Доказательство.

1. Пусть $\mathbf{a > 1}$, $r_n \to x$. Тогда по критерию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \,:\, \forall n, m \geqslant N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |r_n - r_m| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Кроме того, последовательность $\{r_n\}$ ограничена (как сходящаяся). Поэтому, $\exists M > 0 : a^{r_m} \leqslant M$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Отсюда, выбирая ε из (1) так, чтобы $0 < \varepsilon \leqslant 1$ с помощью леммы Бернулли получаем:

$$\left|a^{r_n} - a^{r_m}\right| = a^{r_m}\left|a^{r_n - r_m} - 1\right| \leqslant a^{r_m}\,2\,|r_n - r_m|\,(a-1) < 2M\varepsilon(a-1) < \varepsilon'.$$

Т.е. последовательность $\{a^{r_n}\}$ – фундаментальна. Следовательно,

$$\exists \lim_{n\to\infty} a^{r_n} > 0^{a}.$$

Пусть **0<a<1**. Тогда $a^{r_n} = \frac{1}{(1/a)^{r_n}}$ и существование предела a^{r_n} вытекает из уже доказанного существования положительного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}$.

Случай $a = 1$ – тривиален.

2. Пусть **a > 1**, $r_n \to x$, $r'_n \to x$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$. С помощью леммы Бернулли получим:

$$\left|a^{r_n} - a^{r'_n}\right| = \overbrace{a^{r'_n}}^{\leqslant M}\left|a^{r_n - r'_n} - 1\right| \leqslant M\cdot 2\cdot\left|r_n - r'_n\right|(a-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} - \lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} \overset{[b]}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{r_n} - a^{r'_n}\right) = 0$.

Случай **0 < a < 1** сводится к рассмотренному с помощью равенства

$$a^{r_n} = \frac{1}{\left(1/a\right)^{r_n}}.$$

3. Достаточно рассмотреть случай числовой последовательности

$$\{r_n\} \equiv r.$$

□

[a]Последнее неравенство выполняется в силу монотоности и строгой положительности функции a^{r_n}.

[b]Т.к. оба этих предела существуют (см. 1.)

Теорема 32. *(свойства показательной функции)*. Показательная функция обладает следующими свойствами:

1. При $a > 1$ функция a^x возрастает, при $0 < a < 1$ – убывает;

Доказательство. Пусть **a > 1**, $x < y$, $r, \rho \in \mathbb{Q} : x < r < \rho < y$. Пусть далее $r_n \to x$, $\rho_n \to y$, причём $r_n \leqslant r$, $\rho_n \geqslant \rho$. Тогда, используя монотонность показательной функции при **рациональных степенях** и предельный переход в неравенствах, получим:

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leqslant a^r < a^\rho \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = a^y \Rightarrow a^x < a^y.$$

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично. □

2. $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

Доказательство. Пусть x – произвольное действительное число. Найдём $r \in \mathbb{Q}$, $r < x$. По свойству показательной функции, на **множестве рациональных чисел**, $a^r > 0$. По свойству 1.:

$$a^x > a^r > 0^{[a]}.$$

□

[a]Верно при $a > 1$. Случай $0 < a < 1$ приводится к данному, переходом к $\frac{1}{a}$.

3. При $a > 1$ получаем: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Доказательство. Т.к. $a>1$, то $a=1+\overbrace{\delta}^{>0}$ и $a^n=(1+\delta)^n>n\delta \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Поэтому, в силу монотонности функции $y=a^x$ получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

Далее, т.к. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$[a]. □

[a]Откуда следует, что $\mathbf{E}[a^x]=(0,+\infty)$.

4. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$; $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$; $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$;

Доказательство.

- Пусть $r_n\to x$, $\rho_n\to y$. Тогда

$$a^x\cdot a^y=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}\cdot \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n}\cdot a^{\rho_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(a^{r_n+\rho_n}\right)=a^{x+y}\,{}^{a}.$$

- Пусть $r_n\to x$. Тогда

$$(ab)^x=\lim_{n\to\infty}(ab)^{r_n}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}\cdot\lim_{n\to\infty} b^{r_n}=a^xb^x.$$

- Пусть $a>1$, $x>0$, $y>0$, $r'_n\uparrow x$, $r''_n\downarrow x$, , $\rho'_n\uparrow y$, $\rho''_n\downarrow y$. Тогда

$$a^{xy}\leftarrow a^{r'_n\rho'_n}=(a^{r'_n})^{\rho'_n}\leqslant(a^x)^{\rho'_n}\leqslant(a^x)^y\leqslant(a^x)^{\rho''_n}\leqslant(a^{r''_n})^{\rho''_n}=a^{r''_n\rho''_n}\to a^{xy}.$$

Следовательно, $(a^x)^y=a^{xy}$. Случаи других знаков x и y рассматриваются аналогично. При $0<a<1$ получаем, $a^x=\frac{1}{(1/a)^x}$.

□

[a]Отсюда получаем, $a^x\cdot a^{-x}=a^0=1\Rightarrow a^{-x}=\frac{1}{a^x}$.

5. Функция a^x – непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Запишем неравенство Бернулли в виде:

$$\left|a^{r_n}-1\right|\leqslant 2\left|r_n\right|(a-1),\text{ где } r_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x,\ |x|\leqslant 1.$$

Переходя к пределу в этом равенстве, получим:

$$\left|a^x-1\right|\leqslant 2|x|(a-1),\quad a>1,\quad |x|\leqslant 1.$$

Итак, пусть $a>1$ и $x_0\in\mathbb{R}$ – произвольная точка. Тогда

$$\left|a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}\right|=a^{x_0}\left|a^{\Delta x}-1\right|\leqslant a^{x_0}\,2\,|\Delta x|\,(a-1)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0.$$

Случай $0<a<1$ сводится к случаю $a>1$ стандартным образом. □

2 Логарифмическая и степенная функция.

Определение. Функция, обратная к показательной функции $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$, называется *логарифмической.*
Обозначение: $\log_a x$. В случае $a=\mathbf{e}$ обозначение: $\ln x$.

Теорема 33. Логарифмическая функция $\log_a x : (0, +\infty) \mapsto (-\infty, +\infty)$ строго монотонна и непрерывна на $(0, +\infty)$. Область её значений есть $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из свойств показательной функции (теорема 1) и теоремы об обратной функции. Из этих теорем также вытекает, что функция $\log_a x$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$, при $0 < a < 1$; и строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, при $a > 1$. □

Из того, что показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества:

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x.$$

Пусть $0 < a \neq 1$. По определению обратной функции $\log_a x$ – это такое число y, что $a^y = x$. Другими словами, чтобы доказать равенство $\log_a x = y$, следует проверить, что $a^y = x$.

Теорема 34. *(свойства логарифмической функции).* Пусть $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$ тогда выполнены тождества:

1. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y > 0;$

Доказательство.

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

□

2. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \quad \forall x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

Доказательство.

$$a^{\alpha \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\alpha = x^\alpha.$$

В частности, $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$. □

3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \forall x > 0;$

Доказательство.

$$b^{\log_a x \cdot \log_b a} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x,$$

т.е. $\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x$. **В частности,** $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. □

Определение. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \mapsto x^\alpha : (0, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$ называется *степенной функцией с показателем степени* α.

Степенную функцию можно представить в виде:

$$x^\alpha = \left(e^{\ln x}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

По теореме о непрерывности композиции непрерывных функций степенная функция непрерывна на области определения $(0, +\infty)$.

При $\alpha > 0$ степенную функцию доопределяют нулём в точке 0[1]. Тогда она становится непрерывной на $[0, +\infty)$.

Функция x^{α} может оказаться определённой при некоторых $\alpha \neq 0$ и для $x < 0$. Например, $x^{\pm n}$, $x^{\pm \frac{1}{2n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

3 Тригонометрические функции.

Мы будем пользоваться школьным определением косинуса и синуса как абсциссы и ординаты точки единичной окружности, а также всеми тригонометрическими формулами, выведенными на его основе.

Полнота этого определения зависит от того, насколько строго определено соответствие между вещественными числами (точками числовой прямой) и точками единичной окружности («углами», «поворотами» и т.п.). Обратив внимание на имеющийся в школьном определении «пробел», мы не будем очень глубоко изучать данный вопрос, и только отметим, что есть несколько принципиальных возможностей его ликвидировать (не опираясь, разумеется на следствия «школьного» определения, чтобы не попасть в порочный круг). Это возможности даются понятиями интегралов и рядов.

Лемма. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Доказательство. Изобразим единичную окружность и угол в x радиан. Из рисунка видно:

$$\triangle OAD \subset \triangledown OAD \subset \triangle OCD \implies S_{\triangle OAD} \leqslant S_{\triangledown OAD} \leqslant S_{\triangle OCD} \qquad (*)$$

$$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}\underbrace{|OD|}_{=1} \cdot \underbrace{|AB|}_{=\sin x} = \frac{1}{2}\sin x;\ S_{\triangledown OAD} = \frac{1}{2}\underbrace{|OA|^2}_{=1} x = \frac{1}{2}x;\ S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}\underbrace{|OD|}_{=1}\underbrace{|CD|}_{=\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Из этих соотношений и неравенства $(*)$ вытекает требуемое. □

***Следствие* 1.** Неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$ выполняется при $\forall x \in \mathbb{R}$, причём равенство имеет место только при $x = 0$.

Доказательство. При $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ строгое неравенство доказано в лемме. Если $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x$. Если же $x < 0$, то $-x > 0$, и по доказанному $|\sin x| = |\sin(-x)| < |-x| = |x|$. □

***Следствие* 2.** Функции синус и косинус непрерывны на $\mathbb{R}$.

Доказательство. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ имеем:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \cdot \sin\frac{x-x_0}{2} \cdot \cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

[1] $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$, $e^{-\infty} = 0$.

Непрерывность cos доказывается аналогично, или с помощью формулы приведения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ и теоремы о непрерывности композиции. □

***Следствие* 3.** Функции

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\} \text{ и } \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

непрерывны на своих областях определения.

Доказательство. По теореме о непрерывности частного. □

4 Обратные тригонометрические функции.

Функция $\sin : \mathbb{R} \mapsto [-1,1]$ не является обратимой, т.к. принимает все свои значения бесконечное число раз. Но сужение синуса на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto [-1,1]$$

строго возрастает, и поэтому обратимо.

Определение. Функция, обратная к сужению синуса на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ называется *арксинусом*

$$\arcsin := \left(\sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}, \quad \arcsin : [-1,1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

По теореме о существовании и непрерывности обратной функции, функция арксинус строго возрастает и непрерывна на $[-1,1]$[2].

Определение. Перечислим оставшиеся обратные тригонометрические функции:

$$\arccos := \left(\cos\Big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}, \quad \arccos : [-1,1] \mapsto [0,\pi];$$

$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg}\Big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}, \quad \operatorname{arctg} : (-\infty,+\infty) \mapsto \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{arcctg} := \left(\operatorname{ctg}\Big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}, \quad \operatorname{arcctg} : (-\infty,+\infty) \mapsto (0,\pi).$$

По теореме о существовании и непрерывности обратной функции, все эти функции непрерывны во всех точках своих областей определения.

arccos и arcctg строго убывают, а arctg, строго возрастает.

Упражнение. Изобразите в одной системе координат тригонометрические функции sin, cos, tg, ctg и обратные к ним.

Упражнение. Проведём независимое доказательство непрерывности функции $x = \operatorname{arctg} y$ на $\mathbb{R}$.

[2] В точках $x = -1$ и $x = 1$ непрерывность понимается как односторонняя.

Доказательство. Пусть $y_0 \in (-\infty, +\infty)$ – произвольная точка, а $x_0 = \operatorname{arctg} y_0$. Выберем $\forall \varepsilon > 0 : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Далее, если $x_0 - \varepsilon = \operatorname{arctg}(y_0 - \delta_1)$ и $x_0 + \varepsilon = \operatorname{arctg}(y_0 + \delta_2)$, то ввиду возрастания функции $x = \operatorname{arctg} y$ можно утверждать, что при $\forall y \in (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_2)$ будем иметь:

$$x_0 - \varepsilon < \operatorname{arctg} y < x_0 + \varepsilon.$$

Итак, выполняется $|\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0| < \varepsilon$, если $-\delta_1 < y - y_0 < \delta_2$, и тем более, если $|y - y_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, что и проверяет непрерывность функции $x = \operatorname{arctg} y$ в точке $y_0 \in \mathbb{R}$. □

Итак, мы определили 11 основных элементарных функций, и доказали их непрерывность. Ввиду того, что арифметические операции и композиция не выводят из класса непрерывных функций, верна следующая

Теорема 35. Все элементарные функции непрерывны на своих областях определения.

5 Замечательные пределы и сравнение функций.

31. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

Доказательство. В силу леммы при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ получаем:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

В силу чётности всех этих функций, заключаем справедливость данного неравенства на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$. Откуда, и из теоремы о двух милиционерах, вытекает требуемое. □

***Следствие* 1.** Выполнены следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

32. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \mathbf{e}$;

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{x_k\} : \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 + 0$[a]. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} (1+x_k)^{1/x_k} = \mathbf{e}$. Без ограничения общности будем считать, что $x_k < 1$. По теореме Архимеда:

$$\exists n_k \in \mathbb{N} : n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k + 1 \iff \frac{1}{n_k+1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k}.$$

Откуда, $\left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$.

$$\begin{matrix} \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{e} \\ \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbf{e} \end{matrix} \Longrightarrow \lim_{\text{î}\to\infty} (1+x_k)^{1/x_k} = \mathbf{e}.$$

В силу произвольности $x_k \to 0+0$, заключаем, что $\lim\limits_{x\to 0+0} (1+x)^{1/x} = \mathbf{e}$.
Пусть теперь $x_k \to 0-0$. Положим $y_k = -x_k$, тогда $y_k \to 0+0$. Будем считать $0 < y_k < 1$. Тогда:

$$(1+x_k)^{1/x_k} = (1-y_k)^{-1/y_k} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{1/y_k} = (1+\frac{y_k}{1-y_k})^{1/y_k} \overset{b}{=} (1+z_k)^{\frac{1}{z_k}+1} \to \mathbf{e}.$$

В силу произвольности $x_k \to 0-0$, заключаем, что $\lim\limits_{x\to 0-0} (1+x)^{1/x} = \mathbf{e}$.

□

[a] Т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ и $x_k > 0$.

[b] Пусть $z_k = \frac{y_k}{1-y_k} > 0 \Rightarrow z_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0+0$. $\frac{1}{z_k} = \frac{1-y_k}{y_k} = \frac{1}{y_k} - 1 \Rightarrow \frac{1}{y_k} = \frac{1}{z_k} + 1$.

***Следствие* 2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left\{y = \frac{1}{x} \to 0\right\} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = \mathbf{e}.$

33. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} \overset{a}{=} \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = \ln\mathbf{e} = 1.$$

□

[a] Непрерывность функции ln в точке $\mathbf{e}$ и теорема о пределе композиции.

Упражнение. Установите предел **33**, не используя непрерывность функции ln.

***Следствие* 3.** Т.к. $\frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x\cdot\ln a}$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, $\quad 0 < a \neq 1;$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad 0 < a \neq 1$[3];

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left\{a^x - 1 = t \xrightarrow[x\to 0]{} 0, x = \log_a(t+1)\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \{\mathbf{33}\} = \ln a.$$

□

Зам. В частности, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$

35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a, \quad a\in\mathbb{R}.$

Доказательство.

$$\frac{(1+x)^a-1}{x} = \frac{e^{a\ln(1+x)}-1}{a\ln(1+x)}\cdot\frac{a\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot a = a.$$

□

Зам. Найденные замечательные пределы можно записать в виде **асимптотических равенств**:

При $x\to 0$:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim x;$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^a - 1 \sim a\,x.$$

Или, т.к. соотношения $f\sim g$, $f = g + \overline{o}(g)$ и $f = g + \overline{o}(f)$ равносильны, получаем:

$$\sin x = x + \overline{o}(x);\;\; \operatorname{tg} x = x + \overline{o}(x);\;\; \arcsin x = x + \overline{o}(x);\;\; \operatorname{arctg} x = x + \overline{o}(x);$$

[3] При $a = 1$ доказываемое тождество тривиально.

$$\ln(1+x) = x + \overline{o}(x); \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \overline{o}(x); \quad e^x = 1 + x + \overline{o}(x);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \overline{o}(x).$$

– –

Дифференциальное исчисление

ГЛАВА VII

1 Понятия дифференцируемости и производной.

В основе дифференциального исчисления и его практических приложений лежит идея приближённого представления функции $y = f(x+\Delta x)$ (от приращения Δx) линейной функцией $y = A\Delta x + B$ или более общо, многочленом от Δx. Для широкого класса функций оказывается возможным разумно определить такие приближения, и на этой основе получить различные важные результаты.

Пусть $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ – произвольная **фиксированная** точка, а Δx – произвольное число (приращение аргумента) такое, что $x_0 + \Delta x \in (a,b)$.

Определение. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0, если существует такое $A \in \mathbb{R}$, что приращение функции f в точке x_0, можно представить в виде:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\,\Delta x + \overline{o}(\Delta x), \text{ при } \Delta x \to 0. \qquad (*)$$

$$(*) \Longleftrightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Иными словами, функция дифференцируема в точке x_0, если изменение её значения в окрестности данной точки линейно с точностью до бесконечно малой поправки.

Число $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции f в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx*. Обозначение: $\Delta_{x_0} f(\Delta x)$.

Определение. *Дифференциалом функции f в точке x_0* называется, входящая в равенство $(*)$ **линейная однородная функция** $A\,\Delta x$ от переменного приращения Δx. Обозначение: $d_{x_0} f(\Delta x)$.

Дифференциал – наилучшая линейная аппроксимация приращения функции в окрестности рассматриваемой точки.

Зам. Дифференциал функции в точке определён однозначно, ибо из $(*)$ следует

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \left(A + \frac{\overline{o}(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A,$$

и однозначность дифференциала[a] следует из единственности предела.

[a] Фактически, однозначность константы A.

Определение. Величина $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называется *производной функции f в точке x_0*[a].

[a]Другими словами, это **скорость изменения функции f в точке x_0**.

Выражение для производной можно переписать в **эквивалентной форме**:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$, что в свою очередь равносильно соотношению

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \overline{o}(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{$**$}$$

Сопоставляя равенства $(*)$ и $(**)$ заключаем, что дифференцируемость функции в точке x_0 равносильна наличию у неё производной в этой точке. Дифференциал при этом записывается в виде:

Критерий дифференцируемости.

$$d_{x_0} f(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x.$$

В силу того, что при $f'(x_0) = A \neq 0$, получаем:

«Константа» A это фактически функция от x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{o}(\Delta x)}{d_{x_0} f(\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{o}(\Delta x)}{f'(x_0)\,\Delta x} = {}^{1} = 0.$$

Следовательно, $\overline{o}(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $d_{x_0} f(\Delta x)$, и слагаемое $f'(x_0)\,\Delta x$ является **главной частью**, а $\overline{o}(\Delta x)$ бесконечно малой по сравнению с ним. На этом основании дифференциал $d_{x_0} f(\Delta x)$ определяют как **главную часть приращения функции f в точке x_0, линейную относительно Δx**.

Пример 1.1. Пусть $f(x) = x$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = 1 \ \text{ и } \ \underbrace{d_x f(\Delta x)}_{=dx(\Delta x)=dx} = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной, x совпадает с его приращением $(dx = \Delta x)$. Следовательно,

$f'(x)$ - обозначение Лагранжа, $\frac{df}{dx}$ - обозначение Лейбница.

$$d_x f(\Delta x) = f'(x)\ dx \ \text{ или } \ f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Теорема 36. *(необходимое условие дифференцируемости).* Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Если f – дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \overline{o}(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$, т.е. $f \in C(x_0)$. □

Разностная форма условия непрерывности.

Пример 1.2. $f(x) = |x| \in C(\mathbb{R})$. Однако,

$$\lim_{\Delta x \to 0 \pm 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = \pm 1 \implies \nexists f'(0)^{a}.$$

[a]Из критерия существования предела.

[1] $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{o}(\Delta x)}{\Delta x} = 0,\ f'(x_0) \neq 0.$

Пример 1.3. $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Однако,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{1}{\Delta x} \implies \nexists f'(0).$$

Данные примеры показывают, что из непрерывности **НЕ** следует дифференцируемость. Более того, есть примеры непрерывных функций не дифференцируемых **ни в одной точке** своей области определения.

Определение. *Правой (левой) производной функции f в точке x_0* называется правый (левый) предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения $\frac{\Delta_{x_0} f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (при условии, что данный предел существует). Обозначение: $f'_+(x_0)$ $\big(f'_-(x_0)\big)$.

Односторонние производные.

Используя свойства односторонних пределов, получаем следующее:

Утверждение 1.1.

1. Если функция f имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то $\exists f'_+(x_0)$ и $\exists f'_-(x_0)$, причём: $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$;
2. Если функция f имеет в точке x_0 односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, равные друг другу, то $\exists f'(x_0)$, и $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Если же $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то $\nexists f'(x_0)$.

2 Геометрический смысл производной.

Пусть

$$f:(a,b)\mapsto\mathbb{R},\quad x_0\in(a,b)\ \text{и}\ y_0=f(x_0).$$

Пусть также $f\in\mathcal{C}(x_0)$ и $M_0=(x_0,y_0)$. Возьмём на графике функции f точку $M_1=(x_1;y_1)$, где $(a,b)\ni x_1\neq x_0$, $y_1=f(x_1)$. Проведём прямую M_0M_1, которую будем называть *секущей*. Уравнение прямой M_0M_1:

$$y=y_0+k_{\textbf{сек}}(x-x_0),$$

где $k_{\textbf{сек}}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\operatorname{tg}\alpha_{\textbf{сек}}$ – угловой коэффициент[a] секущей.

При приближении точки M_1 к M_0 секущая поворачивается вокруг точки M_0. Рассмотрим предельное положение секущей при $M_1\to M_0$[b].

[a] tg угла наклона

[b] Или, что тоже самое, при $x_1\to x_0$.

Определение. Если существует конечный предел $k_{\text{кас}}=\lim\limits_{x_1\to x_0}k_{\text{сек}}$, то прямую, проходящую через точку M_0 и имеющую угловой коэффициент $k_{\text{кас}}$, называют *касательной к графику функции f в точке $M_0=(x_0,y_0)$*.

Если $f\in\mathcal{C}(x_0)$ и предел $k_{\text{кас}}=\pm\infty$, то **вертикальной** касательной к графику функции f в точке M_0 называют прямую $x=x_0$

Задача 1. Докажите, что функция $y=\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{|x|}$ имеет в точке $(0,0)$ вертикальную касательную $x=0$.

По определению и сказанному выше существование не вертикальной касательной к графику функции f в точке M_0 (т.е. существование конечного предела $k_{\textbf{кас}}$) равносильно дифференцируемости f в точке x_0. При этом:

$$k_{\textbf{кас}}=\operatorname{tg}\alpha_{\textbf{кас}}=\lim_{x_1\to x_0}\tfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=f'(x_0).$$

Другими словами, производная есть угловой коэффициент касательной, или тангенс угла наклона касательной.

Поэтому, уравнение не вертикальной касательной к графику функции f в точке $M_0=(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$y=y_0+f'(x_0)(x-x_0).$$

Если $x_0\in(a,b)$, а $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют и различны, то различны и односторонние касательные[a], а график функции f в точке x_0 имеет излом.

В случае, когда одна из односторонних производных равна $-\infty$, а другая равна $+\infty$, тогда обе односторонние касательные вертикальны[b], но излом на графике всё равно есть, поэтому мы считаем, что график не имеет касательной в точке x_0.

[a] Левая и правая касательные представляют собой лучи, имеющие уравнения:

$$y=y_0+f'_\pm(x_0)(x-x_0)$$

приближённо представляющие f в правой и левой окрестности точки x_0.

[b] И фактически совпадают друг с другом

Рассмотрите, например, функцию $y=|x|$.

Рассмотрите, например, функцию $y=\sqrt{|x|}$.

Другая точка зрения на касательные.

Пусть функция f – дифференцируема в точке x_0. Рассмотрим семейство функций

$$\ell_k(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0),$$

где параметр k принимает произвольные вещественные значения. Их графики представляют собой прямые, проходящие через точку $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Т.к. функция f – дифференцируема в точке x_0, то справедливо равенство:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \overline{o}\big(x - x_0\big), \quad x \to x_0.$$

Поэтому получаем:

$$f(x) - \ell_k(x) = \big(f'(x_0) - k\big) \cdot (x - x_0) + \overline{o}\big(x - x_0\big), \quad x \to x_0.$$

Если $k = f'(x_0)$, то разность $f(x) - \ell_k(x)$ стремится к нулю быстрее разности $x - x_0$ при $x \to x_0$[a], а для других $k \in \mathbb{R}$ она имеет тот же порядок малости, что и $(x - x_0)$. Поэтому, прямая

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

даёт наименьшее отклонение от графика функции f вблизи точки x_0. **Данное свойство[b] иногда принимают за определение касательной (не вертикальной) к графику функции. При этом говорят: касательная – прямая, проходящая через точку кривой и совпадающая с ней в этой точке с точностью до первого порядка.**

[a] Т.е. $f(x) - \ell_k(x) = \overline{o}\big(x - x_0\big)$, $x \to x_0$, если $\ell_k(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
[b] $f(x) - \ell(x) = \overline{o}\big(x - x_0\big)$, $x \to x_0$

Геометрическим смыслом дифференциала функции f в точке x_0 является то, что он равен приращению, которое получает касательная при переходе из точки x_0 в точку $x_0 + \Delta x$.

3 Правила дифференцирования.

Производную дифференцируемой функции можно находить, вычисляя предел разностного отношения. Однако для практического применения данный метод неудобен. Установим связь операции дифференцирования с другими операциями, производимыми над функциями: арифметическими и композицией, а также выведем формулу дифференцирования обратной функции.

Теорема 37. *(дифференцирование и арифметические операции).* Пусть функции

$$f, g : \mathbf{E} \to \mathbb{R}$$

дифференцируемы в точке $x \in \mathbf{E}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – некоторые константы. Тогда линейная комбинация, произведение и частное этих функций (при условии $g(x) \neq 0$) также дифференцируемы в данной точке. Причём справедливо:

1. $(\alpha f \pm \beta g)'(x) = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$;
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

Доказательство.

1.
$$(\alpha f \pm \beta g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Big(\alpha f(x+\Delta x) \pm \beta g(x+\Delta x)\Big) - \Big(\alpha f(x) \pm \beta g(x)\Big)}{\Delta x} =$$
$$= \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \pm \beta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x).$$

2.
$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$\pm f(x) \cdot g(x + \Delta x).$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \right) =$$
$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)^{a};$$

3.
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x) - g(x+\Delta x)\cdot f(x)}{\Big(g(x+\Delta x)\cdot g(x)\Big)\Delta x} =$$

$\pm f(x) \cdot g(x).$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)} \left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} g(x) - \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} f(x) \right) =$$
$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

□

[a] Использовано то, что функция g будучи дифференцируемой в точке x является непрерывной в этой точке.

Теорема 38. *(дифференцирование сложной функции).* Пусть

Цепное правило (chain rule).

$$f : (a,b) \mapsto (c,d), \quad g : (c,d) \mapsto \mathbb{R}, \quad x \in (a,b).$$

Если функция f дифференцируема в точке x, а g дифференцируема в точке $f(x)$, то их композиция $g\circ f$ дифференцируема в точке x, и

$$\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = (g\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x).$$

Доказательство. Придадим аргументу функции f данной точке x приращение $\Delta x \neq 0$. Этому приращению аргумента отвечает приращение $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ функции f. Приращению Δf, в свою очередь, соответствует приращение $\Delta g = g(f+\Delta f) - g(f)$. Т.к. функция g – дифференцируема в точке f, то Δg может быть представлен в виде:

$$\Delta g = g'(f)\Delta f + \overline{o}(\Delta f) \overset{:\Delta x}{\overbrace{\iff}} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(f)\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\overline{o}(\Delta f)}{\Delta x}. \qquad (*)$$

Т.к. f – дифференцируема, то $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$. Далее,

$$\frac{\overline{o}(\Delta f)}{\Delta x} = \alpha(\Delta f)\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 0, \text{ при } \Delta x \to 0^{a}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ из $(*)$ получаем:

$$g'_x = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x).$$

$\square$

[a]Т.к. $f\in C(x)$, то $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0 \implies \alpha(\Delta f) \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$.

Зам. Правило дифференцирования композиции легко обобщается на случай нескольких функций. Например:

$$(h\circ g\circ f)' = h'\Big((g\circ f)(x)\Big)\cdot g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x).$$

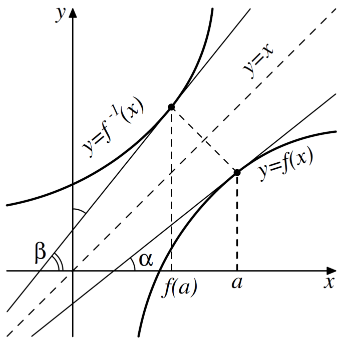


Рис. 34. *(a)*

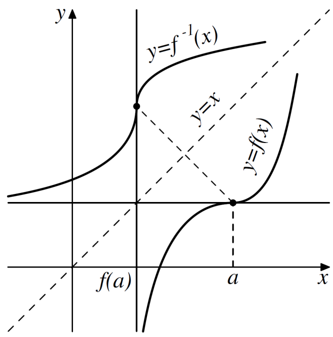


Рис. 35. *(b)*

Теорема 39. *(дифференцирование обратной функции).* Пусть функции $f:\mathbf{X}\mapsto\mathbf{Y}$ и $f^{-1}:\mathbf{Y}\mapsto\mathbf{X}$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x_0\in\mathbf{X}$ и $f(x_0) = y_0\in\mathbf{Y}$ соответственно. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)\neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке y_0, причём

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Геометрический смысл теоремы ясен из рис. *(a)*. Т.к. график f^{-1} получается из графика f симметрией относительно прямой $y = x$, то

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x_0)\big) = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Заметим, что в случае $f'(x_0) = 0$ касательная к графику f^{-1} в точке $f(x_0)$ направлена вертикально, что соответствует бесконечной производной f^{-1} в точке $f(x_0)$ (см. рис. *(b)*).

Доказательство. Т.к. функции

$$f:\mathbf{X}\mapsto\mathbf{Y} \text{ и } f^{-1}:\mathbf{Y}\mapsto\mathbf{X}$$

взаимно обратны, то величины $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ и $f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)$ при $y = f(x)$

одновременно не обращаются в нуль, если $\Delta x \neq 0$. Из непрерывности f в точке x_0 и f^{-1} в точке $y_0 = f(x_0)$ можно заключить, что $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0$.
Далее имеем,

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y} \overset{a}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Следовательно, $\exists\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f^{-1}\right)'\big(f(x_0)\big) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

□

[a] $f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) = f^{-1}\big(f(x_0) + f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) - f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

4 Дифференцирование функции, заданной параметрически.

Определение. Будем говорить, что *переменная* y как функция аргумента x *задана параметрически*, если обе переменные x и y заданы как функции некоторой третьей переменной t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbf{T}.$$

Переменная t называется *параметром*.

Будем считать, что функция φ непрерывна и строго монотонна на $\mathbf{U}(t_0)$[a], и существуют производные $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$. Тогда

$$\exists t = \varphi^{-1}(x) \implies y = \psi(t) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x).$$

Пусть $x_0 = \varphi(t_0)$. Применяя формулы дифференцирования сложной и обратной функции, получаем:

$$y'_x(x_0) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'(x_0) = \psi'(t_0) \cdot \frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

[a] Это позволяет рассматривать y как функцию от x.

Пусть далее $x = x(t)$, $y = y(x) = y\big(x(t)\big)$. Тогда

$$dy = \big(y \circ x\big)'(t)\, dt = y'\big(x(t)\big)\, \underbrace{x'(t)\, dt}_{=dx} = y'(x)\, dx.$$

Данное равенство принято называть *инвариантностью формы первого дифференциала*. При этом имеется ввиду следующее: дифференциал композиции $y = y\big(x(t)\big)$ можно записать в такой форме:

$$dy = y'(x)\, dx,$$

т.е. так, как если бы переменная x была независимой.

5 Производные элементарных функций.

1. $f(x) = c = \text{const}, \ \ x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = 0$**;**

- $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0;$

2. $f(x) = a^x, \ \ a > 0, \ \ x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = a^x \cdot \ln a$**;**

- $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \overbrace{=}^{\textbf{34.}} a^x \cdot \ln a;$

В частности, $\left(e^x\right)' = e^x$**.**

3. $f(x) = \log_a x, \ \ 0 < a \neq 1, \ \ x > 0. \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$**;**

- $f'(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ |\Delta x| < x}} \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ |\Delta x| < x}} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ |\Delta x| < x}} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x / x} \overbrace{=}^{\textbf{33.}} \frac{1}{x \ln a};$

В частности, $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$**.**

4. $f(x) = x^\alpha, \ \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \ x > 0. \quad f'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$**;**

- $f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{\alpha \ln x} = \alpha\, x^{\alpha-1};$

5. $f(x) = \sin x, \ \ x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = \cos x$**;**

- $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x / 2} \overbrace{=}^{\textbf{31.}} \cos x;$

6. $f(x) = \cos x, \ \ x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = -\sin x$**;**

- $\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Longrightarrow f'(x) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x;$

7. $f(x) = \operatorname{tg} x, \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}\right\}. \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$**;**

- $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$

8. $f(x) = \operatorname{ctg} x, \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}. \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$**;**

- $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x};$

9. $f(x) = \arcsin x, \ \ x \in (-1, 1). \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$**;**

- **Пусть** $y = f(x) = \arcsin x$, $x = f^{-1}(y) = \sin y$

$$f'(x) = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \overset{a}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

[a] Взят знак „+ “, т.к. $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. $f(x) = \arccos x$, $x \in (-1, 1)$. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

- **Пусть** $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x = f^{-1}(y) = \operatorname{tg} y$

$$f'(x) = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2};$$

12. $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$;

- $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$;

13. $f(x) = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \operatorname{ch} x$;

- $f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$;

14. $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \operatorname{sh} x$;

- $f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$;

15. $f(x) = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

- $f'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

16. $f(x) = \operatorname{cth} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

- $f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

6 Основные теоремы дифференциального исчисления.

Рассмотрим функцию f, определённую всюду в некоторой окрестности фиксированной точки c.

Определение. Будем говорить, что функция f *возрастает (убывает) в точке* c, если найдётся такая окрестность $\mathbf{U}(c)$ точки c, в пределах которой выполнено:

$$f(x) < f(c) \text{ при } \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_-(c), \quad f(x) > f(c) \text{ при } \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_+(c)^{a}$$

$$\left(f(x) > f(c) \text{ при } \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_{-}(c),\;\; f(x) < f(c) \text{ при } \forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}_{+}(c)\right).$$

[a]Под $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_{-}(c)$ будем понимать множество $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbf{U}(c), x < c\}$, левую полуокрестность точки c. Аналогично, $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_{+}(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbf{U}(c), x > c\}$–правая полуокрестность.

Определение. Будем говорить, что *функция f имеет в точке c локальный максимум* (*локальный минимум*), если найдётся такая окрестность $\mathbf{U}(c)$ точки c, в пределах которой выполнено:

$$\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}(c) \;\Rightarrow\; f(x) < f(c) \quad \left(\forall x \in \overset{\circ}{\mathbf{U}}(c) \;\Rightarrow\; f(x) > f(c)\right)^{a}.$$

[a]Т.е. найдётся окрестность, в пределах которой значение $f(c)$ является набольшим (наименьшим) среди всех значений $f(x)$ этой функции.

Определение. Будем говорить, что *функция f имеет в точке c локальный экстремум*, если эта функция имеет в указанной точке либо локальный максимум, либо локальный минимум.

Теорема 40. *(достаточное условие возрастания/убывания функции в точке).* Если функция f дифференцируема в точке c и $f'(c)>0$ ($f'(c)<0$), то функция f возрастает (убывает) в точке c.

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $f'(c) > 0$. По определению: $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Это равносильно тому, что

$$\text{для } \varepsilon = f'(c)\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \text{при } 0 < |x-c| < \delta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right| < f'(c) \iff 0 < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 2f'(c),\;\; 0 < |x-c| < \delta.$$

Т.о. всюду в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(c)$ имеем:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \implies f(x) > f(c) \text{ при } x > c,\;\; f(x) < f(c) \text{ при } x < c.$$

Следовательно, функция f возрастает в точке c. ☐

Зам. Положительность (отрицательность) производной $f'(c)$ **не является необходимым условием возрастания (убывания)** дифференцируемой в точке c функции f.

Пример 6.1. Функция $y = x^3$ возрастает в точке $c = 0$, в то время как $y' = 3x^2\big|_{x=0} = 0$.

Рассмотрим теоремы, связывающие значения функций на концах отрезка со значениями их производных в некоторых "средних" точках, лежащих внутри.

теоремы о среднем.

Теорема 41. *(необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции).* Пусть f определена в $\mathbf{U}(c)$[a]. Если функция f – дифференцируема в точке c и имеет в

теорема Ферма.

ней локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.

[a]Т.е. c – внутренняя точка для области определения функции f.

Доказательство. По условию теоремы $\exists f'(c)$. Т.к. функция f имеет в точке c локальный экстремум, то она не может ни возрастать, ни убывать в этой точке. Значит, в силу Теоремы 5 производная $f'(c)$ не может быть ни положительна, ни отрицательна. Следовательно, $f'(c) = 0$. □

Зам. Данная теорема имеет простой **геометрический смысл**: если в точке графика функции, в которой достигается локальный экстремум, существует касательная к этому графику, то она обязательно параллельна оси Ox.

Зам. Обращение в нуль производной **не является достаточным условием локального экстремума**, см. например, $y = x^3$ в точке $x = 0$.

Теорема 42. *(теорема Дарбу).* Если функция f дифференцируема на отрезке $[a,b]$[a], то её производная f' принимает в качестве значения, каждое промежуточное число между $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$[b].

[a]Т.е. $\forall x \in (a,b)\ \exists f'(x)$, а также $\exists f'(a+0)$ и $\exists f'(b-0)$.
[b]Далее пишем $f'(a)$ и $f'(b)$ вместо $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$.

Доказательство. Предположим, что $f'(a)\cdot f'(b) < 0$[a]. Например,

$$f'(a) < 0 < f'(b).$$

Докажем существование точки $\xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$. Действительно, т.к. f – дифференцируема на $[a,b]$, то она непрерывна на $[a,b]$. Следовательно, по второй теореме Вейерштрасса, эта функция принимает в некоторой точке ξ своё минимальное значение. Это не может быть точка a, т.к. в ней, по теореме 5 функция f убывает, и не может быть точка b, т.к. в ней функция f возрастает[b]. Поэтому $\xi \in (a,b)$, но тогда по теореме Ферма $f'(\xi) = 0$.

Исключим теперь сделанное выше предположение о знаках производных. Пусть для определённости $f'(a) < f'(b)$. Возьмём произвольное $\gamma \in \big(f'(a), f'(b)\big)$ и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) := f(x) - \gamma x$. Она дифференцируема на $[a,b]$, причём

$$F'(a) = f'(a) - \gamma < 0, \quad F'(b) = f'(b) - \gamma > 0.$$

Из доказанного выше $\exists \xi \in (a,b) : F'(\xi) = f'(\xi) - \gamma = 0$. Откуда, $f'(\xi) = \gamma$. □

[a]Т.е. числа $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки.
[b]Пусть $\Delta x > 0$, т.к. f - дифференцируема на $[a,b]$, то

$$f(a+\Delta x) = f(a) + \underbrace{f'(a)\Delta x}_{<0} + \bar{o}(\Delta x) < f(a),\ f(b-\Delta x) = f(b) + \underbrace{f'(b)(-\Delta x)}_{<0} + \bar{o}(\Delta x) < f(b).$$

Зам. Данная теорема имеет большое сходство с теоремой Больцано-Коши о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение. Однако теорема Дарбу отнюдь не является следствием теоремы

Больцано-Коши, т.к. производная f' непрерывной функции f сама может и не быть непрерывной.

Пример 6.2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ непрерывна на $\mathbb{R}$,
но её производная $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ терпит разрыв (второго рода) в нуле.

Зам. Из теоремы Дарбу следует утверждение об отсутствии у производной точек разрыва первого рода (и точек устранимого разрыва). А именно, если функция f дифференцируема в точке и в её окрестности, то производная этой функции может иметь только точки разрыва второго рода, см. пример выше.

Теорема 43. *(теорема Ролля).* Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Пусть, кроме того, $f(a) = f(b)$. Тогда найдётся точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Т.к. дифференцируемая функция является непрерывной, то вместо непрерывности на $[a, b]$ можно требовать непрерывность в точке a справа, и в точке b слева.

Доказательство. Т.к. f непрерывна на $[a, b]$, то согласно второй теореме Вейерштрасса эта функция достигает на этом сегменте своих минимального и максимального значений. Могут представиться два случая:

1. $M = m$. Тогда $f(x) = M = m = \text{const}$ и $f'(x) \equiv 0$ для всех $x \in [a, b]$[a].
2. $M > m$. Тогда, т.к. $f(a) = f(b)$, то можно утверждать, что хотя бы одно из двух значений M или m достигается функцией в некоторой внутренней точке $\xi \in (a, b)$. Но тогда, т.к. f – дифференцируема в точке ξ и имеет в точке ξ локальный экстремум, то по теореме Ферма, получаем: $f'(\xi) = 0$.

□

[a] Как производная постоянной функции.

Геометрический смысл: если для функции f на отрезке $[a, b]$ выполнены все условия теоремы Ролля, то в некоторой точке $\xi \in (a, b)$ касательная к графику функции f горизонтальна.

Зам. Требование дифференцируемости на всём отрезке $[a, b]$ избыточно, т.к. в этом случае число функций, к которым применима теорема Ролля сокращается. Пример: $y = \sqrt{x(1-x)}$ на $[0, 1]$.

Зам. Все три условия теоремы Ролля существенны. Если хотя бы одно из них не выполняется, то строятся примеры функций, на графиках которых нет точек с горизонтальной касательной.

Задача 1. Постройте примеры к последнему замечанию.

Проведём следующие размышления:

$$f'(a) := \lim_{x\to a}\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \implies \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \approx f'(a), \text{ при } x \approx a.$$

Оказывается у этого соотношения есть глобальный аналог. Даже при фиксированном x разностное отношение $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ есть производная функции f, но не в точке a, а в некоторой "средней" точке, лежащей между a и x.

Теорема 44. *(теорема Лагранжа).* Если функция f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то на интервале (a,b) найдётся точка ξ, такая, что справедлива *формула конечных приращений Лагранжа*:

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \iff \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

которая, очевидно, непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и на его концах принимает равные значения: $F(a) = f(a) = F(b)$. Следовательно, по теореме Ролля:

$$\exists \xi \in (a,b) \ : \ F'(\xi) = f'(\xi) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

□

Геометрический смысл: **если для функции f на отрезке $[a,b]$ выполнены все условия теоремы Лагранжа, то в некоторой точке $\xi \in (a,b)$ касательная к графику f параллельна хорде, соединяющей концы графика.**

Определение. Говорят, что функция f *не убывает* (*не возрастает*) *на интервале* (a,b), если для $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ справедливо неравенство: $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

Следствия из теоремы Лагранжа.

***Следствие* 1** (признак монотонности функции)**.** Если в любой точке интервала (a,b) производная функции неотрицательна (неположительна), то функция не убывает (не возрастает) на этом интервале.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. По формуле Лагранжа имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}, \text{ где } \xi \in (x_1, x_2).$$

Тем самым, знак разности $f(x_2) - f(x_1)$, совпадает со знаком $f'(\xi)$. □

***Следствие* 2** (критерий постоянства функции)**.** Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция постоянна на нём, тогда и только тогда, когда её производная равна нулю в любой точке этого отрезка $\big($или хотя бы интервала $(a,b)\big)$.

Доказательство. Необходимость равенства нулю производной для постоянства функции, уже была доказана при вычислении производной постоянной функции. Докажем достаточность. Пусть $f' \equiv 0$ на (a, b). По теореме Лагранжа $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ получаем:

$$f(x_2) - f(x_1) = \overbrace{f'(\xi)}^{=0}(x_2 - x_1) = 0, \text{ т.к. } \xi \in (a, b).$$

□

В этом утверждении существенно, что область задания – отрезок (связное множество). Для несвязного множества это, вообще говоря, неверно.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 2, & x \in [2, 3] \end{cases} \neq \text{const},$$

но $f' \equiv 0$ на своей области определения.

Следствие 3. Из последнего утверждения делаем важный вывод: если производные F_1', F_2' двух функций F_1 и F_2 совпадают на некотором **связном** промежутке, то на нём разность $F_1 - F_2$ есть постоянная функция.

Следствие 4. Пусть функция f дифференцируема на (a, b) и $\exists M > 0 : |f'(x)| \leqslant M$, $\forall x \in (a, b)$. Тогда функция f равномерно непрерывна на (a, b).

Достаточное условие равномерной непрерывности.

Доказательство. По теореме Лагранжа $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x_1, x_2 \in (a, b)$

$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = \big|f'(\xi)\big| \cdot |x_2 - x_1| < M \cdot \delta = \varepsilon, \text{ при } \delta(\varepsilon) = \tfrac{\varepsilon}{M},$$

что и гарантирует равномерную непрерывность функции f на (a, b). □

Теорема 45. *(теорема Коши о конечном приращении).* Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ – функции непрерывные на отрезке $[\alpha, \beta]$ и дифференцируемые на (α, β). Тогда

$$\exists \tau \in (\alpha, \beta) \ : \ x'(\tau)\big(y(\beta) - y(\alpha)\big) = y'(\tau)\big(x(\beta) - x(\alpha)\big).$$

Если, к тому же, $x'(t) \neq 0$ при $\forall t \in (\alpha, \beta)$, то $x(\alpha) \neq x(\beta)$ и справедливо:

$$\tfrac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \tfrac{y'(\tau)}{x'(\tau)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(t) = x(t)\big(y(\beta) - y(\alpha)\big) - y(t)\big(x(\beta) - x(\alpha)\big).$$

Она непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и дифференцируема на (α, β). Кроме того:

$$F(\alpha) = x(\alpha)y(\beta) - y(\alpha)x(\beta), \quad F(\beta) = -x(\beta)y(\alpha) + y(\beta)x(\alpha).$$

Следовательно, для этой функции на $[\alpha,\beta]$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому, $\exists\tau\in(\alpha,\beta)$, в которой

$$F'(\tau)=0\Longleftrightarrow x'(\tau)\big(y(\beta)-y(\alpha)\big)=y'(\tau)\big(x(\beta)-x(\alpha)\big).$$

Чтобы получить второе соотношение, остаётся заметить, что если $x'(t)\neq 0$ на (α,β), то по теореме Ролля $x(\alpha)\neq x(\beta)$. □

Геометрический смысл: Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \qquad t\in[\alpha,\beta];$$

При условиях перечисленных в теореме 10 эти уравнения задают некоторую функцию $y=y(x)$, т.к. из $\varphi'(t)\neq 0$ вытекает строгая монотонность функции φ. Следовательно, $\exists\varphi^{-1}$, и $y(x)=y\big(\varphi^{-1}(x)\big)$.

Пусть A $=\big(x(\alpha),y(\alpha)\big)$, B $=\big(x(\beta),y(\beta)\big)$, C $=\big(x(\tau),y(\tau)\big)$. Угловой коэффициент хорды AB равен: $\frac{y(\beta)-y(\alpha)}{x(\beta)-x(\alpha)}$. Угловой коэффициент касательной в точке C $=\big(x(\tau),y(\tau)\big)$, на основании теоремы о производной параметрически заданной функции, равен $\frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}$. Получаем параллельность касательной и хорды.

7 Раскрытие неопределённостей. Правила Лопиталя.

Пусть в задаче о нахождении предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to a$ и числитель, и знаменатель стремятся к нулю, или оба стремятся к бесконечности. В этих случаях говорят, что мы имеем дело с неопределённостью $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Нахождение этого предела (если он существует) называют раскрытием неопределённости.

Теорема 46. *(первое правило Лопиталя).* Пусть найдётся такое $\delta>0$, что выполнены следующие условия:

правило Лопиталя для бесконечно малых функций.

1. Функции f и g дифференцируемы на $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$;
2. $g'(x)\neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;
4. $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\overline{\mathbb{R}}$ (конечный или бесконечный);

Тогда $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причём: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$.

Доказательство. Доопределим функции f и g в точке a по непрерывности, положив $f(a)=g(a)=0$. Пусть $a\neq\{x_n\}\to a$. На $[a,x_n]$ (или $[x_n,a]$) для функций f и g выполнены все условия теоремы Коши, поэтому, $\exists\xi_n\in(a,x_n)$ (или (x_n,a)):

$$\frac{f(x_n)-\overbrace{f(a)}^{=0}}{g(x_n)-\underbrace{g(a)}_{=0}}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \qquad (*)$$

При $n\to\infty$ получаем: $x_n\to a$ и $\xi_n\to a$. Переходя к пределу в равенстве $(*)$ получаем требуемое. □

Теорема 46* Пусть выполнены условия:

1. функции f и g дифференцируемы при $x > c > 0$;
2. $g'(x) \neq 0$ на $(c, +\infty)$;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;
4. $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Доказательство. Рассмотрим сложные функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$. Заметим, что:

$$\lim_{t\to0+0} \frac{\frac{d}{dt}\big(f(1/t)\big)}{\frac{d}{dt}\big(g(1/t)\big)} = \lim_{t\to0+0} \frac{f'(1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to0+0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Но тогда в силу теоремы 11 существует и предел $\lim\limits_{t\to0+0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Причём справедливо:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} \overbrace{=}^{\text{T.11}} \lim_{t\to0+0} \frac{\frac{d}{dt}\big(f(1/t)\big)}{\frac{d}{dt}\big(g(1/t)\big)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

□

Формальное применение правила Лопиталя может привести к ошибкам.

Пример 7.1. $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 0, \quad g(x) = \sin x \xrightarrow[x\to0]{} 0.$

$$\exists \lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x+\bar{o}(x)} = 0,$$

но $\lim\limits_{x\to0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$, и данный предел не существует.

Теорема 47. *(второе правило Лопиталя).* Пусть найдётся такое $\delta > 0$, что выполнены условия:

правило Лопиталя для бесконечно больших функций.

1. Функции f и g дифференцируемы на $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$;
2. $g'(x) \neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$;
3. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
4. $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ (конечный или бесконечный);

Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Отметим, что в данной теореме не предполагается, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Хотя на практике правило Лопиталя применяют при наличии неопределённости.

Доказательство. **Разберём случай конечного L. Выберем произвольные x и y из $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ такие, что: $a < x < y < a + \delta$. Применяя теорему Коши о конечном приращении, получаем, что найдётся $\xi = \xi(x; y) \in (x, y)$ такое, что справедливо равенство:**

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Откуда,

$$\frac{1}{g(x)}\frac{f(x)-f(y)}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \iff \frac{f(x)-f(y)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) \iff \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(y)}{g(x)}+\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right).$$

Вычитая из обеих частей последнего равенства L, получаем:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right| \leqslant \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|+\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right|+\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\cdot\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|. \qquad (**)$$

Зафиксируем выбранный ранее y, и устремим x к a. В силу условий: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ для $\forall\varepsilon>0$ можем записать:

1. **фиксируем y такое, что: $|x-a|<|y-a|$ и $\left|\frac{f'\left(\xi(x;y)\right)}{g'\left(\xi(x;y)\right)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{4}$;**
2. **фиксируем δ_1 такое, что: при $|x-a|<\delta_1$ выполнялось $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$;**
3. **фиксируем δ_2 такое, что: при $|x-a|<\delta_2$ выполнялось $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon/4}{|L|+\varepsilon/4}$.**

Таким образом, для $|x-a|<\min\{|y-a|;\delta_1;\delta_2\}$ из $(**)$ получаем:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

□

Зам. **В силу условия $g'(x)\neq 0$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ получаем, что в данной окрестности функция g – монотонная, т.к. иначе производная g' должна была поменять знак, и в силу теоремы Дарбу, пройти через 0[a].**

[a] Ср. с теоремой Штольца.

Пример 7.2. Если $\alpha>0$, то $\ln x=\overline{o}(x^\alpha)$, $x\to+\infty$;

Доказательство. **Пусть $f(x)=\ln x$, $g(x)=x^\alpha$. Имеем:**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty=\lim_{x\to+\infty} f(x);$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}=0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

□

Пример 7.3. Если $\alpha>0$, $b>1$ то $x^\alpha=\overline{o}(b^x)$, $x\to+\infty$;

Доказательство.

1. **$\alpha=1$. Пусть $f(x)=x$, $g(x)=b^x$. Имеем:**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{b^x\ln b}=0;$$

2. **$\alpha>0$. Положим $C=b^{1/\alpha}$, т.к. $C>1$, то $\frac{x^\alpha}{b^x}=\left(\frac{x}{C^x}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.**

□

Примеры 1 и 2 показывают, что степенная функция растёт на $+\infty$ быстрее логарифма, но медленнее показательной функции.

Зам. **Кроме изученных неопределённостей вида: $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ бывают неопределённости видов: $\mathbf{0}\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $\mathbf{1}^{\infty}$, $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, $\infty^{\mathbf{0}}$. Все эти неопределённости сводятся к изученным, путём алгебраических преобразований:**

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)} \Longleftrightarrow \mathbf{0}\cdot\infty = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}/\infty} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}.$$

8 Производные высших порядков.

Если функция $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема в любой точке $x \in \mathbf{E}$[a], то на этом множестве возникает новая функция $f' : \widetilde{\mathbf{E}} \mapsto \mathbb{R}$, значения которой в точке $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ равно значению производной f' в этой точке. Эта функция сама может иметь производную $(f')' : \widehat{\mathbf{E}} \mapsto \mathbb{R}$, которая по отношению к исходной функции f называется *второй производной от* f.

[a]Множество $\mathbf{E}$ при дифференцировании может изменяться.

Обозначение: f'' или $\frac{d^2 f}{dx^2}$[a].

[a]Если хотят явно указать переменные дифференцирования, в первом случае пишут: f''_{xx}.

Определение. По индукции, если определена производная $f^{(n-1)}$ порядка $(n-1)$ от f, то производная порядка n определяется формулой:

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Условимся считать, что $f^{(0)} := f$.

Обозначение: Множество всех функций $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$, имеющих на $\mathbf{E}$ непрерывные производные до порядка n включительно, обозначается $C^n(\mathbf{E})$. В частности, $C^0(\mathbf{E}) = C(\mathbf{E})$.

Из определения ясно, что классы C^n уменьшаются с ростом n:

$$C^{n+1}(\mathbf{E}) \subset C^n(\mathbf{E}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad C^\infty \subset C^m, \ \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Заметим, что эти включения строгие.

Пример 8.1. $f_n(x) = x^{n+1/3} \implies f_n^{(n)} = (n+1/3)\cdot \ldots \cdot 4/3 \cdot x^{1/3}$ – непрерывна на $\mathbb{R}$, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

Заметим также, что класс дифференцируемых на $\mathbf{E}$ функций строго шире класса непрерывно дифференцируемых на $\mathbf{E}$ функций.

Пример 8.2. $f(x) = x^\ell \cdot \sin 1/x$, $\ell \in \mathbb{N}$.

Пример 8.3. основные примеры.

$$f(x) = \sin x, \ f'(x) = \cos x = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right), \ \ f''(x) = -\sin x = \sin\left(\pi + x\right), \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(\tfrac{\pi n}{2} + x\right);$$

Пример 8.4.

$$f(x) = \cos x, \ f'(x) = -\sin x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right), \ldots, f^{(n)}(x) = \cos\left(\tfrac{\pi n}{2} + x\right);$$

Пример 8.5.
$$f(x)=a^x,\ f'(x)=a^x\cdot\ln a,\dots,f^{(n)}(x)=a^x\cdot(\ln a)^n;$$

Пример 8.6.
$$f(x)=x^m,\ f'(x)=mx^{m-1},\dots,f^{(n)}=m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n};$$

Пример 8.7.
$$f(x)=\ln x,\ f'(x)=\tfrac{1}{x},\dots,f^{(n)}(x)=\tfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Задача 1. Докажите приведённые выражения для n-ых производных, используя метод математической индукции.

Теорема 48. *(формула Лейбница).* Пусть u и v – функции, имеющие на множестве $\mathbf{E}$ производные порядка n включительно. Тогда для n-ой производной от их произведения справедлива *формула Лейбница*:
$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}. \qquad (*)$$

Доказательство. **Применим метод математической индукции. При $n=1$ формула $(*)$ совпадает с правилом дифференцирования произведения. Пусть при $n=n$ доказываемая формула верна. Если $u,v\in C^{n+1}(\mathbf{E})$, то дифференцируя формулу $(*)$, получаем:**
$$(u\cdot v)^{n+1}=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k+1)}=$$
$$=u^{(n+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(0)}v^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k u^{(n-k+1)}v^{(k)}.$$
□

Пусть функция $y=y(x)$ задана параметрически:
$$f(x)=\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\qquad t\in\mathbf{T};$$

Предположим также, что функции φ и ψ дважды дифференцируемы на множестве $\mathbf{T}$, $\varphi'(t)\neq 0$. Из последнего условия вытекает, что функция φ монотонна на $\mathbf{T}$. Поэтому $\exists t=\varphi^{-1}(x)$ и $y=\psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$. Ранее нами была получена формула: $y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Используя формулы для производной частного, производной композиции и производной обратной функции получаем:
$$y''_{xx}=\big(y'_x\big)'_x=\left(\frac{\psi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}\right)'_x=\frac{\Big(\psi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big)'\cdot\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)-\psi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\cdot\Big(\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big)'}{\Big(\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big)^2}=$$
$$=\frac{\psi''\big(\varphi^{-1}(x)\big)\cdot\big(\varphi^{-1}\big)'(x)\cdot\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)-\psi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\cdot\varphi''\big(\varphi^{-1}(x)\big)\cdot\big(\varphi^{-1}\big)'(x)}{\Big(\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big)^2}=$$
$$=\left\{\big(\varphi^{-1}\big)'(x)=\frac{1}{\varphi'\big(t\big)},\ \ \varphi^{-1}(x)=t\right\}=$$

$$= \frac{\psi''(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}}{\left(\varphi'(t)\right)^2} = \frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{\varphi'(t)}.$$

Данная формула получается, если подставить в формулу для производной y'_x – выражение $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ вместо $\psi(t) = y$. Далее получаем:

$$y'''_{x^3} = \frac{(y''_{x^2})'_t}{\varphi'(t)}, \quad y^{(4)}_{x^4} = \frac{(y'''_{x^3})'_t}{\varphi'(t)} \text{ и т.д.}$$

9 Формула Тейлора.

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n.$$

? **Выразить коэффициенты этого многочлена в терминах функции P_n и её производных.**

Получаем:

$$c_0 = P_n(0);$$

$$P'_n(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} \Rightarrow c_1 = P'_n(0);$$

$$P''_n(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} \Rightarrow c_2 = \frac{P''_n(0)}{2!};$$

$$\ldots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot c_n \Rightarrow c_n = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}; \quad P_n^{(k)}(x) \equiv 0 \,\textbf{при}\, k > n;$$

Откуда,

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P'_n(0)}{1!}x + \frac{P''_n(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Задача 1. Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени n от x, а $x_0 \in \mathbb{R}$ – произвольная точка. Докажите, что справедливо тождество:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

формула Тейлора для многочлена.

Рассмотрим задачу приближения функции f в окрестности некоторой точки x_0 с помощью многочлена

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n.$$

Пусть функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. **Выпишем полином**

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

производные которого до n-го порядка совпадают в точке x_0 с производными соответствующего порядка функции f в точке x_0:

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P'_n(x_0) = f'(x_0), \ldots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Напишем равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(f,x), \qquad (1)$$

которое называется *формулой Тейлора функции f в точке* x_0.

$P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ – ***многочлен Тейлора*;**

$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ – ***k-ый член формулы Тейлора*;**

$r_n(f,x)$ – ***n-ый остаточный член формулы Тейлора*. Для него имеем:**

$$r_n(f,x) = f(x) - P_n(x) \Rightarrow r_n(f,x_0) = r_n'(f,x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(f,x_0) = 0. \qquad (2)$$

Важным свойством многочлена Тейлора является то, что при $x \to x_0$ каждый следующий его член бесконечно мал по сравнению со всеми предыдущими (отличными от тождественного нуля), что удобно с точки зрения приближённых вычислений. В связи с этим представляют интерес различные оценки для остаточного члена $r_n(f,x)$.

Теорема 49. *(формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).*
Если существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, то для остаточного члена формулы Тейлора (1) справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$r_n(f,x) = \overline{o}\big((x-x_0)^n\big), \ x \to x_0.$$

`локальная формула Тейлора.`

Доказательство. **Из условий (2) по правилу Лопиталя получаем:**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(f,x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n'(f,x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(f,x)}{n!(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(f,x) - r_n^{(n-1)}(f,x_0)}{n!(x-x_0)} \overset{a}{=} \frac{r_n^{(n)}(f,x_0)}{n!} = 0.$$

Поэтому, $r_n(f,x) = \overline{o}\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0.$ □

[a] Определение производной.

Зам. **Поскольку**

$$f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(x_0)}{x-x_0},$$

`то существование` $f^{(k)}(x_0)$ `предполагает, что функция` $f^{(k-1)}$ `определена в некоторой окрестности точки` x_0.

Зам. **При $x_0 = 0$ равенство $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \overline{o}(x^n)$, не совсем правильно, называют *формулой Маклорена*.**

Зам. **Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано утверждает, что многочлен Тейлора «хорошо приближает» функцию f при $x \approx x_0$. Однако эта формула не даёт никакой оценки погрешности остаточного члена, $r_n(f,x)$ такой аппроксимации при конкретном x, что делает эту формулу непригодной для**

приближённых вычислений функций.

Получим формулу для $r_n(f,x)$, из которой можно будет судить о малости остатка.

Теорема 50. *(формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).* Пусть $x > x_0$ $(x < x_0)$, $n \in \mathbb{Z}_+$; $f^{(n)} \in \mathcal{C}\big([x_0,x]\big)$ $\Big(f^{(n)} \in \mathcal{C}\big([x,x_0]\big)\Big)$, $\exists f^{(n+1)}$ на (x_0,x) $\big($на $(x,x_0)\big)$. Тогда справедлива формула Тейлора (1), в которой:

$$r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$, $\quad \xi \in (x_0,x)$.

Доказательство. **Рассмотрим вспомогательную функцию:**

$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - M\cdot(t-x_0)^{n+1}, \text{ где } M = \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}. \tag{3}$$

Из формулы (2) **получим:** $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$.

По теореме Лагранжа:

$$\exists x_1 \in (x_0,x) : 0 = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_1)(x-x_0) \Rightarrow \varphi'(x_1) = 0.$$

Далее, $\exists x_2 \in (x_0,x_1) : \varphi''(x_2) = 0$ **и т.д., дойдём до точки** x_{n+1}**, такой что** $\varphi^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$.

Полагая $\xi = x_{n+1}$**, получим:** $0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - M\cdot(n+1)!$

$$\text{Откуда } M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \{(3)\} = \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x) - P_n(x) = r_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi \in (x_0,x).$$

□

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано представляет собой асимптотическую оценку вида:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \overline{o}\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0, \tag{4}$$

при соответствующих значениях коэффициентов a_k.

Покажем, что если для некоторой функции справедлива оценка (4), то коэффициенты a_k в ней определяются единственным образом.

Доказательство. **Действительно, если наряду с (4) имеем:**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + \overline{o}\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0,$$

то вычитая одно из другого, получим:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)(x-x_0)^k + \overline{o}\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0,$$

Откуда, переходя к пределу при $x \to x_0$, получим: $a_0 - b_0 = 0$, т.е. $a_0 = b_0$. Учитывая это, поделим данное равенство почленно на $(x-x_0)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)(x-x_0)^{k-1} + \overline{o}\big((x-x_0)^{n-1}\big), \quad x \to x_0.$$

Переходя к пределу здесь, заключаем: $a_1 - b_1 = 0$, т.е. $a_1 = b_1$. Аналогично показываем, что $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. □

***Следствие* 1.** Пусть $\exists f^{(n)}(x_0)$ и

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + \overline{o}\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0. \tag{5}$$

Тогда (5) является разложением функции f по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, т.е. $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Доказательство. **По теореме о разложении функции f по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет место равенство (1). В силу теоремы единственности, (5) совпадает с (1).** □

Пример 9.1.

пример Коши.

Пример бесконечно дифференцируемой функции, неразложимой по формуле Тейлора.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пусть $P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \widehat{a}_n \cdot \frac{1}{x^n}$. По индукции можно доказать, что

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \cdot P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0}\frac{P_{3n}(1/x)}{e^{1/x^2}} = \lim_{y\to\infty}\frac{P_{3n}(y)}{e^{y^2}} = 0 \Longrightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Т.е. многочлен Тейлора функции f представляет собой сумму нулей:

$$f(x) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^n + \overline{o}(x^n).$$

Но это разложение тождественного нуля, в нуле, а $f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$. Следовательно, данная функция не разложима по формуле Тейлора в точке $x = 0$.

Разложение по формуле Тейлора при $x = 0$ некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(0) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+;$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \overline{o}(x^n), \quad r_n^{\text{лгр}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x};$$

2.$f(x) = \sin x, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k+1; \end{cases}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \overline{o}(x^{2n}),$$

$$r_n^{\text{лгр}} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x + \frac{\pi n}{2} + \pi\right);$$

3.$f(x) = \cos x, f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ (-1)^k, & n = 2k; \end{cases}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \overline{o}(x^{2n+1}),$$

$$r_n^{\text{лгр}} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\theta x + \frac{\pi n}{2} + \pi\right);$$

4.$f(x) = \ln(1+x), \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!;$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \overline{o}(x^n),$$

$$r_n^{\text{лгр}} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};$$

5.$f(x) = (1+x)^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}; \ f^{(n)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$

$$f(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \overline{o}(x^n),$$

$$r_n^{\text{лгр}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

Пусть в последнем равенстве $\alpha = m \in \mathbb{N}$. В этом случае функция $(1+x)^\alpha$ является полиномом степени α, и поэтому все её производные порядка выше, чем α равны нулю. Таким образом имеем:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots2\cdot1}{n!}x^\alpha \quad (\texttt{Бином Ньютона}).$$

Т.е. Бином Ньютона является частным случаем последнего разложения по формуле Тейлора.

Первообразная функция и неопределённый интеграл

ГЛАВА VIII

1 Основные понятия и свойства

Рассмотрим задачу, обратную к задаче дифференцирования, в которой производная известна, а функцию, которую дифференцировали, требуется найти.

Символом $\langle a, b\rangle$ будем обозначать промежуток, который ограничивают точки a и b, т.е. либо $[a, b]$, либо $[a, b)$, либо $(a, b]$, либо интервал (a, b), конечный или бесконечный.

Определение. Пусть $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$. Функция $F : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ называется *первообразной функцией для f на $\langle a, b\rangle$*, если F – дифференцируема на этом промежутке и $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$. При этом, в случае $a \in \langle a, b\rangle$ или $b \in \langle a, b\rangle$, производные $F'(a)$ и $F'(b)$ понимаются как односторонние.

? Если задана функция $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, то возникают три вопроса:

1. Существует ли первообразная функции f на $\langle a, b\rangle$?
2. Если первообразная существует, то как описать все её первообразные?
3. Как найти первообразную?

Ответ на первый вопрос очень сложен. Ограничимся двумя высказываниями:

а. Не любая функция имеет первообразную. Например, исходя из теоремы Дарбу, их нет у функций, имеющих разрыв первого рода. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

не является производной никакой функции, а следовательно не имеет первообразную; необходимое условие.

б. Верна теорема: всякая непрерывная на промежутке функция имеет на нём первообразную (будет доказано при изучении определённого интеграла). Однако непрерывность не является необходимым условием для существования первообразной, ибо производные могут иметь разрывы второго рода. достаточное условие.

Перейдём теперь ко второму вопросу.

Пусть F – первообразная для функции f на $\langle a,b\rangle$. Тогда функция $F(x)+C$, где C – const, также является первообразной для f на $\langle a,b\rangle$, т.к. $\big(F(x)+C\big)' = F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \langle a,b\rangle$. Верно и обратное утверждение: если F и Φ – две первообразные функции f на $\langle a,b\rangle$, то $\Phi(x) = F(x)+C$, где C – const. В самом деле,

$$\big(F(x)-\Phi(x)\big)' = F'(x)-\Phi'(x) = f-f = 0 \Rightarrow {}^{a} \Rightarrow F(x)-\Phi(x) = \text{const}.$$

[a] По следствию из теоремы Лагранжа.

Определение. Операция перехода от данной функции к её первообразной называется (неопределённым) интегрированием. При этом, функции f ставится в соответствие некоторая произвольно выбранная первообразная F. Множество функций $\{F(x)+C \mid C \in \mathbb{R}\}$ называется *неопределённым интегралом f на $\langle a,b\rangle$*. Обозначение: $\int f(x)\,dx$.

Рассмотренные свойства первообразных дают возможность описать общий вид неопределённого интеграла для f на $\langle a,b\rangle$:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

где F – некоторая конкретная первообразная, $C = \text{const}$.

Точнее,

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)+C \mid C \in \mathbb{R}\},$$

но скобки по традиции опускают.

Введём обозначение: $\displaystyle\int d\,g(x) := \int g'(x)\,dx$.

Основные свойства неопределённого интеграла:

1. $\displaystyle\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;

2. $\displaystyle\int d\,F(x) = \int F'(x)\,dx = F(x)+C^{a}$;

3. Пусть $\exists \displaystyle\int f_1(x)\,dx$ **и** $\exists \displaystyle\int f_2(x)\,dx$. **Тогда**

$$\exists \int \big(\alpha f_1(x) \pm \beta f_2(x)\big)\,dx \;=\; \alpha \int f_1(x)\,dx \pm \beta \int f_2(x)\,dx^{b}.$$

[a] Следует из определений.

[b] Равенство левой и правой части следует понимать как равенство с точностью до константы.

Доказательство. Проверим, что функция, стоящая справа, является первообразной для функции $\big(\alpha f_1(x) \pm \beta f_2(x)\big)$.

Пусть $F(x) = \alpha \displaystyle\int f_1(x)\,dx \pm \beta \int f_2(x)\,dx$.

$$F'(x) = \alpha\left(\int f_1(x)\,dx\right)' \pm \beta\left(\int f_2(x)\,dx\right)' \overset{1.}{=} \alpha f_1(x) \pm \beta f_2(x).$$

Остаётся сослаться на свойство 2. □

Свойства 1. и 2. показывают, что операции дифференцирования и (неопределённого) интегрирования обратны друг другу. Каждую формулу для производной вида $F'(x) = f(x)$ можно истолковать как утверждение, что на соответствующем промежутке функция F является первообразной для f **и, значит, в силу свойства 2.**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Поэтому, переписывая таблицу производных основных элементарных функций, получим таблицу неопределённых интегралов. Каждая из формул этой таблицы рассматривается на тех промежутках, на которых определена соответствующая подынтегральная функция.

Например, формулу

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C^{a}$$

следует рассмотреть отдельно на каждом из промежутков: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Поэтому правильно писать:

$$\int \tfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \begin{cases} C_1, & x < 0, \\ C_2, & x > 0; \end{cases} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

В записи

$$\int \tfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

под C понимается не константа, а кусочно-постоянная функция.

[a] $\big(\ln|x|\big)' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}, \;\; x \neq 0.$

Перейдём к третьему вопросу

Теорема 51. *(интегрирование по частям).*
Пусть на некотором промежутке функции u и v дифференцируемы и существует один из интегралов $\int u'(x)\,v(x)\,dx$ или $\int u(x)\,v'(x)\,dx$. Тогда на этом промежутке существует и другой. Причём:

$$\int u(x)\;v'(x)\;dx = u(x)\;v(x) - \int u'(x)\;v(x)\;dx.$$

методы интегрирования.

Доказательство.

$$\left(u\,v - \int u'\,v\;dx\right)' = u'\,v + u\,v' - u'\,v = u\,v'$$

Откуда, по свойству 2., получаем: $\int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx + C$.

□

Теорема 52. *(замена переменной в неопределённом интеграле).* Если на некотором промежутке $\mathbf{I}_x$ выполнено: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, а $\varphi : \mathbf{I}_t \mapsto \mathbf{I}_x$ – дифференцируемая функция. Тогда на $\mathbf{I}_t$ выполнено равенство:

$$\int \big(f \circ \varphi\big)(t)\,\varphi'(t)\;dt = \big(F \circ \varphi\big)(t) + C^{a}.$$

[a] Или $\int f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\;dt = F\big(\varphi(t)\big) + C$.

Доказательство. По теореме о производной сложной функции:

$$\big((F\circ\varphi)(t)+C\big)' = (F'\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t) = (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)^{a}.$$

Откуда, по свойству 2. первообразной вытекает требуемое равенство. □

[a] Т.е. $\big(F(\varphi(t))+C\big)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

Если трактовать dx как дифференциал, утверждение последней теоремы можно переписать следующим образом. Положим $x=\varphi(t)$. Тогда $dx=\varphi'(t)\,dt$. Формальный переход от t к x в интеграле $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\;dt$ даёт $\int f(x)\;dx$. Вычисляя этот интеграл по переменной x, получим $F(x)+C$, т.е. $F(\varphi(t))+C$. Эти рассуждения объясняют смысл термина «замена переменной» **и позволяют упростить практическое применение формулы, хотя они основаны лишь на интуитивном понимании dx как дифференциала.**

***Следствие* 1.** Если в условиях теоремы 2 функция φ имеет обратную, то, полагая в интеграле $\int f(x)\,dx$: $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$, получаем:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Вычисляя этот интеграл по переменной t, получим $G(t)+C$, т.е. $G(\varphi^{-1}(x))+C$.

Пример 1.1.

$$\int \ln x\;dx = x\cdot\ln x - \int \tfrac{x}{x}\;dx = x\cdot\ln x - x + C.$$

Пример 1.2.

$$\int \tfrac{t\;dt}{t^2+a^2}\;dt = \tfrac12\int \tfrac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}\;dt = \tfrac12\int \tfrac{dx}{x}\Big|_{x=t^2+a^2} = \tfrac12\ln|x|\Big|_{x=t^2+a^2} + C = \tfrac12\ln(t^2+a^2)+C.$$

2 Разложение многочлена на множители

Определение. *Комплексными числами* называются выражения вида:

$$z = x+iy,$$

где

$$x=\mathrm{Re}z,\; y=\mathrm{Im}z\in\mathbb{R},\;\; i^2=-1.$$

$z_1 = z_2 \iff \mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2$ и $\mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2$ На множестве комплексных чисел ($\mathbb{C}$) нет отношения порядка.

Определение. *Модулем комплексного числа* $z=x+i\,y$ называется неотрицательное число $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Для каждого $z=x+i\,y\in\mathbb{C}$ определено *сопряжённое ему комплексное число*: $\overline{z}=x-i\,y$.

Выполнены равенства[a]: $\overline{\overline{z}}=z$; $\quad\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$; $\quad\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$; $\quad z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

Свойства сопряжения.

[a] Устанавливаются проверкой.

Пусть $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$. Тогда:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i\,(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1\,x_2+y_1\,y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{-x_1\,y_2+x_2\,y_1}{x_2^2+y_2^2}.$$

Арифметические операции.

Фактически комплексными числами называются упорядоченные пары вещественных чисел (x, y), на множестве которых введены правила сравнения, сложения и умножения, а числа вида $(x, 0)$ отождествляются с действительными числами.

Определение. *Комплексным многочленом степени* $n \in \mathbb{Z}_+$ называется функция

$$P_n(z) = A_0 + A_1\,z + \ldots + A_n\,z^n, \quad z \in \mathbb{C},\ A_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{0,n},\ A_n \neq 0$$

Корнем многочлена $P_n(z)$ называется комплексное число z_0 такое, что $P_n(z_0) = 0$.

Многочлен $P_n(z)$ можно *разделить на одночлен* $(z - z_0)$, т.е. представить $P_n(z)$ в виде:

$$P_n(x) = (z - z_0)\,Q_{n-1}(z) + r,$$

где *частное* Q_{n-1} – многочлен степени $n-1$, а $r \in \mathbb{Z}$ – *остаток*.

Теорема 53. *(Теорема Безу).* Число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится на $(z - z_0)$ без остатка.

Определение. Если многочлен $P_n(z)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ представи́м в виде: $P_n(z) = (z - z_0)^k\,Q_{n-k}(z)$, и не представи́м в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^{k+1}\,Q_{n-k-1}(z)^a,$$

то z_0 называют *корнем многочлена* $P_n(z)$ *кратности* k. При $k = 1$ число z_0 называют *простым корнем.*

[a] Т.е. $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$

Теорема 54. *(основная теорема алгебры).* Всякий отличный от константы многочлен имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел.

Отсюда сразу следует разложение на множители многочлена $P_n(z)$:

$$P_n(z) = A_n\,(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_\ell)^{k_\ell}, \quad \sum_{i=1}^{\ell} k_i = n,$$

где $z_1, \ldots, z_\ell$ – корни многочлена $P_n(z)$, кратности которых соответственно равны: $k_1, \ldots, k_\ell$.

Лемма. Пусть $P_n(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами, и $z_0 = a + i\,b$, $b \neq 0$, его корень кратности k. Тогда $\overline{z}_0 = a - i\,b$ также является корнем кратности k.

Доказательство. **Имеем,**

$$P_n(z) = (z - z_0)^k\, Q_{n-k}(z) \Leftrightarrow {}^{a} \Leftrightarrow \overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k\, Q_{n-k}(z)} \Leftrightarrow {}^{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_n(\overline{z}) = (\overline{z} - \overline{z}_0)^k\, \overline{Q}_{n-k}(\overline{z}),$$

где коэффициенты многочлена $\overline{Q}_{n-k}$ являются сопряжёнными к коэффициентами многочлена Q_{n-k}. Заменив в последнем равенстве $\overline{z}$ на z, получаем, что $P_n(z) = (z - \overline{z}_0)^k\, \overline{Q}_{n-k}(z)$. Отсюда следует, что $\overline{z}_0$ – корень P_n, кратности не меньше k (кратности z_0)[c].

Аналогично показывается, что если $\overline{z}_0$ – корень многочлена P_n кратности k, то $\overline{\overline{z}}_0 = z_0$ является корнем P_n кратности не меньше k. Следовательно, кратности z_0 и $\overline{z}_0$ совпадают. □

[a] Многочлен $Q_{n-k}(z)$ может иметь уже недействительные коэффициенты.
[b] Свойства сопряжения.
[c] Возможно, многочлен $\overline{Q}_{n-k}$ имеет корень $\overline{z}_0$.

При $z_0 = a + i\,b$ имеем:

$$(z - z_0)\,(z - \overline{z}_0) = (z - a - i\,b)\,(z - a + i\,b) = (z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2 = z^2 + pz + q,$$

где $D = \frac{p^2}{4} - q = a^2 - (a^2 + b^2) = -b^2 < 0$.

Учитывая лемму 1 и последнее замечание, приходим к выводу, что для многочлена P_n с действительными коэффициентами справедливо следующее разложение на множители:

$$P_n(z) = A_n\,(z - a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_\ell)^{\alpha_\ell} \cdot (z^2 + p_1 z + q_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (z^2 + p_s z + q_s)^{\beta_s},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \alpha_i + 2\sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j = n$, $A_n \in \mathbb{R}$, a_i – действительные корни многочлена P_n, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ – их кратности; $z^2 + p_j z + q_j = (z - z_j)\,(z - \overline{z}_j)$, $\mathrm{Im} z_j \neq 0$ – комплексные корни P_n, $\beta_j \in \mathbb{N}$ – их кратности.

3 Разложение правильных рациональных дробей на простейшие

Все многочлены далее имеют лишь вещественные коэффициенты.

Определение. Рациональная дробь $\frac{P}{Q}$ (P, Q – многочлены) называется *правильной*, если $\deg P < \deg Q$[a].

[a] Степень многочлена P меньше степени Q.

Неправильную дробь можно представить (делением) в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (возможно нулевой, если деление прошло без остатка).

Пусть далее $\frac{P}{Q}$ – правильная рациональная дробь.

Лемма. Предположим, что a – действительный корень, кратности $\alpha \geqslant 1$ многочлена Q, т.е. $Q = (z-a)^{\alpha} \cdot \widetilde{Q}(z)$, и $\widetilde{Q}(a) \neq 0$.
Тогда справедливо разложение: $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{(z-a)^{\alpha}} + \frac{\widetilde{P}(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\widetilde{Q}(z)}$, где $A \in \mathbb{R}$, а дробь $\frac{\widetilde{P}(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\widetilde{Q}(z)}$ – правильная.

Доказательство. **При $\forall A \in \mathbb{R}$ имеем:**

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{A}{(z-a)^{\alpha}} = \frac{P(z) - A\widetilde{Q}(z)}{(z-a)^{\alpha} \cdot \widetilde{Q}(z)}. \tag{1}$$

Выберем A из условия, чтобы a было корнем числителя правой части, т.е. $A = \frac{P(a)}{\widetilde{Q}(a)}$. Тогда по теореме Безу: $P(z) - A\widetilde{Q}(z) = (z-a)\widetilde{P}(z)$. Подставляя данное равенство в формулу (1), и сокращая последнюю дробь на $(z-a)$, получаем требуемое. □

Лемма. Предположим, что $z_0 = a + \imath b$, $b \neq 0$ – корень, кратности $\beta \geqslant 1$ многочлена Q, т.е. при $z^2 + pz + q = (z - z_0)(z - \overline{z}_0)$ выполнено:

$$Q(z) = (z^2 + pz + q)^{\beta}\,\widetilde{Q}(z), \quad \widetilde{Q}(a + \imath b) \neq 0.$$

Тогда справедливо разложение: $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Mz+N}{(z^2+pz+q)^{\beta}} + \frac{\widetilde{P}(z)}{(z^2+pz+q)^{\beta-1}\widetilde{Q}(z)}$, где $M, N \in \mathbb{R}$, а рациональная дробь $\frac{\widetilde{P}(z)}{(z^2+pz+q)^{\beta-1}\widetilde{Q}(z)}$ – правильная.

Доказательство. **При $\forall M, N \in \mathbb{R}$ имеем:**

$$\frac{P(z)}{Q(z)} - \frac{Mz+N}{(z^2+pz+q)^{\beta}} = \frac{P(z) - (Mz+N)\,\widetilde{Q}(z)}{(z^2+pz+q)^{\beta}\,\widetilde{Q}(z)}. \tag{2}$$

Выберем M и N так, чтобы числитель правой части равенства (2) делился на $(z^2 + pz + q)$, т.е., чтобы $a + \imath b$ являлось его корнем. Имеем,

$$P(a + \imath b) - \big(M(a + \imath b) + N\big)\,\widetilde{Q}(a + \imath b) = 0 \Longleftrightarrow M(a + \imath b) + N = \frac{P(a+\imath b)}{\widetilde{Q}(a+\imath b)}.$$

Откуда, сопоставляя действительную и мнимую части, получаем:

$$M = \frac{1}{b} \cdot \mathrm{Im}\left[\frac{P(a+\imath b)}{\widetilde{Q}(a+\imath b)}\right], \quad N = \mathrm{Re}\left[\frac{P(a+\imath b)}{\widetilde{Q}(a+\imath b)}\right] - Ma;$$

□

Лемма. Пусть P и Q – многочлены с действительными коэффициентами; $\frac{P}{Q}$ – правильная рациональная дробь.

$$Q(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_\ell)^{\alpha_\ell} \cdot (z^2 + p_1 z + q_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (z^2 + p_s z + q_s)^{\beta_s}$$

Тогда

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}\frac{A_{ik}}{(z-a_i)^{\alpha_i-k}} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{m=0}^{\beta_j-1}\frac{M_{jm}z+N_{jm}}{(z^2+p_jz+q_j)^{\beta_j-m}}, \tag{3}$$

$A_{ik}, M_{jm}, N_{jm} \in \mathbb{R}$.

Доказательство. **Доказательство состоит в последовательном многократном применении лемм 2, 3. Именно, применяем сначала лемму 2 по отношению к корню a_1, α_1 раз, затем лемму 2 по отношению к корню a_2, α_2 раз и т.д.** □

Определение. Рациональные дроби вида: $\frac{A}{(z-a)^n}$, $A \neq 0$ и $\frac{Mz+N}{(z^2+pz+q)^n}$, $M^2+N^2 \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$, $a, p, q, A, M, N \in \mathbb{R}$; $\frac{p^2}{4} - q < 0$, называются *простейшими рациональными дробями.*

При нахождении коэффициентов A_{ik}, M_{jm}, N_{jm} в разложении (3) правильной рациональной дроби на простейшие, в случае конкретной дроби $\frac{P}{Q}$ обычно применяют метод неопределённых коэффициентов. Он состоит в том, что записывают разложение (3) с неопределёнными коэффициентами A_{ik}, M_{jm}, N_{jm}, приводят все дроби к общему знаменателю, и отбрасывают его. Из полученного равенства многочленов находят все нужные коэффициенты, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях.

4 Интегрирование рациональных дробей

Как мы видели выше, вопрос интегрирования рациональных дробей сводится к вопросу интегрирования простейших дробей.

1. **Интеграл $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx$ с помощью подстановки $t = x-a$ сводится к табличному.**

2.

$$I=\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2} \overset{a}{=}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{N-(Mp)/2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

$q - \frac{p^2}{4} > 0$.

[a] $\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t/a)^2+1} = \frac{1}{a}\int\frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$.

3.

$$I_\lambda=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}\,dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^\lambda}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right)^\lambda} =$$

$$= -\frac{M}{2}\frac{1}{\lambda-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right)^\lambda}$$

Остаётся вычислить интеграл $J_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}$**. Для него имеем:**

$$J_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} J_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2} \int t\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda} \overset{a}{=}$$

$$= \frac{1}{a^2} J_{\lambda-1} + \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2(\lambda-1)} J_{\lambda-1}.$$

Откуда,

$$J_\lambda = \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}} + \frac{2\lambda-3}{2a^2(\lambda-1)} J_{\lambda-1};$$

Кроме того, $J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$

Далее требуется сделать обратную подстановку: $t = x + \frac{p}{2}$**,** $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$**.**

---

[a] $\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda} = d\left(\frac{(t^2+a^2)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right)$

Итак, интегралы от всех простейших дробей представляют собой элементарные функции. Тем самым мы приходим к следующей теореме, исчерпывающей проблему интегрирования рациональных дробей.

Теорема 55. Всякая рациональная дробь интегрируема в элементарных функциях.

5 Интегрирование некоторых классов функций

Для доказательства интегрируемости в элементарных функциях некоторых выражений мы будем посредством специально подобранной замены сводить интеграл от рассматриваемых выражений к интегралу от рациональной дроби (интегрируемость которых доказана). При этом, мы будем говорить, что рассматриваемый интеграл рационализируется указанной специальной подстановкой.

1. `Интегрирование некоторых тригонометрических выражений;`

Рассмотрим рациональную функцию вида:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{P_n(\sin x, \cos x)}{Q_m(\sin x, \cos x)}.$$

Интеграл от этой функции рационализируется следующей подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ **(*универсальная тригонометрическая замена*):**

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x) = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле представляет собой рациональную функцию от одной переменной.

2. `Интегрирование дробно-линейных иррациональностей;`

Рассмотрим функцию вида:

$$R\left(x,\ \sqrt[n]{\tfrac{ax+b}{cx+d}}\right),\ \textbf{где}\ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ \ ad-bc\neq 0.$$

Интеграл от такой функции рационализируется подстановкой $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$**:**

$$t^n = \tfrac{ax+b}{cx+d};\qquad x = \tfrac{dt^n-b}{a-ct^n},\qquad dx = \tfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Поэтому:

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\tfrac{ax+b}{cx+d}}\right) = \int R\left(\tfrac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\ \tfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

3. Интегрирование квадратичных иррациональностей;

Рассмотрим функцию вида:

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right),\ \textbf{где}\ a,b,c\in\mathbb{R},\ \textbf{и}\ ax^2+bx+c>0\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Сделаем следующую подстановку:

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}\qquad \textit{(первая подстановка Эйлера)}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a} \Longleftrightarrow bx+c = t^2-2\sqrt{a}\,tx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \tfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\qquad dx = 2\tfrac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt,\qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \tfrac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left(\tfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \tfrac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)\ 2\tfrac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt$$

Пусть теперь выполнено

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),\ \ x_1\neq x_2.$$

Сделаем подстановку

$$t = \tfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1} = \sqrt{a}\,\tfrac{\sqrt{x-x_2}}{\sqrt{x-x_1}}\quad \textit{(вторая подстановка Эйлера)}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\,(x-x_1) \Leftrightarrow \underbrace{ax^2+bx+c}_{=a(x-x_1)(x-x_2)} = t^2(x-x_1)^2 \underbrace{\Longleftrightarrow}_{:(x-x_1)}$$

$$\Longleftrightarrow a(x-x_2) = t^2\,(x-x_1) \Rightarrow x = \tfrac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \tfrac{a\,(x_1-x_2)}{t^2-a}\,t,$$

$$dx = \tfrac{2a\,(x_1-x_2)\,t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

$$\Longrightarrow \int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left(\tfrac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a}, \tfrac{a\,(x_1-x_2)}{t^2-a}\,t\right)\ \tfrac{2a\,(x_1-x_2)\,t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

6 Различные примеры из теории неопределённого интегрирования

Пример 6.1. *(пример функции с разрывом первого рода, не имеющей первообразной)*

Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases}-1, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

Она имеет первообразную на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$:

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & x < 0 \\ x + C_2, & x > 0. \end{cases}$$

При любых значениях констант C_1 и C_2 функция F не будет иметь производную в точке $x = 0$. Т.к. это будет точка разрыва (первого рода) для функции F (при $C_1 \neq C_2$), или точка несуществования производной (излома) функции F (при $C_1 = C_2$). Следовательно, первообразная для функции f не существует на на одном интервале, содержащем точку $x = 0$.

Пример 6.2. *(пример функции с разрывом второго рода, не имеющей первообразной)*

Рассмотрим на отрезке функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \textbf{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \textbf{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Во всех точках сегмента прямой $\mathbb{R}$, кроме $x = 0$ выполняется:

$$\big(\ln|x| + C\big)' = \frac{1}{x}.$$

В точке же $x = 0$ функция $\ln|x|$ не определена и производной в нуле у неё нет. Доопределить функцию в точке $x = 0$ так, чтобы существовала производная доопределённой функции

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_1, & \textbf{если}\, x < 0, \\ \ln x + C_2, & \textbf{если}\, x > 0. \end{cases}$$

нельзя, т.к. при любых вещественных C_1 и C_2 функция F оказывается разрывной в нуле и не имеет производной.

Пример 6.3. *(пример функции с разрывом второго рода, имеющей первообразную)*

Идея построения примера: взять функцию $x^2 \sin\frac{1}{x}$ и продифференцировать её.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \textbf{если}\, x \neq 0, \\ 0, & \textbf{если}\, x = 0, \end{cases}$$

имеющую в нуле разрыв второго рода. Для неё первообразной будет функция

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + C, & \textbf{если}\, x \neq 0, \\ C, & \textbf{если}\, x = 0. \end{cases}, \quad \textbf{где} \;\; C = const.$$

Утверждение 6.1. Предположим, что $F \in \mathcal{C}\big((a, b)\big)$, и $c \in (a, b)$, а функция $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна в точке c. Пусть также, F есть первообразная f на каждом из интервалов (a, c) и (c, b). Тогда F есть первообразная функции f и на всём интервале (a, b).

Доказательство. **По условию имеем, что**

$$F'(x) = f(x) \ \textbf{при} \ x \in (a, c) \cup (c, b).$$

Следовательно, остаётся доказать, что функция F дифференцируема в точке c и что $F'(c) = f(c)$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \to c - 0$. На отрезке $[x_n, c]$ для F выполнены все условия теоремы Лагранжа о конечных приращениях. По этой теореме $\exists \xi_n \in (x_n, c)$:

$$\frac{F(x_n) - F(c)}{x_n - c} = F'(\xi_n) = f(\xi_n).$$

Т.к. $x_n < \xi_n < c$, то при $x_n \to c - 0$ получаем, что $\xi_n \to c - 0$. Следовательно, в силу непрерывности функции f в точке c, получаем $F'_-(c) = f(c)$. Аналогично, беря последовательность $\{x_n\} \to c + 0$, получаем $F'_+(c) = f(c)$. Откуда, $\exists F'(c)$ и $F'(c) = f(c)$. □

Доказанное утверждение, безусловно, элементарно обобщается на множества, состоящие из объединения нескольких интервалов.

Пример 6.4. Вычислим интеграл $\int |x|\, dx$;

Решение. **Действительно,**

$$\int |x|\, dx = \begin{cases} -\int x\, dx, & x < 0 \\ \int x\, dx, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2/2 + C_1, & x < 0 \\ x^2/2 + C_2, & x \geq 0 \end{cases} = F(x).$$

Из условий непрерывности функции F получаем:

$$F(0-0) = F(0) = F(0+0) \iff C_1 = C_2;$$

Откуда,

$$\int |x|\, dx = \frac{x|x|}{2} + C.$$

□

Задача 1. Докажите равенство:

$$\int e^{|x|}\, dx = \operatorname{sgn} x \cdot e^{|x|} + \begin{cases} C + 2, & x < 0, \\ C, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 6.5. Вычислим интеграл $\int \min\{5 - x^2;\, 1;\, x^2\}\, dx$;

Решение. **Выпишем подынтегральную функцию:**

$$\min\{5 - x^2;\, 1;\, x^2\} = \begin{cases} 5 - x^2, & x < -2, \\ 1, & -2 \leq x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \\ 5 - x^2, & x \geq 2. \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int \min\{5-x^2;\,1;\,x^2\}\,dx = \begin{cases} 5x-\frac{x^3}{3}+C_1, & x<-2,\\ x+C_2, & -2\le x<-1,\\ \frac{x^3}{3}+C, & -1\le x<1,\\ x+C_3, & 1\le x<2,\\ 5x-\frac{x^3}{3}+C_4, & x\ge 2. \end{cases}$$

Для непрерывности первообразной в точках $-2,-1,1,2$ должны выполняться следующие равенства:

$$F(-2-0)=F(-2+0)\Longleftrightarrow -10+\tfrac{8}{3}+C_1=-2+C_2\Longrightarrow C_1=\tfrac{16}{3}+C_2,$$

$$F(-1-0)=F(-1+0)\Longleftrightarrow -1+C_2=-\tfrac{1}{3}+C\Longrightarrow C_2=\tfrac{2}{3}+C\Longrightarrow C_1=6+C,$$
$$F(1-0)=F(1+0)\Longleftrightarrow 1+C_3=\tfrac{1}{3}+C\Longrightarrow C_3=-\tfrac{2}{3}+C,$$
$$F(2-0)=F(2+0)\Longleftrightarrow 2+C_3=10-\tfrac{8}{3}+C_4\Longrightarrow C_4=-6+C.$$

Поэтому, окончательно

$$\int \min\{5-x^2;\,1;\,x^2\}\,dx = \begin{cases} 5x-\frac{x^3}{3}+6+C, & x<-2,\\ x+\frac{2}{3}+C, & -2\le x<-1,\\ \frac{x^3}{3}+C, & -1\le x<1,\\ x-\frac{2}{3}+C, & 1\le x<2,\\ 5x-\frac{x^3}{3}-6+C & x\ge 2. \end{cases}$$

□

Зам. **Константы C_i были подобраны из условия непрерывности первообразной F, однако, она получается не только непрерывной, но и гладкой[a].**

[a]Т.е. непрерывно дифференцируемой.

Пример 6.6. Вычислим интеграл $\int \varphi(x)\,dx$, где $\varphi(x)$ - расстояние от числа x до ближайшего целого;

Решение. **Представим функцию φ в более удобном для работы виде:**

$$\varphi(x)=|x-n|,\quad n-\tfrac{1}{2}\le x<n+\tfrac{1}{2},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Поэтому, используя предыдущий пример имеем:

$$F(x)=\int\varphi(x)\,dx=\int|x-n|\,dx=\tfrac{|x-n|\cdot(x-n)}{2}+C_n,\quad n-\tfrac{1}{2}\le x<n+\tfrac{1}{2},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Для непрерывности первообразной функции F в точках $x=n+\frac{1}{2}$ получаем:

$$F\left(n+\tfrac{1}{2}-0\right)=F\left(n+\tfrac{1}{2}+0\right)\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\left(n+\frac{1}{2}-n\right)\cdot\left|n+\frac{1}{2}-n\right|}{2}+C_n=\frac{\left(n+\frac{1}{2}-(n+1)\right)\cdot\left|n+\frac{1}{2}-(n+1)\right|}{2}+C_{n+1}\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \tfrac{1}{8}+C_n=-\tfrac{1}{8}+C_{n+1}\Longleftrightarrow C_{n+1}=\tfrac{1}{4}+C_n.$$

Откуда получаем:

$$C_n=\tfrac{1}{4}+C_{n-1}=\ldots=\tfrac{n}{4}+C_0.$$

Постоянную n определим из соотношения:

$$n - \tfrac{1}{2} \le x < n + \tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow n \le x + \tfrac{1}{2} < n + 1.$$

Т.е., $n = \left[x + \frac{1}{2}\right]$**. Окончательно получаем:**

$$\int \varphi(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x - \left[x + \tfrac{1}{2}\right]\right) \cdot \left|x - \left[x + \tfrac{1}{2}\right]\right| + \tfrac{1}{4}\left[x + \tfrac{1}{2}\right] + C_0.$$

□

Задачи на "склеивание констант" часто встречаются при вычислении неопределённых тригонометрических интегралов, если используется замена, включающая в себя тангенс.

Пример 6.7. Найдём интеграл $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

Решение. **Преобразуем подынтегральное выражение:**

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2} = \int \frac{1/\cos^4 x}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}\,d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \left\{t = \operatorname{tg} x,\ x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{(t^2+2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2+t^2}{(t^2+2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{4}\int t\, d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{t}{4(t^2+2)} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{t}{4(t^2+2)} + C = \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x+2)} + C.$$

Очевидно, что данный ответ не является верным. Т.к. это разрывная и периодическая функция. Первообразная же для $f(x) = \frac{1}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$ **необходимо должна быть непрерывной, и возрастать** $\big($**т.к.** $F'(x) = f(x) > 0\big)$**. Всё это происходит в силу того, что подстановка** $t = \operatorname{tg} x$ **справедлива только при** $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$**. Постараемся исправить полученное несоответствие.**

Запишем полученную первообразную F в виде:

$$F(x) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x+2)}^{a} + C_n, \qquad -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

и "склеим константы" C_n **в точках** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$**. Для этого, как обычно, приравняем левый и правый пределы первообразной в этих точках:**

$$F\left(\tfrac{\pi}{2} + \pi n - 0\right) = F\left(\tfrac{\pi}{2} + \pi n + 0\right) \Longleftrightarrow \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + C_n = -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}} + C_{n+1}.$$

Откуда получаем,

$$C_{n+1} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} + C_n \Longrightarrow C_n = \frac{3\pi n}{4\sqrt{2}} + C_0.$$

Далее, т.к. $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, **то** $n < \frac{2x+\pi}{2\pi} < n+1 \Rightarrow n = \left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$, **и окончательный ответ имеет вид:**

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x+2)} + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right] + C_0.$$

□

---

[a] $\frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x+2)} = \frac{\sin 2x}{8(1+\cos^2 x)} \xrightarrow[x\to\pi/2+\pi n]{} 0.$

Исследование функций методами дифференциального исчисления

ГЛАВА

IX

1 Условия монотонности. Точки локального экстремума.

Утверждение 1.1. *(условия монотонности функции).* Пусть для функции

$$f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$$

существует производная $f' : (a,b) \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, не меняющая знака на интервале (a,b). Тогда f монотонна на (a,b) и справедливы следующие утверждения:

- $f' > 0$[a] $\implies f$ возрастает на $(a,b) \implies f' \geqslant 0$,
- $f' \geqslant 0 \implies f$ не убывает на $(a,b) \implies f' \geqslant 0$,
- $f' \equiv 0 \implies f \equiv \text{const}$ на $(a,b) \implies f' \equiv 0$,
- $f' \leqslant 0 \implies f$ не возрастает на $(a,b) \implies f' \leqslant 0$,
- $f' < 0 \implies f$ убывает на $(a,b) \implies f' \leqslant 0$.

[a] Под $f' > 0$ здесь имеется ввиду $f'(x) > 0$ для $\forall x \in (a,b)$

Доказательство. **Левый столбец** (достаточные условия) **и третья строка уже обсуждались при рассмотрении теоремы Лагранжа:**

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0\ \text{при}\ x_1<x_2}, \text{ где } x_1, x_2 \in (a,b),\ \xi \in (x_1, x_2).$$

Из этой формулы видно, что при $x_1 < x_2$ знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ совпадает со знаком производной $f'(\xi)$.

Правый столбец (необходимые условия) **получается непосредственно из определения производной. Действительно, пусть, например, f – дифференцируема и возрастает на (a,b). Имеем**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) - f(x) > 0$, а если $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x) - f(x) < 0$. Следовательно, дробь под знаком предела строго положительна и предел неотрицательный, т.е. $f' \geqslant 0$ на (a,b). □

Утверждение 1.2. *(необходимые условия локального экстремума[a]).*

Если точка $x_0 \in (a,b)$ является точкой локального экстремума функции

$$f:(a,b)\to\mathbb{R},$$

то производная $f'(x_0)$ либо не существует, либо $f'(x_0)=0$, либо $f'(x_0)=\infty$.

[a]Функция f имеет в точке c локальный экстремум, если найдётся такая окрестность $\mathbf{U}(c)$ точки c, в пределах которой значение $f(c)$ является наибольшим или наименьшим среди всех значений $f(x)$ этой функции.

Доказательство. **См. теорему Ферма, глава 5.** □

Зам. **Приведённое выше необходимое условие не является до- статочным. Для установления данного факта требуется рассмотреть, например, функцию $f(x)=x^3$.**

Утверждение 1.3. *(первое достаточное условие экстремума).* Пусть функция f непрерывна в точке x_0, дифференцируема на $\mathring{\mathbf{U}}(x_0)$[a], и пусть её производная f' меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда x_0 – точка строгого локального экстремума.

[a]В самой точке x_0 функция может быть не дифференцируема.

Доказательство. **Не ограничивая общности считаем, что $f'(x)>0$ при $x\in \mathbf{U}_-(x_0)$[a] и $f'(x)<0$ при $x\in\mathbf{U}_+(x_0)$. Тогда из теоремы Лагранжа:**

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)<0.$$

Откуда, $f(x)-f(x_0)<0$ для $\forall x\in\mathring{\mathbf{U}}(x_0)$. Следовательно, x_0 – точка строгого локального максимума. □

[a]$\mathbf{U}_-(x_0)=\{x\in\mathbf{U}(x_0)\,|\,x<x_0\}$, $\mathbf{U}_+(x_0)=\{x\in\mathbf{U}(x_0)\,|\,x>x_0\}$.

Зам. **Если при переходе через точку x_0 производная f' знак не меняет, то у функции f в x_0 экстремума нет (см. утверждение об условиях монотонности функции).**

Условия последнего утверждения не являются необходимыми условиями экстремума.

Пример 1.1.

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right) & ,\ x\neq 0,\\ 1 & ,\ x=0.\end{cases}$$

Т.к. $2+\sin\frac{1}{x}>0$, то $f(0)=f_{max}=1$. Однако,

$$f'(x)=-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)-x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\cos\frac{1}{x}+\underline{O}(x),$$

т.е. знак f' совпадает со знаком $\cos\frac{1}{x}$. Поэтому, f не возрастает и не убывает в любой сколь угодно малой окрестности точки $x_0=0$ слева и справа.

Пример 1.2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Точка $x_0 = 0$ не является ни точкой экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания функции f.

Утверждение 1.4. *(достаточные условия точек строгого локального экстремума, точек возрастания/убывания в терминах старших производных).* Пусть

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда

1. при **чётном** $n = 2k$, x_0 – точка строгого экстремума (строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0) > 0$, строгого максимума при $f^{(2k)} < 0$);
2. при **нечётном** $n = 2k+1$, x_0 – точка возрастания (точка убывания)[a] при $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ ($f^{(2k+1)}(x_0) < 0$).

[a]точнее, даже точка перегиба, см. далее

Доказательство. **Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получаем:**

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\overline{o}\left((x-x_0)^n\right)\overset{a}{=}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)\right)(x-x_0)^n. \qquad (*)$$

Поскольку $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, **а** $\alpha(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, **то сумма** $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)$ **имеет знак** $f^{(n)}(x_0)$, **когда** x **достаточно близко к** x_0. **Если** n **– нечётно, то при переходе через** x_0 **сомножитель** $(x-x_0)^n$ **меняет знак (с "-" на "+"), и тогда изменится знак всей правой, а значит и левой части равенства** $(*)$. **Значит при** $n = 2k+1$ **получаем:** x_0 **– точка возрастания при** $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ **и убывания при** $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$. **Экстремума нет.**

Если n **– чётно, то** $(x-x_0)^n > 0$ **при** $x \neq x_0$ **и, следовательно, в малой окрестности точки** x_0 **знак разности** $f(x)-f(x_0)$, **как видно из равенства** $(*)$ **совпадает со знаком** $f^{(n)}(x_0)$. □

[a]$\overline{o}\left((x-x_0)^n\right) = \alpha(x)\cdot(x-x_0)^n$, где $\alpha(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

Условия последнего утверждения не являются необходимыми. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases},$$

Т.к. $e^{-1/x^2} > 0 = f(0)$, **то** $x = 0$ **– точка минимума, но** $f^{(k)}(0) = 0$ **для** $\forall k \in \mathbb{N}$.

2 Выпуклость и точки перегиба.

Определение. Функция $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ называется выпуклой вверх на интервале $(a,b) \subset \mathbf{E}$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ и $\forall \lambda \in (0,1)$, выполнено неравенство:

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Если данное неравенство, при $x_1 \neq x_2$ является строгим, то функция f называется *строго выпуклой вверх на* (a,b).

Геометрически условие $f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ выпуклости вверх функции f означает, что точки любой дуги графика функции лежат над хордой, стягивающей эту дугу.

Определение. Если для функции $f : \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}$ имеет место обратное неравенство, т.е. $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ и $\forall \lambda \in (0,1)$, выполнено неравенство:

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

то f называется выпуклой вниз на интервале (a,b).[a]

[a] Иногда выпуклые вверх функции называются *вогнутыми*, а выпуклые вниз – *выпуклыми*.

Для выпуклой вниз функции справедливы все замечания, аналогичные приведённым выше. Поскольку все дальнейшие построения проводятся одинаково для функций, выпуклых вверх или вниз, мы ограничимся рассмотрением выпуклых вниз функций. Кроме того, если функция f выпукла вниз, то $-f$ – выпукла вверх.

Пусть далее $x_1 < x_2$. Положим $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$.[1] Решив данное уравнение относительно λ получаем:

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \qquad (1-\lambda) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$$f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \Leftrightarrow$$

График правой части этого неравенства – хорда, соединяющая точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.

$$\overset{\cdot(x_2-x_1)}{\Longleftrightarrow} (x_2 - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2) \Leftrightarrow {}^{[2]}$$
$$\overset{\cdot\frac{1}{(x_2-x)(x-x_1)}}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \qquad (\circ)$$

при $x_1 < x < x_2$, $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$.

Неравенство $(\circ)$ является иной формой записи определения выпуклости вниз функции f на интервале (a,b). Геометрически данное неравенство означает, что угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $\big(x_1, f(x_1)\big)$ и $\big(x, f(x)\big)$ не больше углового коэффициента хорды, соединяющей точки $\big(x, f(x)\big)$ и $\big(x_2, f(x_2)\big)$.

Покажем, что выпуклые функции должны быть "достаточно хорошими".

[1] когда λ пробегает интервал $(0,1)$, x пробегает все точки (x_1, x_2).
[2] $x_2 - x_1 = x_2 - x + x - x_1$.

Лемма (о трёх хордах). Функция f выпукла вниз на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда $\forall x_1, x, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x < x_2$ справедливо неравенство:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \overset{①}{\leqslant} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \overset{②}{\leqslant} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Доказательство. **Необходимость. Объединяя неравенства ① и ② получим неравенство $(\circ)$, которое, как было показано выше, эквивалентно выпуклости вниз.**

Достаточность. Пусть функция f выпукла вниз, $\lambda \in (0,1)$, и

$$x_1 < x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 < x_2.$$

Тогда из определения выпуклой вниз функции:

$$f(x) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Откуда, $f(x) - f(x_2) \leqslant \lambda\big(f(x_1) - f(x_2)\big)$, и при $\lambda = \dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$:

$$f(x_2) - f(x) \geqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\big(f(x_2)-f(x_1)\big) \Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \Rightarrow ②.$$

Аналогично, из того же неравенства $f(x) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ получаем:

$$f(x) - f(x_1) \leqslant (1-\lambda)\big(f(x_2)-f(x_1)\big) \overset{1-\lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \Rightarrow ①.$$

$\square$

***Следствие* 1.** Пусть $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ – фиксированная точка,

$$F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Тогда, если f – выпуклая вниз функция, то F – не убывает на $(a,b) \setminus \{x_0\}$. Причём строгая выпуклость влечёт за собой строгое возрастание F.

Доказательство. **Пусть $x, y \in (a,b) \setminus \{x_0\}$, $x < y$. Докажем неравенство**

$$F(x) \leqslant F(y).$$

Пользуясь леммой о трёх хордах, получим:

$$① \Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \quad \text{при } x_0 < x < y;$$

$$① \Longrightarrow \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \quad \text{при } x < x_0 < y;$$

$$② \Longrightarrow \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leqslant \frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \quad \text{при } x < y < x_0.$$

Каждое из этих неравенств эквивалентно $F(x) \leqslant F(y)$. $\square$

Теорема 56. *(об односторонних производных выпуклой функции).* Пусть функция f выпукла вниз на отрезке $[a,b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a,b)$ существуют конечные односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$. Причём, $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$.

Доказательство. Как и выше, рассмотрим функцию $F : [a,b] \setminus \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$, определённую формулой $F(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Т.к. функция f выпукла вниз на $[a,b]$, то F по следствию из леммы о трёх хордах не убывает. В силу леммы из теоремы о точках разрыва монотонной функции $\forall x_0 \in (a,b)$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} F(x)$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0-0} F(x)$, которые и есть $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ соответственно.

Пусть $x, y \in [a,b]$, $x < x_0 < y$. Тогда по следствию из леммы о трёх хордах, $F(x) \leqslant F(y)$. Устремляя в этом неравенстве x и y к x_0 соответственно слева и справа, получим $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$. □

Аналогичная теорема доказывается и для выпуклых вверх функций.

***Следствие* 1** (непрерывность выпуклых функций). Если функция f выпукла на промежутке $<a,b>$, то она непрерывна на интервале (a,b).

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a,b)$. Из существования конечных производных $f'_\pm(x_0)$ следует непрерывность функции f в точке x_0 справа и слева. Поэтому f непрерывна в точке x_0. □

Пример 2.1. Рассмотрим функцию $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ на $(-1,1)$[a]. Получаем $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \implies f'_+(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = +\infty$, $x \in (-1,1)$.

[a] из геометрических соображений вытекает, что функция f – выпукла вниз на интервале $(-1,1)$.

Пример 2.2. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x^2}, & x \in (-1,1), \\ 2, & x = -1 \text{ или } x = 1. \end{cases}$

Получаем, $f \in \mathcal{C}(-1,1)$, но $f(x) \notin \mathcal{C}[-1,1]$.

Полученные ранее условия выпуклости удобны с геометрической точки зрения, но для практического использования необходимо иметь аналитический критерий.

Предположим далее, что функция $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема на (a,b) и выпукла вниз. Выпишем неравенство ($\circ$) (условие выпуклости вниз), установленное ранее:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \qquad x_1 < x < x_2.$$

Устремляя в нём переменную x поочерёдно к x_1 и x_2, получаем:

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

что устанавливает монотонность производной функции f.

Учитывая, что для строго выпуклой функции неравенство ($\circ$) строгое, пользуясь теоремой Лагранжа, находим:

$$f'(x_1) \overset{f'\nearrow}{\leqslant} f'(\xi_1) \overset{\text{Лагр.}}{=} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \overset{(\circ)}{<} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \overset{\text{Лагр.}}{=} f'(\xi_2) \overset{f'\nearrow}{\leqslant} f'(x_2),$$

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2,$$

т.е. строгая выпуклость влечёт строгую монотонность производной.

Итак, если дифференцируемая функция f выпукла вниз на интервале (a, b), то её производная f' не убывает на (a, b), а в случае строгой выпуклости вниз её производная f' возрастает на (a, b).

Докажем, что это не только необходимое, но и достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции. В самом деле, для

$$a < x_1 < x < x_2 < b$$

по теореме Лагранжа, получаем:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2), \text{ где } x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2,$$

и если $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$, то выполнено условие выпуклости $(\circ)$ $\big($или строгой выпуклости, если $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)\big)$. Тем самым, мы доказали следующее утверждение:

Утверждение 2.1. *(критерий выпуклости).* Для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция f была выпукла вниз на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы её производная f' не убывала на (a, b). При этом строгому возрастанию f' соответствует строгая выпуклость вниз функции f.

***Следствие* 2.** Для того, чтобы функция $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, имеющая на (a, b) вторую производную, была выпуклой вниз на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы на (a, b) выполнялось $f''(x) \geqslant 0$. Если же $f''(x) > 0$ на (a, b), то этого **достаточно**, чтобы гарантировать строгую выпуклость вниз функции f.

Доказательство. **Данное следствие получается сопоставлением утверждений 5 и 1.** □

Аналогичные утверждения справедливы и для выпуклых вверх функций.

Утверждение 2.2. *(геометрическая интерпретация выпуклости).* **Дифференцируемая** на интервале (a, b) функция f выпукла вниз на этом интервале тогда и только тогда, когда её **график всеми своими точками лежит не ниже любой проведённой к нему касательной**. При этом для строго выпуклости функции необходимо и достаточно, чтобы все точки графика, за исключением самой точки касания, лежали строго выше этой касательной.

Доказательство. **Необходимость. Пусть функция f – дифференцируема на (a, b) и выпукла вниз. Выбираем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Уравнение касательной к Γ_f в точке $\big(x_0, f(x_0)\big)$ имеет вид:**

$$y_{\text{кас}}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \implies$$

$$\Rightarrow f(x) - y_{\text{кас}}(x) = \overbrace{f(x) - f(x_0)}^{f'(\xi)(x - x_0)} - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0),$$

где точка ξ лежит между x и x_0. Т.к. f – выпукла вниз, то знак разности $f'(\xi) - f'(x_0)$ совпадает со знаком разности $x - x_0$, поэтому $f(x) - y_{\text{кас}}(x) \geqslant 0$ для

$\forall x \in (a,b)$. **Если же f строго выпукла, то $f' \uparrow$ на (a,b) и, значит, $f(x) - y_{\text{кас}}(x) > 0$ при $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$.**

Достаточность. Если для $\forall t, x_0 \in (a,b)$ выполнено

$$f(t) - y_{\text{кас}}(t) = f(t) - f(x_0) - f'(x_0)(t - x_0) \geqslant 0, \qquad (*)$$

то $\dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leqslant f'(x_0)$[a] **при** $t < x_0$, **и** $\dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \geqslant f'(x_0)$ **при** $t > x_0$.
Таким образом, для $\forall x_1, x_0, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_0 < x_2$, получаем:

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

Причём строгое неравенство в $(*)$ влечёт строгое неравенство в последнем соотношении, которое совпадает с записью определения строго выпуклой вниз функции. □

[a]знак меняется при делении на $(t - x_0)$.

Определение. Пусть $f : \langle a, b\rangle \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Предположим, что выполнены условия:

1. $\exists \mathbf{U}(x_0) \subset (a,b)$, такая что на полуокрестностях $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_-(x_0)$ и $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_+(x_0)$ функция f имеет разные направления выпуклости;
2. $f \in C(x_0)$;
3. $\exists f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда точка x_0 называется *точкой перегиба функции* f (или, что $\big(x_0, f(x_0)\big)$ – *точка перегиба её графика*).

Т.о. в точке перегиба график функции меняет характер выпуклости и переходит с одной стороны касательной на другую.

Точки, в которых функция меняет направление выпуклости, но график не имеет касательной (как в случае разрыва или излома), к точкам перегиба не относятся.

Пример 2.3. $f(x) = x^3$, $x = 0$ – точка перегиба;

Утверждение 2.3. *(необходимые условия точки перегиба).* Если x_0 – точка перегиба функции f, то либо $f'(x_0) = \pm\infty$, либо конечного значения $f''(x_0)$ не существует, либо $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. **Согласно определению точки перегиба, $\exists \mathrm{U}(x_0)$, такая что на полуокрестностях $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_-(x_0)$ и $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_+(x_0)$ направления выпуклости – разные. По критерию выпуклости (Утв.5) производная f' монотонна на каждом из этих интервалов, причём характер монотонности – противоположный. Значит, если в точке x_0 функция f' определена, то она там имеет экстремум. Возможно также, что $f'(x_0) = \pm\infty$.**[a]

Если экстремальное значение функции f' является числом, то в силу необ-

ходимого условия внутреннего экстремума, должно быть: либо конечного значения $f''(x_0)$ не существует, либо $f''(x_0) = 0$. □

[a]Т.е. экстремальное значение производной может быть бесконечным.

Условия последнего утверждения не являются достаточными для того, чтобы x_0 являлось точкой перегиба.

Пример 2.4. $f(x) = x^4$; $f''(0) = 12x^2\Big|_{x=0} = 0$, но $x = 0$ – точка минимума.

Утверждение 2.4. *(достаточные условия точки перегиба).* Если:

1. функция f – дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(x_0)$;
2. $f''(x_0) = 0$ или $\nexists f''(x_0)$;
3. $f''(x_1) \cdot f''(x_2) < 0$, $x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$.[a]

Тогда x_0 – точка перегиба функции f.

[a]Т.е. f'' меняет знак при переходе через точку x_0.

Доказательство. **Если $\exists f''$ в $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(x_0)$, и всюду в $\overset{\circ}{\mathrm{U}}_-(x_0)$ она имеет один знак, а всюду в $\overset{\circ}{\mathrm{U}}_+(x_0)$ – противоположный знак, то этого достаточно для того, чтобы f' в $\overset{\circ}{\mathrm{U}}_-(x_0)$ и $\overset{\circ}{\mathrm{U}}_+(x_0)$ была монотонна, но имела разный её характер. Тогда в силу критерия выпуклости в точке x_0 произойдёт изменение направления выпуклости, т.е. x_0 – точка перегиба.** □

***Следствие* 3.** Пусть $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 – точка перегиба функции f.

3 Асимптоты.

Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция f задана по крайней мере на $\overset{\circ}{\mathrm{U}}_-(x_0)$ или $\overset{\circ}{\mathrm{U}}_+(x_0)$, и действует в R. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой функции f*,[a] если пределы $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равны $-\infty$ или $+\infty$.

[a]Или вертикальной асимптотой графика Γ_f.

Пример 3.1. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ – вертикальные асимптоты.

Определение. Пусть функция f определена $\forall x > a \quad (\forall x < a)$. Если существуют такие числа k и b, что

$$f(x) = kx + b + \bar{o}(1), \quad x \to +\infty \ \ (x \to -\infty), \tag{1}$$

то прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой функции f при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$)*.

Горизонтальная асимптота – частный случай наклонной при $k = 0$, т.е. прямая $y = b$ – *горизонтальная асимптота функции f при $x \to \pm\infty$* тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

Пример 3.2. $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$. График функции Γ_f пересекает свою асимптоту $y = x$ бесконечное число раз, сколь угодно далеко.

Существование асимптоты функции f означает, что при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) функция ведёт себя «почти как линейная», т.е. отличается от линейной на бесконечно малую.

Теорема 57. *(уравнение наклонной асимптоты).* Пусть функция f определена на $(a, +\infty)$. Прямая $y = kx + b$ – (наклонная) асимптота f при $x \to +\infty$, тогда и только тогда, когда

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx\big). \qquad (*)$$

Равенства $(*)$ равносильны равенству (1).

Доказательство. Пусть $y = kx + b$ – асимптота f, тогда

$$f(x) = kx + b + \overline{o}(1), \quad x \to +\infty. \qquad \Big| : x$$

Откуда, $\dfrac{f(x)}{x} = k + \dfrac{b + \overline{o}(1)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} k$. Далее, $f(x) - kx = b + \overline{o}(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$.
Обратно, если выполнены равенства $(*)$, то, обозначив

$$\alpha(x) = f(x) - kx - b,$$

получим, что $\alpha(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ и $f(x) = kx + b + \overline{o}(1)$, $x \to +\infty$, т.е. прямая $y = kx + b$ – асимптота функции f. $\square$

Мы показали, что если существует представление функции f в виде:

$$f(x) = kx + b + \overline{o}(1), \ x \to +\infty,$$

то k и b выражаются по формулам $(*)$. Следовательно, если наклонная асимптота при $x \to +\infty$ существует, то она единственная.

Все аналогичные рассуждения справедливы и при $x \to -\infty$.

Выпуклость вверх и вниз используются при построении графиков функций, имеющих наклонные асимптоты. Нарисовав такие графики, можно предположить, что выпуклая вверх функция приближается к своей асимптоте снизу, а выпуклая вниз – сверху.

Теорема 58. *(выпуклость и асимптота).* Пусть функция $f : (a, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $y = kx + b$. Тогда, если f выпукла (строго выпукла) вниз на $(a, +\infty)$, то $f(x) \geqslant kx + b$ $\big(f(x) > kx + b\big)$ при $\forall x > a$.

Доказательство.
Докажем теорему для строгой выпуклости.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - kx$ на $(a, +\infty)$. Если мы докажем строгое убывание функции g на $(a, +\infty)$, то по теореме о пределе монотонной функции

$\forall x \in (a, +\infty)$ будет выполняться неравенство

$$g(x) > \lim_{t\to+\infty} g(t) = b, \text{ откуда будет следовать, } f(x) > kx + b.$$

Пусть $a < x < y$. Положим $F(t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$, и заметим, что в силу теоремы 2:

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = k.$$

В силу следствия из леммы о трёх хордах, функция F строго возрастает на $(x, +\infty)$. Тогда по теореме о пределе монотонной функции имеем: $F(t) < k$ при $\forall t > x$, и в частности $F(y) < \text{k}$. Откуда,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < k \iff f(y) - ky < f(x) - kx,$$

что равносильно неравенству $g(y) < g(x)$, т.е. $g \downarrow$. □

Требуется ли отдельно рассмотреть случай $k = 0$?

Данное свойство выпуклых функций бывает очень полезным при построении графика функции.

Зам. Утверждения теоремы верны и при $x \to -\infty$.

4 Доказательство неравенств с помощью выпуклости.

1. Изучим функцию $f(x) = \sin x$ на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

   $f''(x) = -\sin x < 0$ при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, функция f строго выпукла вверх на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

   Рассмотрим хорду $y = \frac{2}{\pi}x$, соединяющую точки $(0, 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Все внутренние точки этой хорды лежат строго ниже графика f. Поэтому,

$$\sin x > \frac{\pi}{2}x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$ при $x \geqslant -1$, $x \neq 0$, $\alpha > 1$;

   $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2} > 0$, $\forall x > -1$. Поэтому, f выпукла вниз при $x > -1$ все её точки лежат (строго) выше точки любой касательной, проведённой в любой точке.

   Рассмотрим касательную, проведённую в точке $x = 0 : y_{\text{кас}} = 1 + \alpha x$. По сказанному выше:

$$(1 + x)^{\alpha} = f(x) > y_{\text{кас}} = 1 + \alpha x, \quad \text{при } x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}.$$

   При $x = -1$ неравенство $(1 + x)^{\alpha} > 1 + \alpha x$ выполняется, т.к. $\alpha > 1$. Следовательно, нами получено неравенство:

$$(1 + x)^{\alpha} > 1 + \alpha x, \quad x \geqslant -1, \ x \neq 0, \ \alpha > 1.$$

   Полученный результат является обобщением неравенства Бернулли на слу-

чай нецелых $\alpha > 1$.

3. Пусть f – выпуклая вниз на интервале (a, b) функция. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$, $\forall 0 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_n \leqslant 1$; $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, выполнено неравенство Йенсена:

Неравенство Йенсена

$$f\big(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\big) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \qquad (**)$$

Для строго выпуклой вниз функции неравенство $(**)$ является строгим, если не все числа $x_1, \ldots, x_n$ одинаковы, а числа α_i строго положительны.

Доказательство. **Для $n = 2$ неравенство $(**)$ совпадает с неравенством из определения выпуклой вниз функции.**

Предположим, что данное неравенство справедливо для любого набора $n \geqslant 0$ точек. Рассмотрим числа:

$$x_1, \ldots, x_{n+1} \in (a, b), \quad 0 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \leqslant 1, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} = 1.$$

Не ограничивая общности будем считать, что $\alpha_{n+1} < 1$.

Обозначим $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k x_k}{1 - \alpha_{n+1}}$. Т.к.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x_k}{1 - \alpha_{n+1}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k a}{1 - \alpha_{n+1}} \overset{a}{=} a, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x_k}{1 - \alpha_{n+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k b}{1 - \alpha_{n+1}} = b,$$

то $y \in (a, b)$. Далее по предположению индукции:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = f\Bigg(\alpha_{n+1} x_{n+1} + (1 - \alpha_{n+1}) \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x_k}{1 - \alpha_{n+1}}}^{=y}\Bigg) \overset{b}{\leqslant}$$

$$\leqslant \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \alpha_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k x_k}{1 - \alpha_{n+1}}\right) \overset{c}{\leqslant}$$

$$\alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} \cdot f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k).$$

□

[a] $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1 - \alpha_{n+1}$
[b] $f\big(\alpha_{n+1} x_{n+1} + (1 - \alpha_{n+1}) y\big) \leqslant \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \alpha_{n+1}) f(y)$.
[c] Предположение индукции.

Зам. **При выпуклости вверх функции f неравенство Йенсена заменяется на противоположное.**

4. Функция $\ln : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ выпукла вверх. Поэтому из неравенства Йенсена:

Следствия неравенства Йенсена

$$\ln\big(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\big) \geqslant \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n \iff$$

$$\iff \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \qquad (\triangledown)$$

где $x_1, \ldots, x_n \in (0, +\infty)$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

Откуда при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ получаем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.^{a}$$

Полагая в ($\triangledown$) $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$[b]; $x_1 = x$, $x_2 = y$, **получаем** неравенство Юнга:

$$x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \quad \textbf{или} \quad x\,y \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

[a]Равенство достигается только при $x_1 = \ldots = x_n$.
[b]p и q в таком случае называются сопряжёнными показателями.

5. Пусть $f(x) = x^p$, $x > 0$, $p > 1$. **Тогда** $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$. **Следовательно,** f **– выпуклая вниз функция. Тогда из неравенства Йенсена получаем:**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k^p \iff \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k^p\right)^{1/p}.$$

Полагая здесь $q = \dfrac{p}{p-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$, $\alpha_k = \dfrac{b_k^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}$, $x_k = \dfrac{a_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q}{b_k^{1/(p-1)}}$, **получаем** классическое неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}$$

Определённый интеграл Римана

ГЛАВА

X

1 Определения. Основные факты.

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

Определение. *Разбиением отрезка* $[a,b]$ называется множество точек

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – *длина* k*-го отрезка разбиения*; $d_\tau := \max\limits_{k} \Delta x_k$ – *диаметр* (*мелкость*) *разбиения* τ.

Определение. *Размеченным разбиением отрезка* $[a,b]$ называется пара (τ,ξ), где $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ – множество произвольно зафиксированных точек $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$.

Определение. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Сумма

$$\sigma = \sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется *интегральной суммой Римана функции* f, отвечающей разбиению (τ,ξ) отрезка $[a,b]$.

Определение. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Число I называют пределом интегральных сумм при диаметре разбиения стремящемся к нулю, и пишут: $I = \lim\limits_{d_\tau\to 0}\sigma_\tau(f,\xi)$, если:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 : \forall\tau,\ d_\tau<\delta(\varepsilon)\ \text{и}\ \forall\xi \Longrightarrow |\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Т.е., если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)$, что для любого размеченного разбиения (τ,ξ), диаметр которого меньше, чем δ, вне зависимости от выбора точек ξ, интегральная сумма $\sigma_\tau(f,\xi)$ отличается от I меньше, чем на ε.

В этом случае функция f называется *интегрируемой по Риману на* $[a,b]$, а число I называется *определённым интегралом* (*Римана*) *от функции* f *по отрезку* $[a,b]$. Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$; $\mathfrak{R}[a,b]$ – множество интегрируемых на $[a,b]$ функций.

Понятие предела интегральных сумм не является частным случаем понятия предела функции, т.к. интегральная сумма является функцией от размеченного разбиения, а не его диаметра. Для того, чтобы рассматривать его, как предел в старом понимании этого слова, требуется ввести более общее определение предела, а именно – предел по базе.

Поставим ряд вопросов:

1. **Какие функции интегрируемы по Риману?**
2. **Какими свойствами обладает интеграл?**
3. **Как вычислить интеграл?**

Теорема 59. *(единственность определённого интеграла).* Если существует предел интегральных сумм $\sigma_\tau(f,\xi)$ при $d_\tau \to 0$, то этот предел единственен.

Доказательство. **От противного. Пусть существуют два предела $I_1 \neq I_2$. Тогда по определению имеем:**

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall\tau,\ d_\tau < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |\sigma_\tau(f,\xi) - I_1| < \frac{\varepsilon}{2},\ |\sigma_\tau(f,\xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда:

$$|I_1 - I_2| \leqslant |I_1 - \sigma_\tau(f,\xi)| + |\sigma_\tau(f,\xi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Откуда получаем, что $I_1 = I_2$. □

Теорема 60. *(необходимое условие интегрируемости).* Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нём.

Доказательство. **От противного. Пусть функция f не ограничена на отрезке $[x_{k-1},x_k] \subset [a,b]$. Для произвольного разбиения τ отрезка $[a,b]$ представим сумму Римана данной функции в виде:**

$$\sigma_\tau(f,\xi) = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\neq k}} f(\xi_i)\Delta x_i, \text{ где } \xi_k \in [x_{k-1},x_k].$$

Выберем также произвольным образом все отмеченные точки ξ_i, кроме ξ_k. Тогда правую часть последнего равенства можно сделать сколь угодно большой по модулю за счёт выбора ξ_k. Следовательно, при любом разбиении τ сумма $\sigma_\tau(f,\xi)$ может быть сколь угодно большой (по модулю). Например, $|\sigma_\tau(f,\xi)| > \dfrac{1}{d_\tau}$. Поэтому, не существует предела $\lim\limits_{d_\tau\to 0}\sigma_\tau(f,\xi)$, то есть, f не интегрируема на $[a,b]$. □

(условие теоремы не является достаточным) Рассмотрим функцию Дирихле на отрезке $[0,1]$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

Для этой функции и произвольного разбиения τ, т.к. в каждом отрезке найдутся и рациональные и иррациональные точки, выполнено: $\sigma_\tau(D,\xi) \equiv 1$, если все отмеченные точки рациональные, и $\sigma_\tau(D,\xi) \equiv 0$, если все отмеченные точки иррациональные. Откуда $\nexists \lim\limits_{d_\tau\to 0}\sigma_\tau(D,\xi)$, и функция D не интегрируема.

2 Верхние и нижние суммы Дарбу.

Из необходимого условия интегрируемости функции f следует, что интегрируемая функция ограничена на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Откуда,

Далее мы рассматриваем функции, удовлетворяющие данному свойству.

$$\exists\, m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Определение. *Верхней (нижней) суммой Дарбу функции f на $[a,b]$*, при данном разбиении $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ называется следующая сумма:

$$\overline{S}_\tau(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \qquad \left(\underline{s}_\tau(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k\right)$$

Зам. **Не следует считать, что суммы Дарбу $S_\tau(f)$ и $s_\tau(f)$ во всех случаях являются интегральными суммами (при специальном выборе точек ξ). В самом деле, для произвольной ограниченной функции f может не найтись точек ξ_k^1, ξ_k^2 таких, что**

$$m_k = f(\xi_k^1), \quad M_k = f(\xi_k^2), \quad k = \overline{1,n}.$$

Однако, если функция f непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса такие точки найдутся и обе суммы Дарбу являются интегральными суммами. Тем не менее, суммы Дарбу устроены проще произвольных сумм Римана, т.к. в их определении не участвует разметка разбиения.

Теорема 61. *(свойства сумм Дарбу).* **Д1.** Для любого размеченного разбиения (τ, ξ) отрезка $[a,b]$ справедливы неравенства:

$$\underline{s}_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f,\xi) \leqslant \overline{S}_\tau(f),$$

причём $\underline{s}_\tau(f) = \inf\limits_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi)$, $\overline{S}_\tau(f) = \sup\limits_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi)$.[a]

[a] inf и sup берутся по всевозможным совокупностям отмеченных точек.

Доказательство. ***Докажем утверждение для верхних сумм.***
$\forall k = \overline{1,n}$ и $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ выполнено $f(\xi_k) \leqslant M_k$. Умножая это неравенство на Δx_k и суммируя по k, получим:

$$\sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}_\tau(f).$$

Далее, по определению $\sup$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \xi_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$: $f(\xi_k^*) > M_k - \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Откуда,

$$\sigma_\tau(f,\xi^*) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)\Delta x_k > \overline{S}_\tau(f) - \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \overline{S}_\tau(f) - \varepsilon.$$

□

Д2. При добавлении новых точек разбиения (при *измельчении разбиения*) верхняя сумма не увеличивается, а нижняя не уменьшается.

Доказательство. ***Докажем утверждение для верхних сумм.*** По принципу математической индукции достаточно проверить, что верхняя сумма не увеличивается при добавлении одной точки $c \in (x_{q-1}, x_q)$.
Пусть $\tau' = \tau \cup \{c\}$. Тогда:

$$\overline{S}_\tau(f) = \sum_{k=1}^{q-1} M_k \Delta x_k + M_q \Delta x_q + \sum_{k=q+1}^{n} M_k \Delta x_k.$$

$$\overline{S}_{\tau'}(f) = \sum_{k=1}^{q-1} M_k \Delta x_k + M_q'(c - x_{q-1}) + M_q''(x_q - c) + \sum_{k=q+1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

где $M_q' = \sup\limits_{[x_{q-1}, c]} f(x)$, $M_q'' = \sup\limits_{[c, x_q]} f(x)$. Откуда:

$$\overline{S}_\tau(f) - \overline{S}_{\tau'}(f) = M_q(x_q - x_{q-1}) - M_q'(c - x_{q-1}) - M_q''(x_q - c) = {}^{a}$$

$$= (M_q - M_q')(c - x_{q-1}) + (M_q - M_q'')(x_q - c) \geqslant 0.^{b}$$

□

[a] $x_q - x_{q-1} = x_q - c + c - x_{q-1}$
[b] т.к. при сужении множества sup не увеличивается.

Д3. Если разбиение τ' получено из τ добавлением ℓ новых точек, то справедливы неравенства:

$$0 \leqslant \underline{s}_{\tau'}(f) - \underline{s}_\tau(f) \leqslant (M - m)\,\ell\, d_\tau, \quad 0 \leqslant \overline{S}_\tau(f) - \overline{S}_{\tau'}(f) \leqslant (M - m)\,\ell\, d_\tau,$$

где $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $\quad m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$

Доказательство. ***Докажем утверждение для верхних сумм.*** Используя выражение из Д2, полученное после добавления одной точки, получаем:

$$0 \leqslant \overline{S}_\tau(f) - \overline{S}_{\tau'}(f) = (M_q - M_q')(c - x_{q-1}) + (M_q - M_q'')(x_q - c) \leqslant$$

$$\leqslant (M - m)(c - x_{q-1} + x_q - c) = (M - m) \cdot 1 \cdot \Delta x_q \leqslant (M - m) \cdot 1 \cdot d_\tau.$$

Ясно, что после добавления ℓ новых точек, правая часть умножается на ℓ. □

Д4. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы (даже отвечающей другому разбиению).

Доказательство. Пусть τ_1 и τ_2 – два произвольных разбиения отрезка $[a, b]$, $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. Тогда по свойствам Д1 и Д2:

$$\underline{s}_{\tau_1}(f) \leqslant \underline{s}_\tau(f) \leqslant \overline{S}_\tau(f) \leqslant \overline{S}_{\tau_2}(f).$$

□

Из свойства Д4 следует, что множество нижних и верхних сумм Дарбу (отвечающие различным разбиениям отрезка интегрирования) ограничено соответственно сверху и снизу. Исходя из этого, и принципа точных граней дадим следующее определение:

Определение. Нижний интеграл Дарбу (число I_*) и верхний интеграл Дарбу (число I^*) функции f по отрезку $[a,b]$ определяются равенствами:

$$I_* = \sup_{\tau} \underline{s}_{\tau}(f), \quad I^* = \inf_{\tau} \overline{S}_{\tau}(f).^{a}$$

[a]где точные грани берутся по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a,b]$

Д5. Нижний и верхний интегралы Дарбу связаны неравенством: $I_* \leqslant I^*$.

Доказательство. От противного. Пусть $I_* > I^*$, т.е. $\exists \varepsilon > 0 : I_* = I^* + \varepsilon$. Тогда для указанного $\varepsilon > 0$:

$$\exists \tau_1, \tau_2 : \underline{s}_{\tau_1}(f) > I_* - \frac{\varepsilon}{2},\ \overline{S}_{\tau_2}(f) < I^* + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \underline{s}_{\tau_1}(f) - \overline{S}_{\tau_2}(f) > I_* - \frac{\varepsilon}{2} - I^* - \frac{\varepsilon}{2} = 0.$$

То есть, $\underline{s}_{\tau_1}(f) > \overline{S}_{\tau_2}(f)$, что противоречит свойству Д4. $\square$

Из свойства Д5 и определения интегралов Дарбу, для любого разбиения τ, получаем неравенство:

$$\underline{s}_{\tau}(f) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant \overline{S}_{\tau}(f).$$

Теорема 62. *(основная лемма Дарбу).* Для любой ограниченной функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ справедливы равенства:

$$I_* = \lim_{d_\tau \to 0} \underline{s}_{\tau}(f), \quad I^* = \lim_{d_\tau \to 0} \overline{S}_{\tau}(f).$$

Доказательство. ***Докажем второе равенство. Первое доказывается аналогично.*** Если $f \equiv c = \text{const}$, то

$$\forall \tau \Rightarrow \underline{s}_{\tau}(f) = \overline{S}_{\tau}(f) = c \cdot (b-a) = I_* = I^*,$$

и утверждение теоремы выполнено, т.к. предел константы равен ей самой.
Пусть далее $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Если $f \neq \text{const}$, то $M > m$. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Т.к. $I^* = \inf\limits_{\tau} \overline{S}_{\tau}(f)$, то $\exists \tau_0 : \overline{S}_{\tau_0}(f) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$.
Пусть разбиение τ_0 содержит ℓ точек. Положим $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(M-m)\ell}$, и рассмотрим τ – произвольное разбиение с диаметром $d_\tau < \delta(\varepsilon)$. Взяв объединение разбиений $\tau' = \tau_0 \cup \tau$, имеем: $\tau \subset \tau'$, $\tau_0 \subset \tau'$. Откуда, по свойству Д2, $\overline{S}_{\tau'}(f) \leqslant \overline{S}_{\tau_0}(f)$ и $\overline{S}_{\tau'}(f) \leqslant \overline{S}_{\tau}(f)$.
Разбиение τ' получается из τ добавлением не более ℓ новых точек (если все точки разбиения τ_0 – новые). По свойству Д3 получаем:

$$\overline{S}_{\tau}(f) - \overline{S}_{\tau'}(f) \leqslant (M-m)\,\ell\, d_\tau < (M-m)\,\ell\,\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Longrightarrow \overline{S}_{\tau}(f) < \overline{S}_{\tau'}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \overline{S}_{\tau_0}(f) + \frac{\varepsilon}{2} < I^* + \varepsilon.$$

Откуда,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) : \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow 0 \leqslant \overline{S}_{\tau}(f) - I^* < \varepsilon.$$

$\square$

Теорема 63. *(критерии интегрируемости).* Для любой ограниченной функции

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

следующие утверждения равносильны:

а) f – интегрируема на $[a,b]$;

б) $I_* = I^*$ *(критерий Дарбу)*;

в) $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \left(\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f)\right) = 0$[a] *(критерий Римана)*;

[a]т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\varepsilon)$ выполнено $\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) < \varepsilon$.

Доказательство. **Пусть f интегрируема на $[a,b]$, тогда** а) ⇒ б)

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\varepsilon)\ \textbf{и}\ \forall \xi \implies |\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Беря в последнем неравенстве sup **и** inf **по всем ξ, получаем:**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau, d_\tau < \delta(\varepsilon) \implies \left[\begin{array}{l} |\overline{S}_\tau(f) - I| \leqslant \varepsilon \\ |\underline{s}_\tau(f) - I| \leqslant \varepsilon \end{array}\right. \implies$$

$$\implies \lim_{d_\tau \to 0} \overline{S}_\tau(f) = \lim_{d_\tau \to 0} \underline{s}_\tau(f) = I.$$

По основной лемме Дарбу: $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \overline{S}_\tau(f) = I^*$, $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \underline{s}_\tau(f) = I_* \Rightarrow I_* = I^*$**.**

Пусть $I_* = I^*$, тогда по основной лемме Дарбу получим: б) ⇒ в)

$$\lim_{d_\tau \to 0} \underline{s}_\tau(f) = \lim_{d_\tau \to 0} \overline{S}_\tau(f) \implies \lim_{d_\tau \to 0} \left(\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f)\right) = 0.$$

Пусть $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \left(\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f)\right) = 0$**. Т.к. для любого разбиения τ:** в) ⇒ а)

$$\underline{s}_\tau(f) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant \overline{S}_\tau(f),\ \textbf{то}\ 0 \leqslant I^* - I_* \leqslant \overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) \xrightarrow[d_\tau \to 0]{} 0 \Rightarrow I_* = I^* = I.$$

Покажем, что $\lim\limits_{d_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi) = I$**. По свойству Д1:**

$$\underline{s}_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f,\xi) \leqslant \overline{S}_\tau(f);\ \underline{s}_\tau(f) \leqslant I \leqslant \overline{S}_\tau(f) \implies$$

$$\implies |\sigma_\tau(f,\xi) - I| \leqslant \overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) < \varepsilon.$$

Получаем, что:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall \tau,\ d_\tau < \delta(\varepsilon),\ \forall \xi \Rightarrow |\sigma_\tau(f,\xi) - I| < \varepsilon.$$

□

***Следствие* 1.** Критерий Римана можно переформулировать следующим образом: пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Тогда f – интегрируема на $[a,b]$, тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau : \overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) < \varepsilon.$$

Данное утверждение усиливает критерий Римана в плане достаточности: для установления интегрируемости функции достаточно по $\forall \varepsilon > 0$ найти хотя бы одно разбиение, для которого выполнено $\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) < \varepsilon$, а не добиваться выполнения этого неравенства для всех разбиений достаточно малого диаметра.

Доказательство. **Необходимость данного условия для интегрируемости функции f была доказана в критерии интегрируемости Римана.**
Докажем достаточность. Пусть $\forall\varepsilon>0\ \exists\tau$ **:** $\overline{S}_\tau(f)-\underline{s}_\tau(f)<\varepsilon$**. Т.к.** $\underline{s}_\tau(f)\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant\overline{S}_\tau(f)$**, то**

$$I^*-I_*\leqslant\overline{S}_\tau(f)-\underline{s}_\tau(f)<\varepsilon,\ \text{т.е. } I^*=I_*.$$

Следовательно, функция f – интегрируема на $[a,b]$ по критерию Дарбу.

□

Напомним, что величина

$$\omega(f,[a,b])=\sup_{x,y\in[a,b]}\big(f(x)-f(y)\big)$$

называется колебанием **функции f на отрезке $[a,b]$. Понятно, что:**

$$\omega(f,[a,b])=\sup_{[a,b]}f(x)-\inf_{[a,b]}f(x).$$

Для заданного разбиения отрезка $[a,b]$ $\tau=\{x_k\}_{k=0}^n$ обозначим через $\omega_k(f)$ – колебание f на $[x_{k-1},x_k]$.

***Следствие* 2.** Критерий интегрируемости Римана может быть переформулирован так: если функция f – ограничена, то она интегрируема, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{d_\tau\to0}\sum\limits_{k=1}^n\omega_k(f)\,\Delta x_k=0$[a].

[a]Т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ :\ \forall\tau=\{x_k\},\ d_\tau<\delta\ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^n\omega_k(f)\,\Delta x_k<\varepsilon$.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n\omega_k(f)\Delta x_k=\sum_{k=1}^n(M_k-m_k)\Delta x_k=\overline{S}_\tau(f)-\underline{s}_\tau(f).$$

□

3 Классы интегрируемых функций

Теорема 64. Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нём.

Достаточные признаки интегрируемости.

Доказательство. **Т.к. функция f непрерывна на $[a,b]$, то по первой теореме Вейерштрасса она ограничена, а по теореме Кантора равномерно непрерывна на этом отрезке. Откуда,**

$C[a,b]\subset\mathfrak{R}[a,b]$.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\ :\ \forall x_1,x_2\in[a,b],\ |x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)\Longrightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Следовательно, для любого разбиения τ с диаметром $d_\tau<\delta(\varepsilon)$ выполнено

$M_k - m_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, **т.е.**

$$\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

По критерию интегрируемости функция f – интегрируема на $[a,b]$. □

Теорема 65. Если функция $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ монотонна на $[a,b]$, то она интегрируема на нём.

Доказательство. **Для определённости считаем, что f не убывает на отрезке $[a,b]$. Тогда $M_k = m_{k+1}$ и**

$$\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \leqslant d_\tau \cdot \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = d_\tau\left(f(b) - f(a)\right) < \varepsilon,$$

при $d_\tau < \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, если $f(b) \neq f(a)$, или при любом $\delta > 0$, если $f(a) = f(b)$, т.е. $f \equiv \mathrm{const}$.

□

В силу монотонности, все значения функции f заключены между $f(a)$ и $f(b)$, т.е. монотонная на $[a,b]$ функция ограничена на нём.

Теорема 66. Пусть функция f – ограничена на $[a,b]$ и все её точки разрыва можно поместить в конечный набор интервалов, сколь угодно малой длины.[a] Тогда f – интегрируема на $[a,b]$.

[a] Т.е. $\forall\varepsilon > 0$ существует конечный набор интервалов, содержащий все точки разрыва функции f, сумма длин которых меньше ε.

Доказательство. **Обозначим $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Если $m = M$, то $f = \mathrm{const}$ – интегрируема на $[a,b]$.**
Пусть далее $M > m$, и $\{(x_j^1, x_j^2)\}_{j=1}^{q}$ – конечный набор интервалов, покрывающий все точки разрыва, сумма длин которых $\ell < \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Дополнение этих интервалов до $[a,b]$ – конечное число отрезков:

$$I = [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{q}(x_j^1, x_j^2) = \bigcup_{k=1}^{r}\mathbf{I}_k,$$

где $\mathbf{I}_k$ – отрезок, а $r \leqslant q+1$.
По теореме Кантора функция f – равномерно непрерывна на каждом из $\mathbf{I}_k$, т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_k(\varepsilon)\ :\ \forall x', x'' \in \mathbf{I}_k,\ |x' - x''| < \delta_k \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Если взять $0 < \delta < \min\limits_k \delta_k$, $\delta < \ell$, то

$$\forall x', x'' \in \bigcup_{k=1}^{r}\mathbf{I}_k,\ |x' - x''| < \delta \text{ **выполнено** }: |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Зададим теперь разбиение τ отрезков $\mathbf{I}_k$, $d_\tau < \delta$.[a] Тогда для его сумм Дарбу:

$$\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) = \underbrace{\sum\nolimits_1 \overbrace{(M_k - m_k)}^{<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_k}_{\text{по отрезкам разбиения } \mathbf{I}_k} + \underbrace{\sum\nolimits_2 \overbrace{(M_k - m_k)}^{<(M-m)} \Delta x_k}_{\text{по всем остальным}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \overbrace{\sum\nolimits_1 \Delta x_k}^{\leqslant(b-a)} + (M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

[a] Точки вне $\bigcup\limits_{k=1}^{r} \mathbf{I}_k$ расставлены произвольно.

***Следствие* 1.** Если функция f – ограничена на $[a,b]$ и имеет конечное число разрывов, то f – интегрируема на $[a,b]$.

Утверждение 3.1. Если значение интегрируемой функции изменить на `конечном множестве точек`, то интегрируемость при этом не нарушится и интеграл не изменится.

`Можно ли в этом утверждении конечное множество точек поменять на счётное?`

Доказательство. Пусть функция f – интегрируема на $[a,b]$, а $\widetilde{f}$ отличается от f в m точках: $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Поскольку f ограничена некоторым числом L, $\widetilde{f}$ ограничена числом $\widetilde{L} = \max\{L, |\widetilde{f}(x_1)|, \ldots, |\widetilde{f}(x_m)|\}$
Заметим, что в интегральных суммах для функций f и $\widetilde{f}$ различны не более $2m$ слагаемых, откуда:

$$|\sigma_\tau(f,\xi) - \sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)| \leqslant 2m(L+\widetilde{L})\, d_\tau \xrightarrow[d_\tau\to 0]{} 0$$

Следовательно, $\exists \lim\limits_{d_\tau\to 0} \sigma_\tau(\widetilde{f},\xi)$, и $\lim\limits_{d_\tau\to 0} \sigma_\tau(\widetilde{f},\xi) = \lim\limits_{d_\tau\to 0} \sigma_\tau(f,\xi)$ □

Данное утверждение позволяет определить интеграл для функций, заданных на отрезке за исключением конечного множества точек, и говорить об интегрируемости таких функций.

Исследуем интегрируемость функции Римана-Тома.

$$R(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x = m/n,\ \text{НОД}(m,n) = 1,\ \ m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное число.} \end{cases}$$

Не ограничивая общности изучим интегрируемость на отрезке $[0,1]$. Фиксируем $\forall\varepsilon > 0$. Для этого ε существует только конечное число $n(\varepsilon)$ точек η_i таких, что $f(\eta_i) > \frac{\varepsilon}{2}$. Кроме того, для функции Римана, очевидно, справедлива оценка: $|R(x)| \le 1$, $\forall x$.
Рассмотрим разбиение τ с диаметром $d_\tau < \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4n(\varepsilon)}$. Составим для него интегральную сумму:

$$|\sigma_\tau(R,\xi)| = \left|\sum_{i=1}^{N} R(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \left|\sum\nolimits_1 R(\xi_i)\Delta x_i\right| + \left|\sum\nolimits_2 R(\xi_i)\Delta x_i\right|,$$

где первая сумма соответствует сегментам разбиения, в которых присут-

ствуют точки η_i, а вторая лишена их. Ясно, что в первой сумме не более $2n(\varepsilon)$ слагаемых[a]. Поэтому для первой суммы справедлива оценка:

$$\left|\sum\nolimits_1 R(\xi_i)\Delta x_i\right| \le 1 \cdot 2n(\varepsilon) \cdot \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Во второй сумме воспользуемся тем, что значения функции R не превосходят $\frac{\varepsilon}{2}$, а сумма всех отрезков разбиения, заведомо, не превосходит 1. Откуда получаем, оценку:

$$\left|\sum\nolimits_2 R(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum\nolimits_2 \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $d < \delta(\varepsilon)$ справедливо: $|\sigma_\tau(R,\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е.

$$\int\limits_0^1 R(x)\,dx = 0.$$

[a]Случай, когда все точки η_i являются точками разбиения, попарно непересекающихся отрезков.

Определение. Говорят, что *множество* $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$ *имеет лебегову меру нуль*, если $\forall \varepsilon > 0$ множество $\mathbf{E}$ можно заключить в не более, чем счётное объединение интервалов, суммарная длина которых меньше ε.

интегрируемая по Риману функция не может быть ''слишком разрывной''

Теорема 67. *(критерий Лебега интегрируемости функции по Риману).* Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда данная функция интегрируема тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет лебегову меру нуль.

4 Свойства интегрируемых функций

1°. (*интегрируемость сужения*) Пусть f – интегрируема на $[a,b]$ и $[a^*,b^*] \subset [a,b]$. Тогда f интегрируема и на $[a^*,b^*]$.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{x_i^*\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a^*,b^*]$. Дополним его до разбиения $\tau = \{x_i\}$ всего отрезка $[a,b]$ с диаметром $d_\tau = d_{\tau^*}$. Тогда:

$$\sum_{x_i^* \in \tau^*} \omega_i^*(f)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{x_i \in \tau} \omega_i(f)\Delta x_i{}^{a}, \quad \text{где } \omega_i^*(f) = \omega(f,[x_{i-1}^*, x_i^*]).$$

Для правой части, путём выбора надлежащего диаметра d_τ, последнего неравенства выполнено условие условие из критерия интегрируемости (т.к. f интегрируема на $[a,b]$), и следовательно оно выполнено и для левой части. Поэтому f – интегрируема на $[a^*,b^*]$. □

[a]Сумма изменяется путём добавления конечного числа неотрицательных слагаемых.

2°. (*аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования*) Пусть $a < c < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f интегрируема по отрезкам $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогда f – интегрируема на $[a,b]$, причём

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Доказательство. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть τ', τ'' – такие разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, что выполнены условия:

$$\overline{S}_{\tau'}(f) - \underline{s}_{\tau'}(f) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \overline{S}_{\tau''}(f) - \underline{s}_{\tau''}(f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть далее $\tau = \tau' \cup \tau''$ – разбиение $[a,b]$. Понятно, что для него:

$$\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) = \left(\overline{S}_{\tau'}(f) - \underline{s}_{\tau'}(f)\right) + \left(\overline{S}_{\tau''}(f) - \underline{s}_{\tau''}(f)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По следствию 1 из критерия интегрируемости, получаем, что f – интегрируема на $[a,b]$
Пусть теперь τ – произвольное разбиение $[a,b]$, содержащее точку c. Тогда

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{[x_{k-1},x_k]\subset[a,c]} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{[x_{k-1},x_k]\subset[c,b]} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

При переходе к пределу при $d_\tau \to 0$, получим $(*)$. □

Зам. Положив $\int_a^a f(x)\,dx := 0$ и $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$ убеждаемся, что равенство $(*)$ справедливо при любом расположении точек a, b, c для функции f, интегрируемой на отрезке, содержащем эти точки.

***Следствие* 1.** Если функция f интегрируема на отрезке, содержащем точки a_0, a_1,

…, a_n, то

$$\int\limits_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx + \int\limits_{a_n}^{a_0} f(x)\,dx = 0.$$

Доказательство. Доказательство индукцией по числу n. $\square$

3°. (*линейность интеграла*) Если f и g – интегрируемы на $[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f \pm \mu g$ также интегрируема на $[a,b]$, причём

$$\int\limits_a^b \big(\lambda f(x) \pm \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Получается предельным переходом при $d_\tau \to 0$ в равенстве для интегральных сумм:

$$\sigma_\tau(\lambda f \pm \mu g, \xi) = \lambda \sigma_\tau(f,\xi) \pm \mu \sigma_\tau(g,\xi).$$ [a]

$\square$

[a] предел правой части существует по условию утверждения.

4°. (*интегрируемость произведения*) Если f и g – интегрируемы на $[a,b]$, то и их произведение $f \cdot g$ также интегрируемо на $[a,b]$.

Доказательство. Т.к. f и g интегрируемы на $[a,b]$, то они ограничены на нём. Поэтому, $\exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M,\ |g(x)| \leqslant M,\ \forall x \in [a,b]$. Тогда

$$\big|(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(y)\big| = \big|f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)\big| \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \big|f(x) - f(y)\big| + M \cdot \big|g(x) - g(y)\big|.$$

Следовательно, $\omega_k(f\cdot g) \leqslant M \cdot \omega_k(f) + M \cdot \omega_k(g)$, и

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f\cdot g)\Delta x_k \leqslant M \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k}_{\xrightarrow[d_\tau \to 0]{} 0} + M \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\Delta x_k}_{\xrightarrow[d_\tau \to 0]{} 0} \xrightarrow[d_\tau \to 0]{} 0.$$

То есть, произведение $f \cdot g$ интегрируемо на $[a,b]$.

$\square$

5°. (*монотонность интеграла*) Если $a < b$, а функции f и g – интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Другими словами, неравенства можно интегрировать.

Доказательство. Для доказательства нужно перейти к пределу в неравенстве $\sigma_\tau(f,\xi) \leqslant \sigma_\tau(g,\xi)$. $\square$

***Следствие* 2.** Если $\forall x \in [a,b]$ выполнено: $f(x) \geqslant 0$, то и $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Утверждение 4.1. Пусть $f \in C[a,b]$ и $f \geqslant 0$ на $[a,b]$[a] и $\exists x_0 \in [a,b]$, такое что $f(x_0) > 0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

[a]т.е. $f(x) \geqslant 0$ для $\forall x \in [a,b]$.

Доказательство. Пусть $f(x_0) = \gamma > 0$. Тогда $\exists[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\beta > \alpha$, на котором $f \geqslant \dfrac{\gamma}{2}$. В силу монотонности интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \overbrace{\int\limits_a^\alpha f(x)\,dx}^{\geqslant 0} + \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx + \overbrace{\int\limits_\beta^b f(x)\,dx}^{\geqslant 0} \geqslant 0 + \frac{\gamma}{2}(\beta-\alpha) + 0 > 0$$

$\square$

6°. (*интегрируемость модуля*) Если f – интегрируема на $[a,b]$, то и $|f|$ интегрируем на $[a,b]$. Причём справедлива оценка:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.^{a} \qquad (**)$$

[a]Неравенство $(**)$ верно при $a < b$. Если от этого требования отказаться, надо записать: $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right|$

Доказательство. Используем оценку: $\big||f(x)|-|f(y)|\big| \leqslant |f(x)-f(y)|$, откуда $\omega_k(|f|) \leqslant \omega_k(f)$ и

$$\sum_{k=1}^n \omega_k(|f|)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^n \omega_k(f)\Delta x_k \xrightarrow[d_\tau \to 0]{} 0,$$

т.к. f – интегрируема на $[a,b]$. Поэтому $|f|$ – интегрируем на $[a,b]$.

Оценка $(**)$ получается предельным переходом из соответствующей оценки для интегральных сумм Римана:

$$|\sigma_\tau(f,\xi)| = \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\,\Delta x_k.$$

$\square$

Интегрируемость $|f|$ на $[a,b]$, вообще говоря, не влечёт интегрируемость самой функции f на этом отрезке. Например,

$$\widetilde{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases} \implies \int\limits_a^b |\widetilde{D}(x)|\,dx = \int\limits_a^b 1\,dx = b-a, \text{ **но** } \nexists \int\limits_a^b \widetilde{D}(x)\,dx.$$

Рассмотрим далее следующий пример:

Интегрируемость композиции.

$$R(x) = \begin{cases} 1/n, & \textbf{если } x = m/n \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \textbf{если } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & \textbf{если } x \neq 0, \\ 0, & \textbf{если } x = 0. \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \circ R(x) = \begin{cases} 1, & \textbf{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \textbf{если } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}; \end{cases} = D(x) \notin \mathfrak{R}.$$

То есть, композиция двух интегрируемых функций может быть не интегрируемой.

Определение. Говорят, что функция f *удовлетворяет условию Липшица на отрезке* $[a, b]$, если

$$\exists C^{a} > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C\,|x_1 - x_2|.$$

[a] C называется *константой Липшица.*

Теорема 68. *(интегрируемость композиции функций).* Пусть f интегрируема на $[a, b]$. $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, а функция g удовлетворяет условию Липшица (с константой $C > 0$) на отрезке $[m, M]$. Тогда $g \circ f$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство. **Зафиксируем** $\forall \varepsilon > 0$. **Т.к.** $f \in \mathfrak{R}[a, b]$, **то** $\exists \tau = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ **– разбиение отрезка** $[a, b]$ **такое, что** $\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) < \dfrac{\varepsilon}{C}$.
Пусть далее M_k, m_k, M_k^*, m_k^* **– точные грани на отрезке** $[x_{k-1}, x_k]$ **функций** f **и** $g \circ f$ **соответственно. Тогда** $\forall \xi_1, \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k]$ **выполнено**

$$g\big(f(\xi_1)\big) - g\big(f(\xi_2)\big) \leqslant \big|g\big(f(\xi_1)\big) - g\big(f(\xi_2)\big)\big| \leqslant C\,|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leqslant C\,(M_k - m_k).$$

Поскольку ξ_1 **и** ξ_2 **выбираются произвольно, то полученное неравенство гарантирует выполнимость соотношения** $M_k^* - m_k^* \leqslant C\,(M_k - m_k)$**, откуда:**

$$\overline{S}_\tau(g \circ f) - \underline{s}_\tau(g \circ f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*)\Delta x_k \leqslant C \cdot \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

□

Отметим, что функция, удовлетворяющая условию Липшица является непрерывной. Обратное неверно. Функция $\sqrt[3]{x} \in C[0, 1]$**. Однако она не удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица (см. [НФ], с.344). Тем не менее справедливо следующее:**

Утверждение 4.2. Пусть: $f \in \mathfrak{R}[a, b]$,

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f(x),$$

$g \in \mathcal{C}[m, M]$. Тогда $g \circ f \in \mathfrak{R}[a, b]$.

Доказательство.
Доказательство см., например, в [СХ], с.29-30, или [НФ], с.345;

□

Если же $g \in \mathfrak{R}$, $f \in \mathcal{C}$, то композиция $g \circ f$ может быть не интегрируемой. См. файл Is the Composite Function Integrable. pdf

5 Теоремы о среднем. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.

Теорема 69. *(первая теорема о среднем).* Пусть функции $f, g \in \mathfrak{R}[a,b]$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Функция g не меняет на данном отрезке свой знак. Тогда $\exists \mu \in [m, M]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Если $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b] : \mu = f(\xi)$.

Доказательство. **Пусть для определённости, $g \geqslant 0$ на $[a,b]$. Тогда для $\forall x \in [a,b]$ выполнено: $m \cdot g(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant M \cdot g(x)$. Отсюда, в силу монотонности интеграла:**

$$m \int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Пусть сначала $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$. Тогда из верхнего неравенства $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, и подходит любое μ. Если же $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$, то из того же неравенства:

$$m \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Поэтому, взяв $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$, получаем требуемое.

Существование точки $\xi \in [a,b] : f(\xi) = \mu$ вытекает из того, что непрерывная на отрезке функция достигает $\min$ и $\max$ значения, так и любого промежуточного значения между ними $(m < \mu < M)$. □

Зам. **Можно доказать, что в условиях теоремы точка ξ найдётся на интервале (a,b). См., например, [Бесов], том I.**

Определение. Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Тогда на этом отрезке определена функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $a < x \leqslant b$, называемая *интегралом с переменным верхним пределом.* Аналогично может быть введена функция $G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$, $a \leqslant x < b$, называемая *интегралом с переменным нижним пределом.*

Займёмся далее установлением связи между определённым и неопределённым интегралами.

Теорема 70. *(об интеграле с переменным верхним пределом).* Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Тогда справедливы следующие утверждения:

теорема Барроу

1. функция F непрерывна на $[a,b]$;
2. если, кроме того, f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то F дифференцируема в точке x_0, и $F'(x_0) = f(x_0)$[a].

[a]Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то под производной $F'(x_0)$ понимается односторонняя производная.

Доказательство. **1. Поскольку** $f \in \mathfrak{R}[a,b]$**, то она ограничена на** $[a,b]$**, т.е.** $\exists M > 0 : \forall t \in [a,b] \Rightarrow |f(t)| \leqslant M$**. Пусть** $x_0, x_0 + \Delta x \in [a,b]$**. Тогда**

$$\left|F(x_0+\Delta x) - F(x_0)\right| = \left|\int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,dt\right|^{a} \leqslant M \cdot \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right| = M \cdot |\Delta x| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0.$$

2. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$**. Т.к.** $f \in C(x_0)$**, то**

$$\exists \delta(\varepsilon) : \forall t \in [a,b],\ |t - x_0| < \delta(\varepsilon) \implies \left|f(t) - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $|\Delta x| < \delta(\varepsilon)$ **и** $x_0 + \Delta x \in [a,b]$**, получаем:**

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}\big(f(t) - f(x_0)\big)dt\right| \leqslant \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t) - f(x_0)|dt < \frac{\varepsilon}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \varepsilon.$$

Поэтому, $F'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$**.** □

[a]если считать, что $\Delta x > 0$, то внешний модуль можно не писать.

Аналогично получаем: $G'(x_0) = -f(x_0)$

***Следствие* 1.** Функция, непрерывная на промежутке, имеет на нём первообразную.

Доказательство. **Пусть** $f \in C(<a,b>)$**,** $F(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)dt$**, где** $x_0 \in <a, b>$**. Тогда, если** $x \in <a,b>$**,** $x \geqslant x_0$**, то** $F'(x) = f(x)$ **по теореме Барроу для интеграла с переменным верхним пределом, а если** $x \leqslant x_0$**, то** $F(x) = -\int\limits_x^{x_0} f(t)\,dt$ **и**

$$F'(x) = f(x)$$

по формуле для интеграла с переменным нижним пределом. □

Теорема 71. *(вторая теорема о среднем).* Пусть $f, \varphi \in \mathfrak{R}[a,b]$, если

1. φ – монотонная на $[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$:
$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx;$$
2. φ не возрастает на $[a,b]$ и $\varphi \geqslant 0$ на $[a,b]$, то $\exists \xi_1 \in [a,b]$:
$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int\limits_a^{\xi_1} f(x)\,dx;$$
3. φ не убывает на $[a,b]$ и $\varphi \geqslant 0$ на $[a,b]$, то $\exists \xi_2 \in [a,b]$:
$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b)\int\limits_{\xi_2}^b f(x)\,dx.$$

формулы Бонне.

Доказательство. **Докажем 2. Пусть $\varphi \searrow$ на $[a,b]$ и $\varphi \geqslant 0$ на $[a,b]$. Если $\varphi(a) = 0$, то $\varphi \equiv 0$ на $[a,b]$ и утверждение очевидно. Пусть $\varphi(a) > 0$. Рассмотрим разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ на n равных частей.**

Обозначим: $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^n \varphi(x_{k-1}) \cdot \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$. Тогда:

$$\left|\sigma_n - \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\sum_{k=1}^n \varphi(x_{k-1})\cdot\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\varphi(x)dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \big(\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x)\big) f(x)dx\right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \big|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x)\big| \cdot \underbrace{\big|f(x)\big|}_{\leqslant M} dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n M \cdot \sup_{[x_{k-1},x_k]} \big|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x)\big| \cdot \underbrace{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} dx}_{=(b-a)/n} = \{\varphi \searrow\} =$$

$$= M\,\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \big(\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x_k)\big) = M\,\frac{b-a}{n}\big(\varphi(a) - \varphi(b)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx$.

Пусть теперь $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. $f \in \mathfrak{R}[a,b] \Longrightarrow F \in C[a,b] \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in [a,b]$: $\inf\limits_{[a,b]} F(x) = F(\alpha)$, $\sup\limits_{[a,b]} F(x) = F(\beta)$. Далее получаем:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \varphi(x_{k-1})\left(\int\limits_a^{x_k} f(x)dx - \int\limits_a^{x_{k-1}} f(x)dx\right) = \sum_{k=1}^n \varphi(x_{k-1})\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) =$$

Преобразование Абеля.

$$= \sum_{k=1}^n \varphi(x_{k-1})F(x_k) - \sum_{k=1}^n \varphi(x_{k-1})F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \varphi(x_{k-1})F(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k)F(x_k) =$$

$F(x_0) = F(a) = 0$, $F(x_n) = F(b)$.

$$= \varphi(x_{n-1})F(b) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)\big(\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x_k)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(x_{n-1})F(\beta) + \sum_{k=1}^{n-1} F(\beta)\big(\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x_k)\big) = \varphi(x_0)F(\beta) = \varphi(a)F(\beta).$$

Аналогично доказывается, что $\sigma_n \geqslant \varphi(a)F(\alpha)$. Откуда, т.к. $\varphi(a) > 0$ получим: $F(\alpha) \leqslant \dfrac{\sigma_n}{\varphi(a)} \leqslant F(\beta)$. Перейдём к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве: $F(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{\varphi(a)} \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqslant F(\beta)$. Далее, т.к. $F \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$F(\xi) = \frac{1}{\varphi(a)} \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \Longleftrightarrow \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int\limits_a^\xi f(t)dt \Longleftrightarrow \mathbf{2.}$$

Для доказательства пункта 3. сделаем в последнем равенстве замену $f_1(x) = f(-x)$, $\varphi_1(x) = \varphi(-x)$, и заметим, что если $\varphi(x)\nearrow$, то $\varphi(-x)\searrow$:

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{-b}^{-a} f(-x)\varphi(-x)dx = \{\mathbf{2.}\} = \varphi(b)\int\limits_{-b}^{-\xi} f(-x)dx = \varphi(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx.$$

Для доказательства 1. положим в 2. $\varphi(x) = \overbrace{\varphi(x) - \varphi(b)}^{\geqslant 0}$, если $\varphi\searrow$ или положим в 3. $\varphi(x) = \overbrace{\varphi(x) - \varphi(a)}^{\geqslant 0}$, если $\varphi\nearrow$. Действительно, пусть $\varphi\searrow$, тогда:

$$\big(\varphi(a) - \varphi(b)\big)\int\limits_a^\xi f(x)dx \overset{\mathbf{2.}}{=} \int\limits_a^b f(x)\big(\varphi(x) - \varphi(b)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx - \varphi(b)\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Откуда получаем:

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx - \varphi(b)\int\limits_a^\xi f(x)dx + \varphi(b)\int\limits_a^b f(x)dx =$$

$$= \varphi(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx + \varphi(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx.$$

$\square$

6 Формула Ньютона-Лейбница. Обобщения

Следующая теорема – формула Ньютона-Лейбница – одно из важнейших утверждений во всем курсе математического анализа. Она устанавливает связь определённого интеграла с неопределённым и позволяет вычислить определённый интеграл от функции, первообразная которой известна.

Рассмотрим следующий пример. Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^2 x^2dx$. Интегрируемость этой функции вытекает из её непрерывности на отрезке $[-1,2]$. Следовательно, для вычисления предела интегральных сумм можно выбрать любую последовательность разбиений с диаметром стремящимся к нулю, и любые отмеченные точки ξ_k. Будем делить отрезок $[-1,2]$ на n равных частей, а в качестве точек ξ_k выбирать правые точки разбиения.

Как мы видим, вычисление определённых интегралов «по определению» весьма трудоёмко.

Имеем:

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx = \lim_{d_\tau \to 0} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \cdot \Delta x_k = \left\{ \Delta x_k = \frac{3}{n};\ \xi_k = x_k = -1 + \frac{3k}{n},\ k = 1, \ldots, n \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-1 + \frac{3k}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{6k}{n} + \frac{9k^2}{n^2}\right) \cdot \frac{3}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{18}{n^2} \cdot \frac{(n+1)n}{2} + \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = 3.$$

Теорема 72. *(формула Ньютона-Лейбница).* Пусть f интегрируема на отрезке $[a,b]$, F – первообразная функции f на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F\Big|_a^b. \tag{Н-Л}$$

Возможно, более правильное название данной теоремы - формула Барроу. См. [Арнольд].

Доказательство. **Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n$ – равномерное разбиение отрезка $[a,b]$. Преобразуем правую часть равенства (Н-Л):**

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) =$$

$$= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \ldots + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big).$$

Т.к. функция F дифференцируема на $[a,b]$[a], то к каждому слагаемому из последней суммы применима формула Лагранжа о конечных приращениях:

$$\exists \xi_k^{(n)} \in (x_{k-1}, x_k) \,:\, F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k^{(n)})(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k.$$

Откуда следует, что $F(b) - F(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k$. Т.к. $f \in \Re[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)})\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \big(F(b) - F(a)\big) = F(b) - F(a).$$

□

[a] Это вытекает из того, что F – первообразная функции f на $[a,b]$.

Теорема 72*. Пусть $f \in C[a,b]$ и Φ – её **произвольная** первообразная на этом отрезке. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. **Функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной функции f на $[a,b]$. Поэтому, $F(x) = \Phi(x) + C$, $a \leqslant x \leqslant b$, т.е.**

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C.$$

Отсюда, при $x = a$ получаем: $0 = \Phi(a) + C \Rightarrow C = -\Phi(a)$. При $x = b$:

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□

Попробуем применить формулу Ньютона-Лейбница к интегралу $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2}$:

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2} = -1/2 - 1 = -3/2.$$

Очевидно, что данный результат неверный, т.к. получено отрицательное число при интегрировании строго положительной функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Почему? В этом примере были нарушены два условия теоремы 13:

1. **$f \notin \Re[-1,2]$, т.к. она не ограничена на этом отрезке;**
2. **Равенство $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$ не имеет смысла в точке $x = 0$.**

Утверждение 6.1. *(обобщения формулы Ньютона-Лейбница).*

1. Пусть $f \in \Re[a,b]$, $F \in C[a,b]$, F – первообразная функции f на $[a,b]$ за исключением конечного множества точек. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. **Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1}$ – все точки интервала (a,b), в которых нарушается равенство $F' = f$. Пусть также $t_0 = a$, $t_m = b$. Получаем:**

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx \overset{a}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{t_{k-1}+\varepsilon}^{t_k-\varepsilon} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \Big(F(t_k - \varepsilon) - F(t_{k-1} + \varepsilon)\Big) \overset{b}{=} F(t_k) - F(t_{k-1}).$$

Далее воспользуемся аддитивностью определённого интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \big(F(t_k) - F(t_{k-1})\big) = F(b) - F(a).$$

□

[a] непрерывность интеграла с переменными пределами интегрирования.
[b] Непрерывность функции F.

Условие $F \in C[a,b]$ существенно. Для функций $f(x) = 0$, $F(x) = \mathrm{sgn} x$ равенство $F'(x) = f(x)$ выполнено везде, кроме точки $x = 0$, но формула Ньютона Лейбница на отрезке $[-1,1]$ неверна:

$$0 = \int\limits_{-1}^{1} 0dx = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \neq F(x)\Big|_{-1}^{1} = 2$$

2. Пусть интегрируемая на отрезке $[a,b]$ функция f терпит разрывы первого рода во внутренних точках $c_i \in (a,b)$, $i = \overline{1,p}$, и, может быть, в точках a и b. Пусть, кроме того, равенство $F'(x) = f(x)$ за исключением точек разрыва. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{k=1}^{p} \big(F(c_k - 0) - F(c_k + 0)\big).$$

Зам. **Формулу Ньютона-Лейбница можно переформулировать так. Пусть F – дифференцируема на $[a,b]$. $F' \in \Re[a,b]$. Тогда**

$$\int\limits_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

В этой формулировке также можно разрешить функции $F \in C[a,b]$ не иметь производной на конечном множестве точек.

Зам. **Условие интегрируемости на $[a,b]$ функции F' в предыдущем замечании опустить нельзя, т.к. производная может быть и не интегрируемой, и тогда интеграл Римана от неё не имеет смысла.**

Можно ли утверждать, что всякая функция, имеющая первообразную на отрезке, обязательно должна быть интегрируема на нём?

Возьмём в качестве первообразной функцию:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad \text{для неё} \quad F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

Функция F может рассматриваться в качестве первообразной для своей производной на каком-либо отрезке, содержащем точку 0 (скажем, на $[-1,1]$). Полученная на $[-1,1]$ производная $F' = f$ неограничена в любой окрестности точки 0. Следовательно, она не интегрируема на $[-1,1]$, и формула Ньютона-Лейбница для неё не выполнена. Данный пример показывает, что интеграл Римана не всегда решает задачу восстановления функции по её производной.

Функция Римана R интегрируема на любом конечном отрезке. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x R(t)\,dt$, где $x \in (a,b]$. В силу интегрируемости функции R заключаем, что функция Φ определена на $[a,b]$, и т.к. $\forall x \in (a,b]$ имеем $\int\limits_a^x R(t)dt = 0$, то $\Phi \equiv 0$. Следовательно, $\Phi' \equiv 0 \neq R$. Т.е. построенная функция Φ не есть первообразная для функции R на $[a,b]$. Это объясняется тем, что функция Римана не является непрерывной на $[a,\ b]$.

Можно ли утверждать, что всякая функция, интегрируемая на отрезке, обязательно должна иметь первообразную на нём?

Более простым примером интегрируемой функции, не имеющей первообразную, является функция $f(x) = \operatorname{sgn}\boldsymbol{x}$.

Попробуем вычислить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{1+x^2}{1+x^4}dx$. Найдём первообразную:

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx \overset{x\neq 0}{=} \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C,\ x \neq 0.$$

Если подставить эту первообразную в формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0.$$

Что, понятное дело, неверно, т.к. полученная нами первообразная разрывна

в нуле. Требовалось, либо найти непрерывную первообразную

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\operatorname{arctg}(1 + x\sqrt{2}) + \operatorname{arctg}(1 - x\sqrt{2})\Big),$$

либо разбить исходный интеграл на два: $\int\limits_{-1}^{1} = \int\limits_{-1}^{0} + \int\limits_{0}^{1} = \ldots = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$**.**

7 Методы интегрирования

Теорема 73. *(интегрирование по частям).* Пусть функции u, v – дифференцируемы на $[a,b]$, а $u', v' \in \mathfrak{R}[a,b]$. Тогда справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Доказательство. Заметим, что из условий теоремы, и соответствующих утверждений из предыдущих пунктов, следует, что функции $u'v$ и uv' – интегрируемы на $[a,b]$. Следовательно и производная $(u\,v)' = u'v + uv'$ – интегрируема на $[a,b]$. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \int\limits_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Остаётся перенести второе слагаемое из левой части в правую. □

Иногда формулу интегрирования по частям записывают в виде:

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du,$$

трактуя $u'(x)dx$ и $v'(x)dx$ как дифференциалы.

$$\int\limits_1^2 \ln x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{matrix}\right\} = x\,\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x}{x}\,dx = 2\ln 2 - 1.$$

Теорема 74. *(замена переменной в определённом интеграле).* Пусть $f \in C[a,b]$; $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, φ – дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, $\varphi' \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$. Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)^{a}\,\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(ЗП)}$$

[a] $(f\circ\varphi)(t) = f\big(\varphi(t)\big)$

Доказательство. Поскольку, по теореме о непрерывности композиции функций, $f\circ\varphi \in C[\alpha,\beta] \subset \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$, $\varphi' \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$, то $(f\circ\varphi)\,\varphi' \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$, кроме того $f \in \mathfrak{R}\big[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)\big]$.
$f \in C$ следовательно существует первообразная F такая, что $F' = f$ на $[a,b]$.

$$(F\circ\varphi)' \overset{a}{=} (F'\circ\varphi)\cdot\varphi' = (f\circ\varphi)\cdot\varphi' \text{ на } [\alpha,\beta].$$

Поэтому, $F\circ\varphi$ – первообразная для $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$. Применяя к ним формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int\limits_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,dt = \big(F\circ\varphi\big)(t)\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(x)\Big|_{x=\varphi(\alpha)}^{x=\varphi(\beta)} = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

□

[a] $\big(F(\varphi(t))\big)' = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$

Замена переменной в интеграле может применяться, как слева направо, так и справа налево.

Зам. **Пусть в интеграле** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ **производится замена** $x = \varphi(t)$**. В этом случае,** dx **трактуется как дифференциал:** $dx = \varphi'(t)dt$**. Требуется поменять пределы интегрирования** $a \to \alpha$**,** $b \to \beta$**, где** $\varphi(\alpha) = a$**,** $\varphi(\beta) = b$**. Получаем:**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta \big(f\circ\varphi\big)(t)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

В отличии от неопределённого интеграла, при вычислении определённого, не надо возвращаться к старой переменной, но нужно поменять пределы интегрирования.

Зам. **В условиях теоремы некоторые значения** $\varphi(t)$ **могут не принадлежать отрезку** $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$**, но важно, чтобы все они принадлежали отрезку** $[a, b]$**, на котором определена функция** f**. Кроме того, нижний предел интегрирования не обязательно меньше верхнего. Например, если** $\varphi\downarrow$ **,** $\alpha < \beta$**, то** $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$**.**

Зам. **В теореме о замене переменной на функции** f **и** φ **можно накладывать другие ограничения. Например, если функция** φ **– дифференцируема и строго монотонна на** $[\alpha, \beta]$**, и** φ' **интегрируема на** $[\alpha, \beta]$**, а** f **интегрируема на** $\big[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\big]$ **(или на** $\big[\varphi(\beta), \varphi(\alpha)\big]$**, если** $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$**), то выполнено равенство (ЗП)**

Доказательство этого утверждения см., например, в [Зверович II], с.74-76.

В этой формулировке на функцию f **накладываются более мягкие условия, а на функцию** φ **более строгие.**

$$\int\limits_0^{\sqrt3} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \left\{\begin{aligned} 1+x^2 &= t,\\ 2xdx &= dt,\\ x = 0 &\to 1 = t,\\ x = \sqrt3 &\to 4 = t \end{aligned}\right\} = \frac12\int\limits_1^4 (t-1)\sqrt t\,dt = $$
$$= \frac12\left(\frac25 t^{5/2} - \frac23 t^{3/2}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{58}{15}.$$

8 Интегральный член в формуле Тейлора.

Теорема 75. *(формула Тейлора с остатком в интегральной форме).* Пусть $n = 0, 1, 2, \ldots$,

остаточный член в форме К. Якоби.

$f \in C^{(n+1)}(\langle a, b \rangle)$, $x_0, x \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x - t)^n \, dt.$$

Доказательство. **Воспользуемся методом математической индукции.**

При $n = 0$ **получаем:** $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) dt$ **– формула Ньютона-Лейбница.**

Пусть утверждение верно для некоторого $(n-1) \geqslant 0$**. Т.е. выполнено:**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \cdot (x - t)^{n-1} \, dt.$$

Докажем его для n**:**

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \, dt = -\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t) d\left(\frac{(x-t)^n}{n!}\right) = -\frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n \, dt = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n \, dt.$$

Откуда,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n dt.$$

□

Зам. **По первой теореме о среднем** ($f^{(n+1)} \in C$, $(x-t)^n \geqslant 0$, $t \in [x_0, x]$) **в условиях теоремы Тейлора с остатком в интегральной форме найдётся** $\xi \in (x_0, x)$ **:**

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n \, dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \, dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

получили остаточный член в форме Лагранжа.

Лагранжева форма остатка следует из интегральной (правда при более жёстких условиях на функцию f**). Главное преимущество интегральной формы это то, что она не содержит неизвестной точки** ξ**.**

Несобственные интегралы

ГЛАВА

XI

1 Определения. Вводные соображения

При построении определённого интеграла Римана (или собственного интеграла) $\int\limits_a^b f(x)dx$ было существенно выполнение следующих условий:

1. **отрезок $[a,b]$ конечен, т.е. $-\infty < a < b < +\infty$;**
2. **функция f ограничена на $[a,b]$;**
3. **функция f непрерывна почти всюду на $[a,b]$.**

Если не выполнено условие 1., то по меньшей мере один из отрезков разбиения $[a,b]$ будет бесконечным, и поэтому теряет смысл интегральная сумма $\sigma_\tau(f,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. При невыполнении условия 2., не выполняется необходимое условие интегрируемости по Риману. Если не выполнено 3., то не выполняется условие из критерия Лебега.

> **Далее считаем, что условие 3. выполнено.**

Определение. Интегралы, для которых не выполнено условие **1.** или **2.** называются *несобственными интегралами.* Обозначение такое же, как и для интегралов Римана.

Определение. *Особыми точками несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ будем называть все точки отрезка $[a,b]$, в окрестностях которых функция f не ограничена. К особым точкам причисляют также точки $\pm\infty$.

Определение 3. Функция f называется *локально интегрируемой (по Риману) на промежутке* $\mathbf{E}$, если f – интегрируема (по Риману) на каждом отрезке, содержащемся в $\mathbf{E}$. Обозначение $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}(\mathbf{E})$.

Определение 4. Пусть $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a,+\infty)\big)$ (т.е. $f \in \mathfrak{R}\big([a,A)\big)$, $\forall\ A > a$). Предел (*частичного*) интеграла $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ (конечный или бесконечный) при $A \to +\infty$ называют *несобственным интегралом первого рода от функции f по лучу* $[a,+\infty)$. Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx$.

Если этот предел существует и конечен, говорят, что *несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*, а функцию f называют *интегрируемой на* $[a,+\infty)$ (*в несоб-*

ственном смысле). **Обозначение:** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \to$. В противном случае, про интеграл говорят, что он *расходится*, а функция f *не интегрируема*. **Обозначение:** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \not\to$.

Интеграл от функции f по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ определяется как: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\ A'\to-\infty}} \int\limits_{A'}^{A} f(x)\,dx$, при независимом стремлении $A \to +\infty$, $A' \to -\infty$.

Определение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Определение 5. Пусть $f \in \Re_{\ell oc}\big([a,b)\big)$ (т.е. $f \in \Re[a, b-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon > 0$). Предел интеграла $\int\limits_a^B f(x)\,dx$ (конечный или бесконечный), при $B \to b-0$ называют *несобственным интегралом второго рода от функции f по промежутку $[a,b)$*. **Обозначение:** $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{B\to b-0} \int\limits_a^B f(x)dx$.

Иногда пишут: $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0+0$.

Суть этого определения состоит в том, что в любой окрестности конечной точки функция f может оказаться неограниченной.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла с особенностью на левой границе интегрирования: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{A\to a+0} \int\limits_A^b f(x)dx$.

В случае, когда этот предел существует и конечен, говорят, что *несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится*, а (неограниченную) функцию f называют *интегрируемой на* $[a,b]$ (*в несобственном смысле*) В противном случае, про интеграл говорят, что он *расходится*, а функция f *не интегрируема*.

Если точка c, в которой функция f не ограничена находится внутри отрезка $[a,b]$, тогда:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to0+0\\ \varepsilon_2\to0+0}} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \right),$$

при одновременном, но независимом стремлении к нулю положительных чисел ε_1 и ε_2.

При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$?

$$\int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A, & \alpha \neq 1, \\ \ln x\big|_1^A, & \alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$?

$$\int\limits_A^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_A^1, & \alpha \neq 1, \\ \ln x\big|_A^1, & \alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{A\to0+0} \int\limits_A^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geqslant 1. \end{cases}$$

Т.к. исследование несобственных интегралов первого и второго родов проходит по аналогичным схемам, то введём общее определение.

Определение 6. Пусть $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a,\omega)\big)$. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)\,dx := \lim\limits_{\substack{A\to\omega\\ A\in[a,\omega)}} \int_a^A f(x)\,dx$, и этот предел кладём равным данному интегралу.

Символ $\to \omega$ употребляется для того, чтобы выделить (единственную) особенность.

Если $-\infty \leqslant \omega_1 < \omega_2 \leqslant +\infty$, $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big((\omega_1,\omega_2)\big)$, то

$$\int\limits_{\to\omega_1}^{\to\omega_2} f(x)\,dx := \int\limits_{\to\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\to\omega_2} f(x)\,dx.$$[a]

Если оба несобственных интеграла правой части сходятся, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_{\to\omega_1}^{\to\omega_2} f(x)\,dx$. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то расходится и левый интеграл.

[a]Выбор точки c произволен.

Пусть $-\infty \leqslant \omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_n \leqslant +\infty$ – множество особых точек несобственного интеграла $\int\limits_{\to\omega_0}^{\to\omega_n} f(x)\,dx$. Тогда:

$$\int\limits_{\to\omega_0}^{\to\omega_n} f(x)\,dx := \int\limits_{\to\omega_0}^{\to\omega_1} f(x)\,dx + \int\limits_{\to\omega_1}^{\to\omega_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{\to\omega_{n-1}}^{\to\omega_n} f(x)\,dx,$$

он считается сходящимся (расходящимся), если сходится все (не все) несобственные интегралы правой части.

Утверждение 1.1. *(свойства несобственных интегралов).* Пусть $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$ и $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a,\omega)\big)$, тогда

1. если $\omega \in \mathbb{R}$, то значения интеграла $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$, понимаемого, как в собственном, так и в несобственном смысле совпадают, т.е.

$$\int\limits_a^{\to\omega} f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{A\to\omega\\ A\in[a,\omega)}} \int_a^A f(x)\,dx = \int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$$

2. если $c \in [a,\omega)$, то $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)\,dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{\to\omega} f(x)dx$.
3. (замена переменной в несобственном интеграле): если

$$\varphi : [\alpha,\gamma) \mapsto [a,\omega)$$

– непрерывно дифференцируемое, строго монотонное отображение. Причём, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) \to \omega$, при $\beta \to \gamma$, $\beta \in [\alpha,\gamma)$. То несобственный интеграл от функции

$(f \circ \varphi)\varphi'$ на $[\alpha, \gamma)$ существует, и справедливо равенство:

$$\int\limits_{\alpha}^{\to\gamma} (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int\limits_{a}^{\to\omega} f(x) dx.$$

Замена переменной в собственном интеграле может привести к несобственному интегралу, и обратно.

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \left\{ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right\} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

4. (интегрирование по частям в несобственном интеграле): Если функции f и g – непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a, \omega)$ и $\exists \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} (f\,g)(x)$, то функции $f\,g'$ и $f'\,g$ одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, \omega)$, и в случае интегрируемости справедливо равенство:

$$\int\limits_a^{\to\omega} (f\,g')(x) dx = (f\,g)(x)\Big|_a^{\to\omega} - \int\limits_a^{\to\omega} (f'\,g)(x) dx,$$

где $(f\,g)(x)\Big|_a^{\to\omega} = \lim\limits_{\substack{x\to\omega \\ x\in[a,\omega)}} (f\,g)(x) - (f\,g)(a)$

Доказательство.

1. **Следует из непрерывности интеграла с переменным верхним пределом $F(A) = \int\limits_a^A f(x) dx$ на отрезке $[a, \omega]$, на котором функция f интегрируема.**
2. **Если $A \in (c, \omega)$,[a] то $\int\limits_a^A f(x) dx = \int\limits_a^c f(x) dx + \int\limits_c^A f(x) dx$. При $A \to \omega$, $A \in [a, \omega)$ предел обеих частей последнего равенства существует или нет одновременно, т.е. несобственные интегралы $\int\limits_a^{\to\omega} f(x)\, dx$ и $\int\limits_c^{\to\omega} f(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно.**
3. **Следует из формулы $\int\limits_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x) dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$ замены переменной в определённом интеграле.**
4. **Для доказательства нужно устремить $A \to \omega$, $A \in [a, \omega)$ в формуле**

$$\int\limits_a^A (f\,g')(x)\, dx = (f\,g)(x)\Big|_a^A - \int\limits_a^A (f'\,g)(x)\, dx$$

интегрирования по частям в собственном интеграле.

□

[a] рано или поздно это произойдет, т.к. $A \to \omega$, $A \in [a, \omega)$, а c – фиксировано.

Зам. **С помощью подстановки $t = \dfrac{1}{\omega - x}$ несобственный интеграл второго рода с особенностью в точке ω приводится к несобственному интегралу первого рода.** При этом особенность второго рода преобразуется в особенность первого рода.

2 Исследование сходимости несобственных интегралов

Теорема 76. *(Критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода).* Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось *условие Коши*[a]:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists A_0(\varepsilon)>a:\forall A_1,A_2\geqslant A_0(\varepsilon)\Rightarrow\left|\int\limits_a^{A_1} f(x)dx-\int\limits_a^{A_2} f(x)dx\right|=\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

[a]Условие Коши для несобственных интегралов второго рода имеет вид:

$$\forall\varepsilon>0\;\exists\delta(\varepsilon)>0\;:\;\forall b_1,b_2,\,b-\delta<b_1<b_2<b\Rightarrow\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. **Пусть $F(A)=\int\limits_a^{A} f(x)dx$. Тогда по критерию Коши существования предела функции на бесконечности,**

$$\exists\lim_{A\to+\infty}F(A)<\infty\Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists A_0(\varepsilon)>a:\forall A_1,A_2\geqslant A_0(\varepsilon)\Rightarrow|F(A_1)-F(A_2)|=\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

□

Отрицание: (*условия Коши*): $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx\not\to\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow\;\exists\varepsilon_0>0:\forall A_0>a\;\exists A_1,A_2\geqslant A_0,\text{ для которых }\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

Критерий Коши часто используется для установления расходимости интегралов. Если существуют числовые последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, что $A_n,B_n>a$ и $A_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, $B_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$. Для которых $\int\limits_{A_n}^{B_n} f(x)dx\not\to 0$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Далее будем рассматривать признаки сходимости для несобственного интеграла первого рода.

Пусть

$$f:[a,+\infty)\mapsto\mathbb{R},\qquad f\geqslant 0\text{ и }f\in\mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a,+\infty)\big).\qquad(*)$$

В этом случае, (частичный) интеграл $F(A)=\int\limits_a^{A} f(x)dx$ является монотонно неубывающей функцией аргумента A.

Лемма. Пусть для функции f выполнены условия $(*)$. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(A) = \int\limits_a^{A} f(x)dx$ была ограничена сверху.

Доказательство. **В силу замечания, сделанного выше ($F \nearrow$), утверждение леммы вытекает из критерия сходимости монотонной функции.** $\square$

Теорема 77. *(признак сравнения).* Пусть

$$f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a, +\infty)\big) \text{ и } \forall x \geqslant a \implies 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство. **Из условий теоремы и неравенств для собственного интеграла Римана при $\forall A \geqslant a$ выполнено:**

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx \leqslant \int\limits_a^A g(x)dx = G(A).$$

Поскольку $F \nearrow$ и $G \nearrow$, то теорема следует из написанного неравенства и леммы. $\square$

***Следствие* 1**Пусть $f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a, +\infty)\big)$; $f, g \geqslant 0$, $f = \underline{O}(g)$, $x \to +\infty$. Тогда

1. если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \to$;
2. если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \not\to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \not\to$.

Доказательство. **1. Т.к. $f = \underline{O}(g)$, $x \to +\infty$, то $\exists \Delta > a$, $\exists C > 0$, что:**

$$f(x) \leqslant C\, g(x), \text{ при } \forall x > \Delta \implies \int\limits_\Delta^A f(x)dx \leqslant C \cdot \int\limits_\Delta^A g(x)dx,$$

т.е. остаток интеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$ – ограничен, если остаток интеграла $\int\limits_a^A g(x)dx$ – ограничен.
2. Если бы несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходился, то по 1. сходился бы и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, что неверно. $\square$

***Следствие* 2.** Пусть $f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a,+\infty)\big)$; $f, g \geqslant 0$, $f \asymp g$.[a] Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

[a] Т.е. $\exists C_1, C_2 > 0, \exists \Delta > a : C_1 f(x) \leqslant g(x) \leqslant C_2 f(x)$, $\forall x > \Delta > a$.

Теорема 78. *(признак сходимости в предельной форме).* Пусть $f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a,+\infty)\big)$; $f, g \geqslant 0$; $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$. Тогда справедливы утверждения:

1. если $0 < k < +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \to \Longleftrightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \to$;
2. если $k = 0$, то если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \to$;
3. если $k = +\infty$, то если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \not\to$, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \not\to$;

Доказательство.

1. Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in (0,+\infty)$**, то**

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \Delta(\varepsilon) : \forall x \geqslant \Delta(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon \overset{\varepsilon = \frac{k}{2} > 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{k}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \frac{3k}{2} \Longleftrightarrow \frac{k}{2}\cdot g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3k}{2}\cdot g(x).$$

Далее см. следствие 2.

2. если $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$**, то** $f = \bar{o}(g), x \to +\infty$ **и** $f(x) \leqslant g(x)$**,** $\forall x \geqslant \Delta$**. Далее см. теорему 2.**

3. если $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$**, то** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ **и** $f(x) \geqslant g(x)$**,** $\forall x \geqslant \Delta$**. Далее см. теорему 2.**

□

Теорема 79. *(частный признак сравнения).* **1.** Пусть $a > 0$, $f : [a,+\infty) \mapsto \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$, $\exists p \in \mathbb{R}$ и $\exists k, 0 < k < +\infty$, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(x^p f(x)\big) = k$, т.е. $f = O^*\left(\dfrac{1}{x^p}\right), x \to +\infty$. Тогда при $p > 1$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а при $p \leqslant 1$ – расходится.

2. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, и $f : [a,b) \mapsto \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$, $\exists p \in \mathbb{R}$ и $\exists k, 0 < k < +\infty$, что $\lim\limits_{x\to b-0} (b-x)^p f(x) = k$, т.е. $f = O^*\left(\dfrac{1}{(b-x)^p}\right), x \to b-0$. Тогда при $p < 1$ интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$ сходится, а при $p \geqslant 1$ – расходится.

Доказательство. Доказательство вытекает из теоремы 3 и поведения интегралов $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^p}dx$ **и** $\int\limits_a^{b} \dfrac{1}{(b-x)^p}dx$**, которые вычисляются явно при всех значениях параметра** p**.** □

Зам. **Последний признак сравнения относится к необходимым и достаточным условиям сходимости несобственного интеграла. Он даёт ответ о сходимости (расходимости) интеграла во всех случаях, когда применим.**

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}$. **Имеем,** $f(x) = O^*\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, **при** $x \to +\infty$, $f(x) = O^*\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)$, **при** $x \to 0+0$. **Следовательно, функция** f **несобственно интегрируема на** $[0,+\infty)$. **Однако** f **не является ограниченной на этом промежутке.**

2)

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{N} \end{cases} \Longrightarrow \int\limits_1^A f(x)dx = 0,\ \forall A > 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^A f(x)dx = 0.$$

Можно построить пример непрерывной **неограниченной функции** f **такой, что несобственный интеграл** $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ **сходится, см. [Виноградов].**

Рассмотрим далее несобственные интегралы от функций произвольного **знака.**

Зам. **В этом случае, ограниченность частичных интегралов является необходимым, но не достаточным условием сходимости. Например, несобственный интеграл** $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx$ **расходится, т.к. частичные интегралы** $\int\limits_0^A \cos x\, dx = \sin A$ **не имеют предела при** $A \to +\infty$.

Пусть $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $f \in \mathfrak{R}_{\ell oc}([a,b))$.

Определение 7. Говорят, что интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{\to b} |f(x)|\, dx$. **Обозначение:** $\int\limits_a^{\to b} f(x)\, dx \xrightarrow{\text{абс}}$.

Определение 8. Говорят, что интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится условно*, если сам он сходится, но интеграл $\int\limits_a^{\to b} |f(x)|\, dx$ расходится. **Обозначение:** $\int\limits_a^{\to b} f(x)\, dx \xrightarrow{\text{усл}}$.

Теорема 80. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то он сходится. При этом справедливо неравенство:

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Доказательство. **Применим критерий Коши сходимости несобственного интеграла к сходящемуся интегралу** $\int\limits_a^{+\infty} \left|f(x)\right| dx$**:**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0(\varepsilon) > a\ :\ \forall A_2 > A_1 \geqslant A_0(\varepsilon) \implies \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Далее, т.к. выполняется: $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx$**, то для тех же** A_1**,** A_2 **тем более справедливо:** $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$**. Откуда, в силу критерия Коши, вытекает сходимость интеграла** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$**.**

Докажем справедливость неравенства. Для $\forall A > a$ **имеем:**

$$-\int\limits_a^{A} |f(x)|dx \leqslant \int\limits_a^{A} f(x)dx \leqslant \int\limits_a^{A} |f(x)|dx.$$

Переходя к пределу при $A \to +\infty$ **в этом двойном неравенстве, получаем требуемое.**

$\square$

Обратим внимание на отличие этого свойства от аналогичного свойства интегралов Римана. Там из интегрируемости на сегменте $[a, b]$ **функции** $|f|$ **не вытекала, вообще говоря, интегрируемость функции** f**.**

3 Специальные признаки сходимости

Пусть функции $f, g \in \mathfrak{R}_{\ell oc}\big([a, +\infty)\big)$**. Исследуем сходимость интеграла:**

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx. \tag{$*$}$$

Теорема 81. *(признак Дирихле).* Пусть для функций f и g выполнены условия:

1. $\exists M > 0\ :\ \forall x > a\ \Rightarrow\ \left|\int\limits_a^{x} f(t)dt\right| \leqslant M;$
2. функция g монотонно стремится к 0 при $x \to +\infty$.

Тогда интеграл $(*)$ сходится.

Доказательство. **Не ограничивая общности считаем, что** $g \searrow 0$ **при** $x \to +\infty$**. Тогда**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0(\varepsilon) > a : \forall x \geqslant A_0(\varepsilon) \Longrightarrow 0 \leqslant g(x) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Для $\forall A_2 > A_1 \geqslant A_0(\varepsilon)$ применим вторую теорему о среднем:

$$\exists \xi \in [A_1, A_2] \ : \ \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\, g(x)\, dx \right| = \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot \left| \int_{A_1}^{\xi} f(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Остаётся применить критерий Коши. □

Признак Дирихле является лишь достаточным, **и поэтому не даёт ответа на вопрос о сходимости/расходимости несобственного интеграла в тех случаях, когда его условия не выполняются.**

Теорема 82. *(признак Абеля).* Пусть для функций f и g выполнены условия:

1. интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;
2. функция g монотонная и ограничена.

Тогда интеграл $(*)$ сходится.

Доказательство. **Т.к. функция g – монотонная и ограниченная, то: $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \alpha < +\infty$. Функции f и $(g - \alpha)$ удовлетворяют всем условиям признака Дирихле. Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\big(g(x) - \alpha\big)dx$ сходится. Поэтому сходится и интеграл**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx = \int_a^{+\infty} f(x)\big(g(x) - \alpha\big)dx + \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

как сумма двух сходящихся интегралов. □

Признак Абеля также является лишь достаточным.

***Следствие* 1.** Пусть для некоторого $a \in \mathbb{R}$ функции f и g непрерывны на луче $[a, +\infty)$, а несобственные интегралы

$$I_1 = \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx \quad \text{и} \quad I_2 = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

имеют единственную особенность $+\infty$. Если, кроме того, функция g монотонна на $[a, +\infty)$ и существует конечный и не равный нулю предел

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = k \neq 0.$$

Тогда интегралы I_1 и I_2 либо оба сходятся абсолютно, либо оба сходятся условно, либо оба расходятся.

Доказательство. **В силу того, что $k \neq 0$, то в некоторой окрестности $+\infty$ справедливо неравенство:**

$$0 < \frac{1}{2} \cdot |k| \leqslant |g(x)| \leqslant \frac{3}{2} \cdot |k|.$$

Следовательно, в этой окрестности функции

$$g(x), \ \ |g(x)|, \ \ \frac{1}{g(x)} \ \textbf{и} \ \frac{1}{|g(x)|}$$

ограничены, непрерывны и монотонны. Воспользовавшись элементарным равенством

$$f(x) = \big(f(x)\cdot g(x)\big)\cdot\frac{1}{g(x)},$$

по признаку Абеля получаем выполнимость утверждения. □

Пример 3.1. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$.

Модельный интеграл.

Исследовать несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x,p)\,dx$, зависящий от параметра p на сходимость, означает определить три множества $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_3$ таких, что:

$$\mathbf{A}_1\sqcup\mathbf{A}_2\sqcup\mathbf{A}_3=\mathbb{R};$$

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x,p)\,dx \xrightarrow{\text{абс}} \textbf{при}\, p\in\mathbf{A}_1,\qquad \int\limits_1^{+\infty} f(x,p)\,dx \xrightarrow{\text{усл}} \textbf{при}\, p\in\mathbf{A}_2,$$

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x,p)\,dx \not\to \textbf{при}\, p\in\mathbf{A}_3.$$

1. $\mathbf{p>1}$.
$$\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx \leqslant \int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}\longrightarrow\Longrightarrow \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx \xrightarrow{\text{абс}} \text{при}\, p>1.$$

2. $\mathbf{0<p\leqslant 1}$. Положим $f(x)=\sin x$, $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$. Тогда $\left|\int\limits_1^{A} f(x)dx\right|\leqslant 2$, $g(x)\searrow 0$ при $p>0$.

   Откуда получаем, что: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ сходится по признаку Дирихле.

   Далее, $\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right|\geqslant\dfrac{\sin^2 x}{x^p}=\dfrac{1}{2x^p}-\dfrac{\cos 2x}{2x^p}$, и т.к. интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^p}$ расходится при $p\leqslant 1$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$ сходится по признаку Дирихле, то по признаку сравнения

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\,dx\not\to\Longrightarrow\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin^2 x}{x^p}\right|\,dx\not\to\Longrightarrow\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}\,dx\xrightarrow{\text{усл}},\ \text{при}\, 0<p\leqslant 1.$$

3. $\mathbf{p\leqslant 0}$. Используем отрицание критерия Коши[a].

   Для $\forall A_0>1$ возьмём $n\in\mathbb{N}: n>\dfrac{b}{2\pi}\iff 2\pi n>A_0$, и положим

$$A_1=2\pi n,\qquad A_2=2\pi n+\pi.$$

   Тогда, поскольку на отрезке $[A_1,A_2]$ выполнено: $\sin x\geqslant 0$, $0<x^{\alpha}\leqslant 1$ $(\alpha\leqslant 0)$, имеем:

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2}\frac{\sin x}{x^p}dx\right|=\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi}\frac{\sin x}{x^p}dx\geqslant\int\limits_{2\pi n}^{2\pi n+\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_{2\pi n}^{2\pi n+\pi}=2=\varepsilon_0.$$

<u>Ответ</u>: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx\xrightarrow{\text{абс}}$ при $p>1$; $\int\limits_1^{+\infty}\xrightarrow{\text{усл}}$ при $0<p\leqslant 1$; $\int\limits_1^{+\infty}\not\to$ при $p\ \leqslant\ 0$.

---

[a] $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx\ \not\to\iff\exists\varepsilon_0>0:\forall A_0>a\ \exists A_1,A_2\geqslant A_0$, для которых $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right|\geqslant\varepsilon_0$.

Зам. **Если несобственные интегралы** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **и** $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ **сходятся абсолютно, то в силу неравенства** $|\alpha f + \beta g| \leqslant |\alpha||f| + |\beta||g|$ **и признака сравнения, интеграл** $\int\limits_a^{+\infty} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx$ **сходится абсолютно.**

Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \xrightarrow{\text{усл}}$**, а** $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \xrightarrow{\text{абс}}$**, то интеграл**

$$\int\limits_a^{+\infty} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx$$

сходится условно, т.к., если бы он сходился абсолютно, то по сказанному выше и интеграл от $f = (f + g) - g$ **сходился бы абсолютно, что неверно.**

4 Сходимость в смысле главного значения

Сходимость по Коши.

Пусть $f \in \Re_{\ell oc}(\mathbb{R})$[a]. Под несобственным интегралом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ понимается предел: $\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\ A'\to+\infty}} \int\limits_{-A'}^{A} f(x)\,dx$, при независимом стремлении A и A' к $+\infty$. Может так случится, что в этом смысле предела нет, но существует предел, отвечающий частному предположению $-A' = -A$. Его называют *главным значением интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (*в смысле Коши*).

Обозначение: $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$. ("valeur principale", ***фр.***)

[a] т.е. у функции f нет особых точек, кроме $\pm\infty$.

Аналогично водится понятие главного значения несобственного интеграла второго рода:

$$v.p.\int\limits_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Зам. **Если интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ существует как несобственный, то он существует и в смысле главного значения. Обратное, вообще говоря, неверно.**

Пример 4.1. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$ расходится. Однако,

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}(-\cos x)\Big|_{-A}^{A} = 0.$$

Пример 4.2. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ расходится. Однако,

$$v.p.\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = 0.$$

Геометрические приложения интеграла

ГЛАВА XII

1 $\mathbb{R}^n$ – евклидово, нормированное и метрическое пространство

Материал данной секции будет особенно важен для нас, начиная с главы “Функции многих переменных”, но будет полезно напомнить его уже сейчас, т.к. понятия, которые мы здесь введём используются и в текущей главе.

Определение. $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}^{n}$ – *n-мерное вещественное пространство*, множество всевозможных упорядоченных наборов из n действительных чисел.

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x^1,\ldots,x^n)\,\middle|\,x^k \in \mathbb{R},\ k=\overline{1,n}\right\},\quad \boldsymbol{x}=(x^1,\ldots,x^n).$$

Здесь и далее, полужирным шрифтом в формулах обозначаются вектора.

Операции на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\boldsymbol{x}=(x^1,\ldots,x^n)$, $\boldsymbol{y}=(y^1,\ldots,y^n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y}=(x^1\pm y^1,\ldots,x^n\pm y^n),\qquad \alpha\,\boldsymbol{x}=(\alpha\,x^1,\ldots,\alpha\,x^n)$$

$\mathbb{R}^n$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$. Вектора

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\ldots,0),\ \ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,\ldots,0,1)$$

образуют (*естественный*) базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. Всякий вектор $\boldsymbol{x}$ единственным образом раскладывается по базису $\{e_k\}$:

$$\boldsymbol{x}=x^1\,\boldsymbol{e}_1+x^2\,\boldsymbol{e}_2+\ldots+x^n\,\boldsymbol{e}_n=x^{k}\boldsymbol{e}_{k}$$ [a]

[a] Обозначение Эйнштейна.

Вопрос: как ввести расстояние ρ между точками (векторами) из $\mathbb{R}^n$?

Идея: если $x,y\in\mathbb{R}$, то $\rho(x,y)=|x-y|=\sqrt{(x-y)^2}$.

Рассмотрим функцию $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, заданную формулой:

$$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=x^1\,y^1+x^2\,y^2+\ldots+x^n\,y^n.$$

Она удовлетворяет следующим свойствам:

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

1°. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geqslant 0$ и $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\theta_n=\overbrace{(0,\ldots,0)}^{n}$;

2°. $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$;

3°. $\langle\alpha\,\boldsymbol{x}+\beta\,\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{z}\rangle=\alpha\,\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\beta\,\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$.

Определение. Всякая функция $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ на линейном пространстве, удовлетворяющая данным свойствам, называется *скалярным произведением.* Линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Утверждение 1.1. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

неравенство Коши-Буняковского-Шварца

$$\left|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle\right| \leqslant \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle},$$

причём равенство равносильно **линейной зависимости** $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Доказательство. **При $\boldsymbol{y}=\theta_n$ утверждение выполнено. Пусть далее $\boldsymbol{y} \neq \theta_n$. Рассмотрим квадратичную функцию**

$$f(t) = \langle \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - 2t\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + t^2\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle.$$

Т.к. $f(t) \geqslant 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$,[a] то

$$\frac{D}{4} = \left|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle\right|^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \cdot \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \leqslant 0 \leftrightarrow \left|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle\right| \leqslant \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle}.$$

Остаётся заметить, что $D = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y} = \theta_n$ для некоторого $t \neq 0$. [b] □

[a] По свойству 1°.
[b] т.е. вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ коллинеарны.

Определение. Величина $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle}$ называется *нормой* (или *длиной*) *вектора* $\boldsymbol{x}$.

Функция $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1°. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \theta_n$;
2°. $\|\alpha\, \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$;
3°. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. (***неравенство треугольника***)

Доказательство. **Первые два свойства вытекают из свойств скалярного произведения, третье из неравенства Коши-Буняковского-Шварца:**

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \left(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|\right)^2.$$

□

Определение. Всякая неотрицательная функция на линейном пространстве, удовлетворяющая свойствам (**аксиомам**) 1°, 2°, 3° называется *нормой.* Линейное пространство с нормой называется *нормированным пространством.*

Рассмотрим далее функцию $\rho(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$, заданную формулой $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$. Для данной функции выполняются следующие свойства:

1°. $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;

2°. $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$;

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = |-1|\,\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|$.

3°. $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$.

$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|$

Определение. Неотрицательная функция $\rho(\cdot,\cdot)$ на непустом множестве $\mathbf{X}$, удовлетворяющая свойствам (**аксиомам**) 1°, 2°, 3° называется *метрикой*, а линейное пространство X с заданной на нём метрикой называется *метрическим пространством*. Обозначение: пространство $(\mathbf{X},\rho)$.

Определение. Множество $\mathbf{U}_r(\boldsymbol{a}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) < r\right\}$ называется *открытым шаром радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{a}$*; множество $\overline{\mathbf{U}}_r(\boldsymbol{a}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) \leqslant r\right\}$ – *замкнутым шаром*; множество $\overset{\circ}{\mathbf{U}}_r(\boldsymbol{a}) = \mathbf{U}_r(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ – *проколотым шаром*; множество $\mathbf{S}_r(\boldsymbol{a}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = r\right\}$ называется *сферой радиуса r с центром в точке* $\mathbf{a}$.

Определение. Множество $\mathbf{A}$ называется *ограниченным*, если $\exists r > 0$, такое что $\mathbf{A} \subset \mathbf{U}_r(\mathit{0})$

В качестве центра ограничивающего шара не обязательно брать точку $\mathit{0}$. Можно выбрать любую точку пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение. Точка $\boldsymbol{x}_0$ называется *внутренней для множества* $\mathbf{A}$, если $\exists r > 0$, что $\mathbf{U}_r(\boldsymbol{x}_0) \subset \mathbf{A}$. Множество всех внутренних точек обозначается через $\operatorname{int}(\mathbf{A})$.

Определение. Множество $\mathbf{A}$ называется *открытым*, если $\mathbf{A} = \operatorname{int}(\mathbf{A})$, т.е. каждая его точка является внутренней.

Определение. Точка $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *внешней для множества* $\mathbf{A}$, если $\exists r > 0$, что $\mathbf{A} \cap \mathbf{U}_r(\boldsymbol{x}_0) = \varnothing$.

Определение. Точка $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной для множества* $\mathbf{A}$, если $\boldsymbol{x}_0$ не является ни внутренней, ни внешней точкой $\mathbf{A}$, т.е.

$$\forall r > 0 \quad \exists \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{U}_r(\boldsymbol{x}_0) \ : \ \boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{A}, \boldsymbol{x}_2 \notin \mathbf{A}.$$

Множество всех граничных точек множества $\mathbf{A}$ обозначается через $\partial\mathbf{A}$.

Определение. Точка $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной для множества* $\mathbf{A}$, если $\forall r > 0$ $\mathbf{A} \cap \overset{\circ}{\mathbf{U}}_r(\boldsymbol{x}_0) \neq \varnothing$. Точки $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{A}$, не являющиеся предельными для множества $\mathbf{A}$, называются *изолированными*.

Определение. Пусть $\mathbf{A}'$ – множество всех предельных точек множества $\mathbf{A}$. Тогда множество $\overline{\mathbf{A}} := \mathbf{A} \cup \mathbf{A}'$ называется *замыканием множества* $\mathbf{A}$.

Определение. Множество $\mathbf{A}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т.е. если $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}$.

Упражнение. Докажите, что множество $\mathbf{A}$ замкнуто, тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}^C$, дополнение до $\mathbf{A}$ открыто.

2 Вычисление длины дуги кривой.

Для простоты ограничимся случаем кривой на плоскости.

Определение. *Путём в* $\mathbb{R}^2$ (*плоским путём* или *параметризованной кривой* (*кривой Жордана*) *в* $\mathbb{R}^2$) называется непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ в $\mathbb{R}^2$, т.е. непрерывная[a] вектор-функция:

$$\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \,:\, [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2, \quad t \in [a,b].$$

[a]Непрерывность, дифференцируемость и т.п. вектор-функции понимаются, соответственно, как непрерывность и дифференцируемость обеих функций x и y.

Определение. Точка $\overline{r}(a) = \big(x(a), y(a)\big)$ называется *началом пути* $\overline{r}$; $\overline{r}(b) = \big(x(b), y(b)\big)$ – *концом пути* $\overline{r}$.

Определение. Если $\overline{r}(a) = \overline{r}(b)$, то путь $\overline{r}$ называется *замкнутым*. Если равенство $\overline{r}(t_1) = \overline{r}(t_2)$ имеет место лишь при $t_1 = t_2$ или $t_1, t_2 \in \{a, b\}$, то путь $\overline{r}$ называется *простым* или *не самопересекающимся*.

Определение. Плоский путь $\overline{r} : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$ называется *гладким*, если вектор-функция $\overline{r}$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную вектор-функцию $\overline{r}'$, нигде не обращающуюся в нуль-вектор.

Вычисление длины плоского пути

Введём в рассмотрение *образ отрезка* $[a,b]$ (*носитель пути* $\overline{r}$) на плоскости $\mathbb{R}^2$ при отображении $\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a,b]$. Упорядочим точки образа так, как упорядочены точки $[a,b]$. Затем рассмотрим разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, и обозначим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

***Ломаную линию*, вписанную в данный путь, получим, соединяя отрезками прямых все пары соседних точек следующей последовательности:**

$$A_0\big(x(t_0), y(t_0)\big),\ A_1\big(x(t_1), y(t_1)\big), \ldots, A_n\big(x(t_n), y(t_n)\big).$$

За *длину ломаной линии* принимаем сумму длин всех её звеньев:

$$\ell(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2},\ \text{где } \Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}),\ \Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}).$$

Определение. Плоский путь $\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a,b]$ называется *спрямляемым*, если множество $\big\{\ell(\tau) \mid \tau - \text{разбиение}\,[a,b]\big\}$ длин вписанных ломаных линий, ограничено сверху. В этом случае sup этого множества называется *длиной пути* $\overline{r}(t)$.

$$\ell = \sup_{\tau} \ell(\tau)^{a}, \text{ где } \ell(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}.$$

[a] sup берётся по длинам всех ломаных, вписанных в $\overline{r}$.

Теорема 83. Если путь $\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [a,b]$ – гладкий, то он спрямляемый, а для его длины справедливо равенство:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt. \qquad (*)$$

Доказательство. **Задавая произвольное разбиение τ отрезка $[a,b]$, и используя теорему Лагранжа, получаем:**

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\theta_k)\,\Delta t_k, \quad \Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\xi_k)\,\Delta t_k.$$

Здесь θ_k и ξ_k, вообще говоря, различные точки из интервала (t_{k-1}, t_k)

Подставляя выражения для Δx_k, Δy_k в формулу для длины ломаной[a], получим:

$$\ell(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x'(\theta_k)\big)^2 + \big(y'(\xi_k)\big)^2}\Delta t_k. \qquad (1)$$

По условию теоремы производные функций x и y – ограничены, т.е. $\exists M > 0$: $\forall t \in [a,b]$ справедливо: $|x'(t)| \leqslant M$, $|y'(t)| \leqslant M$. Поэтому из (1),

$$0 < \ell(\tau) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{M^2 + M^2}\,\Delta t_k = M\sqrt{2}\,(b-a).$$

Т.е. множество $\{\ell(\tau)\}$ длин вписанных в кривую $\overline{r}(t)$ ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям τ отрезка $[a,b]$, ограничено сверху, и следовательно путь $\overline{r}(t)$ спрямляем.

Построим для того же разбиения τ интегральную сумму интеграла $(*)$, беря θ_k в качестве отмеченных точек:

$$\sigma_\tau\big(|\overline{r}'|, \theta\big) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x'(\theta_k)\big)^2 + \big(y'(\theta_k)\big)^2}\,\Delta t_k. \qquad (2)$$

Оценим сверху модуль разности сумм (1) и (2):[b]

$$0 \leqslant \big|\ell(\tau) - \sigma_\tau\big(|\overline{r}'|, \theta\big)\big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \sqrt{\big(x'(\theta_k)\big)^2 + \big(y'(\theta_k)\big)^2} - \sqrt{\big(x'(\theta_k)\big)^2 + \big(y'(\xi_k)\big)^2} \right| \Delta t_k \leqslant^{c}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big| |y'(\theta_k)| - |y'(\xi_k)| \Big| \Delta t_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega\big(|y'|, [t_{k-1}, t_k]\big)\,\Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\big(|y'|\big)\,\Delta t_k.$$

Но, т.к. $|y'| \in C\big([a,b]\big) \Longrightarrow |y'| \in \Re\big([a,b]\big) \Longrightarrow \lim\limits_{d_\tau \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k\big(|y'|\big)\Delta t_k = 0$. **Откуда получаем:** $\exists \widetilde{\ell} := \lim\limits_{d_\tau \to 0} \ell(\tau) = \int\limits_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt.$

Для обоснования формулы $(*)$ остаётся показать, что

$$\widetilde{\ell} := \lim_{d_\tau \to 0} \ell(\tau) = \sup_{\tau} \ell(\tau) = \ell.$$

Переходя к пределу при $d_\tau \to 0$ в неравенстве $\ell(\tau) \leqslant \sup\limits_{\tau} \ell(\tau) = \ell$, получаем:

$\widetilde{\ell} \leqslant \ell$. **Для установления противоположного неравенства, зададим** $\forall \varepsilon \in (0, \ell)$. **Получаем:** $0 < \ell - \varepsilon < \ell = \sup\limits_{\tau} \ell(\tau)$. **По определению** $\sup$ **найдётся разбиение** τ_ε **такое, что** $\ell - \varepsilon < \ell(\tau_\varepsilon) \leqslant \sup\limits_{\tau} \ell(\tau)$. **Кроме того, если** $\tau_\varepsilon \subset \tau$, **то (по неравенству треугольника)** $\ell(\tau_\varepsilon) \leqslant \ell(\tau)$. **Переходя к пределу в неравенстве** $\ell - \varepsilon < \ell(\tau)$ **при** $d_\tau \to 0$, $\tau_\varepsilon \subset \tau$, **получим** $\ell - \varepsilon \leqslant \widetilde{\ell}$. **Отсюда в силу произвольности** ε, **находим** $\ell \leqslant \widetilde{\ell}$.

Следовательно, $\ell = \sup\limits_{\tau} \ell(\tau) = \widetilde{\ell} = \lim\limits_{d_\tau \to 0} \ell(\tau) = \int\limits_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} dt$. □

---

[a] $\ell(\tau) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$.

[b] $\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant \dfrac{|b^2 - c^2|}{|b| + |c|} \leqslant \dfrac{|b-c|\big(|b| + |c|\big)}{|b| + |c|} = |b - c|$

[c] $a = |x'(\theta_k)|$, $b = |y'(\theta_k)|$, $c = |y'(\xi_k)|$.

Зам. **В случае, когда гладкий путь можно задать уравнением** $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, **воспользуемся параметризацией:**

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x). \end{cases} \implies \ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx.$$

Зам. **Понятие пространственного пути можно получить аналогично понятию плоского пути, как непрерывное отображение**

$$\overline{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3.$$

Для длины такого пути справедлива формула:

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt.$$

Зам. **Если кривая задана в полярных координатах** $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, **причём** $r \in C^1[\alpha, \beta]$, **то данная кривая спрямляема, и для её длины справедлива формула:**

$$\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \big(r'(\varphi)\big)^2}\, d\varphi.$$

Доказательство. $x = x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$. **Поэтому,**

$$\big(x'(\varphi)\big)^2 + \big(y'(\varphi)\big)^2 = \big(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi\big)^2 + \big(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi\big)^2 =$$

$$= r^2(\varphi) + \big(r'(\varphi)\big)^2.$$

□

3 Мера Жордана.

Определение. *Длиной* (или *одномерным объёмом*) конечного промежутка $I = \langle a, b\rangle$ называется число $|I| := b - a$.

Определение. Если $I_1, \ldots, I_m$–конечные промежутки, то множество $P = I_1 \times \ldots \times I_m$ называется (m-*мерным*) *параллелепипедом* или (m-*мерным*) *брусом*, а число $|P| = |I_1| \cdot \ldots \cdot |I_m|$ — *объёмом бруса* P.

Определение. Множество $\mathbf{E} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} P_k$, являющееся конечным объединением непересекающихся брусов P_k, называется *элементарной* (или *многоугольной*) *фигурой*. Множество (класс) всех элементарных фигур в $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Требование, чтобы брусы были непересекающимися можно опустить. Тогда можно доказать, что для любой элементарной фигуры найдётся её представление в виде непересекающихся брусов

Лемма 1. Пусть $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\mathbf{E} \bigcup \mathbf{F}$, $\mathbf{E} \bigcap \mathbf{F}$, $\mathbf{E} \setminus \mathbf{F} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2. Пусть $\mathbf{E} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m'} P'_k$ – два представления элементарной фигуры $\mathbf{E}$ в виде объединения непересекающихся n-мерных брусов. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} |P_k| = \sum_{k=1}^{m'} |P'_k|.$$

Определение. Для произвольной элементарной фигуры $\mathbf{E} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} P_k$ определим её меру Жордана, как: $\mu(\mathbf{E}) = \sum\limits_{k=1}^{m} |P_k|$.

Зам. **Корректность последнего определения следует из леммы 2. Жорданова мера n-мерных брусов совпадает с их объёмом, понятие которого было введено выше.**

Свойства меры Жордана элементарных фигур. Пусть $\mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, тогда:

1. $\mu(\mathbf{E}) \geqslant 0$ (*неотрицательность*);
2. $\mu(\mathbf{E} \bigsqcup \mathbf{F}) = \mu(\mathbf{E}) + \mu(\mathbf{F})$ (*аддитивность*);
3. **Если** $\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$, **то** $\mu(\mathbf{E}) \leqslant \mu(\mathbf{F})$ (*монотонность*).

Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное множество. Рассмотрим всевозможные многоугольные фигуры $\mathbf{E}$, целиком содержащиеся в Ω, и многоугольные фигуры $\mathbf{F}$, целиком содержащие Ω. Фигуры $\mathbf{E}$ будем называть *вписанными* в Ω, а фигуры $\mathbf{F}$ – *описанными* около Ω. Числовое множество $\{\mu(\mathbf{E})\}$ площадей всех вписанных элементарных фигур ограничено сверху, например площадью любой описанной многоугольной фигуры $\mathbf{F}$, а множество $\{\mu(\mathbf{F})\}$ – ограничено снизу, например, нулём. Следовательно,определены числа

$$\mu_*(\Omega) := \sup_{\Omega \supset \mathbf{E} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mu(\mathbf{E}) \quad \text{и} \quad \mu^*(\Omega) := \inf_{\Omega \subset \mathbf{F} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mu(\mathbf{F}),$$

называемые *нижним* и *верхним объёмами множества* Ω.

Зам. **Для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:**

$$0 \leqslant \mu_*(\Omega) \leqslant \mu^*(\Omega) < +\infty.$$

Определение. Ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется *измеримым по Жордану*, если $\mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$. При этом число $\mu(\Omega) = \mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$ называется мерой Жордана множества Ω. Множество (класс) всех измеримых по Жордану множеств в $\mathbb{R}^n$ обозначается через $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$.

Зам. $\mu(\Omega) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \mathbf{E} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : \Omega \subset \mathbf{E},\ \mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$.

Зам. **Ясно, что $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, $\forall \mathbf{E} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ определения мер Жордана (новое и старое) эквивалентны. Т.о. данное определение распространяет понятие площади на более общие классы ограниченных множеств.**

Зам. **Все перечисленные выше свойства меры Жордана элементарных фигур сохраняются и для измеримых множеств.**

Зам. ***Пример неквадрируемой фигуры***
Рассмотрим множество

$$\mathbf{A} = \mathbb{Q}_{[0,1]\times[0,1]} = \left\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}.$$

A представляет из себя счётное объединение квадрируемых фигур (точек). $S^*(\mathbf{A}) = 1$, т.к. наименьшей многоугольной фигурой, содержащей A, является сам квадрат $[0,1] \times [0,1]$. $S_*(\mathbf{A}) = 0$, т.к. во множество A нельзя вписать никакую многоугольную фигуру ненулевой площади[a].

[a]Любая такая фигура будет содержать и иррациональные точки.

4 Критерии измеримости. Классы измеримых фигур.

Лемма 1. $\Omega \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, такие что $\mathbf{E} \subset \Omega \subset \mathbf{F}$ и $\mu(\mathbf{F}) - \mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$.

Критерии измеримости

Доказательство. **Необходимость. Пусть $\Omega \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, т.е. $\mu(\Omega) = \mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$. По определению точных граней $\exists \mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, такие что $\mathbf{E} \subset \Omega \subset \mathbf{F}$ и**

$$\mu(\mathbf{F}) - \mu(\Omega) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \mu(\Omega) - \mu(\mathbf{E}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда, $0 \leqslant \mu(\mathbf{F}) - \mu(\mathbf{E}) = \mu(\mathbf{F}) - \mu(\Omega) + \mu(\Omega) - \mu(\mathbf{E}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathbf{E}, \mathbf{F} : \mathbf{E} \subset \Omega \subset \mathbf{F}, \mu(\mathbf{F}) - \mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$. Т.к. $\mu(\mathbf{E}) \leqslant \mu_*(\Omega) \leqslant \mu^*(\Omega) \leqslant \mu(\mathbf{F})$, то $0 \leqslant \mu^*(\Omega) - \mu_*(\Omega) \leqslant \mu(\mathbf{F}) - \mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $\mu^*(\Omega) = \mu_*(\Omega)$. □

Лемма 2. $\Omega \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, такие что $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$ и $\mu(\Omega_2) - \mu(\Omega_1) < \varepsilon$.

Доказательство. **Необходимость. Следует из Леммы 1, т.к. любая элементарная фигура измерима.**

Достаточность. Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. **Пусть**

$$\exists \Omega_1, \Omega_2 \ : \ \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2 \ \text{ и } \ \mu(\Omega_2) - \mu(\Omega_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Т.к. Ω_1, Ω_2 **– измеримы, то по Лемме** 1 **находим элементарные фигуры** $\mathbf{E}$ **и** $\mathbf{F}$**, такие что:**

$$\mathbf{E} \subset \Omega_1, \ \ \Omega_2 \subset \mathbf{F} \quad \text{и} \quad \mu(\Omega_1) - \mu(\mathbf{E}) < \frac{\varepsilon}{4}, \ \ \mu(\mathbf{F}) - \mu(\Omega_2) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поэтому, $\mathbf{E} \subset \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2 \subset \mathbf{F}$**, и**

$$\mu(\mathbf{F}) - \mu(\mathbf{E}) = \mu(\mathbf{F}) - \mu(\Omega_2) + \mu(\Omega_2) - \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_1) - \mu(\mathbf{E}) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Далее воспользуемся леммой 1. □

Зам. **Отметим, что первая лемма (критерий измеримости) сильнее второй в плане необходимости, а вторая сильнее в плане достаточности.**

Сформулируем далее два удобных в использовании критерия измеримости, но примем их без доказательства.

Утверждение 4.1. $\Omega \in \mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда $\mu(\partial\Omega) = 0$.

Утверждение 4.2. $\Omega \in \mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда существуют многоугольные фигуры $\{\mathbf{A}_n\}, \{\mathbf{B}_n\}$, такие что $\mathbf{A}_n \subset \Omega \subset \mathbf{B}_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\mathbf{B}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\mathbf{A}_n)$.

Доказательство. **См., например, [ФII],** ***с.188-190.*** □

Пусть $f \in C[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [a,b]$. **Рассмотрим фигуру** Классы измеримых фигур

$$\mathbf{T}_x = \big\{(x,y) \,\big|\, a \leqslant x \leqslant b, \, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\} \quad (\textit{криволинейная трапеция})$$ [1]

Теорема 84. Криволинейная трапеция представляет собой измеримую фигуру, мера Жордана которой вычисляется по формуле: Вычисление площадей

$$\mu(\mathbf{T}_x) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

[1] Криволинейная трапеция прилегающая к оси Ox

Доказательство. Т.к. $f \in C[a,b]$, то $f \in \mathfrak{R}[a,b]$. $\forall \varepsilon > 0$ рассмотрим разбиение τ отрезка $[a,b]$, такое что $\overline{S}_\tau(f) - \underline{s}_\tau(f) < \varepsilon$, существующее по критерию интегрируемости. Заметим, что

$$\exists \mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : \mu(\mathbf{E}) = \underline{s}_\tau(f),\ \ \mu(\mathbf{F}) = \overline{S}_\tau(f) \ \text{ и } \mathbf{E} \subset \mathbf{T}_x \subset \mathbf{F}.$$

По критерию измеримости получаем, что $\mathbf{T}_x \in \mathfrak{J}(\mathbf{R}^2)$, причём

$$\underline{s}_\tau(f) \leqslant \mu(\mathbf{T}_x) \leqslant \overline{S}_\tau(f).$$

Далее, т.к. по основной лемме Дарбу

$$\lim_{d_\tau \to 0} \underline{s}(f) = \lim_{d_\tau \to 0} \overline{S}(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \ \text{ то } \ \mu(\mathbf{T}_x) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

□

Аналогично доказывается теорема о квадрируемости криволинейной трапеции, прилегающей к оси Oy:

$$\mathbf{T}_y = \big\{(x,y) \,\big|\, c \leqslant y \leqslant d,\ 0 \leqslant x \leqslant g(y)\big\}, \quad \mu(\mathbf{T}_y) = \int\limits_c^d g(y)\,dy. \tag{2}$$

Зам. Если функция f на сегменте $[a,b]$ не сохраняет постоянного знака, то площадь, лежащая под осью Ox берётся со знаком «минус».

Зам. Если криволинейная трапеция ограничена сверху непрерывной функцией f_2, а снизу непрерывной функцией f_1:

$$\mathbf{T}_{12} = \big\{(x,y) \,\big|\, a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\big\}, \quad \mu(\mathbf{T}_{12}) = \int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx.$$

Формулы (1) и (2) могут быть использованы в том случае, когда кривая, ограничивающая фигуру $\mathbf{T}$, задана параметрически, уравнениями:

Движение по кривой происходит так, чтобы фигура оставалась слева

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

где $x, y \in C^1[t_1, t_2]$. Используя равенства:

$$dx(t) = x'(t)\,dt,\ a = x(t_2),\ b = x(t_1); \quad dy(t) = y'(t)\,dt,\ c = y(t_1),\ d = y(t_2),$$

имеем:

$$S(\mathbf{T}) = -\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt, \quad S(\mathbf{T}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\,y'(t)\,dt. \tag{3}$$

Складывая формулы (3), получаем:

$$S(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,d\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right). \tag{3'}$$

Пусть $r = r(\varphi)$ – непрерывная функция, заданная в полярной системе координат. Рассмотрим множество

$[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$.

$$\mathbf{T}_\varphi = \{(r,\varphi) \mid \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}.$$

Докажем, что $\mathbf{T}_\varphi \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^2)$, и его мера Жордана может быть вычислена по формуле

$$\mu(\mathbf{T}_\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Действительно, т.к. $r \in C[\alpha,\beta]$, то $r \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$ и $r^2 \in \mathfrak{R}[\alpha,\beta]$. Поэтому, $\forall \varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение τ отрезка $[\alpha,\beta]$, что $\overline{S}_\tau(\frac{1}{2}r^2) - \underline{s}_\tau(\frac{1}{2}r^2) < \varepsilon$. Для данного разбиения рассмотрим фигуры (объединение секторов)

$$\mathbf{T}_*(\tau) = \bigcup_{k=1}^n \{(r,\varphi) \mid \alpha_{k-1} \leqslant \varphi \leqslant \alpha_k,\ 0 \leqslant r \leqslant m_k\};$$

$$\mathbf{T}^*(\tau) = \bigcup_{k=1}^n \{(r,\varphi) \mid \alpha_{k-1} \leqslant \varphi \leqslant \alpha_k,\ 0 \leqslant r \leqslant M_k\}.$$

Принимая во внимание “школьную” формулу для площади сектора, получаем

$$\underline{s}_\tau\left(\frac{1}{2}r^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n m_k^2\Delta\alpha_k = \mu(\mathbf{T}_*) \leqslant \mu(\mathbf{T}_\varphi) \leqslant \mu(\mathbf{T}^*) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n M_k^2\Delta\alpha_k = \overline{S}_\tau\left(\frac{1}{2}r^2\right).$$

Откуда, по критерию измеримости, получаем измеримость множества $\mathbf{T}_\varphi$. Далее, устремляя здесь $d_\tau \to 0$ и применяя основную лемму Дарбу, заключаем:

$$\mu(\mathbf{T}_\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Определение. *Цилиндрическим телом* (*цилиндром*) называется декартово произведение $\mathbf{C} = \mathbf{H} \times [z_1, z_2]$, где $\mathbb{R}^2 \supset \mathbf{H}$ – ограниченное множество; $[z_1, z_2]$ – отрезок оси Oz; $h = z_2 - z_1$ – *высота цилиндра*.

Вычисление объёмов

Теорема 85. Если $\mathbf{H} \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^2)$, то цилиндрическое тело $\mathbf{C} = \mathbf{H} \times [z_1, z_2] \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^3)$ и справедлива формула $\mu(\mathbf{C}) = \mu(\mathbf{H}) \cdot h$.

Доказательство. **Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. $\mathbf{H} \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \exists \mathbf{E}, \mathbf{F} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, такие что**

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{H} \subset \mathbf{F} \text{ и } \mu(\mathbf{F}) - \mu(\mathbf{E}) < \frac{\varepsilon}{h}.$$

Пусть $\mathbf{C}_\mathbf{E} = \mathbf{E} \times [z_1, z_2]$, $\mathbf{C}_\mathbf{F} = \mathbf{F} \times [z_1, z_2]$. Тогда $\mathbf{C}_E, \mathbf{C}_F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{C}_E \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{C}_F$, причём

$$\mu(\mathbf{C}_E) = \mu(\mathbf{E})\,h,\ \mu(\mathbf{C}_F) = \mu(\mathbf{F})\,h \Longrightarrow \mu(\mathbf{C}_F) - \mu(\mathbf{C}_E) < \varepsilon$$

Т. е., $\mathbf{C} \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^3)$, и, в силу монотонности меры Жордана

$$\mu(\mathbf{C}_E) \leqslant \mu(\mathbf{C}) \leqslant \mu(\mathbf{C}_F), \quad \mu(C_E) = \mu(\mathbf{E})\,h \leqslant \mu(\mathbf{H})\,h \leqslant \mu(\mathbf{F})\,h = \mu(C_F) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\mu(\mathbf{C}) - \mu(\mathbf{H})\,h| < \mu(\mathbf{C}_F) - \mu(\mathbf{C}_E) < \varepsilon \Longrightarrow \mu(\mathbf{C}) = \mu(\mathbf{H})\,h.$$

□

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ на $[a,b]$. Введём в рассмотрение множество Ω, полученное вращением функции f вокруг оси Ox:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in [a,b],\ y^2 + z^2 \leqslant f^2(x)\right\}.$$

Теорема 86. Если $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, то $\Omega \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^3)$, и $\mu(\Omega) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$.

Объём тела вращения.

Доказательство. **Из свойств определённого интеграла следует, что $\pi f^2 \in \mathfrak{R}[a,b]$, поэтому, $\exists \tau$ – разбиение $[a,b]$, такое что**

$$\forall \varepsilon > 0\ \overline{S}_\tau(\pi f^2) - \underline{s}_\tau(\pi f^2) < \varepsilon.$$

Следовательно, существуют, составленные из цилиндров, измеримые[a] **фигуры $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, такие что:**

$$\mu(\mathbf{E}) = \underline{s}_\tau(\pi f^2), \qquad \mu(\mathbf{F}) = \overline{S}_\tau(\pi f^2).$$

Получаем: $\mathbf{E} \subset \Omega \subset \mathbf{F}$, и $\forall \varepsilon > 0\ \mu(\mathbf{F}) - \mu(\mathbf{E}) < \varepsilon$. Из критерия измеримости следует, что $\Omega \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^3)$, причём по основной лемме Дарбу:

$$\pi \int\limits_a^b f^2(x)dx \leftarrow \underline{s}_\tau(\pi f^2) \leqslant \mu(\Omega) \leqslant \overline{S}_\tau(\pi f^2) \to \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx,\ \ d_\tau \to 0.$$

□

[a] См. предыдущую теорему.