

С. Э. ФРИШ

**ОПТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
ИЗМЕРЕНИЙ**

**2**

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

С. Э. ФРИШ

# ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Часть 2

ЛУЧЕВАЯ ОПТИКА  
И ГРАНИЦЫ ЕЕ ПРИМЕНИМОСТИ  
ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ

*Учебное пособие*



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ЛЕНИНГРАД 1980

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
Ленинградского университета*

УДК 535.8

**Фриш С. Э. Оптические методы измерений. Ч. 2. Лучевая оптика и граница ее применения. Интерферометрия: Учеб. пособие.** Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с. Ил. — 181, табл. — 3.

Пособие представляет собой 2-ю часть расширенного изложения лекций, читавшихся автором на физическом факультете ЛГУ (1-я часть вышла в 1976 г.). Посвящено основам лучевой оптики, границам ее приложения и вопросам интерференции света и ее применений, включая представление о голографии.

Рассчитано на студентов физических факультетов вузов, может быть полезно также научным работникам и специалистам, пользующимся методами оптических измерений.

*Рецензенты:* докт. физ.-мат. наук А. Н. Зайдель,  
канд. физ.-мат. наук Ю. А. Толмачев

Ф —  $\frac{20405-104}{076(02)-80}$  БЗ-16-24-80. 1704050000

© Издательство  
Ленинградского  
университета, 1980 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена несколько расширенному изложению второй части лекций автора по оптическим методам измерений.

Содержание ее, как и первой, определяется спецификой курса, носящего вводный характер к более специальным курсам по оптическим и спектральным методам измерений и к прохождению специальной учебной лаборатории и производственной практики.

В книге так же, как и в первой части, повторяются некоторые вопросы, о которых студент уже слышал в общем курсе физики, но которые были там освещены кратко, это в первую очередь относится к лучевой оптике. Вместе с тем знакомство с основными положениями лучевой (геометрической) оптики необходимо для всякого физика, который будет в своей дальнейшей деятельности использовать оптические установки. Особое внимание уделено границам применения лучевых представлений, обусловленным волновой природой света. Подробно рассматривается вопрос о разрешающей силе оптических приборов.

Из обширной области интерферометрии главным образом выделены те разделы, с которыми встречается физик-экспериментатор — интерференционная рефрактометрия, включая методы изучения аномальной дисперсии, и интерференционные методы измерения длин.

В конце книги рассматриваются некоторые вопросы, связанные с использованием фазовых соотношений, в частности, с основами голографии.

## Глава III

### ЛУЧЕВАЯ ОПТИКА

#### § 1. Волновые и лучевые представления в оптике

Световые волны представляют собой частный случай электромагнитных волн, характеризующихся колебаниями двух векторов: вектора электрической напряженности  $\mathbf{E}$  и вектора магнитной напряженности  $\mathbf{H}$ .

Оба вектора колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях; скорость распространения волны  $\mathbf{v}$  перпендикулярна к направлению обоих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Это означает, что электромагнитные волны поперечны. Численные значения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  однозначно связаны между собой. В свободно распространяющейся волне  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  колеблются в одной фазе (рис. 20, ч. 1). В случае, когда каждый из векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  совершает линейные

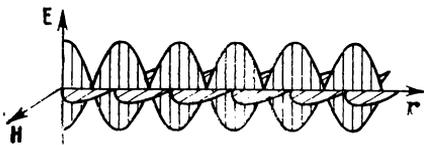


Рис. 1. Стоячая электромагнитная волна.

колебания в определенной плоскости, свет называется плоскополяризованным. По историческим причинам, на которых мы здесь останавливаться не будем, за плоскость поляризации принимается плоскость, в которой колеблется магнитный вектор  $\mathbf{H}$ .

Электрический и магнитный векторы подчиняются на границе раздела двух сред различным граничным условиям. Это ведет к тому, что при отражении от металлического зеркала на поверхности зеркала электрический вектор  $\mathbf{E}$  имеет узел, а магнитный — пучность. В результате в образующейся стоячей волне пучности электрического вектора совпадают с узлами магнитного и наоборот (рис. 1).

Хотя из-за различия граничных условий полное описание световых волн может быть дано лишь при учете обоих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , для описания многих процессов достаточно учиты-

вать лишь один из них. Так обычно и поступают, рассматривая колебания одного вектора  $\mathbf{S}$ , который иногда называется световым вектором (иное значение термина «световой вектор» см. в § 6, ч. 1). Принимая за вектор  $\mathbf{S}$  вектор электрической напряженности  $\mathbf{E}$ , получим, что в плоскополяризованном свете световые колебания происходят в плоскости, перпендикулярной плоскости поляризации.

В пространстве, захваченном волновым процессом, можно выделить поверхности, на каждой из которых колебания вектора  $\mathbf{S}$  совершаются в одинаковой фазе. Такие поверхности называются поверхностями одинаковых фаз; для краткости мы будем их называть также волновыми поверхностями. Если в некотором пространстве распространяется волновой процесс, то поверхность, отделяющая область, захваченную волновым процессом, от области еще им не захваченной, называется волновым фронтом. Волновой фронт является поверхностью одинаковых фаз, но поверхности одинаковых фаз могут быть проведены и через любую точку, захваченную волновым процессом.

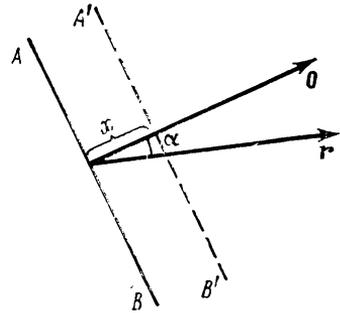


Рис. 2. Распространение плоской волны.

Рассмотрим простейший случай распространения плоской монохроматической волны в однородной изотропной среде. В этом случае поверхностями одинаковых фаз будут неограниченные плоскости  $AB$  (рис. 2). Запишем колебания светового вектора  $\mathbf{S}$  в плоскости  $AB$  в виде

$$S = a_0 \cos [2\pi\nu(t - t_0)], \quad (1.1)$$

где  $a_0$  — амплитуда,  $\nu$  — частота,  $t_0$  — начальное время. Обозначим через  $\mathbf{O}$  единичный вектор, отложенный в направлении нормали к поверхности  $AB$ , и через  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, отложенный в произвольном направлении. Пусть за время  $\tau$  поверхность одинаковых фаз переместится на отрезок  $x$ , отсчитанный вдоль нормали  $\mathbf{O}$ , тогда для колебаний в плоскости  $A'B'$

$$S = a_0 \cos [2\pi\nu(t - \tau - t_0)],$$

$$\tau = \frac{x}{v} = \frac{r \cos \alpha}{v} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{O}}{v},$$

где  $v$  — скорость распространения света в данной среде. Используя это выражение для  $\tau$  и замечая, что  $1/v = 1/(\nu\lambda)$ , где  $\lambda$  — длина волны, получим

$$S = a_0 \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{O}}{\lambda} - \delta_0 \right) \right], \quad (1.2)$$

где  $\delta_0 = vt_0$  — постоянная величина, имеющая смысл начальной фазы.

Выражение (1.2) представляет собой вещественную часть комплексного выражения

$$S = a_0 e^{2\pi i \left( vt - \frac{r \cdot \mathbf{o}}{\lambda} - \delta_0 \right)}, \quad (1.3)$$

Введем волновой вектор, определив его равенством

$$\mathbf{k} = \mathbf{O}/\lambda. \quad (1.4)$$

Тогда (1.3) примет вид

$$S = a_0 e^{2\pi i (vt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta_0)}, \quad (1.5)$$

$$\text{или } S = \psi e^{2\pi i (vt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}; \quad (1.6)$$

где  $\psi = a_0 e^{-2\pi i \delta_0}$  — комплексная амплитуда.

Очевидно, если мы составим выражение  $SS^*$ , где  $S^*$  — величина, сопряженная с  $S$ , то получим

$$SS^* = \psi\psi^* = a_0^2,$$

т. е. квадрат вещественной амплитуды. Поскольку через квадрат вещественной амплитуды определяется одна из основных фотометрических величин — освещенность (см. § 6 ч. 1), то решение многих задач сводится к отысканию выражения  $SS^*$ , или, другими словами, квадрата модуля комплексного выражения (1.6), описывающего волновой световой процесс.

Перенос энергии световой волны определяется с помощью вектора Пойнтинга (§ 6, ч. 1)

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}).$$

Так как оба вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскости  $AB$ , то вектор Пойнтинга направлен по нормали  $\mathbf{O}$  к этой поверхности. Следовательно, перенос энергии происходит в направлении нормали к поверхности, что позволяет его характеризовать семейством прямых, нормальных к поверхности  $AB$ . Такое семейство параллельных друг другу прямых называется лучами, соответствующими плоской волновой поверхности, распространяющейся в однородной изотропной среде.

В случае изогнутой волновой поверхности  $S$  (рис. 3) бесконечно малый элемент этой поверхности  $dS$  вблизи любой точки  $\mathbf{O}$  можно считать плоским. Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскости этого элемента  $dS$ , а вектор Пойнтинга  $\mathbf{P}$  направлен по нормали  $\mathbf{O}$  к нему. В соответствии с этим и луч, проходящий через точку  $O$ , направлен по нормали  $\mathbf{O}$ . В этом направлении происходит смещение элемента  $dS$  при распространении волновой поверхности. Лучами, соответствующими всей поверхности  $S$ , будем называть семейство ортогональных к ней линий. В однородной среде эти линии прямые.

Очевидно, сферической волновой поверхности соответствует пучок радиальных лучей. При этом пучок может быть сходящимся, тогда все лучи пересекаются в одной точке  $F$  (рис. 4, *a*); он может быть также расходящимся (рис. 4, *б*), тогда в одной точке  $F'$  пересекаются продолжения лучей. Точка  $F$  (или соответственно точка  $F'$ ) носит название фокуса пучка. Пучок, обладающий точечным фокусом, называется гомоцентрическим. Так как волновая поверхность ортогональна к лучам, то гомоцентрическому пучку всегда соответствует сферическая волновая поверхность. Очевидно, пучок параллельных лучей можно рассматривать как предельный случай гомоцентрического пучка, когда фокус отодвигается в бесконечность, а волновая поверхность становится плоской.

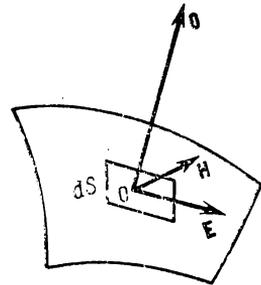


Рис. 3. Элемент  $dS$  изогнутой волновой поверхности.

В общем случае поверхности двойной кривизны выделим элемент поверхности  $ABCD$  (рис. 5). Как известно, такая поверхность характеризуется минимальным и максимальным радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ . Сечения, соответствующие этим радиусам, взаимно перпендикулярны. Выделим на элементе поверхности точку  $O$  и проведем через нее два взаимно перпендикулярных сечения  $EOG$  и  $HOF$ , первому из которых пусть соответствует минимальный радиус кривизны  $R_1$ , а второму — максимальный  $R_2$ . Нормали, проведенные к точкам  $E$ ,  $O$  и  $G$ , пересекутся в центре кривизны  $C_1$ , отстоящем от поверхности на расстоянии  $R_1$ ; нормали к точкам  $H$ ,  $O$  и  $F$  пересекутся в центре кривизны  $C_2$ , отстоящем от поверхности на расстоянии  $R_2$ . Выделим теперь сечения  $AHB$  и  $CFD$ , близкие и параллельные сечению  $EOG$ . Им будет соответствовать радиус кривизны  $R_1$  и нормали к ним пересекутся в точках  $a$  и  $a'$ , лежащих на одной прямой с точкой  $C_1$ . Аналогично нормали к сечениям  $AED$  и  $BGC$ , параллельным сечению  $HOF$ , пересекутся в точках  $b$  и  $b'$ , лежащих на одной прямой с точкой  $C_2$ . Прямые  $aa'$  и  $bb'$  взаимно перпендикулярны. Все прочие лучи, проведенные нормально к поверхности  $ABCD$ , пересекутся в точках, лежащих на одной из этих двух прямых  $aa'$  и  $bb'$ . В результате мы имеем: лучи, соответствующие элементу любой кривой поверхности, пересека-

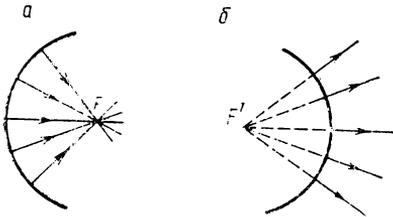


Рис. 4. Гомоцентрические пучки: сходящийся (*a*); расходящийся (*б*).

Выводим теперь сечения  $AHB$  и  $CFD$ , близкие и параллельные сечению  $EOG$ . Им будет соответствовать радиус кривизны  $R_1$  и нормали к ним пересекутся в точках  $a$  и  $a'$ , лежащих на одной прямой с точкой  $C_1$ . Аналогично нормали к сечениям  $AED$  и  $BGC$ , параллельным сечению  $HOF$ , пересекутся в точках  $b$  и  $b'$ , лежащих на одной прямой с точкой  $C_2$ . Прямые  $aa'$  и  $bb'$  взаимно перпендикулярны. Все прочие лучи, проведенные нормально к поверхности  $ABCD$ , пересекутся в точках, лежащих на одной из этих двух прямых  $aa'$  и  $bb'$ . В результате мы имеем: лучи, соответствующие элементу любой кривой поверхности, пересека-

ются в точках, лежащих на двух взаимно перпендикулярных отрезках  $aa'$  и  $vv'$ . Пучок таких лучей называется астигматическим. Отрезки  $aa'$  и  $vv'$  носят название фокальных линий, а расстояние между ними — астигматической разности. Пучок астигматических лучей не имеет точечного фокуса. Чем меньше астигматическая разность, тем ближе располагаются друг к другу фокальные линии и тем короче каждая из них. В пределе они могут слиться в точку и тогда астигматический пучок перейдет в гомоцентрический с точечным фокусом  $F$ . В общем же случае между фокальными линиями лучи пересекаются в пределах кружка конечных размеров (кружок рассеяния).

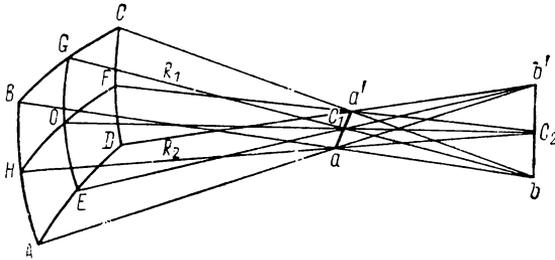


Рис. 5. Астигматический пучок.

Указанные геометрические свойства пучков лучей весьма важны для разбора процессов, возникающих при отражении и преломлении света на границе двух сред.

## § 2. Неоднородная среда

Представим себе неограниченную неоднородную среду, в которой коэффициент преломления  $n$  непрерывно меняется от точки к точке, т. е. представляет собой функцию координат:  $n = n(x, y, z)$ . Так как скорость распространения света в среде  $v = c/n$ , где  $c$  — скорость света в пустоте, то и скорость  $v$  в такой среде меняется от точки к точке.

Рассмотрим случай монотонного изменения  $n$ , причем пусть в верхней части области, изображенной на рис. 6, коэффициент преломления  $n$  меньше, чем в нижней. Это означает, что в верхней части рисунка световая волна распространяется быстрее, чем в нижней. В соответствии с этим волновой фронт  $AB$  через некоторый промежуток времени  $\tau$  займет положение  $A'B'$ , сдвинутое вверх больше, чем вниз. Линии, ортогональные к этим поверхностям, изогнутся. Таким образом, если и в неоднородной среде под лучами подразумевать линии, ортогональные к вол-

новым поверхностям, то лучи не будут прямолинейными. Характер их изгиба определится зависимостью коэффициента преломления  $n$  от координат.

Ход лучей в неоднородной среде подчиняется принципу Ферма. Для формулировки этого принципа введем понятие об оптической длине пути. Обозначим через  $ds$  элементарную геометрическую длину пути светового луча; элементом его оптической длины пути  $dl$  назовем величину

$$dl = n ds.$$

Для конечного участка распространения света под оптической длиной пути  $l$  подразумевается величина

$$l = \int_C^{C'} n ds, \quad (2.1)$$

где интеграл берется вдоль кривой  $CC'$ , по которой луч распространяется от точки  $C$  до точки  $C'$ . Для однородной среды оптическая длина пути отличается от геометрического пути  $s$  лишь множителем  $n$ .

По принципу Ферма свет распространяется по пути, оптическая длина которого экстремальна, т. е. является либо минимальной из всех возможных при заданных точках  $C$  и  $C'$ , либо максимальной, либо стационарной.

Условие экстремальности оптической длины пути сводится к требованию, чтобы вариация от интеграла (2.1) равнялась нулю

$$\delta \int_C^{C'} n ds = 0. \quad (2.2)$$

Принцип Ферма остается в силе и при распространении света в среде, состоящей из отдельных, граничащих между собой однородных участков. Легко проверить, что законы отражения и преломления света удовлетворяют принципу Ферма.

Если существует два или большее число лучей, которые, исходя из точки  $C$ , затем пересекаются в другой точке  $C'$  (рис. 7), то по принципу Ферма это возможно лишь в случае, когда оптические пути лучей одинаковы:

$$\int_{(1)} n dl = \int_{(2)} n dl. \quad (2.3)$$

Из этого требования вытекают два важных следствия: 1) время, затрачиваемое светом при распространении по лучам 1 и 2, оди-

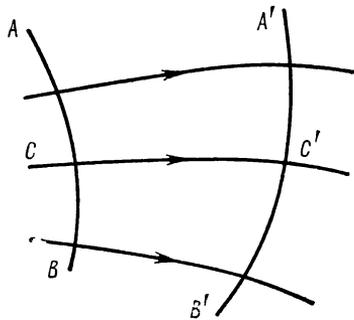


Рис. 6. Распространение волнового фронта в неоднородной среде.

наково; 2) лучи, исходящие из точки  $C$  в одинаковых фазах, приходят в точку  $C'$  также в одинаковых фазах.

Докажем выполнимость первого следствия. Время  $dt$ , затрачиваемое лучом для прохождения участка  $ds$ , равно  $dt = ds/v$ , где  $v$  — скорость распространения света в данной среде. Так как  $v = c/n$ , то  $dt = nds/c$ , время, затрачиваемое на распространение света от точки  $C$  до точки  $C'$  по пути (1), равно

$$t_{CC'} = \int_C^{C'} \frac{nds}{c} = \frac{1}{c} \int_C^{C'} nds.$$

По принципу же Ферма интеграл, стоящий в правой части этого выражения, не зависит от того, по какому из возможных путей свет распространяется от точки  $C$  до точки  $C'$ .

Для изменения фазы  $d\varphi$  на пути  $ds$  также имеем  $d\varphi = 2\pi ds/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина световой волны в данной среде. Так как  $\lambda = \lambda_0/n$ , где  $\lambda_0$  — длина света в пустоте, то  $d\varphi = 2\pi nds/\lambda_0$  и полное изменение фазы  $\Delta\varphi$  на пути  $CC'$  равно

$$\Delta\varphi = \int_C^{C'} 2\pi \frac{nds}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \int_C^{C'} nds,$$

т. е. снова в соответствии с принципом Ферма не зависит от того, какой из возможных лучей взят.

В неограниченной среде волновые и лучевые представления о распространении света применимы в одинаковой мере, так как каждой волновой поверхности однозначно соответствует семейство ортогональных к ней линий. При наличии же преград или диафрагм, ограничивающих распространение света, возникают явления дифракции, описываемые лишь с позиций волновой



Рис. 7. Два луча, пересекающихся в точках  $C$  и  $C'$ .

теории. Лучи вблизи преград испытывают загибание, необъяснимое с лучевой точки зрения. Угол отклонения представляет собой величину порядка  $\alpha \sim \lambda/d$ , где  $\lambda$  — длина волны, а  $d$  — линейные размеры преграды (диафрагмы). В случаях, когда  $d \gg \lambda$ , угол  $\alpha$  мал, и тогда можно приближенно сохранять представление о прямолинейном распространении света вблизи преград (диафрагм). Этому и соответствует приближение лучевой оптики.

Простое представление о лучах не может быть сохранено для анизотропных сред (двойкопреломляющие кристаллы), но этих случаев мы не будем касаться, ограничиваясь лишь рассмотрением изотропных сред.

### § 3. Законы отражения и преломления света

Изменение направления лучей света можно получить либо за счет их распространения в неоднородных средах, либо за счет отражений и преломлений на границе двух однородных сред. В современных оптических приборах, как правило, применяется лишь второй способ. Использование неоднородных сред встречается настолько больше технические трудности (создание сред с заданными градиентами коэффициентов преломления), что оно до сих пор находится лишь в стадии поисков.

Отражение и преломление света на границе двух однородных сред описывается соответственно законами отражения и преломления. Несмотря на общеизвестность этих законов, приведем все же их формулировки.

**Закон отражения света.** Для формулировки этого закона прежде всего введем правило знаков для углов. Будем считать положительными углы, отсчитанные от нормали к границе раздела по часовой стрелке, и отрицательными, отсчитанные против часовой стрелки. На чертежах будем приводить лишь положительные значения величин. Например, если угол  $i$  в каком-либо определенном случае отсчитывается против часовой стрелки, то на чертеже будем ставить  $-i$ .

По закону отражения отраженный луч  $BC$  (рис. 8) лежит в одной плоскости с падающим лучом  $AB$  и нормалью  $BN$ , восстановленной из точки падения, при этом он лежит по другую сторону от нормали; численно угол отражения  $i'$  равен углу падения  $i$ . При принятом нами правиле знаков закон отражения запишется следующим образом:

$$i' = -i. \quad (3.1)$$

Знак минус в этой формуле означает, что отраженный луч лежит по другую сторону от нормали, чем падающий.

**Закон преломления.** По закону преломления преломленный луч  $BD$  (рис. 9) лежит в одной плоскости с падающим лучом  $AB$  и нормалью  $BN$ , восстановленной из точки падения луча; значение угла преломления  $i_2$  определяется по углу падения  $i_1$  на основании соотношения

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \quad (3.2)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — коэффициенты преломления сред. Для пустоты  $n = 1$ .

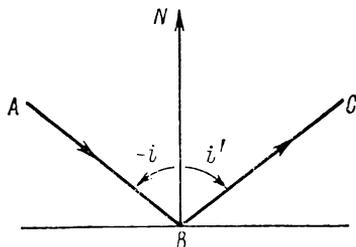


Рис. 8. Падающий и отраженный лучи.

На границе двух прозрачных сред одновременно возникают отраженный и преломленный лучи. При прохождении света из среды с большим коэффициентом преломления (оптически более плотной) в среду с меньшим коэффициентом преломления

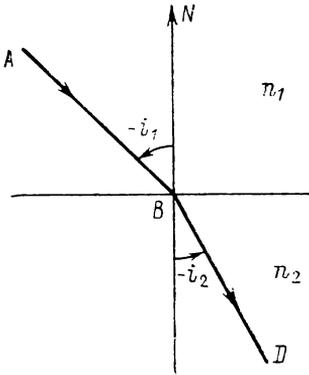


Рис. 9. Падающий и преломленный лучи.

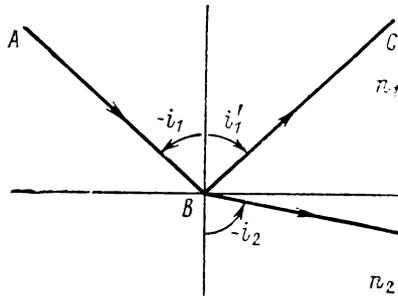


Рис. 10. Возникновение отраженного и преломленного лучей на границе двух прозрачных сред ( $n_2 < n_1$ ).

(оптически менее плотную) преломленный луч отходит от нормали (рис. 10,  $n_2 < n_1$ ). Очевидно, в этом случае существует такой угол падения  $i_{\text{пр}}$ , меньший  $\pi/2$ , при котором угол преломления  $-i_2 = \pi/2$ , т. е. преломленный луч становится скользющим вдоль границы раздела. При углах падения  $i_1 > i_{\text{пр}}$  преломленный луч не возникает и весь падающий свет полностью отражается. Это явление носит название полного внутреннего отражения. Значение предельного угла  $i_{\text{пр}}$  получается из условия: при  $i_1 = i_{\text{пр}}$  угол преломления  $i_2 = \pi/2$ . Тогда по (3.2) находим

$$\sin i_{\text{пр}} = n_2/n_1. \tag{3.3}$$

Это равенство может быть удовлетворено вещественным значением  $i_{\text{пр}}$  лишь при условии, что  $n_2 \leq n_1$ , откуда следует, что полное внутреннее отражение возможно лишь при прохождении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную.

По мере приближения угла падения к предельному яркость преломленного луча падает, а яркость отраженного возрастает, стремясь к яркости падающего луча. Отношения яркостей падающего, отраженного и преломленного лучей и характер их поляризации даются формулами Френеля (см. ниже, § 17).

Явление полного внутреннего отражения находит широкое применение в оптических приборах. Приведем в качестве примера несколько систем, использующих полное внутреннее отра-

жение. На рис. 11, *a* изображена прямоугольная призма полного внутреннего отражения. Если призма сделана из вещества с  $n > \sqrt{2} \approx 1,41$  и находится в пустоте (практически в воздухе), то луч, падающий в точку *B* под углом  $45^\circ$ , испытывает полное внутреннее отражение. В результате призма поворачивает проходящий через нее луч на  $90^\circ$ . На рис. 11, *б* представлен ход

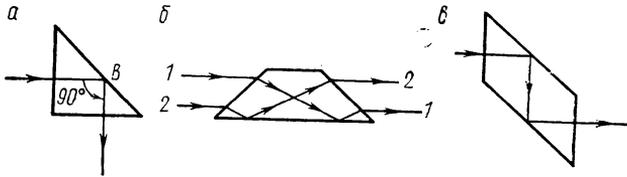


Рис. 11. Призмы полного внутреннего отражения.

лучей в призме полного внутреннего отражения, позволяющей обернуть лучи: луч, бывший до падения на призму верхним, становится после прохождения через призму нижним. На рис. 11, *в* изображена так называемая призма-ромб. Она смещает луч, оставляя параллельным его первоначальному направлению.

Использование призм полного внутреннего отражения вместо металлических полированных зеркал имеет преимущество, обусловленное большей механической и химической стойкостью стекла. Металлические полированные поверхности, корродируя, легко тускнеют, а также легко царапаются.

Укажем еще на одно весьма интересное использование полного внутреннего отражения. При распространении внутри изогнутого прозрачного стержня свет может испытывать ряд последовательных полных внутренних отражений (рис. 12) и, таким образом, войдя через один торец стержня, выйти из другого без заметных потерь. Такой стержень играет роль световода, и его применение в разных конструкциях может быть очень удобным. В настоящее время световод изготавливается в виде набора тонких волокон (волоконная оптика). Жгут, составленный из таких стеклянных волокон, обладает значительной гибкостью.

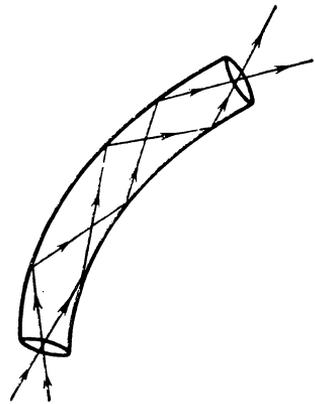


Рис. 12. Распространение света внутри световода.

В общем случае процесс распространения света по волокну не может рассматриваться лишь с точки зрения лучевой оптики.

Необходимо более полное описание явления на основе электромагнитной теории света.

#### § 4. Отражение и преломление лучей у плоской поверхности

Рассмотрим плоское зеркало  $AB$  (рис. 13, *a*), на которое в точке  $O$  падает луч, исходящий из точки  $S$ . Опустим из точки  $S$  нормаль  $SM$  на поверхность зеркала и продолжим ее за поверхность зеркала. Продолжение отраженного луча пересечет ее в точке  $S'$ . Обозначим расстояния  $SM$  и  $S'M$  соответственно через  $h$  и  $-h'$ . Из рисунка имеем

$$h = OM \operatorname{ctg} (-i), \quad -h' = OM \operatorname{ctg} i'.$$

Так как по закону отражения  $i' = -i$ , то из указанных равенств следует

$$-h' = h.$$

Это означает, что точка  $S'$  расположена симметрично с точкой  $S$  по отношению к плоскости зеркала и что это положение не зависит от значения угла падения  $i$ . Отсюда вытекает важное следствие: если из точки  $S$  исходит несколько лучей (рис. 13, *b*), то они отражаются от зеркала  $AB$  таким образом, что их продолжения пересекаются в одной точке  $S'$ . Другими словами: гомоцентрический пучок после отражения от плоскости зеркала остается гомоцентрическим.

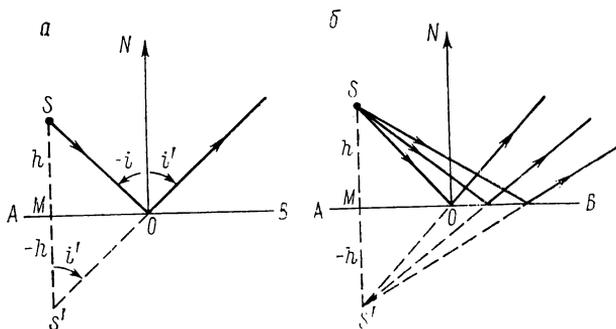


Рис. 13. Плоское зеркало.

Таким образом, зеркало дает мнимое изображение, причем точечному объекту соответствует точечное изображение независимо от того, под какими углами лучи отражаются от зеркала. Мнимое изображение лежит за зеркалом на таком же расстоянии от него, на каком находится от зеркала объект.

Рассмотрим теперь преломление лучей у плоской границы раздела двух прозрачных сред с коэффициентами преломления

$n$  и  $n'$  (полагаем  $n' < n$ ). Пусть ось  $OZ$  лежит в плоскости раздела сред, а ось  $OX$  перпендикулярна к ней (рис. 14). Точечный источник  $S$  поместим на оси  $OX$  на расстоянии  $s$  от начала координат. Пусть луч, исходящий из точки  $S$ , падает на границу раздела в точке  $M$  с координатой  $z$ . Углы  $-i$  и  $-i'$ , составляемые падающими и преломленными лучами с нормалью  $MN$ , удовлетворяют закону преломления

$$n \sin(-i) = n' \sin(-i'). \quad (4.1)$$

Из рис. 14 имеем

$$\sin(-i) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + s^2}}, \quad \sin(-i') = \frac{z}{\sqrt{z^2 + s'^2}},$$

где  $s'$  — координата точки  $S'$ , в которой продолжение преломленного луча пересекает ось  $OX$ . Подставляя эти значения  $\sin(-i)$  и  $\sin(-i')$  в (4.1), получим

$$\frac{n}{\sqrt{z^2 + s^2}} = \frac{n'}{\sqrt{z^2 + s'^2}},$$

откуда для  $s'$  находим

$$-s' = \frac{n'}{n} \sqrt{s^2 + \left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\right) z^2}. \quad (4.2)$$

Из выражения (4.2) следует, что положение точки  $S'$  при заданном положении точки  $S$  зависит от координаты  $z$ , т. е. зависит от того, под каким углом  $i$  падает луч на границу раздела.

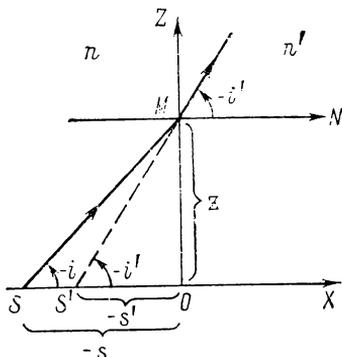


Рис. 14. Преломления луча  $SM$  у плоской границы двух прозрачных сред.

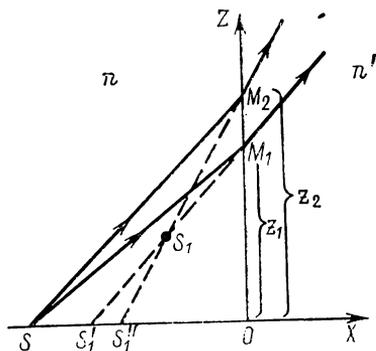


Рис. 15. Астигматизм пучка, возникающего при преломлении у плоской границы двух прозрачных сред.

Для того чтобы выяснить, каков будет пучок преломленных лучей, рассмотрим два луча  $SM_1$  и  $SM_2$ , исходящих из точечного источника  $S$  (рис. 15). По сказанному, продолжения этих лучей пересекут ось  $OX$  в двух разных точках —  $S_1'$  и  $S_2'$ . Меж-



верхности и  $S$  — точечный источник света. Проведем прямую, проходящую через  $S$  и  $C$ , и назовем ее оптической осью. Радиус кривизны  $r$  поверхности будем отсчитывать от поверхности к центру; в соответствии с этим на рис. 17 он положителен. Остальные расстояния будем отсчитывать от центра  $C$  и считать их положительными, если они направлены в сторону распространения света. На чертежах для отрезков, как и для углов, будем приводить положительные величины, например, если отрезок  $z$ , определяющий положение источника света  $S$ , отсчитан против направления распространения света, то на чертеже поставим  $-z$ .

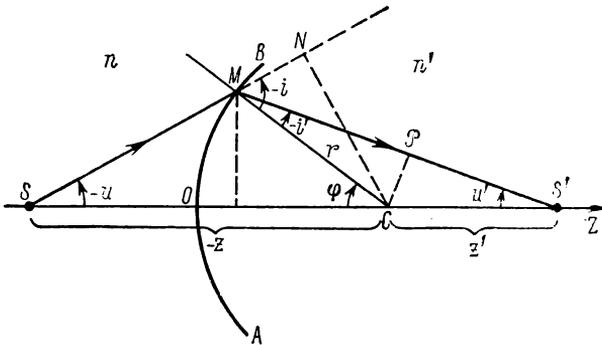


Рис. 17. Преломление луча у сферической поверхности.

Рассмотрим луч  $SM$ , падающий на поверхность  $AB$  под углом  $-i$  к нормали. После преломления он составит с нормалью угол  $-i'$  и при  $n < n'$  приблизится к ней; его продолжение пересечет оптическую ось в точке  $S'$ . Луч, идущий от источника  $S$  к центру  $C$  (вдоль оптической оси), пересечет поверхность  $AB$  нормально и, следовательно, за поверхностью будет распространяться по оси. Таким образом, в точке  $S'$  пересекутся продолжения двух лучей — луча  $MP$  и луча  $OC$ .

Закон преломления для нашего случая запишется в виде

$$n \sin i = n' \sin i'. \quad (5.1)$$

Опустим из центра  $C$  перпендикуляры:  $CP$  на направление преломленного луча и  $CN$  — на продолжение падающего луча  $SM$ . Рассмотрим величину  $p = n'CP$ . Из рис. 17 имеем

$$p = -n'r \sin i' = n'z' \sin u', \quad (5.2)$$

где  $u'$  — угол, составляемый продолжением преломленного луча  $MP$  с оптической осью.

По закону преломления (5.1)  $n'r \sin i' = nr \sin i$ , поэтому равенство (5.2) может быть продолжено следующим образом:

$$p = -n'r \sin i' = -nr \sin i = n'z' \sin u'. \quad (5.3)$$

Далее рассмотрим величину  $p' = nCN$ . На основании рис. 17 и равенства (5.1) находим

$$p' = -nr \sin i = -n'r \sin i' = nz \sin u, \quad (5.4)$$

где  $u$  — угол между лучом  $SM$  и оптической осью. Сравнение равенств (5.3) и (5.4) показывает, что  $p' = p$  и что, следовательно,  $p$  есть инвариантное значение четырех следующих величин:

$$-nr \sin i = nz \sin u = -n'r \sin i' = n'z' \sin u' = p. \quad (5.5)$$

Обозначим через  $\varphi$  угол, составляемый радиусом  $MC$  с оптической осью. Из треугольников  $\triangle SMC$  и  $\triangle S'MC$  находим

$$-i = -u + \varphi, \quad -i' = -u' + \varphi,$$

откуда получаем следующую связь между углами:

$$\varphi = u - i = u' - i'. \quad (5.6)$$

Равенства (5.1), (5.5) и (5.6) позволяют найти по заданному положению точки  $S$  положение точки  $S'$ . В самом деле, считаем, что коэффициенты преломления обеих сред  $n$  и  $n'$  и радиус кривизны  $r$  заданы. Также задано положение точки  $S$  (координата —  $z$ ) и направление луча  $SM$  (угол —  $u$ ). Тогда величина  $p = nz \sin u$  тоже оказывается заданной. Для  $z'$  из равенства (5.5) находим

$$z' = \frac{p}{n' \sin u'}. \quad (5.7)$$

Угол  $u'$  определяется на основании равенства (5.6) и (5.5):

$$u' = u - i + i', \quad (5.8)$$

$$i = -\arcsin \frac{p}{nr}, \quad i' = -\arcsin \frac{p}{n'r}. \quad (5.9)$$

Из (5.7) вытекает, что положение точки  $S'$  зависит от значения угла  $u'$ , а следовательно, и от угла —  $u$  (подробнее см. § 12). Таким образом, мы приходим к выводу, что продолжения преломленных лучей, исходящих из одной точки  $S$ , пересекают оптическую ось в разных точках  $S'$ , а это означает, что гомоцентрический пучок лучей не остается после преломления у сферической поверхности гомоцентрическим (исключение представляет случай, когда  $S$  и  $S'$  находятся в так называемых апланатических точках, § 12). Точечному объекту  $S$  не соответствует точечное изображение  $S'$ . Однако легко показать, что для малых углов падения и преломления (и соответственно малых углов  $u$  и  $u'$ , составляемых лучами с оптической осью) гомоцентризм пучка приближенно сохраняется. Такое приближение носит название приближения параксиальных лучей или приближения Гаусса. В этом приближении полагаем  $\sin \alpha = \text{tg } \alpha = \alpha$  и  $\cos \alpha = 1$ .

В гауссовом приближении закон преломления запишется

$$ni = n'i' \quad (5.10)$$

и равенство (5.5) примет вид

$$p = -nri = nzu = -n'r'i' = n'z'u'. \quad (5.11)$$

Из равенств (5.6) и (5.11) находим

$$\frac{p}{nz} + \frac{p}{nr} = \frac{p}{n'z'} + \frac{p}{n'r}$$

или так как

$$\frac{p}{n} = -ri, \quad \frac{p}{n'} = -ri',$$

то

$$\frac{r}{z} \frac{i}{i'} + \frac{i}{i'} = \frac{r}{z'} + 1.$$

Поскольку по (5.10)  $i/i' = n'/n$ , то из последнего равенства вытекает

$$\frac{n}{z'} - \frac{n'}{z} = \frac{n' - n}{r}. \quad (5.12)$$

Величина

$$\Phi = \frac{n' - n}{r} \quad (5.13)$$

называется оптической силой преломляющей поверхности. Оптическая сила имеет размерность, обратную размерности длины, и измеряется в  $\text{м}^{-1}$ . За единицу оптической силы принимается диоптрия, равная  $1 \text{ м}^{-1}$  (обозначается  $D$ ).

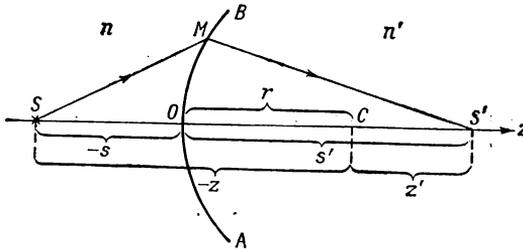


Рис. 18. Отсчет отрезков по отношению к вершине преломляющей поверхности  $O$ .

Равенство (5.12) не содержит углов — это означает, что лучи, исходящие из точечного источника  $S$  под малыми углами  $u$  к оптической оси, сохраняют гомоцентризм после преломления у сферической границы раздела двух однородных сред. В этом приближении точечному объекту  $S$  отвечает точечное изображение  $S'$ .

Введем теперь отрезки  $s$  и  $s'$  (рис. 18), определяющие положение объекта  $S$  и его изображения  $S'$  по отношению к точке  $O$ , в котором оптическая ось пересекает преломляющую поверхность (вершина поверхности). Из рис. 18 имеем

$$\begin{aligned} z' &= s' - r, \\ z &= s - r. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Подставляя эти значения  $z'$  и  $z$  в (5.12) после соответствующих алгебраических преобразований, получим

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} = \Phi. \quad (5.15)$$

Равенство (5.15), очевидно, эквивалентно по своему смыслу равенству (5.12).

Определим теперь точку, в которую собирается параллельный пучок лучей, падающий на сферическую преломляющую поверхность. Для этого положим  $-s = -\infty$ , тогда из (5.15) находим

$$s' = \frac{n'}{n' - n} r. \quad (5.16)$$

Это значение  $s'$  называется вторым главным фокусным расстоянием  $f'$  преломляющей поверхности. По (5.16) и (5.13) имеем

$$f' = \frac{n'}{n' - n} r = \frac{n'}{\Phi}. \quad (5.17)$$

Так же находим положение точки, в которую надо поместить источник  $S$ , чтобы после преломления получился параллельный пучок лучей: полагая  $s' = \infty$ , найдем

$$s = -\frac{n}{n' - n} r.$$

Это расстояние называется первым главным фокусным расстоянием  $f$ , для него имеем

$$f = -\frac{n}{n' - n} r = -\frac{n}{\Phi}. \quad (5.18)$$

Из (5.17) и (5.18) получаем

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}, \quad (5.19)$$

т. е. что по численному значению главные фокусные расстояния  $f'$  и  $f$  пропорциональны соответственно коэффициентам преломления  $n'$  и  $n$ ; знак минус в формуле (5.19) означает, что фокусы лежат по разные стороны от преломляющей поверхности.

Пользуясь формулой (5.15) и выражениями для главных фокусных расстояний (5.17) и (5.18), получим

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \quad (5.20)$$

Эта формула, как и формулы (5.12) и (5.15), позволяет при заданных главных фокусных расстояниях  $f'$  и  $f$  найти по положению источника  $S$  положение его изображения  $S'$ . Обратно, по

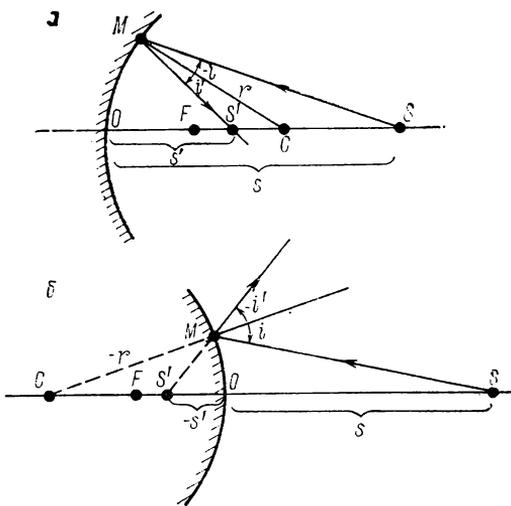


Рис. 19. Отражение лучей от сферического зеркала.  
 $a$  — вогнутого;  $b$  — выпуклого.

заданному положению изображения  $S'$  можно определить то место, где должен располагаться источник.

Рассмотрим отражение от сферического зеркала. Закон отражения (3.1) может быть формально представлен как частный случай закона преломления (3.2) при  $n = -1$ ,  $n' = 1$ . Отсюда вытекает применимость формул, полученных для одной сферической преломляющей поверхности в гауссовом приближении и к сферическому зеркалу, при соответственной замене  $n$  и  $n'$  на  $-1$  и  $1$ .

Воспользовавшись формулой (5.15), получим для зеркала

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r}, \quad (5.21)$$

где  $r$  — радиус кривизны зеркала,  $C$  — его центр кривизны (рис. 19,  $a, b$ ). Отрезки  $s$  и  $s'$  отсчитаны от вершины зеркала  $O$ . Для второго и первого главных фокусных расстояний сферического зеркала получаем

$$f' = -f = \frac{r}{2}. \quad (5.22)$$

Очевидно, оба главных фокуса зеркала совпадают и лежат посередине между вершиной зеркала  $O$  и его центром кривизны  $C$ .

## § 6. Пространство объектов и пространство изображений

Формула (5.12) предыдущего параграфа связывает положение точечного источника света (объекта)  $S$  с положением его изображения  $S'$ , которое в гауссовом приближении также точно. Поскольку в формуле (5.12) отрезки  $z$  и  $z'$  отсчитываются от центра кривизны преломляющей поверхности, то она справедлива для любой прямой, проходящей через центр кривизны  $C$ . Отсюда вытекает, что изображением сферического участка поверхности  $\Delta S$  радиуса —  $z$  будет сферический участок поверхности  $\Delta S'$  радиуса —  $z'$  (рис. 20, а).

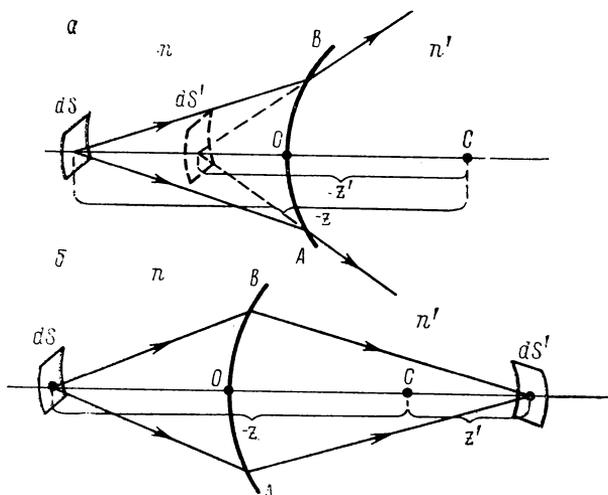


Рис. 20. Возникновение мнимого (а) и действительного (б) изображений при преломлении лучей у сферической поверхности.

Малые участки сферических поверхностей  $\Delta S$  и  $\Delta S'$  можно заменить касательными к ним плоскими поверхностями. Таким образом, мы приходим к выводу, что в гауссовом приближении изображений малой плоской поверхности  $\Delta S$ , нормальной к прямой, проходящей через центр кривизны преломляющей поверхности (оптической оси), будет также плоская поверхность  $\Delta S'$ , перпендикулярная к той же прямой. В соответствии с этим и малый отрезок прямой  $y$ , перпендикулярный к оптической оси, отобразится отрезком прямой  $y'$ , перпендикулярным к оси.

Каждую из поверхностей  $\Delta S$  и  $\Delta S'$  можно рассматривать как совокупность точек, причем эти точки будут попарно являться источниками света (объектами) и их изображениями. Такие точки называются сопряженными точками. Назовем пространство, где расположены объекты, пространством

объектов, а то, в котором расположены изображения,— пространством изображений. Для случая рис. 20, а пространство изображений накладывается на пространство объектов. Изображения при этом мнимые. В случае, представленном на рис. 20, б, объекты и изображения расположены по разные стороны от преломляющей поверхности. Изображения действительны и не накладываются друг на друга.

В принятом приближении каждой точке  $S$  плоскости, нормальной к оптической оси и лежащей в пространстве объектов, соответствует точка  $S'$ , лежащая в плоскости в пространстве изображений, также нормальной к оси. Такое изображение носит название коллинеарного.

Легко получить аналитическое выражение для коллинеарного соответствия. Обозначим через  $x, y, z$  координаты точки  $S$  в пространстве объектов относительно прямоугольной координатной системы и через  $x', y', z'$  — координаты сопряженной точки  $S'$  относительно системы, связанной с пространством изображений. Тогда каждой совокупности значений  $x, y, z$  должна соответствовать одна и только одна совокупность значений  $x', y', z'$  и наоборот. Это возможно при соблюдении условий

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{ax + by + cz + d}, \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{ax + by + cz + d}, \\ z' &= \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{ax + by + cz + d}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$  и т. д. представляют собой постоянные величины. В самом деле, значения  $x, y, z$ , соответствующие данным  $x', y', z'$ , вычисляются из трех линейных уравнений (6.1), и наоборот — каждой совокупности  $x, y, z$  соответствует одна совокупность  $x', y', z'$ . Если бы правые части уравнений (6.1) не были частными двух линейных функций  $x, y, z$ , то заданным  $x', y', z'$  соответствовало бы несколько совокупностей значений  $x, y, z$ . Кроме того, знаменателем этих частных должна быть одна и та же линейная функция  $ax + by + cz + d$ , так как иначе плоскости

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$$

не соответствовала бы плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Если решить уравнение (6.1) относительно  $x, y, z$ , то получатся совершенно аналогичные уравнения

$$x = \frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' + d'_1}{a'x' + b'y' + c'z' + d'} \quad \text{и т. д.} \quad (6.2)$$

Из уравнений (6.1) и (6.2) следует существование главных фокусных плоскостей. В самом деле, при

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (6.3)$$

из (6.1) получаем

$$x' = y' = z' = \infty,$$

т. е. любой точке  $S$ , лежащей в плоскости (6.3), соответствует бесконечно удаленная сопряженная точка  $S'$  в пространстве изображений. Двум лучам, исходящим из точки  $S$ , лежащей в этой плоскости, соответствуют два параллельных луча в пространстве изображений.

Плоскость, уравнение которой имеет вид

$$a'x' + b'y' + c'z' + d' = 0, \quad (6.4)$$

лежащая в пространстве изображений, обладает тем свойством, что любой точке  $S'$  этой плоскости соответствует бесконечно удаленная сопряженная точка  $S$  в пространстве объектов. Параллельным лучам в пространстве объектов соответствуют в пространстве изображений лучи, пересекающиеся в одной точке, лежащей в плоскости (6.4).

Поскольку переход от пространства объектов к пространству изображений и обратно производится с помощью линейных преобразований, он может быть записан в матричной форме, на чем мы, однако, останавливаться не будем.

Рассмотрим теперь возможность геометрического построения изображения. Для простоты будем рассматривать плоский случай, когда объект задан отрезком прямой  $SS_1$ , перпендикуляр-

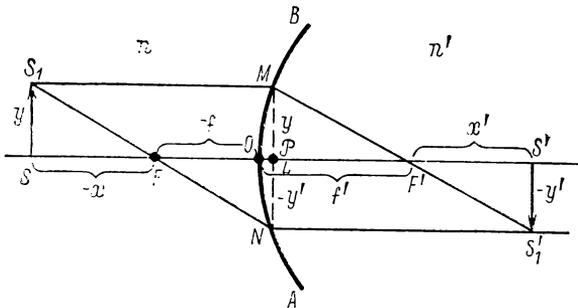


Рис. 21. Построение изображения при преломлении лучей у одной сферической поверхности.

ным к оптической оси (рис. 21). Пусть  $F$  и  $F'$  соответственно первый и второй главные фокусы преломляющей поверхности. Рассмотрим два луча, исходящие из точки  $S_1$ : луч  $S_1M$ , параллельный оптической оси, и луч  $S_1FN$ , проходящий через первый

главный фокус. После преломления луч  $S_1M$  должен пройти через второй главный фокус  $F'$ , а луч  $S_1FN$  — пойти параллельно оптической оси. Построив эти два луча  $MF'S'_1$  и  $NS'_1$  в пространстве изображений, найдем точку их пересечения  $S'_1$ . В гауссовом приближении все остальные лучи, исходящие из точки  $S_1$ , пересекутся в точке  $S'_1$ , т. е. точка  $S'_1$  явится изображением точки  $S_1$ . Весь же отрезок  $SS_1$  отобразится отрезком  $S'S'_1$ , перпендикулярным к оптической оси.

Назовем линейным увеличением  $\beta$  отношение длины изображения  $S'S'_1$  к длине объекта  $SS_1$

$$\beta = \frac{S'S'_1}{SS_1}. \quad (6.5)$$

Опустим из точки  $M$  перпендикуляр на оптическую ось  $SO$ . В гауссовом приближении основание этого перпендикуляра  $L$  будем считать совпадающим с вершиной преломляющей поверхности  $O$ . Тогда отрезок  $LF'$  равен второму главному фокусному расстоянию  $f'$ . Определим положение  $S'$  по отношению ко второму главному фокусу  $F'$  отрезком  $x'$ . Обозначим соответственно длины отрезков  $SS_1$  и  $S'S'_1$  через  $y$  и  $-y'$ . Из чертежа имеем  $LM = y$ ; для линейного увеличения  $\beta$  получаем

$$\beta = y'/y = -x'/f'. \quad (6.6)$$

Точно так же, опустив из точки  $N$  перпендикуляр на оптическую ось  $NP$ , получим

$$\beta = -f/x, \quad (6.7)$$

где  $f$  — первое главное фокусное расстояние, а  $x$  — отрезок, определяющий положение объекта  $S$  по отношению к первому главному фокусу  $F$ .

Из равенств (5.5) и (5.6) находим

$$xx' = ff'. \quad (6.8)$$

Это равенство, носящее название равенства Ньютона, позволяет, как и равенство (5.20), по положению объекта  $S$  найти положение его изображения  $S'$ .

Выведем еще одно соотношение, связывающее размеры изображения  $y'$  с размерами объекта  $y$ . Для этого проведем в пространстве объектов два луча  $SM$  и  $S_1O$  (рис. 22). Поскольку оптическая ось  $SO$  пересекает преломляющую поверхность нормально, угол  $i$ , составляемый лучом  $S_1O$  с оптической осью, является углом падения, а угол  $i'$ , составляемый преломленным лучом  $OS'_1$  с оптической осью, — углом преломления. В гауссовом приближении углы  $i$  и  $i'$  на основании закона преломления связаны соотношением

$$i'/i = n/n'. \quad (6.9)$$

В том же приближении из рис. 22 имеем

$$\frac{i'}{i} = \frac{-y'}{s'} \frac{-s}{y}. \quad (6.10)$$

Опустим из точки  $M$  перпендикуляр  $ML$  на оптическую ось и обозначим его длину через  $h$ , а углы, составляемые лучами  $SM$

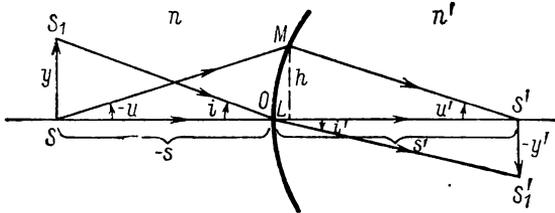


Рис. 22. К выводу инварианта Лагранжа—Гельмгольца.

и  $MS'$  с оптической осью, соответственно через  $-u$  и  $u'$ . Тогда в принятом приближении

$$-u = h/(-s), \quad u' = h/s'. \quad (6.11)$$

Из равенств (6.11) и (6.10) следует

$$\frac{i'}{i} = \frac{y'}{y} \frac{u'}{u},$$

а из сопоставления этого равенства с равенством (6.9) получаем

$$y u n = y' u' n'. \quad (6.12)$$

Выражение (6.12) показывает, что произведение из трех величин  $y$ ,  $u$ ,  $n$  остается инвариантным при переходе от пространства объектов к пространству изображений. Оно носит название инварианта Лагранжа—Гельмгольца.

## § 7. Система центрированных поверхностей. Главные плоскости

Рассмотрим систему сферических поверхностей произвольных радиусов, разделяющих среды с различными коэффициентами преломления. Систему назовем *центрированной*, если центры кривизны всех поверхностей лежат на одной прямой.

Ограничимся по-прежнему рассмотрением параксиальных лучей. Преломление пучка света в системе мы можем проследить, рассматривая последовательно его преломление у отдельных сферических поверхностей. При этом изображение, даваемое каждой предыдущей поверхностью, будет служить объектом для последующей поверхности. Так как при преломлении

у каждой из поверхностей в пределах принятого приближения гомоцентрический пучок остается гомоцентрическим, то и после прохождения через всю систему гомоцентризм пучка сохранится. В случае точечного объекта система даст в параксиальных лучах точечное изображение.

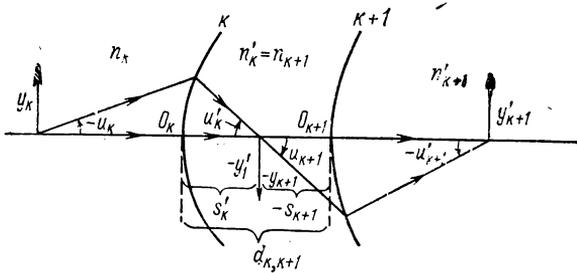


Рис. 23. Система центрированных поверхностей.

Можно показать, что для системы сохраняется применимость инварианта Лагранжа — Гельмгольца (6.12). Выделим в нашей системе две следующих поверхности:  $k$ -ю и  $(k+1)$ -ю (рис. 23). Сходные величины, относящиеся к пространству объектов и пространству изображений, будем, как и раньше, отмечать одними и теми же буквами, отличая их друг от друга штрихами. Тогда коэффициент преломления среды, заключенный между  $k$ -й и  $(k+1)$ -й поверхностями, одновременно должен быть отмечен как  $n'_k$  и  $n_{k+1}$ . Изображение объекта, даваемое  $k$ -й преломляющей поверхностью, обозначается через  $-y'_k$ ; оно же будет объектом для  $(k+1)$ -й поверхности и, следовательно, должно быть обозначено  $-y_{k+1}$ . Кроме того, из чертежа видно, что угол  $u'_k = u_{k+1}$ . Таким образом, имеем следующую связь между штрихованными и нештрихованными величинами:

$$\begin{aligned} n'_k &= n_{k+1}, \\ u'_k &= u_{k+1}, \\ y_k &= y_{k+1}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Обозначив расстояние между вершинами преломляющих поверхностей  $O_k$  и  $O_{k+1}$  через  $d_{k, k+1}$  прибавим к соотношениям (7.1) еще следующее:

$$s_k - s_{k+1} = d_{k, k+1}. \quad (7.2)$$

Равенства (7.1) и (7.2) позволяют произвести переход от каждой данной преломляющей поверхности к последующей.

По отношению к каждой из преломляющих поверхностей выполняется инвариант Лагранжа — Гельмгольца:

$$n_k y_k u_k = n'_k y'_k u'_k,$$

но по (7.1)

$$n'_k = n_{k+1}, \quad y'_k = y_{k+1}, \quad u'_k = u_{k+1},$$

откуда получаем

$$n_k y_k u_k = n_{k+1} y_{k+1} u_{k+1} = n'_{k+1} y'_{k+1} u'_{k+1} \quad (7.3)$$

и т. д. Таким образом систему равенств (7.3) можно написать, начиная с первой и кончая последней, которую обозначим  $k$ -й

$$n_1 y_1 u_1 = n'_k y'_k u'_k. \quad (7.4)$$

Здесь величины  $n_1, y_1, u_1$  относятся к пространству объектов, лежащему перед первой поверхностью, т. е. перед всей системой, а  $n'_k, y'_k, u'_k$  — величины, относящиеся к пространству изображений всей системы.

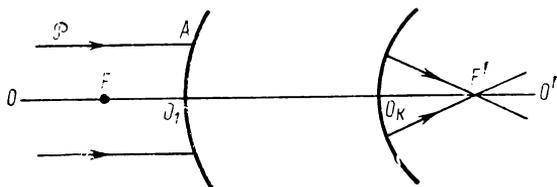


Рис. 24. Главный фокус центрированной системы.

Все прочие соотношения, справедливые по отношению к системе, можно также получить, рассматривая последовательное преломление лучей у отдельных поверхностей. Однако некоторые общие свойства системы могут быть установлены и без такого детального рассмотрения.

Установим прежде всего существование главных фокусов системы. Прямая  $OO'$  (рис. 24), проходящая через центры кривизны всех поверхностей, является оптической осью системы. Рассмотрим падающий на систему луч  $PA$ , параллельный оптической оси  $OO'$ . После прохождения через систему этот луч (или его продолжение) пересечет оптическую ось в некоторой точке  $F'$ . Луч, идущий вдоль оптической оси, пройдет через всю систему без преломлений, так как на каждую из преломляющих поверхностей он упадет нормально. Следовательно, два луча  $PA$  и  $OO'$  после прохождения через систему пересекутся в точке  $F'$ . Так как система сохраняет для параксиальных лучей гомоцентризм, то все лучи, параллельные оптической оси, после преломления пересекутся в той же точке  $F'$ . Аналогично мы установим существование точки  $F$ , обладающей тем свойством, что лучи, исходящие из нее, после преломления в системе образуют параллельный пучок. Точки  $F$  и  $F'$  являются главными фокусами системы.

Рассмотрим далее луч  $PA$ , параллельный оптической оси (рис. 25). Пусть он проходит на некотором расстоянии  $h$  от оптической оси. После преломления он образует луч  $B'F'$ , проходящий через второй главный фокус системы. Любой луч, проходящий через первый главный фокус  $F$ , после преломления в системе идет параллельно оптической оси. Расстояние между этим лучом и оптической осью  $OO'$  зависит от наклона луча  $FB$ .

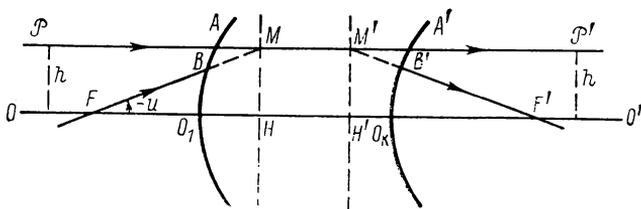


Рис. 25. Главные плоскости системы  $MN$  и  $M'H'$ .

Всегда можно выбрать такой наклон луча  $FB$ , чтобы соответствующий ему луч  $A'P'$  проходил на расстоянии  $h$  от оси. Лучи  $PA$  и  $FB$  (или их продолжения) пересекаются в некоторой точке  $M$ , а лучи  $A'P'$  и  $B'F'$  (или их продолжения) пересекаются в точке  $M'$ . Положение точек  $M$  и  $M'$  определяется ходом лучей до падения на систему и после выхода из нее, для их нахождения нет надобности знать ход лучей внутри самой системы, поэтому на рис. 25 ход лучей внутри системы не изображен.

Точки  $M$  и  $M'$  лежат на одинаковом расстоянии  $h$  от оптической оси системы. Проведем через точки  $M$  и  $M'$  плоскости, перпендикулярные к оптической оси  $OO'$ . Эти плоскости называются главными плоскостями системы, а  $H$  и  $H'$  — точки их пересечения с оптической осью — главными точками системы. Так как точки  $M$  и  $M'$  являются местами пересечения одной и той же пары лучей (или их продолжений)  $PAB'F'$  и  $FBA'P'$ , то они являются сопряженными точками системы. Если одна из этих точек есть объект, то другая — его изображение. Отсюда вытекает следующее определение главных плоскостей: главными плоскостями системы называются такие сопряженные плоскости, сопряженные точки которых лежат на одинаковых расстояниях от оптической оси и по одну сторону от нее.

Введение в рассмотрение главных плоскостей оправдывается тем, что если известно их положение и положение главных фокусов системы, то по заданному положению объекта можно найти положение его изображения, даваемого системой. Действительно, пусть система задана своими главными плоскостями  $H$  и  $H'$  и главными фокусами  $F$  и  $F'$  (рис. 26). Будем отсчитывать расстояния, определяющие положение объекта, его изображе-

ния и главных фокусов соответственно от первой и второй главных плоскостей. На рис. 26 положение объекта определится отрезком  $MS = -s$ . Луч  $SM$ , параллельный оптической оси, после преломления в системе пройдет через второй главный фокус  $F'$ . По указанному свойству главных плоскостей этот луч (или его продолжение) пересечет вторую главную плоскость в точке  $M'$ ,

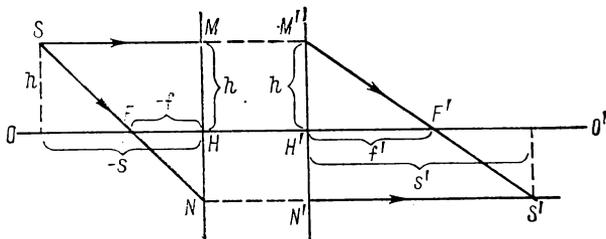


Рис. 26. Система, заданная положением ее главных плоскостей  $H, H'$  и главных фокусов  $F$  и  $F'$ .

отстоящей от оптической оси на том же расстоянии  $h = H'M'$ , на каком отстоит от оси точка  $M$ . В качестве второго луча, исходящего из объекта, рассмотрим луч, проходящий через первый главный фокус  $F$ . Этот луч (или его продолжение) пересечет первую главную плоскость в точке  $N$  и вторую главную плоскость — в точке  $N'$ , равноотстоящих от оптической оси. Место пересечения лучей  $M'S'$  и  $N'S'$  определит положение изображения  $S'$ .

Из треугольников  $\triangle NSM$  и  $\triangle NFH$  имеем

$$\frac{HF}{MS} = \frac{NH}{NM},$$

но  $MS = -s$ ,  $HF = -f$ , где  $f$  — первое главное фокусное расстояние системы, откуда следует, что

$$\frac{f}{s} = \frac{NH}{NM}. \quad (7.5)$$

Из рассмотрения треугольников  $\triangle M'S'N'$  и  $\triangle M'F'H'$  получаем

$$\frac{f'}{s'} = \frac{M'H'}{M'N'}. \quad (7.6)$$

Складывая равенства (7.5) и (7.6) почленно, найдем

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = \frac{M'H'}{M'N'} + \frac{NH}{NM}. \quad (7.7)$$

По указанному свойству главных плоскостей

$$M'N' = NM, \quad NH = M'N' - M'H'.$$

в результате чего равенство (7.7) принимает вид

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \quad (7.8)$$

Оно позволяет по положению объекта (известно  $s$ ) найти положение изображения, если известны главные фокусные расстояния системы и положение ее главных плоскостей. Как видно, равенство (7.8) совпадает с равенством (5.21), справедливым для одной преломляющей поверхности, только расстояния  $s$ ,  $s'$ ,  $f'$  и  $f$  отсчитываются не от вершин преломляющей поверхности, а от главных плоскостей системы.

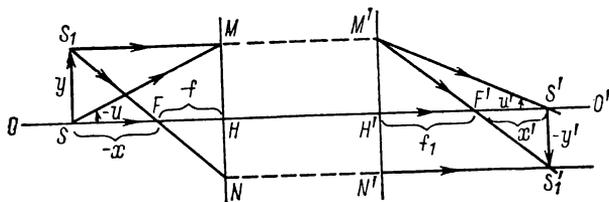


Рис. 27. К выводу выражения для увеличения, даваемого центрированной системой.

Аналогично для системы сохраняются и другие соотношения, справедливые для одной преломляющей поверхности, если расстояния отсчитывать от главных плоскостей. Покажем это на примере выражения для линейного увеличения  $\beta$ . Главные фокусные расстояния  $f$  и  $f'$  системы будем отсчитывать от ее главных плоскостей  $H$  и  $H'$ , а положение объекта и его изображения определим соответственно отрезками  $x$  и  $x'$ , отсчитанными от главных фокусов  $F$  и  $F'$  (рис. 27). Пусть  $y$  — длина объекта, а  $y'$  — длина его изображения. Из треугольников  $\triangle S_1' S' F'$  и  $\triangle H' M' F'$  имеем

$$\frac{-y'}{M'H'} = \frac{x'}{f'}.$$

По свойству главных плоскостей  $M'H' = y$ , откуда

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f'}. \quad (7.9)$$

Из треугольников  $\triangle SS_1F$  и  $\triangle HNF$  также найдем второе выражение для  $\beta$

$$\beta = -\frac{f}{x}. \quad (7.10)$$

Из равенств (7.9) и (7.10) вытекает, что по отношению к системе справедлива формула Ньютона:

$$xx' = ff'. \quad (7.11)$$

Если объект лежит в первой главной плоскости, то  $x = -f$ , и из формулы Ньютона (7.11) получаем  $x' = -f'$ , т. е. что изображение попадает во вторую главную плоскость. Из соотношения (7.9) при этом имеем  $\beta = +1$ . Таким образом, главные плоскости являются сопряженными плоскостями системы, которым соответствует линейное увеличение  $\beta = +1$ .

Введем в рассмотрение наряду с линейным увеличением  $\beta$  еще так называемые угловое и продольное увеличения.

В инварианте Лагранжа — Гельмгольца (7.4)  $u$  есть угол образуемый лучом с оптической осью в пространстве объекта, а  $u'$  — угол, составляемый тем же лучом с оптической осью в пространстве изображения (см. рис. 27). Угловым увеличением называется величина

$$\gamma = \frac{u'}{u}. \quad (7.12)$$

Из инварианта Лагранжа — Гельмгольца получаем

$$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{y}{y'}.$$

Отсюда вытекает связь между угловым и линейным увеличениями

$$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta}. \quad (7.13)$$

Под продольным увеличением  $\alpha$  подразумевается отношение

$$\alpha = \frac{dx'}{dx}, \quad (7.14)$$

где  $dx$  — смещение объекта вдоль оптической оси, а  $dx'$  — соответствующее ему смещение изображения. Дифференцируя формулу Ньютона (6.11), напишем

$$x dx' + x' dx = 0,$$

откуда для продольного увеличения  $\alpha$  получим

$$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x}. \quad (7.15)$$

Найдем связь между всеми тремя увеличениями: линейным  $\beta$ , угловым  $\gamma$  и продольным  $\alpha$ . Для этого воспользуемся выражениями (7.9) и (7.10), из которых следует

$$\beta^2 = \frac{x' f}{x f'},$$

но  $f/f' = -n/n'$ , откуда находим

$$\beta^2 = -\frac{x'}{x} \frac{n}{n'},$$

Сравнивая эти выражения с (7.15), получим

$$\alpha = \frac{n'}{n} \beta^2.$$

и, наконец, на основании (7.13) можем написать

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma}.$$

### § 8. Нахождение главных плоскостей и главных фокусов системы

Для одной преломляющей сферической поверхности, разделяющей среды с коэффициентами преломления  $n$  и  $n'$ , фокусные расстояния отсчитываются от ее вершины. Отсюда из условий, определяющих положение главных плоскостей ( $x = -f$ ,  $x' = -f'$ ), вытекает: для одной преломляющей поверхности обе главные плоскости совпадают друг с другом и совпадают с плоскостью, касательной к преломляющей поверхности в ее вершине.

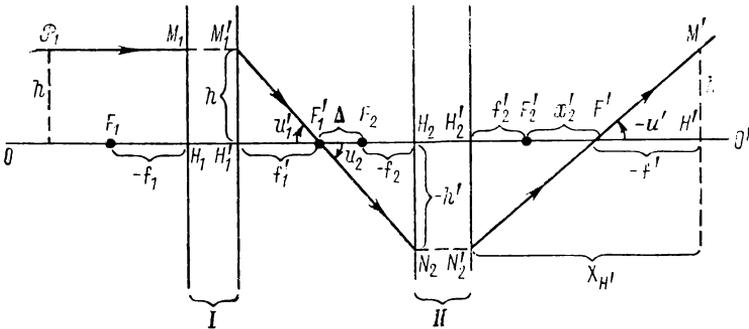


Рис. 28. Нахождение главных плоскостей и главных фокусов системы.

Очевидно, положение главных плоскостей и главных фокусов системы можно найти, если знать, как они определяются по положению главных плоскостей и главных фокусов тех подсистем, на которые данная система может быть разбита.

Для этого сперва рассмотрим следующую задачу: пусть две центрированные системы  $I$  и  $II$  заданы своими главными плоскостями  $H_1, H_1'$  и  $H_2, H_2'$  и главными фокусами  $F_1, F_1'$  и  $F_2, F_2'$  (рис. 28). Расположение систем друг относительно друга определим расстоянием  $\Delta'$  между вторым главным фокусом  $F_1'$  системы  $I$  и первым главным фокусом  $F_2$  системы  $II$ . Рассмотрим последовательное прохождение определенного луча через обе системы. В качестве такого луча возьмем луч  $P_1M_1$  (рис. 28), идущий параллельно оптической оси  $OO'$  на расстоя-

нии  $h$  от нее. Продолжение этого луча пересечет вторую главную плоскость системы  $I$  в точке  $M'_1$ , лежащей также на расстоянии  $h$  от оптической оси  $OO'$ . После преломления в системе  $I$  этот луч пересечет оптическую ось в точке  $F'_1$ , которая является вторым главным фокусом системы  $I$ , и упадет на первую главную плоскость системы  $II$  в некоторой точке  $N_2$ . Пусть расстояние точки  $N_2$  от оптической оси  $OO'$  равно  $h'$ . По свойству главных плоскостей этот луч (или его продолжение) пересечет вторую главную плоскость системы  $II$  в точке  $N'_2$ , лежащей также на расстоянии  $h'$  от оси  $OO'$ . После этого он пересечет оптическую ось  $OO'$  в точке  $F'$ . Эта точка будет вторым главным фокусом всей системы, так как в ней пересекаются два луча, бывших до падения на систему параллельными друг другу: луч  $P_1M_1$  и луч  $ON_1$ , идущий вдоль оптической оси системы  $OO'$ .

Положение точки  $F'$  относительно второго главного фокуса  $F'_2$  системы  $II$  определим отрезком  $x'_2$ . Поскольку луч  $N'_2F'$  до падения на систему  $II$  проходил через точку  $F'$ , то по формуле Ньютона (7.11)

$$-\Delta \cdot x'_2 = f_2 f'_2,$$

откуда для  $x'_2$  получаем

$$x'_2 = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta}. \quad (8.1)$$

Это равенство позволяет найти положение второго главного фокуса  $F'$  всей системы по отношению ко второму главному фокусу  $F'_2$  системы  $II$ .

Положение второй главной плоскости всей системы можно найти на основании следующего соображения: луч  $P_1M_1$  должен пересекать первую главную плоскость всей системы на расстоянии  $h$  от оптической оси  $OO'$ . Следовательно, после преломления во всей системе этот луч должен пересечь и вторую главную плоскость всей системы на том же расстоянии  $h$  от оси  $OO'$ . Найдем на луче  $N'_2F'$  такую точку  $M'$ , которая лежала бы от оптической оси  $OO'$  на расстоянии  $h$ . Тогда плоскость  $M'H'$ , перпендикулярная к оси  $OO'$ , и явится второй главной плоскостью всей системы. Раньше чем найти ее положение, найдем второе главное фокусное расстояние  $f'$  всей системы. По определению оно равно расстоянию от точки  $H'$  до точки  $F'$ .

Введем в рассмотрение углы  $u'_1$ ,  $u_2$ ,  $u'_2$  и  $u'$ , под которыми луч  $P_1M_1M'_1N_2N'_2F'M'$  пересекает оптическую ось  $OO'$ . Из рис. 28 имеем

$$u'_1 = u_2, \quad u' = u'_2,$$

откуда следует

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u_2}{u_2}. \quad (8.2)$$

Далее из рис. 28 видим, что

$$h = u_1' f_1' = u' f',$$

$$-h' = u_2 (\Delta - f_2) = -u_2' (x_2' + f_2').$$

Из этих двух равенств получаем

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{f'}{f_1'},$$

$$-\frac{u_2'}{u_2} = \frac{x_2' + f_2'}{\Delta - f_2},$$

откуда в силу соотношения (8.2) между углами находим следующее выражение для второго главного фокусного расстояния системы:

$$f' = -f_1' \frac{x_2' + f_2'}{\Delta - f_2}.$$

Подставив сюда вместо  $x_2'$  его значение по (8.1), окончательно получим

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \quad (8.3)$$

Путем совершенно аналогичного рассуждения, рассматривая луч, который после преломления в системе становится параллельным оптической оси, найдем для первого главного фокусного расстояния системы

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}. \quad (8.4)$$

Формулы (8.3) и (8.4) дают второе и первое главные фокусные расстояния системы, соответственно отсчитанные от второй и первой главных плоскостей системы. Для полного решения задачи остается найти положение этих плоскостей.

Положение второй главной плоскости всей системы  $H'M'$  определим по отношению ко второй главной плоскости системы  $II$ , т. е. отрезком  $H_2' H'$ , который обозначим через  $X_{H'}$ . Из рис. 28 имеем

$$X_{H'} = f_2' + x_2' - f'.$$

Подставляя сюда  $x_2'$  и  $f'$  по (8.1) и (8.3), найдем

$$X_{H'} = f_2' \frac{\Delta + f_1' - f_2}{\Delta}. \quad (8.5)$$

Аналогично найдем, что положение первой главной плоскости всей системы относительно первой главной плоскости системы  $I$  определится отрезком

$$X_H = f_1 \frac{\Delta + f_1' - f_2}{\Delta}. \quad (8.6)$$

Формулы (8.3) — (8.6) позволяют определить главные фокусные расстояния  $f$  и  $f'$  и положения главных плоскостей системы, состоящей из двух подсистем  $I$  и  $II$ , каждая из которых, в свою очередь, задана своими главными фокусами и главными плоскостями. Подчеркнем еще раз, что фокусные расстояния  $f$  и  $f'$  всей системы отсчитываются соответственно относительно первой и второй ее главных плоскостей, а положение ее главных плоскостей соответственно относительно первой главной плоскости первой системы и второй главной плоскости второй системы.

Любая центрированная система задана, если заданы радиусы кривизны образующих ее поверхностей, расстояния между ними и коэффициенты преломления сред, разграничиваемых поверхностями. Расчет всей системы должен вестись путем последовательного применения выведенных формул сперва для первых двух преломляющих поверхностей, потом для их совокупности, рассматриваемой вместе с третьей и т. д.

### § 9. Телескопическая система

Рассмотрим частный случай системы, называемой телескопической, которая состоит из двух подсистем. Телескопическая система образована двумя центрированными системами  $I$  и  $II$  (рис. 29),

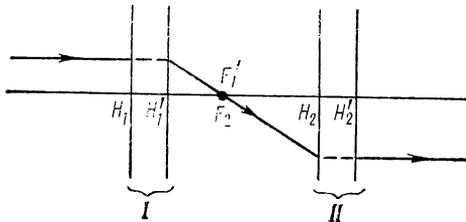


Рис. 29. Телескопическая система.

расположенными так, что второй главный фокус  $F_1'$  системы  $I$  совпадает с первым главным фокусом  $F_2$  системы  $II$ . В этом случае  $\Delta=0$  и по формулам предыдущего параграфа получается, что главные фокусы и главные плоскости телескопической системы лежат

в бесконечности. Ее оптическая сила  $\Phi$  равна нулю. Параллельный пучок лучей, падающий на телескопическую систему, выходит из нее в виде параллельного пучка.

Несмотря на то что оптическая сила телескопической системы равна нулю, она дает изображение. Это кажущееся парадоксальным обстоятельство вызвано тем, что ее главные фокусы и главные плоскости лежат в бесконечности, поэтому невозможно формальное применение формул § 8.

Для нахождения изображения, даваемого телескопической системой, воспользуемся построением, приведенным на рис. 30. Пусть системы  $I$  и  $II$  заданы положением их главных плоскостей  $H_1, H_1'$  и  $H_2, H_2'$  и главных фокусов  $F_1, F_1'$  и  $F_2, F_2'$ . Первый главный фокус второй системы  $F_2$  совпадает со вторым главным фокусом  $F_1'$  первой системы ( $\Delta = 0$ ).

Рассмотрим объект  $SS_1$ , расположенный за первым главным фокусом системы  $I$ . Луч, исходящий из конца объекта  $S_1$  и проходящий через первый главный фокус  $F_1$  системы  $I$ , пересечет ее первую главную плоскость  $H_1$  в некоторой точке  $N_1$  и пойдет в пространстве между системами параллельно оптической оси. Поэтому, выйдя из системы  $II$ , он пройдет через второй ее главный фокус  $F_2'$ . В качестве второго луча возьмем луч  $S_1M_1$ , идущий в пространстве объекта параллельно оптической оси. Он пройдет через второй главный фокус системы  $I$ . Так как этот фокус совпадает с первым главным фокусом  $F_2$  системы  $II$ , то в пространстве изображения он пойдет параллельно оптической оси. Точка пересечения лучей 1 и 2  $S_1'$  явится изображением конца объекта  $S_1$ . Весь объект  $SS_1$  отображается стрелкой  $S'S_1'$ , перпендикулярной к оптической оси.

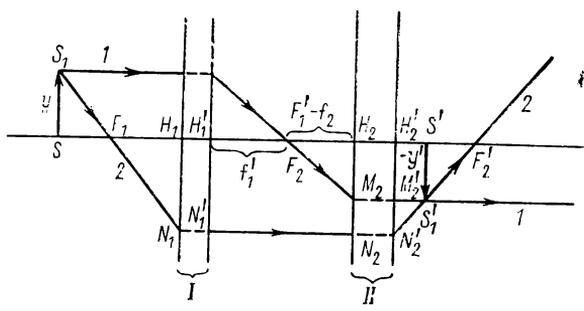


Рис. 30. Построение изображения, даваемого телескопической системой.

Легко определить линейное увеличение  $\beta$ , даваемое телескопической системой. Из рис. 30 видно, что длина объекта  $y = M_1H_1 = M_1'H_1'$ , а длина изображения —  $y' = M_2H_2' = M_2H_2$ , откуда из подобия треугольников  $\triangle M_1'H_1'F$  и  $\triangle M_2H_2F_1'$  имеем

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f_1'} = -\frac{f_2}{f_1}, \quad (9.1)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  соответственно первые главные фокусные расстояния систем  $I$  и  $II$ .

Из формулы (9.1) видно, что линейное увеличение телескопической системы определяется только отношением главных фокусных расстояний образующих ее систем и не зависит от положения объекта.

Угловое увеличение телескопической системы  $\gamma$  найдем на основании формулы (7.13), по которой

$$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta}. \quad (92)$$

Если телескопическая система находится в воздухе, то  $n = n' \approx 1$  и по (9.2) и (9.1)

$$\gamma = -\frac{f_1}{f_2},$$

т. е. угловое увеличение телескопической системы по численному значению тем больше, чем больше главное фокусное расстояние первой системы и чем меньше главное фокусное расстояние второй.

### § 10. Толстые и тонкие линзы

Линзами, как известно, называются оптические приспособления, изготавливаемые из прозрачного преломляющего вещества и ограниченные сферическими поверхностями. В частном случае одна из сферических поверхностей может быть плоской. Толстыми называются линзы, расстоянием  $d$  между преломляющими поверхностями которых (рис. 31) нельзя пренебрегать по сравнению с фокусными расстояниями преломляющих поверхностей.

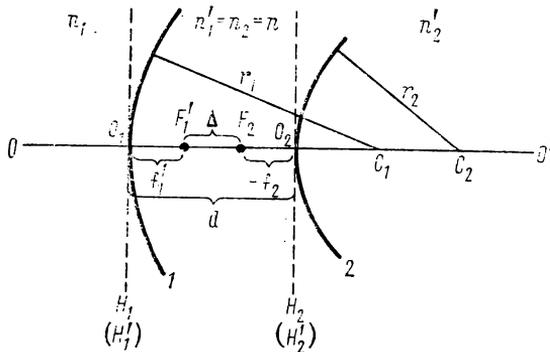


Рис. 31. Толстая линза.

Будем считать для простоты, что среда, окружающая линзу, имеет коэффициент преломления, равный единице (пуста, практически воздух). Коэффициент преломления вещества, из которого изготовлена линза, обозначим через  $n$ . Преломляющие поверхности отметим индексами 1 и 2, тогда согласно принятой системе записи  $n_1 = n_2' = 1$ ;  $n_1' = n_2 = n$ . Радиусы кривизны поверхностей  $r_1$  и  $r_2$  отсчитываем от поверхностей к центрам (рис. 31). Главные плоскости первой преломляющей поверхности  $H_1$  и  $H_1'$  совпадают друг с другом и совпадают с плоскостью, касательной к ее вершине  $O_1$ . То же имеет место и по отношению ко второй преломляющей поверхности.

Для первого и второго главных фокусных расстояний линзы  $f$  и  $f'$  по формулам (8.4) и (8.3) имеем

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad (10.1)$$

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}, \quad (10.2)$$

где  $f_1, f'_1$  и  $f_2, f'_2$  — соответственно первые и вторые главные фокусы первой и второй преломляющих поверхностей. Так как по отношению к фокусным расстояниям одной преломляющей поверхности по (5.19) справедливы соотношения

$$\frac{f'_1}{f_1} = -\frac{n'_1}{n_1} = -n, \quad \frac{f'_2}{f_2} = -\frac{n'_2}{n_2} = -\frac{1}{n},$$

то из (10.1) и (10.2) следует

$$f = -f', \quad (10.3)$$

т. е. что первое и второе фокусные расстояния толстой линзы численно равны друг другу (при  $n_1 = n_2$ ), но имеют разные знаки.

Преобразуем выражения (10.1) и (10.2), заметив (рис. 31), что

$$\Delta = d - f'_1 + f_2. \quad (10.4)$$

Подставляя это значение  $\Delta$  в (10.2), получим для второго главного фокусного расстояния толстой линзы

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{d - f'_1 + f_2}.$$

Отсюда для оптической силы толстой линзы  $\Phi = \Phi = 1/f'$ , имеем

$$\Phi = -\frac{d - f'_1 + f_2}{f'_1 f'_2}.$$

Так как  $f_2/f'_2 = -n_2/n'_2 = -n$ , то последнее равенство может быть переписано в виде

$$\Phi = \frac{n}{f'_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2}. \quad (10.5)$$

Величина  $n/f'_1$  есть оптическая сила первой преломляющей поверхности  $\Phi_1$ , величина  $1/f_2$  — оптическая сила второй преломляющей поверхности  $\Phi_2$ . Поэтому из (10.5) находим

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2. \quad (10.6)$$

Это соотношение позволяет определить оптическую силу толстой линзы  $\Phi$  по оптическим силам первой и второй пре-

ломляющих поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  и по толщине линзы  $d$ . Напомним, что в соответствии с формулой (5.13) для оптических сил  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  преломляющих поверхностей имеют место равенства

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{r_1}, \quad \Phi_2 = \frac{1-n}{r_2} \quad (10.7)$$

(в соответствии с рис. 31 здесь положено, что  $n_1 = n_2' = 1$ ).

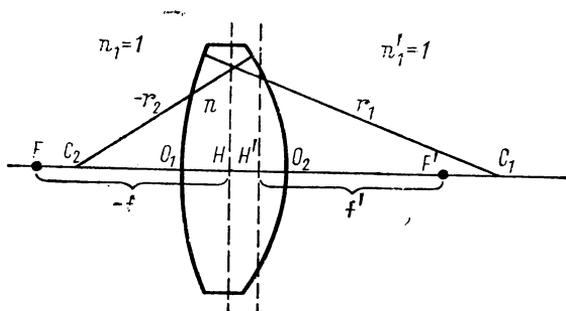


Рис. 32. Главные плоскости  $H$  и  $H'$ , главные фокусы  $F$  и  $F'$  толстой двояковыпуклой линзы.

Для нахождения первой главной плоскости толстой линзы воспользуемся формулой (8.6). Подставляя в числитель этой формулы вместо  $\Delta$  его значение по (10.4), получим

$$X_H = f_1 \frac{d}{\Delta},$$

что можно также переписать в виде

$$X_H = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \frac{d}{f_2}.$$

Величина  $f_1 f_2 / \Delta$  по (10.1) равна первому главному фокусному расстоянию толстой линзы  $\hat{f}$ , откуда получим

$$X_H = \hat{f} \frac{d}{f_2}.$$

Преобразуем это выражение, введя вместо фокусных расстояний оптические силы. Имеем  $1/\hat{f}_2 = -\Phi/n$ ,  $\hat{f} = -1/\Phi$ , где  $\Phi$  — оптическая сила толстой линзы. Отсюда окончательно получаем для  $X_H$  следующее выражение:

$$X_H = \frac{d}{n} \frac{\Phi_2}{\Phi}. \quad (10.8)$$

Аналогично для положения второй главной плоскости толстой линзы по (8.5) найдем

$$X_{H'} = -\frac{d}{n} \frac{\Phi_1}{\Phi}. \quad (10.9)$$

Расстояние  $X_H$  отсчитывается от первой вершины толстой линзы  $O_1$  (рис. 31), а расстояние  $X_{H'}$  — от ее второй вершины  $O_2$ .

Пользуясь формулами (10.8) и (10.9), легко показать, что в случае толстой двояковыпуклой линзы (рис. 32) главные плоскости  $H$  и  $H'$  лежат внутри линзы и при неравенстве численных значений радиусов кривизны  $r_1$  и  $r_2$  несимметрично по отношению к ее поверхностям. Оба главных фокусных расстояния толстой линзы  $f$  и  $f'$  численно равны друг другу, но поскольку их надо отсчитывать от соответственных главных поверхностей, то первый и второй главные фокусы, вообще говоря, лежат не на одинаковых расстояниях от вершин линзы  $O_1$  и  $O_2$ .

Аналогично находится положение главных плоскостей и главных фокусов толстых линз любой формы. На рис. 33 приведены случаи: двояковогнутой линзы (а), плосковыпуклой (б), менисковых линз — положительной (в) и отрицательной (г).

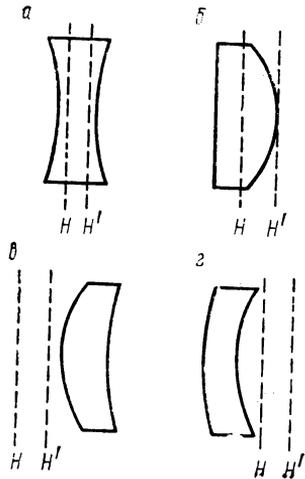


Рис. 33. Положение главных плоскостей двояковогнутой линзы (а); плосковыпуклой (б); положительного мениска (в); отрицательного мениска (г).

В качестве конкретного примера рассмотрим подробно положительный мениск, характеризующий следующими данными:  $n = 1,56$ ,  $d = 3$  см,  $r_1 = 8$  см,  $r_2 = 10$  см (рис. 34).

Для оптических сил первой и второй преломляющих поверхностей линзы по (10.7) получаем

$$\Phi_1 = \frac{0,56}{0,08} = 7,0 \text{ D}, \quad \Phi_2 = -\frac{0,56}{0,10} \text{ D} = -5,6 \text{ D}.$$

Оптическая сила линзы по (9.6) равна

$$\Phi = 7,0 - 5,6 + \frac{0,03}{1,56} \cdot 7 \cdot 5,6 = 2,15 \text{ D}.$$

Отсюда для главных фокусов линзы получаем

$$f'_1 = f = \frac{1}{\Phi} = 0,465 \text{ м} = 46,5 \text{ см}.$$

Положение главных плоскостей находим по формулам (10.8) и (10.9)

$$X_H = -\frac{0,03}{1,56} \cdot \frac{5,6}{2,15} \text{ м} = -5,01 \text{ см},$$

$$X_{H'} = -\frac{0,03}{1,50} \cdot \frac{7,0}{2,15} \text{ м} = -6,26 \text{ см}.$$

Положение главных плоскостей и главных фокусов представлено на рис. 34. Как видно, обе главные плоскости лежат перед линзой. Главные фокусы расположены симметрично относительно главных плоскостей, но они

расположены несимметрично по отношению к самой линзе: первый главный фокус  $F$  лежит на расстоянии 51,5 см от первой вершины линзы  $O_1$ , а второй  $F'$  — на расстоянии 40,2 см от второй вершины  $O_2$ .

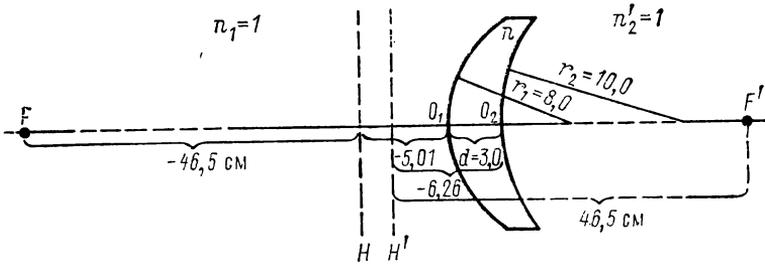


Рис. 34. Положительный мениск.

Рассмотрим теперь тонкую линзу, толщина  $d$  которой настолько мала, что ею можно пренебречь по сравнению с длинами главных фокусных расстояний и расстояний от линзы до объекта и до изображения. В таком приближении обе главные плоскости линзы  $H$  и  $H'$  совпадают друг с другом и их можно провести через среднюю точку линзы  $O$  (рис. 35).

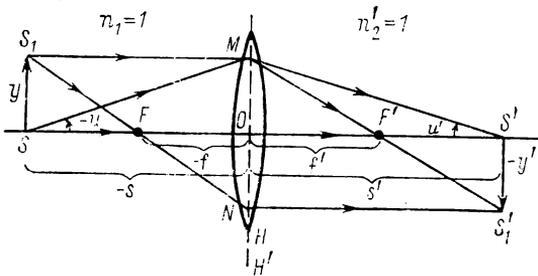


Рис. 35. Тонкая линза.

От этой точки отсчитываются и фокусные расстояния  $f$  и  $f'$  и расстояния до объекта и изображения  $s$  и  $s'$ . В соответствии с этим в формуле (10.6) можно пренебречь членом, содержащим  $d$ , в результате чего получится, что оптическая сила тонкой линзы  $\Phi$  равна сумме оптических сил ее преломляющих поверхностей

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (10.10)$$

Воспользовавшись формулой (5.13), отсюда получим для оптической силы тонкой линзы (при условии, что линза находится в пустоте или в воздухе, для которого можно положить

$$n_1 = n_2' = 1)$$

$$\Phi = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (10.11)$$

и соответственно для главных фокусных расстояний тонкой линзы

$$f' = -f = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{(n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}.$$

Формула (6.8), связывающая положение изображения с положением объекта, примет вид

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (10.12)$$

Для геометрического построения изображения, даваемого тонкой линзой, можно пользоваться лучом  $S_1M$  (рис. 35), параллельным оптической оси, который после преломления в линзе пройдет через ее второй главный фокус  $F'$ , и лучом  $S_1N$ , проходящим через первый главный фокус  $F$ ; после преломления он пойдет параллельно оптической оси. Оба луча пересекутся в точке  $S_1'$ , которая и будет изображением точки  $S_1$ .

Если линза помещена в однородную среду и  $n_1 = n_2' = 1$ , то инвариант Лагранжа — Гельмгольца примет вид  $y'u' = yu$ , что позволяет переписать выражение для линейного увеличения  $\beta$  следующим образом:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{u}{u'},$$

но из рис. 35 видно, что  $u/u' = s'/s$ , откуда для линейного увеличения тонкой линзы получаем

$$\beta = \frac{s'}{s}. \quad (10.13)$$

Рассмотрим теперь систему, состоящую из двух тонких линз на конечном расстоянии  $d$  друг от друга (рис. 36). Каждую из тонких линз можно рассматривать как одну преломляющую поверхность соответственно с оптической силой  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Считая, что линзы находятся в воздухе, получим по формуле (10.6) для оптической силы  $\Phi$  системы, образованной обеими тонкими линзами:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2. \quad (10.14)$$

По формулам (10.8) и (10.9) найдем величины  $X_H$  и  $X_{H_1}$ , определяющие положение главных плоскостей системы:

$$X_H = d \frac{\Phi_2}{\Phi_1}, \quad X_{H'} = -d \frac{\Phi_1}{\Phi}. \quad (10.15)$$

Величина  $X_H$  должна быть отсчитана от первой линзы, а  $X_{H_1}$  — от второй.

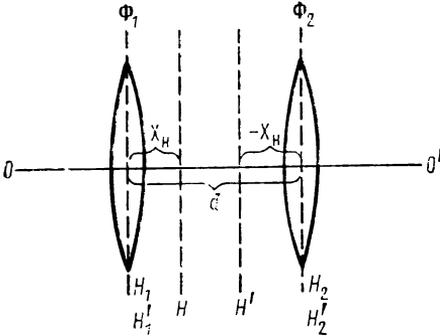


Рис. 36. Две тонкие линзы на расстоянии  $d$  друг от друга.

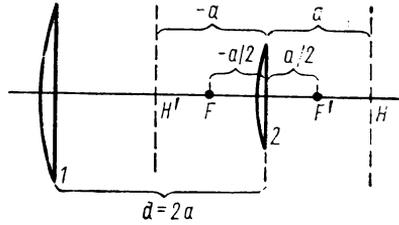


Рис. 37. Окуляр Гюйгенса.

В качестве примера рассмотрим так называемый окуляр Гюйгенса, состоящий из двух положительных тонких линз 1 и 2 (рис. 37), фокусное расстояние одной из которых равно  $a$ , а другое вдвое больше.

$$f'_2 = a, \quad f'_1 = 3a.$$

Расстояние между линзами  $d = 2a$ .

Определим положение главных плоскостей и главных фокусов этой системы. Для оптических сил обеих линз имеем

$$\Phi_1 = \frac{1}{f'_1} = \frac{1}{3a}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{a}.$$

Оптическая сила всей системы по (8.14) равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 = \frac{3}{2a}.$$

Отсюда получаем, что фокусные расстояния системы равны

$$f' = -f = \frac{1}{\Phi} = \frac{3}{2}a.$$

Положение главных плоскостей системы находим по формулам (10.15)

$$X_H = d \frac{\Phi_2}{\Phi} = 3a, \quad X_{H'} = -d \frac{\Phi_1}{\Phi} = -a.$$

Из этих выражений видно, что первая главная плоскость  $H$  лежит вне системы правее второй линзы на расстоянии  $a$  от нее. Вторая главная плоскость  $H'$  лежит посередине между линзами. Главные фокусы расположены симметрично относительно второй линзы на расстояниях  $+a/2$  и  $-a/2$  от нее.

## § 11. Световой поток, проходящий через оптическую систему

С практической точки зрения весьма важно знать, каков световой поток, проходящий через оптическую систему, какова яркость даваемого ею изображения и какова освещенность в пределах изображения. Для того чтобы выяснить эти вопросы, рассмотрим сперва одну тонкую линзу  $AB$  (рис. 38), окруженную однородной средой, например воздухом. Расчеты будем вести в гауссовом приближении.

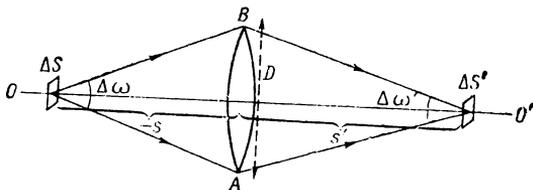


Рис. 38. К подсчету светового потока, проходящего через линзу.

Пусть объектом служит малая прямоугольная площадка  $\Delta S$ , расположенная перпендикулярно к оптической оси линзы. Ее изображением будет прямоугольная площадка  $\Delta S'$ , также нормальная к оптической оси. Отношение площадей изображения и объекта равно квадрату линейного увеличения  $\beta$

$$\frac{\Delta S'}{\Delta S} = \beta^2. \quad (11.1)$$

Пусть яркость объекта равна  $B$ . Световой поток  $\Delta F$ , падающий на линзу, в гауссовом приближении равен

$$\Delta F = B\Delta\omega\Delta S, \quad (11.2)$$

где  $\Delta\omega$  — телесный угол, под которым видна линза  $AB$  из места расположения площадки  $\Delta S$ .

При прохождении через линзу поток  $\Delta F$  уменьшается за счет отражения части лучей от поверхности линзы и за счет поглощения в ее материале. Поэтому через линзу пройдет меньший поток

$$\Delta F' = \tau\Delta F,$$

где  $\tau$  — пропускание линзы; очевидно  $\tau < 1$ . Чем больше потери света в линзе, тем меньше  $\tau$ . Подставляя сюда вместо  $\Delta F$  его значение по (11.2), получим для величины светового потока, прошедшего через линзу, следующее выражение:

$$\Delta F' = \tau B\Delta\omega\Delta S. \quad (11.3)$$

Поскольку телесный угол  $\Delta\omega$  мы считаем малым, для него приближенно имеем

$$\Delta\omega = \frac{\pi D^2}{4s^2},$$

где  $D$  — диаметр линзы и  $s$  — расстояние от объекта  $\Delta S$  до линзы  $AB$ . Подставляя это значение  $\Delta\omega$  в (11.3), найдем

$$\Delta F' = \frac{\tau\pi}{4} B \left(\frac{D}{s}\right)^2 \Delta S. \quad (11.4)$$

Если источник света  $\Delta S$  расположен в первом главном фокусе линзы, то  $-s = -f$ , и для потока  $\Delta F'$ , проходящего через линзу, получим

$$\Delta F' = \frac{\tau\pi}{4} B \left(\frac{D}{f}\right)^2 \Delta S. \quad (11.5)$$

Величина  $(D/f)^2$  называется светосилой линзы, а  $D/f$  — ее относительным отверстием.

Теперь определим яркость  $B'$  изображения  $\Delta S'$ . Поток  $\Delta F'$ , вышедший из линзы, целиком пройдет через площадку  $\Delta S'$ . Заключен этот поток в пределах телесного угла  $\Delta\omega'$ , под которым видна линза  $AB$  из места расположения изображения  $\Delta S'$ . Таким образом, направо от изображения будет распространяться световой поток  $\Delta F'$ , исходящий из площадки  $\Delta S'$  и заключенный в пределах телесного угла  $\Delta\omega'$ . Поэтому яркость  $B'$  площадки  $\Delta S'$  в принятом приближении равна

$$B' = \frac{\Delta F'}{\Delta\omega' \Delta S'}. \quad (11.6)$$

Из этого выражения получаем

$$\Delta F' = B' \Delta\omega' \Delta S' = B' \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{s'}\right)^2 \Delta S', \quad (11.7)$$

где  $s'$  — расстояние от линзы до изображения. Из (11.7) и (10.4) находим

$$B' = \tau B \left(\frac{s'}{s}\right)^2 \frac{\Delta S}{\Delta S'},$$

но по (11.1) и (10.10)

$$\frac{\Delta S}{\Delta S'} = \frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{s}{s'}\right)^2,$$

откуда вытекает, что

$$B' = \tau B. \quad (11.8)$$

Поскольку пропускание  $\tau$  зависит только от потерь света в линзе, из формулы (11.8) следует: если по обе стороны от линзы лежит среда с одинаковым коэффициентом преломления, то яркость изображения  $B'$  определяется только яркостью объек-

та  $B$  и потерями, возникающими при прохождении света через линзу. Так как пропускание  $\tau$  всегда меньше единицы, то яркость изображения всегда меньше яркости объекта. Приблизить яркость изображения к яркости объекта можно лишь за счет уменьшения потерь света в линзе. Обычно употребляемые материалы (стекло) настолько прозрачны в видимой области, что потери света происходят главным образом за счет отражений от обеих поверхностей линзы. Пусть  $r$  — коэффициент отражения. Тогда через первую поверхность линзы пройдет  $(1-r)$ -я часть падающего на нее потока, а через обе поверхности  $(1-r)^2$ -я часть. Следовательно, если пренебрегать поглощением света в материале линзы, то  $\tau = (1-r)^2$ . Для прозрачных веществ коэффициент отражения  $r$  определяется по формулам Френеля (§ 17). При нормальном падении света на линзу можно считать  $r = \left[ \frac{(n-1)}{(n+1)} \right]^2$ , где  $n$  — коэффициент преломления, из которого сделана линза. При  $n = 1,5$  это дает для  $r$  значение  $\sim 0,04$  и для  $\tau \approx 0,96^2 = 0,92$ .

Яркость изображения может быть повышена лишь за счет различных коэффициентов преломления сред, лежащих по обе стороны от линзы. Если в пространстве объекта коэффициент преломления равен  $n$ , а в пространстве изображения он равен  $n'$ , то вместо (11.8) будет справедливо равенство (см. ч. 1, § 3)

$$B' = \tau B \left( \frac{n'}{n} \right)^2. \quad (11.9)$$

Во многих случаях существенно знать освещенность  $E'$  в пределах изображения. Если  $\Delta F'$  — поток, выходящий из линзы и образующий изображение, то

$$E' = \frac{\Delta F'}{\Delta S'}.$$

Подставляя сюда вместо  $\Delta F'$  его значение по (11.2) и замечая, что  $\frac{\Delta S}{\Delta S'} = \frac{1}{\beta^2}$ , получим

$$E' = \tau B \frac{\Delta \omega}{\beta^2}. \quad (11.10)$$

Отсюда видно, что освещенность в пределах изображения определяется яркостью объекта  $B$ , зависит от телесного угла  $\Delta \omega$ , под которым видна линза из места расположения объекта, и от квадрата линейного увеличения  $\beta$ .

Выражение (11.10) можно преобразовать, приняв во внимание, что

$$\Delta \omega = \Delta \omega' \left( \frac{s'}{s} \right)^2 = \Delta \omega' \beta^2.$$

Тогда для  $E'$  получаем

$$E' = \tau B \Delta \omega'. \quad (11.11)$$

Из этой формулы видно, что освещенность в пределах изображения определяется телесным углом  $\Delta\omega'$ , под которым лучи, выходящие из линзы, сходятся к изображению.

## § 12. Действующая диафрагма

Обобщим теперь полученные в предыдущем параграфе соотношения на любую центрированную оптическую систему. Так как любую систему можно представить состоящей из отдельных линз, то по отношению к системе остается в силе вывод, что если объект и изображение лежат в средах с одинаковыми коэффициентами преломления, то яркость изображения всегда меньше яркости объекта. При этом пропускание  $\tau$  может оказаться существенно меньше единицы. Для системы, состоящей из  $p$  преломляющих поверхностей, при пренебрежении поглощением света в материале линз  $\tau = (1-r)^p$ . При  $r = 0,04$  и  $p = 6$  (система из трех отдельно расположенных линз)  $\tau = 0,96^6 \approx 0,78$ , т. е. за счет отражений произойдет потеря свыше 20% света. О способах уменьшения потерь при отражениях будет сказано ниже (§ 28).

Однако, кроме указанных потерь за счет отражений, в сложной системе световой поток может уменьшаться и за счет ограничений оправками линз и диафрагмами. Диафрагмы вводятся в системы для уменьшения aberrаций или увеличения резкости изображения в одной плоскости предметов, находящихся на разных расстояниях от системы. При наличии диафрагм обычно они, а не оправы линз ограничивают пучки.

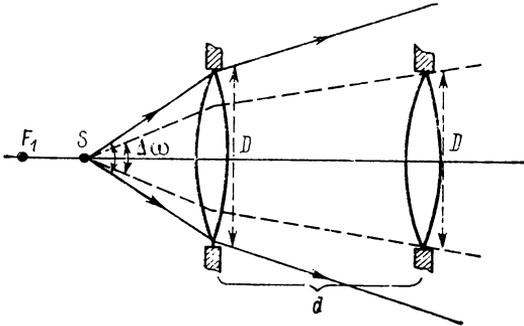


Рис. 39. Поток, проходящий через две линзы, расположенные на расстоянии друг от друга.

Рассмотрим вопрос более подробно, взяв вначале для простоты систему, состоящую из двух тонких линз одинакового диаметра  $D$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$  (рис. 39). Если точечный источник  $S$  лежит между первой линзой и ее первым главным фокусом  $F_1$ , то лишь часть лучей, пропущенных первой линзой, пройдет через вторую линзу.

В результате через систему пройдет поток, испускаемый источником  $S$  в пределах телесного угла  $\Delta\omega$ , меньшего того телесного угла, под которым из места расположения объекта  $S$  видна первая линза. Если бы источник  $S$  лежал за первым главным фокусом  $F_1$ , то из первой линзы выходил бы сходящийся пучок и вторая линза была бы не целиком заполнена светом. Телесный угол  $\Delta\omega'$ , под которым лучи выходили бы в этом случае из второй линзы, был бы меньше того телесного угла, под которым вторая линза видна из места расположения изображения  $S_1'$ .

Та оправа или диафрагма, которая ограничивает пучки лучей, проходящие через систему, носит название действующей или апертурной диафрагмы. Для того чтобы дать

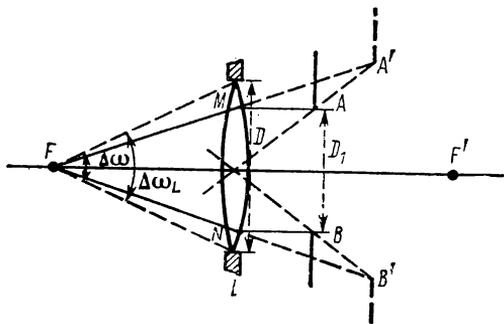


Рис. 40. Поток, проходящий через систему из линзы  $L$  и диафрагмы  $AB$ .

способ нахождения действующей диафрагмы, рассмотрим сперва простейшую систему, состоящую из одной тонкой линзы  $L$  и центрированной с ней круговой диафрагмой  $AB$  (рис. 40). Пусть диафрагма отстоит от линзы на расстоянии, меньшем главного фокусного расстояния линзы  $f'$ . Будем считать, что диаметр диафрагмы  $D_1$  меньше диаметра линзы  $D$ . Пусть точечный источник света лежит в первом главном фокусе  $F$ . Как видно из рисунка, лучи  $FMA$  и  $FNB$  будут теми лучами, которые ограничивают пучок лучей, испускаемый из точки  $F$  и проходящий через диафрагму. На продолжениях лучей  $FM$  и  $FN$  лежит мнимое изображение  $A'B'$  диафрагмы  $AB$ , даваемое линзой  $L$ . Таким образом, телесный угол  $\Delta\omega$ , в пределах которого заключены лучи, исходящие из точки  $F$  и проходящие через систему, равен телесному углу, под которым видно изображение диафрагмы  $A'B'$  с места, где находится источник. В рассматриваемом частном случае угол  $\Delta\omega$  меньше угла  $\Delta\omega_L$ , под которым видна оправа линзы  $L$  из места расположения источника. Следовательно, диафрагма  $AB$  является действующей диафрагмой. Если бы диаметр диафрагмы  $D_1$  был больше диаметра линзы  $D$ , то угол  $\Delta\omega_L$  оказался бы меньше угла  $\Delta\omega$  и действующей диафрагмой явилась бы оправа линзы  $L$ .

Из сказанного вытекает и способ нахождения действующей диафрагмы любой системы. Он сводится к следующему: надо получить изображения всех оправ и диафрагм, даваемые теми частями системы, которые предшествуют данной диафрагме или оправе (считая по ходу лучей от источника). К числу этих

изображений надо отнести и оправу первой линзы. Действующей диафрагмой будет та, изображение которой видно из места расположения объекта под наименьшим телесным углом  $\Delta\omega$ . Изображение действующей диафрагмы предшествующими ей частями системы носит название входного зрачка.

Точно так же вводится понятие о выходном зрачке, для нахождения которого строятся изображения всех диафрагм и оправ линз в последующих за ними частях системы. То изображение, которое видно из места расположения изображения под наименьшим телесным углом, определит выходной зрачок.

Угол между лучами, проведенными из места расположения объекта (лежащего на оси системы) к концам диаметра входного зрачка, называется апертурным углом входа. Угол между лучами, проведенными из места расположения изображения к концам диаметра выходного зрачка, называется апертурным углом выхода.

Телесный угол, под которым виден входной зрачок из места расположения объекта, представляет собой тот телесный угол  $\Delta\omega$ , в пределах которого заключен световой поток, испускаемый источником и проходящий через систему. Так же телесный угол  $\Delta\omega'$ , под которым виден выходной зрачок из места расположения изображения, представляет собой телесный угол, под которым световой поток, выходящий из системы, сходится к изображению. Поэтому эти углы должны фигурировать в формулах (11.2), (11.10) и (11.11), если их относить к системе центрированных преломляющих поверхностей.

Для одной тонкой линзы зрачки входа и выхода совпадают с ее оправой (при отсутствии диафрагмы).

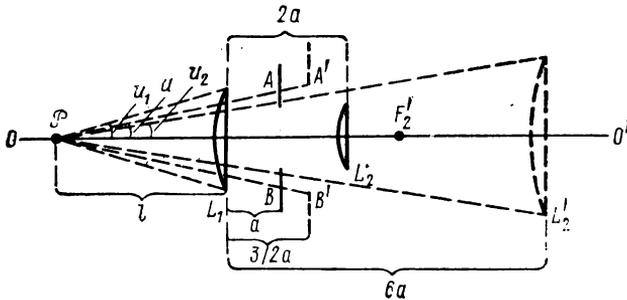


Рис. 41. Зрачок выхода окуляра Гюйгенса.

В качестве примера рассмотрим окуляр Гюйгенса. Пусть посредине между линзами  $L_1$  и  $L_2$ , образующими окуляр, расположена круглая диафрагма  $AB$  (рис. 41). Найдем зрачки входа и выхода и апертурный угол выхода для второго главного фокуса второй линзы окуляра.

Окуляр Гюйгенса состоит из двух линз, фокусные расстояния которых удовлетворяют соотношению  $f_1' = 3f_2' = 3a$ . Расстояние между линзами  $d = 2a$ . Линзы считаем бесконечно тонкими.

Определим положения изображений диафрагм  $AB$  и оправы линзы  $L_2$ , даваемые линзой  $L_1$ . Обозначим положения объекта и его изображения относительно линзы  $L_1$  через  $s$  и  $s'$ , тогда

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \Phi_1, \quad (12.1)$$

где  $\Phi_1$  — оптическая сила линзы  $L_1$ , равна  $\frac{1}{3a}$ .

По условию расстояние диафрагмы  $AB$  от первой линзы равно  $a$ , поэтому  $s = -a$  и из (12.1) находим, что  $s' = -\frac{3}{2}a$ ; линейное увеличение  $\beta = \frac{s'}{s} = \frac{3}{2}$ .

Таким образом, изображение  $A'B'$  диафрагмы  $AB$  лежит между линзами на расстоянии  $\frac{3}{2}a$  от первой линзы, диаметр ее изображения  $D' = \frac{3}{2}D$ , где  $D$  — диаметр диафрагмы.

Для оправы второй линзы  $s = -2a$  и по (12.1)  $s' = -6a$ ; линейное увеличение  $\beta = 3$ . Следовательно, изображение оправы второй линзы лежит на расстоянии  $6a$  от первой линзы направо от нее и имеет диаметр  $D_2' = 3D_2$ , где  $D_2$  — диаметр второй линзы.

Возьмем некоторую точку  $P$ , лежащую слева на расстоянии  $l$  от первой линзы. Для нахождения зрачка входа надо сравнить углы  $2u_1$ ,  $2u$  и  $2u_2$ , под которыми видны из этой точки оправа первой линзы (диаметр  $D_1$ ), изображение диафрагмы  $AB$  и изображение оправы линзы  $L_2$ , даваемые линзой  $L_1$ . Зрачком входа по отношению к точке  $P$  явится либо оправа линзы  $L_1$ , либо изображение диафрагмы или линзы  $L_2$ , в зависимости от того, какой из углов  $u_1$ ,  $u$ ,  $u_2$  будет меньше. Если расстояние  $l$  много больше величины  $a$ , то приближенно

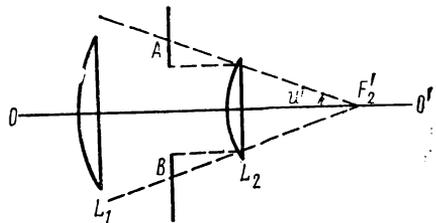


Рис. 42. Зрачок выхода окуляра Гюйгенса.

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{1}{2} \frac{D_1}{l}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{1}{2} \frac{3D}{2l}, \quad \operatorname{tg} u_2 = \frac{1}{2} \frac{3D_2}{l}. \quad (12.2)$$

Из этого соотношения следует, что если диаметры линзы  $L_1$  и  $L_2$  удовлетворяют неравенствам

$$D_1 > \frac{3}{2}D, \quad D_2 > \frac{1}{2}D,$$

то зрачком входа явится изображение диафрагмы, даваемое первой линзой; действующей диафрагмой будет диафрагма  $AB$ .

Зрачок выхода найдем, считая, что действующей является диафрагма  $AB$ . Диафрагма  $AB$  лежит в первой фокальной плоскости линзы  $L_2$ . Отсюда получаем, что зрачок выхода расположен на бесконечности. Он виден из второго главного фокуса  $F_2'$  линзы  $L_2$  (рис. 42) под тем же углом  $u'$ , под которым сходятся к  $F_2'$  лучи, исходящие из концов диафрагмы  $AB$  параллельно оптической оси. Следовательно, апертурный угол  $2u'$  определяется равенством:  $\operatorname{tg} u' = \frac{1}{2} \frac{D}{a}$ .

### § 13. Сферическая aberrация оптических систем

Требование, которое предъявляется к оптической системе, чтобы качество даваемого ею изображения было хорошим, противоречит требованию большой светосилы системы. В самом деле, для сохранения гомоцентричности пучка лучи должны составлять малые углы с оптической осью системы. Для получения же большой светосилы необходимо, чтобы входной зрачок системы был виден из места расположения источника света под возможно большим углом.

При отступлении от условий гауссовой оптики лучи, исходящие из точечного источника, не сходятся в одной точке

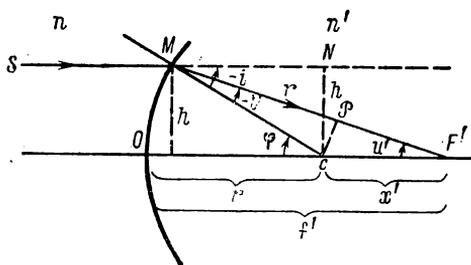


Рис. 43. Преломление у сферической поверхности луча, идущего на расстоянии  $h$  от оси.

(§ 5). Вместо точечного изображения получается кружок рассеяния и качество изображения портится. Такое явление носит название сферической aberrации. Комбинируя систему из нескольких линз, можно снизить величину aberrации и получить скорректированную систему, обладающую вместе с тем достаточно большой светосилой.

Для рассмотрения сферической aberrации обратимся сперва к случаю преломления света у одной сферической поверхности, разделяющей прозрачные среды с коэффициентами преломления  $n$  и  $n'$ . Расчет будем вести с учетом величин второго порядка малости.

Для простоты положим, что на границу раздела падает параллельный пучок лучей. Тогда рис. 17 § 5 заменится рис. 43, где  $SM$  — луч, параллельный оптической оси, проходящей через вершину преломляющей поверхности  $O$  и ее центр кривизны  $C$ . При  $n' > n$  луч, преломившийся в точке  $M$ , пересечет ось в точке  $F'$ , которая явится вторым главным фокусом преломляющей поверхности. Расстояние между лучом  $SM$  и оптической осью положим равным  $h$ . Из рис. 43 вытекают следующие соотношения между отрезками и углами:

$$f' = x' + r, \quad u' = i' + \varphi. \quad (13.1)$$

Здесь  $f'$  — второе главное фокусное расстояние, отсчитанное от вершины преломляющей поверхности  $O$ , а  $x'$  — оно же, отсчитанное от центра кривизны поверхности  $C$ . Составим, как и в § 5, величины  $p = n'CP$  и  $p' = nCN = nh$ . Из рисунка имеем

$$\begin{aligned} p &= n'x' \sin u' = -n'r \sin i', \\ p' &= -nr \sin i. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Так как по закону преломления  $n \sin i = n' \sin i'$ , то из равенств (13.2) вытекает

$$p = -nr \sin i = p'. \quad (13.3)$$

Отсюда находим, что

$$x' = \frac{p}{n' \sin u'} = \frac{n}{n'} \frac{h}{\sin u'}. \quad (13.4)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sin i' &= -\frac{p'}{n'r} = -\frac{n}{n'} \frac{h}{r} = -\frac{n}{n'} \alpha, \\ \sin \varphi &= \alpha, \end{aligned} \quad (13.5)$$

где для краткости отношение  $h/r$  обозначено через  $\alpha$ .

Воспользовавшись связью (13.1) между углами  $u'$ ,  $i'$  и  $\varphi$ , напишем

$$\begin{aligned} \sin u' &= \sin(i' + \varphi) = \sin i' \cos \varphi + \cos i' \sin \varphi = \\ &= \sin i' \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} + \sin \varphi \sqrt{1 - \sin^2 i'}. \end{aligned}$$

Поскольку  $h/r$  величина малая, приближенно (пренебрегая членами, содержащими  $\sin \varphi$  и  $\sin i'$  в третьих степенях и выше) перепишем последнее выражение в виде

$$\sin u' \cong \sin i' \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right) + \sin \varphi \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 i'\right).$$

Подставляя в это равенство вместо  $\sin \varphi$  и  $\sin i'$  их значений по (13.5), найдем

$$\sin u' = \frac{n' - n}{n'} \alpha + \frac{1}{2} n \frac{(n' - n)^2}{n'^2} \alpha^2,$$

откуда по (13.4) для  $x'$  приближенно получим

$$x' = \left[ \frac{n}{n' - n} - \frac{1}{2} \frac{n}{n' - n} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \right] r,$$

а для второго главного фокусного расстояния  $f'$  по (13.1)

$$f' = \frac{n'}{n' - n} r - \frac{1}{2} \frac{n}{n' - n} \frac{h^2}{r}. \quad (13.6)$$

При  $h \rightarrow 0$  это выражение переходит в

$$f' = \frac{n'}{n' - n} r, \quad (13.7)$$

т. е. в обычное выражение для второго главного фокусного расстояния преломляющей поверхности в гауссовом приближении (§ 5).

Из сравнения формул (13.6) и (13.7) видно, что при конечном  $h$  лучи будут пересекаться в точке, лежащей ближе к преломляющей поверхности, чем фокус, вычисленный в гауссовом приближении. Краевые лучи преломляются сильнее параксиальных — в этом и заключается явление сферической абер-

рации. Поскольку оно определяется членом, содержащим  $h^2$  (при более точном приближении получатся члены, содержащие  $h$  лишь в четных степенях) — оно обладает осевой симметрией. Пятно рассеяния представляет собой кружок.

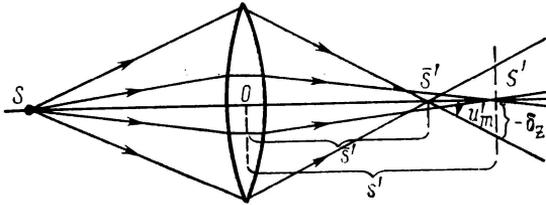


Рис. 44. Сферическая aberrация положительной линзы.

Тот же результат получается и по отношению к линзе: крайвые лучи сильнее преломляются, чем параксиальные. В случае точечного источника света  $S$  (рис. 44) его действительное изображение  $\bar{S}'$ , даваемое крайвыми лучами, окажется ближе к линзе, чем изображение  $S'$  в параксиальных лучах. Обозначим через  $\bar{s}'$  и  $s'$  расстояния изображений  $\bar{S}'$  и  $S'$  от линзы (линзу для простоты считаем бесконечно тонкой). Величина  $\delta s' = \bar{s}' - s'$  называется продольной сферической aberrацией. Поперечной сферической aberrацией называется величина  $\delta z = \delta s' u'_m$ , где  $u'_m$  — угол, составляемый крайвыми лучами с оптической осью  $SO$ . Поскольку  $\bar{s}' < s'$ , продольная сферическая aberrация положительной линзы отрицательна.

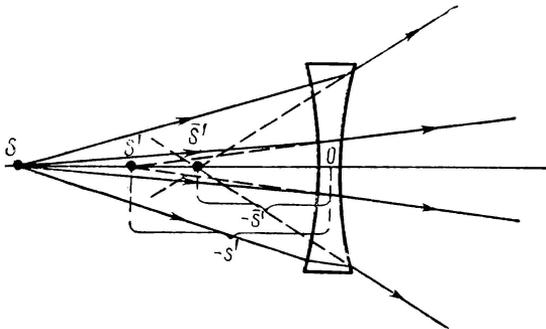


Рис. 45. Сферическая aberrация отрицательной линзы.

В случае отрицательной линзы (рис. 45) крайвые лучи также преломляются сильнее и мнимое изображение  $\bar{S}'$  располагается ближе к линзе, чем изображение  $S'$ , создаваемое параксиальными лучами. Но теперь на рис. 45 оба расстояния  $\bar{s}'$  и  $s'$  отрицательны и поэтому  $\delta s' = (-\bar{s}') - (-s') = s' - \bar{s}' > 0$ ,

т. е. продольная сферическая aberrация отрицательной линзы положительна. Это обстоятельство позволяет исправлять сферическую aberrацию оптической системы путем комбинирования положительных и отрицательных линз. На рис. 46, а представлена система из двух склеенных линз, одна из которых положительна, а другая отрицательна. Оптические силы этих линз подбираются так, чтобы образованная ими система была положительна. На рис. 46, б пунктирные кривые изображают продольную сферическую aberrацию положительной (кривая 1) и отрицательной линзы (кривая 2) как функции

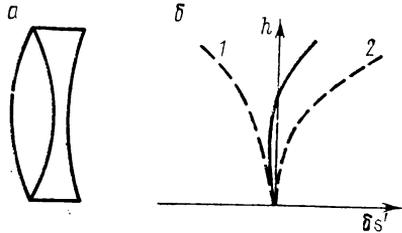


Рис. 46. Исправление сферической aberrации.

высоты луча  $h$ . Сплошная кривая дает продольную сферическую aberrацию системы, которая, как видно, значительно меньше aberrаций каждой из линз, взятых в отдельности.

Для одной преломляющей поверхности существует такая пара точек, что если источник расположен в одной из них, то лучи собираются в другой, независимо от величины отрезка  $h$ , определяющего положение точки  $M$ , в которой происходит преломление (рис. 47). Такая пара точек называется апланатической. Если из одной из апланатических точек исходит гомоцентрический пучок лучей (или сходится к ней), то собирается в другой, сохраняя гомоцентризм для любых углов расхождения пучка. Для апланатической пары точек отсутствует сферическая aberrация.

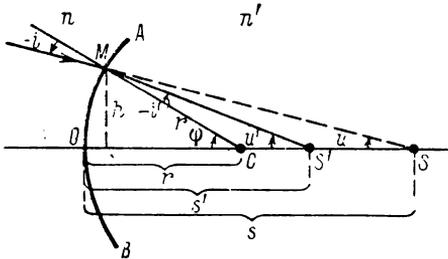


Рис. 47. Апланатические точки сферической преломляющей поверхности.

Положение апланатических точек определяется отрезками  $s$  и  $s'$  (рис. 47), равными:

$$s = r + \frac{n'}{n} r,$$

$$s' = r + \frac{n}{n'} r. \quad (13.8)$$

Легко проверить, что в гауссовом приближении эти точки сопряженные. Докажем, что сопряженность сохраняется независимо от значения  $h$ .

Пусть на преломляющую поверхность  $AB$  падает сходящийся пучок, продолжения лучей которого пересекаются в первой апланатической точке  $S$ . Треугольники  $\triangle CMS'$  и  $\triangle CMS$  подобны, так как они имеют общую сторону  $MC$  и общий угол  $\angle C$ . Для сторон  $CS'$  и  $CS$  находим:

$$CS' = s' - r = \frac{n}{n'} r,$$

$$CS = s - r = \frac{n'}{n} r.$$

Отсюда, замечая, что  $MC = r$ , получим следующее соотношение между сторонами  $\triangle CMS'$  и  $\triangle CMS$ :

$$\frac{CS'}{MC} = \frac{n}{n'}, \quad \frac{MC}{CS} = \frac{n}{n'}, \quad \frac{CS'}{MC} = \frac{MC}{CS}.$$

Из последнего равенства вытекает равенство углов

$$-i = u'. \quad (13.9)$$

По закону преломления  $\sin i' / \sin i = n / n'$ . Заменяя в нем  $i$  по (13.9) через  $-u'$ , получим

$$\frac{\sin(-i')}{\sin u'} = \frac{CS'}{MC} = \frac{n}{n'}. \quad (13.10)$$

Равенство (13.10) выполняется независимо от значения углов  $-i'$  и  $u'$ , т. е. независимо от значения  $h$ . Так как  $s' = r + CS'$ , то отсюда следует: лучи, пересекающиеся в точке  $S$ , после преломления у сферической поверхности  $AB$  действительно сходятся в точке  $S'$ , положение которой определяется отрезком  $s' = r + \frac{n}{n'} r$  независимо от значения  $h$ .

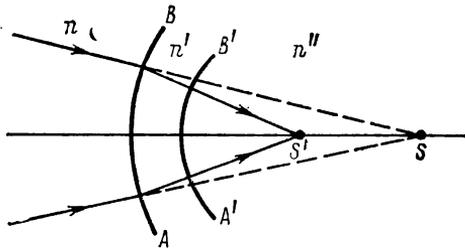


Рис. 48. Менюсковая линза с апланатическими точками.

Очевидно, можно осуществить и менюсковую линзу, обладающую парой апланатических точек. В самом деле, пусть преломляющая поверхность  $AB$  (рис. 48) обладает апланатическими

точками  $S$  и  $S'$ . Проведем около точки  $S'$ , как центра, сферическую поверхность  $A'B'$ . Тогда все лучи, преломившиеся у поверхности  $AB$ , упадут на нее нормально, следовательно, пересекут ее не преломляясь и по-прежнему соберутся в точке  $S'$ .

Рассмотрим еще более общий случай отсутствия аберрации. Пусть  $-y'$  есть изображение малого объекта  $y$ , даваемое при преломлении лучей у сферической поверхности (рис. 49). В § 2

было указано, что если два луча, исходящие из одной точки  $S$ , после преломления пересекаются в точке  $S'$ , то по принципу Ферма их оптические длины должны равняться друг другу. Одновременно это означает, что лучи сходятся в точке  $S'$  в одинаковой фазе.

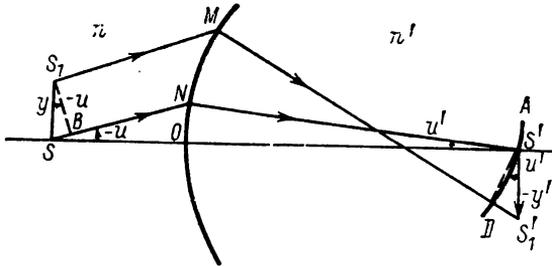


Рис. 49. К выводу условия синусов.

В случае объекта конечных размеров изображение будет резким, если оптические длины путей между каждой парой сопряженных точек объекта и его изображения одинаковы. В качестве объекта рассмотрим прямой отрезок  $y$ , перпендикулярный к оптической оси  $SO$ . Потребуем, чтобы его изображение  $-y'$  представляло собой тоже отрезок, перпендикулярный к оси.

Возьмем два луча  $SN$  и  $S_1M$ , параллельных друг другу в пространстве объектов. При преломлении луч  $SN$  достигнет точки изображения  $S'$ , а луч  $S_1M$  — точки  $S'_1$ . По сказанному, оптические длины путей  $S_1MS'_1$  и  $SNS'$  должны равняться друг другу

$$nS_1M + n'MS'_1 = nSN + n'NS'. \quad (13.11)$$

Лучам  $S_1M$  и  $SN$  в пространстве объекта соответствует плоский волновой фронт  $S_1B$ . В пространстве изображения лучам  $NS'$  и  $MS'_1$  соответствует искривленный волновой фронт  $AS'D$ . Во всех точках поверхности  $S_1B$  как поверхности одинаковых фаз колебания происходят в одной фазе. То же имеет место по отношению ко всем точкам поверхности  $AS'D$ . Отсюда вытекает, что оптические длины путей лучей  $BNS'$  и  $S_1MD$  одинаковы

$$nS_1M + n'MD = nBN + n'NS'. \quad (13.12)$$

Из сравнения равенств (13.11) и (13.12) находим

$$n'DS'_1 = nSB. \quad (13.13)$$

Из рис. 49 видно, что  $SB = y \sin(-u)$ . Дугу  $S'D$  при малых размерах объекта можно приближенно заменить хордой  $S'D$  и

тогда получим, что  $DS'_1 = -y' \sin u'$ . Подставляя эти значения  $SB$  и  $DS'_1$  в равенство (13.13), получим

$$ny \sin u = n'y' \sin u'. \quad (13.14)$$

Равенство (13.14) выражает так называемое условие синусов. В случае параксиальных лучей углы  $u$  и  $u'$  малы и условие (13.14) переходит в инвариант Лагранжа—Гельмгольца.

Условие синусов, вытекающее из принципа Ферма, есть требование, чтобы каждая точка объекта отображалась точкой в пространстве изображения. Вообще говоря, оно не выполняется и может быть удовлетворено лишь для одной пары сопряженных плоскостей оптической системы (а планатических плоскостей).

### § 14. Другие виды aberrаций

Если продольная aberrация исправлена для пучков, исходящих от точечного объекта, лежащего на оптической оси системы, то она может еще сохраниться для точечных объектов, лежащих вне оси системы. Сечение внеосевого пучка плоско-

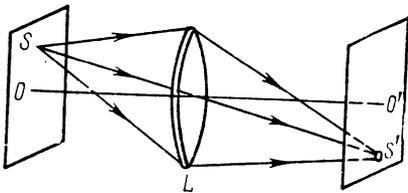


Рис. 50. Кома.

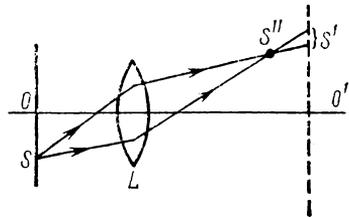


Рис. 51. Астигматизм.

стью, перпендикулярной к оптической оси (рис. 50), представляет собой вытянутое пятно, несколько напоминающее по виду комету с хвостом. Поэтому aberrация во внеосевых пучках носит название комы от греческого слова *κομα*, что означает прядь волос, а также комету («волосатая звезда»). Кома у системы с исправленной сферической aberrацией отсутствует, если выполнено условие синусов.

Пучки, преломленные оптической системой, обладают еще астигматизмом (§ 1). Астигматизм сохраняется и для узких пучков, если эти пучки внеосевые. Такие астигматические пучки дают две фокальные линии (рис. 51) — линию  $S'$ , лежащую в плоскости чертежа (линия сагиттальных сечений), и линию  $S''$ , перпендикулярную к плоскости чертежа (линия меридиональных сечений). Расстояние между обеими фокальными линиями  $S'S''$  дает астигматическую разность. При наличии

астигматизма изображение точечного объекта имеет вид либо короткой черточки, либо размытого кружка (между фокальными линиями). Очевидно, объект в виде прямой, параллельной одному из сагиттальных или меридиональных сечений, отобразится резко.

Кроме указанных трех недостатков оптической системы — сферической аберрации, комы и астигматизма — существуют еще и другие недостатки, а именно кривизна поля изображения и дисторсия. Кривизна поля изображения заключается в том, что объекту в виде плоскости, перпендикулярной к оси системы, соответствует изображение в виде части кривой поверхности. Дисторсия представляет собой искажение, вызванное неодинаковостью линейного увеличения в пределах поля изображения. В результате дисторсии нарушается геометрическое подобие между объектом и его изображением. По краям поля изображение либо растянуто, либо сжато по сравнению с его средними (приосевыми) частями. Обычно в приборах, предназначенных для визуальных наблюдений, дисторсия не имеет большого значения, но в тех случаях, когда изображение используется для точных измерений (геодезические измерения, аэрофотосъемка и т. д.), необходимо исправление системы в отношении дисторсии.

Все указанные типы недостатков могут исправляться путем создания сложных систем, отдельные части которых имеют аберрации разных знаков, и в сумме компенсируют друг друга. Для полной и одновременной коррекции всех недостатков приходится создавать системы, состоящие из большого числа линз (до 8—12 в объективах микроскопов). При этом все линзы имеют сферические (в частном случае плоские) поверхности. Возможен, однако, другой способ коррекции, а именно за счет создания несферических преломляющих поверхностей (асферическая оптика). Однако ввиду технической трудности изготовления заданных несферических поверхностей этот способ используется редко.

Во всех приведенных выше рассмотренных аберрациях мы полагали, что коэффициенты преломления прозрачных веществ, входящих в состав оптических систем, постоянны. Это справедливо при освещении системы монохроматическим светом. При сложном же составе света необходимо учитывать зависимость коэффициента преломления от длины волны. Для прозрачных веществ имеет место монотонное возрастание коэффициента преломления с уменьшением длины волны, поэтому обыкновенная линза имеет большую оптическую силу для синих лучей, чем для красных. В результате, если источник испускает белый свет, его изображение будет размыто и по краям окрашено. Это явление носит название хроматической аберрации.

Пусть от точечного источника  $S$  (рис. 52) получается изображение с помощью одной положительной линзы. В этом случае изображение точки в свете фиолетовых лучей  $S'_\phi$  расположится ближе всего к линзе, а в свете красных лучей  $S'_к$  — дальше всего от линзы. Между ними расположатся изображения, образованные лучами остальных цветов. Проведем в каком-либо месте между точками  $S'_\phi$  и  $S'_к$  плоскость  $ab$ , перпендикулярную к оптической оси  $OO'$ . На ней вместо точечного изображения мы увидим размытый цветной кружок.

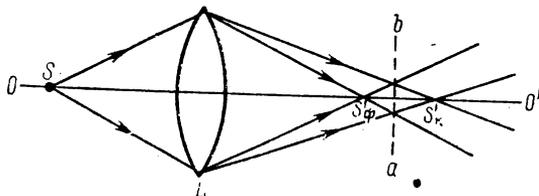


Рис. 52. Возникновение хроматической аберрации.

Хроматическую аберрацию можно компенсировать, комбинируя положительные и отрицательные линзы, сделанные из стекол разных сортов, обладающих разными относительными дисперсиями. Например, стекло, носящее название крона, имеет меньшую относительную дисперсию, а стекло, называемое флинт, — большую относительную дисперсию. В сложной системе, состоящей из положительной линзы из крона (рис. 53) и отрицательной линзы из флинта, хроматическая аберрация может быть компенсирована, в то время как оптическая сила обеих линз, взятых вместе, не будет равна нулю и останется либо положительной, либо отрицательной. Такая сложная линза носит название а х р о м а т а.

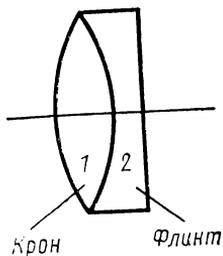


Рис. 53. Сложная линза, исправленная на хроматизм.

Покажем возможность построения ахроматической линзы, считая для простоты обе линзы бесконечно тонкими. Пусть для первой линзы (кроновой) коэффициенты преломления для красных и фиолетовых лучей соответственно равны  $n_{к1}$  и  $n_{\phi1}$ . Коэффициент преломления для некоторой средней области спектра (например, желто-зеленой) обозначим через  $\bar{n}_1$ . Далее, обозначим радиусы кривизны преломляющих поверхностей через  $r_1$  и  $r_2$ . Тогда (§ 10) оптические силы  $\Phi_{к1}$  и  $\Phi_{\phi1}$  первой линзы для красных и синих лучей и ее оптическая сила  $\Phi_1$  для средней области спектра соответствен-

но будут равны

$$\Phi_{к1} = (n_{к1} - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad \Phi_{\phi 1} = (n_{\phi 1} - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

$$\Phi_1 = (\bar{n}_1 - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Из этих равенств следует

$$\Phi_{к1} = \frac{n_{к1} - 1}{\bar{n}_1 - 1} \Phi_1, \quad \Phi_{\phi 1} = \frac{n_{\phi 1} - 1}{\bar{n}_1 - 1} \Phi_1. \quad (14.1)$$

Так же получим, что для второй линзы (флинтовой) оптические силы для красных и фиолетовых лучей равны

$$\Phi_{к2} = \frac{n_{к2} - 1}{n_2 - 1} \Phi_2, \quad \Phi_{\phi 2} = \frac{n_{\phi 2} - 1}{n_2 - 1} \Phi_2, \quad (14.2)$$

где  $\Phi_2$  — оптическая сила линзы для средней области спектра.

Оптические силы сложной линзы, образованной первой и второй линзами совместно (расстояние  $d$  между линзами считаем равным нулю), для красных и фиолетовых лучей соответственно равны

$$\Phi_k = \Phi_{к1} + \Phi_{к2}, \quad \Phi_\phi = \Phi_{\phi 1} + \Phi_{\phi 2}.$$

Сложная линза не будет обладать хроматизмом, если ее оптические силы для красных и синих лучей совпадут:  $\Phi_k = \Phi_\phi$ . Следовательно, условия ахроматизма выразятся равенством

$$\Phi_{к1} + \Phi_{к2} = \Phi_{\phi 1} + \Phi_{\phi 2} \quad \text{или} \quad \Phi_{\phi 1} - \Phi_{к1} = -(\Phi_{\phi 2} - \Phi_{к2}).$$

Подставляя сюда вместо оптических сил их выражения по (14.1) и (14.2), получим

$$\frac{n_{\phi 1} - n_{к1}}{\bar{n}_1 - 1} \Phi_1 = \frac{n_{\phi 2} - n_{к2}}{n_2 - 1} \Phi_2.$$

Величина  $\frac{n_\phi - n_k}{n - 1}$  носит название относительной дисперсии и обозначается буквой  $\nu$ . Тогда условие ахроматизма системы примет вид

$$\nu_1 \Phi_1 + \nu_2 \Phi_2 = 0. \quad (14.3)$$

Суммарная оптическая сила системы для средней области спектра должна иметь некоторое определенное значение  $\Phi$ :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi. \quad (14.4)$$

Из равенств (14.3) и (14.4) находим следующие значения оптических сил первой и второй линз:

$$\Phi_1 = \frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \Phi, \quad \Phi_2 = - \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} \Phi. \quad (14.5)$$

Для флинта относительная дисперсия  $\nu_2$  больше, чем для крона. Поэтому разность  $\nu_2 - \nu_1$  положительна и из (14.5) имеем, во-первых, что оптические силы первой и второй линзы разных знаков; во-вторых, что по абсолютному значению оптическая сила  $|\Phi_1|$  больше, чем оптическая сила  $|\Phi_2|$ . Отсюда из (14.4) вытекает, что если первую линзу взять положительной ( $\Phi_1 > 0$ ), как изображено на рис. 53), то и оптическая сила сложной линзы будет положительна. При этом фокусы для красных и синих лучей сложной линзы совпадут, т. е. сложная линза будет ахроматична.

При совпадении фокусов для красных и синих лучей возможно некоторое расхождение фокусов для лучей других цветов, например зеленых и красных. Это поведет к наличию незначительного остаточного хроматизма. Путем построения более сложных систем, чем рассмотренная, можно добиться практически полной компенсации хроматизма.

В качестве примера выполним расчет простейшей ахроматической системы. Ахромат должен состоять из склеенных между собой линз — двояковыпуклой 1 из крона (с одинаковыми по численному значению радиусами кривизны, рис. 53) и плоско-вогнутой 2 из флинта. Их общая оптическая сила должна равняться  $\Phi = 2,00$  D. Крон имеет  $\bar{n} = 1,58$  и  $\nu_1 = 26 \cdot 10^{-3}$ ; для флинта  $\nu_2 = 56 \cdot 10^{-3}$ . Спрашивается, чему будет равен радиус кривизны поверхностей и каким должен быть коэффициент преломления  $n_2$  флинта, чтобы система была осуществима?

Склейка линз производится для уменьшения потерь проходящего света из-за отражений. Для осуществления склейки необходимо, чтобы радиусы кривизны склеиваемых поверхностей равнялись друг другу.

Для оптической силы  $\Phi_1$  первой линзы по формуле (14.5) получаем

$$\Phi_1 = \frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \Phi = \frac{56}{30} \cdot 2,00 \text{ D} = 3,73 \text{ D}.$$

Отсюда находим радиус кривизны поверхностей линз ( $r_1 = -r_2 = r$ )

$$r = \frac{2(\bar{n}_1 - 1)}{\Phi_1} = \frac{2 \cdot 0,58}{3,73} \text{ м} = 31 \text{ см}.$$

Оптическая сила второй линзы окажется равной

$$\Phi_2 = -\frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} \Phi = -\frac{26}{30} \cdot 2,00 \text{ D} = -1,73 \text{ D}.$$

Это позволяет определить искомое значение коэффициента  $\bar{n}_2$  флинта

$$\bar{n}_2 - 1 = -r\Phi_2 = 0,54, \quad \bar{n}_2 = 1,54.$$

Поскольку положительная и отрицательная линзы имеют сферические aberrации разных знаков, система, изображенная на рис. 53, будет одновременно в той или иной мере корректирована и на сферическую aberrацию. По такой схеме строят обычно объективы телескопов и зрительных труб.

## § 15. Оптическая система глаза

Строение глаза человека было кратко рассмотрено в § 7 ч. 1. Приведем теперь данные об оптической системе глаза, с помощью которой на сетчатке образуется действительное изобра-

женне рассматриваемых объектов. Преломляющей системой глаза являются выпуклая поверхность роговицы, хрусталик, водянистая жидкость и стекловидное тело, заполняющее глаз. Изображение в глазу получается в среде (в стекловидном теле) с иным коэффициентом преломления, чем среда, в которой находится рассматриваемый объект (воздух). Поэтому первый и второй главные фокусные расстояния глаза различны. Хрусталик представляет собой неоднородное тело, внешние части которого имеют коэффициент преломления 1,38, а внутренние — около 1,41. Оптическая сила хрусталика может меняться за счет изменения кривизны его поверхностей, вызываемого действием ресничной мышцы. Изменением оптической силы хрусталика достигается фокусировка на сетчатке изображений предметов, находящихся на разных расстояниях от глаза. Этот процесс носит название **а к к о м о д а ц и и**.

Входной зрачок глаза почти совпадает с его реальным зрачком. С помощью радужной оболочки может изменяться диаметр зрачка, что регулирует величину светового потока, падающего в глаз: при слабых освещенностях зрачок расширяется, при больших — сужается.

У разных людей в оптической системе глаза наблюдаются значительные индивидуальные отклонения. Для общей характеристики глаза вводится его упрощенная, усредненная модель (приведенный глаз) со следующими постоянными:

Оптическая сила	58,64 D
Положение первой главной плоскости (от вершины роговой оболочки)	+1,348 мм
Положение второй главной плоскости (от вершины роговой оболочки)	+1,602 мм
Первое главное фокусное расстояние	-17,1 мм
Второе главное фокусное расстояние	+22,8 мм

Положение главных плоскостей ( $H$  и  $H'$ ) и главных фокусов ( $F$  и  $F'$ ) приведенного глаза изображено на рис. 54.

Предельные точки, между которыми возможна аккомодация, носят название дальней и ближней точек. Для нормального глаза дальняя точка лежит в бесконечности, а ближняя — примерно на расстоянии 20 см. Часто встречаются недостатки оптической системы глаза, называемые близорукостью и дальнозоркостью. Близорукий глаз имеет

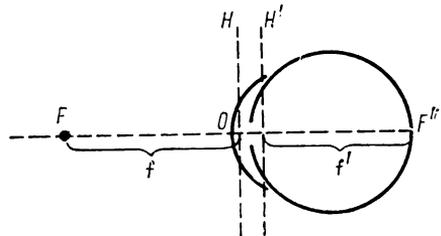


Рис. 54. Оптическая схема приведенного глаза.

оптическую силу, большую чем нормальный, для него дальняя точка лежит не на бесконечности, а на конечном расстоянии от глаза (при сильной близорукости на расстоянии

1 ÷ 1,5 м и меньше). Дальнозоркий глаз имеет оптическую силу, меньшую, чем нормальный. Его ближняя точка отодвинута от глаза на расстояние больше 20 см, а дальняя точка лежит за глазом; это означает, что дальнозоркий глаз способен фокусировать на сетчатке не только параллельные, но и сходящиеся пучки лучей.

Оптическая система глаза обладает рядом недостатков: сферической аберрацией, комой, хроматической аберрацией. Однако эти недостатки мало сказываются на характере субъективного восприятия рассматриваемых предметов. Зрительный процесс носит весьма сложный физиологический характер. Субъективное зрительное восприятие обуславливается не только первичным сигналом, поступающим от глаза как приёмника, но и его дальнейшей подсознательной обработкой в центральной нервной системе.

Глаз различает большое число деталей, если изображение предмета попадает на желтое пятно сетчатки, особенно большое, если оно попадает на его центральную впадину. Желтое пятно имеет небольшие размеры, на него приходится изображение предметов, видимых под углом  $6 \div 7^\circ$ . Общее же поле, воспринимаемое глазом, имеет угловые размеры около  $130^\circ$  в вертикальном направлении и  $160^\circ$  в горизонтальном. Разрешающая сила в пределах желтого пятна для нормального глаза равна приблизительно  $1'$ .

По мере удаления от центра желтого пятна разрешающая сила быстро падает: при угле в  $60^\circ$  по отношению к направлению на центральную впадину разрешающая сила равна приблизительно 0,02 от разрешающей силы в пределах желтого пятна. При сумеречном зрении разрешающая сила приблизительно в 10 раз меньше разрешающей силы при дневных освещенностях.

При дневных освещенностях глаз различает наибольшее число деталей, если предмет находится от него на расстоянии, несколько большем расстояния до ближней точки. Обычно это расстояние принимается равным 25 см, оно называется расстоянием наилучшего зрения.

Интенсивность зрительного ощущения достигает максимума не сразу после начала действия света на сетчатку и пропадает не сразу после прекращения действия света. Зрительное ощущение удерживается около  $1/10$  с после того, как свет перестал попадать в глаз. Благодаря этому мигающий источник при числе миганий более  $\sim 10$  в секунду кажется светящимся равномерно.

Желтое пятно расположено несколько в стороне от места пересечения сетчатки оптической осью глаза. Поэтому, фиксируя глаз на какой-либо объект, мы направляем на него не оптическую ось глаза, а прямую, проходящую через узловую точ-

ку глаза и центр желтого пятна. Эта линия носит название линии прямого зрения. Предмет, изображение которого попадает на место, где в глазное яблоко входит зрительный нерв, не вызывает зрительного ощущения (слепое пятно).

В процессе зрения существенную роль играет восприятие объектов двумя глазами (бинокулярность зрения). Рассматривая какой-либо объект  $S$  (рис. 55), мы поворачиваем глаза таким образом, чтобы линия прямого зрения обоих глаз проходила через этот объект. При этом все другие объекты, лежащие ближе или дальше объекта  $S$ , представляются двойными. Благодаря зрению двумя глазами мы имеем возможность оценивать расстояние от объекта до глаза. Эта оценка производится произвольно по углу поворота глаз. Пусть линии прямого зрения  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$  (рис. 55) соответствуют рассматриванию очень удаленного предмета; тогда эти линии практически параллельны друг другу. При рассматривании объекта  $S$ , лежащего на конечном расстоянии  $l$ , глаза несколько поворачиваются, так что линии прямого зрения  $O_1S$  и  $O_2S$  составляют угол  $\epsilon$ . Этот угол называется углом параллакса. Угол  $\epsilon$  связан с расстоянием  $l$  до объекта соотношением

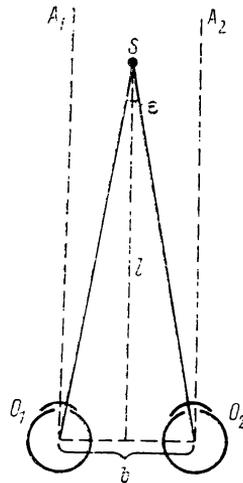


Рис. 55. Зрение двумя глазами.

$$l = \frac{b}{\epsilon}, \quad (15.1)$$

где  $b$  — расстояние между узловыми точками обоих глаз. Зрение двумя глазами, позволяющее по углу параллакса  $\epsilon$  оценивать расстояние  $l$ , носит название стереоскопического зрения. Стереоскопическое зрение сказывается для углов  $\epsilon$ , превышающих приблизительно  $1'$ ; этому соответствует расстояние  $l \cong 200$  м. О расстоянии до более далеких предметов мы судим по ряду косвенных признаков, по количеству различаемых деталей и т. д.

Разберем теперь весьма важный вопрос о субъективной яркости рассматриваемого предмета. Субъективное ощущение яркости определяется освещенностью на сетчатке в пределах изображения. Предположим, что мы рассматриваем объект конечных размеров, тогда по сказанному в § 11 освещенность в пределах его изображения  $E'$  равна

$$E' = \tau B \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \Delta \omega', \quad (15.2)$$

где  $\Delta \omega'$  — угол, под которым лучи сходятся от зрачка глаза к сетчатке;  $n$  и  $n'$  — соответственно коэффициенты преломления воздуха и стекловидного тела, заполняющего глазное яблоко;  $B$  — яркость объекта.

Обозначим через  $d$  диаметр зрачка глаза; расстояние от зрачка до сетчатки близко ко второму фокусному расстоянию глаза  $f'$ ; отсюда для телесного угла  $\Delta \omega'$  приближенно получаем

$$\Delta \omega' = \frac{\pi d^2}{4f'^2}.$$

Подставляя это значение  $\Delta \omega'$  в (15.2), найдем

$$E' = \frac{\tau \pi}{4} \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \left( \frac{d}{f'} \right)^2 B. \quad (15.3)$$

Для данного глаза при данных условиях величина  $d/f'$  постоянна, следовательно, по формуле (15.3) имеем: субъективная яркость рассматриваемого объекта определяется его фотометрической яркостью  $B$ . Субъективная яркость не зависит ни от размеров объекта, ни от расстояния до глаза, если только изображение на сетчатке получается конечных размеров (больше размеров палочек и колбочек и размеров дифракционного пятна на сетчатке).

Субъективная интенсивность зрительного ощущения, как и всех других ощущений, не находится в простой пропорциональной зависимости от мощности раздражителя. По закону Вебера — Фехнера (ч. I, § 9) приближенно можно считать интенсивность ощущения пропорциональной логарифму мощности раздражителя. При больших изменениях яркости объектов следует принимать во внимание зависимость диаметра зрачка  $d$  от величины падающего на него потока.

Все сказанное относится к случаям, когда рассматриваемый объект виден под достаточно большим углом. Рассмотрим другой предельный случай, когда объект удален настолько, что лучи, падающие от него на глаз, можно считать параллельными. В этом случае на сетчатке не возникает изображения, геометрически подобного объекту, а получается кружок, определяемый лишь дифракционными явлениями в глазу (§ 20). Размеры кружка зависят только от длины волны падающего света  $\lambda$  и от относительных размеров оптических элементов глаза; его диаметр равен  $1,22 \frac{\lambda}{d} f'$ . Следовательно, его площадь

$\Delta S' = \frac{\pi}{4} \left( 1,22 \frac{\lambda}{d} f' \right)^2$  может считаться для данного глаза при

данных условиях постоянной. Поэтому освещенность на сетчатке

$$E' = \tau \frac{\Delta F}{\Delta S'}, \quad (15.4)$$

где  $\Delta F$  — световой поток, падающий на зрачок глаза.

Предположим, что мы рассматриваем источник света столь удаленный, что его можно считать точечным. Тогда поток  $\Delta F = I\Delta\omega$ , где  $I$  — сила света источника и  $\Delta\omega$  — угол, под которым виден зрачок глаза из места расположения источника. Если расстояние от глаза до источника равно  $r$ , то  $\Delta\omega = \frac{\pi d^2}{4r^2}$  и световой поток  $\Delta F$ , падающий на зрачок, равен

$$\Delta F = \frac{\pi d^2}{4} \frac{I}{r^2}. \quad (15.5)$$

Ввиду постоянства  $\Delta S'$  субъективная яркость по (15.4) определяется величиной потока. Отсюда на основании формулы (15.5) приходим к выводу: субъективная яркость точечного источника определяется его силой света и обратно пропорциональна квадрату его расстояния от глаза.

## § 16. Простейшие оптические приборы

В настоящем параграфе мы кратко остановимся на рассмотрении схем простейших оптических приборов. Последние принято разделять на визуальные, проектирующие и осветительные. Визуальные приборы предназначены для визуальных наблюдений и их заключительным звеном является человеческий глаз; изображение получается на сетчатке глаза. В большинстве случаев они служат для повышения разрешающей силы или светосилы. Проектирующие приборы по большей части служат либо для получения в некоторой плоскости действительного изображения объекта, которое затем одновременно рассматривается рядом наблюдателей, либо представляют собой составную часть регистрирующей системы, в частности для фотографической регистрации.

Рассмотрим в отдельности ряд простейших приборов.

**Лупа.** Простейшая лупа состоит из одной положительной линзы, которая располагается перед глазом (рис. 56). Рассматриваемый объект  $SS_1$  помещается вблизи ее главной фокальной плоскости  $F$ , несколько ближе к линзе. В этом случае возникает прямое увеличенное мнимое изображение  $S'S'_1$  на большом расстоянии от линзы. Оно рассматривается глазом без

аккомодации; на сетчатке глаза получается действительное обратное изображение.

Считая линзу тонкой, мы можем положить, что лучи  $SO$  и  $S_1O$ , проведенные от концов объекта к центру линзы  $O$ , проходят через нее без отклонения. Тогда из рис. 56 видно, что видимые угловые размеры изображения  $S'S'_1$  определяются углом  $2u$ , равным углу, под которым сам объект  $SS_1$  виден из

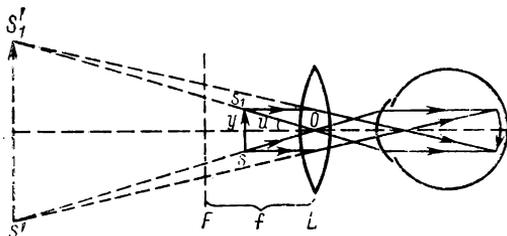


Рис. 56. Схема световых лучей при наблюдении объекта в лупу.

центра линзы  $O$ . Обозначив первое главное фокусное расстояние линзы через  $f$  и размеры объекта через  $y$ , получим

$$2u = \frac{y}{f}. \quad (16.1)$$

Для того чтобы оценить действие лупы, сравним угловое расстояние  $2u$  с угловым расстоянием  $2u_0$ , под которым объект виден невооруженным глазом. Это угловое расстояние равно  $2u_0 = \frac{y}{l}$ , где  $l$  — расстояние, на котором объект находится от глаза. Поскольку лупа обычно употребляется для рассматривания предметов, которые могут быть помещены на произвольном расстоянии от глаза, расстояние  $l$  выбирается равным расстоянию наилучшего зрения  $l_0$ , тогда

$$2u_0 = \frac{y}{l_0}. \quad (16.2)$$

Из равенств (16.1) и (16.2) находим, что лупа позволяет изменить угловые размеры рассматриваемого предмета в следующее число раз:

$$\gamma = \frac{u}{u_0} = \frac{l_0}{f}. \quad (16.3)$$

Если лупа из-за aberrаций не портит качества изображения, то в такое же число раз возрастает разрешающая сила.

Величина  $\gamma$  называется угловым увеличением лупы. Если  $l_0$  и  $f$  выразить в сантиметрах, то  $l_0 = 25$  см и для  $\gamma$  получаем

$$\gamma = \frac{25}{f [\text{см}]}.$$

Для исправления aberrаций лупа часто составляется из двух линз, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Такие лупы дают увеличение в 10—20 раз.

**Зрительная труба.** Зрительные трубы и телескопы предназначены для наблюдения удаленных объектов. Они представляют собой систему, состоящую в простейшем виде из двух линз  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 57), расположенных так, что второй главный фокус линзы  $L_1$  совпадает с первым главным фокусом линзы  $L_2$  (телескопическая система). Линза  $L_1$  называется объективом, линза  $L_2$  — окуляром. Если объект достаточно удален, то его изображение  $S'S'_1$ , даваемое линзой  $L_1$ , получается в ее главной фокальной плоскости. Угловые размеры изображения  $2u_1$  равны:  $2u_1 = \frac{y'}{f_1'}$ , где  $y'$  — его линейные размеры и  $f_1'$  — второе главное фокусное расстояние объектива. Окуляр играет роль лупы и, следовательно, даваемое им изображение воспринимается глазом под углом

$$2u_2 = \frac{y'}{f_2},$$

где  $f_2$  — первое главное фокусное расстояние окуляра.

Так как длина зрительной трубы мала по сравнению с расстоянием до объекта, то невооруженный глаз воспринимает объект под углом  $2u_0 = 2u_1$ . Отсюда угловое увеличение зрительной трубы равно

$$\gamma = \frac{2u_2}{2u_0} = \frac{2u_2}{2u_1} = \frac{f_1'}{f_2}. \quad (16.4)$$

Таким образом, угловое увеличение зрительной трубы тем больше, чем больше фокусное расстояние ее объектива и чем меньше фокусное расстояние окуляра.

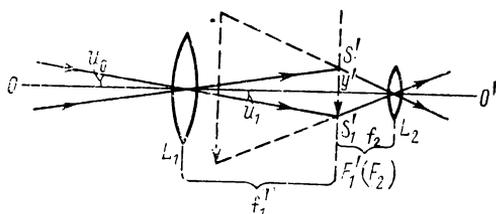


Рис. 57. Схема зрительной трубы.

Зрительная труба, построенная по указанной схеме, дает обратное изображение наблюдаемого предмета. Если труба предназначена для наблюдения астрономических объектов (те-

лескоп), то такое обращение объекта не играет роли. В трубы, предназначенные для земных наблюдений, обычно вводят добавочную систему, оборачивающую изображение так, чтобы оно стало прямым.

Практически объективы и окуляры в виде простых линз непригодны из-за больших aberrаций и хроматизма. Поэтому объектив делается из двух скленных линз, одной положительной и другой отрицательной, иногда в виде более сложной системы, позволяющей лучше скорректировать изображение. Окуляр делается в виде сложной, обычно двулинзовой системы (например, окуляр Гюйгенса, § 10).

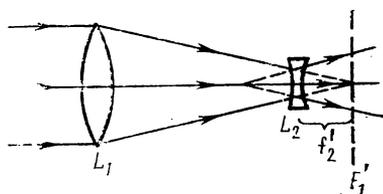


Рис. 58. Труба Галилея.

Зрительные трубы, предназначенные для наблюдения земных объектов, часто соединяются парно для одновременного рассматривания объекта двумя глазами. В таком виде они называются биноклем. В биноклях, кроме зрительных труб с двумя положительными линзами, употребляются зрительные трубы, окуляром для которых служит отрицательная линза (труба Галилея). Отрицательная линза  $L_2$  (рис. 58) расположена между объективом  $L_1$  и его главной фокальной плоскостью  $F_1$  на расстоянии от  $F_1$ , равном ее собственному фокусному расстоянию  $f_2$ . Таким образом, главные фокусы объектива и окуляра совмещены и труба представляет собой телескопическую систему. Окуляр дает мнимое прямое изображение рассматриваемого объекта. Угловое увеличение трубы равно  $f_1/f_2$ .

При рассматривании в зрительную трубу объектов, видимых под конечным углом зрения, их яркость, по сказанному в § 11, не может превышать их действительной фотометрической яркости. Из-за неизбежных потерь света в трубе в результате отражений и поглощения труба всегда несколько снижает яркость. Для уменьшения потерь света в трубе следует избегать излишних отражающих поверхностей; используется также так называемое «просветление» оптики (§ 28). Необходимо также, чтобы зрачок глаза наблюдателя полностью заполнялся световым потоком, выходящим из окуляра, так как только в этом случае при данной яркости объекта получается максимально возможная освещенность на сетчатке глаза.

При рассматривании в телескоп звезд приходится иметь дело с объектами, от которых на объектив телескопа падает практически параллельный поток света. В этом случае объектив телескопа дает в своей фокальной плоскости лишь дифракционную картину, совпадающую с дифракционной картиной от круглого отверстия (§ 20). Эта картина рассматривается затем

в окуляр. Круглым отверстием, ограничивающим дифрагирующий пучок параллельных лучей, является оправа телескопа, и линейные размеры дифракционного кружка представляют собой величину порядка  $r = 1,22 \lambda \frac{f_1'}{D}$ ,

где  $D$  — диаметр оправы объектива, а  $f_1'$  — его второе главное фокусное расстояние. Телескоп не дает геометрически подобного изображения звезды, ее «изображением» служит возникающий в главной фокальной плоскости объектива дифракционный кружок. Так как величины  $D$  и  $f_1'$  постоянны, то все звезды, рассматриваемые в данный телескоп, дают кружки одинакового размера (считается, что аберрации не искажают размеры кружка).

Из сказанного вытекает, что яркость дифракционных кружков пропорциональна световому потоку  $\Delta F$ , падающему от звезды на объектив телескопа. Если  $A$  представляет собой освещенность, вызываемую звездой на поверхность Земли, то

$\Delta F = A \frac{\pi D^2}{4}$ . Этой величине пропорциональна яркость дифракционного кружка и субъективная яркость звезды при ее рассмотрении в телескоп. Если та же звезда рассматривается невооруженным глазом, то, по сказанному в § 15, субъективная яркость этой звезды пропорциональна потоку  $\Delta F'$ , попадающему в зрачок глаза и равному  $\Delta F' = A \frac{\pi d^2}{4}$ , где  $d$  — диаметр зрачка. Отношение указанных потоков является мерой возрастания яркости звезды при наблюдении в телескоп

$$\frac{\Delta F}{\Delta F'} = \left(\frac{D}{d}\right)^2.$$

При большом диаметре объектива телескопа отношение  $D/d$  велико и воспринимаемая яркость звезд возрастает очень сильно.

В телескопах в качестве объектива часто используется не линза, а вогнутое зеркало (телескоп Ньютона). Преимуществом зеркала является то, что оно не обладает хроматической аберрацией. Вопрос о разрешающей силе телескопа будет рассмотрен в § 21.

**Микроскоп.** Для получения больших увеличений употребляется микроскоп, оптическая схема которого изображена на

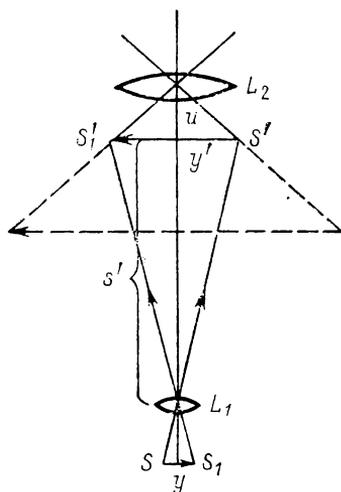


Рис. 59. Схема оптики микроскопа.

рис. 59, где  $L_1$  — короткофокусный объектив,  $L_2$  — окуляр. Рассматриваемый объект  $SS_1$  помещается вблизи первой главной фокальной плоскости объектива  $L_1$ , немного за ней. Объектив дает действительное обратное и увеличенное изображение объекта  $S'S'_1$  лежащее на расстоянии  $s'$  от него. Линейное увеличение объектива  $\beta \cong s'/f_1$ , где  $f_1$  — его первое главное фокусное расстояние. Пусть линейные размеры объекта будут  $y$ , тогда линейные размеры изображения

$$y' = y \frac{s'}{f_1}. \quad (16.5)$$

Окуляр  $L_2$  используется как лупа. Поэтому изображение  $y'$ , рассматриваемое через окуляр, видно под углом

$$2u = \frac{y'}{f_2},$$

где  $f_2$  — первое главное фокусное расстояние окуляра. Подставляя сюда вместо  $y'$  его значение по (16.5), получим для угла, под которым виден объект  $SS_1$  при его рассматривании через микроскоп

$$2u = y \frac{s'}{f_1 f_2}.$$

Невооруженным глазом тот же объект был бы виден под углом  $2u_0 = y/l_0$ , где  $l_0$  — расстояние, на котором объект рассматривается. Отсюда следует, что угловое увеличение микроскопа  $\gamma$  равно:

$$\gamma = \frac{2u}{2u_0} = \frac{l_0 s'}{f_1 f_2}. \quad (16.6)$$

Если  $l_0$  положить равным расстоянию наилучшего видения и все величины, входящие в формулу (16.6), измерять в сантиметрах, то

$$\gamma = \frac{25s'}{f_1 f_2}.$$

Расстояние  $s'$  практически равно расстоянию  $d$  между объективом  $L_1$  и главной фокальной плоскостью окуляра  $L_2$  (при грубых оценках увеличения микроскопа  $d$  можно считать равным длине тубуса микроскопа). Из формулы (16.6) видно, что угловое увеличение микроскопа тем больше, чем меньше фокусные расстояния окуляра и объектива. Увеличение микроскопа достигает  $1500 \div 2000$ . Обычно объектив и окуляр микроскопа делают сменными, что позволяет получать различные увеличения. О разрешающей силе микроскопа будет сказано в § 21.

В микроскопы, предназначенные для биологических исследований, по большей части рассматриваются прозрачные объекты в проходящем свете. Для их освещения используется

специальная осветительная система — конденсор. Иногда микроскопы употребляются для изучения поверхности непрозрачных твердых тел, в таких случаях осветительная система должна быть приспособлена для рассматривания предмета в рассеянном или отраженном свете. Примером может служить металлографический микроскоп, предназначенный для изучения структуры поверхности металлов.

Для достижения большой разрешающей силы микроскопа (см. § 21) и его достаточной светосилы объектив микроскопа должен захватывать по возможности широкий пучок лучей, идущих от объекта. Для того чтобы при этом изображение не портилось из-за аберраций, объектив микроскопа приходится делать в виде сложной системы, состоящей из ряда линз (до 10—12 линз).

**Дальномер.** Использование стереоскопического эффекта позволяет создать оптический прибор, с помощью которого можно измерять расстояние до далеких объектов. Такой прибор называется дальномером. На рис. 60 приведена схема простейшего монокулярного дальномера. Два объектива  $L_1$  и  $L_2$  разведены на расстояние  $d$  друг от друга. В дальномерах, предназначенных для измерения больших расстояний,  $d$  может достигать нескольких метров. Величина  $d$  называется базой дальномера. С помощью зеркал  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b_1$ ,  $b_2$  лучи от объективов посылаются в окуляр  $C$ , через который рассматриваются оба изображения, даваемые объективами  $L_1$  и  $L_2$ . Если оси объективов  $AB$  и  $A'B'$  параллельны друг другу и наблюдаемый предмет находится очень далеко, то изображения совпадают. Если предмет находится на конечном расстоянии, то между идущими от него лучами имеется угол параллакса  $\epsilon$  и изображения сдвинутся друг относительно друга. Предположим для простоты, что предмет находится на оси левого объектива. Тогда на правый объектив от него падает луч  $A''B'$ , составляющий с осью  $A''B'$  угол  $\epsilon$ . В фокальной плоскости изображение, даваемое правым объективом, будет сдвинуто на величину  $\delta l = \epsilon f'$ , где  $f'$  — главное фокусное расстояние объектива. С другой стороны, угол  $\epsilon$  связан с расстоянием  $l$  до наблюдаемого объекта равенством  $\epsilon = d/l$ . Из приведенных соотношений получаем

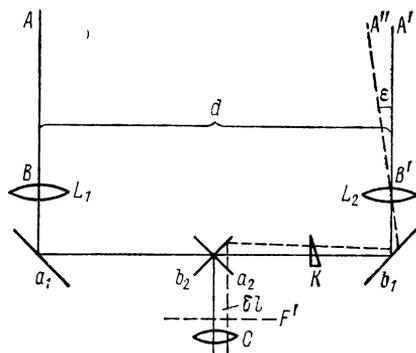


Рис. 60. Схема устройства монокулярного дальномера.

$$l = \frac{df'}{\delta l}.$$

Величина  $df'$  постоянна для данного дальномера. Таким образом, расстояние  $l$  до наблюдаемого предмета можно найти, измерив смещение обоих изображений  $\delta l$ . Обычно величина  $\delta l$  измеряется путем совмещения обоих изображений. Для этого в одну из ветвей дальномера вводится клин  $K$ . Чем больше смещение  $\delta l$ , тем на больший угол надо наклонить клин для совмещения изображений. Следовательно, по углу наклона клина можно определить  $\delta l$  и тем самым измерить расстояние  $l$  до предмета.

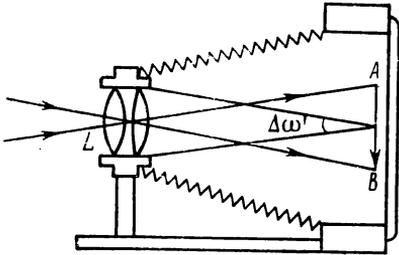


Рис. 61. Фотоаппарат.

По указанной схеме строятся миниатюрные дальномеры, встраиваемые в фотоаппараты для их автоматической фокусировки на фотографируемый объект.

**Фотографический аппарат.** Фотоаппарат принадлежит к числу проектирующих приборов, объектив которого  $L$  (рис. 61) образует действительное изображение фотографируемого предмета в плоскости  $AB$ , где располагается светочувствительная пластинка или пленка. Фотографический объектив представляет собой обычно сложную систему (из четырех или большего числа линз), корригированную на хроматизм, сферическую aberrацию и другие дефекты изображения. Резкость фокусировки достигается путем перемещения объектива или его отдельных частей. Объектив снабжается диафрагмой переменного отверстия (ирисовой диафрагмой), которая позволяет регулировать величину светового потока, попадающего в фотоаппарат. Диафрагма меняет также телесный угол  $\Delta\omega'$ , под которым лучи сходятся к изображению. Уменьшение угла  $\Delta\omega'$  снижает aberrации и улучшает «глубину» фокуса, т. е. возможность одновременно с достаточной резкостью сфокусировать предметы, находящиеся на разном расстоянии от аппарата. Но вместе с тем уменьшение угла  $\Delta\omega'$  снижает освещенность  $E'$  в области изображения.

Почернение фотографической пластинки определяется освещенностью  $E'$  (см. ч. 1, § 13). Последняя же по формуле (11.11)

$$E' = \tau B \Delta\omega', \quad (16.7)$$

где  $B$  — яркость объекта,  $\tau$  — пропускание оптической системы фотоаппарата. Угол  $\Delta\omega'$  является телесным углом, под которым виден зрачок выхода (§ 12) из места расположения фотопластинки. Действующей диафрагмой фотографических объективов обычно служит ирисовая диафрагма, которая располагается между линзами объектива. При максимальном

открытия диафрагмы угол  $\Delta\omega'$ , под которым видно ее изображение, даваемое последующей частью объектива, близок к углу, под которым видна задняя линза объектива. Поэтому с достаточной степенью точности можно считать, что при максимальном открытии диафрагмы телесный угол  $\Delta\omega'$  равен

$$\Delta\omega' = \frac{\pi d^2}{4f'^2},$$

где  $d$  — диаметр объектива, а  $f'$  — его второе главное фокусное расстояние. В этом приближении для максимальной освещенности в главной фокальной плоскости по (16.7) получим

$$E' = \frac{\tau\pi}{4} \left(\frac{d}{f'}\right)^2 B. \quad (16.8)$$

Из формулы (16.8) видно, что максимальная освещенность на фотопластинке пропорциональна квадрату отношения диаметра объектива к его фокусному расстоянию. Это отношение  $d/f'$  принято называть относительным отверстием объектива. Большинство современных аппаратов имеет относительное отверстие 1:4,5; 1:2,5. Существуют объективы с относительным отверстием больше единицы, например 1:0,9, однако для того чтобы они давали изображения хорошего качества, их приходится делать многолинзовыми, что ведет к увеличению потерь в свете из-за отражений, т. е. к уменьшению коэффициента  $\tau$ .

Фотоаппарат часто входит как составная часть в более сложные оптические приборы. В качестве примера рассмотрим комбинирование фотокамеры с микроскопом. Это позволяет заменять визуальное наблюдение микроскопических препаратов их фотографированием. Такое комбинирование сводится к тому, что окуляр микроскопа заменяется фотографической камерой. Объектив камеры  $L_2$  (рис. 62) дает действительное изображение  $y_2'$  изображения  $y'$ , создаваемого объективом микроскопа  $L_1$ .

Размеры  $y_2'$  равны

$$y_2' = y' \frac{s_2'}{s_2},$$

где  $s_2$  — расстояние от  $y'$  до объектива камеры  $L_2$  и  $s_2'$  — от объектива камеры до места расположения фотопластинки. Если

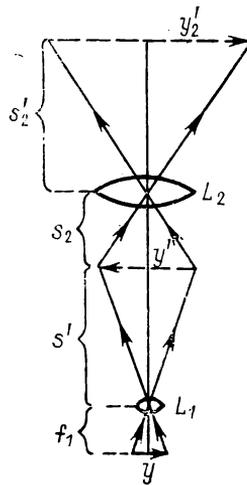


Рис. 62. Схема оптики микроскопа с фотокамерой.

приближенно положить  $s_2 \approx f_2$ , где  $f_2$  — первое главное фокусное расстояние объектива камеры, то по (16.5) и (16.7) для линейного увеличения  $\beta$  микроскопа с камерой имеем

$$\beta = \frac{s' s_2'}{f_1 f_2}.$$

Полученный снимок микрообъекта может быть потом еще раз увеличен для более удобного рассматривания фотографии.

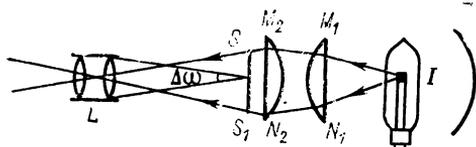


Рис. 63. Осветительная схема оптики проекционного фонаря.

### Проекционный фонарь.

Этот прибор служит для получения на экране увеличенного изображения прозрачных картин (диапозитивов). На рис. 63 дана схема оптической системы проекционного фонаря:  $I$  — источник света,  $M_1 N_1$ ,  $M_2 N_2$  — осветительная система (конденсор), состоящая из двух плоско-выпуклых линз,  $SS_1$  — диапозитив,  $L$  — проектирующий объектив. Роль конденсора — увеличить освещенность (а следовательно, и яркость  $B$ ) диапозитива.

Проектирующий объектив дает на экране увеличенное действительное и обратное изображение диапозитива  $SS_1$ . Освещенность  $E'$  может быть определена с помощью формулы (11.10)

$$E' = \tau B \frac{\Delta\omega}{\beta^2}, \quad (16.9)$$

где  $\beta$  — линейное увеличение;  $\Delta\omega$  — телесный угол, под которым виден проектирующий объектив  $L$  из места расположения диапозитива  $SS_1$ . Обычно проекционный фонарь дает большое увеличение, поэтому диапозитив  $SS_1$  располагается вблизи главной фокальной плоскости объектива  $L$ . Тогда для угла  $\Delta\omega$  приближенно имеем

$$\Delta\omega = \frac{\pi d^2}{4f^2},$$

где  $d$  — диаметр объектива и  $f$  — его первое главное фокусное расстояние. Подставляя это значение  $\Delta\omega$  в (16.9), найдем

$$E' = \frac{\tau\pi}{4} \left(\frac{d}{f}\right)^2 \frac{1}{\beta^2} B. \quad (16.10)$$

Из формулы (16.10) видно, что освещенность на экране определяется квадратом относительного отверстия  $d/f$  объектива и, кроме того, она обратно пропорциональна квадрату линейного увеличения  $\beta$ . Чем большего размера желательно получить на экране изображение, тем больше следует брать яркость прое-

цируемого объекта  $B$ , т. е. тем более ярким источником света  $I$  следует снабжать прибор.

По указанной схеме устраивается проецирующая система кино, а также проекторов, используемых для увеличения фотографий.

В аудиториях часто употребляется проекция непрозрачных предметов (эпипроекция в отличие от диапроекции — проекции прозрачных предметов). В этом случае для достижения необходимой освещенности на экране надо создать весьма большую освещенность в месте расположения проецируемого объекта, чтобы его яркость в рассеянном свете оказалась достаточной.

Обычно это достигается с помощью нескольких ламп, световые потоки от которых направляются на проецируемый предмет. Кроме того, для эпипроекции объектив  $L$  берется возможно большей светосилы.

**Осветительные системы.** Оптические системы, изменяя телесные углы, в пределах которых распространяются световые потоки, могут менять освещенность. Рассмотрим простейшую систему, состоящую из точечного источника  $S$  с силой света  $I$  и линзы  $L$  (рис. 64). Пусть линза  $L$  видна из места расположения источника под телесным углом  $\omega$ , тогда от источника на линзу падает поток  $I\omega$  и через линзу проходит поток

$$F' = \tau I\omega, \quad (16.11)$$

где  $\tau$  — коэффициент пропускания линзы ( $\tau < 1$ ).

Если источник  $S$  расположен между линзой  $L$  и ее первым главным фокусом  $F$ , то получается его мнимое изображение  $S'$ . Выходящий из линзы пучок света заключен в пределах телесного угла  $\omega'$ , под которым линза видна из места расположения изображения  $S'$ . Сила света этого пучка равна

$$I' = \frac{F'}{\omega'}.$$

Отсюда, подставляя вместо  $F'$  его значение по (16.11), получим

$$I' = \tau I \frac{\omega}{\omega'}. \quad (16.12)$$

Так как потери света в линзе малы, то  $\tau$  близко к единице; из формулы (16.2) вытекает: сила света в пучке возрастает в отношении  $\omega/\omega'$  по сравнению с силой света от самого источни-

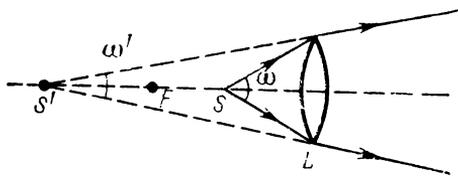


Рис. 64. Осветительная система с одной линзой.

ка. Величина  $\omega/\omega'$  может быть сделана и поэтому с помощью линзы можно значительно повысить силу света в пучке.

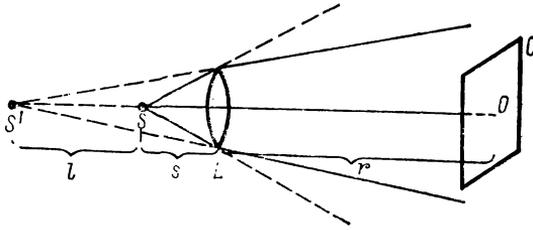


Рис. 65. Освещенность на экране.

Для того чтобы сравнить освещенности, создаваемые непосредственно источником  $S$  и им же при наличии линзы  $L$ , рассмотрим экран  $C$  (рис. 65), расположенный от источника на расстоянии  $r$ . Размеры экрана будем считать меньшими, чем сечение пучков, как идущего непосредственно от источника  $S$ , так и от его изображения  $S'$ . Для простоты предположим, что экран невелик и расположен перпендикулярно к оси  $SO$ . При отсутствии линзы освещенность экрана

$$E = \frac{I}{r^2}.$$

При наличии линзы она станет равной

$$E' = \frac{I'}{(r+l)^2},$$

где  $l$  — расстояние между источником  $S$  и его изображением  $S'$ . Воспользовавшись формулой (16.12), перепишем это выражение в виде

$$E' = \tau \frac{\omega}{\omega'} \frac{I}{(r+l)^2}.$$

Но  $\frac{\omega}{\omega'} = \left(\frac{l+s}{s}\right)^2$ , где  $s$  — расстояние от линзы до источника. Если источник расположен вблизи главного фокуса линзы, то  $s \approx f$  и  $l \gg f$ . Тогда

$$E' = \tau l \left(\frac{l}{f}\right)^2 \frac{1}{(r+l)^2},$$

а отношение освещенностей  $E'/E$  окажется равным

$$\frac{E'}{E} = \tau \left(\frac{l}{f}\right)^2 \left(\frac{r}{r+l}\right)^2. \quad (16.13)$$

Величина  $l$  может быть сделана достаточно большой за счет приближения источника  $S$  к главному фокусу линзы  $F$ . Если

$l \gg r$ , то по (16.13) приближенно

$$\frac{E'}{E} \cong \tau \left( \frac{r}{f} \right)^2,$$

откуда видно, что при малом фокусном расстоянии  $f$  освещенность  $E'$  может оказаться много больше  $E$ .

Если источник расположить точно в фокусе  $F$ , то выходящий из линзы пучок света станет параллельным и яркость его должна возрасти до бесконечности. В действительности всякий источник света является протяженным, кроме того, пучок расширяется из-за дифракции, поэтому угол  $\omega'$  всегда отличен от нуля и сила света не может стать бесконечно большой.

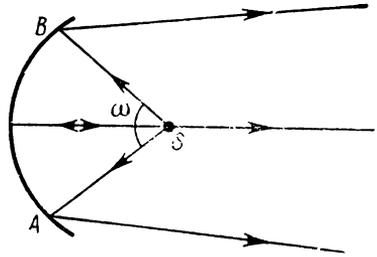


Рис. 66. Осветитель с вогнутым зеркалом.

Употребляемые на практике осветительные приборы, называемые прожекторами или фарами (у транспорта), построены по указанной схеме, только обычно линза заменяется вогнутым зеркалом (рис. 66). Пусть пучок лучей, отраженный от зеркала, заключен в конусе с углом раствора  $\alpha$ , тогда

$$\omega' = 4\pi \sin^2 \frac{\alpha}{4} \cong \pi \frac{\alpha^2}{4}.$$

Формула (16.12) принимает вид

$$I' = \tau I \frac{4\omega}{\pi \alpha^2}. \quad (16.14)$$

В больших прожекторах  $\alpha$  не превышает  $3^\circ$ , т. е. приблизительно 0,05 рад. Угол же раствора  $\omega$  может достигать  $\pi$  и больше, тогда из (16.14) следует, что сила света от прожектора может на три порядка превышать силу света от самого источника света.

## ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ЛУЧЕВОЙ ОПТИКИ

### § 17. Поляризация света при отражении и преломлении

Лучевые законы преломления и отражения света на границе двух прозрачных сред не полны в том смысле, что они ничего не говорят об относительной яркости преломленного и отраженного пучков. Последние же могут быть найдены лишь при учете поляризации света, т. е. при учете характера световых колебаний по отношению к плоскостям, проведенным через направление их распространения. В простейшем случае линейной (или плоской) поляризации оба вектора, характеризующие световую волну — вектор электрической напряженности  $\mathbf{H}$  (§ 1) — совершают линейные колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях  $A$  и  $B$ . Оба они перпендикулярны к направлению распространения волны  $\mathbf{v}$ .

Плоскостью поляризации называется плоскость, в которой колеблется магнитный вектор  $\mathbf{H}$ ; электрический вектор  $\mathbf{E}$  колеблется в плоскости, перпендикулярной к плоскости поляризации.

Воздействие стоячей электромагнитной волны на среду, в которой она образуется, по большей части проявляется в местах пучности электрического вектора. Например, выброс фотоэлектронов, флюоресценция (при электрически-дипольном характере флюоресценции), физиологические действия происходят в местах пучности электрического вектора. То же относится и к местам почернения фотоматериалов. Поэтому когда для краткости говорят про «световые колебания», то последние отождествляют с колебаниями электрического вектора и, следовательно, должны рассматриваться как перпендикулярные к плоскости поляризации.

Относительные яркости световых пучков, отраженных и преломляемых на границе двух прозрачных изотропных сред, даются формулами Френеля, полученными еще в начале XIX века. Однако свободный от противоречий вывод формул

Френеля может быть дан лишь на основании электромагнитной теории света. Не останавливаясь на этом выводе,\* приведем в настоящем параграфе лишь формулы Френеля и рассмотрим ряд вытекающих из них следствий, существенных для понимания методов оптических наблюдений и измерений.

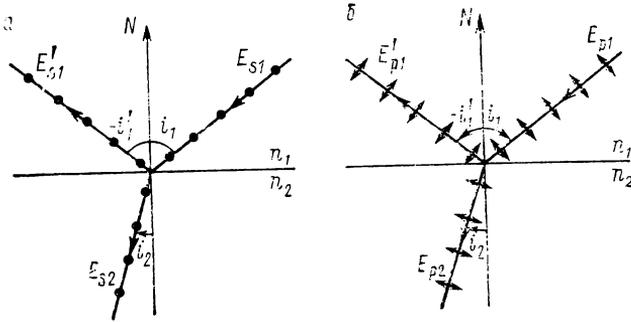


Рис. 67. Колебания электрического вектора в падающем, отраженном и преломленном лучах.

Рассмотрим на рис. 67 а) свет поляризован в плоскости падения; б) свет поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. В первом случае колебания электрического вектора происходят в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, что отмечено на рис. 67, а точками; во втором случае электрический вектор колеблется в плоскости падения (стрелки на рис. 67, б). Будем рассматривать отражение и преломление у плоской границы, углы падения и отражения обозначим через  $i_1$  и  $i_2$  и угол отражения через  $-i_1'$  наконец, через  $n_{21}$  обозначим относительный коэффициент преломления второй среды по отношению к первой:  $n_{21} = n_2/n_1$ . Тогда закон преломления примет вид

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21}. \quad (17.1)$$

Амплитуды колебаний электрического вектора, перпендикулярных к плоскости падения, обозначим: в падающем луче через  $a_{s1}$ , в отраженном — через  $a'_{s1}$ , в преломленном — через  $a_{s2}$ . Также обозначим амплитуды колебаний, происходящих в плоскости падения, для падающего, отраженного и преломленного

\* См., например: Калитеевский Н. И. Волновая оптика. М., 1977.

лучей через  $a_{p1}$ ,  $a'_{p1}$ ,  $a_{p2}$ . По формулам Френеля

$$\frac{a'_{s1}}{a_{s1}} = \frac{-\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}, \quad (17.2)$$

$$\frac{a_{s2}}{a_{s1}} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)}, \quad (17.3)$$

$$\frac{a'_{p1}}{a_{p1}} = \frac{\operatorname{tg}(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}(i_1 + i_2)}, \quad (17.4)$$

$$\frac{a_{p2}}{a_{p1}} = \frac{2 \sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)}. \quad (17.5)$$

Для частного случая границы воздух — стекло с относительным коэффициентом преломления  $n_{21} = 1,52$  отношения амплитуд  $a'_{s1}/a_{s1}$ ,  $a_{s2}/a_{s1}$ ,  $a'_{p1}/a_{p1}$ ,  $a_{p2}/a_{p1}$ , как функции угла  $i_1$  приведены на рис. 68. Из рисунка видно, что при некотором угле падения  $i_1 = i_{01}$  (в рассматриваемом случае при  $56^\circ 40'$ ) отношение амплитуд  $a'_{p1}/a_{p1} = 0$ . Это значение  $i_{01}$  угла по формуле (17.4) определяется условием

$$\operatorname{tg}(i_{01} + i_2) = \infty,$$

т. е. условием

$$i_{01} + i_2 = \pi/2 \quad (17.6)$$

Поскольку это условие не содержит значения  $n_{21}$ , оно носит общий характер: если отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны, то отраженный свет полностью поляризован в плоскости падения, т. е. в нем отсутствуют колебания электрического вектора, параллельные плоскости падения ( $a'_{p1} = 0$ ). Это утверждение носит название закона Брюстера.

Из (17.1) и (17.6) следует, что для двух сред с заданным значением  $n_{21}$  угол Брюстера  $i_{01}$  удовлетворяет условию

$$\sin i_{01} = n_{21} \sin \left( \frac{\pi}{2} - i_{01} \right) = n_{21} \cos i_{01},$$

откуда

$$\operatorname{tg} i_{01} = n_{21}. \quad (17.7)$$

Равенство (17.7) позволяет найти значение угла Брюстера для любой пары сред с заданными коэффициентами преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Свет, поляризованный в плоскости падения, падающий под углом Брюстера, проходит во вторую среду без потерь на отражение.

Выясним роль знаков в формулах (17.2)—(17.5). Знаки составляющих вектора зависят от выбора систем координат. Запись формул (17.2)—(17.5) соответствует такому выбору координат, при котором положительные составляющие вектора  $E$ , параллельные плоскости

падения, направлены в падающей, отраженной и преломленной волнах так, как это изображено на рис. 69, где  $a$  относится к малому углу падения, а  $b$  — к большому. Положительные направления составляющих, перпендикулярных плоскости падения, направлены для всех трех волн за чертеж. Отрицательное значение членов в правой части формул Френеля означает изменение фазы на  $\pi$  у границы раздела сред. Отсюда в силу формул (17.3) и (17.5) следует, что преломление волн в любых случаях происходит без изменения фазы. В отраженной волне при  $n_{21} > 1$  при любом угле падения составляющая вектора электрической напряженности, перпендикулярная плоскости падения ( $E_s$ ), меняет фазу на  $\pi$  (знак ми-

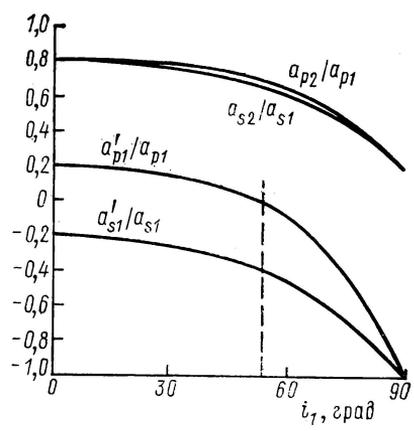


Рис. 68. Отношение амплитуд в падающем, преломленном и отраженном лучах на границе воздух — стекло.

нуса в формуле (17.2)). Для составляющей, параллельной плоскости падения ( $E_p$ ) для отраженной волны следует рассмотреть в отдельности два случая: угол падения  $i_1$  меньше угла Брюстера  $i_{01}$  и угол падения больше угла Брюстера. В первом случае  $i_1 + i_2 < \pi/2$ , знак  $\text{tg}(i_1 + i_2)$  положителен, и при  $n_{21} > 1$

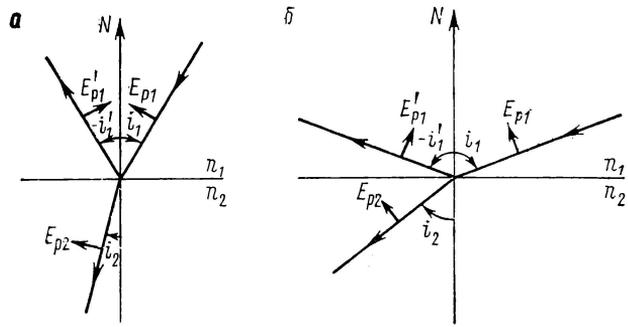


Рис. 69. Направление электрического вектора в падающем, отраженном и преломленном лучах.

нуса в формуле (17.2)). Для составляющей, параллельной плоскости падения ( $E_p$ ) для отраженной волны следует рассмотреть в отдельности два случая: угол падения  $i_1$  меньше угла Брюстера  $i_{01}$  и угол падения больше угла Брюстера. В первом случае  $i_1 + i_2 < \pi/2$ , знак  $\text{tg}(i_1 + i_2)$  положителен, и при  $n_{21} > 1$

угол  $i_2 < i_1$ , откуда из формулы (17.4) вытекает, что знаки  $E_{p1}$  и  $E_{p2}$  одинаковы. Но в этом случае ( $i_1$  мал) справедлив рис. 69, а, из которого видно, что  $E_{p1}$  и  $E_{p2}$  направлены в разные стороны, а это означает, что произошло изменение фазы на  $\pi$ . При угле падения  $i_1$  больше угла Брюстера  $i_{01}$  выполняется неравенство  $i_1 + i_2 > \pi/2$  и знак  $\text{tg}(i_1 + i_2)$  отрицателен — составляющие  $E_{p1}$  и  $E_{p2}$  по формуле (17.4) имеют разные знаки. Но теперь имеет место рис. 69, б, из которого вытекает, что снова происходит изменение фазы на  $\pi$ . При угле падения, равном углу Брюстера, амплитуда колебаний  $E'_p$  равна нулю.

Резюмируя, получаем: при углах падения как меньше, так и больше угла Брюстера при отражении света от среды оптически более плотной ( $n_2 > 1$ ) происходит изменение фазы на  $\pi$ . Другими словами: при отражении волн от оптически более плотной среды происходит потеря полуволны. Этот вывод подтверждается рядом интерференционных опытов, например, отсутствием нулевой полосы в опыте Ллойда.

Определим теперь отношение потоков световой энергии в падающем, отраженном и преломленном пучках. По сказанному в § 6, ч. 1 равномерный поток  $\Phi$  через площадку  $S$  равен

$$\Phi = \Pi_n S,$$

где  $\Pi_n$  — нормальная составляющая вектора Пойнтинга.

Так как вектор Пойнтинга пропорционален квадрату амплитуды электрического вектора, то

$$\Phi \sim a^2 S_n.$$

Напишем сперва выражение для отношения потоков в отраженной и падающей волне  $\Phi'_1$  к  $\Phi_1$ ; для них поперечные сечения  $S_n$  одинаковы, поэтому для света поляризованного в плоскости падения, что отмечено значком параллельности (электрический вектор колеблется перпендикулярно плоскости падения), по формуле (17.2) получим

$$\left(\frac{\Phi'_1}{\Phi_1}\right)_{\parallel} = \left(\frac{a'_{s1}}{a_{s1}}\right)^2 = \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)}. \quad (17.3)$$

Аналогично для света, поляризованного перпендикулярно плоскости падения (вектор  $E$  колеблется в плоскости падения) по формуле (17.4) имеем

$$\left(\frac{\Phi'_1}{\Phi_1}\right)_{\perp} = \left(\frac{a'_{p1}}{a_{p1}}\right)^2 = \frac{\text{tg}^2(i_1 - i_2)}{\text{tg}^2(i_1 + i_2)}. \quad (17.9)$$

При нормальном падении света ( $i_1 = i_2 = 0$ ) выражения (17.8) и (17.9) принимают неопределенный вид. Однако легко

видеть, что эта неопределенность в обоих случаях ведет к одному и тому же выражению  $\left(\frac{n_{21}-1}{n_{21}+1}\right)^2$ , откуда получим, что в случае нормального падения света, поляризованного как параллельно, так и перпендикулярно плоскости падения, имеет место отношение

$$\left(\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\right)_{i_1=0} = \left(\frac{n_{21}-1}{n_{21}+1}\right)^2. \quad (17.10)$$

Для определения потока энергии в преломленной волне можно воспользоваться формулами Френеля (17.3) и (17.5). Однако проще использовать закон сохранения энергии, по которому для непоглощающих сред сумма потоков энергии в отраженном и преломленном пучках  $\Phi_1' + \Phi_2$  равна потоку энергии в падающем пучке

$$\Phi_1' + \Phi_2 = \Phi_1,$$

откуда

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = 1 - \frac{\Phi_1'}{\Phi_1}. \quad (17.11)$$

Зная по формуле (17.8) и (17.9) отношение  $\Phi_1'/\Phi_1$  для случаев света, поляризованного в плоскостях, параллельной и перпендикулярной плоскости падения, найдем по (17.11) и отношение  $\Phi_2/\Phi_1$  для тех же случаев.

Для естественного света, не носящего следов поляризации, можно считать, что половина его энергии приходится на колебания, параллельные плоскости падения, и половина — на колебания, перпендикулярные плоскости падения. Отсюда по (17.8) и (17.9) поток энергии в отраженном свете для случая естественного света определится соотношением

$$\frac{\Phi_1'}{\Phi_1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} + \frac{\text{tg}^2(i_1 - i_2)}{\text{tg}^2(i_1 + i_2)} \right]. \quad (17.12)$$

Для нормального падения естественного света формула (17.12) переходит в (17.10).

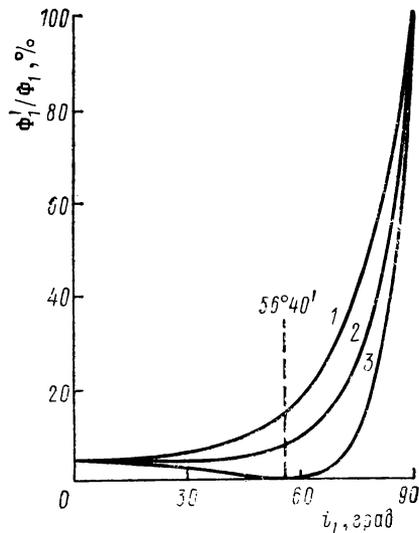


Рис. 70. Отношение отраженного потока  $\Phi_1'$  к падающему потоку  $\Phi_1$ .

На рис. 70 представлены графически отношения  $\Phi'_1/\Phi_1$  для света, поляризованного в плоскости падения (1), поляризованного в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (3) и естественного света (2) как функции угла падения  $i_1$ . Кривые вычислены для случая  $n_{21} = 1,54$  (граница воздух — стекло). Угол Брюстера  $i_{01} = 56^\circ 40'$ ; при  $i_1 = i_{01}$  кривая 3 касается оси абсцисс — отраженный свет полностью поляризован в плоскости падения. Наименьшее количество неполяризованного света отражается при  $i_1 = 0$ , т. е. при нормальном падении света; при стремлении угла падения  $i_1$  к  $\pi/2$  количество отраженного света стремится к 100%.

Покажем также, что существование полного внутреннего отражения вытекает из формул Френеля. В самом деле, при  $\sin i_1 = \sin i_{1\text{пр}} = n_{21}$  по закону преломления  $i_2 = \pi/2$  (§ 3). При этом по формулам (17.8) и (17.9) отражение становится полным

$$\left(\frac{\Phi'_1}{\Phi_1}\right)_{\parallel} = \frac{\sin^2(i_{1\text{пр}} - \pi/2)}{\sin^2(i_{1\text{пр}} + \pi/2)} = 1,$$

$$\left(\frac{\Phi'_1}{\Phi_1}\right)_{\perp} = \frac{\text{tg}^2(i_{1\text{пр}} - \pi/2)}{\text{tg}^2(i_{1\text{пр}} + \pi/2)} = 1.$$

Для всех углов падения  $i_1 > i_{1\text{пр}}$  не существует вещественных значений угла преломления  $i_2$ , удовлетворяющих закону преломления. Поэтому при  $i_1 > i_{1\text{пр}}$  поток энергии в преломленном потоке  $\Phi_2$  остается равным нулю и отношение  $\Phi'_1/\Phi_1$  попрежнему — равным единице.

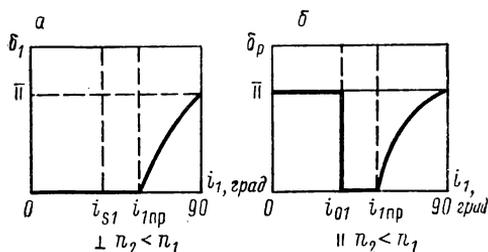


Рис. 71. Скачки фаз при полном внутреннем отражении.

При полном внутреннем отражении имеет место скачок фазы в отраженном луче относительно фазы в падающем луче. Если электрический вектор  $E$  колеблется в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, то этот скачок фазы определя-

ется соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_s}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}{\cos i_1}. \quad (17.13)$$

Если электрический вектор колеблется в плоскости падения, то скачок фазы  $\delta_p$  определится соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_p}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}{n_{21} \cos i_1}. \quad (17.14)$$

Зависимость скачков фаз  $\delta_s$  и  $\delta_p$  от угла  $i_1$  представлена на рис. 71, а и б для случая  $n_{21} = 1/n_{12} = 1/1,52$ .

Разность фаз  $\delta_p - \delta_s$  между колебаниями, параллельными и перпендикулярными плоскости поляризации по (17.13) и (17.14), определяется равенством

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_p - \delta_s}{2} = \frac{\cos i_2 \sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}{\cos^2 i_1}. \quad (17.15)$$

Из формулы (17.15) видно, что при  $i_1 = i_{\text{пр}}$

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_p - \delta_s}{2} = 0,$$

т. е. если луч отражается при предельном угле, то не возникает разности фаз между колебаниями, параллельными и перпендикулярными к плоскости поляризации; плоскополяризованный свет остается плоскополяризованным. Вообще же говоря, между компонентами электрического вектора  $E'_{1p}$  и  $E'_{1s}$  в луче, возникшем при полном внутреннем отражении, существует некоторая разность фаз.

Рассмотрим несколько применений формул Френеля.

**Пример 1.** Сложный объектив состоит из двух линз, одна из которых сделана из стекла с коэффициентом преломления  $n_1 = 1,52$ , а другая из стекла с коэффициентом преломления  $n_2 = 1,60$ . Линза склеена канадским бальзамом, коэффициент преломления которого  $n_3 = 1,54$ . Считая углы падения света на поверхность линз малыми, определить потери света в объективе из-за отражений. Сравнить эти потери с тем случаем, когда обе линзы объектива не склеены и между ними остается воздушный промежуток.

**Решение.** По формуле (17.10) на первой поверхности отразится следующая часть падающего светового потока:

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_1} = \left( \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} \right)^2 = \left( \frac{0,52}{2,52} \right)^2 = 0,043.$$

Через первую поверхность пройдет 0,957 от падающего потока.

Для подсчета доли светового потока, отраженного на границе стекло — канадский бальзам, надо определить коэффициент относительного преломления

$$n_{31} = \frac{n_3}{n_1} = \frac{1,54}{1,52} = 1,013.$$

Отсюда мы имеем, что от границы стекло — канадский бальзам отразится доля потока

$$\left(\frac{n_{31} - 1}{n_{31} + 1}\right)^2 = \left(\frac{0,013}{2,013}\right)^2 = 0,00004,$$

т. е. практически отражения не произойдет. Таким образом, остается учесть потерю при отражении от последней поверхности объектива, которая определится из соотношения

$$\left(\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}\right)^2 = \left(\frac{0,60}{2,60}\right)^2 = 0,053;$$

через последнюю поверхность пройдет 0,947 от падающего потока. Следовательно, через весь объектив пройдет

$$\Phi = 0,957 \cdot 0,947\Phi_0 = 0,906\Phi_0.$$

Потери света на отражения во всем объективе составят 9,4%. Легко подсчитать, что при наличии воздушного промежутка между линзами потери будут равны 18%, т. е. почти вдвое больше.

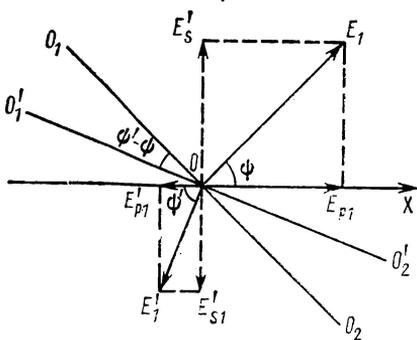


Рис. 72. К подсчету поворота плоскости поляризации при отражении от стекла.

амплитуды колебаний  $E_1$ ,  $E_{p1}$ ,  $E_{s1}$ . Так как по условию  $E_1$  составляет с плоскостью  $OX$  угол  $45^\circ$ , то

$$a_{p1} = a_{s1} = \frac{a_1}{\sqrt{2}}.$$

Определим угол преломления

$$\sin i_2 = \frac{\sin i_1}{n} = \frac{\sin 30^\circ}{1,46} = 0,342, \text{ откуда } i_2 = 20^\circ.$$

По формулам Френеля (17.2) и (17.4) получим для амплитуд колебаний в отраженном луче  $a_{s1}$  и  $a_{p1}$

$$a_{s1}' = -a_{s1} \frac{\sin(30^\circ - 20^\circ)}{\sin(30^\circ + 20^\circ)} = -0,227a_{s1},$$

$$a_{p1}' = -a_{p1} \frac{\operatorname{tg}(30^\circ - 20^\circ)}{\operatorname{tg}(30^\circ + 20^\circ)} = -0,148a_{p1}.$$

Пример 2. Свет, поляризованный в плоскости, составляющей угол  $\psi = 45^\circ$  с плоскостью падения, падает на поверхность стекла под углом  $i_1 = 30^\circ$ . Определить, в какой плоскости поляризован свет в отраженном луче. Коэффициент преломления  $n = 1,46$ .

Решение. Пусть (рис. 72)  $OX$  означает плоскость падения, а  $O_1O_2$  — плоскость поляризации. Колебания электрического вектора  $E_1$  в падающей волне совершаются в плоскости, перпендикулярной плоскости поляризации. Разложим  $E_1$  на две составляющих  $E_{p1}$  — параллельную плоскость падения и  $E_{s1}$  — перпендикулярную плоскости падения.

Обозначим через  $a_1$ ,  $a_{p1}$ ,  $a_{s1}$  — амплитуды колебаний  $E_1$ ,  $E_{p1}$ ,  $E_{s1}$ .

По сказанному в основном тексте при угле падения меньше угла Брюстера обе составляющие колебаний в отраженном луче  $E_{p1}'$  и  $E_{s1}'$  меняют фазу на  $\pi$ , поэтому на рис. 72 они отложены в стороны, противоположные  $E_{p1}$  и  $E_{s1}$ . Из рис. 72 видно, что колебание электрического вектора  $E_1'$  в отраженном луче совершается в плоскости, составляющей с плоскостью  $OX$  угол  $\psi'$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \psi' = \frac{0,227}{0,148} = 1,59, \text{ откуда } \psi' = 57^\circ.$$

Плоскость поляризации отраженного луча  $O_1'O_2'$  по соотношению к плоскости поляризации падающего луча повернута на угол  $\psi' - \psi = 57^\circ - 45^\circ = 12^\circ$ .

Легко видеть, что вообще, если плоскость поляризации не совпадает с плоскостью падения или не перпендикулярна к ней, то при отражении и преломлении у границы двух прозрачных сред происходит поворот плоскости поляризации.

## § 18. Простейшие поляризационные приспособления

Простейшим приспособлением, служащим для получения поляризованного света, является стеклянная стопа, которая представляет собой ряд плоскопараллельных стеклянных пластинок, расположенных параллельно друг другу, с тонкими воздушными промежутками между ними. Угол падения света на пластинки несколько больше угла Брюстера  $i_{01}$ . Тогда при отражении от каждой пластинки естественного света отражаться будет преимущественно свет, поляризованный в плоскости падения (см. рис. 70). Соответственно в проходящем свете станет преобладать свет, поляризованный перпендикулярно плоскости падения. Очевидно, в проходящем свете относительная доля света, поляризованного перпендикулярно плоскости падения, будет возрастать по мере возрастания числа пластинок; при большом числе пластинок свет, прошедший через стопу, будет практически нацело поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения.

Полное разделение света на лучи, поляризованные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, достигается с помощью приборов, устройство которых основано на явлении двойного лучепреломления в кристаллах.

Как известно, в одноосных кристаллах луч при преломлении разбивается на два — обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный луч подчиняется обыкновенному закону преломления, для необыкновенного луча отношение  $\sin i_1 / \sin i_2$  не остается постоянным при изменении угла падения  $i_1$ . Необыкновенный луч, как правило, не лежит в плоскости падения, т. е. в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности. Угол преломления необыкновенного луча, а также угол между ним и плоскостью падения зависит не только от угла падения, но и от ориентации преломляющей поверхности и плоскости падения относительно оптической оси кристалла. Вдоль

направления оптической оси кристалла двойного лучепреломления не происходит. Перпендикулярно к оптической оси оба луча — обыкновенный и необыкновенный — также распространяются в одном направлении, но с разными скоростями.

Плоскость, содержащая оптическую ось кристалла и данный луч, называется главным сечением или главной плоскостью кристалла, соответствующим этому лучу. Оба луча — обыкновенный и необыкновенный — полностью поляризованы. Обыкновенный луч поляризован в плоскости соответствующего ему главного сечения кристалла, а необыкновенный — перпендикулярно к плоскости соответствующего ему главного сечения.

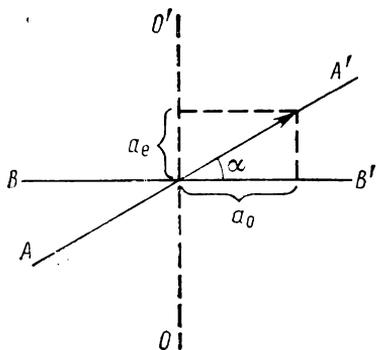


Рис. 73. Амплитуда колебаний в обыкновенном и необыкновенном лучах.

Плоскости главных сечений обыкновенного и необыкновенного лучей совпадают друг с другом, если оптическая ось лежит в плоскости падения. Тогда обыкновенный и необыкновенный

лучи полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. В общем же случае плоскости поляризации света в обыкновенных и необыкновенных лучах составляют угол, несколько отличный от  $\pi/2$ , так как их главные сечения не вполне совпадают друг с другом.

До сих пор мы предполагали, что на кристалл падает естественный свет. Предположим теперь, что на кристалл падает свет, полностью поляризованный в какой-либо определенной плоскости. В таком случае, вообще говоря, возникают тоже два луча, но различной яркости. Пусть  $AA'$  (рис. 73) — плоскость, в которой колеблется электрический вектор в падающей волне (эта плоскость перпендикулярна к плоскости поляризации падающего света). Пренебрежем различием между главными сечениями обыкновенного и необыкновенного лучей и будем считать их совпадающими (направление  $OO'$  на рис. 73). Обыкновенный луч поляризован в плоскости главного сечения кристалла  $OO'$ , следовательно, электрический вектор в обыкновенной волне колеблется в плоскости  $BB'$ , перпендикулярной к  $OO'$ . Амплитуда обыкновенного луча  $a_0$  при отсутствии потерь на отражение и поглощение равна проекции амплитуды падающего луча  $a$  на направление  $BB'$

$$a_0 = a \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между плоскостями колебания в падающем луче и

преломленном обыкновенном луче. Очевидно, одновременно  $\alpha$  есть угол между плоскостями поляризации падающего и обыкновенного лучей. Так как поток энергии пропорционален квадрату амплитуд, то для потока  $\Phi_0$  в обыкновенном луче имеем

$$\Phi_0 = \Phi \cos^2 \alpha, \quad (18.1)$$

где  $\Phi$  — поток в падающем луче.

Необыкновенный луч поляризован в плоскости, перпендикулярной к главному сечению кристалла, поэтому амплитуда  $a_e$  необыкновенного луча равна

$$a_e = a \sin \alpha$$

и, следовательно, поток  $\Phi_e$  равен

$$\Phi_e = \Phi \sin^2 \alpha. \quad (18.2)$$

Формулы (18.1) и (18.2), определяющие потоки энергии в обыкновенном и необыкновенном лучах, носят название формул Малюса. Из (18.1) и (18.2) для отношения потоков в необыкновенном и обыкновенном лучах, возникающих из одного плоскополяризованного луча, находим

$$\frac{\Phi_e}{\Phi_0} = \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (18.3)$$

Сумма потоков в обоих лучах равна потоку в падающем луче

$$\Phi \cos^2 \alpha + \Phi \sin^2 \alpha = \Phi,$$

как это и следует из закона сохранения энергии.

В большинстве прозрачных одноосных кристаллов поглощение обыкновенного и необыкновенного лучей одинаково. Однако существуют и такие кристаллы, в которых один из лучей поглощается сильнее другого. Такое различие в поглощении носит название *дихроизма*.

Кроме естественных твердых кристаллов двойное лучепреломление дают жидкие кристаллы, аморфные тела при деформации и жидкости в электрическом поле. В двuosных кристаллах оба луча не подчиняются обыкновенному закону преломления. Не останавливаясь на всех этих явлениях, рассмотрим ряд поляризационных приборов, в которых используются одноосные кристаллы.

**Призма Волластона.** Призма Волластона позволяет развести поляризованные лучи на больший угол, чем это имеет место при преломлении в одном кристалле, и симметрично по отношению к падающему лучу. Призма Волластона состоит из двух прямоугольных призм из исландского шпата, склеенных по гипотенузам (рис. 74, а). В призме  $ABC$  оптическая ось параллельна катету  $AB$ ; в призме  $ACD$  оптическая ось параллельна ребру  $C$ , перпендикулярному к плоскости рисунка. Естественный луч падает нормально на грань  $AB$ . Оба возникающих в призме  $ABC$

луча, обыкновенный и необыкновенный, идут по одному направлению, перпендикулярному к оптической оси. Но скорости распространения этих лучей разные, поскольку им соответствуют разные коэффициенты преломления  $n_o$  и  $n_e$ . Во второй призме

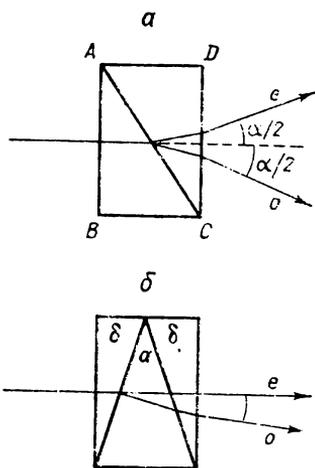


Рис. 74. Полярирующие призмы: призма Волластона (а), призма Аббе (б).

$ACD$  они тоже пойдут в направлении, перпендикулярном к оптической оси, но так как оптические оси в обеих призмах взаимно перпендикулярны, то обыкновенный луч в первой призме превратится в необыкновенный во второй, и наоборот. Таким образом, луч, бывший обыкновенным в первой призме, преломится на границе обеих призм с относительным коэффициентом преломления  $n_e/n_o$ , а луч, бывший в первой призме необыкновенным, преломится с относительным коэффициентом преломления  $n_o/n_e$ . Для исландского шпата  $n_o > n_e$ , следовательно,  $n_e/n_o < 1$ , а  $n_o/n_e > 1$ , поэтому первый луч преломится в сторону ребра  $C$  призмы  $ACD$ , а второй — в сторону ее основания  $AD$ . Расхождение между лучами достигает  $3,4^\circ$ . Оба луча плоско поляризованы: в первом луче (необыкновенный во

второй призме) электрический вектор колеблется параллельно оптической оси второй призмы; во втором луче (обыкновенный во второй призме) электрический вектор колеблется перпендикулярно оптической оси второй призмы.

Видоизменением призмы Волластона является полярирующая призма Аббе (рис. 74, б). Она состоит из трех призм, средняя из которых (а) сделана из исландского шпата с оптической осью, параллельной преломляющему ребру  $C$ . Две другие призмы (б) стеклянные; они дополняют призму а до параллелепипеда. Для необыкновенного луча коэффициент преломления в исландском шпате  $n_e$  равен коэффициенту преломления стекла, поэтому этот луч проходит всю систему без отклонения. Обыкновенный луч отклоняется на обеих границах стекло—исландский шпат. Угол между лучами, прошедшими через всю систему, составляет  $11,7^\circ$ .

**Призма Николя.** Призма Николя (сокращенно: николь, рис. 75) состоит из двух прямоугольных призм из исландского шпата. Острые углы призм равны  $68$  и  $22^\circ$ ; призмы склеены канадским бальзамом вдоль катета  $BC$ . Оптическая ось  $OO'$  лежит в плоскости чертежа под углом  $48^\circ$  к грани  $BA$  (аналогично во второй призме). Падающий луч разбивается в первой

призме на два, из которых обыкновенный луч  $O$  падает на слой канадского бальзама  $BC$  под углом  $76^\circ$ . Коэффициент преломления канадского бальзама  $n=1,54$  меньше коэффициента преломления исландского шпата для обыкновенного луча ( $n_o=1,65$ ) и больше коэффициента преломления для необыкновенного луча ( $n_e=1,49$ ). Угол  $i=76^\circ$  превышает предельный

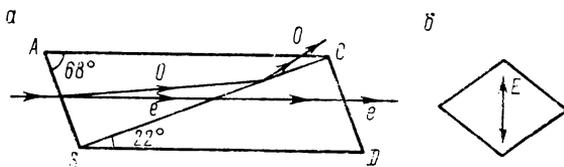


Рис. 75. Призма Николя.  
а — продольное сечение; б — поперечное сечение.

для необыкновенного луча  $OO$  и поэтому он испытывает на границе исландский шпат — канадский бальзам полное внутреннее отражение. Благодаря этому он не попадает во вторую призму и падает на грань  $AC$ . Последняя может быть зачернена для того, чтобы его погасить. Необыкновенный луч проходит сквозь вторую призму. Таким образом, через обе призмы проходит лишь один — необыкновенный луч. В сечении призма имеет вид ромба (рис. 75, б). Прошедший через призму свет полностью поляризован, электрический вектор колеблется в направлении, параллельном короткой диагонали ромба. Призма Николя пропускает поляризованный свет в пучках с углом расхождения  $29^\circ$ .

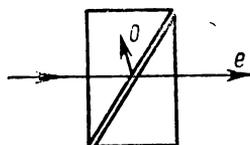


Рис. 76. Призма Глана — Томсона.

Недостатком призмы Николя является непрозрачность канадского бальзама для ультрафиолетового света. В качестве поляризатора в ультрафиолетовой области спектра может использоваться призма Глана — Томсона (рис. 76). Она состоит из двух прямоугольных призм, изготовленных из исландского шпата. Оптические оси в обеих призмах перпендикулярны к плоскости чертежа. Обычно призмы склеиваются, но для ультрафиолетового света изготавливаются призмы с воздушной прослойкой, на границе с которой обыкновенный луч испытывает полное внутреннее отражение, а необыкновенный проходит насквозь. Призма прозрачна в ультрафиолете примерно до области  $\lambda = 220$  нм.

Рассмотрим еще приспособления, основанные на дихроизме. Наиболее широкое распространение из приспособлений этого рода имеют поляризующие пленки, носящие название поляроидов. Они представляют собой пленку целлулоида или другого прозрачного изотропного материала, на которую нане-

сены тонким слоем определенным образом ориентированные микроскопические кристаллики сильно дихроичного вещества. В качестве такового используется сернистый под-хинин, называемый герпатитом. Герпатит обладает заметной селективностью в поглощении, в результате которой он в значительной мере теряет свойства дихроизма в коротковолновой части спектра. Благодаря этому два скрещенных поляроида заметно пропускают фиолетовое излучение. Тем не менее удобства, обусловленные тем, что поляроид представляет собой тонкий лист и может быть получен значительных размеров, легкость и относительная дешевизна объясняют его широкое применение во всех тех случаях, когда не требуется особенно высокая степень поляризации.

Поляризационные приборы употребляются как для превращения света из естественного в поляризованный, так и для анализа характера поляризации.

Если направление короткой диагонали николя составляет угол  $\alpha$  с плоскостью, в которой происходят колебания электрического вектора  $E_0$  в световой волне, падающей на призму, то амплитуда колебаний электрического вектора  $E$ , прошедших через николю, равна  $E = E_0 \cos \alpha$ . Отсюда следует, что поток прошедшего через призму Николя света (при пренебрежении потерями в призме) равен

$$\Phi = \Phi_0 \cos^2 \alpha, \quad (18.4)$$

где  $\Phi_0$  — падающий на призму поток поляризованного света. На рис. 77 представлена в виде векторной диаграммы (сплошная кривая) зависимость  $\Phi$  от  $\alpha$  в соответствии с формулой

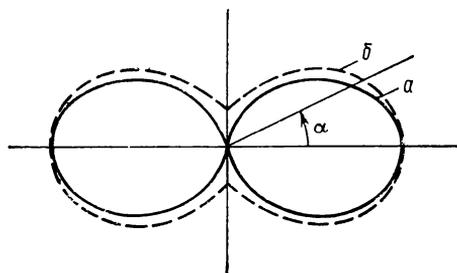


Рис. 77. Зависимость потока от угла поворота николя.

(18.4). При двух положениях ( $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$ ) свет полностью проходит через николю и при двух положениях ( $\alpha = \pi/2$  и  $\alpha = 3\pi/2$ ) — полностью тушится. В действительности во всяком николе существуют как потери света, так и некоторое рассеяние от неоднородностей (пузырьки, царапины и т. д.), поэтому при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi$  прошедший поток  $\Phi$  меньше падающего  $\Phi_0$ , а при

$\alpha = \pi/2$  и  $\alpha = 3\pi/2$  свет не полностью гасится. Пренебрегая этим остаточным эффектом, можно считать, что исследуемый свет полностью плоско поляризован, если при некотором определенном положении николя он полностью тушится. При этом направление плоскости поляризации света (перпендикулярной к  $E$ ) дается направлением короткой диагонали призмы.

Поляризационные приборы позволяют также установить степень поляризации при частично поляризованном свете. В том случае, если на призму Николя падает частично поляризованный свет, то ни при каком положении призмы свет потушить нельзя (то же будет иметь место при эллиптически-поляризованном свете, см. ниже). Зависимость мощности светового потока от угла в этом случае дается кривой, изображенной для некоторого частного случая пунктиром на рис. 77. Частично поляризованный свет может рассматриваться как смесь поляризованного света и естественного.

**Степень поляризации** частично поляризованного света называется величина

$$p = \frac{\Phi_p}{\Phi_p + \Phi_n}, \quad (18.5)$$

где  $\Phi_p$  — поток поляризованной доли света, а  $\Phi_n$  — естественной доли света. Так как  $\Phi_p + \Phi_n = \Phi$ , где  $\Phi$  — полный поток частично поляризованного света, то соотношение (18.5) принимает вид

$$p = \frac{\Phi_p}{\Phi} = 1 - \frac{\Phi_n}{\Phi}.$$

Отношение  $\Phi_n/\Phi$  находится по отношению координат пунктирной кривой рис. 77 при  $\alpha = \pi/2$  и  $\alpha = 0$ . Для полного поляризованного света  $p = 1$ , для естественного света  $p = 0$ .

## § 19. Эллиптическая и круговая поляризация света. Вращение плоскости поляризации

Лучи обыкновенный и необыкновенный, возникающие при двойном лучепреломлении из естественного света, не когерентны. Если естественный свет разложить на два луча, поляризованных в двух различных плоскостях  $A$  и  $B$ , а затем с помощью поляризационного прибора привести колебания в них к одной плоскости, то они не интерферируют.

Лучи же, обыкновенный и необыкновенный, возникающие из одного и того же поляризованного луча, когерентны. Если колебания в двух таких лучах привести с помощью поляризационного прибора к одной плоскости, то лучи будут интерферировать обычным образом. Если колебания в двух когерентных плоскополяризованных лучах происходят во взаимно перпендикулярных направлениях, то, складываясь, они дают эллиптические колебания: результирующий электрический вектор поворачивается так, что его конец движется по эллипсу. В частном случае эллиптическое колебание может перейти в круговое. Так возникает эллиптически-поляризованный свет (в частном случае — поляризованный по кругу).

Рассмотрим случай нормального падения плоскополяризованного света на пластинку одноосного кристалла, ось которого

параллельна преломляющей поверхности. Тогда в пластинке оба луча, обыкновенный и необыкновенный, будут распространяться в одном направлении — перпендикулярно к оптической оси. Скорости их распространения соответственно будут равны  $v_0 = c/n_0$  и  $v_e = c/n_e$ , где  $n_0$  — коэффициент преломления обыкновенного луча, а  $n_e$  — необыкновенного. При прохождении толщи пластинки  $l$  между обоими лучами возникает разность фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi l\nu}{c}(n_0 - n_e) = \frac{2\pi l}{\lambda}(n_0 - n_e), \quad (19.1)$$

где  $\nu$  — частота света,  $\lambda$  — его длина волны в вакууме.

Если толщина пластинки  $l$  подобрана так, что  $\Delta\varphi = k\pi$ , где  $k$  — целое число, то оба луча, выйдя из пластинки, снова дадут плоскополяризованный луч. При четном  $k$  его плоскость поляризации совпадает с плоскостью поляризации луча, падающего

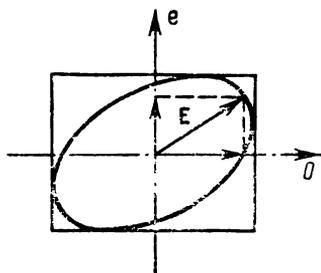


Рис. 78. Возникновение эллиптически-поляризованного света.

на пластинку; при нечетном  $k$  плоскость поляризации вышедшего из пластинки луча окажется повернутой на  $\pi/2$  по отношению к плоскости поляризации луча, падающего на пластинку. При всех иных значениях разности фаз  $\Delta\varphi$  колебания обоих лучей, вышедших из пластинки, складываясь, дадут эллиптическое колебание. Если  $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi/2$ , то оси эллипса совпадут с направлениями колебаний в обыкновенном и необыкновенном лучах.

Рис. 78 иллюстрирует этот случай: пунктирные линии  $o$  и  $e$  дают направление колебаний в обыкновенном и необыкновенном лучах.

Амплитуды колебаний в этих лучах взяты неодинаковыми. Тогда конец результирующего вектора  $E$  движется по эллипсу.

Амплитуды колебаний в обыкновенном и необыкновенном лучах определяются углом, который составляет между собой плоскость поляризации падающего луча и плоскость главного сечения пластинки. Амплитуды обоих лучей будут равны друг другу, если плоскость поляризации падающего луча составляет угол в  $45^\circ$  с плоскостью главного сечения пластинки. Если при этом  $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi/2$ , то возникнет свет, поляризованный по кругу. Наименьшая толщина пластинки, способная превратить плоскополяризованный луч в луч, поляризованный по кругу, определяется условием, чтобы  $\Delta\varphi = \pi/2$  ( $k=0$ ). Тогда из (19.1) получаем

$$l = \frac{\lambda}{4(n_0 - n_e)}. \quad (19.2)$$

Такая пластинка дает разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами, равную  $\lambda/4$ , поэтому она называется пластинкой в четверть волны.

Наряду с пластинкой в четверть волны можно изготовить пластинку в полволны, которая вносит между обыкновенным и необыкновенным лучами разность хода  $\lambda/2$ , чему соответствует разность фаз  $\pi$ . Пластинка в полволны употребляется для поворачивания плоскости поляризации плоскополяризованного света на  $\pi/2$ .

Пластинка в четверть волны позволяет не только получать из плоскополяризованного света свет, поляризованный по кругу или эллиптически, но и обратно; из эллиптически-поляризованного или поляризованного по кругу света получить свет плоскополяризованный. Это обстоятельство используется для того, чтобы различить эллиптически-поляризованный свет от света, частично поляризованного и поляризованный по кругу от естественного света. Одного поляризационного прибора, например николя, недостаточно, чтобы различить эти типы поляризации. Действительно, в случае как эллиптически-поляризованного света, так и частично поляризованного при поворачивании николя наблюдается лишь изменение яркости света между некоторыми максимальным и минимальным значениями. В случае света, поляризованного по кругу, или естественного, при любом повороте николя яркость остается неизменной. Если же предварительно ввести пластинку  $\lambda/4$ , соответственно ориентированную, то свет, поляризованный по кругу, полностью поглотится николем. Частично же поляризованный свет не претерпевает изменений при прохождении через пластинку  $\lambda/4$ . То же относится и к свету поляризованному по кругу и соответственно естественному свету.

Указанный анализ эллиптически-поляризованного света с помощью пластинки  $\lambda/4$  пригоден лишь в случаях, когда эллиптическая поляризация возникает при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний с разностью фаз  $\Delta\varphi = \pi/2$ . Если же разность фаз  $\Delta\varphi \neq \pi/2$ , то для получения плоскополяризованного света надо ввести добавочную разность  $\Delta\varphi'$ , которая в сумме с  $\Delta\varphi$  дала бы разность фаз  $\pi$  (или  $k\pi$ ). В этих случаях вместо пластинки  $\lambda/4$  употребляют приборы, носящие название компенсаторов, которые позволяют получить любое значение  $\Delta\varphi'$ .

В качестве примера рассмотрим компенсатор Солейля (рис. 79). Он состоит из двух кварцевых клиньев с параллельными оптическими осями и из кварцевой плоскопараллельной пластинки, ось которой перпендикулярна к осям клиньев. Верхний клин может перемещаться с помощью микрометрического винта параллельно самому себе. Благодаря этому область перекрытия клиньев будет представлять собой плоскопараллельную пластинку некоторой толщины  $d_1$ . Пусть

толщина второй пластинки равна  $d_2$ . Тогда прохождение света через компенсатор равносильно прохождению через две плоскопараллельные пластинки с взаимно перпендикулярным направлением оптических осей, перпендикулярно к этим осям. Луч,

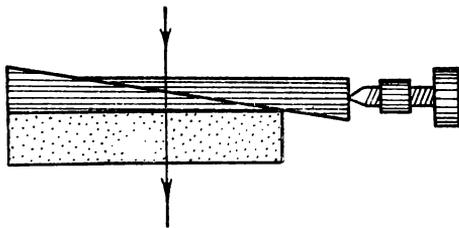


Рис. 79. Компенсатор Солейля.

обыкновенный в клиньях, делается необыкновенным в пластинке и наоборот. Между обоими лучами возникает разность фаз, пропорциональная разности толщин  $d_2 - d_1$ . Поскольку перемещением клиньев можно менять толщину  $d_1$ , то можно получить любую желаемую разность фаз  $\Delta\varphi'$ .

Измерение разностей фаз с большой степенью точности и измерение малых разностей фаз играет большую роль при изучении свойств отражающих поверхностей (в частности металлов). Соответствующая методика измерений носит название эллипсометрии. В настоящее время существуют автоматизированные эллипсометры с регистрацией амплитуд колебаний объективными методами.

Наконец, вкратце остановимся на вращении плоскости поляризации. Как известно, существуют как твердые, так и жидкие вещества, которые поворачивают плоскость поляризации проходящего через них света. Такие вещества носят название оптически активных. Некоторые вещества приобретают способность вращать плоскость поляризации лишь под влиянием внешнего магнитного поля (магнитное вращение плоскости поляризации). Угол вращения плоскости поляризации пропорционален толщине  $l$  среды, через которую свет проходит:  $\Delta\psi = \alpha l$ . Постоянная вращения  $\alpha$  для данного вещества зависит от длины волны  $\lambda$  (дисперсия вращения плоскости поляризации).

Если смотреть навстречу лучу, то плоскость поляризации может быть повернута как по часовой стрелке (правовращающие вещества), так и против часовой стрелки (левовращающие вещества). При повороте пластинки из оптически активного вещества на  $180^\circ$  направление вращения сохра-

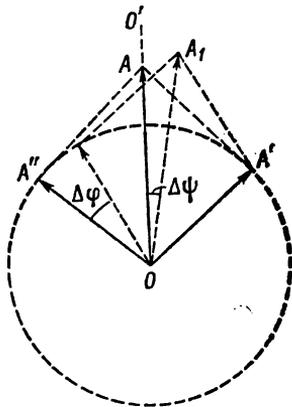


Рис. 80. Возникновение вращения плоскости поляризации.

няется. Поэтому, если заставить луч пройти через активную среду в заданном направлении, а затем, отразив нормально от зеркала, пропустить через ту же среду в обратном направлении, то плоскость поляризации не повернется.

Примером естественно-активной среды может служить кристаллический кварц. Вдоль оптической оси свет распространяется в кварце, не обнаруживая двойного лучепреломления. Однако плоскость поляризации при этом повернется. Существуют образцы лево- и правовращающего кварца (энантиоморфные кристаллы).

Вращение плоскости поляризации может быть объяснено, если допустить, что лучи, поляризованные по кругу с правым и левым направлением вращения, распространяются в среде с разной скоростью. Пусть направление  $OO'$  (рис. 80) представляет собой направление колебаний в падающем на активную среду плоскополяризованном свете. Вектор амплитуды колебаний разложим на два вектора  $a'$  и  $a''$ , из которых первый вращается направо, а второй налево. Если скорости распространения круговых колебаний в среде разные, то им соответствуют разные длины волн  $\lambda'$  и  $\lambda''$ . Поэтому после прохождения в среде толщи  $l$  результирующий вектор  $a$  повернется на угол

$$\Delta\varphi = \pi l \left( \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} \right). \quad (19.3)$$

Обозначим через  $n'$  и  $n''$  коэффициенты преломления для лучей, поляризованных по кругу вправо и влево, тогда  $\lambda' = \lambda_0/n'$  и  $\lambda'' = \lambda_0/n''$ , где  $\lambda_0$  — длина волны рассматриваемого света в пустоте. Подставляя эти значения  $\lambda'$  и  $\lambda''$  в (19.3), найдем

$$\Delta\varphi = \pi \frac{l}{\lambda_0} (n' - n''). \quad (19.4)$$

Различие коэффициентов преломления  $n'$  и  $n''$  позволяет получить из плоскополяризованного света два луча с противоположной круговой поляризацией. На рис. 81 представлена сложная призма из кристаллического кварца, предложенная Френелем. Призмы 1 и 3 изготовлены из правовращающего, а призма 2 — из левовращающего кварца. Все три призмы вырезаны так, что оптические оси параллельны их основаниям. При нормальном падении на систему призм плоскополяризованный луч  $AB$  войдет в первую призму без преломления. На границе же между первой и второй призмами он раздвоится, так как коэффициенты преломления для правых и левых круговых колебаний, на которые он может быть разложен, различны. Еще более лучи



Рис. 81 Призма Френеля.

разойдутся при преломлении на границе между второй и третьей призмами. В результате из системы призм выйдут два луча  $C'$  и  $C''$ , причем оба будут поляризованы по кругу, один с правым, а другой с левым направлением вращения.

Для растворов постоянная вращения  $\alpha$  зависит от концентрации раствора  $C$ , причем с достаточной степенью точности эта зависимость линейна:  $\alpha = \alpha_0 C$ , где  $\alpha_0$  — постоянна. Отсюда вытекает возможность для оптически активных веществ определять концентрацию раствора  $C$  по углу поворота плоскости поляризации  $\Delta\psi$ . В частности, таким способом определяется концентрация сахара в растворе (сахариметрия).

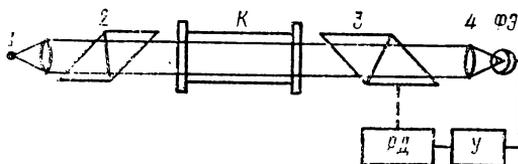


Рис. 82. Схема прибора для измерения поворота плоскости поляризации.

На рис. 82 представлена схема простейшего прибора для определения поворота плоскости поляризации, где  $I$  представляет собой источник монохроматического света (натриевая лампа, или лампа с узкополосным фильтром). С помощью линзы  $1$  образуется параллельный пучок лучей, который проходит через поляризатор  $2$ , кювету  $K$ , содержащую вращающий плоскость поляризации раствор, анализатор  $3$ . Наблюдение ведется с помощью линзы  $4$ . В исходном состоянии анализатор скрещивается с поляризатором. Если в кювете  $K$  находится активный раствор, то необходимо повернуть анализатор на угол  $\Delta\psi$ , чтобы снова полностью погасить свет, проходящий через систему. При некотором усложнении метода можно использовать фотоэлектрическую регистрацию и автоматическую компенсацию угла поворота плоскости поляризации.

## § 20. Простейшие дифракционные явления

Отступление от прямолинейного распространения света, вызванное волновой природой света, также свидетельствует об ограниченности лучевых представлений. На границе геометрической тени возникают попеременно более светлые и темные полосы; невозможно образование точечного фокуса.

Рассмотрим простейшие случаи так называемой дифракции Фраунгофера, возникающей, когда параллельный пучок лучей, ограниченный диафрагмой той или иной формы, собирается с

помощью линзы в ее главной фокальной плоскости. Линза считается идеальной, свободной от каких-либо aberrаций, т. е. предполагается, что она собирает параллельный пучок лучей в точечный фокус. Свет будем считать монохроматическим. Для получения количественного выражения для освещенности в пределах дифракционной картины используем принцип Гюйенса — Френеля, согласно которому каждый элемент  $d\sigma$  волновой поверхности рассматривается как источник элементарных колебаний; результирующее колебание находится путем суммирования элементарных колебаний с учетом их амплитуд и фаз. Рассмотрим френелеву дифракцию от щели и от круглого отверстия, а также зонную пластинку.

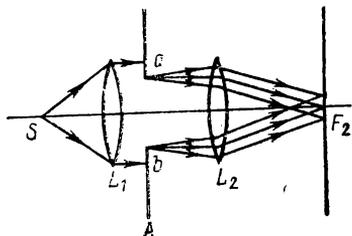


Рис. 83. Схема наблюдения френелевой дифракции.

**Щель.** Схема наблюдения френелевой дифракции представлена на рис. 83, где  $S$  — точечный источник когерентного света (понятие о когерентности будет подробнее рассмотрено в § 22),  $L_1$  — линза, дающая параллельный пучок лучей. Этот пучок ограничивается отверстием  $ab$  той или иной формы в непрозрачном экране  $A$ , расположенном перпендикулярно к направлению распространения лучей. Свет, прошедший через отверстие  $ab$ , фокусируется линзой  $L_2$  в ее главной фокальной плоскости  $F_2$ . В рассматриваемом случае отверстие имеет вид бесконечно длинной щели шириной  $x_0$ . С точки зрения лучевой оптики изображение этой щели в главной фокальной плоскости линзы  $L_2$  имело бы вид бесконечно узкой и длинной светлой полосы.

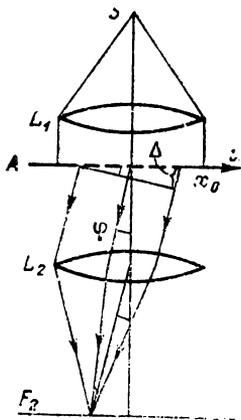


Рис. 84. К расчету дифракции от щели.

не щели (рис. 84). За элемент поверхности примем бесконечно узкую полоску шириной  $dx$ , параллельную краю щели. Тогда в соответствии со сказанным в § 1 элементарное колебание  $dS$ ,

исходящее от такой полоски, запишется в виде.

$$dS = C dx e^{2\pi i (vt + \delta)}, \quad (20.1)$$

где  $C$  — коэффициент, зависящий от освещенности в плоскости щели. В общем случае  $C$  может зависеть от координаты  $x$ . От нее же зависит фаза  $\delta$ ; эту последнюю связь запишем в виде:  $\delta = ux$ . Тогда (20.1) перепишем следующим образом:

$$dS = f(x) e^{2\pi i ux} dx,$$

где  $f(x) = C(x) e^{2\pi i vt}$ . Суммарное колебание  $S$  в фокальной плоскости линзы  $L_2$  выразится интегралом

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i ux} dx. \quad (20.2)$$

Решение для  $S$ , вообще говоря, получится комплексным, следовательно, квадрат вещественной амплитуды, определяющей освещенность в плоскости  $F_2$ , выразится через  $SS^*$ .

В математике, как известно, под Фурье-преобразованием (ФП) подразумевается преобразование функции  $f(x)$ , определяемое выражением

$$F(u) = \text{ФП}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi i ux} dx.$$

Сравнивая это выражение с (20.2), видим, что решение задачи о фраунгоферовой дифракции сводится к нахождению Фурье-преобразования для колебаний в плоскости линзы.

Будем отсчитывать координату  $x$  от левого края щели (рис. 84), тогда  $C=0$  для  $x < 0$  и для  $x > x_0$ ; в пределах самой щели будем считать  $C$  постоянным. Определим направление лучей углом  $\varphi$ , отсчитываемым в плоскости, перпендикулярной к щели. Из рисунка следует, что фаза  $\delta = \Delta/\lambda = x \sin \varphi/\lambda$ . В результате интеграл (20.2) принимает вид

$$S = C \int_0^{x_0} e^{2\pi i \left( dt + \frac{x \sin \varphi}{\lambda} \right)} dx.$$

Выполняя интегрирование, получим выражение

$$S = \frac{C\lambda}{2\pi i \sin \varphi} \left( e^{2\pi i \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda}} - 1 \right) e^{2\pi i vt}.$$

Оно представляет собой чисто периодическое колебание с частотой  $\nu$  и с комплексной амплитудой

$$\psi = \frac{C\lambda}{2\pi i \sin \varphi} \left( e^{2\pi i \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda}} - 1 \right).$$

Освещенность  $E$  в фокальной плоскости линзы определится квадратом модуля функции  $\psi$

$$|\psi|^2 = \psi\psi^* = \left(\frac{C\lambda}{\pi \sin \varphi}\right)^2 \sin^2 \pi \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda}$$

или

$$\text{или } |\psi|^2 = (Cx_0)^2 \left(\frac{\sin \pi \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda}}{\pi \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda}}\right)^2.$$

Обозначая

$$\frac{\pi x_0 \sin \varphi}{\lambda} = z, \quad (Cx_0)^2 = E, \quad (20.3)$$

окончательно получим для освещенности в главной фокальной плоскости линзы  $F_2$

$$E = E_0 \frac{\sin^2 z}{z^2}. \quad (20.4)$$

Формула (20.4) дает освещенность как функцию угла  $\varphi$ , т. е. дает ее распределение в направлении, перпендикулярном к изображению щели. Вид функции  $\sin^2 z/z^2$  уже приведен в ч. 1, § 16. Здесь еще раз отметим, что при  $\varphi=0$  функция  $(\sin z/z)$  имеет главный максимум, равный единице. Минимумы, равные нулю, лежат при значениях  $\sin \varphi$ , удовлетворяющих равенству

$$\sin \varphi = \pm k \frac{\lambda}{x_0}, \quad (20.5)$$

где  $k=1, 2, 3 \dots$  Между соседними минимумами лежат вторичные максимумы. При больших  $k$  они располагаются приблизительно при  $\sin \varphi = \pm (2k+1)\lambda/x_0$ ; их численные значения равны  $4/(2k+1)^2\pi^2$ . Значения  $k$ , при которых возникают вторичные максимумы, приведены в табл. 1.

При  $\sin \varphi = \lambda/2x_0$ , т. е. посредине между главным максимумом и первым минимумом, ордината кривой равна

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{(\pi/2)^2} = (2/\pi)^2 = 0,4053 \cong 0,4.$$

Из данных табл. 1 следует, что фраунгоферова дифракционная картина от щели шириной  $x_0$  имеет вид: основная

светлая полоса с максимумом освещенности посредине. Эта освещенность монотонно падает с возрастанием  $|\varphi|$  и принимает значение нуль при  $\sin \varphi = \pm \lambda/x_0$ . Таким образом, основная

Таблица 1

$k$	$(\sin z/z)^2$
0	1
1	0
1,430	0,04718
2	0
2,459	0,01694
3	0
3,470	0,00834
4	0
4,479	0,00503

светлая полоса тем шире, чем больше  $\lambda/\lambda_0$ , т. е. чем уже щель (при данной длине волны). Параллельно ей расположены значительно более слабые вторичные светлые полосы. В самой яркой из них освещенность в максимуме менее 5% от освещенности в главном максимуме.

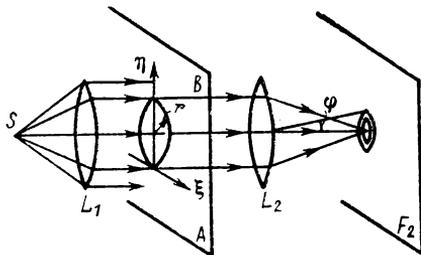


Рис. 85. К расчету дифракции от круглого отверстия.

**Круглое отверстие.** Теперь рассмотрим круглое отверстие в экране  $A$  радиусом  $r$ . Центр отверстия пусть лежит на оптической оси линз  $L_1$  и  $L_2$ . Колебание от элемента по-

верхности  $d\sigma$  запишется в виде

$$dS = Cd\sigma e^{2\pi i (vt + \delta)}. \quad (20.6)$$

Для лучей, распространяющихся в направлении относительно оси линзы, определяемом углом  $\varphi$ , фаза  $\delta = \Delta/\lambda$ , где  $\Delta$  — разность хода. Из рис. 85 имеем:  $\Delta = \xi \sin \varphi$ , где  $\xi$  — расстояние элемента поверхности  $d\sigma$  от касательной к краю отверстия  $ab$ . Вводя в пределах отверстия  $ab$  полярные координаты  $\rho$  и  $\vartheta$ , получим

$$\xi = r + \rho \cos \vartheta, \quad d\sigma = \rho d\rho d\vartheta,$$

$$\Delta = r \sin \varphi + \rho \cos \vartheta \sin \varphi.$$

При использовании этих соотношений выражение (20.6) примет вид

$$dS = e^{2\pi i (vt + r \sin \varphi)} e^{2\pi i \frac{\rho \cos \vartheta \sin \varphi}{\lambda}} \rho d\rho d\vartheta.$$

Суммарное колебание  $S$  в фокальной плоскости линзы  $L_2$  получится в результате интегрирования по площади отверстия  $ab$

$$S = e^{2\pi i (vt + r \sin \varphi)} \int_{\rho=0}^r \int_{\vartheta=0}^{2\pi} e^{2\pi i \frac{\rho \cos \vartheta \sin \varphi}{\lambda}} \rho d\rho d\vartheta.$$

Первый множитель в этом выражении представляет собой чисто периодический член, а второй — комплексную амплитуду

$$\psi = \int_{\rho=0}^r \rho d\rho \int_{\vartheta=0}^{2\pi} e^{iz \cos \vartheta} d\vartheta, \quad (20.7)$$

где  $z = 2\pi \rho \sin \varphi / \lambda$ . Как известно, интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \vartheta} d\vartheta = I_0(z), \quad (20.8)$$

где  $I_0(z)$  — нулевая функция Бесселя, которая может быть

представлена в виде ряда

$$I_0(z) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^6 + \dots$$

Воспользовавшись интегралом (20.8), перепишем выражение (20.7) для комплексной амплитуды

$$\psi = \int_0^r I_0(m\rho) \rho d\rho,$$

где  $m = 2\pi \sin\varphi/\lambda$ . Из теории бесселевых функций известно, что

$$\int_0^R I_0(\rho) \rho d\rho = -R I_0'(R),$$

откуда следует, что

$$\psi = -r^2 \frac{I_0' \left( \frac{2\pi r \sin \varphi}{\lambda} \right)}{\frac{2\pi r \sin \varphi}{\lambda}}.$$

Освещенность, пропорциональная квадрату модуля  $\psi$ , будет пропорциональна

$$E \sim r^4 \frac{I_0'^2 \left( \frac{2\pi r \sin \varphi}{\lambda} \right)}{\left( \frac{2\pi r \sin \varphi}{\lambda} \right)^2}.$$

Положив множитель пропорциональности равным  $4E_0/r^4$  и введя обозначение  $2\pi r \sin\varphi/\lambda = z_1$ , окончательно получим

$$E = E_0 \frac{(2I_0'(z_1))^2}{z_1^2}. \quad (20.9)$$

Формула (20.9) дает относительную освещенность в главной фокальной плоскости  $F_2$  как функцию угла дифракции  $\varphi$ . Вместо точечного фокуса получается сложная дифракционная картина, распределение освещенности по сечению которой приведено на рис. 86. Поскольку распределение обладает осевой симметрией, то на плоскости  $F_2$  дифракционная картина имеет вид центрального светлого пятна (пятно Эри), окруженного светлыми кольцами. В промежутке между двумя светлыми кольцами освещенность достигает значения нуля (темное кольцо). Освещенность может быть представлена как

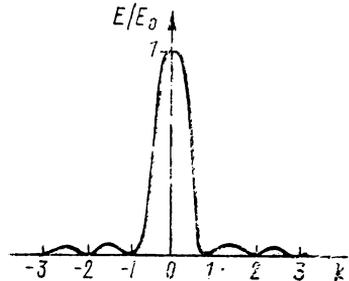


Рис. 86. Распределение освещенности в дифракционной картине от круглого отверстия (кривая Эри).

функция числа  $k$ , определяемого равенством:

$$\sin \varphi = k \frac{\lambda}{D}, \quad (20.10)$$

где  $D$  — диаметр отверстия. В табл. 2 приведены значения  $k$ , соответствующие максимумам и минимумам дифракционной картины, и значение относительной освещенности  $E/E_0$ . Как видно,  $E_0$  — освещенность в максимуме центрального светлого пятна. Освещенность в максимумах первого, второго и т. д. светлых колец гораздо меньше; для первого (самого яркого) кольца она меньше 2% от освещенности в центре светлого пятна. Ближайший к центральному светлomu пятну минимум (первое темное кольцо) лежит при

$$\sin \varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{r}. \quad (20.11)$$

При малом угле  $\varphi$  это равенство может быть заменено приближенным

$$\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{r}. \quad (20.12)$$

Отсюда видно, что радиус первого темного кольца, а следовательно, и размера центрального светлого пятна при данной длине волны  $\lambda$  тем меньше, чем больше радиус отверстия  $r$ .

Таблица 2

	$k$	$E/E_0$	$\Phi_k/\Phi_0$
Центральное светлое пятно . . . . .	0	1	0,84
Первое темное кольцо . . . . .	1,220	0	—
Первое светлое кольцо . . . . .	1,635	0,0175	0,084
Второе темное кольцо . . . . .	2,233	0	—
Второе светлое кольцо . . . . .	2,679	0,00416	0,033
Третье темное кольцо . . . . .	3,238	0	—
Третье светлое кольцо . . . . .	3,699	0,00160	0,018
Четвертое темное кольцо . . . . .	4,241	0	—
Четвертое светлое кольцо . . . . .	4,722	0,00078	0,011

Представляет интерес выяснить, какая часть от общего потока  $\Phi_R/\Phi_0$  попадает в пределы центрального светлого пятна и в пределы первого и второго и т. д. светлых колец. Эта задача решается путем интегрирования выражения (20.9) по соответствующим площадям. Результаты расчетов приведены в четвертом столбце табл. 2. Как видно, на первое кольцо приходится лишь немногим больше 8% от общего потока, проходящего через отверстие. Для всех светлых колец вместе взятых сумма  $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k/\Phi_0 = 0,16$ , откуда следует, что на центральное светлое пятно приходится около 84% от всего потока.

Приближенно можно пренебрегать потоком, приходящимся на кольца, и рассматривать лишь центральное светлое пятно. Так как освещенность в пределах этого пятна быстро падает от центра к краям, то, огрубляя задачу еще больше, можно считать, что в результате дифракции точечный фокус заменяется кружком, угловой диаметр которого  $\Delta\varphi$  равен угловому расстоянию от центра до первого темного кольца (рис. 87),

$$\Delta\varphi = 0,61 \frac{\lambda}{r} = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (20.13)$$

Из схемы наблюдения фраунгоферовой дифракции от круглого отверстия (см. рис. 83) следует, что если роль диафрагмы играет оправа самой линзы, то под  $D$  надо подразумевать диаметр линзы.

**Зонная пластинка.** В двух предыдущих примерах мы рассматривали дифракционные явления, возникающие при ограничении плоского волнового фронта той или иной диафрагмой (щель, круглое отверстие). Рассмотрим теперь случай, когда на волновом фронте выделяются участки с определенным соотношением фаз. При соответственном выборе отношения фаз могут возникнуть фокусирующие действия.

Примером фокусирующего приспособления служит зонная пластинка (пластинка Френеля). Она представляет собой плоскопараллельную прозрачную пластинку, на которой нанесен ряд concentрических колец, попеременно прозрачных и непрозрачных (рис. 88). Пластинку можно изготовить путем вычерчивания колец на бумаге, а затем их воспроизвести на фотопластинке в уменьшенном виде. Радиус колец берется равным

$$r = \sqrt{2l k \lambda + k^2 \lambda^2}, \quad (20.14)$$

где  $k$  — номер колец,  $\lambda$  — длина волны падающего света.

Пусть на пластинку падает параллельный ей плоский световой фронт  $ab$  (рис. 89). По принципу Гюйгенса каждый элемент поверхности прозрачной зоны явится источником колебаний, распространяющихся за пластинкой во все стороны. Выберем точку  $O'$ , лежащую на расстоянии  $l$  от центра пластины. Длина пути  $A_k O'$  от края  $k$ -го кольца до точки  $O'$  равна

$$A_k O' = \sqrt{r^2 + l^2} = l + k\lambda.$$

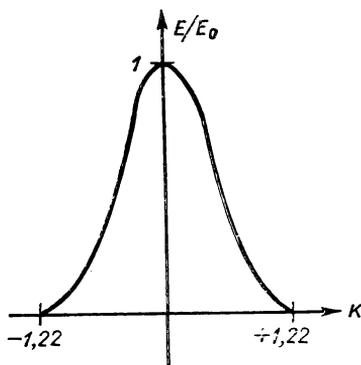


Рис. 87. Распределение освещенности в центральном светлом пятне.

Следовательно, разность хода  $\Delta$  между лучами от двух соседних колец  $A_{k-1}$  и  $A_k$  равна  $\lambda$ . Это означает, что все волны, исходящие от отдельных прозрачных колец, интерферируя, усилят друг друга в точке  $O'$ . Точка  $O'$  представит собой действительный фокус, в котором собираются параллельные лучи, падающие на пластинку.

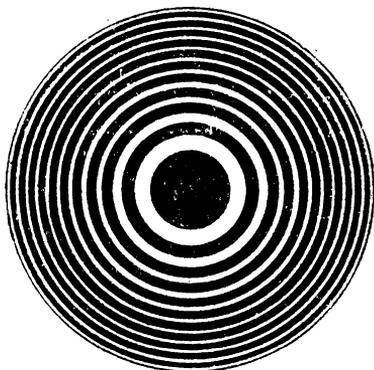


Рис. 88. Зонная пластинка Френеля.

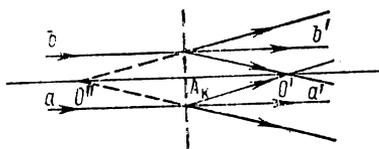


Рис. 89. Распределение лучей от зонной пластинки.

Легко видеть, что наряду с этим действительным фокусом  $O'$  возникает другой, симметрично расположенный относительно пластинки, мнимый фокус  $O''$ . В самом деле, разность хода между соседними расходящимися лучами  $A_{k-1}B_{k-1}$ ,  $A_kB_k$ , продолжения которых пересекаются в точке  $O''$ , тоже равна  $\lambda$ . Точка  $O''$  является мнимым фокусом расходящихся за пластинкой лучей  $A_kB_k$ ,  $A_{k-1}B_{k-1}$ ,  $A_kB_k$  и т. д.

Кроме того, фокусы (как действительные, так и мнимые) образуются и в тех случаях, когда разность хода между лучами от соседних зон  $\Delta = k'\lambda$ , где  $k' = 2, 3, \dots$ . Однако яркость этих вторичных фокусов будет меньше, чем первых, поскольку они возникают за счет лучей, более наклонных к прозрачным зонам. Для данной пластинки положение всех фокусов зависит от длины волны  $\lambda$ . Наконец, разность хода между лучами, которые являются продолжением лучей, падающих на пластинку, равна нулю. Это значит, что за пластинкой возникает еще один плоский фронт  $a'b'$ , параллельный первоначальному фронту  $ab$ . Резюмируя, имеем: за зонной пластинкой возникает сложная система волн, которая представляет собой наложение плоской волны  $a'b'$  и системы сходящихся и расходящихся сферических волн с центрами кривизны, лежащими на оси пластинки  $O'O''$ .

Мы полагаем, что пластинка разбита на прозрачные и непрозрачные кольца, переходы между которыми происходят резко. Однако можно сделать пластинку с плавным переходом

от светлых колец к темным, в результате чего за пластинкой будут интерферировать лучи разных амплитуд. Это поведет к соответствующим изменениям в возникающей дифракционной картине. Можно также сделать пластинку, толщина которой в пределах разных колец разная, что ведет к добавочной разности хода. Например, в разобранном выше случае пластинки Френеля темные кольца можно также оставить прозрачными, но сделать в местах их расположения пластинку настолько толще, чтобы вносилась добавочная разность хода, равная  $\lambda$ . Тогда за пластинкой будут, интерферируя, усиливать друг друга лучи от всех зон и фокусы станут ярче.

Особый интерес представляет так называемая синусоидальная пластинка, пропускание  $\tau$  которой меняется по синусоидальному (косинусоидальному) закону.

Для упрощения задачи рассмотрим сперва линейный случай, когда пропускание  $\tau$  зависит лишь от одной координаты (рис. 90, а). Такая пластинка носит название синусоидальной решетки. Пусть на нее падает параллельный ей плоский фронт  $ab$ , колебания в котором, согласно со сказанным в § 1, запишем в виде

$$S_{ab} = \psi_0 e^{2\pi i(\nu t - z/\lambda)}. \quad (20.15)$$

Ось  $z$  проведена перпендикулярно к пластинке (рис. 90, б).

Пусть пропускание пластинки  $\tau$  удовлетворяет закону

$$\tau(x) = \frac{1 + a \cos 2\pi bx}{1 + a}, \quad (20.16)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные, причем постоянная  $a$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq a \leq 1$ , так как  $\tau$  должна быть величиной положительной и не превышающей по своему численному значению единицы. Амплитуда волны, прошедшей через пластину, будет по (20.16) равна

$$\psi = \tau(x) \psi_0 = \psi_0 \frac{1 + a \cos 2\pi bx}{1 + a}.$$

Выразив косинусоидальную функцию по формуле Эйлера через экспоненциальную, получим

$$\psi = \frac{\psi_0}{1+a} \left( 1 + \frac{1}{2} a e^{2\pi i b x} + \frac{1}{2} a e^{-2\pi i b x} \right).$$

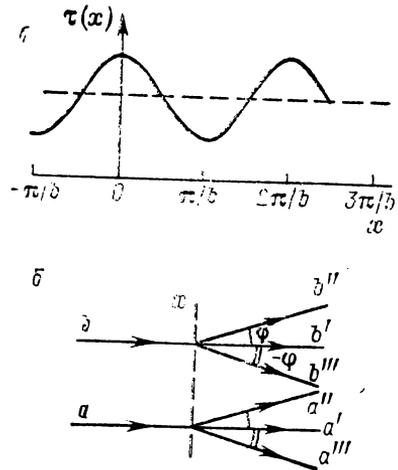


Рис. 90. Синусоидная решетка.

Заменив в (20.15)  $\psi_0$  через это  $\psi$ , получим, что колебания, возникающие за решеткой, опишутся выражением

$$S' = \frac{\psi_0}{1+a} e^{2\pi i (vt - z/\lambda)} \left( 1 + \frac{1}{2} a e^{-2\pi i b x} + \frac{1}{2} a e^{2\pi i b x} \right).$$

Из него следует, что за пластинкой фронт волны разбился на три фронта с колебаниями

$$S_{a'b'} = \frac{\psi_0}{1+a} e^{2\pi i (vt - z/\lambda)},$$

$$S_{a''b''} = \frac{a\psi_0}{2(1+a)} e^{2\pi i (vt - z/\lambda - bx)},$$

$$S_{a'''b''' } = \frac{a\psi_0}{2(1+a)} e^{2\pi i (vt - z/\lambda + bx)}.$$

Первый из них представляет собой плоский фронт, параллельный первоначальному фронту (20.15), только с уменьшенной амплитудой. Два вторых — тоже плоские фронты, но в последние внесена добавочная фаза  $\pm bx$ . Поскольку для плоского фронта, повернутого по отношению к первоначальному на угол  $\varphi$ , возникает добавочная разность хода  $\Delta = x \sin \varphi$  (рис. 90, б), то второй и третий фронты повернуты относительно первоначального на угол  $\pm \varphi$ , определенный равенством

$$bx = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{x \sin \varphi}{\lambda}.$$

Таким образом, окончательно получаем: за решеткой возникают три плоских фронта — параллельный первоначальному ( $a'b'$ ) и два дифрагированных ( $a''b''$  и  $a'''b'''$ ), повернутых на угол  $\varphi$ , определяемый равенством

$$\sin \varphi = \pm bx = \pm \frac{\lambda}{p}, \quad (20.17)$$

где  $p$  — период решетки. Очевидно, для того чтобы угол  $\varphi$  получился не слишком малым, период решетки  $p$  должен быть сравним с длиной волны  $\lambda$ , но вместе с тем удовлетворять неравенству:  $p > \lambda$ .

В случае падения на решетку света, представляющего собой колебания нескольких длин волн  $\lambda$ , по формуле (20.17) каждой длине волны соответствует своя система дифрагированных фронтов.

Аналогично для пластинки с кольцевыми синусоидальными (по пропусканию) зонами, кроме плоской волны, параллельной первоначальной, возникнут две отклоненных. Но в силу осевой симметрии они будут сферическими и сойдутся соответственно в фокусах  $O'$  и  $O''$ . Таким образом, синусоидальная пластинка,

как и пластинка Френеля, обладает фокусирующим действием, но ей соответствуют лишь два фокуса — действительный и мнимый.

## § 21. Свертка функции объекта и аппаратной функции. Разрешающая сила оптических приборов

Рассматривая возникновение изображения, даваемого оптической системой, мы разбивали объект на совокупность светящихся точек  $S$  и всю картину представляли себе как совокупность их точечных изображений  $S'$ . В таком случае двум сколь угодно близким точкам объекта  $S$  отвечают отдельные точечные изображения  $S'$ . Однако, как мы видели, из-за существования aberrаций каждая точка объекта  $S$  отображается aberrационным кружком и это ведет к уменьшению числа деталей объекта, которые могут быть опознаны. Обычно вводят понятие о разрешающей силе оптической системы, под которой подразумевается величина  $R \sim 1/\delta\varphi$ , где  $\delta\varphi$  — угловое расстояние между двумя еще различимыми в изображении точками  $S'$  и  $S''$ . При точечном отображении разрешающая сила системы была бы бесконечно большой. Из-за aberrаций она становится конечной.

Но, как было сказано, существуют приемы снижения aberrаций, причем с точки зрения лучевой оптики нет принципиальных пределов для возможности их снижения. Таким образом, с точки зрения лучевой оптики нет пределов повышения разрешающей силы — все зависит от степени коррекции системы и качества ее изготовления.

Не так обстоит дело с точки зрения волновой теории, где возникновение изображения объекта неминуемо сопровождается дифракционными явлениями. В общем случае необходимо принимать во внимание наличие как дифракционных, так и aberrационных явлений. При полной коррекции aberrаций останутся лишь дифракционные искажения и будет достигнута предельная для данной системы разрешающая сила.

Aberrационно-дифракционное пятно, являющееся изображением точечного объекта, характеризуется в каждом данном случае некоторым законом распределения освещенности в его пределах. Часто это распределение (сферическая aberrация,

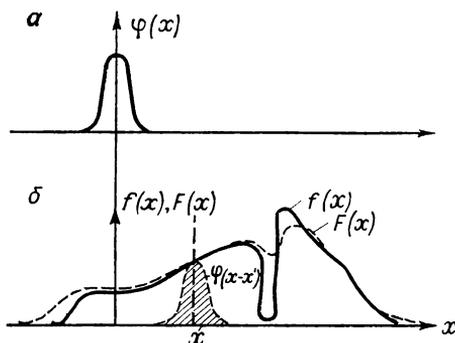


Рис. 91. Аппаратная функция (а); свертка функции объекта с аппаратной функцией (б).

дифракция от круглого отверстия) обладает центральной симметрией и, следовательно, может быть охарактеризована как функция одной координаты. Такой одномерный случай мы будем для простоты в дальнейшем рассматривать. Картина, наблюдаемая в пределах изображения, представляет собой наложение абберационно-дифракционных пятен. Пусть распределение освещенности в пятне описывается функцией  $\varphi(y)$  (рис. 91, а), причем будем считать эту функцию нормированной

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy = 1. \quad (21.1)$$

Функция  $\varphi(y)$  носит название аппаратной функции.

Предположим, что истинное распределение освещенности (при точечном отображении) описывается функцией  $f(x)$ , которую называют функцией объекта. Из-за наличия аппаратной функции для каждой координаты  $x$  (рис. 91, б) наложатся освещенности от аппаратных пятен, расположенных как справа, так и слева от нее. Так, от точки с координатой  $x'$  будет принесена освещенность

$$dF(x) = f(x') \varphi(y) dy,$$

где  $y = x - x'$ . Полная освещенность в точке с координатой  $x$  получится в результате интегрирования по всем  $x'$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \varphi(x - x') dx'; \quad (21.2)$$

$F(x)$  дает наблюдаемое распределение освещенности (функцию наблюдения);  $F(x)$  будет тем более сглажена по отношению к  $f(x)$ , чем шире аппаратная функция.

В математике, как известно, операция, выражаемая интегралом (21.2), носит название свертки и обозначается символом  $\otimes$ . Таким образом, наблюдаемое распределение освещенности в пределах изображения (функция наблюдения) представляет собой свертку функции объекта  $f(x)$  и аппаратной функции  $\varphi(x - x')$

$$F(x) = f(x) \otimes \varphi(x).$$

Задача сводится к нахождению по функции наблюдения  $F(x)$  и аппаратной функции  $\varphi(x - x')$  функции объекта  $f(x)$ , т. е. к решению интегрального уравнения (21.2). Формально такое решение однозначно, если только функции  $F(x)$  и  $\varphi(y)$  удовлетворяют некоторым общим требованиям, которые обычно выполняются. Но это имеет место, если обе функции  $F(x)$  и  $\varphi(y)$  заданы вполне точно. На самом же деле  $F(x)$  находится в результате измерений, например, путем измерения освещен-

ностей с помощью фотоэлектрической установки или методами фотографической фотометрии. Такие измерения неизбежно сопровождаются погрешностями. Аппаратная функция также не может быть задана точно. Ошибки в определении функции наблюдения  $F(x)$  и аппаратной функции  $\varphi(y)$  накладывают ограничения и на точность, с которой может быть восстановлена функция объекта  $f(x)$ . Это и означает ограниченность разрешающей силы оптической системы.

В связи с этим следует еще указать на некоторую математическую особенность задачи. Дело заключается в том, что существуют так называемые некорректные задачи, к которым относится и рассмотренная выше задача нахождения функции объекта  $f(x)$  по функции наблюдения  $F(x)$ . Малые ошибки в измерении  $F(x)$  и  $\varphi(x)$  могут приводить к очень большим погрешностям определения  $f(x)$ . Может оказаться, что для однозначного определения  $f(x)$  требуется такая точность знания  $F(x)$  и  $\varphi(y)$ , которая практически недостижима.

Отсюда следует интересный вывод: при правильной математической обработке наблюдений не столь важно, чтобы аппаратная функция  $\varphi(y)$  была по возможности узкой, как важно, чтобы ее аналитический вид обеспечивал корректность математической задачи. Это ведет к выводу, на первый взгляд парадоксальному: возможен случай, когда при анализе двух изображений можно при соответствующей обработке извлечь большую информацию из того изображения, которое при рассмотрении глазом представляется более размытым.

В тех случаях, когда задача носит корректный характер, можно использовать приближенный метод решения. В первом приближении решение уравнения (21.2) имеет вид

$$f(x) = 2F(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} F(x') \varphi(x - x') dx'.$$

Более высокие приближения находятся с помощью следующего соотношения между  $n+1$ -м и  $n$ -м приближениями:

$$f_{n+1} = f_n + F - F_n,$$

где  $F_n$  — значение  $F(x)$ , вычисленное по (21.2) для  $f = f_n$ . Вычисления обычно производятся на ЭВМ.

При указанной постановке задачи встает вопрос: что же в конечном счете определяет разрешающую силу оптической аппаратуры? Простого критерия здесь дать нельзя. Все определяется тем, с какой погрешностью известна аппаратная функция  $\varphi(y)$  и измерена функция наблюдения  $F(x)$ . Поскольку во всех случаях предел погрешности задается флюктуационными явлениями, то именно они и определяют предел точности, с которой может быть восстановлена функция объекта  $f(x)$ . При

этом необходимо учитывать специфику регистрирующей аппаратуры — наличие зерна при фотографической регистрации, шумовые явления в фотоэлектрических приемниках, физиологические особенности глаза при визуальных наблюдениях и т. д.

Исторически понятие о разрешающей силе оптических приборов складывалось иначе, чем это изложено выше, и было связано с тем, что визуальный метод был основным методом наблюдения. Рассмотрим предельный случай, когда аппаратный контур носит чисто дифракционный характер. Если при этом мы имеем дело с френгоферовой дифракцией от круглого отверстия, то освещенность в его пределах описывается формулой (20.9).

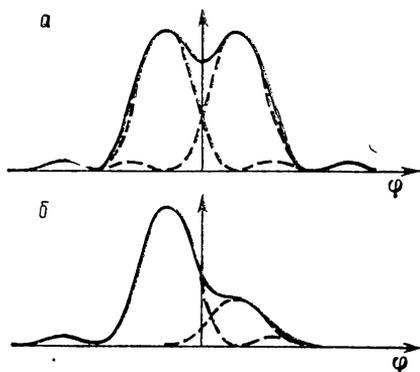


Рис. 92. Критерий Рэлея.

При наблюдении двух точечных объектов в фокальной плоскости оптической системы образуются две таких дифракционных картины (пятна Эри), сдвинутые друг относительно друга на некоторый угол  $\Delta\varphi$ . При достаточно большом  $\Delta\varphi$  на суммарной кривой освещенности образуется минимум, который по мере уменьшения  $\Delta\varphi$  становится все меньше и меньше и наконец исчезает. Спрашивается, при каком значении  $\Delta\varphi$  обе дифракционные картины становятся неотделимыми друг от друга?

Рэлей предложил следующий, имеющий практический смысл критерий разрешения двух дифракционных картин одинаковой яркости: считать их разрешенными, если ордината минимума составляет 0,8 от максимальных ординат суммарной кривой (рис. 92, а). При этом относительный провал в минимуме достигает 20%, что воспринимается глазом по контрасту как наличие темного промежутка между обоими максимумами.

Ордината кривой Эри, изображенной на рис. 86, равна  $\sim 0,4$  при абсциссе, равной половине расстояния от главного максимума до первого минимума. Поэтому провал в 20% на суммарной кривой достигается в том случае, если максимум одной из кривых приходится на первый минимум второй кривой. При этом расстояние между главными максимумами обеих дифракционных пятен по (20.2) равно

$$\delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{r}, \quad (21.3)$$

где  $D$  — диаметр;  $r$  — радиус круглого отверстия, диафрагмирующего световой поток, проходящий через систему.

Очевидно, критерий Рэлея носит условный характер, так как глаз при благоприятных условиях может заметить провал в освещенности меньше 20%. При соответственной же математической обработке, базирующейся на точных фотометрических измерениях (см. начало параграфа), можно разложить наблюдаемую дифракционную картину на ее составляющие и при отсутствии провала на суммарной кривой. Наконец, отметим, что для случая непосредственных визуальных наблюдений рассуждения Рэлея относились к двум объектам одинаковой яркости. При неравенстве яркостей суммарная кривая может иметь слабо выраженный провал и тогда, когда максимум одной дифракционной кривой попадает на первый минимум другой. На рис. 92, б приведен случай отношения яркостей обоих объектов 1:3; как видно, суммарная кривая не имеет определенно выраженного минимума.

Однако, несмотря на всю условность, критерий Рэлея удобен благодаря своей простоте и наглядности и потому используется и в настоящее время. Рассмотрим несколько частных случаев применения критерия Рэлея.

**Телескоп.** Телескоп представляет собой ту оптическую систему, к которой наиболее применим критерий Рэлея. Объектами в большинстве случаев являются звезды, расположенные так далеко, что падающие от них пучки лучей можно считать параллельными. В главной фокальной плоскости объектива телескопа возникает дифракционная картина, соответствующая френгоферовой дифракции от круглого отверстия. Объектив настолько скорректирован на aberrации, что aberrационный кружок меньше дифракционного и им можно пренебречь. Лучи ограничиваются оправой объектива, так что под диаметром отверстия  $D$  надо подразумевать диаметр самого объектива. Тогда в соответствии с критерием Рэлея телескоп позволит разрешить две звезды, находящиеся на угловом расстоянии  $\Delta\varphi \geq \delta\varphi$ , где

$$\delta\varphi \doteq 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Например, для телескопа с диаметром объектива  $D=1$  м при  $\lambda=5 \cdot 10^{-7}$  м

$$\delta\varphi = 1,22 \frac{5 \cdot 10^{-7}}{1} \cong 6 \cdot 10^{-7} \cong 0,12'',$$

т. е. могут быть разрешены две звезды, находящиеся на угловом расстоянии  $\approx 0,12''$ . С таким же угловым разрешением могут наблюдаться детали на удаленном объекте, видимом под конечным углом, например, на Луне. Поскольку расстояние от Земли до Луны  $L \approx 4 \cdot 10^5$  км, то тот же телескоп с объективом

диаметром в 1 м позволяет различать детали, расположенные на Луне, на расстоянии  $\delta y = L \cdot \delta \varphi \approx 250$  м друг от друга.

При визуальных наблюдениях в телескоп увеличение окуляра должно подбираться так, чтобы дифракционные пятна, разрешенные объективом, были разрешены и глазом, т. е. были видны под углом  $> 1'$ . При фотографировании звезд линейное расстояние  $\delta y'$  между центрами их дифракционных картин должно превосходить размеры зерен эмульсии фотопластины,

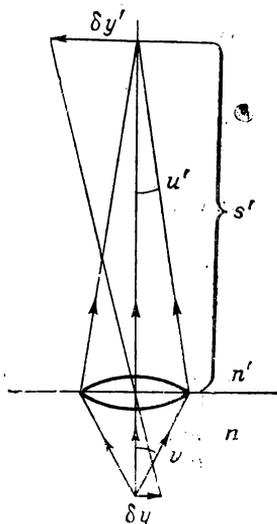


Рис. 93. К выводу разрешающей силы микроскопа.

что соответствует расстоянию порядка 0,01 мм. Если  $f'$  — второе главное фокусное расстояние объектива телескопа, то линейное расстояние  $\delta y'$  между изображениями двух едва разрешимых звезд равно  $\delta y' = f' \delta \varphi = 1,22 \lambda f' / D$ . Обычно оно слишком мало и поэтому для фотографирования используется камера с добавочным увеличением.

Основной причиной, снижающей разрешающую силу больших телескопов, являются неоднородности атмосферы. Их роль тем больше, чем больше диаметр объектива.

**Фотографический аппарат.** При съемке удаленных объектов мы снова имеем случай, когда в фокальной плоскости объектива возникает дифракционная картина, соответствующая френгоферовой дифракции от круглого отверстия. Объектив фотоаппарата снабжается центрированной с ним ирисовой диафрагмой, которая и определяет диаметр  $D$

входного отверстия. Если диафрагма открыта полностью, то  $D$  близко к диаметру объектива.

Для обычного узкоплёночного аппарата  $f' = 50$  мм и относительное отверстие объектива равно 1 : 2,5. Это означает, что диаметр объектива  $D = 2$  см и предельный угол  $\delta \varphi$ , который он может разрешить при  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см, равен

$$\delta \varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{5 \cdot 10^{-5}}{2} = 3,0 \cdot 10^{-5} \cong 5,5''.$$

На фотопластинке расстояние между двумя едва разрешимыми деталями равно  $\delta y' = f' \delta \varphi \cong 1,5 \cdot 10^{-3}$  мм, т. е. меньше зерна фотоэмульсии. Разрешающая сила, определяемая по критерию Рэлея, не используется. В действительности объективы фотоаппаратов рассчитываются так, что при полностью открытом отверстии их абберационный кружок превышает дифракционный и определяет их реальную разрешающую силу. При уменьшении диаметра диафрагмы размеры дифракционного

кружка увеличиваются, а абберационного — снижаются; они становятся одного порядка.

**Микроскоп.** В микроскопе объектив располагается близко от объекта и поэтому возникающая в фокальной плоскости дифракционная картина не описывается формулой (20.9). Точный учет роли дифракции представляет собой сложную задачу, которая отчасти будет рассмотрена в § 33. Здесь же произведем упрощенный подсчет разрешающей силы микроскопа, исходя из предположения, что каждая точка объекта является самостоятельным источником света и дает в фокальной плоскости объектива дифракционный кружок приблизительно тех же размеров, как и в случае дифракции от параллельного пучка лучей. Тогда мы можем считать, что две соседние точки объекта разрешены, если центры их изображений находятся на линейном расстоянии

$$\delta y' = 1,22 \frac{\lambda}{D} s', \quad (21.4)$$

где  $s'$  — расстояние от объектива до места расположения изображения (рис. 93).

Объективы микроскопа рассчитываются таким образом, что по отношению к их сопряженным точкам выполняется условие синусов (§ 13)

$$n \sin u \delta y = n' \sin u' \delta y', \quad (21.5)$$

где  $n$  и  $n'$  — соответственно коэффициенты преломления сред перед объективом микроскопа и после него. В микроскопах изображение получается в воздухе, поэтому  $n' \cong 1$ ; рассматриваемый же препарат может находиться в веществе с коэффициентом преломления, отличным от единицы (см. ниже об иммерсии). Из рис. 93 приближенно находим

$$\sin u' \cong \frac{D/2}{s'}.$$

Подставляя это значение  $\sin u'$  в (21.5) и полагая  $n' = 1$ , найдем для  $\delta y'$

$$\delta y' = \frac{2s'}{D} n \sin u \delta y.$$

Сравнивая это выражение для  $\delta y'$  с выражением (21.4), получим

$$\frac{2s'}{D} n \sin u \delta y = 1,22 \frac{\lambda}{D} s',$$

откуда находим для расстояния  $\delta y$  между едва разрешимыми объектами

$$\delta y = 0,61 \frac{\lambda}{n \sin u}. \quad (21.6)$$

Величина  $A = n \sin u$  называется числовой апертурой объектива микроскопа. Если объект микроскопа находит-

ся в воздухе, то  $n=1$ , и из формулы (21.6) следует, что микроскоп позволяет разрешать объекты, находящиеся друг от друга на расстоянии  $\delta y = 0,61\lambda/\sin u$ . Для микроскопических объектов угол  $u$  близок к  $\pi/2$  и, следовательно,  $\sin u \cong 1$ , откуда получаем, что микроскоп позволяет разрешать объекты, отстоящие друг от друга на расстоянии порядка  $\lambda/2$ . В случае визуальных наблюдений длина волны  $\lambda$  относится к видимой области спектра, т. е. представляет собой величину порядка  $5 \cdot 10^{-5}$  см, следовательно, микроскоп разрешает объекты, отстоящие друг от друга на расстоянии порядка  $3 \cdot 10^{-5}$  см. При фотографировании объектов разрешающая сила может быть повышена за счет перехода к ультрафиолетовым лучам с длиной волны меньшей, чем у видимых. Микроскоп со специальной прозрачной для ультрафиолета оптикой позволяет вести наблюдение при  $\lambda \cong 2,5 \cdot 10^{-5}$  см, что дает возможность различать вдвое более мелкие детали, чем обычно. При визуальных наблюдениях требуется, чтобы детали, разрешенные объективом микроскопа, могли быть восприняты раздельно глазом. Это требует использования окуляра, увеличение которого должно быть подобрано так, чтобы едва разрешенные детали были видны под углом не меньше  $1'$ . При фотографической регистрации изображения добавочное увеличение камеры должно обеспечивать размеры  $\delta y'$ , согласованные с размером зерна фотоэмульсии.

Из формулы (21.6) видно, что разрешающая сила микроскопа может быть повышена, если объект погрузить в вещество

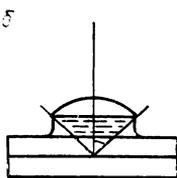
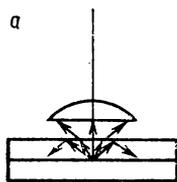


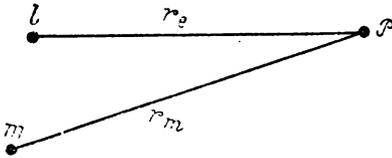
Рис. 94. Апертурный угол микроскопа без иммерсии (а); с иммерсией (б).

с коэффициентом преломления  $n > 1$ . Это достигается тем, что микроскопический препарат, который обычно представляет собою очень тонкий прозрачный срез, заклеивается между двумя плоскими стеклами (предметным и покровным), причем склеивающее вещество подбирается так, чтобы его коэффициент преломления равнялся коэффициенту преломления стекол (обычно  $n=1,5$ ). Для того чтобы при этом полное внутреннее отражение на границе между покровным стеклом и воздухом не ограничивало значение апертурного угла (рис. 94,а), между покровным стеклом и первой линзой объектива вводят каплю прозрачного масла с тем же значением  $n$ . Тогда, как видно из рис. 94,б, угол  $u$  может стать близким к  $\pi/2$ . Такая система носит название иммерсионной. Путем иммерсии с  $n=1,5$  числовая апертура микроскопа может быть доведена до 1,4 и разрешающая сила повышена приблизительно в 1,5 раза против той, которая достигалась бы при воздушном промежутке между рассматриваемым препаратом и объективом.

Глава V  
ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ

§ 22. Интерференция от двух источников.  
Временная и пространственная когерентность

Рассмотрим системы волн одинаковой частоты  $\nu$ , исходящие от двух точечных источников  $l$  и  $m$  (рис. 95). Под точечным



будем подразумевать источник, размеры которого малы по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Вместе с тем будем считать, что каждый источник состоит из большого числа излучающих атомов. Найдем освещенность, которая возникает в точке  $P$  в результате сложения доходящих до нее волн.

Рис. 95. Два источника когерентных волн.

Расстояние от источников до точки  $P$  будем считать большим по сравнению с  $\lambda$ .

В соответствии с (1.5) запишем колебания, приходящие в точку  $P$  от двух определенных атомов, находящихся соответственно в источниках  $l$  и  $m$ , в виде

$$S_l = a_l e^{2\pi i (\nu t - \mathbf{k}_l \mathbf{r}_l - \delta_{0l})},$$

$$S_m = a_m e^{2\pi i (\nu t - \mathbf{k}_m \mathbf{r}_m - \delta_{0m})},$$

где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор:  $\mathbf{k} = \mathbf{o}/\lambda$ . Обозначая  $-\mathbf{k}_l \mathbf{r}_l - \delta_{0l} = \varphi_l$ ,  $-\mathbf{k}_m \mathbf{r}_m - \delta_{0m} = \varphi_m$  получим для  $S_l$  и  $S_m$

$$S_l = \psi_l e^{2\pi i \nu t}, \quad \psi_l = a_l e^{2\pi i \varphi_l},$$

$$S_m = \psi_m e^{2\pi i \nu t}, \quad \psi_m = a_m e^{2\pi i \varphi_m}.$$

Предположим, что колебания  $S_l$  и  $S_m$  происходят в одинаковом направлении, тогда освещенность в точке  $P$  будет пропорциональна квадрату модуля суммарной амплитуды  $|\psi_l + \psi_m|^2$

$$E_p = |\psi_l + \psi_m|^2 = a_l^2 + a_m^2 + 2a_l a_m [e^{2\pi i (\varphi_l - \varphi_m)} + e^{-2\pi i (\varphi_l - \varphi_m)}].$$

Средняя по времени (за время, большее по сравнению с периодом колебания  $1/\nu$ ) освещенность от большого числа атомов будет равна

$$E_p = \overline{\sum_{l,m} (a_l^2 + a_m^2)} + \overline{\sum_{l,m} a_l a_m [e^{2\pi i (\varphi_l - \varphi_m)} + e^{-2\pi i (\varphi_l - \varphi_m)}]} \quad (22.1)$$

или

$$E_p = \overline{\sum_{l,m} (a_l^2 + a_m^2)} + 2 \overline{\sum_{l,m} a_l a_m \cos [2\pi (\varphi_l - \varphi_m)]}. \quad (22.2)$$

Второй член в обоих выражениях (22.1) и (22.2) носит название функции корреляции. Первый член дает сумму освещенностей от первого и второго источников

$$\overline{\sum_{l,m} (a_l^2 + a_m^2)} = \overline{\sum_l a_l^2} + \overline{\sum_m a_m^2} = \overline{E_{pl}} + \overline{E_{pm}}.$$

Для оценки роли второго члена рассмотрим два предельных случая.

а. Колебания атомов происходят с беспорядочно-распределенными фазами. Это означает, что разность  $\varphi_l - \varphi_m$  принимает с одинаковой вероятностью любые положительные и отрицательные значения. Тогда функция корреляции равна нулю и

$$\overline{E_p} = \overline{E_{pl}} + \overline{E_{pm}},$$

т. е. в точке  $P$  складываются освещенности от источников  $l$  и  $m$ .

б. Колебания полностью коррелированы, разность начальных фаз  $\delta_{0l} - \delta_{0m}$  для разных пар атомов одинакова и постоянна во времени. Кроме того, так как размер каждого из источников мал по сравнению с  $\lambda$ , то и разность

$$2\pi (\varphi_l - \varphi_m) = 2\pi \Delta (P)$$

постоянна. Такие источники называются когерентными, для них по (22.2) получаем

$$\overline{E_p} = \overline{\sum_l a_l^2} + \overline{\sum_m a_m^2} + 2 \cos [2\pi \Delta (P)] \overline{\sum_{l,m} a_l a_m}.$$

Отсюда видно, что  $\overline{E_p}$  в зависимости от значения разности фаз  $2\pi \Delta (P)$  принимает любые значения, лежащие между максимальным и минимальным значениями

$$\overline{E_{p_{\max}}} = \overline{E_{pl}} + \overline{E_{pm}} + 2 \overline{\sum_{l,m} a_l a_m},$$

$$\overline{E_{p_{\min}}} = \overline{E_{pl}} + \overline{E_{pm}} - 2 \overline{\sum_{l,m} a_l a_m}.$$

При равенстве амплитуд  $a_l = a_m = a_i$

$$\bar{E}_P = \sum_i 2a_i^2 \{1 + \cos [2\pi\Delta(P)]\},$$

или

$$\bar{E}_P = \sum_i 4a_i^2 \cos^2 [\pi\Delta(P)]. \quad (22.3)$$

В этом случае максимальная освещенность

$$E_{P_{\max}} = \sum_i 4a_i^2 = 2E_P,$$

где  $E_P = E_{Pl} + E_{Pm}$ ; следовательно, в максимуме освещенность в два раза больше суммы освещенностей, создаваемых каждым из источников в отдельности. Минимальная освещенность  $E_{P_{\min}} = 0$ .

В обычных самосветящихся источниках отдельные его участки испускают некоррелированные колебания. Для источников, светящихся за счет рассеянного и отраженного света, при освещении их когерентным светом соседние участки могут давать частично коррелированное излучение. Примером почти полностью коррелированного излучения является излучение лазера.

От обычных источников некоррелированных колебаний интерференционные явления, как известно, получаются за счет того, что либо используется источник  $S_1$  и его изображение  $S_2$ , либо оба источника  $S_1$  и  $S_2$  являются изображениями одного и того же реального источника  $S$ . Тогда каждой точке одного источника соответствует сопряженная

точка в другом и их колебания коррелированы. Колебания от несопряженных точек обоих источников некоррелированы. Примером может служить бипризма Френеля (рис. 96,а). Две призмы с острыми преломляющими углами  $A_1$  и  $A_2$  отклоняют лучи от точечного источника  $S$  так, что они представляются исходящими от двух мнимых изображений  $S_1$  и  $S_2$ . Рассмотрим освещенность, возникающую в точке  $P$  (рис. 96,б) на экране  $BC$ , параллельном плоскости, содержащей источники  $S_1$  и  $S_2$ . Обозначим расстояние между источниками  $d$ , а расстояние до экрана через  $L$ . Пусть  $L \gg d$ . Разность хода лучей  $S_2P$  и  $S_1P$

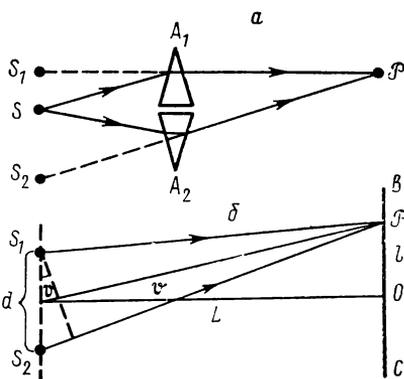


Рис. 96. Бипризма Френеля (а); положение интерференционных полос (б).

равна  $d \sin \vartheta$ , а разность фаз

$$2\pi\Delta(P) = 2\pi \frac{d \sin \vartheta}{\lambda} \cong 2\pi \frac{dl}{L\lambda}, \quad (22.4)$$

где  $l$  — расстояние от середины экрана до точки  $P$ . Интерференционные максимумы образуются при  $\Delta(P) = k$ , где  $k$  — целое число, т. е. при выполнении условия

$$d \frac{l}{L} = k\lambda. \quad (22.5)$$

Расстояние между соседними максимумами

$$l_{k+1} - l_k = \frac{L}{d} \lambda. \quad (22.6)$$

При замене точечных источников  $S_1$  и  $S_2$  узкими щелями, перпендикулярными к плоскости чертежа, на экране  $BC$  возникнут интерференционные полосы. При сделанных предположениях по (22.6) они будут эквидистантны.

Рассмотрим необходимую степень монохроматичности света, при которой интерференционная картина может наблюдаться. По (22.5) изменение длины волны на  $\Delta\lambda$  ведет к сдвигу максимумов на величину

$$\Delta l = k \frac{L}{d} \Delta\lambda. \quad (22.7)$$

Если этот сдвиг будет равен половине расстояния между соседними максимумами, то максимумы длины волны  $\lambda + \Delta\lambda$  попадут в места минимумов длины волны  $\lambda$  и интерференционная картина полностью размоется. Таким образом, для того чтобы интерференционные полосы могли наблюдаться, интервал длин волн  $\Delta\lambda$  должен по (22.7) и (22.6) удовлетворять неравенству

$$\Delta\lambda < \frac{1}{2} \frac{\lambda}{k} \quad (22.8)$$

или

$$\text{или } \Delta\lambda < \frac{1}{2k} \frac{d}{L} \Delta l_{k,k+1}, \quad (22.9)$$

где  $\Delta l_{k,k+1}$  — расстояние между двумя соседними полосами.

Длины всех волн, используемых для наблюдения интерференции, не должны выходить за пределы интервала  $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$ . Чем выше порядок интерференции  $k$ , тем по формуле (22.8) строже требования к степени монохроматичности света.

Как известно, строго монохроматическим является лишь излучение, носящее характер бесконечно длящейся синусоиды (косинусоиды) с постоянной амплитудой и постоянной частотой  $\nu$ . Во всех прочих случаях с помощью преобразования

Фурье надо представить колебания как сумму бесконечного множества синусоид, длящихся бесконечно долго

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{-2\pi i \nu t} d\nu,$$

где  $a_\nu$  — спектральная плотность амплитуд. В части I, § 16 такая задача была решена для отрезка синусоиды частоты  $\nu_0$ , длящейся в течение времени  $\Delta t$ . В этом случае квадрат модуля  $|a_\nu|^2$  (нормированный в максимуме на единицу) определяется формулой

$$|a_\nu|^2 = \text{sin}^2 x/x^2,$$

где  $x = \pi(\nu - \nu_0)\Delta t$ ; вид этой функции приведен на рис. 68, ч. 1. Ширина основного максимума при ординате 0,5 равна

$$\Delta\nu = 1/\Delta t. \quad (22.10)$$

Максимум приходится на  $\nu = \nu_0$ . Таким образом, основная часть частот рассматриваемого излучения лежит в интервале  $\Delta\nu$ , тем меньшем, чем больше длительность  $\Delta t$  отрезка синусоиды. Соотношение (22.10) можно переписать в виде

$$\Delta\nu \cdot \Delta t = 1. \quad (22.11)$$

Преобразуем его также к шкале длин волн, воспользовавшись равенствами:  $\lambda = c/\nu$ ;  $|\Delta\nu| = c\Delta\lambda/\lambda^2$ , откуда

$$\Delta\lambda \cdot \Delta t = \lambda^2/c. \quad (22.12)$$

Значение  $\Delta\lambda$ , определяемое этим соотношением, ограничивает по (22.8) возможность наблюдения интерференционных максимумов. Длительность синусоиды  $\Delta t$  определяет временную когерентность излучения.

Значению  $\Delta t$  соответствует длина цуга волн, которые, интерферируя, дают еще наблюдаемые максимумы. В пустоте эта длина

$$\Delta z = c\Delta t. \quad (22.13)$$

Величина  $\Delta z$  носит название длины когерентности излучения.

Естественно (не считая лазеров), наиболее монохроматический вид излучения дают отдельные спектральные линии, испускаемые светящимися парами или газами при низких давлениях. Контур таких линий отличается от контура, даваемого функцией  $(\text{sin}x/x)^2$ . Тем не менее в большинстве случаев можно приближенно считать, что между шириной линии  $\Delta\nu$ , длительностью когерентного излучения  $\Delta t$  и длиной цуга когерентного излучения  $\Delta z$  сохраняются соотношения (22.11) и (22.13).

Укажем на несколько частных случаев уширения спектральных линий.

**Естественная ширина линий.** Она вызвана естественным затуханием колебаний по закону  $a = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = a_0 e^{-\gamma t}$ . Ширина контура

$$\Delta \nu_n = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}.$$

По классической теории

$$\gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3c^3 m_0},$$

где  $m_0$  и  $e$  — масса и заряд электрона. Как видно, для данной частоты  $\nu$  коэффициент затухания  $\gamma$  определяется лишь через мировые константы. Для  $\nu_0 \cong 6 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$  (видимая часть спектра)  $\gamma \cong 10^8 \text{ с}^{-1}$ ;  $\tau \cong 10^{-8} \text{ с}$ .

По современной квантовой теории спектров для линии, возникающей при переходе между энергетическими уровнями  $k$  и  $i$

$$\begin{aligned} \gamma_{ki} &= \gamma_k + \gamma_i, \\ \gamma_k &= \sum_i A_{ki}; \quad \gamma_i = \sum_j A_{ij}, \end{aligned}$$

где  $A_{ki}$  и  $A_{ij}$  — вероятности переходов  $k \rightarrow i$  и  $i \rightarrow j$ , суммы берутся по всем возможным переходам на уровни, лежащие соответственно ниже  $k$ -го и  $i$ -го уровней. Для интенсивных дипольно-электрических переходов вероятности  $A$  порядка  $10^8 \text{ с}^{-1}$  и время затухания  $\tau$  оказывается близким к классическому. Однако возможны значения  $\tau$  существенно большие и меньшие классического.

**Столкновительное уширение.** Простейшая теория столкновительного уширения была разработана Лоренцом. Согласно его предположению, атомы (молекулы) на длине свободного пути излучают чисто периодически, но излучение обрывается при каждом столкновении. Таким образом, излучение складывается из некогерентных отрезков синусоид. Продолжительность этих синусоид различна в соответствии со случайными изменениями длины свободного пути. Статистическое усреднение приводит к контуру линии с шириной.

$$\Delta \nu_L = \frac{1}{\pi\tau_0},$$

где  $\tau_0$  — среднее время свободного пути. Беря для него значение, вытекающее из кинетической теории газов, получим

$$\Delta \nu_L = \frac{4\sigma^2 N_A \nu^2}{\sqrt{\pi} \mu R T}, \quad (22.14)$$

где:  $N_A$  — число Авогадро;  $R$  — газовая постоянная,  $\mu$  — молекулярный (атомный) вес;  $p$  и  $T$  — давление и температура газа;  $\pi\sigma^2$  — эффективное сечение столкновений атомов.

Из формулы (22.14) следует, что ширина линии зависит от условий, при которых находится светящийся газ. Если для  $\sigma$  использовать данные, вычисляемые из кинетической теории газов (диффузия, вязкость), то для  $\Delta\nu_D$  получаются значения, в несколько раз меньшие наблюдаемых. Линейная зависимость от  $p$  выполняется хорошо.

**Доплеровское уширение.** Это уширение вызвано беспорядочным тепловым движением излучающих атомов (молекул). Согласно принципу Доплера, каждый данный атом, двигаясь по отношению к наблюдателю, дает измененную длину волны. Усреднение по большому числу атомов, скорости которых распределены по закону Максвелла, ведет к контуру линий с шириной

$$\Delta\nu_D = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2 \ln 2 RT}{\mu}}. \quad (22.15)$$

Из формулы (22.15) видно, что  $\Delta\nu_D \sim \sqrt{T/\mu}$ , т. е. может меняться в широких пределах в зависимости от того, при какой температуре находится светящийся газ и каков его молекулярный (атомный) вес.

Таблица 3

Ширина линий  $\Delta\nu$  и  $\Delta\lambda$ , время  $\Delta t$  и длина цуга  $\Delta z$  для когерентного излучения ( $\lambda = 500$  нм;  $\mu = 40$ .)

Тип уширения	$\Delta\nu$ , с <sup>-1</sup>	$\Delta\lambda$ , нм	$\Delta t$ , с	$\Delta z$ , м
Естественная ширина (классическая)	$1,4 \cdot 10^7$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$7,1 \cdot 10^{-8}$	21
Ударное уширение				
1) $P=1$ ат, $T=100$ К	$5,7 \cdot 10^8$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-9}$	0,50
2) $P=1$ ат, $T=1000$ К	$1,8 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-10}$	0,17
Доплеровская ширина				
1) $T=100$ К	$5,9 \cdot 10^8$	$4,9 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	0,51
2) $T=1000$ К	$1,8 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-10}$	0,17

В табл. 3 сопоставлены типичные значения ширин спектральных линий (в шкале частот  $\Delta\nu$  и в шкале длин волн  $\Delta\lambda$ ), времена когерентности излучения  $\Delta t$  и длина когерентного цуга волн  $\Delta z$  для разных типов уширения линий. Данные приведены для длин волн  $\lambda=500$  нм и атомного веса 40.

В реальных источниках одновременно присутствуют различные причины уширения линий, и наблюдаемый контур представляет собой свертку отдельных контуров.

При низких давлениях светящихся паров или газов основную роль играет доплеровское уширение. Оно может быть

уменьшено за счет снижения температуры. Поэтому употребляется охлаждение газоразрядных источников света жидким воздухом, водородом или гелием. Для дальнейшего уменьшения роли доплеровского уширения используются источники с атомными пучками. В пучке атомы движутся в пределах малого телесного угла и при наблюдении в направлении, перпендикулярном к оси пучка, роль эффекта Доплера становится малой. Практически удается достигнуть ширины, соответствующей обычной доплеровской ширине при температуре порядка 3—4 К.

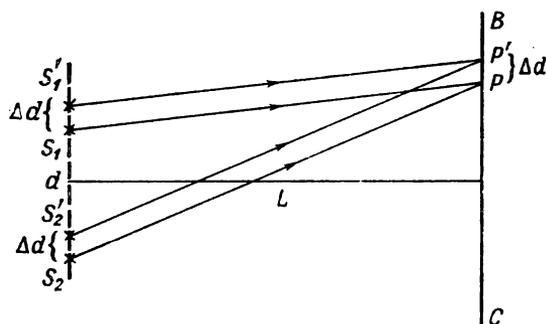


Рис. 97. К подсчету допустимых размеров источников.

Существенным обстоятельством, снижающим временную когерентность излучения, является сверхтонкая структура линий. Она сводится к тому, что линия состоит из нескольких тесно расположенных компонент. Часто встречается случай, когда из-за доплеровского уширения контуры отдельных компонент перекрываются и линии в целом соответствует расширенный контур, который может характеризоваться несколькими максимумами. Добавочные усложнения в контур могут вносить вторичные процессы в источнике, например реабсорбция.

Сверхтонкая структура вызвана наличием магнитного момента у атомных ядер, а также эффектом изотопического сдвига. Не обладают магнитным моментом ядра четно-четных изотопов, например,  $\text{Ne}^4$ ,  $\text{Ar}^{40}$ ,  $\text{Kr}^{86}$ ,  $\text{Cd}^{114}$ ,  $\text{Cd}^{116}$ ,  $\text{Hg}^{200}$  и т. д. Соответствующие одноизотопные источники света дают спектральные линии, свободные от сверхтонкой структуры и поэтому пригодные для интерференционных наблюдений при больших порядках  $k$ .

Как отмечалось (ч. 1, § 22), особым видом источника является лазер. Отдельные моды, на которых может генерировать газовый лазер, обладают шириной, значительно меньшей, чем естественная ширина ( $\Delta\nu < 10^6 \text{ c}^{-1}$ ). Длина цуга когерентного излучения лазера достигает сотен метров.

Рассмотрим теперь вопрос о так называемой пространственной когерентности источников. Для этого обратимся снова к схеме двух источников, сопряженные точки которых попарно когерентны. Отдельные же пары точек дают некоррелированные между собой колебания. Будем теперь считать, что размеры каждого из источников  $S_1S_1'$  и  $S_2S_2'$  (рис. 97) конечны и равны по длине  $\Delta d$ . Тогда каждая пара сопряженных точек дает свою систему интерференционных максимумов на экране  $BC$ , но эти системы сдвинуты друг относительно друга. Очевидно, системы максимумов  $P$  и  $P'$ , даваемых парами крайних точек  $S_1S_2$  и  $S_1'S_2'$ , будут сдвинуты друг относительно друга на  $\Delta d$ . Если этот сдвиг равен половине расстояния между максимумами  $l_{k+1} - l_k$ , то интерференционная картина полностью размоется. Следовательно, для того, чтобы интерференционные максимумы могли наблюдаться еще раздельно, размеры источников  $\Delta d$  должны по (22.6) удовлетворять неравенству

$$\Delta d < \frac{1}{2} (l_{k+1} - l_k) = \frac{1}{2} \frac{L}{d} \lambda. \quad (22.16)$$

Например, при  $d=0,5$  см,  $L=10^2$  см и  $\lambda=5 \cdot 10^{-5}$  см размеры источников  $\Delta d$  должны удовлетворять требованию

$$\Delta d < \frac{10^2}{5 \cdot 10^{-1}} \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 0,05 \text{ мм}.$$

Условие (22.16) можно сформулировать иначе, вводя угловые размеры источников, рассматриваемых с расстояния  $L$ , а именно угол  $u' = \Delta d/L$ . Тогда по (22.16) должно выполняться условие

$$u' < \frac{1}{2} \frac{\lambda}{d}. \quad (22.17)$$

Неравенства (22.16) и (22.17) определяют пространственную когерентность источников, т. е. ту их пространственную протяженность, при которой еще наблюдается интерференционная картина. При этом, как было предположено, никакого определенного соотношения между начальными фазами колебаний между несопряженными парами точек источников нет.

Однако для источников, которые являются изображениями одного реального источника, это не вполне верно. Дело в том, что каждая точка реального источника не отображается точкой, но дает дифракционный кружок (кружок Эри), в пределах которого колебания коррелированы. Каждое из изображений реального источника есть наложение дифракционных кружков. В пределах кружка колебания когерентны и лишь колебания от разных кружков не коррелированы между собой. Такие источники носят название частично-когерентных.

Для учета влияния частичной когерентности на вид интер-

ференционной картины введем видность полос — величину, равную

$$V = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}, \quad (22.18)$$

где  $E_{\max}$  и  $E_{\min}$  соответственно освещенность в максимумах и в минимумах интерференционных полос.

Предположим, что от потока  $\Phi_0$ , исходящего от источников, часть  $\Phi' = \gamma\Phi_0$  когерентна и остальная часть  $\Phi'' = (1-\gamma)\Phi_0$  некогерентна ( $\gamma < 1$ ). Тогда некогерентная часть потока  $\Phi''$  создает равномерную освещенность  $E'' = (1-\gamma)E_0$ , где  $E_0$  — освещенность, которая имела бы место, если бы оба источника были полностью некогерентны. Когерентная часть потока  $\Phi'$  (при равенстве амплитуд колебаний, исходящих от каждого из источников) дает максимумы с освещенностью  $E'_{\max} = 4\gamma E_0$  и минимумы с освещенностью  $E'_{\min} = 0$ .

Полная освещенность, вызванная как когерентной, так и некогерентной частями излучения, будет соответственно равна в максимумах и в минимумах

$$E_{\max} = E'_{\max} + E'' = (1 + 3\gamma) E_0,$$

$$E_{\min} = E'_{\min} + E'' = (1 - \gamma) E_0.$$

Отсюда для видности  $V$  получим

$$V = \frac{2\gamma}{1 + \gamma}. \quad (22.19)$$

Таким образом, видность интерференционных полос зависит от степени когерентности  $\gamma$ . Для полностью когерентного света  $\gamma = 1$  и по (22.19)  $V = 1$ ; для полностью некогерентного света  $\gamma = 0$  и  $V = 0$ .

### § 23. Интерференционные полосы равного наклона и равной толщины

Весьма распространенным случаем интерференции является интерференция волн, отраженных от двух поверхностей, в частности от двух поверхностей прозрачной пластины. При этом в зависимости от способа наблюдения возникают или так называемые полосы равного наклона, или полосы равной толщины. Рассмотрим их в отдельности.

**Интерференционные полосы равного наклона.** Рассмотрим прозрачную однородную пластинку толщиной  $t$  (рис. 98), плоские поверхности которой  $AA'$  и  $BB'$  параллельны друг другу. Пусть от точечного источника  $S$  с помощью линзы  $L_1$  образуется пучок параллельных лучей  $aa_1$ , падающий на пластинку. Часть лучей пройдет сквозь пластинку, часть отразится от

нее. Ввиду того что они отразятся от обеих поверхностей  $AA'$  и  $BB'$ , возникнут два пучка параллельных лучей  $a'a_1'$  и  $bb_1$  с определенной разностью хода. Собранные линзой  $L_2$  они будут интерферировать в точке  $S'$ , лежащей в ее главной фокальной плоскости.

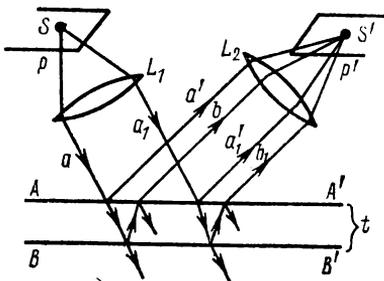


Рис. 98. Интерференция пучков при отражении от плоскопараллельной пластинки.

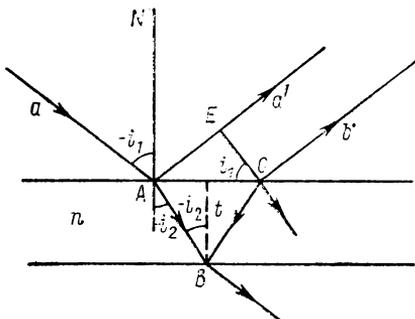


Рис. 99. К подсчету разности хода между лучами, отраженными от плоскопараллельной пластинки.

Для подсчета разности хода выделим из пучка отдельный луч  $a$  (рис. 99), падающий на первую поверхность в точке  $A$  под углом  $-i_1$ . Этот луч частично отразится, образовав луч  $a'$ , частично преломится и упадет на вторую поверхность пластины в точке  $B$ . Здесь он снова частично преломится и частично отразится. То же произойдет в точке  $C$ , где возникнет преломленный луч  $b$ , параллельный лучу  $a'$ . Опустим из точки  $C$  перпендикуляр  $CE$  на направление луча  $a'$ . Тогда, считая коэффициент преломления пластины равным  $n$ , а коэффициент преломления среды вне пластины (воздуха) равным единице, получим для разности хода  $\Delta$  между лучами  $a'$  и  $b$

$$\Delta = (AB + BC)n - (AE + \frac{1}{2}\lambda), \quad (23.1)$$

где  $\lambda$  — длина волны рассматриваемого света. Величина  $\lambda/2$  представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении луча  $a$  на границе воздух — пластина (см. § 17). Если бы среда вне пластины имела коэффициент преломления, больший, чем коэффициент преломления пластины, то потеря полуволны произошла бы при отражении в точке  $B$ . Из рис. 99 имеем

$$AB = BC = \frac{t}{\cos i_2}, \quad (23.2)$$

где  $i_2$  — угол преломления. Далее, из рисунка следует, что

$$AE = AC \sin i_1 = 2t \cdot \operatorname{tg} i_2 \sin i_1.$$

Так как  $\sin i_1 = n \sin i_2$ , то

$$AE = 2tn \frac{\sin^2 i_2}{\cos i_2}. \quad (23.3)$$

Подставляя в выражение для разности хода  $\Delta$  (23.1) вместо  $AB$ ,  $BC$  и  $AE$  их значения по (23.2) и (23.3), найдем

$$\Delta = 2tn \cos i_2 - \frac{1}{2} \lambda. \quad (23.4)$$

Преобразуем (23.4), введя вместо угла преломления  $i_2$  угол падения  $i_1$ . Воспользовавшись законом преломления, получим

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 i_1},$$

откуда

$$\Delta = 2t \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{1}{2} \lambda. \quad (23.5)$$

Так как линза не вносит добавочной разности хода, то  $\Delta$  представляет ту разность хода, с которой лучи сходятся в точке  $S'$ . Если  $\Delta = k\lambda$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то в точке  $S'$  образуется максимум; если  $\Delta = (2k+1)\lambda/2$  — то минимум. Надо иметь в виду, что при  $\Delta = (2k+1)\lambda/2$  освещенность в изображении  $S'$  не будет равна нулю, так как, вообще говоря, амплитуды волн, возникающих в результате отражения от поверхностей  $AA'$  и  $BB'$ , не равны друг другу.

Предположим теперь, что в качестве источника света берется не точка  $S$ , а светящаяся поверхность  $P$  (рис. 98). При отсутствии интерференции (например, если бы совокупность поверхностей  $AA'$  и  $BB'$  была заменена плоским металлическим зеркалом) в главной фокальной плоскости линзы  $L_2$  получилось бы изображение поверхности  $P$  в виде равномерно освещенной поверхности  $P'$ . Благодаря интерференции пучков, отраженных от обеих поверхностей пластины, большая освещенность получится для той совокупности точек  $bb'$  (рис. 100) на поверхности  $P'$ , для которых  $\Delta = k\lambda$ , где  $\Delta$  дается формулой (23.5). При данном  $k$  такая совокупность точек удовлетворяет условию  $i_1 = \text{const}$ , она лежит на кривой, образуемой пересечением поверхности  $P'$  с конусом, осью которого является нормаль  $AN$ , а угол раствора которого равен  $2i_1$ . Этой кривой  $bb'$  соответствует на светящейся поверхности  $P$  совокупность точек  $aa'$ , лежащих на пересечении поверхности  $P$  с тем же конусом. Точки, лежащие на кривых  $aa'$  и  $bb'$ , попарно сопряжены; для каждой пары выполнено условие  $\Delta = k\lambda$ . Кривая  $bb'$  представит собой светлую интерференционную полосу. Разным значениям  $k$  будут соответствовать разные светлые полосы. Между ними расположатся более темные полосы. Таким

образом, в главной фокальной плоскости линзы  $L_2$  возникает система интерференционных полос. Каждая полоса соответствует постоянному значению угла  $i_1$ , т. е. равному наклону лучей по отношению к нормали  $AN$ . Отсюда вытекает название рассматриваемых интерференционных полос — полосы равного наклона.

Как следует из сказанного, каждая светлая точка на кривой  $bb'$  возникает в результате интерференции лучей, исходящих от одной точки на поверхности  $P$ . Для наблюдения полос равного наклона требуется широкий источник света в виде светящейся поверхности. Колебания отдельных точек этой поверхности не должны быть когерентны между собой. Другими словами, по отношению к источнику  $P$  не предъявляются требования пространственной когерентности.

Наблюдаются полосы равного наклона в главной фокальной плоскости линзы  $L_2$ . Так как в этой плоскости получаются изображения бесконечно удаленных предметов, то полосы равного наклона будут расположены на бесконечности. При визуальном наблюдении роль линзы  $L_2$  играет преломляющая система глаза (хрусталик, роговица). Интерференционные полосы возникают на сетчатке, для чего глаз должен быть «сфокусирован на бесконечность».

Интерференция возникает и в том случае, когда линза  $L_2$  расположена за пластинкой так, что она собирает в главной фокальной плоскости лучи, прошедшие сквозь пластинку. Однако в этом случае интерференционная картина менее резка, так как яркость пучка, прошедшего прямо сквозь пластину, много больше, чем яркость луча, претерпевшего двукратное отражение у поверхностей  $BB'$  и  $AA'$ . О возможности получения резких интерференционных полос в проходящем свете будет указано в § 27.

Рассмотренная интерференционная картина возникает в монохроматическом свете определенной длины волны  $\lambda$ . Если свет не монохроматичен, то полосы, соответствующие разным длинам волн, будут сдвинуты друг относительно друга, что может повести к полному размыванию картины. Предположим, что выделен участок длин волн, лежащих в интервалах от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ . Пусть  $\Delta\lambda$  таково, что интерференционные максимумы длины волны  $\lambda$  попадают как раз на минимумы длины волны

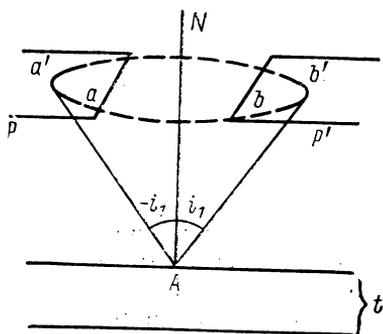


Рис. 100. Возникновение кривых равного наклона.

$\lambda + \Delta\lambda$ . Тогда имеет место равенство

$$k\lambda = (k - 1/2)(\lambda + \Delta\lambda),$$

$$\text{откуда } \Delta\lambda = \frac{\lambda}{2k + 1},$$

где  $k$  — целое число (порядок интерференции). При  $k \gg 1$  последнее равенство принимает вид

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{k}.$$

Таким образом, чтобы размытие полос не имело места,  $\Delta\lambda$  должно удовлетворять неравенству

$$\Delta\lambda < \frac{1}{2} \frac{\lambda}{k},$$

что совпадает с требованием (22.8). Этим равенством определяется требование к временной когерентности света, который должен использоваться для наблюдения кривых равного наклона.

Свет должен быть тем более монохроматичен, чем больше порядок интерференции  $k$ . Порядок же интерференции по (23.5) возрастает с увеличением толщины пластины  $t$ . Поэтому, чем толще пластина, тем более монохроматичный интервал длин волн должен быть выделен для наблюдения интерференционных полос равного наклона. Кроме того, для толстой пластины труднее достичь необходимой однородности материала (постоянства коэффициента преломления) и высокого качества обработки больших поверхностей. Проще наблюдать возникновение полос равного наклона при отражении света от поверхностей тонкой пластины. Для очень тонких пластинок порядок интерференции невелик и полосы заметны при освещении широким участком спектра; в этом случае они окрашены.

**Интерференционные полосы равной толщины.** Рассмотрим теперь прозрачную пластину, поверхности которой не параллельны друг другу. В этом случае также возникнут лучи, отраженные от обеих поверхностей  $AA'$  и  $BB'$ . Пусть луч  $a$  от точечного источника  $S$  (рис. 101) в результате отражения от поверхности  $BB'$  и двукратного преломления у поверхности  $AA'$  ведет к образованию луча  $a'$ , проходящего через точку  $C$  и попадающего на линзу  $L$ . Так как от источника  $S$  лучи идут в различных направлениях, то среди них найдется луч  $b$ , который упадет на точку  $C$  поверхности  $AA'$ . Здесь он частично отразится (и частично преломится) и поведет к образованию луча  $b'$ , составляющего с лучом  $a'$  некоторый угол. Лучи  $a'$  и  $b'$ , пройдя через линзу  $L$ , вновь пересекутся в точке  $C'$ , которая является изображением точки  $C$ . Так как оба луча  $a'$  и  $b'$  возникают от одного и того же точечного источника, то

они когерентны и будут интерферировать. В зависимости от того, будет ли разность хода  $\Delta$  между лучами  $a'$  и  $b'$  равна четному или нечетному числу полуволин, в точке  $C'$  возникнет максимум или минимум.

Если угол, составляемый поверхностями  $AA'$  и  $BB'$ , мал и источник  $S$  расположен далеко от пластины, то разность хода  $\Delta$  приближенно выражается

формулой (23.5). При источнике света, находящемся далеко от пластины, лучи падают на различные места пластины приблизительно под одним и тем же углом и разность хода  $\Delta$  меняется лишь с толщиной пластины  $t$ . Если точке  $C$  соответствует максимум в точке  $C'$ , лежащей в фокальной плоскости линзы  $L$ , сопряженной с поверхностью  $AA'$ , то максимумы будут соответствовать и всей совокупности точек  $C$ , лежащих на поверхности  $AA'$  в местах одинаковой толщины. Интерференционные полосы, возникающие в фокальной плоскости линзы  $L$ , будут соответствовать местам одинаковой толщины пластины, откуда и происходит название полосы равной толщины. Очевидно, что если пластина представляет собой клин, то интерференционные полосы равной толщины имеют вид прямых, параллельных ребру клина.

Как было указано, полосы равной толщины наблюдаются в фокальной плоскости линзы  $L$ , сопряженной с поверхностью пластин  $AA'$ . Другими словами, чтобы наблюдать на экране появление резких интерференционных полос, линза  $L$  должна быть сфокусирована на поверхность  $AA'$ . При визуальном наблюдении глаз следует сфокусировать на эту же поверхность. Поэтому принято говорить, что интерференционные полосы равной толщины локализованы на поверхности отражающей пластины.

В случае немонахроматического света полосы, соответствующие разным длинам волн, сдвинуты друг относительно друга так же, как это имеет место для полос равного наклона. Поэтому здесь выдвигаются те же требования в отношении временной когерентности света. Отступления от параллельности пластин также должны быть невелики, так как иначе полосы равной толщины расположатся слишком близко друг к другу. В очень тонких пластинах полосы могут наблюдаться и в белом свете, причем они будут окрашены (цвета тонких пластин).

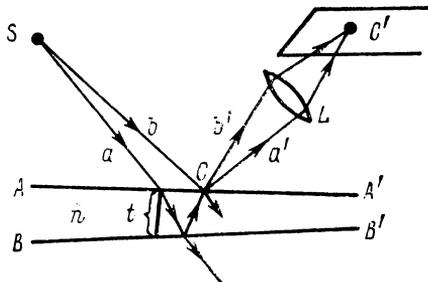


Рис. 101. Возникновение интерферирующих пучков при отражении от пластины с непараллельными поверхностями.

Как мы видели, полосы равного наклона наблюдаются при использовании протяженного источника. В соответствии с рис. 101 интерференционные полосы равной толщины наблюдаются от точечного источника.

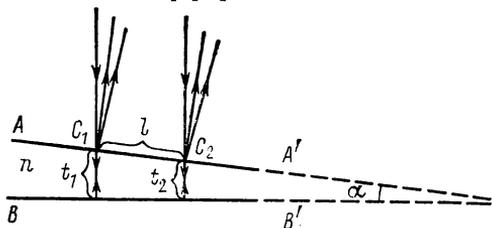


Рис. 102. Интерференция от клина.

Поскольку реальные источники не точечны, к ним прилагается требование пространственной когерентности, о которой шла речь в § 22.

**Использование полос равной толщины для измерения малых углов и малых изменений длин.** Простейшим примером полос равной толщины являются интерференционные полосы, возникающие при отражении от двух плоскостей  $AA'$  и  $BB'$  (рис. 102), образующих клин. Если в качестве источника света использовать удаленную узкую щель, параллельную ребру клина, то интерференционные полосы имеют вид прямых, также параллельных ребру клина.

Пусть на поверхность  $AA'$  падает нормально к ней пучок монохроматического излучения с длиной волны  $\lambda$ . Угол клина  $\alpha$  мал. Тогда угол падения  $i_1=0$  и по формуле (23.5) разность хода  $\Delta$  приблизительно равна

$$\Delta = 2tn - \frac{1}{2}\lambda.$$

Для двух точек  $C_1$  и  $C_2$ , через которые проходят соседние светлые полосы, для разностей хода  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  имеем

$$\Delta_1 = 2t_1n - \frac{1}{2}\lambda = k\lambda,$$

$$\Delta_2 = 2t_2n - \frac{1}{2}\lambda = (k-1)\lambda,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — толщины клина в местах  $C_1$  и  $C_2$  (считаем  $t_2 < t_1$ ). Вычитая эти равенства одно из другого, найдем:  $t_1 - t_2 = \lambda/2n$ , откуда для угла клина  $\alpha = (t_1 - t_2)/l$ , где  $l$  — расстояние между точками  $C_1$  и  $C_2$ , получим

$$\alpha = \frac{\lambda}{2nl}.$$

Таким образом, зная  $n$  и  $\lambda$  и измерив линейное расстояние  $l$  между соседними светлыми полосами, можно определить угол клина  $\alpha$ , например, при  $n=1,5$ ,  $\lambda=5 \cdot 10^{-5}$  см и

$l = 0,56$  см:

$$\alpha = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 1,5 \cdot 0,56} = 2,9 \cdot 10^{-5} \cong 0,1'$$

Из этого примера видно, что легко измерять углы порядка  $0,1'$  и меньше.

Аналогично по смещению интерференционных полос могут быть измерены малые изменения толщины клина  $t$ . Пусть некоторой толщине клина  $t_k$  соответствует светлая интерференционная полоса порядка  $k$ , тогда разность хода

$$\Delta_k = 2t_k n - \frac{1}{2} \lambda = k \lambda.$$

Если отражающие поверхности отодвинутся друг от друга с сохранением угла  $\alpha$ , который они образуют между собой, то  $t$  увеличивается. В результате светлая полоса с разностью хода  $\Delta$  сдвигается в сторону ребра клина, а на ее место попадает полоса с более высоким порядком интерференции. Если сдвиг произошел на  $x$  полос, то в том месте, где разность хода равнялась  $\Delta_k$ , она будет равна

$$\Delta_{k+x} = 2t_{k+x} n - \frac{1}{2} \lambda = (k + x) \lambda.$$

Сравнивая выражение для  $\Delta_k$  и  $\Delta_{k+x}$ , получим, что при смещении интерференционной картины на  $x$  полос, изменение толщины окажется:

$$t_{k+x} - t_k = x \frac{\lambda}{2n}.$$

Так как длина волны  $\lambda$  для видимой части спектра — величина порядка  $5 \cdot 10^{-5}$  см, то путем визуального наблюдения смещения интерференционных полос можно измерять изменения  $t$  порядка  $10^{-5}$  см.

Указанный метод используется, например, для измерения коэффициента теплового расширения твердых тел, имеющих в виде небольших по размерам образцов. Для этого употребляется прибор, носящий название интерференционного дилатометра (рис. 103). Прибор состоит из кольца  $CC'$ , изготовляемого из плавленного кварца, имеющего весьма малый и хорошо измеренный коэффициент расширения. На кольце лежит стеклянная пластинка с плоскими поверхностями. Внутри кольца помещается исследуемое тело  $D$ , нижняя и верхняя поверхности которого отполированы. Тело  $D$  располагается так, чтобы между его верхней поверхностью и поверхностью  $AB$  стек-

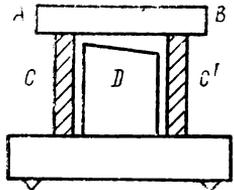


Рис. 103. Интерференционный дилатометр.

лянной пластинки образовался тонкий клинообразный слой воздуха. При освещении прибора сверху наблюдаются полосы равной толщины. При нагревании прибора вследствие различия коэффициентов теплового расширения тела  $D$  и кольца  $CC'$  толщина воздушного слоя меняется и интерференционные полосы смещаются. По смещению полос можно измерить изменение размеров тела и, следовательно, вычислить коэффициент его теплового расширения.

Интерференционные полосы равной толщины используются также для исследования качества поверхностей. Плоские и сферические поверхности деталей оптических приборов (линз, зеркал) не должны отступать от соответствующих идеальных геометрических поверхностей более чем на небольшие доли ( $\frac{1}{4}$  и меньше) длины световой волны. Контроль такого высокого качества поверхностей достигается интерференционным путем.

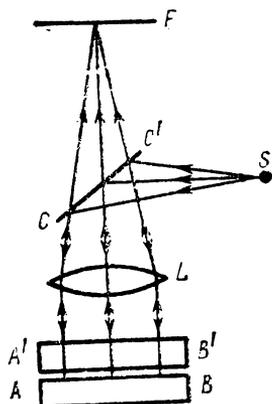


Рис. 104. Установка для проверки качества поверхностей.

Рассмотрим простейшую задачу испытания степени приближения поверхности стеклянной пластинки к идеальной плоскости. Такое испытание производится с помощью «пробного стекла» высокого качества, одна из поверхностей которого отступает от идеальной геометрической плоскости не более чем на  $\frac{1}{20}$ . (или  $\frac{1}{50}$ ) длины световой волны. Испытуемая поверхность прижимается к пробному стеклу так, что между ними образуется тонкая воздушная прослойка. При пропускании света через эту воздушную прослойку образуются интерференционные

полосы равной толщины. Для их наблюдения используется прибор, схема которого приведена на рис. 104, где  $S$  — источник света,  $CC'$  — полупосеребренная пластинка,  $L$  — линза, дающая параллельный пучок лучей, которым освещается испытуемая пластинка, наложенная на пробное стекло. Лучи, отраженные от поверхности  $AB$  пробного стекла и от испытуемой поверхности  $A'B'$ , проходят через полупосеребренную пластинку  $CC'$  и образуют в фокальной плоскости  $F$  линзы  $L$  полосы равной толщины. Наиболее простой вид этих полос возникает, если воздушная прослойка между поверхностями  $AB$  и  $A'B'$  имеет вид клина малого угла. Этого можно достигнуть, если, тщательно обеспылив пластинки, несколько сжать их с одной стороны при накладывании друг на друга. Тогда между ними образуется тонкий воздушный слой в виде клина и полосы равной толщины имеют вид прямых, параллельных ребру клина. Всякое отступление от плоскости ведет

к искривлению полос. На рис. 105, *a, б* изображен вид полос при наличии на испытуемой пластинке бугра и впадины. Нажимая то на один, то на другой край пластинок, можно менять положение ребра клина и таким образом исследовать рельеф поверхности в разных направлениях.

Для получения резких интерференционных полос необходимо пользоваться монохроматическим светом. Для этого обычно в качестве источника света используется ртутная дуга, дающая спектр, состоящий в видимой области из небольшого числа широко расставленных линий. Свет одной из линий (обычно зеленой) выделяется с помощью фильтра.

Полосы равной толщины могут использоваться и для исследования микрорельефа (царапин, выбоин и т. д.) на поверхности, которая, в частности, может быть полированной металлической поверхностью. С этой целью В. П. Линник сконструировал прибор, носящий название микроинтерферометра. Схема этого прибора приведена на рис. 106, *a*. Испытуемая отражающая поверхность *A* помещается под светоделительным кубиком. Свет от источника частично проходит через

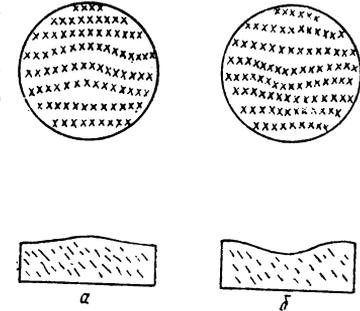


Рис. 105. Вид интерференционных полос равной толщины при наличии бугра (*a*); впадины (*б*).



Рис. 106. Микроинтерферометр (*a*); смещение полос в области царапины (*б*).

диагональную грань кубика, а частично отражается от него и падает на поверхность *A*. Изображение *B'* эталонного зеркала *B* образует с поверхностью *A* клин. Возникающие интерференционные полосы равной толщины рассматриваются в микроскоп *M* небольшого увеличения. Если дефекты на металлической поверхности имеют вид царапин, то ребро клина следует расположить перпендикулярно к направлению царапин. Тогда возникнут интерференционные полосы, перпендикулярные к царапинам, которые будут сдвинуты в пределах царапин (рис. 106, *б*). По величине этого сдвига можно судить о глубине царапин. Аналогичный эффект получится, если дефекты поверхности имеют вид выпуклостей.

Полосы равного наклона можно использовать и для испытания качества сферических поверхностей и измерения их радиуса

кривизны. Если на пробное стекло наложить плоско-выпуклую линзу (рис. 107), то между ними образуется зазор, имеющий круговую симметрию, и интерференционные полосы будут иметь вид колец (кольца Ньютона).

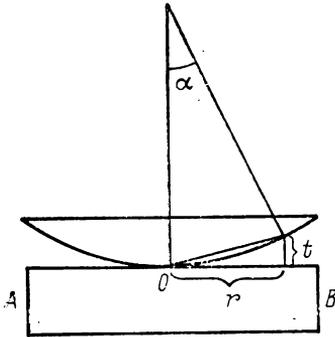


Рис. 107. Возникновение колец Ньютона.

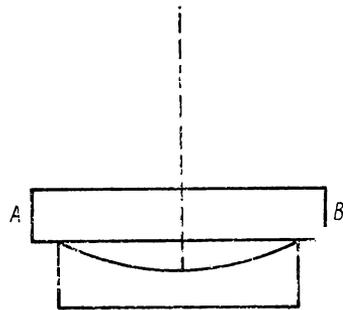


Рис. 108. Плоско-вогнутая линза на пробном стекле.

Места равной толщины воздушной прослойки представляют собой окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ , где линза касается плоскости  $AB$ . При  $r \ll R$ , где  $R$  — радиус кривизны выпуклой поверхности линзы, и при нормальном падении света для разности хода  $\Delta$  по формуле (23.5) приближенно получаем

$$\Delta = 2t + \lambda/2.$$

Коэффициент преломления воздуха  $n$  положен равным единице. Перед  $\lambda/2$  взят знак плюс, так как потеря полуволны теперь происходит при отражении на границе воздушной прослойки со стеклянной поверхностью  $AB$ . Условие образования светлых интерференционных полос будет соотношение

$$\Delta = 2t + \lambda/2 = k\lambda, \tag{23.6}$$

где  $k$  — целое число. Из рис. 107 видно, что при  $r \ll R$  приближенно

$$t = r^2/(2R).$$

Подставляя эти значения  $t$  в (23.6), найдем

$$r^2/(2R) = (k - 1/2) \lambda,$$

откуда для  $r$  получаем

$$r = \sqrt{(k - 1/2) \lambda R}. \tag{23.7}$$

В месте соприкосновения линзы с плоскостью остается очень тонкая воздушная прослойка с толщиной, меньшей длины волны. Поэтому разность хода между лучами, возникающая в этой точке, определяется лишь потерей полуволны при отражении

от поверхности  $AB$ . В результате  $\Delta$  оказывается равной  $\lambda/2$  и в центре интерференционной картины в точке  $O$  образуется темное пятно.

Для наблюдения большого числа колец требуется свет достаточно высокой степени монохроматичности, при освещении белым светом число наблюдаемых колец невелико и они окрашены. Формула (23.7) может использоваться для измерения радиуса кривизны выпуклой поверхности плоско-выпуклой линзы. Кольца Ньютона пригодны также для проверки качества выпуклой поверхности — при отступлении от сферичности кольца будут терять вид правильных окружностей.

Очевидно, система круговых интерференционных полос равной толщины может быть получена и от вогнутой поверхности плоско-вогнутой линзы, если на нее наложить «пробное стекло»  $AB$ , как это изображено на рис. 108. Однако в этом случае в центре картины может появиться как темное, так и светлое пятно.

## § 24. Интерферометры

Интерферометрами называются приборы, действующие на принципе интерференции света и предназначенные для точного измерения длин, углов и коэффициентов преломления сред или их изменений. Особое место занимают работы по сравнению длины световых волн с длиной концевых или штриховой меры или сравнению их друг с другом.

В большинстве случаев в интерферометрах световой пучок разделяется на два, которые затем, налагаясь друг на друга, интерферируют.

Такие приборы носят название **двулучевых интерферометров**. Однако возможно построение приборов, действующих на принципе **многолучевой интерференции**, о чем будет сказано в дальнейшем.

Рассмотрим несколько типов интерферометров и основные виды их использования.

**Интерферометр Рэлея.** Этот интерферометр предназначен для измерения коэффициентов преломления света в газах и жидкостях. При обычных давлениях коэффициент преломления газов мало отличается от единицы и поэтому может быть измерен лишь интерференционным путем. Для жидкостей интерференционный метод позволяет измерять малые разности коэффициентов преломления.

В интерферометре Рэлея интерферируют два пучка света, которые возникают в результате дифракции от двух параллельных щелей. Схема прибора изображена на рис. 109, где  $S$  — узкая щель, служащая источником света, располагаемая в глав-

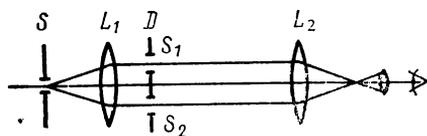


Рис. 109. Интерферометр Рэлея.

ной фокальности плоскости линзы  $L_1$ . Параллельный пучок, выходящий из линзы  $L_1$ , проходит через диафрагму  $D$  с двумя щелями, параллельными друг другу и параллельными щели  $S$ . От каждой из этих щелей в результате дифракции возникают параллельные пучки, распространяющиеся под различными углами  $\varphi$  по отношению к первоначальному направлению. Пучки интерферируют в главной фокальной плоскости линзы  $L_2$ . Освещенность в этой плоскости имеет вид

$$E = E_0 \left( \frac{\sin \frac{\pi x_0 \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi x_0 \varphi}{\lambda}} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x_1 \varphi}{\lambda}, \quad (24.1)$$

где  $x_0$  — ширина щелей в диафрагме  $D$ , а  $x_1$  — расстояние между ними. Первый множитель дает распределение освещенности в дифракционной картине от щели шириной  $x_0$  (формула (20.4) при малом  $\varphi$ ), а второй — распределение освещенности, возникающей от интерференции пучков от обеих щелей. При выполнении условия  $x_0 \ll x_1$  центральный дифракционный максимум широк и на его фоне образуется ряд интерференционных максимумов, положение которых определяется равенством

$$\varphi = k \frac{\lambda}{x_1},$$

где  $k=0, 1, 2 \dots$ . В белом свете центральный максимум ( $k=0$ ) не окрашен, остальные окрашены.

В интерферометре Рэлея линзы  $L_1$  и  $L_2$  раздвинуты и между ними помещены кюветы  $K_1$  и  $K_2$  (рис. 110), содержащие исследуемые газы или жидкости. Кюветы имеют одинаковую длину  $l$ . Занимают кюветы лишь верхнюю половину пространства между линзами  $L_1$  и  $L_2$ . Через нижнюю часть свет проходит свободно, вне кювет. Благодаря этому образуются две системы интерференционных полос — одна лучами, проходящими через кюветы  $K_1$  и  $K_2$ , и другая — проходящими

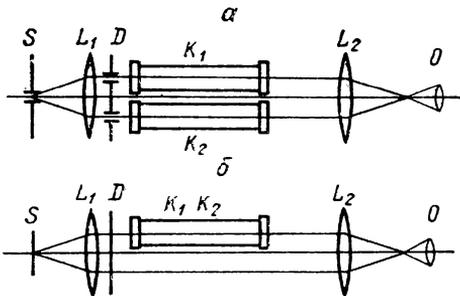


Рис. 110. Введение кювет  $K_1$  и  $K_2$  в интерферометр Рэлея.  
а — вид сверху; б — вид сбоку.

мимо них. Интерференционные полосы наблюдаются с помощью короткофокусного окуляра  $O$ . Верхняя система интерференционных полос сдвинута по отношению нижней, так как кюветы вносят добавочную разность хода  $\delta = (n_1 - n_2)l$ , где  $n_1$  и  $n_2$  — коэффи-

циенты преломления веществ, заполняющих кюветы. Измеряя величину этого смещения и зная длину кювет  $l$ , можно определить  $n_1 - n_2$ . Разность хода  $\delta$  может быть измерена также с помощью компенсатора, вводящего разность фаз, равную по величине, но обратную по знаку по отношению к той, которая создается кюветами (см. с. 144).

В случае газов одну из кювет можно откачать, тогда для нее коэффициент преломления становится равным единице и выражение для разности хода принимает вид  $\delta = (n - 1)l$ , что позволяет определить абсолютное значение коэффициента газа  $n$ . Для жидкостей такой прием не годится, так как величина  $(n - 1)l$  оказалась бы слишком большой и пришлось бы иметь дело со сдвигом интерференционных полос на много порядков. Однако определение небольших разностей коэффициентов преломления  $n_1 - n_2$  может производиться с высокой степенью точности, которая позволяет исследовать наличие малых примесей к жидкостям и к газам.

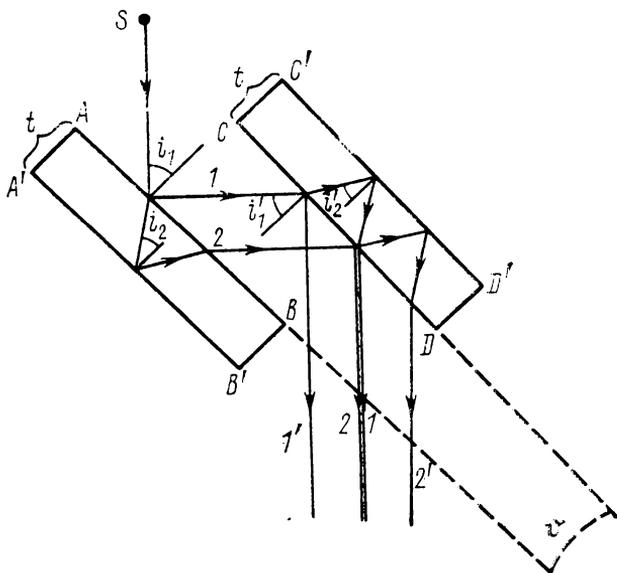


Рис. 111. Интерферометр Жамена.

Для того чтобы кюветы не делать слишком узкими, расстояние между щелями  $x_1$  должно быть достаточно большим. Это ведет к очень тесному расположению полос и к необходимости пользоваться окуляром  $O$  большого увеличения.

**Интерферометр Жамена.** Схема интерферометра Жамена изображена на рис. 111. Он состоит из двух толстых плоскопараллельных стеклянных пластинок  $ABB'A'$  и  $CDD'C'$  одина-

ковой толщины  $t$ . Луч от источника света  $S$  падает на поверхность пластинки  $AB$ , частично отражается от нее и, частично преломившись, отражается от задней поверхности  $A'B'$ . В результате возникают два луча  $1$  и  $2$ , которые падают на вторую пластинку и вновь отражаются частично от ее передней поверхности  $CD$  и частично — от ее задней  $C'D'$ . Благодаря этим отражениям возникают четыре луча  $1'$ ,  $1$ ,  $2$  и  $2'$ , из которых лучи  $2$  и  $1$  налагаются друг на друга и интерферируют.

При отражении от пластинки  $ABB'A'$  между лучами  $2$  и  $1$  возникает разность хода  $\Delta_1$ , равная (см. (23.4))

$$\Delta_1 = 2tn \cos i_2 - \frac{1}{2}\lambda,$$

где  $i_2$  — угол падения луча на поверхность пластинки  $A'B'$ ,  $n$  — коэффициент преломления стекла, из которого сделана пластинка. При отражении лучей от второй пластинки между лучами  $1$  и  $2$  возникает разность хода

$$\Delta_2 = 2tn \cos i_2' - \frac{1}{2}\lambda,$$

где  $i_2'$  — угол падения луча на поверхность второй пластинки  $C'D'$ . Полная разность хода  $\Delta$  между лучами, возникающая после отражения от обеих пластинок, равна

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 = 2tn (\cos i_2' - \cos i_2). \quad (24.2)$$

Если обе пластинки строго параллельны друг другу, то  $i_2' = i_2$  и  $\Delta = 0$ , т. е. между лучами  $1$  и  $2$  не возникает разности хода и они усиливают друг друга. Если пластинки образуют между собой угол  $\phi$ , не равный нулю, то лучи приобретают разность хода  $\Delta$ , зависящую от  $\phi$  и от угла падения  $i_1$  света на поверхность  $AB$ . По формуле (24.2) имеем

$$\Delta = 4tn \sin \frac{i_2 + i_2'}{2} \sin \frac{i_2 - i_2'}{2}.$$

При малом угле между пластинками  $\phi$  углы  $i_2'$  и  $i_2$  близки друг к другу и приближенно

$$\begin{aligned} \Delta &= 2tn \sin i_2 \delta i_2 \\ \text{или } \Delta &= 2t \sin i_1 \delta i_2, \end{aligned} \quad (24.3)$$

где через  $\delta i_2$  обозначена разность углов  $i_2 - i_2'$ .

Величину  $\delta i_2$  можно связать с углом  $\phi$  между пластинками следующим образом. Пусть  $i_1$  и  $i_1'$  — углы падения света на пластинки  $ABB'A'$  и  $CDD'C'$ , тогда  $i_1' = i_1 - \phi$ . Из закона пре-

ломления имеем

$$\sin i_1 = n \sin i_2,$$

$$\sin i_1' = \sin (i_1 - \vartheta) = n \sin i_2'.$$

Вычитая эти два равенства почленно друг из друга, найдем

$$\sin i_1 - \sin (i_1 - \vartheta) = n (\sin i_2 - \sin i_2'),$$

или приближенно при малом  $\vartheta$

$$\vartheta \cos i_1 = n \cos i_2 \delta i_2,$$

откуда получим

$$\delta i_2 = \frac{1}{n} \frac{\cos i_1}{\cos i_2} \vartheta. \quad (24.4)$$

Последнее выражение можно преобразовать, заметив, что

$$\frac{\cos i_1}{\cos i_2} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i_1}}{\sqrt{1 - \sin^2 i_2}} = n \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i_1}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}.$$

Подставив полученные значения для  $\cos i_1 / \cos i_2$  в (24.4), найдем

$$\delta i_2 = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i_1}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} \vartheta.$$

Обычно угол падения в интерферометре Жамена  $i_1 = 45^\circ$  и коэффициент преломления стекла  $n$  близок к 1,55. При этих численных значениях  $i_1$  и  $n$  для  $\delta i_2$  приближенно получается:  $\delta i_2 \cong 1/2\vartheta$ . Подставив это значение  $\delta i_2$  в (24.3), получим следующее приближенное выражение для разности хода  $\Delta$  между лучами 1 и 2:

$$\Delta = t \sin i_1 \cdot \vartheta. \quad (24.5)$$

При освещении первой пластинки интерферометра параллельным пучком монохроматического света для любой пары лучей 1—2 возникнет одна и та же разность хода  $\Delta$ . В фокальной плоскости линзы, собравшей все лучи, возникнет равномерная освещенность, зависящая от значения  $\Delta$ . Она будет максимальна, если  $\Delta$  равно нечетному числу полуволн. Если же на первую пластинку направить расходящийся пучок лучей, то разным парам этих лучей соответствуют различные углы падения  $i_1$ . В соответствии же с формулой (24.5) различие углов  $i_1$  ведет к различию разностей хода  $\Delta$ . В результате в фокальной плоскости собирающей линзы возникнет система интерференционных полос, из которых каждая соответствует определенному значению  $i_1$ , т. е. является полосой равного наклона.

Пластинки интерферометра Жамена делаются толстыми, чтобы лучи 1 и 2 между ними были широко разделены. Это позволяет ввести в пучки кюветы, закрытые с обоих концов

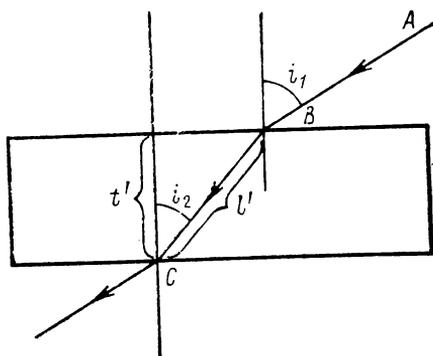


Рис. 112. Прохождение луча через плоскопараллельную пластинку.

одинаковыми плоскопараллельными окошками. Кюветы заполняются исследуемыми газами или жидкостями с коэффициентами преломления  $n_1$  и  $n_2$  и, как и в случае интерферометра Рэля, вводят добавочную разность хода  $\delta = (n_1 - n_2)l$ . Определив по сдвигу полос  $\delta$ , можно найти  $n_1 - n_2$ .

Для измерения  $\delta$  используется также метод компенсации. Наиболее простой прием компенса-

ции разности хода — это компенсация с помощью плоскопараллельной пластинки.

Рассмотрим прохождение луча  $AB$  (рис. 112) через плоскопараллельную пластинку толщиной  $t'$ , сделанную из материала с коэффициентом преломления  $n$ . Пусть угол падения равен  $i_1$ , а угол преломления  $i_2$ . После прохождения через пластинку луч выйдет в направлении, параллельном его первоначальному направлению  $AB$ . Длина пути луча в пластинке  $l'$  равна

$$l' = \frac{t'}{\cos i_2} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \sin^2 i_2}}.$$

Воспользовавшись законом преломления  $\sin i_1 = n \sin i_2$  (полагаем, что вне пластинки воздух с коэффициентом преломления единица), перепишем это выражение в виде

$$l' = \frac{nt'}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}.$$

Оптическая длина пути в пластинке равна  $nl'$  и, следовательно, зависит от угла падения  $i_1$ . Введя в оба луча интерферометра 1 и 2 одинаковые пластинки, внесем добавочную разность хода  $\delta' = n(l' - l'')$ , которая будет зависеть от того, какие углы падения  $i_1$  и  $i_1'$  образуют лучи, проходящие через каждую из пластинок.

Удобство интерферометра Жамена по сравнению с интерферометром Рэля заключается в том, что в нем лучи 1 и 2 могут быть сильнее раздвинуты друг относительно друга. Однако это требует применения толстых пластинок  $ABB'A'$  и  $CDD'C'$ , что также имеет свои недостатки: во-первых, для толстых пла-

стинок трудно достичь необходимой однородности коэффициентов преломления и высокого качества обработки поверхностей; во-вторых, если первоначальные качества пластинок достаточно высоки, то они легко нарушаются для толстых пластинок из-за температурных неоднородностей.

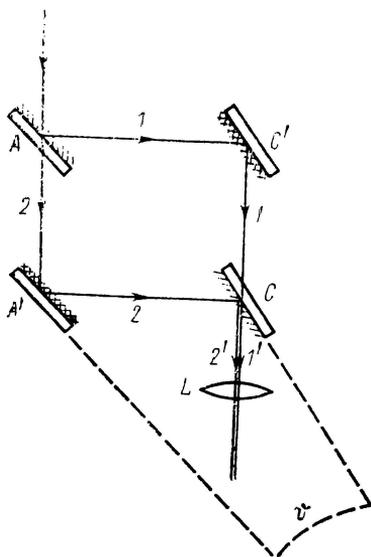


Рис. 113. Интерферометр Рождественского.

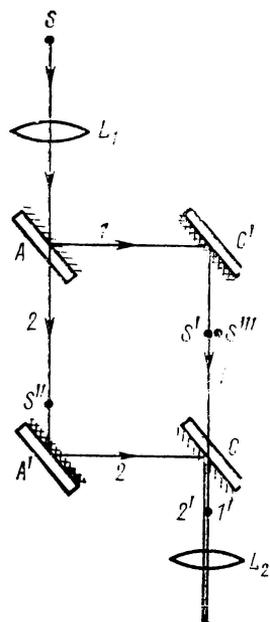


Рис. 114. Интерферометр Маха — Цендера.

**Интерферометры Рождественского и Маха — Цендера.** Интерферометр Д. С. Рождественского построен по той же схеме, что и интерферометр Жамена, но отражающие поверхности  $AB$  и  $CD$  заменены в нем полуотражающими плоскопараллельными пластинами  $A$  и  $C$ , а поверхности  $A'B'$  и  $C'D'$  — сплошными плоскими зеркалами  $A'$  и  $C'$  (рис. 113). Это позволяет сильно раздвинуть пучки  $1$  и  $2$ . Кроме того, для осуществления интерферометра не требуется больших плоскопараллельных пластин. В интерферометре Рождественского пластины  $A$ ,  $A'$  и  $C$ ,  $C'$  установлены попарно на общих металлических основах, что делает интерферометр весьма стабильным. Пластины  $A$  и  $A'$  и соответственно пластины  $C'$  и  $C$  установлены строго параллельно друг другу, плоскости же, в которых лежат пластины  $A$ ,  $C'$  и  $A'$ ,  $C$ , составляют малый угол  $\phi$ . При освещении интерферометра слабо расходящимся пучком света наблюдаются интерференционные полосы равного наклона в главной фокальной плоскости линзы  $L$ , собирающей лучи  $1'$  и  $2'$ . Если оптические длины своих плеч интерферометра одинаковы, то

центральной светлой полосе соответствует разность хода  $\Delta=0$ ; по обе стороны от нее располагаются полосы порядка  $k=\pm 1, \pm 2, \dots$

Внесение кювет с разными веществами в обе ветви интерферометра позволяет измерять разность коэффициентов преломления  $n_1-n_2$ , так же как это делается с помощью интерферометра Рэлея или Жамена. Широкое разведение пучков *I* и *2* представляет существенное удобство, так как не ограничивает размеров кювет, позволяет вводить кюветы, окруженные печами (для исследования паров металлов) и т. д. О применении интерферометра Рождественского для изучения аномальной дисперсии будет сказано в § 25.

Интерферометр Маха — Цендера совпадает по схеме с интерферометром Рождественского, но в нем параллельны друг другу соответственно пластины *A*, *C* и *A'*, *C'* (рис. 114). Линза  $L_1$  фокусируется таким образом, что изображения  $S'$  и  $S''$  источника *S* образуются в ветви интерферометра *I* между зеркалами  $C'$  и *C*, а в ветви *2* — между зеркалами *A* и  $A'$ . При наблюдении лучей, идущих за зеркалом *C*, лучи, распространяющиеся от источника  $S''$ , дважды поворачиваются, в результате чего его мнимое изображение  $S'''$  наложится на  $S'$ . Но поскольку зеркала *A* и  $A'$  несколько скошены, изображение  $S'''$  будет немного повернуто относительно  $S'$ . Оба изображения  $S'$  и  $S'''$  возникают от одного источника *S*, поэтому они когерентны и поведут к возникновению интерференционных полос равной толщины. Эти полосы могут наблюдаться с помощью линзы  $L_2$  в плоскости, сопряженной с плоскостью  $S'S'''$ .

Указанная схема юстировки интерферометра позволяет наблюдать и измерять локальные неоднородности в прозрачных объектах, расположенных в плоскости  $S'S'''$ . Изменение коэффициента преломления в таком объекте вызовет добавочную разность хода  $\delta$ , что поведет к изгибу полос равной толщины. Например, при расположении в плоскости  $S'S'''$  пламени легко обнаруживать происходящие в нем изменения коэффициента преломления за счет изменения состава горящих газов и их температуры. При продувании струи газа можно судить о происходящих в ней изменениях давления благодаря зависимости коэффициента преломления газов от их плотности. Этот последний прием находит применение при решении различных задач аэродинамики.

**Интерферометр Майкельсона.** Схема этого интерферометра представлена на рис. 115. Свет от источника *S* проходит через линзу  $L_1$  и распространяется далее в виде параллельного пучка. Попадая на плоскопараллельную стеклянную пластину  $C_1$ , передняя поверхность которой покрыта полупрозрачным зеркальным слоем, пучок разделяется на два взаимно перпендикулярных пучка *I* и *II*. Пучок *I* падает нормально на плоское неподвижное зеркало  $M_1$ , отражается от него обратно и снова

разделяется полупрозрачным зеркалом  $C_1$  на две части, одна из которых попадает на линзу  $L_2$ , а вторая направляется обратно к источнику  $S$  и в дальнейшем не представляет интереса. Пучок  $II$  падает нормально на плоское зеркало  $M_{II}$ . С помощью салазок и винта это зеркало может передвигаться вдоль направления пучка, оставаясь параллельным самому себе. Отражаясь от зеркала  $M_{II}$ , пучок идет обратно и снова разделяется полупрозрачным зеркалом  $C_1$  на две части, из которых одна, идущая к  $S$ , опять не представляет интереса. Вторая часть пучка падает на линзу  $L_2$  и интерферирует с первым пучком.

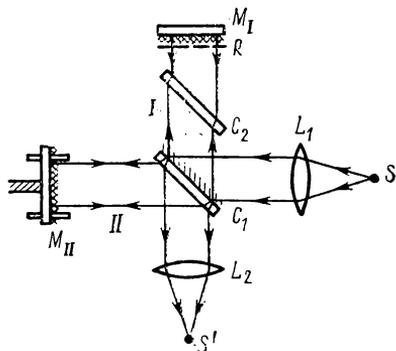


Рис. 115. Интерферометр Майкельсона.

Легко видеть, что пучок  $I$  проходит толщину пластинки  $C_1$  один раз (при условии, что отраженный слой нанесен на ее поверхность, обращенную к  $S$ ), а пучок  $II$  — три раза. Чтобы компенсировать возникающую благодаря этому разность хода на пути пучка  $I$ , вводится вторая плоскопараллельная прозрачная пластинка  $C_2$  такой же толщины, как и пластинка  $C_1$ . В этом случае разность хода между пучками, падающими на линзу  $L_2$ , определяется лишь положением зеркал  $M_I$  и  $M_{II}$ . Пластинка  $C_1$  носит название разделительной, пластинка  $C_2$  — компенсирующей.

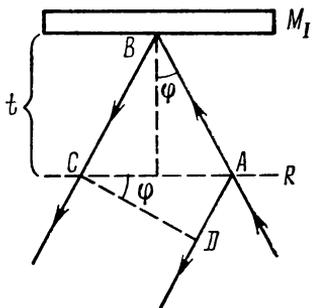


Рис. 116. К подсчету разности хода между лучами, отраженными от двух параллельных поверхностей.

С помощью интерферометра Майкельсона можно наблюдать как полосы равного наклона, так и полосы равной толщины. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим изображение  $R$  зеркала  $M_{II}$  в полупрозрачной пластинке  $C_1$ . Очевидно, интерференционная картина, наблюдаемая за линзой  $L_2$ , эквивалентна интерференционной картине, которая возникла бы при отражении света от двух плоскостей  $R$  и  $M_I$ . Если плоскости  $R$  и  $M_I$  установлены строго параллельно друг другу и употребляется широкий источник

света, то возникают кривые равного наклона, которые наблюдаются в главной фокальной плоскости линзы  $L_2$ .

Если зеркала  $M_I$  и  $M_{II}$  составляют угол, несколько отличный от  $\pi/2$ , то плоскости  $R$  и  $M_I$  будут образовывать клин и в фокальной плоскости линзы  $L_2$ , сопряженной с поверхностью

$R$ , возникнут интерференционные полосы равной толщины. Угловые размеры источника света  $S$  при этом необходимо уменьшить в соответствии с требованием пространственной когерентности (§ 22).

Рассмотрим возникновение интерференционных полос равного наклона несколько подробнее. Обозначим расстояние между зеркалом  $M_I$  и плоскостью  $R$  через  $t$  (рис. 116). Это расстояние может меняться путем передвижения зеркала  $M_{II}$ . Если угол падения света на зеркало  $M_{II}$  равен  $\varphi$ , то разность хода между обоими пучками (коэффициент преломления воздуха считаем равным единице)

$$\Delta = ABC - AD = \frac{2t}{\cos \varphi} - AC \sin \varphi$$

или, так как

$$AC = 2AB \sin \varphi = 2t \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$\text{то } \Delta = \frac{2t}{\cos \varphi} - \frac{2t \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = \frac{2t(1 - \sin^2 \varphi)}{\cos \varphi},$$

$$\text{или } \Delta = 2t \cos \varphi. \quad (24.6)$$

• Возникновение максимумов определяется условием

$$\Delta = 2t \cos \varphi = k\lambda, \quad (24.7)$$

где  $k$  — целое число. Интерференционная картина имеет вид концентрических светлых и темных колец с радиальным распределением освещенности

$$E = E_0 \cos^2 \frac{\pi \Delta}{\lambda}.$$

Угловой диаметр светлых колец  $\theta = 2\varphi$  определяется по (24.7) равенством

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{k\lambda}{2t}.$$

При малых  $\varphi$ , что практически всегда имеет место, заменяя приближенно  $\cos \theta/2$  через  $1 - \theta^2/8$ , получим

$$\theta = 2 \sqrt{\frac{2t - k\lambda}{t}}. \quad (24.8)$$

При увеличении расстояния  $t$  угловой диаметр колец уменьшается. Если  $2t = k\lambda$ , то в центре картины получается светлое пятно.

Интерферометр Майкельсона обладает большой универсальностью и пригоден для решения многих задач. Его особенностями по сравнению с интерферометрами другого типа являются

ся: разделение пучка света на два взаимно перпендикулярных пучка; возможность путем перемещения зеркала  $M_{II}$  сильно менять разность хода между пучками. Это обстоятельство необходимо для выполнения работ по сравнению длины световой волны с концевой или штриховой мерой (§ 2). Однако недостатком интерферометра Майкельсона является его механическая нестабильность и подверженность влиянию температурных неоднородностей. Для решения ряда частных задач предложены различные варианты интерферометра Майкельсона.

Одним из таких вариантов является интерферометр Тваймана (рис. 117), в котором зеркало  $M_{II}$  заменено сферически выпуклым зеркалом  $M$ . Он предназначен для исследования качества объективов (линз). Объектив  $O$  вводится в пучок  $II$  таким образом, чтобы его главный фокус  $F$  совпадал с центром кривизны выпуклого зеркала  $C$ . Параллельный пучок лучей  $II$ , пройдя через объектив и отразившись от выпуклого зеркала, проходит через объектив вторично и снова делается параллельным. Если у объектива полностью отсутствуют aberrации, то пучки света из обеих ветвей интерферометра, интерферируя в фокальной плоскости линзы  $L_2$ , дают равномерно освещенное поле. При наличии aberrаций объектив вносит добавочную разность хода и в поле зрения возникают интерференционные максимумы и минимумы. Например, сферическая aberrация поведет к появлению колец. Этот метод позволяет обнаруживать не только дефекты в изготовлении поверхностей линз, но и недостатки, вызванные неоднородностями в стекле.

Другой вариант интерферометра Майкельсона, на который мы укажем, это вариант, предназначенный для изучения дисперсии вещества, в частности аномальной дисперсии (§ 25). Путем введения дополнительного плоского зеркала  $C_3$  (см. ниже рис. 122) пучок  $I$  поворачивается на прямой угол. Благодаря этому оба пучка  $I$  и  $II$  идут в дальнейшем параллельно друг другу. Зеркала  $M_I$  и  $M_{II}$  оказываются расположенными относительно близко, что позволяет их крепить, как и в интерферометре Рождественского, на одной металлической основе. Это значительно повышает стабильность интерферометра по сравнению с классической моделью Майкельсона. Кюветы, введенные в ветви интерферометра, преходятся светом дважды, что увеличивает вносимую ими разность хода.

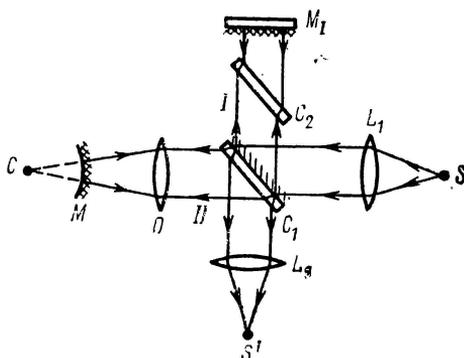


Рис. 117. Интерферометр Тваймана.

## § 25. Интерференционные методы изучения аномальной дисперсии

Как известно, аномальной дисперсией называется зависимость коэффициента преломления  $n$  от частоты  $\nu$  (или длины волны  $\lambda$ ) в области расположения интенсивных полос поглощения. Мы ограничимся частным случаем наличия ряда очень узких линий поглощения с частотами  $\nu_{ik}$ , в промежутках между которыми среда практически полностью прозрачна. Примерами такой среды могут служить разреженные одноатомные пары металлов, спектры поглощения которых состоят из отдельных резких линий поглощения.

По теории дисперсии зависимость  $n$  от частоты  $\nu$  для такой среды определяется формулой Зеллмейера

$$n^2 - 1 = \frac{e^2}{\pi m} \sum_i \frac{f_{ik} N_i}{\nu_{ik}^2 - \nu^2}, \quad (25.1)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона;  $N_i$  — число поглощающих атомов в единице объема;  $f_{ik}$  — так называемая сила осциллятора, соответствующая линии поглощения  $\nu_{ik}$ . При наличии лишь одной линии поглощения, при  $n$  близком к единице, переходя к длинам волн, приближенно получаем

$$n - 1 = \frac{a_{ik} \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{ik}^2}, \quad (25.2)$$

$$a_{ik} = \frac{e^2 \lambda_{ik}^2 f_{ik} N_i}{2\pi m c^2}, \quad (25.3)$$

где  $c$  — скорость света в пустоте. Графически зависимость  $n-1$  от  $\lambda$  вблизи линии поглощения  $\lambda_{ik}$  представлена на рис. 118. Как видно,  $n-1$  принимает вблизи линии поглощения со стороны меньших длин волн отрицательные значения, а со стороны больших — положительные.

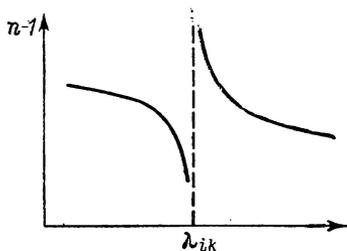


Рис. 118. Зависимость коэффициента преломления от длины волны вблизи линии поглощения.

Первоначальные работы по аномальной дисперсии сводились к проверке выполнимости теоретической формулы Зеллмейера. Но затем они приобрели другой смысл: измеряя зависимость  $n-1$  от  $\lambda$ , можно по формулам (25.2) и (25.3) найти произведение  $f_{ik} N_i$ ; если известно число поглощающих атомов, то отсюда находится сила осциллятора

$f_{ik}$ , являющаяся одной из атомных констант. По квантовой теории атомов  $f_{ik}$  непосредственно связана с вероятностью  $A_{ki}$

спонтанного перехода атома из состояния  $k$  в состояние  $i$

$$f_{ik} = \frac{g_k}{g_i} \frac{mc^3}{8\pi^2 e^2 \nu_{ki}^2} A_{ki},$$

где  $g_i$  и  $g_k$  — статистические веса  $i$ -го и  $k$ -го состояний атома. Таким образом, изучение аномальной дисперсии дает метод нахождения важных атомных констант  $f_{ik}$  и  $A_{ki}$ . Если заранее известно  $f_{ik}$ , то, измерив  $f_{ik}N_i$ , можно определить концентрацию поглощающих атомов  $N_i$ .

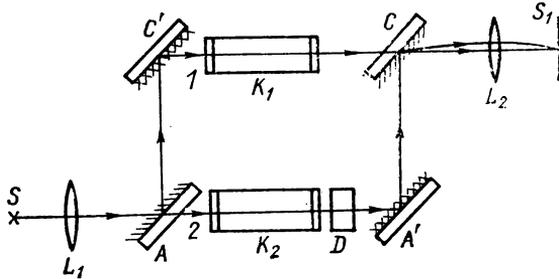


Рис. 119. Установка Рождественского для наблюдения аномальной дисперсии.

Поскольку для разреженных паров и газов  $n$  мало отличается от единицы, для измерения требуется применение одного из интерференционных методов. При этом необходимо одновременно точно знать длину волны  $\lambda$ , для которой измеряется  $n$ . Чувствительность и точность измерений будет тем больше, чем ближе к линии поглощения  $\lambda_{ik}$  производятся измерения. Наиболее полно такая методика была разработана Д. С. Рождественским, который использовал установку со скрещенными спектрографом и созданным им интерферометром, схема которого приведена в предыдущем параграфе.

В обе ветви интерферометра вводятся одинаковые кюветы  $K_1$  и  $K_2$  (рис. 119). В одной из них, например  $K_1$ , находится исследуемый металл. Кювета может нагреваться электрической печью до темпе-

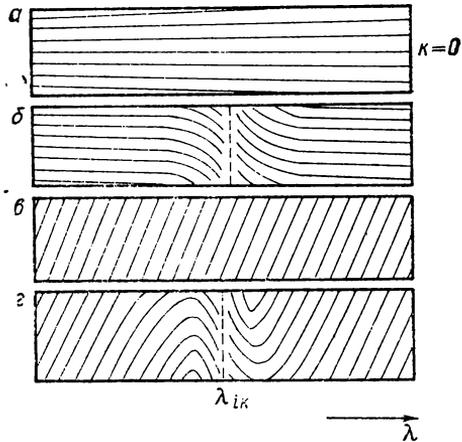


Рис. 120. Возникновение крюков.

ратуры, достаточной для того, чтобы получать пары металла необходимой плотности. Вторая кювета откачивается. Через интерферометр пропускается свет от источника сплошного спектра  $S$ . Возникшая интерференционная картина проецируется с помощью линзы  $L_2$  на щель спектрографа  $S_1$ . Интерферометр юстируется так, чтобы интерференционные максимумы и минимумы имели вид полос, перпендикулярных к длине щели. Предположим, что сперва кювета  $K_1$  не нагрета, в ней отсутствуют пары и она не вносит добавочной разности хода. Тогда при равенстве длин плеч интерферометра среди полос есть нулевая. Ее положение не зависит от длины волны и поэтому в сплошном спектре, даваемом спектрографом, ей соответствует горизонтальная светлая полоса, тянущаяся вдоль всего спектра. Максимумы же, соответствующие  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , расположатся для разных длин волн падающего света на разных высотах щели. Им отвечают в сплошном спектре светлые полосы, расположенные выше и ниже нулевой полосы и расходящиеся веером от синей к красной области спектра (рис. 120, а).

Если нагреть кювету  $K_1$  настолько, чтобы в ней появился столб паров металла, то возникнет добавочная разность хода и интерференционные полосы сместятся. Для учета их смещения введем координату  $y$ , отсчитанную вдоль щели. Изменение фазы колебаний в волновом фронте, достигающем плоскости щели, пропорционально координате  $y$ . Следовательно, для максимумов интерференционных полос  $k$ -го порядка при отсутствии диспергирующих паров можно написать

$$by_k = k\lambda, \quad (25.4)$$

где  $b$  — константа, определяемая геометрией установки. При наличии паров в кювете  $K_1$  будет введена добавочная разность хода  $(n-1)l$ , где  $n$  — коэффициент преломления паров,  $l$  — длина кюветы. Уравнение (25.4) примет вид

$$by_k - (n-1)l = k\lambda. \quad (25.5)$$

Из сравнения выражений (25.4) и (25.5) видно, что смещение интерференционных полос пропорционально  $(n-1)l$ . Следовательно, оно воспроизводит на спектрограмме ход дисперсии в парах металла с ее характерными особенностями вблизи линии поглощения (рис. 120, б). Измеряя координаты кривой  $y_k$  и  $\lambda$ , можно по (25.5) определить  $n-1$  и проверить выполнимость формулы Зеллмейера. Этот способ был одновременно с Рождественским предложен итальянским физиком Пуччианти и носит название метода Пуччианти — Рождественского. Однако он мало пригоден для получения точных количественных данных, так как измерение положения точек на круто восходящей или ниспадающей части интерференционной кривой свя-

зано с большими погрешностями. В связи с этим Рождественский подверг метод изменению, позволяющему выделить на интерференционной кривой две хорошо фиксированные точки, расположенные по обе стороны от линии поглощения.

В новом методе Рождественского, получившем название метода крюков, во вторую ветвь интерферометра вводится плоскопараллельная стеклянная пластинка  $D$  определенной толщины  $l'$  (см. рис. 119). При отсутствии паров в кювете  $K_1$  это повело бы к большой добавочной разности хода  $(n'-1)l'$ , где  $n'$  — коэффициент преломления пластинки. В соответствии с этим возникли бы наклонные интерференционные полосы высоких порядков  $k$  (рис. 120,  $\theta$ ). При одновременном действии паров и стеклянной пластинки смещение полос определится алгебраической суммой смещений, вызванных парами и пластинкой в отдельности. Вблизи линии поглощения, где по формуле Зеллмейера  $|n-1|$  делается очень большим, преобладает наклон, вызванный дисперсией паров, а вдали от нее — обусловленный разностью хода, вносимой стеклянной пластинкой. В результате полосы образуют максимумы и минимумы, своеобразно изогнувшись (рис. 120,  $\varepsilon$ ). Эти изгибы Рождественский назвал крюками.

Рассчитаем положение крюков. Стеклянная пластинка  $D$  внесет, как было сказано, добавочную разность хода  $(n'-1)l'$ , но другого знака, чем разность хода, вносимая парами в кювете, так как она расположена в другом плече интерферометра. Поэтому уравнение (25.5) теперь заменится уравнением

$$by_k - (n-1)l + (n'-1)l' = k\lambda. \quad (25.6)$$

Условие образования максимумов определяется равенством нулю производной от  $y_k$  по  $\lambda$

$$\frac{\partial y_k}{\partial \lambda} = 0. \quad (25.7)$$

Дифференцируя (25.6) по  $\lambda$ , получим

$$\frac{\partial y_k}{\partial \lambda} - l \frac{\partial (n-1)}{\partial \lambda} + l' \frac{\partial (n'-1)}{\partial \lambda} = k. \quad (25.8)$$

Вблизи линии поглощения коэффициент преломления паров  $n$  меняется с длиной волны очень быстро, в то время как для стекла во всей области спектра, где стекло прозрачно,  $n'$  меняется медленно, поэтому

$$\frac{\partial (n-1)}{\partial \lambda} \gg \frac{\partial (n'-1)}{\partial \lambda},$$

и из (25.7) и (25.6) приближенно получим

$$\frac{\partial (n-1)}{\partial \lambda} = -\frac{k}{l}. \quad (25.9)$$

Вблизи линии поглощения  $\lambda$  мало отличается от  $\lambda_{ik}$ , поэтому  $\lambda^2 - \lambda_{ik}^2 \cong 2\lambda(\lambda - \lambda_{ik})$  и формула Зеллмейера (25.2) приближенно принимает вид

$$n - 1 = \frac{1}{2} \frac{a_{ik}\lambda_{ik}}{\lambda - \lambda_{ik}}, \quad (25.10)$$

откуда для  $\partial(n-1)/\partial\lambda$  получаем

$$\frac{\partial(n-1)}{\partial\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{a_{ik}\lambda_{ik}}{(\lambda - \lambda_{ik})^2}.$$

Сравнивая это выражение с (25.9), найдем

$$\frac{1}{2} \frac{a_{ik}\lambda_{ik}}{(\lambda - \lambda_{ik})^2} = \frac{k}{l}.$$

Решения этого уравнения относительно  $\lambda$  дают те значения  $\lambda$ , для которых  $\partial y_k / \partial \lambda = 0$ , т. е. те длины волн, которым соответствуют крюки

$$\lambda = \lambda_{ik} \pm \sqrt{\frac{a_{ik}\lambda_{ik} l}{2k}}. \quad (25.11)$$

Расстояние между крюками, выраженное через длины волн по (25.10), равно

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \sqrt{\frac{a_{ik}\lambda_{ik} l}{2k}}. \quad (25.12)$$

Формула (25.12) позволяет по измеренной разности длин волн  $\lambda_1 - \lambda_2$  определить величину  $a_{ik}$ , входящую в формулу Зеллмейера. Отсюда, как было сказано в начале параграфа, может быть найдена сила осцилляторов  $f_{ik}$  или вероятность перехода  $A_{ki}$ .

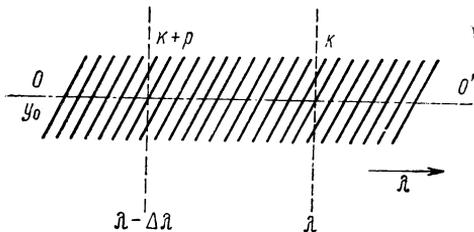


Рис. 121. К определению порядка интерференции  $k$ .

В формулу (25.11) входит порядок интерференции  $k$ . Его можно найти, воспользовавшись снимком, сделанным при отсутствии паров в кювете

$K_1$ . В этом случае на спектрограмме получаются наклонные интерференционные полосы, изображенные на рис. 120, в, а также в более крупном масштабе на рис. 121. Фиксируем на спектрограмме горизонтальную прямую  $OO'$ , соответствующую определенному значению координаты  $y_0$ . Пусть некоторая полоса порядка  $k$  пересекает эту прямую в точке с длиной волны  $\lambda_k$ . Для нее уравнение (25.6) примет вид

$$b y_0 + (n' - 1) l' = k \lambda_k. \quad (25.12a)$$

Отсчитаем в сторону возрастания порядка интерференции  $p$  полос и фиксируем  $(k+p)$ -ю полосу. Пусть она пересекает прямую  $OO'$  в точке с длиной волны  $\lambda_{k+p} = \lambda_k - \Delta\lambda$ . Тогда для нее будет иметь место уравнение

$$by_0 + (n' - 1)l' = (k + p)(\lambda_k - \Delta\lambda). \quad (25.13)$$

Вычитая уравнение (25.12) и (25.13) почленно друг из друга, найдем

$$(k + p)(\lambda_k - \Delta\lambda) = k\lambda_k,$$

$$\text{откуда } k = \frac{p\lambda_k}{\Delta\lambda}. \quad (25.14)$$

Поскольку  $\lambda_k$  и  $\Delta\lambda$  получаются из промера спектрограммы, а  $p$  находится простым отсчетом числа полос, равенство (25.14) позволяет определить искомый порядок интерференции  $k$ .

Другой вариант интерференционного метода измерения аномальной дисперсии разработан в ЛГУ. В нем используется интерферометр Майкельсона с добавочным зеркалом, изображенный на рис. 122. Основное отличие этого метода от метода крюков Рождественского заключается в том, что применяется неравноплечий интерферометр, который в монохроматическом свете настраивается на полосы равного наклона. Центральное пятно интерференционной картины проецируется на щель спектрографа. Затем монохроматический источник заменяется на источник сплошного спектра. На рис. 122  $S$  — источник сплошного спектра,  $K_I$ ,  $K_{II}$  — кюветы одинаковой длины  $l$ , введенные в обе ветви интерферометра. Сплошной спектр, даваемый спектрографом, в этом случае прочерчен почти вертикальными интерференционными полосами. При отсутствии диспергирующих паров в кювете  $K_I$  и достаточно высоком порядке интерференции  $k$  полосы на ограниченном участке спектра практически эквидистантны. При награвании кюветы  $K_I$  в ней появляются пары и возникает добавочная разность хода, которая ведет к сдвигу интерференционных полос. Чем ближе полоса к линии поглощения, тем сильнее ее сдвиг.

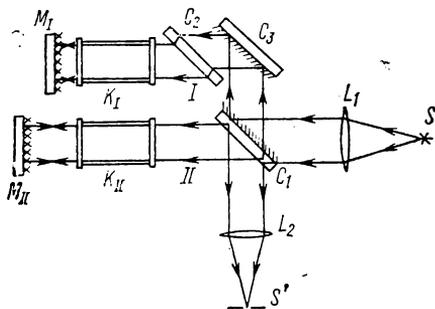


Рис. 122. Схема установки с интерферометром Майкельсона с добавочным зеркалом  $C_3$ .

Метод допускает как фотографическую, так и фотоэлектрическую регистрацию. Для фотоэлектрической регистрации (или регистрации с помощью теплового или иного приемника излу-

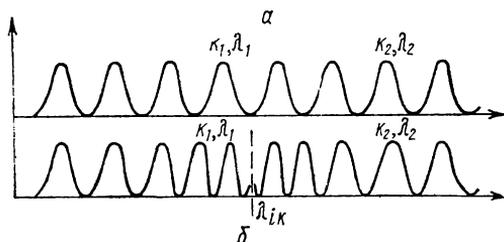


Рис. 123. Положение интерференционных максимумов.

чения) спектрограф снабжается узкой выходной щелью. При медленном поворачивании диспергирующей системы спектрографа (призмы, дифракционной решетки) интерференционные полосы проходят одна за другой мимо выходной щели и могут быть последовательно зарегистрированы. На рис. 123, *a* приведен вид регистраграммы при отсутствии паров в кювете  $K_I$ , а на рис. 123, *б* — при наличии паров, причем предполагается, что кювета  $K_I$  помещена в более длинную ветвь интерферометра. Расстояние  $\Delta\lambda$  между соседними интерференционными полосами убывает по мере приближения к линии поглощения.

Если кювета  $K_I$  с исследуемым паром введена в длинную ветвь интерферометра, а кювета  $K_{II}$  откачана, то условие образования максимумов запишется в виде

$$2\Delta d + 2(n-1)l = k\lambda, \quad (25.15)$$

где  $\Delta d$  — разность длин ветвей интерферометра. Множитель 2 в левой части уравнения обусловлен тем, что свет дважды проходит вдоль каждой ветви интерферометра.

Напишем такие уравнения для двух разных порядков интерференции  $k_1$  и  $k_2$  и почленно вычтем их друг из друга, тогда получим

$$2(n_1 - n_2)l = k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2, \quad (25.16)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — длины волн, соответствующие максимумам  $k_1$ -го и  $k_2$ -го порядков, а  $n_1$  и  $n_2$  — соответствующие им коэффициенты преломления паров в кювете  $K_I$ .

Вблизи линии поглощения  $n_1$  и  $n_2$  выражаются формулой Зеллмейера (25.10). Подставляя в (25.16) их значения, даваемые этой формулой, найдем

$$a_{ik}l \left( \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_1 - \lambda_{ik}} - \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_2 - \lambda_{ik}} \right) = k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2,$$

откуда для константы  $a_{ik}$  получим

$$a_{ik} = \frac{1}{l} \frac{(k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_{ik}) (\lambda_2 - \lambda_{ik})}{\lambda_{ik} (\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (25.17)$$

Порядок интерференции  $k_1$  находится так же, как и в методе Рождественского по промеру спектрограммы, полученной при отсутствии паров в кювете  $K_1$ . Порядок  $k_2 = k_1 + p$ , где  $p$  — число интерференционных максимумов, входящих на интервал длин волн от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$  (рис. 123, а). Таким образом, все величины, входящие в формулу (25.17), определимы; она позволяет найти значение  $a_{ik}$ ; по этому последнему находится значение произведения  $\int_{ik} N_i$ .

Поскольку на регистрограмме зафиксирован целый ряд интерференционных максимумов, промеры могут быть выполнены для ряда пар значений  $k_1$  и  $k_2$  и результаты обработаны по методу наименьших квадратов, что повысит их точность.

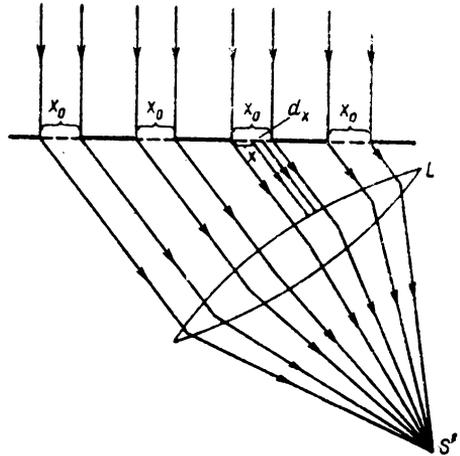


Рис. 124. Интерференция  $N$  когерентных пучков.

Рассмотрим  $N$  параллельных когерентных пучков, проходящих через отверстия шириной  $x_0$  и интерферирующих в главной фокальной плоскости линзы  $L$  (рис. 124). Разность оптических длин путей между лучами двух соседних пучков положим равной  $\Delta$ . Амплитуды колебаний в пучках пусть убывают от пучка к пучку в одинаковой пропорции, так что для последовательного ряда пучков можно записать:

	Первый пучок	Второй пучок	Третий пучок	$k$ -й пучок
Амплитуда	$a_0$	$a_0 x$	$a_0 x^2$	$a_0 x^{k-1}$
Разность хода	0	$\Delta$	$2\Delta$	$(k-1)\Delta$

Величина  $x \leq 1$ . Элементарное колебание в луче, исходящем от элемента  $dx$   $k$ -го пучка с координатой  $x$  (отсчитанной от левого края пучка) запишем в виде

$$dS_k = a_0 x^{k-1} e^{2\pi i \left( vt + \frac{cx + (k-1)\Delta}{\lambda} \right)} dx, \quad (26.1)$$

где  $cx$  — разность хода между рассматриваемым лучом и крайним лучом пучка. Суммарное колебание от всех  $N$  пучков в

фокальной плоскости линзы  $L$  получим, проинтегрировав выражение (26.1) по ширине щели  $x_0$  и просуммировав с учетом фаз по всем пучкам

$$S = \sum_{k=1}^N \int_0^{x_0} a_0 x^{k-1} e^{2\pi i \left( vt + \frac{cx + (k-1)\Delta}{\lambda} \right)} dx = \\ = a_0 e^{2\pi i vt} \int_0^{x_0} e^{2\pi i \frac{cx}{\lambda}} dx \sum_{k=1}^N x^{k-1} e^{2\pi i \frac{(k-1)\Delta}{\lambda}}. \quad (26.2)$$

Введем обозначения

$$u = \pi \frac{cx_0}{\lambda}, \quad v = \pi \frac{\Delta}{\lambda}, \quad (26.3)$$

тогда для интеграла и для суммы, стоящих в (26.2), получим

$$\int_0^{x_0} e^{2\pi i \frac{cx}{\lambda}} dx = \frac{\lambda}{2\pi ic} \left( e^{2\pi i \frac{cx_0}{\lambda}} - 1 \right) = x_0 \frac{e^{2iu} - 1}{2iu}, \\ \sum_{k=1}^N x^{k-1} e^{2\pi i \frac{(k-1)\Delta}{\lambda}} = \sum_{k=1}^N x^{k-1} e^{2i(k-1)v} = \frac{x^N e^{2iNv} - 1}{x e^{2iv} - 1}.$$

Подставляя эти значения интеграла и суммы в (26.2), найдем

$$S = a_0 x_0 \frac{e^{2iu} - 1}{2iu} \frac{x^N e^{2iNv} - 1}{x e^{2iv} - 1} e^{2\pi i vt}.$$

Освещенность в фокальной плоскости линзы  $L$  будет пропорциональна  $SS^*$

$$E = (a_0 x_0)^2 \frac{(e^{2iu} - 1)(e^{-2iu} - 1)}{4u^2} \frac{(x^N e^{2iNv} - 1)(x^N e^{-2iNv} - 1)}{(x e^{2iv} - 1)(x e^{-2iv} - 1)} = \\ = (a_0 x_0)^2 \frac{2 - (e^{2iu} + e^{-2iu})}{4u^2} \frac{(1 - x^N)^2 + x^N [2 - (e^{2iNv} + e^{-2iNv})]}{(1 - x)^2 + x [2 - (e^{2iv} + e^{-2iv})]}$$

или, переходя к тригонометрическим функциям

$$E = (a_0 x_0)^2 \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{(1 - x^N)^2 + 4x^N \sin^2 Nv}{(1 - x)^2 + 4x \sin^2 v}. \quad (26.4)$$

Простейшим примером многолучевой интерференции является интерференция от ряда параллельных щелей одинаковой ширины. Пусть в непрозрачной пластинке имеется  $N$  параллельных друг другу щелей шириной  $x_0$ , разделенных непрозрачными полосами шириной  $x_1$  (рис. 125). Предположим, что на пластину нормально падает параллельный пучок когерентных лучей. Лучи, дифрагирующие от щелей, собираются линзой  $L$  и интерferируют в ее главной фокальной плоскости.

Обозначим через  $\varphi$  угол дифракции, тогда, как видно из рис. 125,

$$x_0 c = x_0 \sin \varphi, \quad \Delta = (x_0 + x_1) \sin \varphi = b \sin \varphi, \quad (26.5)$$

где  $b = x_0 + x_1$ . При однородности падающего на площадку света, амплитуды колебаний, исходящих от отдельных щелей, равны, т. е.  $\kappa = 1$ , и формула (26.4) принимает вид

$$E = \frac{E_0}{N^2} \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}, \quad (26.6)$$

где в соответствии с (26.3) и (26.5)

$$u = \pi \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda}, \quad v = \pi \frac{b \sin \varphi}{\lambda}, \quad (26.7)$$

и  $E_0$  — значение освещенности при  $u=0$  и  $v=0$ .

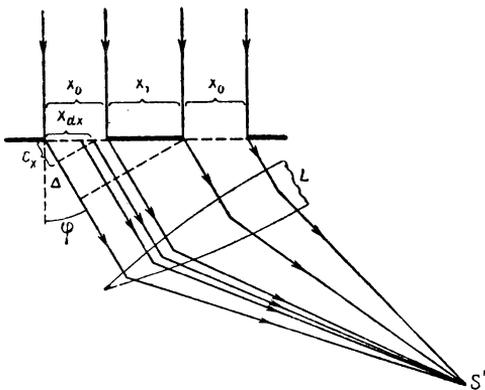


Рис. 125. Ряд параллельных щелей.

Для того чтобы выяснить распределение освещенности в главной фокальной плоскости линзы  $L$ , рассмотрим в отдельности поведение множителей

$$I' = \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad I'' = \left[ \frac{\sin Nv}{\sin v} \right]^2.$$

1. Вид функции  $I'$  был уже рассмотрен в § 20, из которого имеем следующее:

а.  $I'$  имеет максимум  $I'_{\max} = 1$  при  $u=0$  или в силу соотношений (26.7) при  $\varphi=0$ ;

б.  $I'$  имеет ряд эквидистантных минимумов  $I'_{\min} = 0$  при  $u = \pm k\pi$ , где  $k=1, 2, 3, \dots$ , учитывая (26.5), получим, что эти минимумы возникают при

$$\sin \varphi = \pm k \frac{\lambda}{x_0}, \quad (26.8)$$

при малых  $\varphi$  это соотношение может быть приближенно записано

$$\varphi = \pm k \frac{\lambda}{x_0}; \quad (26.9)$$

в.  $I'$  имеет ряд вторичных максимумов, лежащих приближенно при  $u = \pm (2k+1)\pi/2$ , т. е. приблизительно посредине между двумя соседними минимумами. Величина этих вторичных максимумов не превышает  $1/21$  от главного максимума.

2. Выясним вид зависимости  $I''$  от  $\varphi$ . Положение максимумов и минимумов определяется условием

$$\frac{d}{dv} \left( \frac{\sin Nv}{\sin v} \right) = 0.$$

Выполняя дифференцирование, имеем

$$\frac{N \cos Nv}{\sin v} - \frac{\sin Nv \cos v}{\sin^2 v} = 0,$$

$$\text{или } \frac{\sin Nv}{\sin v} \left[ N \frac{\cos Nv}{\sin Nv} - \frac{\cos v}{\sin v} \right] = 0,$$

$$\text{откуда либо } \sin Nv = 0, \quad (26.10)$$

$$\text{либо } \operatorname{tg}(Nv) - N \operatorname{tg} v = 0. \quad (26.11)$$

Легко проверить, что уравнение (26.10) определяет положение минимумов, уравнение (26.11) — максимумов. Максимумы могут быть разбиты на два типа — главные и вторичные.

а. Главные максимумы  $I''_{\max} = N^2$  соответствуют алгебраическим корням уравнения (26.11)

$$v = \pm k\pi$$

или по (26.5) при

$$\sin \varphi = \pm k \frac{\lambda}{b}, \quad (26.12)$$

где  $k=0, 1, 2, \dots$ . При малых  $\varphi$  приближенно равенство (26.12) заменяется равенством

$$\varphi = \pm k \frac{\lambda}{b}.$$

При  $\varphi=0$  условие максимума удовлетворяется для всех длин волн, при  $k=1, 2, 3, \dots$  положение максимумов зависит от длины волны. Эти максимумы расположены симметрично по обе стороны от центральной светлой полосы. При освещении щелей белым светом центральная полоса белая, остальные — окрашенные.

б. Минимумы  $I''_{\min} = 0$  по (26.10) лежат при

$$v = \pm k \frac{\pi}{N},$$

где  $k$  принимает значение целых чисел, кроме  $0, N, 2N, \dots$ . Переходя же по (26.5) от  $v$  к  $\varphi$ , получим, что минимумы лежат при

$$\sin \varphi = \pm k \frac{\lambda}{Nb}$$

и при малых  $\varphi$  при

$$\varphi = \pm k \frac{\lambda}{Nb}. \quad (26.13)$$

Как видно, минимумы расположены в  $N$  раз чаще, чем главные максимумы. Угловое расстояние  $\Delta\varphi$  между главными максимумами найдем, составив выражение

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = (k + 1) \frac{\lambda}{b}$$

и вычтя из него

$$\sin \varphi = k \frac{\lambda}{b}.$$

Тогда

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin \varphi = \lambda/b$$

$$\text{или } 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \cos \frac{2\varphi + \Delta\varphi}{2} = \frac{\lambda}{b}.$$

Принимая во внимание, что  $\Delta\varphi$  мало, приближенно получим

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{b \cos \varphi}. \quad (26.14)$$

Угловое расстояние между соседними минимумами равно

$$\delta\varphi = \frac{\Delta\varphi}{N} = \frac{\lambda}{Nb \cos \varphi}. \quad (26.15)$$

Этой же величине равно угловое расстояние между главным максимумом и ближайшим к нему минимумом.

в. Вторичные максимумы  $I''_{\min}$  лежат приблизительно посередине между двумя соседними минимумами, т. е. приблизительно при

$$v \cong \pm \frac{2k + 1}{2} \frac{\pi}{N}, \quad (26.16)$$

где  $k$  принимает значение целых чисел. Можно показать, что значения этих максимумов малы по сравнению со значениями

главных максимумов. В самом деле, при

$$\operatorname{tg} Nv = N \operatorname{tg} v$$

имеем

$$\sin Nv = N \operatorname{tg} v \cos Nv,$$

или  $\sin^2 Nv = N^2 \operatorname{tg}^2 v \cos^2 Nv = N^2 \operatorname{tg}^2 v (1 - \sin^2 Nv),$

откуда  $\sin^2 Nv = \frac{N^2 \operatorname{tg}^2 v}{1 + N^2 \operatorname{tg}^2 v} = \frac{N^2 \sin^2 v}{1 + (N^2 - 1) \sin^2 v}.$

В силу этого соотношения для вторичного максимума получим

$$I''_{\max} = \left( \frac{\sin Nv}{\sin v} \right)^2 = \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1) \sin^2 v}.$$

По формуле (26.16) ближайшие к главному максимуму вторичные максимумы лежат при

$$v = k\pi + \frac{3}{2} \frac{\pi}{N},$$

откуда в этих точках

$$I''_{\max} = \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1) \left( \frac{3}{2} \frac{\pi}{N} \right)^2} \cong \frac{1}{23} N^2.$$

Следующие вторичные максимумы меньше. Таким образом, вторичные максимумы не превышают 1/23 от главного максимума.

Резюмируя, можно сказать: положение главных максимумов по (26.12) определяется величиной  $b = x_0 + x_1$  и не зависит от числа щелей  $N$ . Между ними расположено  $N - 1$  минимумов, равных нулю, и  $N - 2$  — вторичных максимумов. Ближайшие к главному максимуму минимумы по (26.15) расположены тем ближе к нему, чем больше число щелей  $N$ . Большшему числу щелей соответствует большая острота главных максимумов. На рис. 126 представлен ход  $I''$  как функция  $\sin \varphi$  для случаев  $N = 2, 3, 4, 5$ .

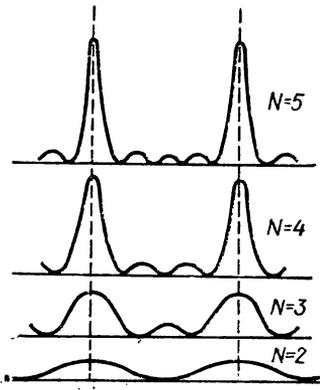


Рис. 126. Ход функции  $I''$  для  $N = 2, 3, 4, 5$ .

На ход кривой, даваемой множителем  $I''$ , по (26.6) накладывается ход кривой от первого множителя  $I' = (\sin u/u)^2$ . На рис. 127 представлено окончательное распределение освещенности в фокальной плоскости линзы  $L$  для  $N = 4$  для случая, когда в пределах главного максимума кривой  $I'$  укладывается пять главных ма-

ксимумов кривой  $I''$ . Вообще же в пределах главного максимума кривой  $I'$  уложатся по (26.8) и (26.12) все те главные максимумы кривой  $I''$ , для которых  $k$  удовлетворяет неравенству

$$k < \frac{b}{x_0}.$$

Таким образом, чем уже щели (малое  $x_0$ ) и чем больше расстояние между ними (большое  $x_1$ ), тем большее число главных максимумов  $I''_{\max}$  приходится на главный максимум кривой  $I'$ .



Рис. 127. Распределение освещенности в дифракционной картине от  $N$  щелей ( $N = 4$ ).

Освещенность в центральном максимуме ( $\varphi=0$ ) по (26.6) равна  $E_0$ . Освещенность в остальных главных максимумах получим, положив  $I''_{\max} = N^2$ ,  $u = \pi x_0 \sin \varphi / \lambda = \pm k \pi x_0 / b$ , тогда по (26.6)

$$E_k = \frac{E_0}{k^2} \left( \frac{b}{\pi x_0} \right)^2 \sin^2 \frac{k \pi x_0}{b}. \quad (26.17)$$

Если отношение  $x_0/b$  является рациональной дробью, то при  $k = k' x_0 / b$ , где  $k$  и  $k'$  — целые, освещенность  $E_k = 0$ . Другими словами, пропадают все те главные максимумы  $I''_{\max}$ , которые приходятся на равные нулю максимумы кривой  $I'$ .

Пластинки, действующие на принципе интерференции большого числа световых пучков, называются дифракционными решетками. Они используются как диспергирующие приспособления в спектральных приборах.

## § 27. Интерферометр Фабри—Перо

Интерферометр Фабри—Перо состоит из двух прозрачных пластин, поверхности  $A$  и  $B$  которых ограничивают плоскопараллельный слой воздуха толщиной  $t$  (рис. 128). Поверхности  $A$  и  $B$  покрыты зеркальным слоем, отчасти отражающим и отчасти пропускающим падающие на него лучи. Луч  $OO'$ , падающий на первую пластинку интерферометра, затем многократно отражается от зеркальных поверхностей  $A$  и  $B$  и образует ряд прошедших лучей 1, 2, 3... с постоянной разностью хода меж-

ду ними, которая по (24.6) равна

$$\Delta = 2t \cos \varphi. \quad (27.1)$$

Лучи  $1, 2, 3 \dots$  собираются линзой  $L$ , в главной фокальной плоскости которой они интерферируют. Одновременно с проходящими лучами возникает система отраженных лучей  $1', 2', 3', \dots$ , которая обычно не используется. Чтобы избежать бликов, возникающих от внешних, не покрытых зеркальным слоем поверхностей пластинок интерферометра, их несколько скашивают по отношению к поверхностям  $A$  и  $B$ . Уменьшение амплитуд в прошедших лучах  $1, 2, 3 \dots$  происходит тем медленнее, чем ближе коэффициент отражения зеркальных слоев к единице (см. подробнее на с. 165).

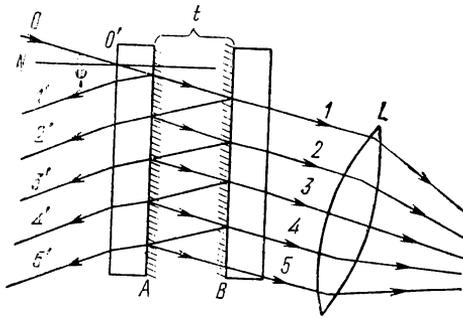


Рис. 128. Ход лучей в интерферометре Фабри — Перо.

В главной фокальности плоскости линзы, собирающей лучи  $1, 2, 3 \dots$ , возникают интерференционные полосы равного наклона, положение максимумов которых по (24.7) определяется условием

$$2t \cos \varphi = k\lambda, \quad (27.2)$$

где  $k$  — целое число. Полосы имеют вид колец, причем  $k$  убывает на единицу при переходе от кольца к кольцу, начиная от центра картины. При толщине воздушного слоя  $t=1$  см,  $\cos \varphi \cong 1$  и  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см, для  $k$  получаем

$$k = \frac{2t}{\lambda} = \frac{2}{5 \cdot 10^{-5}} = 40\,000.$$

Из этого примера видно, что в интерферометре Фабри — Перо мы имеем дело с интерференционными полосами весьма высоких порядков.

Интерферометры Фабри — Перо изготавливаются двух типов: с переменным расстоянием между пластинами и с постоянным. В первом случае одна из пластин укрепляется неподвижно, а вторая может передвигаться на салазках вдоль направляю-

щих. Тщательной полировкой достигается, что пластинка при передвижении остается параллельной самой себе. Система винтов позволяет менять наклон пластин и тем добиваться их строгой параллельности друг другу.

В случае неизменного расстояния  $t$  пластины прижимаются пружинами с двух сторон к кольцу определенной толщины. В таком виде прибор обыкновенно называется эталоном Фабри — Перо. Кольцо делается из материала с малым коэффициентом термического расширения — инвара или плавленого кварца. Пластины изготавливаются из стекла для работы в видимой части спектра и из кристаллического кварца для ультрафиолета. При этом для избежания двойного лучепреломления пластины вырезаются перпендикулярно к оптической оси.

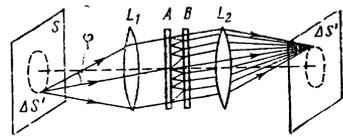


Рис. 129. Образование кривых равного наклона в интерферометре Фабри — Перо.

Возможно также изготовление интерферометра Фабри — Перо в виде плоскопараллельной прозрачной пластинки, на поверхности которой наносятся отражающие слои. Расстояние  $t$  в этом случае неизменно, а разность хода

$$\Delta = 2tn \cos \varphi,$$

где  $n$  — коэффициент преломления среды, из которой сделана пластинка.

Число возникающих интерферирующих лучков  $1, 2, 3 \dots$  зависит от размеров пластин и от угла  $\varphi$ . При малом угле  $\varphi$  число это будет очень велико и поэтому можно считать  $N \rightarrow \infty$ , а следовательно, в формуле (26.4)  $\kappa^N \rightarrow 0$ .

Кроме того, поскольку в интерферометре Фабри — Перо наблюдаются кривые равного наклона, то каждому данному направлению интерферирующих лучей будет соответствовать  $u=0$ , т. е.  $I' = (\sin u/u)^2 = 1$  (рис. 129).

В результате формула (26.4) принимает вид

$$E = (a_0 x_0)^2 \frac{1}{(1 - \kappa)^2 + 4 \kappa \sin^2 v}. \quad (27.3)$$

Рассмотрим более подробно ослабление пучков, возникающих в интерферометре за счет последовательных отражений от его зеркальных слоев. Пучок  $1$  (см. рис. 128) не испытывает отражений, но дважды проходит через зеркальные слои. Если через  $a_0$  обозначить амплитуду в падающем на интерферометр пучке  $OO'$ , то амплитуда колебаний в пучке  $1$  будет  $a_0 \tau'^2$ , где  $\tau'$  — коэффициент пропускания амплитуды при прохождении через слои. Обозначим через  $r'$  коэффициент, определяющий уменьшение амплитуды при отражении. Как видно, пучок  $2$  испытывает два отражения, пучок  $3$  — четыре и т. д.; для  $k$ -го

пучка имеется  $2(k-1)$  отражений. Поэтому амплитуда колебаний в  $k$ -м пучке будет равна  $a_0\tau'^2 r'^{2(k-1)}$ . Введем теперь коэффициенты пропускания  $\tau$  и отражения  $r$  для потока. Так как мощность потока пропорциональна квадрату амплитуды, то  $\tau = \tau'^2$  и  $r = r'^2$ . В результате получаем, что амплитуда колебаний в  $k$ -м пучке равна  $a_0\tau r^{k-1}$ . При выводе формулы (24.4) мы полагали амплитуду  $k$ -го пучка равной  $a_0x^{k-1}$ , таким образом, при переходе к новым коэффициентам  $\tau$  и  $r$  надо в формуле (24.4) заменить  $a_0$  через  $a_0\tau$ ,  $x$  через  $r$ . Поэтому формула (27.3) примет вид

$$E = (a_0x_0\tau)^2 \frac{1}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \nu},$$

$$E = I_0 \left( \frac{\tau}{1-r} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \nu}, \quad (27.4)$$

где  $I_0$  постоянно и  $\nu$  имеет значение

$$\nu = \pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi \frac{t \cos \varphi}{\lambda}.$$

Введем еще коэффициент поглощения потока в зеркальном слое  $\varepsilon$ . Тогда, очевидно, будет иметь место равенство

$$r + \tau + \varepsilon = 1,$$

откуда вытекает возможность переписать формулу (27.4) также в виде

$$E = I_0 \left( \frac{\tau}{\tau + \varepsilon} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \nu}. \quad (27.5)$$

Обе формулы (27.4) и (27.5) описывают распределение освещенности в интерференционной картине, даваемой интерферометром Фабри—Перо, как функцию угла  $\varphi$ , т. е. ее распределение вдоль радиального сечения  $DD'$  (рис. 130).

Максимумы освещенности возникают при  $\sin \nu = 0$  и равны

$$E_{\max} = I_0 \left( \frac{\tau}{1-r} \right)^2 = I_0 \left( \frac{\tau}{\tau + \varepsilon} \right)^2. \quad (27.6)$$

Минимумы — при  $\sin \nu = \pm 1$  и равны

$$E_{\min} = I_0 \left( \frac{\tau}{1+\tau} \right) = I_0 \left( \frac{\tau}{2 - \tau - \varepsilon} \right)^2. \quad (27.7)$$

Между максимумами освещенность меняется плавно, какие-либо вторичные максимумы отсутствуют (из-за бесконечного числа интерференционных пучков). Отношение  $E_{\max}/E_{\min}$  носит название контрастности, оно равно

$$K = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \left( \frac{1+r}{1-r} \right)^2. \quad (27.8)$$

На рис. 131 приведены кривые для  $E$  для разных значений  $r$ . По мере возрастания коэффициента отражения зеркальных слоев  $r$  контрастность возрастает. Одновременно возрастает освещенность в максимумах, а сами максимумы становятся уже.

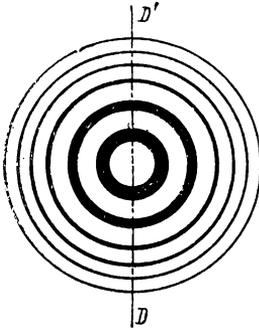


Рис. 130. Вид интерференционных полос, даваемых интерферометром Фабри — Перо.

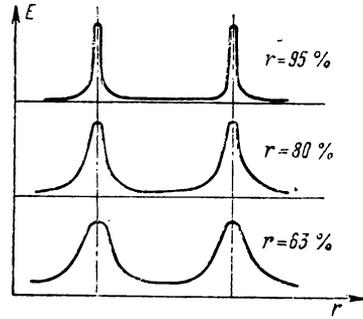


Рис. 131. Кривые освещенности для различных значений коэффициента отражения  $r$ .

Сужение максимумов по мере возрастания  $r$  можно оценить, найдя их угловую ширину  $\delta\varphi$  при значении ординаты, равной 0,4 от максимальной (рис. 132). Для этого, положив  $E_{\max} = 1$ , найдем значение  $v$ , удовлетворяющее требованию

$$\frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 v} = 0,4,$$

отсюда получим

$$\sin v = \frac{0,61(1-r)}{\sqrt{r}}. \quad (27.9)$$

Обозначив через  $\varphi$  угол, на который приходится максимум, получим

$$v = \frac{2\pi t}{\lambda} \cos\left(\varphi + \frac{\delta\varphi}{2}\right)$$

или, считая угол  $\delta\varphi$  малым, приближенно

$$v = \frac{2\pi t}{\lambda} \left( \cos\varphi - \frac{\delta\varphi}{2} \sin\varphi \right).$$

В максимуме по (27.2)  $2t\cos\varphi = k\lambda$ , поэтому

$$v = k\pi - \frac{\pi t}{\lambda} \sin\varphi \cdot \delta\varphi,$$

$$\sin v = \sin\left(k\pi - \frac{\pi t}{\lambda} \sin\varphi \cdot \delta\varphi\right) \cong \sin\left(\frac{\pi t}{\lambda} \varphi \delta\varphi\right) \cong \frac{\pi t \varphi}{\lambda} \delta\varphi.$$

Отсюда на основании (27.9) найдем

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{\pi t \varphi} \frac{0,61(1-r)}{\sqrt{r}}. \quad (27.10)$$

Из этого соотношения видно, что действительно по мере возрастания коэффициента отражения  $r$  ширина максимума убывает. Из всего сказанного ясно, что для получения большой контрастности интерференционной картины и узости ее максимумов важно иметь по возможности большой коэффициент отражения  $r$  и малый коэффициент поглощения  $\varepsilon$ . Это ставит высокие требования к зеркальным слоям интерферометра Фабри—Перо. Первоначально их получали путем нанесения на пластинки испарением в вакууме тонких металлических пленок—серебра, алюминия, платины. Использовалось также катодное распыление металлов. Однако для металлических пленок возрастание  $r$  неминуемо ведет к возрастанию

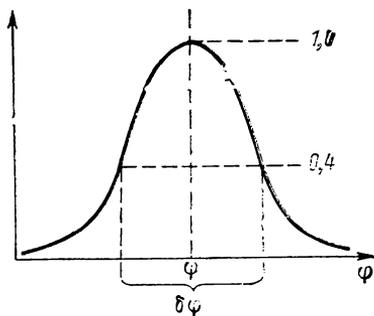


Рис. 132. Угловая ширина максимума.

коэффициента поглощения  $\varepsilon$ . Но в результате возрастания  $\varepsilon$  по формуле (27.6) падает абсолютное значение освещенности в максимуме. Большая освещенность в максимуме может сохраниться лишь при условии, что  $\varepsilon \ll r$ . Возможность получать зеркальные пленки, удовлетворяющие такому требованию, появилась лишь после создания многослойных диэлектрических покрытий (см. § 28).

Определим еще угловое расстояние между соседними максимумами. Для этого продифференцируем равенство (27.8) при постоянном  $\lambda$

$$-2t \sin \varphi \cdot \Delta\varphi = \lambda \Delta k.$$

Для соседних колец  $\Delta k = 1$ , откуда

$$\Delta\varphi = -\frac{\lambda}{2t \sin \varphi}. \quad (27.11)$$

Знак минус соответствует тому, что угловой радиус колец  $\varphi$  убывает по мере возрастания порядка интерференции  $k$ . Из формулы (27.11) видно, что при возрастании угла  $\varphi$  кольца начинают располагаться ближе и ближе друг к другу. При больших расстояниях между пластинами интерферометра (большое  $t$ ) кольца располагаются более тесно, чем при малых расстояниях.

Ввиду высоких порядков интерференции в интерферометре Фабри — Перо чрезвычайно сильно выражен эффект наложения друг на друга интерференционных полос разных длин волн. В самом деле, на кольцо порядка  $k$  и длины волны  $\lambda$  наложится кольцо порядка  $k+1$  и длины волны  $\lambda - \Delta\lambda$ , если выполнено условие

$$k\lambda = (k+1)(\lambda - \Delta\lambda),$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{k+1} \cong \frac{\lambda}{k}. \quad (27.12)$$

Эту формулу можно еще преобразовать, определив значение  $k$  по (27.2), тогда получим

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2t \cos \varphi} \cong \frac{\lambda^2}{2t}. \quad (27.13)$$

Воспользуемся приведенным выше примером интерферометра Фабри — Перо ( $t=1$  см при  $\lambda=5 \cdot 10^{-5}$  см). Для него мы получали  $k=40\,000$ , откуда по (27.12) находим для  $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^4} \text{ см} = 1,25 \cdot 10^{-9} \text{ см} = 0,0125 \text{ нм}.$$

Таким образом, для наблюдения интерференционной картины требуется весьма высокая степень монохроматичности света (высокая степень временной когерентности). Последнее осуществимо путем выделения из линейчатого спектра с помощью фильтра или монохроматора отдельной спектральной линии. Употребляется также скрещивание интерферометра с монохроматором.

Для повышения контрастности интерференционной картины выгодно расположить два одинаковых интерферометра Фабри — Перо друг за другом и пропускать через них свет. Тогда контрастность картин будет

$$K = K_1 K_2,$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — контрастность каждого из интерферометров в отдельности. Одновременно сужаются и максимумы. Особенно выгодно использовать не одинаковые интерферометры, а такие, для которых отношение  $t_1/t_2$  представляет собой рациональную дробь. Предположим, например, что толщина первого эталона ровно в 3 раза больше второго:  $t_1=3t_2$ . Если пользоваться одним более толстым интерферометром, то в монохроматическом свете получится ряд максимумов, расстояние  $\Delta\varphi$  между которыми определится формулой (27.11) (рис. 133, а). Второй более тонкий интерферометр дает максимумы, расположенные втрое дальше друг от друга (рис. 133, б). С этими максимумами совпадает каждый третий максимум интерферометра тол-

щиной  $t_2$ . Если заставить свет, прошедший через первый интерферометр, проходить затем через второй, расположенный параллельно ему, то окончательное распределение освещенности определится произведением кривых, изображенных на

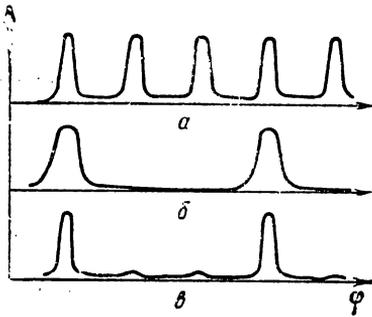


Рис. 133. Интерференционная картина от толстого интерферометра (а); от тонкого (б); от обоих интерферометров (в).

рис. 133, а и б. Возникает распределение, изображенное на рис. 133, в. Светлые кольца остаются только в тех местах, где их дает тонкий интерферометр, резкость же их из-за возрастания контрастности превышает резкость колец толстого интерферометра.

Если отношение  $t_1/t_2 = n/m$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа, то совпадение колец происходит лишь через  $n$  колец одного интерферометра и через  $m$  колец другого. Если  $t_1/t_2$  представляет собой иррациональную дробь, то точного совпадения колец не наступит. Отсюда следует необходимость весьма точной подгонки отноше-

ния  $t_1/t_2$  к требуемой величине, что представляет существенные трудности. Кроме того, пропускание системы в целом («мультиплекса»)  $\tau = \tau_1 \tau_2$  мало, что снижает проходящий световой поток.

Наконец рассмотрим прибор, носящий название интерферометра последовательного типа. Он состоит из трех плоскопараллельных пластинок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 134), расположенных параллельно друг к другу соответственно на расстояниях  $t_1$  и  $t_2$ . У каждой пластинки одна поверхность покрыта зеркальным слоем, пропускающим часть излучения. Предположим, что толщины  $t_1$  и  $t_2$  настолько велики, что при используемой степени монохроматичности света интерференционная картина, даваемая каждой из пар пластинок  $AB$  и  $BC$ , оказывается полностью размытой. Тогда в фокальной плоскости линзы, собирающей лучи, прошедшие через все три пластинки, возникнет лишь та интерференционная картина, которая будет обусловлена разности хода между лучами, отразившимися равное число между пластинами  $AB$  и соответственно  $BC$ . Рассмотрим, например, луч 1, отразившийся два раза между пластина-

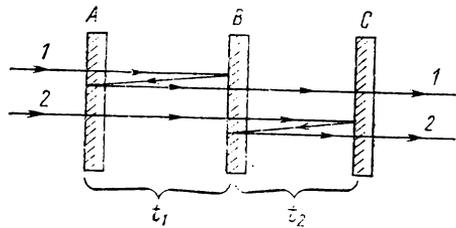


Рис. 134. Схема интерферометра последовательного типа.

ми  $A$  и  $B$  и прошедший без отражений между пластинами  $B$  и  $C$ , и луч  $2$ , прошедший без отражений между пластинами  $A$  и  $B$  и дважды отразившийся между пластинами  $B$  и  $C$ . Разность хода  $\Delta$  между этими лучами будет равна

$$\Delta = 2t_1 \cos \varphi - 2t_2 \cos \varphi = 2(t_1 - t_2) \cos \varphi.$$

Такая же или кратная ей разность хода возникает между другими аналогичными парами лучей. Это означает, что прибор будет действовать, как интерферометр Фабри — Перо толщиной  $t_1 - t_2$ . Этой разности может быть придано такое значение, при котором на выходе будут наблюдаться хорошо разделенные кольца.

Преимуществом интерферометра последовательного типа по сравнению с интерферометром Фабри — Перо является то, что в каждую его половину может быть введена кювета с диспергирующим веществом и, следовательно, он может использоваться для выполнения рефрактометрических измерений. Его недостатком является сильное ослабление проходящего через него светового потока.

## § 28. Многослойные покрытия

Явление многолучевой интерференции используется как для уменьшения, так и для увеличения доли света, отраженного в оптических системах. Одновременно увеличивается или уменьшается доля проходящего света. Для этого на поверхность прозрачной среды наносится ряд пленок с различными коэффициентами преломления при отражении, на границах которых возникают интерферирующие пучки.

Рассмотрим простейший случай двулучевой интерференции. Пусть на плоскую поверхность стекла  $AB$  (рис. 135) нанесен однородный прозрачный слой  $CD$  толщиной  $t$  с коэффициентом преломления  $n'$ , меньшим чем у стекла. Отраженные лучи возникнут на границах: воздух — слой; слой — стекло. Для того чтобы лучи  $1$  и  $2$ , отраженные от обеих границ, интерферируя, тушили друг друга, должны быть выполнены условия: а) разность фаз колебаний в лучах  $1$  и  $2$  должна равняться нечетному числу  $\pi$ ; б) амплитуды колебаний в лучах  $1$  и  $2$  должны равняться друг другу.

В рассматриваемом случае на обеих границах происходит одинаковое изменение фазы на  $\pi$ , поэтому разность фаз коле-

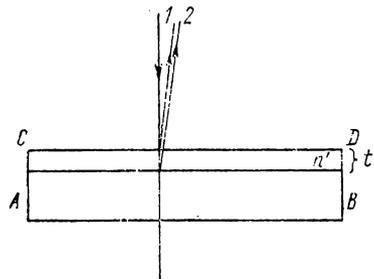


Рис. 135. Отражение света от поверхности с нанесенным на нее прозрачным слоем.

баний в лучах 1 и 2 определится лишь разностью их оптических длин путей  $\Delta$  в слое. При нормальном падении света  $\Delta = 2n't$ , где  $n'$  — коэффициент преломления материала слоя. Следовательно, для того чтобы лучи тушили друг друга, должно быть выполнено равенство:  $\Delta = (2k+1)\lambda/2$ , где  $k$  — целое число. Отсюда для необходимой толщины слоя находим

$$n't = (2k + 1)\lambda/4, \quad (28.1)$$

т. е. оптическая толщина слоя должна равняться нечетному числу от  $\lambda/4$ .

Отношение амплитуд отраженной и падающей волн, по сказанному в § 17, при нормальном отражении света ( $i=0$ ) от границы двух сред с относительными коэффициентами преломления  $n_{21}$  равно

$$\frac{a'}{a} = -\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}.$$

Обозначим относительные коэффициенты преломления на границах воздух — слой и слой — стекло соответственно через  $n_{12}$  и  $n_{23}$ , тогда равенство амплитуд колебаний в лучах 1 и 2 будет выполняться, если

$$\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} = \frac{n_{23} - 1}{n_{23} + 1}. \quad (28.2)$$

Но  $n_{12} = n'$ ,  $n_{23} = n/n'$ , где  $n'$  — коэффициент преломления стекла. Отсюда из равенства (28.2) следует, что между  $n'$  и  $n$  должно иметь место соотношение

$$n' = \sqrt{n}. \quad (28.3)$$

Обычно в качестве материала для нанесения на стекло слоев используются либо фтористый магний ( $\text{MgF}_2$ ,  $n' = 1,32$ ), либо криолит ( $3\text{NaAlF}_6$ ,  $n' = 1,36$ ). Для тяжелых стекол (большие  $n$ ) в этих случаях равенство (28.3) выполняется с достаточной степенью точности. Толщина слоя берется такой, чтобы  $\Delta$  равнялось  $\lambda/4$  или  $3\lambda/4$ . Наносится слой на стекло либо испарением в вакууме, либо путем осаждения из раствора, наносимого на стекло в виде дозированной капли.

Нанесение слоя позволяет значительно снизить количество света, отражаемого на границе воздух — стекло. В сложных оптических системах с большим числом преломляющих поверхностей, как было указано в § 11, потери света из-за отражений велики и, кроме того, возникающий рассеянный свет ведет к вредным засветкам. Указанный прием снижения количества отраженного света (просветление оптики) в значительной мере снижает эти недостатки.

Однако надо иметь в виду, что равенство (28.1) выполняется лишь для определенной длины волны. Для других длин волн может не только отсутствовать полное тушение интерферирую-

щих лучей, но и возникать их усиление. При выполнении равенства (28.1) для средней части спектра ( $\lambda \cong 500$  нм) лучи, относящиеся к концам видимого спектра (красного и фиолетового), усиливают друг друга. Для визуальных приборов это не играет особой роли, так как чувствительность глаза максимальна для средней части спектра и сильно спадает к его краям. Но при использовании фотографического или иного объективного способа регистрации света это обстоятельство может оказаться существенным.

Для более равномерного изменения коэффициента отражения в широкой спектральной области используются покрытия из нескольких прозрачных слоев с различными коэффициентами преломления. При соответственном подборе толщин этих слоев требование (28.1) может выполняться для нескольких длин волн. Это иллюстрируется рис. 136, на котором приведены коэффициенты пропускания для некоторой системы, в которой имеется большое число отражающих поверхностей. Кривая 1 относится к случаю отсутствия просветляющих пленок, кривая 2 — к случаю просветления двуслойной пленкой и кривая 3 — трехслойной. Как видно, для непросветленной системы пропускание  $\tau$  не превышает 96%; при трехслойной пленке в широком интервале длин волн пропускание превышает 99%.

Наряду с просветлением оптики может представить интерес и обратная задача — увеличение коэффициента отражения  $r$ . В § 27 было указано, что для получения с помощью интерферометра Фабри — Перо узких максимумов требуются зеркальные слои с возможно большим коэффициентом отражения  $r$ . Одновременно поглощение света в зеркальных слоях должно быть малым, так как освещенность в максимумах по (27.5) пропорциональна  $\tau/(\tau + \varepsilon)$ , где  $\tau$  и  $\varepsilon$  соответственно коэффициенты пропускания и поглощения. Зеркальные металлические пленки при большом  $r$  имеют малый коэффициент пропускания  $\tau$  и относительно большой коэффициент поглощения  $\varepsilon$ . Это ведет к нежелательному снижению светового потока, проходящего через прибор. Этот недостаток устраняется при замене металлических отражательных слоев многослойными покрытиями из прозрачных (диэлектрических) материалов. Рассмотрим вначале отражение от двух поверхностей слоя толщиной  $t$  с коэффициентом преломления  $n'$ . Если его оптическая толщина  $n't = k\lambda/2$ , то отраженные лучи усиливают друг друга, что равносильно увеличению коэффициента отражения  $r$ . Вместе с тем поскольку слой прозрачен, поглощение остается малым. Однако

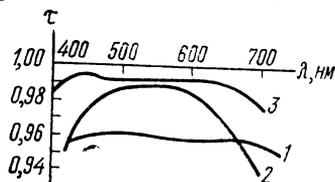


Рис. 136. Коэффициент пропускания  $\tau$  системы.

1 — отсутствие просветления;  
2 — просветление двуслойной пленкой; 3 — трехслойной пленкой.

в случае одного слоя, нанесенного на подложку (стекло); коэффициент отражения будет все же мал, так как количество отраженного света на обеих границах слоя невелико. Поэтому используется нанесение большого числа слоев, причем чередуются два слоя — один с большим коэффициентом преломления  $n_1$ , а другой — с меньшим  $n_2$ . Коэффициенты преломления



Рис. 137. Оптический фильтр в виде интерферометра Фабри—Перо малой толщины  $t$ .

должны по возможности сильно отличаться друг от друга. Часто используются сульфат цинка ( $n'=2,3$ ) и фторид лития ( $n_2=1,3$ ). При общем большом числе слоев ( $7 \div 11$ ) удается достичь  $r > 90\%$  при малом значении коэффициента поглощения  $\epsilon$ .

Третья задача, которая решается с помощью многолучевой интерференции, — это осуществление узкополосных

оптических фильтров, т. е. систем, пропускающих свет лишь в узком интервале длин волн. Таким фильтром прежде всего может служить интерферометр Фабри—Перо при малом расстоянии  $t$  между зеркальными слоями. На стеклянную пластинку  $AB$  (рис. 137) наносятся: полупрозражающая металлическая пленка  $a$ , прозрачный диэлектрический слой  $b$  толщиной  $t$  и вторая полупрозражающая пленка  $a'$ . Совокупность слоя  $b$  и пленок  $a$  и  $a'$  образует интерферометр Фабри—Перо. Для нормального падающего света максимум амплитуды в проходящем свете возникает при  $2tn' = k\lambda$  (более точно надо учесть еще изменение фазы при прохождении лучей через пленки  $a$  и  $a'$ , но для простоты мы не будем этого делать).

Если оптическая толщина слоя  $b$  равна нескольким длинам волн, то одновременно возникает несколько максимумов, соответствующих разным возможным значениям целых чисел  $k$ . Обозначим через  $\lambda_0$  длину волны максимума, соответствующего определенному значению  $k_0$ . Тогда соседние максимумы возникнут приблизительно при длинах волн  $\lambda_i = \lambda_0 \pm \Delta\lambda$ , где  $\Delta\lambda_0 = \lambda_0/k$ . Например, при оптической толщине слоя  $b$ , равной  $tn' = 5\lambda/2$ , получим  $k=5$  и  $\Delta\lambda = \lambda/5$ . Если центральный максимум приходится на  $\lambda_0 = 500$  нм, то соседние максимумы придутся на  $\lambda_1 = 400$  нм и  $\lambda_2 = 600$  нм. Они могут быть отделены от максимума  $\lambda_0$  с помощью обычного цветного фильтра. Оставшийся же максимум будет узок. В самом деле, его угловая ширина выражается формулой (27.10), в которой лишь следует заметить  $t$  через  $tn'$

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{\pi tn' \varphi} \frac{0,61(1-r)}{\sqrt{r}}. \quad (28.4)$$

Следовательно, его ширина, выраженная в длинах волн,

$$\delta\lambda = \frac{d\lambda}{d\varphi} \delta\varphi. \quad (28.5)$$

Для получения  $d\lambda/d\varphi$  продифференцируем по  $\varphi$  равенство (27.2), в котором также заменим  $t$  через  $tn'$

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = -\frac{2tn' \sin \varphi}{k} \cong -\frac{2tn'\varphi}{k}.$$

Отсюда по (28.5) и (28.4) получим

$$|\delta\lambda| = \frac{2\lambda}{\pi k} \frac{0,61(1-r)}{\sqrt{r}} \cong 0,4 \frac{1-r}{\sqrt{r}} \frac{\lambda}{k}.$$

При  $r=0,8$  это дает  $\delta\lambda \cong 9$  нм. Таким образом, при нормальном падении белого света интерференционный фильтр выделит из него узкий спектральный интервал шириной порядка 9 нм. Однако благодаря сильному поглощению света в металлических пленках  $a$  и  $a'$  общее пропускание такого фильтра мало. Потери могут быть существенно снижены, если металлические пленки  $a$  и  $a'$  заменить многослойными покрытиями, состоящими из слоев попеременно высокого и низкого коэффициента преломления.

Между двумя группами таких многослойных покрытий располагается более толстый прозрачный слой  $b$ . Рассмотрим интерференционный фильтр со слоями из криолита и сульфида цинка. Обозначим через  $L$  слой криолита и через  $H$  слой сульфида цинка, толщины которых подобраны так, чтобы отраженные от их границ лучи усиливали друг друга. Примером может служить тринадцатислойный фильтр типа  $HLHLHL-2H-HLHLHL$ , где  $2H$  означает слой из сульфида цинка вдвое более толстый, чем остальные. Он служит прозрачным слоем  $b$ , а предыдущие слои  $H$  и  $L$  играют роль зеркал. При максимуме, лежащем при  $\lambda=656,5$  нм, такой фильтр имеет пропускание  $\tau=70\%$  и ширину максимума  $\delta\lambda=6,5$  нм.

## § 29. Интерференционная метрология

Как известно, в конце прошлого столетия за первичный эталон длины (нормальный метр) была принята длина между двумя штрихами на линейке, изготовленной из сплава иридия с платиной, хранящейся в Международном бюро мер и весов. Наряду с первичным эталоном метра были изготовлены 32 эталона, распределенные между различными странами. В СССР хранятся два таких эталона — эталон № 11 и эталон № 12. Со временем были обнаружены некоторые расхождения в длине эталонов, достигающие 0,7 мкм. Эти расхождения вызваны, по всей вероятности, медленным изменением структуры сплава платины с иридием. Поскольку, очевидно, ни один эталон-линейка не гарантирован от таких изменений, имеет смысл поставить вопрос о выборе нового эталона длины. В качестве такого может быть взята длина волны какой-либо спектральной линии, возбуждаемой при определенных условиях. Интерфе-

ренционный способ позволяет с весьма большой точностью сравнивать не только малые, но и большие длины (порядка метра и больше) с длиной световой волны и между собой. Таким образом, возник новый раздел метрологии — интерференционная метрология.

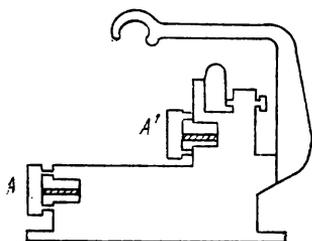


Рис. 138. Эталон длины Майкельсона.

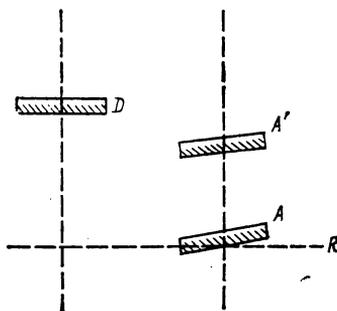


Рис. 139. Расположение неподвижного зеркала  $D$  и эталона длины  $AA'$ .

Первое сравнение длины световой волны с длиной нормального метра было выполнено Майкельсоном в 1890—1895 гг.

Следует сразу оговорить, что нормальный метр представляет собой штриховую меру, т. е. меру, длина которой определяется расстоянием между двумя штрихами, нанесенными на полированную металлическую поверхность линейки. Непосредственное интерферометрическое сравнение такой меры с длиной световой волны невозможно. Интерферометрически можно сравнить длину световой волны лишь с расстоянием между отражающими поверхностями. Поэтому Майкельсон создал ряд промежуточных эталонов, длина каждого из которых определялась расстоянием между зеркалами  $A$  и  $A'$ , укрепленными на массивной металлической призме  $B$  (рис. 138). С помощью винтов зеркала могли устанавливаться строго параллельно друг другу. Ручка служила для перемещения эталона.

Метод сравнения длины волны с длиной эталона заключался в следующем. В интерферометре Майкельсона вместо неподвижного зеркала  $M_1$  (см. рис. 115) располагались измеряемый эталон  $AA'$  и зеркало  $D$  (рис. 139). Использовалась красная спектральная линия кадмия  $\lambda = 643,85$  нм, которая выделялась из спектра паров кадмия с помощью призмленного монохроматора. По предварительным наблюдениям Майкельсона она характеризовалась очень малой шириной, а следовательно, обладала высокой степенью временной когерентности и позволяла наблюдать интерференцию при большой разности хода.

Поверхность зеркала  $D$  устанавливалась строго параллельно плоскости  $R$ , которая представляет собой изображение подвижного зеркала  $M_{II}$ . Зеркала измеряемого эталона (параллельные друг другу) располагались под небольшим углом к плоскости  $R$  и вначале так, чтобы поверхность  $R$  пересекала зеркало  $A$  по вертикальной линии. Установка позволяла осветить интерферометр либо светом красной кадмиевой линии, либо белым светом от дополнительного источника. Тогда можно было наблюдать либо в белом свете интерференционные полосы равной толщины, возникающие благодаря разности хода между зеркалом  $A$  и плоскостью  $R$ , либо в свете кадмиевой линии интерференционные кольца равного наклона от зеркала  $D$ , расположенного параллельно плоскости  $R$ . Обе эти возможные интерференционные картины изображены на рис. 140.

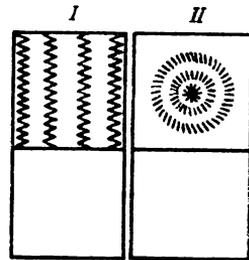


Рис. 140. Интерференционные полосы равной толщины (I) и кольца равного наклона (II).

Первоначально установка освещается белым светом. Среди полос равной толщины наблюдается неокрашенная полоса, которая соответствует тому месту, где плоскость  $R$  пересекает нижнее зеркало эталона длины  $A$ . Можно добиться, чтобы это пересечение происходило посередине зеркала  $A$ . После этого переходят к наблюдению колец равного наклона в свете красной кадмиевой линии. Подвижное зеркало интерферометра  $M_{II}$

перемещается так, чтобы плоскость  $R$  двигалась по направлению от нижнего зеркала эталона  $A$  к его верхнему зеркалу  $A'$ . При этом кольца равного наклона стягиваются к центру и в нем исчезают. Каждому исчезновению кольца соответствует перемещение плоскости  $R$  на  $\lambda/2$ . Число исчезнувших колец подсчитывается и передвижение производится до тех пор, пока плоскость  $R$  не пересечет заднего

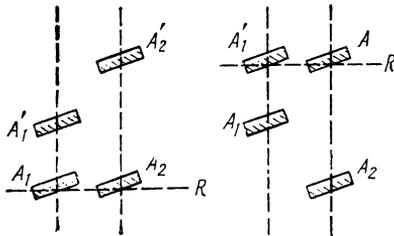


Рис. 141. Расположение эталонов при сравнении их длины.

зеркала эталона  $A'$ , что устанавливается по интерференционным полосам равной толщины, наблюдаемым в белом свете, аналогично тому, как они наблюдались при пересечении плоскостью  $R$  зеркала  $A$ . Таким образом, по соответственным интерференционным картинам равной толщины можно установить, что плоскость  $R$  перемещалась на отрезок, равный расстоянию между зеркалами  $A$  и  $A'$ , по числу же стянувшихся полос в интерференционной картине равного наклона в свете красной кадмие-

вой линии можно непосредственно сосчитать число длин волн, укладывающихся на этом расстоянии.

В качестве первого эталона Майкельсон употреблял очень короткий эталон, для которого расстояние между отражающими поверхностями зеркал  $A$  и  $A'$  составляло всего 0,39 мм. При передвижении плоскости  $R$  на это расстояние стянулось 1212,35 колец, откуда следует, что длина  $l_1$  первого эталона равна  $l_1 = 1212,35 \lambda_{Ca}/2$ , где  $\lambda_{Ca}$  — длина волны красной кадмиевой линии.

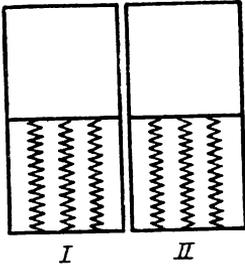


Рис. 142. Полосы равной толщины от двух эталонов длины.

Далее был изготовлен ряд эталонов, длина каждого последующего из которых была приблизительно вдвое больше длины предыдущего, т. е. равнялась 0,78; 1,56 мм и т. д. Сравнение длин двух эталонов производилось следующим способом. Два эталона, например  $I$  и  $II$ , ставились рядом так, чтобы плоскость  $R$  пересекала оба нижние зеркала  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 141, а). Тогда при освещении интерферометра белым светом получались две картины равной толщины, как изображено на рис. 142. Путем небольшого перемещения эталонов друг относительно друга можно было добиться, что неокрашенные полосы располагаются в обеих этих картинах одинаково. Это означало, что плоскость  $R$  одинаково пересекает оба зеркала  $A_1$  и  $A_2$ , т. е. что положения обоих нижних зеркал эталонов выравнены с точностью до долей длины световой волны. Затем плоскость  $R$  передвигалась до пересечения с верхним зеркалом  $A_1'$  эталона  $I$ , т. е. на длину  $l_1$  этого эталона. Далее эталон  $I$  передвигается до тех пор, пока его нижнее зеркало  $A_1$  опять не пересекало плоскость  $R$  (рис. 141, б). Наконец, плоскость  $R$  перемещалась до верхнего зеркала эталона  $I$ . В результате поверхность  $R$  перемещалась на длину, вдвое большую длины первого эталона  $I$ .

Пересечение во всех случаях проверялось по картине равной толщины в белом свете. Если бы длина  $l_2$  эталона  $II$  была бы точно вдвое больше длины эталона  $I$ , то плоскость  $R$  при последнем положении одновременно пересекала бы и зеркало  $A_2'$  эталона  $II$ . В белом свете от зеркал  $A_1'$  и  $A_2'$  возникли бы одинаковые картины равной толщины. В действительности отношение длин обоих эталонов не в точности равно двум и обе картины смещены друг относительно друга. Имеющееся различие в длинах  $l_2$  и  $2l_1$  снова может быть определено по сдвигу кривых равного наклона в свете красной линии кадмия. В результате длина второго эталона оказывается сравненной с длиной волны  $\lambda_{Ca}$ .

Последовательным применением этого метода производился переход от наиболее короткого эталона до эталона длиной 10 см. Последний сравнивался с длиной нормального метра путем десятикратного перемещения на величину, равную его собственной длине. Перемещения контролировались по полосам равной толщины. Совмещения же зеркал эталона со штрихами нормального метра выполнялись обычным путем с помощью компаратора. Таким образом, строго говоря, нормальный метр не сравнивался интерферометрически с длиной волны  $\lambda_{\text{Cd}}$ . С ней сравнивалась лишь длина 10 см — эталона, а длина нормального метра сравнивалась с этим эталоном. Но поскольку число длин волн  $\lambda_{\text{Cd}}$ , укладываемое на длине 10 см эталона, было определено, можно было выразить через  $\lambda_{\text{Cd}}$  и длину нормального метра. По данным Майкельсона это число равно

$$1\text{ м} = 1553163,5 \lambda_{\text{Cd}}.$$

Отсюда для длины волны красной линии кадмия получается

$$\lambda_1 = 6438,4722 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Поскольку все измерения Майкельсона производились в воздухе, то и длина волны красной линии кадмия отнесена к воздуху.

Кроме того, Майкельсон сравнил с длиной нормального метра длины волн двух других ярких линий в спектре кадмия, а именно зеленой и голубой. Он получил, что на длине нормального метра укладывается 1966 247,7 длин волн зеленой линии кадмия и 2 083 372,1 — голубой. Отсюда длины волн  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  этих линий оказываются равными

$$\lambda_2 = 5085,8240 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \quad \lambda_3 = 4799,9107 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Однако точность измерений этих длин волн несколько уступает точности измерений длины волны красной кадмиевой линии из-за их сложной структуры. Тем не менее можно утверждать, что погрешность в измерении всех трех линий не превышает единицы седьмой значащей цифры. В этом и заключается главным образом значение работ Майкельсона. На результате его измерений основаны последующие методы сравнения длины нормального метра с длиной световой волны.

Вслед за Майкельсоном сравнивали длину нормального метра с длиной волны красной линии кадмия Фабри, Перо и Бенуа (1906 г.). Они использовали эталон длины, который представлял собой интерферометр Фабри — Перо. Его отличие от интерферометра, описанного в § 27, заключалось лишь в том, что пластинки с полупрозражающими слоями прижимались

не к кольцу, а к металлической рамке, имеющей в поперечном сечении вид перевернутой буквы П (рис. 143). Строгая параллельность пластинок друг относительно друга достигалась с помощью нажима пружинок, подтягиваемых винтами. Расстояние между внутренними (полуотражающими) поверхностями пластинок определяет длину эталона. Длина самого короткого эталона равнялась 3,125 см; каждый последующий был вдвое длиннее: 6,25; 12,5; 25 см и 1 м.

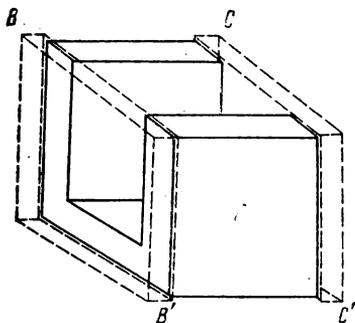


Рис. 143. Эталон Фабри—Перо.

Сравнение длины волны наиболее короткого эталона с длиной волны красной кадмиевой линии упрощалось благодаря тому, что на основании измерений Майкельсона длина волны этой линии и еще двух линий кадмия были известны с большой точностью. Это позволяет избежать необходимости действительно считать число длин волн, укладывающихся на данной длине,

но воспользоваться другим более простым методом, получившим название метода совпадений.

Чтобы выяснить, в чем заключается метод совпадений, предположим сперва для простоты, что при наблюдении в эталон колец равного наклона от двух линий с длинами волн  $\lambda$  и  $\lambda'$  обе линии дают в центре эталона светлое пятно. Тогда имеем соотношения

$$2t = k\lambda, \quad 2t = k'\lambda', \quad (29.1)$$

где  $k$  и  $k'$  — оба целые числа. Если величины  $t$ ,  $\lambda$  и  $\lambda'$  заранее известны с достаточной точностью, то подбор двух целых чисел  $k$  и  $k'$ , удовлетворяющих равенствам (29.1), делается однозначным. В самом деле, пусть толщина некоторого эталона, измеренная на обычном компараторе, оказалась равной

$$t = 4,895 \pm 0,001 \text{ см},$$

а длина волны двух кадмиевых линий — красной и зеленой — заранее известна с точностью до 0,001% и равна: для красной  $\lambda = 6,43847 \cdot 10^{-5}$  см, для зеленой  $\lambda' = 5,08582 \cdot 10^{-5}$  см.

Полагая  $k$  равным одному из целых чисел, начиная с 15209 и кончая 15201, получаем по (29.1) те толщины эталона, при которых в свете красной кадмиевой линии должно получиться светлое пятно; эти значения  $t$  приведены во втором столбце нижеследующей таблицы:

$k$	$t$ , см	$k'$
15209,00	4,89613	19254,05
15208,00	4,89581	19252,78
15207,00	4,89549	19251,52
15206,00	4,89517	19250,25
15205,00	4,89485	19248,99
15204,00	4,89452	19247,72
15203,00	4,89420	19246,45
15202,00	4,89388	19245,19
15201,00	4,89356	19243,92

Для каждой из приведенных толщин  $t$  по второй из формул (29.1) вычисляется значение  $k'$ , соответствующее  $\lambda' = 5,08582 \times 10^{-5}$  см. Как видно, это значение  $k'$ , вообще говоря, получается не целым, и лишь в трех случаях  $k' = 19254,05$ ;  $19248,99$  и  $19243,92$  оно практически совпадает с целым числом. Очевидно, одно из этих значений  $k'$  должно быть истинным, а следовательно, толщина  $t$  имеет одно из трех значений: 4,89613; 4,89485 или 4,89356 см. Сравнение этих значений с определенным на компараторе не позволяет сделать однозначный выбор, хотя наиболее вероятным является значение  $t = 4,89485$  см, на длине которого укладывается 15205 длин волн красной и 19249 зеленой кадмиевой линий. Для однозначности выбора можно воспользоваться какой-либо третьей линией с хорошо известной длиной волны (например, голубой линией кадмия). Наблюдая расположение колец этой третьей линии, можно сделать выбор однозначным.

Практически, конечно, маловероятно, чтобы совпали как раз светлые пятна в центре картины. Более вероятно совпадение двух каких-либо колец. Если эти кольца образуются под углом  $\varphi$ , то должны одновременно выполняться равенства

$$2t \cos \varphi = k\lambda, \quad 2t \cos \varphi = k'\lambda',$$

где  $k$  и  $k'$  — целые числа. Вводя вместо  $\varphi$  угловой диаметр колец  $\vartheta = 2\varphi$ , перепишем эти равенства в виде

$$2t \cos \frac{\vartheta}{2} = k\lambda, \quad 2t \cos \frac{\vartheta}{2} = k'\lambda'. \quad (29.2)$$

Измерив угловой диаметр совпадающих колец  $\vartheta$  и зная с достаточной точностью значение  $t$ , подбираем, как и в предыдущем случае, значения целых чисел  $k$  и  $k'$ . Для центра эталона будет иметь место равенство

$$2t = k_0\lambda,$$

где  $k_0$  — теперь уже не целое число; оно представляет собой число длин волн  $\lambda$ , укладывающееся на длине эталона и равное целому числу плюс некоторая дробная часть.

Поскольку по первому из равенств (29.2)

$$2t = \frac{k\lambda}{\cos(\vartheta/2)},$$

$$\text{то } k_0 = \frac{k}{\cos(\vartheta/2)}.$$

При малом  $\vartheta$  это равенство с достаточной степенью точности заменяется равенством

$$k_0 = k(1 + \vartheta^2/8).$$

Однако на самом деле и точное совпадение колец двух разных длин волн может не иметь места. В этом случае, как легко видеть, достаточно определить лишь смещение одной системы

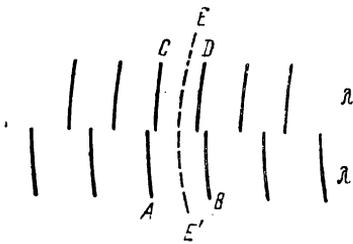


Рис. 144. Две системы интерференционных колец.

колец относительно другой. Пусть наблюдаются кольца двух длин волн  $\lambda$  и  $\lambda'$ . Предположим, что система колец  $\lambda'$  «обгоняет» систему колец  $\lambda$ , как это изображено на рис. 144, где для ясности система колец нарисована одна под другой. Кольца длины волны  $\lambda'$  уже и в некотором месте два кольца этой системы, например  $C$  и  $D$ , расположатся

между двумя кольцами  $A$  и  $B$ , возникающими в свете длины волны  $\lambda$ .

Кольцу  $A$  соответствует разность хода  $k\lambda$ , а кольцу  $B$  — разность хода  $(k+1)\lambda$ ; также кольцам  $C$  и  $D$  соответствуют разности хода  $k'\lambda'$  и  $(k'+1)\lambda'$ . Всем точкам между кольцами соответствуют также некоторые разности хода, но отличные от целого числа длин волн. Очевидно, где-то между кольцами расположена такая дуга  $EE'$ , что на ней разность хода в длинах волн  $\lambda$  равна  $(k+\delta)\lambda$ , а в длинах волн  $\lambda'$   $(k'+\delta)\lambda'$ , где  $\delta$  — одна и та же дробь, меньшая единицы.

Обозначая угловой диаметр этой дуги через  $\vartheta$ , получим

$$2t \cos(\vartheta/2) = (k + \delta)\lambda, \quad 2t \cos(\vartheta/2) = (k' + \delta)\lambda',$$

$$(k + \delta)\lambda = (k' + \delta)\lambda'. \quad (29.3)$$

Если знать  $\delta$ , то равенство (29.3) позволяет, как и в случае точного совпадения колец, подобрать значения целых чисел  $k$  и  $k'$ , если  $\lambda$ ,  $\lambda'$  и  $t$  заранее известны с достаточной степенью точности. Величина же  $\delta$  может быть определена просто. Так как при переходе от кольца к кольцу порядок меняется на единицу, а при переходе от кольца  $A$  или  $C$  до дуги  $EE'$  он меняется на  $\delta$ , то имеем

$$AB/AE = 1/\delta,$$

$$CD/CE = 1/\delta,$$

откуда 
$$\frac{AE - CE}{AB - CD} = \delta.$$

Далее имеем

$$AE - CE = AC,$$

откуда для  $\delta$  получаем

$$\delta = \frac{AC}{AB - CD}.$$

Расстояния между кольцами  $AB$ ,  $AC$  и  $CD$  могут быть непосредственно измерены и, следовательно,  $\delta$  найдено. Этот метод носит название метода совпадения дробных частей.

Таким методом длина наиболее короткого эталона была сравнена с длиной волны красной кадмиевой линии. Это эталон длиной 3,125 см. Каждый последующий эталон, как было сказано, был приблизительно вдвое длиннее предыдущего.

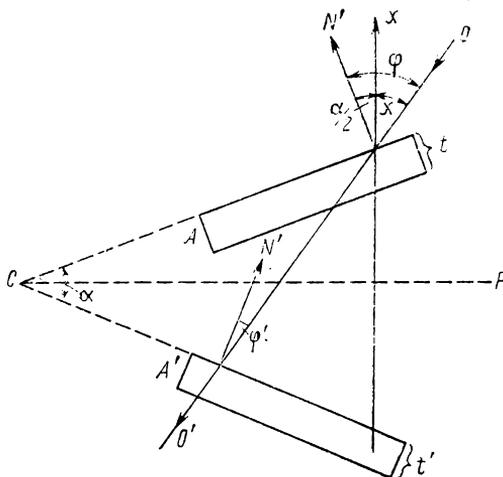


Рис. 145. Прохождение света через два эталона.

Сравнение длин двух эталонов основывалось на наблюдении интерференционной картины, наблюдаемой при прохождении света через два эталона, поставленных под небольшим углом  $\alpha$  один к другому. Положим сперва для простоты, что оба эталона  $A$  и  $A'$  (рис. 145) имеют толщины  $t$  и  $t'$ , приблизительно равные друг другу. Угол между плоскостями эталонов обозначим через  $\alpha$ . Пусть  $CP$  — плоскость симметрии, перпендикулярная к плоскости чертежа;  $N$  — нормаль к этой плоскости;  $OO'$  — направление падающего луча. Обозначим через  $\phi$  и  $\phi'$  углы падения света на первый и второй эталоны. Из рис. 145 видно, что  $\phi = \alpha/2 + \chi$ ;  $\phi' = \alpha/2 - \chi$ , где  $\chi$  — угол между лучом  $OO'$  и нормалью  $N$ . Для лучей, проходящих через оба эталона, разность хода  $\Delta$  обуславливается тем, что они испытывают от-

ражение как в том, так и в другом эталоне; она равна разности ходов, вызванных каждым из эталонов в отдельности, т. е.

$$\Delta = 2t \cos \varphi - 2t' \cos \varphi'.$$

Считая углы  $\varphi$  и  $\varphi'$  малыми, приближенно запишем

$$\Delta = 2(t - t') - t(\varphi^2 - \varphi'^2).$$

Далее, воспользовавшись равенством

$$\varphi^2 - \varphi'^2 = (\varphi + \varphi')(\varphi - \varphi') = 2\alpha\chi,$$

перепишем выражение для разности хода  $\Delta$

$$\Delta = 2(t - t') - 2t\alpha\chi. \quad (29.4)$$

Из этого равенства видно, что если при данном  $\alpha$  меняется угол  $\chi$ , то меняется и разность хода  $\Delta$  пропорционально изменению  $\chi$ . Постоянное значение разности хода  $\Delta$  соответствует (при данном  $\alpha$ ) постоянному значению угла  $\chi$ , причем этот

угол лежит в плоскости чертежа. Таким образом, в главной фокальной плоскости выходного объектива наблюдается ряд эквидистантных прямых полос, параллельных ребру клина, образованного плоскостями, в которых расположены эталоны. Угловое расстояние  $\Delta\chi$  между соседними полосами равно

$$\Delta\chi = \frac{\lambda}{2t\alpha};$$

центральная полоса, соответствующая  $\Delta=0$ , лежит при значении угла  $\chi_0$ , равном

$$\chi_0 = \frac{t - t'}{t\alpha}.$$

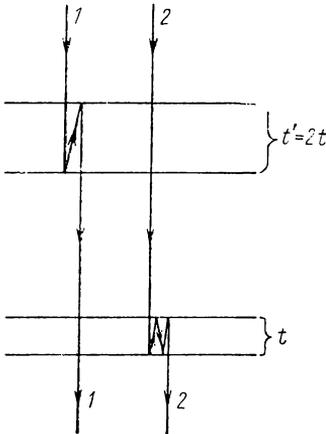


Рис. 146. Прохождение лучей через эталоны с отношением толщин 1 : 2.

При  $t=t'$  угол  $\chi=0$ , т. е. центральная полоса лежит в направлении нормали  $N$ . При изменении разности толщины  $t-t'$  вся система полос смещается как целое.

При  $\alpha=0$  член  $2t\alpha\chi=0$  и по (29.4)  $\Delta=2(t-t')$  независимо от угла падения, т. е. все поле должно казаться равномерно освещенным; при  $t-t'=0$  оно окажется белым в белом свете.

Появление указанных полос наблюдается не только при  $t$  приблизительно равным  $t'$ , но и в том случае, когда одна из длин кратна другой. Например, при  $t'=2t$  (рис. 146) двукратное отражение луча 1 в более толстом эталоне  $t'$  компенсируется четырехкратным отражением луча 2 в более тонком

эталоне  $t$ . В результате, если расположить два эталона, один из которых почти точно вдвое толще другого, параллельно друг другу ( $\alpha=0$ ), то возникает равномерно окрашенное поле.

Этим приемом Фабри, Перо и Бенуа воспользовались для сравнения длин двух эталонов. В действительности, требование, чтобы  $t'=2t$ , выполняется не вполне точно и поэтому при параллельном расположении эталонов ( $\alpha=0$ ) возникает разность хода  $\Delta=2(t'-2t)$ . Если бы  $\Delta$  было равным нулю, то при освещении белым светом все поле оказалось бы белым. При  $\Delta \neq 0$  оно окрашено. Значение  $\Delta$  может быть найдено путем

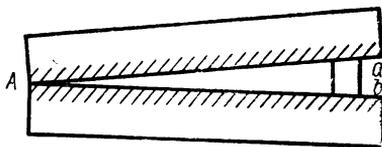


Рис. 147. Воздушный клин между двумя пластинками.

компенсации разности хода с помощью клина. Последний образуется двумя отчасти посеребренными плоскопараллельными пластинками (рис. 147), которые сложены (посеребренными поверхностями друг к другу) так, что с одного края они соприкасаются, а с другого между ними проложен листок металлической фольги  $ab$ . При пропускании монохроматического света через такой очень тонкий клин возникает большое число резких полос равной толщины. Наблюдая эти полосы, можно определить толщину клина в любом месте в длинах той световой волны, с помощью которой наблюдаются полосы. Для этого нужно знать порядок полосы  $k$ , так как толщина клина в месте расположения полосы равна  $\delta t = k\lambda/2$ . Если бы не было скачка фаз при отражении от посеребренных поверхностей, то порядок  $k$  можно было определить, считая число полос, начиная от края клина  $A$ , где разность хода в этом случае равнялась бы нулю. Однако наличие скачка фазы при отражении не позволяет использовать такой простой способ. Поэтому толщина клина определяется путем наблюдения двух систем полос, получаемых в свете двух спектральных линий, длины волн которых  $\lambda$  и  $\lambda'$  заранее хорошо известны. Тогда, наблюдая сдвиг одной системы полос относительно другой так, как это делается в методе совпадения дробных частей, можно найти  $k$  и  $k'$  для полос в свете обеих линий. Если в качестве одной из линий используется красная кадмиевая линия, то толщина клина  $\delta t$  в данном месте находится в длинах волн этой линии.

Для сравнения длин эталонов клин вводится между ними. При этом в определенном месте он компенсирует разность хода лучей, проходящих через оба эталона, и в этом месте получается белая полоса. Очевидно, она получается в том месте, где выполняется равенство  $t'-2t-\delta t=0$ . Поскольку  $\delta t$  найдено в длинах волн красной кадмиевой линии, постольку и разность  $t'-2t$  находится в длинах волн этой линии.

Переходя от наиболее короткого эталона к последующим,

Фабри, Перо и Бенуа доходили до эталона в 100 см, длина которого с помощью компаратора сравнивалась с длиной нормального метра. В виде окончательного результата они получили, что на длине нормального метра укладывается следующее число длин волн красной линии кадмия:

$$1 \text{ м} = 1553164,13 \lambda_{\text{cd.}}$$

Это число значительно расходится с числом, полученным Майкельсоном. Это расхождение не обусловлено ошибками измерений того или иного автора. Оно связано с тем, что Фабри и Перо относили свое значение к сухому воздуху при  $15^{\circ}\text{C}$  и давлению 760 мм рт. ст., в то время как Майкельсон, приводя свои данные также к  $15^{\circ}\text{C}$  и давлению 760 мм рт. ст., не делал поправки на влажность воздуха. Если принять вероятное значение влажности воздуха во время опытов Майкельсона равным 70% и ввести соответствующую поправку, то исправленное значение Майкельсона практически полностью совпадает со значением, полученным Фабри, Перо и Бенуа.

### § 30. Концевые меры и их измерение

Штриховая мера, как указано, не может быть непосредственно сравнена с длиной световой волны. Кроме того, сама штриховая мера определена неточно. Для того чтобы штрих мог быть увиден в микроскопе, его ширина должна превосходить длину световой волны. При большом увеличении микроскопа штрих имеет вид широкой расплывчатой царапины. Наблюдатель стремится совместить крест измерительных нитей с местом, которое, на его взгляд, соответствует середине царапины. Такое определение субъективно и ведет к заметным ошибкам.

Этим недостатком не обладает концевая мера, представляющая собой металлический стержень, имеющий в сечении прямоугольную или какую-либо другую форму. Оба торца стержня зеркально полируются. При этом можно достичь, чтобы отступления от идеальной плоскости не превышали долей длины волны и чтобы оба торца были параллельны друг другу с такой же точностью. Таким образом, концевая мера определена с точностью до долей длины волны. Кроме того, длина концевой меры может быть непосредственно сравнена с длиной световой волны.

Для небольших концевых мер (с длиной порядка 10—12 см) сравнение с длиной световой волны выполняется с помощью интерферометра Кестерса, представляющего собой видоизмененный интерферометр Майкельсона. Неподвижное зеркало  $M_1$  (рис. 148, *a*) располагается горизонтально и к нему притирается нижним торцом концевая мера  $A$ . Верхний торец концевой

меры параллелен поверхности  $M_I$ . Прибор юстируется таким образом, чтобы в фокальной плоскости объектива  $L_2$  образовались полосы равной толщины в результате интерференции лучей, отраженных от зеркала  $M_{II}$  и соответственно от верхнего торца концевой меры  $A$  и от зеркала  $M_I$  (рис. 148, б). Обе системы полос сдвинуты относительно друг друга на некоторую дробную часть полосы  $\delta$ , которая измеряется. Длина меры  $l$  равна

$$l = (k + \delta) \lambda,$$

где  $k$  — целое число. Освещая интерферометр светом нескольких спектральных линий с хорошо известными длинами волн  $\lambda_i$ , можно однозначно подобрать значения целых чисел  $k$ , подобно тому, как это делается в методе совпадения дробных частей в работе Фабри, Перо и Бенуа.

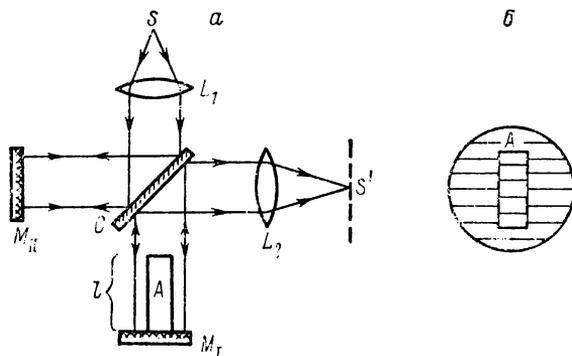


Рис. 148. Интерферометр Кестерса (а); вид возникающих полос (б).

В качестве источника света Кестерс использовал гелиевую разрядную трубку. Гелий имеет в видимой части спектра пять ярких линий с длинами волн  $\lambda = 667,828$ ;  $587,562$ ;  $501,567$ ;  $471,314$ ;  $447,096$  нм. Линии выделяются с помощью призмного монохроматора, конструктивно объединенного с интерферометром. Обычно трех линий достаточно для подбора правильных значений  $k$ ; остальные две служат для контроля. Очевидно, таким же способом могут быть сравнены длины двух концевых мер, которые притираются к пластинке  $M_I$  рядом друг к другу.

В другой установке Кестерса система интерферометра Майкельсона изменена более существенно, что позволило создать прибор более компактный и устойчивый к помехам. Вместо отдельно расположенных разделительной пластинки  $C$  и зеркала

ла  $M_{II}$  в нем используется сложная призма (рис. 149), состоящая из прямоугольной призмы  $GBC$  и прижатой к ней усеченной призмы  $DBCE$ . Линия соприкосновения обеих призм  $BC$  сделана отчасти отражающей и играет роль разделительной

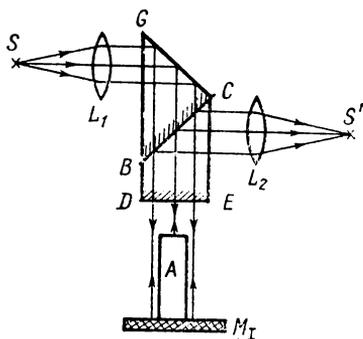


Рис. 149. Интерферометр Кестера с разделительной призмой.

пластинки  $C$ . Поверхность призмной системы  $DE$  также полукруглая, она заменяет зеркало  $M_{II}$ . Поверхность составляет малый угол с параллельными друг другу верхней торцевой поверхностью концевой меры и поверхностью зеркала  $M_I$ . В фокальной плоскости объектива  $L_2$  наблюдается система интерференционных полос, совпадающая с изображенной на рис. 148, б.

Очевидно, в обоих вариантах метода Кестера длина когерентного пучка используемого света должна превышать удвоенную длину концевой меры  $A$ . Для узких спектральных линий, испускаемых газоразрядной трубкой низкого давления, это составляет 20—30 см.

Недостатком метода Кестера является то, что с его помощью измеряется расстояние между верхним торцом концевой меры  $A$  и поверхностью  $M_I$ , к которой она притерта. Эта длина несколько отличается от длины самой меры, так как между ее нижним торцом и поверхностью  $M_I$  образуется промежуточный слой из масла, которым смачиваются поверхности перед притиранием. Его толщина достигает долей световой волны.

Сирс и Берелл в 1934 г. повторили сравнение длины нормального метра с длиной волны красной линии кадмия, используя метод Фабри, Перо и Бенуа, но внеся в него ряд существенных улучшений. Они пользовались лишь двумя эталонами, один из которых имел длину  $1/9$  м, а другой  $1/3$  м. Длина последнего сравнивалась на компараторе с длиной нормального метра. Эталоны изготовлялись в виде трубок из инвара, концы которых были хромированы. Плоскостражающие кварцевые пластинки притирались к концам трубки настолько плотно, что могли удерживать вакуум. Воздух из трубки откачивался. Таким образом, длина эталона сравнивалась с длиной световой волны в вакууме. Это очень важное обстоятельство, так как первичной величиной, определяемой свойствами атома, является частота излучения  $\nu$ ; длина же волны в воздухе  $\lambda_{\text{возд}} = c/n\nu$ , где  $c$  — скорость света в пустоте, а  $n$  — коэффициент преломления воздуха. Последний зависит от температуры воздуха, его давления и наличия в нем различных примесей

(пара, воды и т. д.). Это требует точной стандартизации условий, при которых находится воздух. При отнесении длины волны к вакууму эти трудности отпадают.

Сирс и Барелл произвели измерения и концевой меры. Для этого была изготовлена концевая мера несколько меньшая, чем  $1/3$  м. Концевая мера помещалась внутрь более длинного трубчатого эталона (рис. 150). Ее торцы были параллельны пластинкам эталона и между ними образовались зазоры  $\delta t$  и  $\delta t'$ , которые можно было промерить интерферометрически. Измерения производились в свете красной линии кадмия. Поскольку длина самого эталона уже была сравнена с длиной волны  $\lambda_{\text{Cd}}$ , то и длина концевой меры оказывалась сравненной с этой длиной волны.

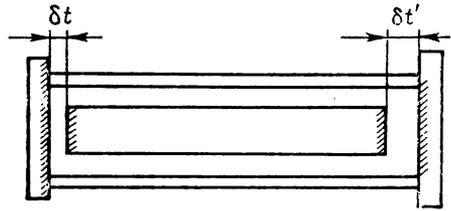


Рис. 150. Расположение концевой меры внутри трубчатого эталона.

В нашей стране для измерения концевых мер длиной до 1200 мм М. Ф. Романовой с сотрудниками была разработана установка, схема которой изображена на рис. 151. В основу метода положено сравнение длины концевой меры 1 с притертым к ее концу зеркалом с длиной трубчатого эталона Фабри — Перо 2. Свет от лампы накаливания 3 проходит через эталон и претерпевает в нем многократные отражения. Система зеркал и полупрозрачная пластинка 4 образуют двухлучевой интерферометр, в котором лучи, падающие на поверхности меры и вспомогательного зеркала 5, идут параллельно друг другу. Благодаря этому система оказывается компактной и термозащищенной. С помощью зрительной трубы 6 наблюдается интерференционная картина на поверхности меры. Эта картина видна в белом свете, когда разность хода для лучей, отраженных от поверхности зеркала 5 и торца меры или притертого к ней зеркала, кратна длине трубчатого эталона. Лучи, прошедшие в интерферометре большее расстояние, интерферируют с лучами, испытавшими внутри эталона несколько отражений, но прошедшими в интерферометре меньший путь. Обычно вспомогательное зеркало устанавливается так, чтобы его мнимое изображение делило меру пополам.

Для измерения длины 1000 мм меры толщина эталона с точностью порядка 1 мкм подгоняется равной 100 мм. Небольшое изменение его оптической толщины достигается путем изменения давления воздуха внутри эталона. Поскольку погрешность измерения длины меры в значительной степени определяется точностью измерения длины трубчатого эталона, эта операция производится уже после установки эталона в корпус интерферометра. С этой целью вместо лампы 3 устанавли-

вается монохроматический источник света, испускающий излучение с хорошо известной длиной волны. В пучок, выходящий из эталона, вводится зеркало 7, направляющее лучи на фотокамеру 8. Фотографируя интерференционные кольца для нескольких линий, можно методом совпадения дробных частей

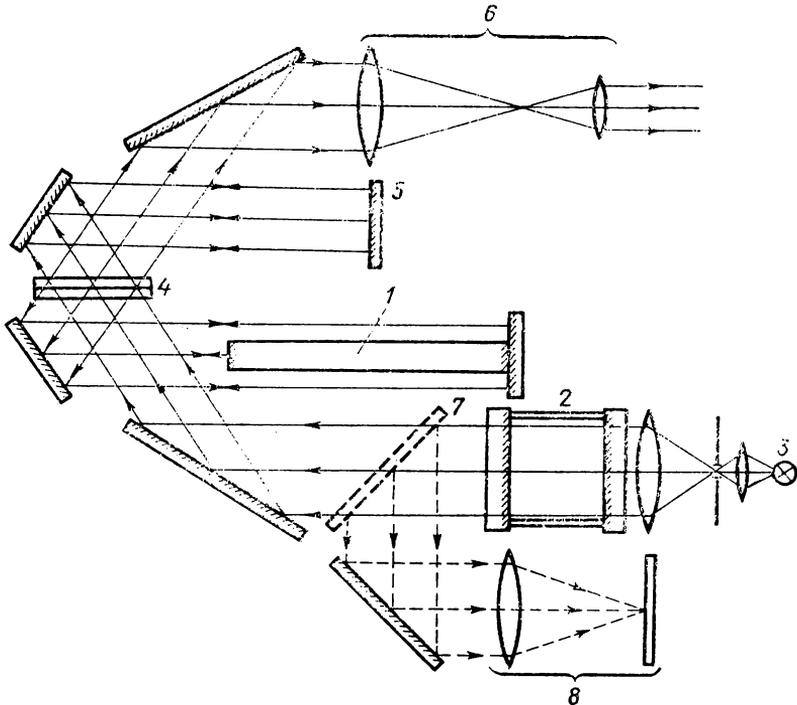


Рис. 151. Схема установки для измерения длины концевых мер до 1200 мм.

порядков определить толщину эталона. При использовании фотокамеры или фотоэлектрической приставки ошибка составляет 0,005 порядка интерференции. Результирующая ошибка измерения длины концевой меры не превышает 0,1 мкм.

Интерференционные методы могут применяться и для измерения еще больших длин, представляющих интерес для геодезической практики. Примером может служить измерение пятиметрового геодезического жезла. Использовался набор пяти эталонов Фабри—Перо общей длиной 5 м. Эталоны I—V (рис. 152) располагались один за другим так, что переднее зеркало одного эталона несколько заходило за заднее зеркало предыдущего. Длина каждого из эталонов сравнивалась с длиной красной кадмиевой линии описанным выше способом. Ве-

личина зазоров  $\delta t$  между эталонами определялась по полосам равной толщины с помощью компенсационного клина. Общая пятиметровая длина была измерена с точностью около 1 мкм.

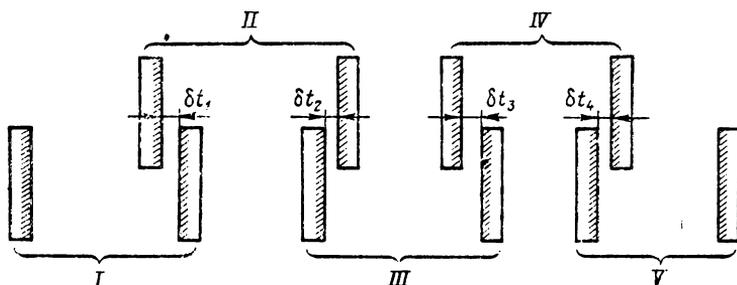


Рис. 152. Последовательное расположение пяти эталонов Фабри — Перо.

Возможность сравнивать практически любые, представляющие интерес длины с длиной световой волны, позволила поставить вопрос о замене механической (штриховой или концевой) меры длины длиной световой волны определенной спектральной линии. В современной интернациональной системе единиц (СИ) за таковую выбрана оранжевая линия чистого изотопа криптона  $Kr^{86}$ , возникающая при переходе между уровнями  $5d_5$  и  $2p_{10}$ . Изотоп криптона  $Kr^{86}$  относится к четно-четным изотопам ( $Z=36$ ) и потому не обладает сверхтонкой структурой.

Метр определяется как длина, равная:  $1650763,73 \lambda_{Kr}$  (вак.).

Определенный таким образом метр совпадает с прежним штриховым метром с точностью до  $1 \cdot 10^{-7}$ .

Поскольку длина волны линии криптона несколько зависит от условий, при которых она возбуждается, источник света (разрядная трубка) стандартизуется по давлению газа, температуре и силе тока.

С появлением газовых лазеров непрерывного действия, представляющих собой источники света, чрезвычайно высокой степени монохроматичности, встал вопрос о замене линии криптона лазерным излучением. В принципе лазерное излучение с шириной линии уже естественной ширины и очень большой длиной цуга когерентных волн позволяет повысить точность интерференционных измерений на несколько порядков. Однако до сих пор переход к лазерному излучению не произведен. Это вызвано необходимостью его стандартизовать. Как было указано в ч. 1, обычно лазер генерирует на нескольких модах, лежащих в пределах доплеровской ширины спектральной линии. Возможно создание режима одномодовой генерации. Однако необходима не только стабильность излучения моды, но и ее строгая воспроизводимость, что связано с рядом трудностей.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФАЗОВЫХ СООТНОШЕНИЙ

### § 31. Информация, передаваемая световым потоком

Световая волна, как указывалось, характеризуется амплитудой  $a$ , длиной волны  $\lambda$  (или частотой  $\nu$ ), фазой  $\phi$ , поляризацией и направлением распространения. Эти параметры несут ту информацию, которую световая волна может передать об источнике, который ее испускает, об объектах, от которых она отразилась или рассеялась, и о тех средах, через которые она прошла. До сих пор мы рассматривали два из этих каналов информации — амплитуду, определяющую освещенность в области изображения, и фазу, характеризующую положение интерференционной полосы. Длину волны мы считали заданной, т. е. не учитывали спектрального состава света.

При построении изображения объекта методами лучевой оптики учитывается лишь распределение освещенности в фокальной плоскости оптической системы. Другими словами, извлекается лишь та информация, которая определяется квадратом амплитуды  $|a|^2$ . Но для учета разрешающей силы системы (§ 21) требуется уже рассмотрение дифракционных явлений, т. е. тех разностей фаз, с которыми лучи сходятся в месте изображения. Это указывает, что при более подробном рассмотрении структуры изображения нужно учитывать фазовые соотношения. На этих задачах мы остановимся несколько ниже, пока же коснемся некоторых общих вопросов получения (или хранения) и обработки информации.

В теории информации рассматривается схема получения и обработки информации, носящая название цепочки Шеннона (рис. 153). Слева условно отмечен источник информации; затем идет ее отбор. Для того чтобы эту информацию передать или сохранить, ее надо закодировать. Следующим звеном является передача или хранение информации. Наконец, мы имеем процесс декодирования и прием, сопровождающийся обработкой.

От источника информации поступают сигналы (в случае оптики — световые потоки, зависящие от определенных параметров) — это первичный объективный процесс, подлежащий изучению. Будем считать, что остальные звенья — отбор, кодирование и т. д. производится приборами и что субъективный



Рис. 153. Цепочка Шенона.

элемент присутствует лишь на последних этапах — приеме и обработке. Каждый этап вносит те или иные искажения и повсюду имеются в той или иной мере помехи. Последние могут носить грубый, устранимый характер, например, вызываться тряской, непостоянством температуры и т. д. Наряду с ними всегда присутствуют неустранимые тепловым флюктуационные помехи. Их уровень может снижаться лишь за счет понижения температуры (ч. 1, § 18).

Обратимся к конкретному примеру — получению фотографии. На фотографируемый объект  $O$  (рис. 154,  $a$ ) падает первичный световой поток  $F_0$ , который частично отражается от него, частично им поглощается.

В результате получается вторичный световой поток  $F$  со своими амплитудами, фазами и их распределением по длинам волн. Они несут всю ту информацию, которую может нести световой поток об объекте, от которого он отражается. Для простоты будем считать все параметры не зависящими от времени, что соответствует случаю моментальной фотографии практически неподвижного объекта.

Часть отраженного потока падает на объектив фотоаппарата  $A$  и собирается в его фокальной плоскости, где расположена фотографическая пластинка. После проявления на пластинке получают места большего или меньшего почернения.

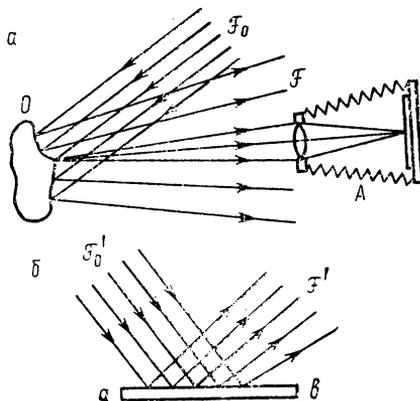


Рис. 154. Фотографирование объекта ( $a$ ); декодирование фотографии ( $b$ ).

Можно считать, что почернение пропорционально квадрату амплитуды  $|a|^2$  световой волны, сфокусированной на фотопластинке. Фазовые соотношения и распределение амплитуд по длинам волн (при бело-черной фотографии) остаются незарегистрированными. Таким образом, произошел отбор, значительно обедняющий информацию, которую нес световой поток  $F$ , отраженный от объекта. Фотопластинка произвела лишь запись распределения по ее поверхности квадрата амплитуды  $|a|^2$ . Запись искажена целым рядом факторов. Прежде всего всякое кодирующее устройство обладает своей собственной аппаратной функцией и поэтому запись определяется, как мы видели (§ 21), сверткой функции объекта с аппаратной функцией. Кроме того, имеется ряд других помех — в данном случае аберрации оптической системы, наличие зерна в эмульсии светочувствительного слоя фотопластинки и т. д. Мы имеем перед собой обедненную и в той или иной мере искаженную кодовую запись информации, причем элементами кода являются почерневшие зерна фотопластинки.

Рассматривание готовой фотографии есть процесс декодирования. Обычно с негатива делается позитив, но это не имеет принципиального значения, так как негатив несет всю ту информацию, которая была закодирована фотопластинкой. Изготовление позитива облегчает лишь последний этап цепочки, которым в данном случае является субъективная обработка, сопутствующая рассматриванию фотографий.

Для декодирования фотография  $ab$  освещается потоком  $F'_0$  (рис. 154, б) и возникает отраженный от нее поток  $F'$ . Он характеризуется своим распределением квадрата амплитуд  $|a'|^2$ , которое при малой роли искажений близко к распределению квадрата амплитуд  $|a|^2$  в потоке  $F$ , отраженном от объекта  $O$  при его фотографировании. Воспринимая поток  $F'$  глазом, мы «увидим» сфотографированный объект, но полученная нами информация будет более бедной, чем при непосредственном наблюдении объекта. Отсутствие фазовых соотношений, характеризовавших поток  $F$ , лишает нас возможности объемного восприятия объекта; отсутствие распределения амплитуд по длинам волн не позволяет узнать цветность объекта. Конечная разрешающая сила объектива фотоаппарата и другие искажающие факторы уменьшают число воспринимаемых деталей.

Из сказанного ясно, что фотография представляет собой лишь обедненную и в той или иной мере искаженную кодовую запись информации, которую несли световые волны, отраженные от фотографируемого объекта. Кажущееся «сходство» фотографии с объектом обусловлено простотой метода декодирования и привычностью обработки (в действительности очень сложной), которую производит наш мозг при рассматривании снимка.

Изложенные соображения приложимы к процессу обработки любого оптического изображения. При этом для извлечения первоначальной информации надо исключить роль помех и искажений. В результате наличия аппаратной функции кодирующего (записывающего) устройства обработке подвергается не сама функция объекта  $f(x)$  (§ 21), а функция наблюдения  $F(x)$ . До недавнего времени казалось, что существенно, чтобы функция наблюдения как можно меньше отличалась от функции объекта, т. е. чтобы аппаратная функция по возможности приближалась бы к  $\delta$ -функции. С современной точки зрения задача ставится иначе: требуется хорошее знание аппаратной функции и такой ее вид, чтобы решение математической задачи нахождения функции объекта  $f(x)$  по функции наблюдения  $F(x)$  носило корректный характер (§ 21).

Губится информация лишь флюктуационными колебаниями (шумами), которые, как указывалось, могут снижаться за счет понижения температуры. При наличии периодических, следующих друг за другом сигналов, роль шумов может снижаться путем математической обработки или путем применения соответствующей усредняющей по времени аппаратуры.

Информация может получаться за счет любого из параметров, от которых зависит данный сигнал. Одновременное использование нескольких параметров существенно обогащает извлекаемую из наблюдений информацию. Ниже мы приведем ряд примеров использования наряду с амплитудными и фазовых соотношений.

### § 32. Звездный интерферометр

Вновь рассмотрим случай наблюдения звезд с помощью телескопа (§ 16). В фокальной плоскости объектива телескопа образуется лишь дифракционное пятно, а не изображение звезды, передающее ее геометрические характеристики. Размер и вид дифракционной картины определяются длиной волны  $\lambda$  и диаметром объектива  $D$ . Они одинаковы независимо от того, имеет ли звезда правильную сферическую или иную, например, эллипсоидальную форму.\*) Дифракционная картина создана самим прибором (аппаратом, в данном случае объективом телескопа) и характеризует его свойства. Распределение освещенности в пределах дифракционной картины есть аппаратная функция телескопа. Таким образом, наблюдение звезды в телескоп представляет собой предельный случай, когда возникающее «изображение» описывается лишь аппаратной функцией. Она несет очень обедненную информацию, сводящуюся к двум данным. Во-первых, мы узнаем, что от звезды падают на теле-

---

\* Не так обстоит дело по отношению к планетам и небесным туманностям, которые видны под конечным углом зрения.

скоп практически параллельные лучи, т. е. звезда расположена очень далеко; направление этих лучей определяет направление на звезду. Во-вторых, мы можем судить по степени освещенности в максимуме дифракционной картины об относительной яркости звезды.

В случае двух звезд, находящихся на угловом расстоянии  $\Delta\varphi$  друг от друга, в фокальной плоскости объектива возникают две дифракционные картины, сдвинутые на тот же угол  $\Delta\varphi$ . Это дает добавочную информацию о наличии двух звезд и об угловом расстоянии между ними. По критерию Рэлея (§ 21) изображения звезд разрешены, если угловое расстояние между ними

$$\Delta\varphi > \delta\varphi = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (32.1)$$

Мы уже указывали на ограниченность критерия Рэлея, который сводится к требованию «увидеть» две звезды отдельно. Однако рассматривание глазом есть тоже процесс обработки информации, причем достаточно грубый, ограничиваемый свойствами глаза и особенностями центральной нервной системы человека.

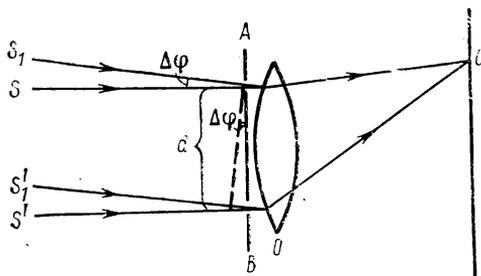


Рис. 155. Объектив с диафрагмой со щелями.

При фотометрировании распределения освещенности в картине, возникающей от положения двух дифракционных максимумов, и последующей математической обработки результатов измерений можно разрешить две звезды, находящиеся на угловом расстоянии, меньшем, чем определяемое соотношением (32.1).

Однако для разрешения изображения двух звезд можно использовать и другой прием, чем наблюдение двух дифракционных картин от объектива телескопа. Для этого можно воспользоваться фазовыми соотношениями, возникающими при образовании соответственных интерференционных полос. На такую возможность указал еще Физо в 1858 г., реализована она была значительно позже в работах Майкельсона.

Рассмотрим объектив O, закрытый диафрагмой AB (рис. 155), в которой имеются отверстия в виде двух узких щелей, расположенных на расстоянии d друг от друга. Пусть на объектив падает пучок параллельных лучей SS' с длиной волны λ и второй пучок S<sub>1</sub>S'<sub>1</sub>, составляющий с ним угол Δφ. Каждый из пучков дает в точке C на экране, расположенном в фокальной плоскости объектива, интерференционные полосы

в виде параллельных светлых и темных линий. Если пучки  $SS'$  и  $S_1S_1'$  некогерентны, то общая картина получается путем суммирования освещенностей от отдельных картин. Разность фаз, с которой приходят колебания от обоих пучков в точку  $C$  экрана, равна  $2\pi \frac{d\Delta\varphi}{\lambda}$ , и, следовательно, обе интерференционные картины смещены друг относительно друга на число порядков

$$\Delta k = \frac{d\Delta\varphi}{\lambda}. \quad (32.2)$$

При  $\Delta k = 0, 1, 2, \dots$  интерференционные максимумы обеих картин совпадают, а при  $\Delta k = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$  максимумы одной картины попадают на минимумы другой. В этом последнем случае общая интерференционная картина размыта. При изменении расстояния между щелями  $d$  четкость картины будет периодически возрастать и убывать. Смена четкой картины на размытую будет происходить по (32.2) при изменении расстояния между щелями на  $\Delta d$ , равное  $\lambda/2\Delta\varphi$ , откуда

$$\Delta\varphi = \frac{\lambda}{2\Delta d}. \quad (32.3)$$

Если источниками параллельных пучков света являются звезды, то, изменяя расстояние  $d$  между щелями, можно на основании (32.3) найти угловое расстояние  $\Delta\varphi$  между ними. Так как  $\Delta d$  должно быть меньше диаметра объектива  $D$ , то наименьшее определяемое  $\Delta\varphi$  представляет собой величину одного порядка с  $\Delta\varphi$ , находимым на основании критерия Рэлея (32.1).

Рассмотрим теперь более общий случай весьма удаленного, но протяженного некогерентного источника, от середины которого распространяется пучок  $SS'$ . Можно разбить источник на зоны в виде полосок, перпендикулярных к линии  $SS'$ . Колебания от каждой полоски некогерентны между собой и каждая из них дает в точке  $C$  на экране свою систему интерференционных полос. Общее распределение освещенности в точке  $C$  экрана получится путем суммирования освещенностей от отдельных зон. Пусть разность фаз, с которой лучи  $S$  и  $S'$  от центральной зоны приходят в точку  $C$ , равна  $\delta_0$ . Тогда от зоны, отстоящей от нее на угол  $\alpha$ , лучи  $S_1$  и  $S_1'$  придут в точку  $C$  с разностью фаз

$$\delta = \delta_0 + \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d.$$

Считая зоны бесконечно узкими и заменяя суммирование интегрированием, получим по (22.2) для суммарной освещенности

$$E = \int_{\Delta\varphi} \Delta E_1 d\alpha + \int_{\Delta\varphi} \Delta E_2 d\alpha + 2 \int_{\Delta\varphi} \sqrt{\Delta E_1 \Delta E_2} \cos \delta d\alpha, \quad (32.4)$$

где  $\Delta\varphi$  — угловые размеры источника:  $\Delta E_1 d\alpha$  и  $\Delta E_2 d\alpha$  — освещенности в точке  $C$  от одной элементарной зоны, свет от которой прошел соответственно лишь через первую или через вторую щель в диафрагме  $AB$ . Приближенно можно считать

$$\Delta E_1 = \Delta E_2 = b(\alpha) B,$$

где  $B$  — яркость, а  $b(\alpha)$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от угла  $\alpha$ . Тогда по (32.4)

$$E = 2B \int_{\Delta\varphi} b(\alpha) (1 + \cos \delta) d\alpha = 2B \int_{\Delta\varphi} b(\alpha) \left[ 1 + \cos \left( \delta_0 + \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \right) \right] d\alpha,$$

$$E = 2B [P + C(d) \cos \delta_0 - S(d) \sin \delta_0], \quad (32.5)$$

$$P = \int_{\Delta\varphi} b(\alpha) d\alpha,$$

$$C(d) = \int_{\Delta\varphi} b(\alpha) \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \right) d\alpha,$$

$$S(d) = \int_{\Delta\varphi} b(\alpha) \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \right) d\alpha.$$

Максимальные и минимальные значения  $E$  определяются требованием, чтобы  $dE/d\delta_0 = 0$ , откуда по (32.5) должно быть

$$\operatorname{tg} \delta_0 = -S/C.$$

После этого по (32.5) находим, что экстремальные освещенности  $E$  равны

$$E_{\text{экстр}} = P \pm |V\sqrt{C^2 + S^2}|.$$

Составим функцию видности  $V$  аналогично тому, как это было сделано в § 22

$$V = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{|V\sqrt{C^2 + S^2}|}{P}. \quad (32.6)$$

Для данной точки  $C$  экрана видность  $V$  является функцией расстояния между щелями  $d$ . Вид ее зависит от геометрии и размеров источника и от распределения в его пределах яркости, характеризуемого множителем  $b(\alpha)$ . Для удаленного равномерно светящегося источника  $b(\alpha) = \text{const}$ .

Разобранный в начале параграфа случай двух точечных некогерентных источников, расположенных на угловом расстоянии  $\Delta\varphi$  друг от друга, является частным случаем общей задачи, описываемой формулами (32.5) и (32.6). Расчеты могут быть проведены и для ряда простых случаев протяженных источников. На рис. 156,  $a$ — $v$  соответственно представлено рас-

пределение видности  $V$  для случаев: а) два одинаковых точечных источника на угловом расстоянии  $\Delta\varphi$ ; б) равномерно светящийся прямоугольный источник угловой ширины  $\Delta\varphi$  (в направлении, перпендикулярном щелям в диафрагме); в) равномерно светящийся диск углового диаметра  $\Delta\varphi$ . Как видно, во всех случаях видность интерференционных полос периодически меняется с изменением расстояния между щелями  $d$ .

Практический интерес представляет задача, обратная рассмотренной: нахождение размеров источника по наблюдаемой зависимости  $V$  от  $d$ . Решение такой задачи в общем виде встречает существенные трудности. Однако если вперед известна геометрия источника, то можно определить его угловые размеры  $\Delta\varphi$ , воспользовавшись результатами расчетов, приведенных на рис. 156. И в этих случаях получаемая информация не превышает той, которая находится при непосредственном наблюдении объекта в телескоп с использованием критерия Рэля. Значительный выигрыш можно получить путем увеличения  $d$ , что достигается с помощью звездного интерферометра Майкельсона, схема которого изображена на рис. 157. Свет от наблюдаемого небесного объекта падает на два плоских зеркала  $C_1$  и  $C_2$ , расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга. Лучи, отраженные от этих зеркал с помощью двух других зеркал  $C_3$  и  $C_4$ , направляются на объектив телескопа  $O$ . Интерферируя в фокальной плоскости объектива, они дают такую же систему интерференционных полос, какая была рассмотрена выше. Расстояние  $d$ , очевидно, можно сделать значительно больше диаметра объектива  $D$ . Таким способом могут быть определены углы  $\Delta\varphi$ , меньшие тех, которые определяются при непосредственном наблюдении в телескоп.

Первые наблюдения были выполнены с 12-дюймовым телескопом на горе Гамильтон в США. Были измерены диаметры спутников Юпитера. Несколько позже удалось измерить угловое расстояние между компонентами двойной звезды Капеллы. Существенным мешающим фактором может оказаться неоднородность атмосферы, вносящая дополнительную разность хода в лучи, идущие от звезд. Однако опыты показали, что при благоприятных атмосферных условиях измерения выполнены даже при значении  $d$  в несколько метров.

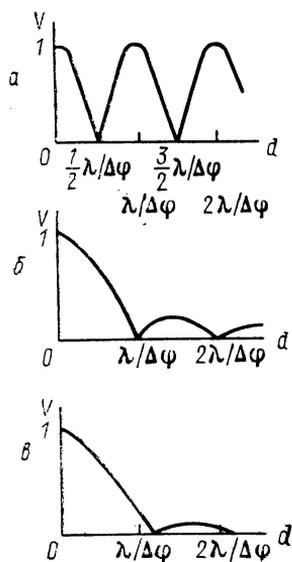


Рис. 156. Зависимость функции  $V$  от расстояния  $d$  между щелями для трех частных случаев.

В 1920 г. Майкельсон совместно с Пизом построил в обсерватории на горе Вильсон звездный интерферометр с максимальным расстоянием между зеркалами в 6,1 м. Наблюдалась звезда Бетельгейзе в созвездии Орион, принадлежащая к типу красных гигантов. Интерференционная картина исчезала при расстоянии между зеркалами в 3,2 м. Этому соответствует угловой диаметр звезды в  $0,047''$ . Поскольку расстояние до Бетельгейзе известно (по параллаксу), то можно было определить линейные размеры диаметра этой звезды, оказавшиеся приблизительно равными диаметру орбиты Марса.

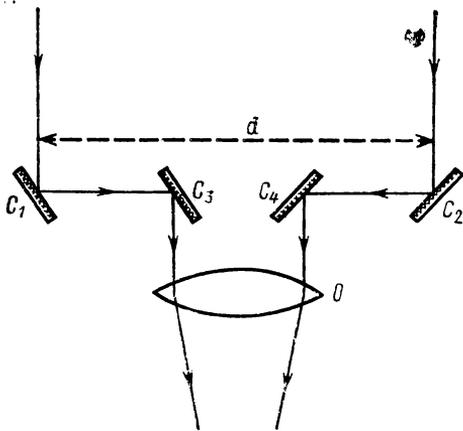


Рис. 157. Звездный интерферометр Майкельсона.

Описанные опыты интересны тем, что они показывают возможность получать

информацию об объекте, используя не только амплитуды волн, но и фазовые соотношения. Для того чтобы определить размеры звезды, не надо «увидеть» ее в телескоп, достаточно наблюдать возникающую интерференционную картину и ее изменение по мере увеличения разности хода.

### § 33. Дифракционные явления в микроскопе

В § 21, говоря о разрешающей силе микроскопа, мы рассматривали дифракционные картины, возникающие в главной фокальной плоскости объектива. При этом мы считали, что каждая точка объекта является самостоятельным источником света; световые колебания, идущие от разных точек, некогерентны. Каждая точка объекта дает в фокальной плоскости объектива свой дифракционный кружок. Суммарная освещенность находится простым сложением освещенностей от отдельных дифракционных кружков, что позволяет для определения разрешающей силы микроскопа использовать критерий Рэля.

Рассмотрим теперь в более общем виде возникновение изображения в микроскопе на основе волновых представлений. Отметим прежде всего, что обычно в микроскоп рассматриваются не самостоятельные объекты, а объекты, освещаемые от того или иного источника света с помощью конденсорной системы. Даже в том случае, когда источник полностью некогерентен, колебания в пределах тех дифракционных кружков, которые дает конденсорная система в плоскости расположения

объекта, когерентны между собой. Таким образом, в общем случае, освещение объекта надо считать частично когерентным. Полностью когерентным будет освещение, если на объект падает пучок когерентных лучей.

Очевидно, теорию возникновения изображения в микроскопе проще всего развить для случая когерентного освещения. Такая теория была развита Аббе, который рассматривал в качестве объекта пластинку  $AB$  (рис. 158), на которую нанесены параллельные друг другу прозрачные и непрозрачные (темные) полосы. Пластинка освещается параллельным пучком когерентного света  $OO'$ . В этих условиях она действует как дифракционная решетка. Пусть ее постоянная равна  $b$ . Изображение решетки, даваемое объективом микроскопа  $L$ , получается в плоскости  $A'B'$ , сопряженной с плоскостью, в которой расположена сама решетка. В главной же фокальной плоскости  $F$  объектива  $L$  получается изображение максимумов (спектров) различных порядков, даваемых решеткой. Максимум  $k$ -го порядка образуется лучами, дифрагирующими под углом  $\varphi$ , определяемым соотношением

$$b \sin \varphi = k\lambda. \quad (33.1)$$

Если мы имеем дело с иммерсионной системой (§ 21), то решетка  $AB$  погружена в жидкость с коэффициентом преломления  $n$  и под  $\lambda$  надо подразумевать длину волны в этой жидкости. Если же под  $\lambda$  подразумевать, как это обычно делается, длину волны в пустоте (практически в воздухе), то правую часть равенства (33.1) надо поделить на  $n$

$$b \sin \varphi = k \frac{\lambda}{n}. \quad (33.2)$$

При  $k = 0$  получается центральная световая полоса, справа и слева от нее максимумы более высоких порядков, соответствующие  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  (в белом свете все эти максимумы растянуты в спектр, но мы для простоты будем считать  $\lambda$  определенным). Лучи, идущие от центрального и побочных максимумов, интерферируют между собой, в результате чего в плоскости  $A'B'$  должно возникнуть изображение решетки  $AB$ .

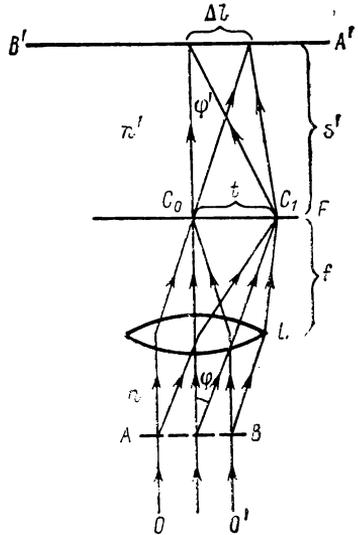


Рис. 158. Возникновение изображения по Аббе в микроскопе.

Проследим процесс образования изображения более подробно. Предположим сперва, что закрыты все максимумы, кроме центрального  $C_0$ . В плоскости  $A'B'$  он создаст равномерную освещенность. Никакого изображения решетки  $AB$  не возникнет. Предположим теперь, что открыт центральный свет-

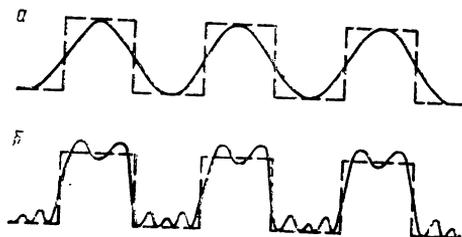


Рис. 159. Распределение освещенности в фокальной плоскости микроскопа при разном числе открытых дифракционных максимумов.

лый максимум  $C_0$  и еще один  $C_1$ , соответствующий  $k=+1$ . Оба эти максимума когерентны и исходящие от них лучи интерферируют, образуя в плоскости  $A'B'$  ряд параллельных интерференционных полос. Периодичность полос соответствует периодичности светлых и темных полос в решетке  $AB$ , но полосы размыты, так что их со-

вокупность можно рассматривать лишь как очень грубое «изображение» решетки. На рис. 159, *a* дано распределение освещенности в пределах интерференционных полос; пунктирная линия показывает распределение освещенности в идеальном геометрическом изображении решетки. Если оставить открытым большее число вторичных максимумов, то интерференционная картина усложнится и распределение освещенности в ней приблизится к идеальному. На рис. 159, *b* приведена освещенность для случая, когда кроме центрального оставлены открытыми еще 5 максимумов в плоскости  $F$ . При большем числе открытых максимумов мы еще более приблизимся к идеальному геометрическому изображению решетки. Таким образом, процесс возникновения изображения в оптической системе может быть прослежен без того, чтобы прибегать к представлениям лучевой оптики, лишь на основании рассмотрения дифракционных и интерференционных явлений.

Покажем, что рассуждения Аббе позволяют оценить разрешающую силу микроскопа. Остановимся на случае, когда образуются лишь центральный максимум  $C_0$  и ближайший к нему максимум  $C_1$  (см. рис. 158). Обозначим расстояние между ними через  $t$ . Исходящие от этих двух когерентных источников лучи образуют в плоскости  $A'B'$  интерференционные полосы, расстояние между которыми, по сказанному в § 22, равно

$$\Delta l = \frac{\lambda}{t} s',$$

где  $s'$ —расстояние от главной фокальной плоскости  $F$  до плоскости  $A'B'$ . Из рис. 158 видно, что приближенно  $t/s' \cong$

$\cong \sin \varphi'$ , откуда для  $\Delta l$  получаем

$$\Delta l = \frac{\lambda}{\sin \varphi'}. \quad (33.3)$$

Прозрачные полосы решетки отстоят друг от друга на расстоянии  $b$ ; если мы обозначим через  $\Delta y'$  размеры их изображения, получаемого в плоскости  $A'B'$  на основании лучевой оптики, то (при  $s' \gg f$ , где  $f$  — фокусное расстояние объектива  $L$ ) по условию синусов (§ 13) получим

$$n b \sin \varphi = n' \Delta y' \sin \varphi'.$$

Полагая коэффициент преломления среды (воздуха), где получается изображение  $n' = 1$ , из последнего равенства найдем

$$\Delta y' = \frac{nb \sin \varphi}{\sin \varphi'}.$$

Поскольку мы ограничили пучок, выходящий из объектива микроскопа, так что образуются лишь центральный максимум  $C_0$  и один побочный максимум  $C_1$ , то значение  $\sin \varphi$  определится равенством (33.1), в котором надо положить  $k = +1$ , тогда

$$\Delta y' = \frac{\lambda}{\sin \varphi'}.$$

Сравнивая это выражение с (33.3), получаем: интерференционные полосы, возникающие в плоскости  $A'B'$ , лежат на расстоянии  $\Delta l$ , равном тому расстоянию  $\Delta y'$ , на котором должны лежать изображения светлых полос решетки. Система интерференционных полос есть грубое «изображение» решетки, даваемое объективом микроскопа.

Если закрыть первый побочный максимум  $C_1$ , то, как было сказано, в плоскости  $A'B'$  возникнет равномерное освещение — «изображение» не будет разрешено. Следовательно, «изображение» решетки образуется лишь в том случае, когда наряду с центральным дифракционным максимумом  $C_0$  в плоскости  $F$  возникает хотя бы один побочный максимум  $C_1$ , т. е. если угол  $\varphi$  удовлетворяет условию

$$\sin \varphi \geq \frac{\lambda}{nb}.$$

Другими словами, микроскоп может разрешить штрихи решетки, если они отстоят на расстоянии

$$b \geq \frac{\lambda}{n \sin \varphi}.$$

Это выражение совпадает (вплоть до постоянного множителя 0,61) с выражением для наименьшего разрешимого рас-

стояния, находимого на основании критерия Рэлея (§ 21). Таким образом, оказывается, что разрешающая сила микроскопа при освещении объекта когерентным светом приблизительно такая же, как при рассмотрении объекта, отдельные точки которого испускают некогерентные лучи. Впоследствии теория Аббе была обобщена на случай некогерентных источников советским физиком Л. И. Мандельштамом. Д. С. Рождественский подробно рассмотрел наиболее общий случай освещения объекта частично когерентным светом.

Из теории Аббе следует, что «изображение» может оказаться геометрически не подобным объекту, если закрыть часть дифракционных максимумов, получающихся в главной фокальной плоскости объектива  $F$ . Например, если пропустить центральный максимум и побочные максимумы только четных порядков ( $k = \pm 2, \pm 4, \dots$ ), то в «изображении» светлые полосы расположатся на расстоянии  $\Delta l' = \frac{1}{2} \Delta y'$ , т. е. вдвое

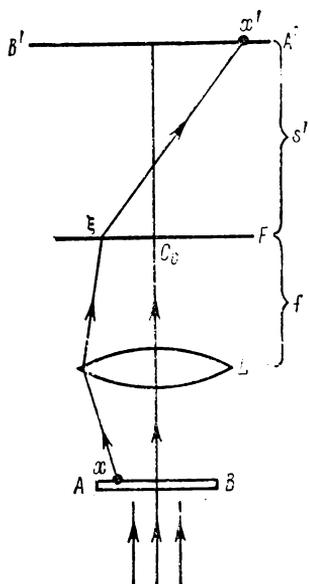


Рис. 160. К образованию изображения в микроскопе от амплитудного объекта.

чаще, чем в геометрическом изображении. Особенно наглядны «изображения» двумерного объекта в простейшем случае — сетки. В этом случае в плоскости  $F$  образуются две системы побочных максимумов, расположенных во взаимно перпендикулярных направлениях. Если в плоскости  $F$  расположить диафрагму, пропускающую свет только от горизонтально расположенных вторичных максимумов, то будут видны лишь вертикальные проволочки сетки. При повороте диафрагмы на  $90^\circ$  появятся только горизонтальные проволочки.

Сказанное выше может быть описано более строго математически. Пусть  $AB$  (рис. 160) представляет собой плоскопараллельную прозрачную пластинку, обладающую в разных местах разным пропусканием  $\tau$ . Таким образом, объект меняет лишь амплитуду падающего на него света, не внося дополнительных изменений фаз (амплитудный объект). Для простоты будем считать, что  $\tau$  зависит лишь от одной координаты  $\tau = \tau(x)$ . Очевидно, рассмотренный выше случай объекта в виде ряда прозрачных и непрозрачных полос (решетки) есть частный случай рассматриваемого теперь.

Пусть на объект падает параллельный пучок когерентного света. Тогда в фокальной плоскости  $F$  объектива микроскопа  $L$  возникает дифракционная картина от объекта. Выделим в плоскости  $F$  некоторую точку с координатой  $\xi$ . Тогда, в соответствии со сказанным в § 20, комплексная амплитуда  $\psi$  колебаний, дошедших до точки  $\xi$ , от всех точек объекта будет

$$\psi(\xi) = a_1 \int_{x_1}^{x_2} \tau(x) e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{\xi}{f} x} dx, \quad (33.4)$$

где  $a_1$  — постоянная;  $f$  — главное фокусное расстояние объектива  $L$ ;  $x_1$  и  $x_2$  — координаты, ограничивающие размеры объекта. Поскольку колебания во всех точках  $\xi$  плоскости  $F$  когерентны между собой, то, интерферируя в точке  $x'$  плоскости  $A'B'$ , сопряженной с  $AB$ , они дадут колебания с комплексной амплитудой

$$\psi'(x') = a_2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi) e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{x'}{s'} \xi} d\xi, \quad (33.5)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — координаты, ограничивающие освещенность в плоскости  $F$ . Подставляя в (33.5) значение  $\psi$  по (33.4), получим

$$\psi'(x') = a_1 a_2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \tau(x) e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \left( \frac{\xi}{f} x + \frac{x'}{s'} \xi \right)} dx d\xi. \quad (33.6)$$

Пределы интегрирования по  $x$  можно заменить  $\pm\infty$ , так как вне области пропускания  $\tau(x) = 0$ . Если считать также, что  $\psi(\xi)$  быстро спадает по мере возрастания координаты  $\xi$ , то и пределы интегрирования по  $\xi$  можно приближенно распространить на  $\pm\infty$ . Тогда интеграл (33.6) переписется в виде

$$\psi'(x') = a_1 a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) e^{\frac{2\pi i}{\lambda f} \left( x + \frac{f}{s'} x' \right) \xi} dx d\xi.$$

Можно показать, что последний интеграл равен  $a\tau(x')$ , где  $a$  — постоянная. Таким образом, освещенность в плоскости  $A'B'$  воспроизводит (только в перевернутом порядке) пропускание самого объекта. Это означает, что в плоскости  $A'B'$  возникает неискаженное (при отсутствии aberrаций у объектов  $L$ ) изображение объекта.

Однако в действительности пределы интегрирования по  $\xi$  в (33.6) не могут быть заменены  $\pm\infty$ , так как дифракционные максимумы в плоскости  $F$  образуются лишь при ограниченных значениях углов  $\xi/f$  (из-за конечного апертурного угла объек-

\* См., например: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Ч. 1. М., 1955.

тива  $L$ ). Это ведет к конечной разрешающей силе объективов.

При ограничении диафрагмами области интегрирования по  $\xi$  возникают все те отличия «изображения» от объекта, примеры которых приводились выше.

### § 34. Метод фазового контраста

До сих пор мы полагали, что в микроскоп рассматривается амплитудный объект, т. е. объект, имеющий в разных местах разный коэффициент пропускания  $\tau(x, y)$ . Прошедший через него световой фронт характеризуется значениями амплитуд, разными для разных участков фронта. Фаза колебаний сохраняется по всему фронту постоянной. Но можно себе представить объект другого рода, который, будучи повсюду одинаково прозрачным, имеет в разных местах различную оптическую толщину  $nl$ .

Такой объект называется «фазовым объектом». Он вносит в разные участки фронта разные изменения фазы колебаний. Изменение фазы может происходить как за счет изменения толщины объекта  $l$ , так и за счет изменения его коэффициента преломления  $n$ . Такой объект даст в фокальной плоскости микроскопа равномерную освещенность и, следовательно, не может быть воспринят глазом или другими обыкновенными приемниками (фотопластинка и т. д.). Вместе с тем большинство биологических объектов, рассматриваемых в микроскоп, представляют собой фазовые объекты, так как обычно микроорганизмы (бактерии) прозрачны и погружены в прозрачную среду. Для их наблюдения применяется метод окрашивания, который, однако, не пригоден в случае живых организмов. Примером фазового объекта может служить малая прозрачная частичка  $a$  (бактерия) с коэффициентом преломления  $n$ , погруженная в прозрачную среду с коэффициентом преломления  $n'$  (рис. 161). Амплитуды лучей 1 и 2, первый из которых прошел через частичку  $a$ , а второй рядом с ней, через окружающую среду, одинаковы, но между ними возникает разность фаз  $\Delta\varphi$ . Для микроскопических объектов (малые размеры и малая разность  $n - n'$ )  $\Delta\varphi$  мало.

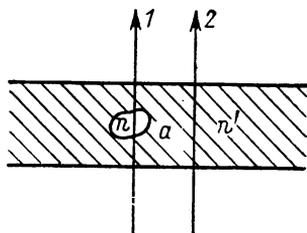


Рис. 161. Фазовый объект.

В 1935 г. Ф. Цернике предложил метод обнаружения фазовых объектов путем перевода изменения фазы в изменение освещенности за счет интерференции лучей, прошедших через разные участки объекта. Такой метод получил название фа-

зового контраста. Схема метода представлена на рис. 162. Фазовый объект  $AB$  освещается протяженным некогерентным источником  $I$  с помощью конденсора, состоящего из двух линз  $L_1$  и  $L_2$  и двух диафрагм  $D_1$  и  $D_2$ . Линза  $L_1$  проецирует изображение источника  $I$  на плоскость диафрагмы  $D_2$ . Диафрагма  $D_2$  расположена в главной фокальной плоскости линзы  $L_2$ . Таким образом, объект  $AB$  освещается бесконечным множеством параллельных пучков света, исходящих от разных точек той части изображения источника, которая не закрыта диафрагмой  $D_2$ . Затем следует обычная система микроскопа: объектив  $O$ , дающий изображение объекта в плоскости  $A'B'$ , и окуляр  $O'$ , через который это изображение рассматривается.

В качестве объекта возьмем маленькую прозрачную частичку  $a$  с коэффициентом преломления  $n$ , погруженную в прозрачную же среду с коэффициентом преломления  $n'$  (см. рис. 161). Пусть частичка  $a$  расположена по оси системы; она дифрагирует падающие на нее лучи, которые, распространяясь внутри конуса, заштрихованного на рис. 162, попадают на объектив микроскопа  $O$ . Изображение  $a'$  частички  $a$  образуется в плоскости  $A'B'$ , сопряженной с плоскостью  $AB$ . Рассмотрим плоскость  $F'$ , проходящую через второй главный фокус объектива  $O$ . В этой плоскости получается изображение диафрагмы  $D_2$ ; при сильно суженной диафрагме оно будет мало (около точки  $M$ ). Одновременно в этой же плоскости свет, дифрагированный от частички  $a$ , дает пятно значительно больших размеров. Оба пучка лучей — от диафрагмы  $D_2$  и от указанного пятна — когерентны и интерферируют в плоскости  $A'B'$ , причем между ними имеется малый сдвиг фаз  $\Delta\varphi$ . Пусть колебание  $y_1$ , прошедшее через частичку  $a$  объекта (луч 2 на рис. 161), изображается синусоидой  $1$  на рис. 163, *a*. Колебание  $y_2$ , прошедшее через остальные места объекта (луч 2), изобразится синусоидой  $2$ , несколько сдвинутой относительно синусоиды  $1$ . Пунктирная кривая  $3$  представляет собой разность синусоид  $1$  и  $2$ . Амплитуды синусоид  $1$  и  $2$  одинаковы, разность фаз между ними  $\Delta\varphi$  мала. Поэтому приближенно можно считать, что пунктирная кривая  $3$  представляет собой синусоиду малой амплитуды  $\overline{OM}$ ,

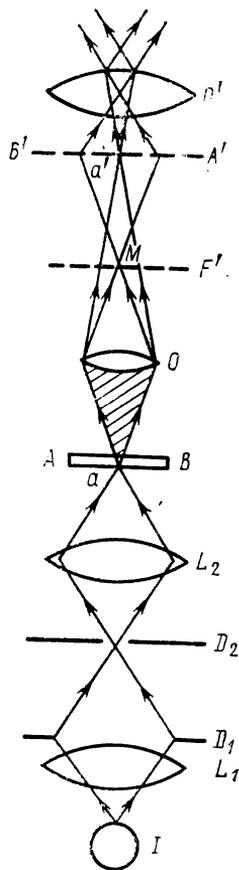


Рис. 162. Схема метода фазового контраста.

ординаты которой  $y_3 = 0$  при  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 3\pi/2$ . Другими словами, синусоида 3 сдвинута относительно синусоиды 2 на  $\pi/2$ . Ординаты синусоиды 1 можно рассматривать как сумму ординат кривых 2 и 3. Следовательно,

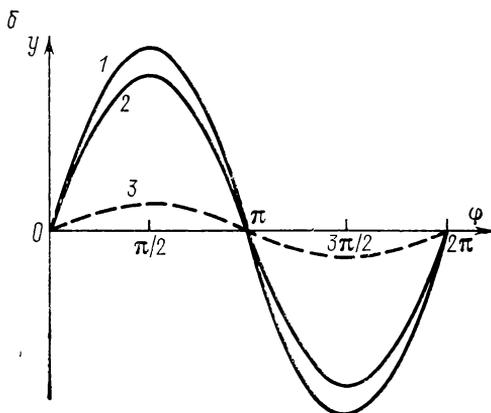
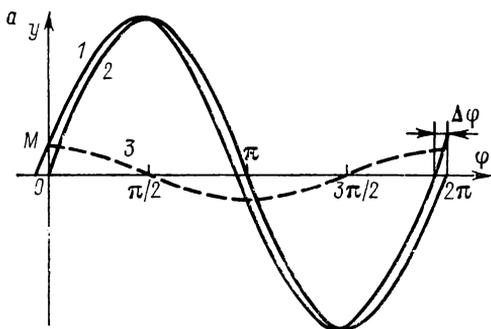


Рис. 163. Образование разностной волны в методе фазового контраста.

в указанном приближении освещенность  $E_1$  в пределах изображения  $a'$  пропорциональна  $a_2^2 + \overline{OM}^2$ , где  $a_2$  — амплитуда колебаний синусоиды 2. Так как  $OM \ll a_2$ , то  $E_1 \cong a_2^2$ , т. е. приблизительно равно освещенности в области, куда попадают лучи 2 — изображение частицы не выделяется на общем фоне.

Сдвинем теперь синусоиду 3 по фазе еще на  $\pi/2$  относительно синусоиды 2 (рис. 163, б). Тогда амплитуда колебаний синусоиды 1 станет равной  $a_2 + \overline{OM}$  и освещенность  $E_1$  в пределах изображения  $a'$  будет пропорциональна величине  $a_2^2 + 2 a_2 \overline{OM}$ , т. е. она возрастет — изображение частицы  $a$  станет более светлым по отношению к окружающему его фону. Таким образом, за счет раз-

ности фаз достигается изменение освещенности.

Изменение разности фаз между синусоидами 2 и 3 достигается тем, что в точку  $M$  помещается малая пластинка (фазовая пластинка), вносящая разность фаз  $+\pi/2$ . Эта пластинка практически не влияет на лучи 1, так как они распределены по значительно большей площади плоскости  $F'$ . Толщина фазовой пластинки  $l_\pi$  определяется из равенства

$$(n'' - 1) l_\pi = \lambda/4,$$

где  $n''$  — коэффициент преломления вещества, из которого она изготовлена.

Очевидно, сходный эффект можно получить, вводя в точку  $M$  пластинку, вносящую разность фаз  $3\pi/2$ . В этом слу-

чае освещенность  $E_1$  в области изображения  $a'$  будет меньше, чем освещенность  $E_2$  в области окружающего фона. В обоих случаях контрастность изображения

$$\gamma = \frac{E_1 - E_2}{E_2} = \frac{2\overline{OM}}{a_2},$$

т. е. она тем больше, чем меньше амплитуда синусоиды 2. Чтобы этого достичь, фазовая пластинка делается частично поглощающей проходящий через нее свет. Так, например, для объекта толщиной 10 мкм, при  $n - n' = 0,001$  для прозрачной фазовой пластинки  $\gamma = 0,20$ , а для фазовой пластинки, ослабляющей свет в 10 раз,  $\gamma = 0,60$ , т. е. велико. В этом случае (при  $\Delta\varphi = 3\pi/2$ ) изображение частички  $a'$  выглядит значительно темнее окружающего фона.

Мы предпологаем, что диафрагма  $D_2$  имеет круглое отверстие, однако ей можно придать и кольцевую форму. Тогда и фазовая пластинка, помещаемая в плоскость  $F'$ , должна иметь форму кольца. Это достигается тем, что между поверхностями двух линз (рис. 164) помещается тонкий слой канадского бальзама  $b$ , имеющего тот же коэффициент преломления, что и стекло, и кольцевой слой  $c$  коллоида, имеющего отличный коэффициент преломления.

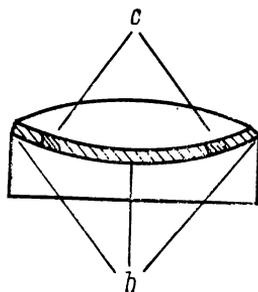


Рис. 164. Фазовая пластинка из двух линз со склейкой.

## § 35. Голография

В голографии используется одновременная запись информации, передаваемой амплитудой и фазой волны. Слово «голография» составлено из двух греческих слов *ḡlos* — весь и *γρᾱφῶ* — запись и означает «полная запись». Идеи, лежащие в основе голографической записи информации, передаваемой волновым фронтом, были высказаны в 1947 г. английским физиком Габором. Голограмма, на которой зафиксированы как амплитуда, так и фазовое соотношение, представляет собой более полную кодовую запись информации, чем та, которая осуществляется с помощью обычной фотографии.

Прототипом голографической записи может служить зонная пластинка Френеля, получаемая фотографическим путем. В § 20 было указано, что такая пластинка с синусоидальным переходом от светлых колец к темным при падении на нее параллельного пучка лучей определенной длины волны  $\lambda$  образует два точечных фокуса — действительный  $O'$  и мнимый  $O''$ . Пластинка может быть получена с помощью интерференционного метода, предложенного В. П. Линником в 1935 г. Схема

опыта изображена на рис. 165. На пути плоской когерентной волны  $AB$  расположена плоскопараллельная полупрозрачная пластинка с малым отверстием\*  $S$ . Эта пластинка несколько

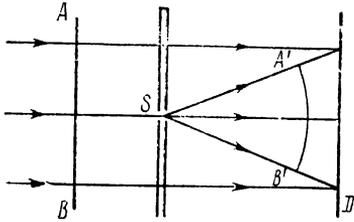


Рис. 165. Получение зонной пластинки по методу Линника.

ослабляет волну  $AB$ , не искажая ее поверхности. Одновременно от отверстия  $S$  по принципу Гюйгенса возникает сферическая волна  $A'B'$ . Волны  $AB$  и  $A'B'$  когерентны и дают на экране  $D$  интерференционные полосы в виде колец. Если вместо экрана расположить фотографическую пластинку, то на ней после проявления получатся светлые и темные кольца, почернения в пределах которых будут приблизительно пропорцио-

циональны  $\cos^2\alpha$ . Фотография представит собой нужную зонную пластинку. Если затем ее осветить параллельным пучком когерентного света, то, как сказано, образуются два точечных фокуса — действительный и мнимый.

Этот опыт может быть истолкован следующим образом: первоначально мы имеем точечный объект  $S$  и исходящую от него сферическую волну  $A'B'$ . На нее мы наложили когерентную с ней плоскую волну  $AB$  («опорную» волну). Возникшую интерференционную картину мы сфотографировали на пластинку  $D$ . При последующем освещении пластинки плоским световым фронтом мы получаем два «изображения» точки  $S$ , одним из которых служит действительный фокус  $O'$ , а другим — мнимый фокус  $O''$ . Мнимому фокусу  $O''$  соответствует выпуклый сферический фронт, вполне идентичный первоначальному фронту  $A'B'$ , исходящему от источника  $S$ . Таким образом, мы воспроизвели первоначальный сферический фронт  $A'B'$ . Сама фотография  $D$  может рассматриваться как кодовая запись распределения амплитуд и фаз по волновому фронту  $A'B'$ .

Оба фокуса  $O'$  и  $O''$  расположены на прямой, перпендикулярной к плоскости пластинки  $D$ ; это затрудняет их наблюдение. Для устранения этого недостатка пластинку  $D$  можно расположить таким образом, что будет регистрироваться боковая часть интерференционной картины (рис. 166, *a*). При освещении готовой пластинки плоским фронтом  $AB$  (рис. 166, *b*), оба фокуса  $O'$  и  $O''$  расположатся на оси пластинки. Расположив глаз справа внизу за фокусом  $O'$ , мы увидим светлую точку, соответствующую этому фокусу. При расположении глаза справа сверху мы увидим лишь точку, соответствующую мнимому фокусу  $O''$ .

\* В первоначальном опыте В. П. Линника на пластинку падала не плоская, а слабо расходящаяся волна, но это не меняет смысла опыта.

Очевидно, изложенные соображения могут быть обобщены и на случай более сложного объекта, который можно представить как совокупность точек  $S$ . Однако излучения всех точек  $S$  должны быть когерентны между собой. Это не осуществимо для отдельных самостоятельных точек. Для точек, светящихся за счет отраженного или рассеянного света, требуется специальное когерентное освещение. Для достаточно протяженных трехмерных объектов это стало возможным лишь после открытия лазеров, обладающих высокой степенью как пространственной, так и временной когерентности. Если на систему волн, отраженных объектом, наложить опорную когерентную волну, то на фотопластинке зарегистрируется весьма сложная интерференционная картина, которая и носит название голограммы. Такую голограмму при лазерном освещении впервые получили Э. Лейт и Ю. Упатниекс в 1963 г.

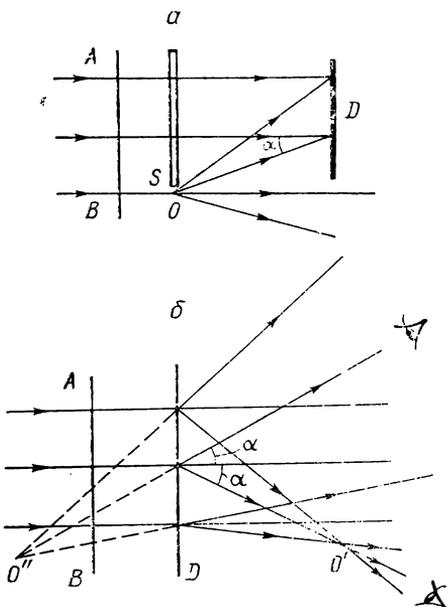


Рис. 166. Наклонное расположение фотопластинки при изготовлении голограммы (а); положение точечных фокусов от вытянутой зонной пластинки Френеля (б).

При освещении готовой голограммы пучком когерентного света, аналогичным опорному, каждой точке объекта соответствуют два фокуса — мнимый и действительный. Всей совокупности мнимых фокусов отвечает волновой фронт, совпадающий по распределению амплитуд и фаз с фронтом, который падал от объекта на фотопластинку.

При восприятии глазом, смотрящим в направлении мнимых фокусов, мы увидим зарегистрированный объект как бы висящим в воздухе с передачей его объемной структуры. При смещениях глаза наблюдается эффект параллакса. Это мнимое изображение можно также сфотографировать с помощью обычного фотоаппарата.

Действительное изображение, которое тоже может быть наблюдаемо, характеризуется обращенной перспективой (псевдоскопией), вызванной тем, что действительный фокус от более удаленного объекта получается дальше от голограммы, чем от более близкого. Поэтому действительное изображение обычно не используется.

Для получения голограмм от достаточно больших объектов требуется пучок когерентного света более широкий, чем тот, который выходит из лазера. Диаметр лазерного

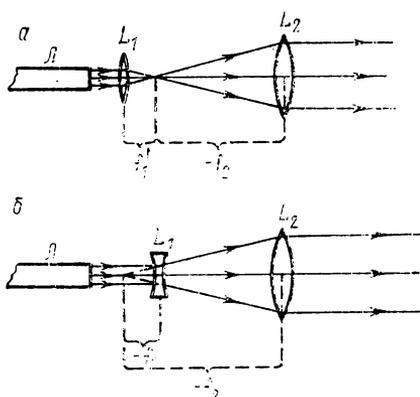


Рис. 167. Расширители светового пучка. По схеме телескопа Кеплера (а) и по схеме Галилея (б).

пучка определяется диаметром генерирующей разрядной трубки или твердого стержня лазера и обычно не превышает 1 см. Однако эту трудность легко обойти с помощью добавочной оптической системы, состоящей либо из двух положительных линз (рис. 167, а), либо из одной отрицательной и одной положительной (рис. 167, б). Диаметр параллельного когерентного пучка, выходящего из системы, определяется размерами второй линзы и увеличением оптической системы. Можно также при записи и восстановлении изображения использовать сферический фронт.

Существует ряд схем для получения голограмм путем наложения на изучаемый пучок света когерентного с ним опорного пучка. Одна из таких схем изображена на рис. 168, а, где  $ab$  — первичный пучок когерентного света,  $A$  — полупрозрачное плоское зеркало, разделяющее его на два: пучок  $a'b'$ , падающий на объект  $O$ , и опорный пучок  $a''b''$ . Пучки света — отраженный от объекта и опорный — интерферируют. Возникающая интерференционная картина фиксируется на фотопластинке  $D$ . Эта картина настолько мелка и сложна (при сложном объекте), что при рассматривании готовой голограммы глазом она представляется равномерно серой. При рассматривании готовой голограммы в микроскоп можно увидеть сложную совокупность более или менее почерневших мест фотографического слоя.

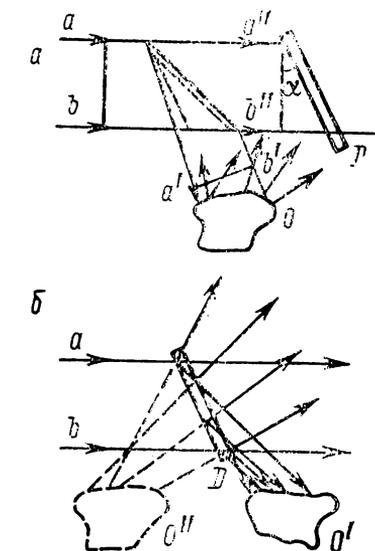


Рис. 168. Схема изготовления голограммы с использованием полупрозрачного зеркала (а); восстановление изображения (б).

Для декодирования информации, зафиксированной на голограмме  $D$ , ее нужно осветить плоским фронтом  $ab$  (рис. 168, б), аналогичным опорному фронту. В результате такого освещения возникают действительное  $O'$  и мнимое  $O''$  изображение объекта. Система волн, соответствующая мнимому изображению, вполне подобна волнам, исходящим от самого объекта.

Другая возможная схема получения голограммы изображена на рис. 169. В ней используется тот факт, что пучки, исходящие из двух противоположных концов лазера, когерентны между собой. Благодаря этому не требуется разделительного зеркала: опорный пучок и пучок, освещающий объект  $O$ , исходят из разных концов лазера. Линзы  $L_1$  и  $L_2$  служат для расширения лазерных пучков. Особенностью этой установки является то, что опорный пучок не параллельный, но расходящийся. В соответствии с этим и при восстановлении голограммы ее надо освещать расходящимся пучком.

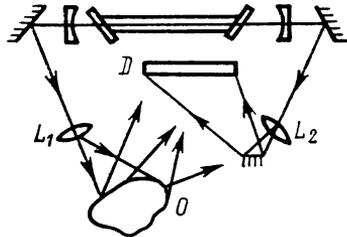


Рис. 169. Запись голограммы с использованием излучения от разных концов лазера.

Рассмотрим теперь подробно получение голограммы и восстановление изображения, причем воспользуемся способом, который был применен в § 20 при описании действия синусоидальной решетки. Будем отсчитывать координаты  $x$  и  $y$  в плоскости пластинки  $D$  (см. рис. 168, а). Предположим, что свет монохроматичен с частотой  $\nu$ . Сечение фронта волны, отраженной от объекта  $O$ , характеризуется некоторым распределением амплитуд  $a(x, y)$  и фаз  $\varphi(x, y)$ . Колебания, соответствующие этому фронту, запишутся в виде

$$\Psi(x, y, t) = a(x, y) e^{i\varphi(x, y)} e^{2\pi i \nu t},$$

$$\Psi = \psi e^{2\pi i \nu t},$$

где комплексная амплитуда  $\psi$  равна

$$\psi = a(x, y) e^{i\varphi(x, y)}. \quad (35.1)$$

Фотопластинку можно приближенно рассматривать как линейный приемник и степень ее почернения  $S(x, y)$  считать пропорциональной освещенности, т. е. пропорциональной  $|\psi|^2$ .

Фронт опорного пучка  $a'b'$  представляет собой плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с пластинкой  $D$ . Амплитуду колебаний в опорном пучке положим для простоты равной единице. Тогда комплексная амплитуда колебаний опорного пучка в плоскости  $D$  запишется в виде

$$\psi_0 = e^{i\omega x}, \quad (35.2)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha$  и координата  $x$  отсчитывается от верхнего края опорного пучка вниз вдоль пластинки  $D$ .

В результате интерференции волн, отраженных от объекта  $O$ , и волн в опорном пучке возникает освещенность в плоскости пластинки  $D$ , пропорциональная  $|\psi + \psi_0|^2$ . Следовательно, по (35.1) и (35.2) на фотопластинке  $D$  после проявления возникнут почернения  $S'(x, y)$ , пропорциональные

$$S'(x, y) \sim |a(x, y)e^{i\varphi(x, y)} + e^{i\omega x}|^2$$

или после соответственного вычисления квадрата модуля

$$S'(x, y) \sim (1 + a(x, y)^2) + a(x, y)e^{i\varphi(x, y)}e^{-i\omega x} + a(x, y)e^{-i\varphi(x, y)}e^{i\omega x}. \quad (35.3)$$

Если затем с этой фотографии получить позитив, то он будет характеризоваться распределением пропускания  $\tau(x, y)$ , значения которого пропорциональны  $S'(x, y)$ .

Для восстановления изображения осветим голограмму параллельным пучком когерентного света  $\Phi_0$ , падающим под углом  $\alpha$  (рис. 170). Положив амплитуду колебаний в этом пучке равной единице, получим, что его комплексная амплитуда  $\psi_0 = e^{i\omega x}$ ; после прохождения потока  $\Phi_0$  через пластинку она станет пропорциональна  $\tau(x, y)e^{i\omega x}$ . Отсюда, воспользовавшись выражением (35.3), получим, что за пластинкой  $D$  возникнет поток

$$\Phi'(x, y) = (1 + a(x, y)^2)e^{i\omega x} + a(x, y)e^{i\varphi(x, y)} + a(x, y)e^{-i\varphi(x, y)}e^{2i\omega x}. \quad (35.4)$$

Рассмотрим выражение (35.4) более подробно. Первый его член  $(1 + a(x, y)^2)e^{i\omega x}$  представляет собой поток параллельных лучей 1, распространяющихся в том же направлении, что и освещающий поток  $\Phi_0$ . Второй член  $a(x, y)e^{i\varphi(x, y)}$  совпадает с выражением (35.1), описывающим волновой фронт, отраженный от объекта. Он представляет собой восстановленный первоначальный фронт, полностью передающий первоначальное распределение амплитуд  $a(x, y)$  и фаз  $\varphi(x, y)$ . Пучок лучей 2, соответствующих этому фронту, распространяется за пластинкой  $D$  перпендикулярно к ней; ему отвечает мнимое изображение объекта  $O''$ . Наконец, последний член  $a(x, y)e^{-i\varphi(x, y)}e^{2i\omega x}$  представляет пучок 3, распространяющийся под углом  $2\alpha$  к пластинке. Ему соответствует действительное изображение

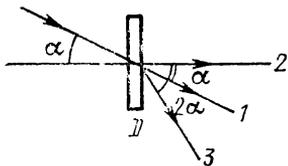


Рис. 170. Направление распространения пучков при восстановлении изображения.

$O'$  с обращенной перспективой (знак минус перед  $\varphi(x, y)$  в показателе экспоненты). Таким образом, расчет подтверждает все сделанные в начале параграфа выводы об образовании при восстановлении двух изображений — действительного и мнимого.

В приведенных рассуждениях мы полагали, что с первичной голограммы получен позитив. Это позволяло заменить по чернение  $S'(x, y)$  пропусканием  $\tau(x, y)$ . Однако в действительности нет надобности получать позитив. На позитиве каждый интерференционный максимум заменяется минимумом и наоборот. Это равносильно сдвигу интерференционной картины на одну полосу, т. е. изменению всех фаз на одну и ту же величину, равную  $\pi$ . Последнее же не поведет к изменению волновых фронтов, возникающих при восстановлении изображения. В голографии в отличие от обычной фотографии негатив и позитив равноценны.

Рассмотрим теперь вопрос о разрешающей силе голограммы. Голограмма, как и обычная фотография, имеет конечную разрешающую силу, что обусловлено тем, что интерференционные максимумы, соответствующие двум точкам объекта, должны быть различимы друг от друга. Рассмотрим простейший случай двух когерентных точечных источников  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 171), находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга. Пусть  $D$  — фотопластинка, на которую от источников  $S_1$  и  $S_2$  падают сферические волны с фронтами  $c_1d_1$  и  $c_2d_2$ ; фронт опорной волны  $ab$  параллелен пластинке  $D$ . Обозначим через  $AB$  диафрагму, открывающую область фотопластинки  $D$  протяженностью  $L$ . Каждая из сферических волн  $c_1d_1$  и  $c_2d_2$ , интерферируя с опорным пучком, дает свою систему интерференционных максимумов на пластинке  $D$ . Для того чтобы эти максимумы не налагались друг на друга, разность хода  $\Delta$ , по крайней мере, для крайних лучей  $S_1B$  и  $S_2B$ , еще попадающих на фотопластинку  $D$ , должна превышать  $\lambda/2$ .

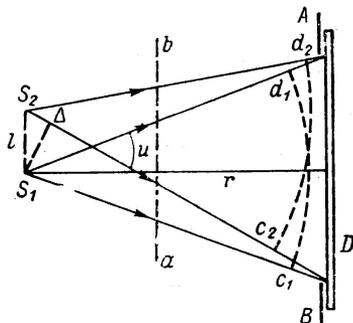


Рис. 171. К определению разрешающей способности голограммы.

$$\Delta \geq \lambda/2. \quad (35.5)$$

С другой стороны,  $\Delta = l \sin u$ . Так как приближенно

$$\sin u = \frac{L}{2r},$$

где  $r$  — расстояние от источников до пластинки, то, следовательно, расстояние между двумя разрешенными источниками  $S_1$  и  $S_2$  должно удовлетворять неравенству

$$l \sin u \geq \lambda/2 \quad (35.6)$$

или приближенно

$$l \geq \lambda \frac{r}{L}. \quad (35.7)$$

Под разрешающей силой голограммы можно подразумевать величину  $\sim 1/l$ . Тогда из равенства (35.7) видно, что разрешающая сила голограммы тем больше, чем больше угол  $2u \cong \frac{L}{2}$ , под которым видна открытая часть голограммы из места расположения источников. Так как в равенстве (35.6)  $|\sin u|$  не может превышать единицы, то наименьшее разрешимое с помощью голограммы расстояние  $l_{\min} \cong \lambda/2$ . Интересно отметить, что это расстояние совпадает с наименьшими размерами объекта, наблюдаемого в микроскоп (§ 21). Такое совпадение не случайно: по теории Аббе (§33) изображение в микроскопе формируется за счет интерференции лучей, идущих от дифракционных максимумов, образующихся в главной фокальной плоскости объектива микроскопа.

Очевидно, что возможность раздельного действия интерференционных полос на голограмме, обусловленная наличием между ними необходимой разности фаз, не должна быть нарушена зерном фотоэмульсии. Те детали на голограмме, которые пропадут из-за конечного размера зерен, не могут оказать своего действия на формирование изображения. Это предъявляет весьма высокие требования к мелкозернистости фотопластинок, используемых для получения голограмм. Обычно употребляемые фотопластинки разрешают не более  $100 \text{ штр} \cdot \text{мм}^{-1}$ . Для современных голографических целей используются более мелкозернистые фотопластинки, разрешающие до пяти тысяч и более штрихов на 1 миллиметр.

Рассмотрим роль диафрагмы АВ. С уменьшением ее размеров уменьшаются размеры голограммы  $L$  и, следовательно, будет уменьшаться ее разрешающая сила. Но на уменьшенную по размерам голограмму проходят волны от всех участков объекта и поэтому при восстановлении получится по-прежнему изображение всего объекта, уменьшится лишь число различных на нем деталей. Отсюда вытекает удивительное своеобразие голограммы: если готовую голограмму разрезать на несколько частей, то каждая из них позволит восстановить весь объект.

При рассматривании через голограмму мнимого изображения ее действующие размеры играют роль диафрагмы («окна»), через которую рассматривался бы реальный объект. Наличие «окна» позволяет по-прежнему видеть весь объект, но не только снижает разрешающую силу, но и уменьшает те углы, под которыми объект может наблюдаться.

### § 36. Фурье-голография. Объемная голография

Действие рассмотренных нами голограмм аналогично действию зонных пластинок Френеля, поэтому они могут быть названы голограммами Френеля. Однако возможен такой тип интерференции лучей, идущих от объекта, и лучей опор-

ного пучка, в результате которого на фотопластинке регистрируется Фурье-преобразование функции, характеризующей объект. Такие голограммы носят название Фурье-голограмм.

Для получения Фурье-голограмм используется не плоский, а расходящийся опорный пучок. Схема получения такой голограммы изображена на рис. 172.

Широкий параллельный пучок когерентного излучения  $ab$  частично падает на плоский прозрачный объект  $O$ , а частично — на короткофокусную линзу  $L$ . Линза располагается так, что ее главный фокус совпадает с малым отверстием  $O'$ , расположенным в той же плоскости, что и объект  $O$ . За отверстием  $O'$  возникает сферическая волна  $a'b'$ , которая служит опорной волной.

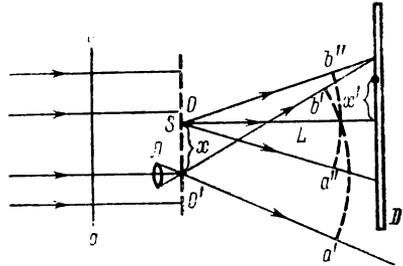


Рис. 172. Схема образования Фурье голограммы.

Пусть объект  $O$  задан своим пропусканием  $\tau$ , которое для простоты будем считать функцией одной координаты  $x$ , отсчитанной от точки  $O'$ . От элемента  $S$  объекта  $O$  исходит также сферическая волна  $a''b''$ . Обе волны  $a'b'$  и  $a''b''$  интерферируют в плоскости пластинки  $D$ . В плоскости пластинки с координатой  $x'$  суммарное колебание от элемента объекта и опорной волны опишется комплексной амплитудой

$$d\psi = \tau(x') e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{x}{L} x'} dx,$$

где  $L$  — расстояние от плоскости, в которой лежат  $S$  и  $O'$ , до пластинки  $D$ . От всех частей объекта  $O$  в той же точке  $x'$  колебания будут характеризоваться интегралом

$$\psi(x') = \int \tau(x) e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{x}{L} x'} dx,$$

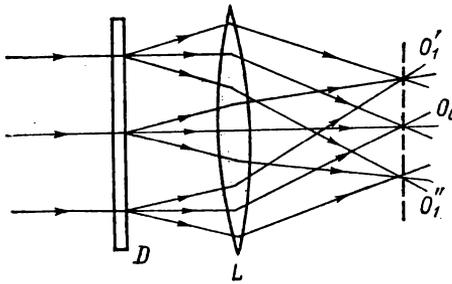
$$\psi(x') = \int \tau(x) e^{2\pi i u x} dx, \quad (36.1)$$

где  $u = \frac{x'}{\lambda L}$ . Но (36.1) есть не что иное (см. § 20), как Фурье-преобразование функции  $\tau(x)$

$$\psi(x') = \text{ФП} [\tau(x)].$$

Функция  $\psi(x')$  дает распределение комплексной амплитуды по пластинке  $D$ . Квадрат модуля  $|\psi(x')|^2$  определит освещенность на пластинке  $D$ , а следовательно, и степень ее почернения после проявления.

Голограмму, возникающую в плоскости  $D$ , можно рассматривать как совокупность элементарных синусоидальных решеток, образующихся от отдельных точек объекта. Отсюда очевиден и способ восстановления изображения (рис. 173): при освещении ее параллельным пучком когерентного света возникают три фронта, соответствующих



порядкам интерференции  $\Delta k = 0, \pm 1$ . Первый дает в фокальной плоскости линзы  $L$  точечный фокус, два других — восстановленные изображения объекта  $O_1'$  и  $O_1''$ , симметричных друг по отношению к другу.

Рис. 173. Восстановление изображения в Фурье-голограмме.

Рассмотренные нами голограммы получались и восстанавливались в свете одной определенной волны  $\lambda$ .

Поэтому они одноцветны и не несут никакой информации о спектральном составе света, отраженного от объекта. Однако, как было впервые показано в 1962 г. советским оптиком Ю. Н. Денисюком, возможно получение таких голограмм, которые восстанавливают и цвет объекта.

Для восстановления цветности в работах Ю. Н. Денисюка использована идея, лежащая в основе цветной фотографии Липпмана. Выделение волн определенной длины волны (определенного цвета) производится в методе Липпмана тем же способом, что селекция волн в интерференционных фильтрах (§ 28), т. е. за счет интерференции при отражении от ряда параллельных слоев. Образование полупрозрачающих параллельных слоев осуществлено Липпманом в результате интерференции встречных волн в толстослойных фотографических пластинках. Фотопластинка с толщиной эмульсии в несколько раз превышающей длину световой волны  $\lambda$  касается ртутного зеркала (рис. 174). Нормально падающий на пластинку свет проходит сквозь слой эмульсии, отражается обратно и образует стоячие волны. Фотографический процесс происходит в местах пучностей, благодаря чему после проявления пластинки образуется ряд слоев выделившегося металлического серебра, стоящих друг от друга на расстоянии  $d = \lambda/2$  и параллельных поверхности пластинки.



Рис. 174. Получение фотографии по Липпману.

Если при рассматривании затем такой пластинки осветить ее нормально падающим светом той же длины волны  $\lambda$ , то лу-

чи, отраженные от серебряных слоев, усилят друг друга. Лучи других длин волн не усилятся. Поэтому при освещении пластинки белым светом она представится в отраженном свете окрашенной в тот же цвет, который использовался при фотографировании.

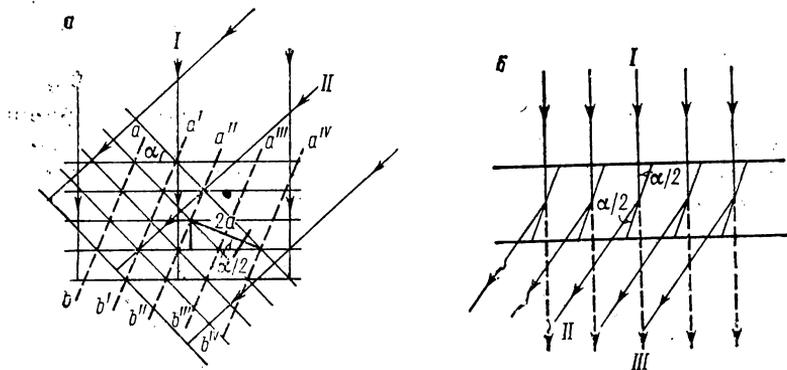


Рис. 175. Пространственное распределение пучностей при интерференции двух плоских монохроматических волн (а); дифракция световой волны на трехмерной структуре (б).

В общем случае при наложении двух световых полей одинаковой длины волны возникающая интерференционная картина всегда объемна. Рассмотрим две системы плоских волн I и II (рис. 175, а), пересекающихся под углом  $\alpha$ . Тогда образуются интерференционные максимумы в плоскостях  $ab$  и  $a'b'$  и т. д., отстоящих друг от друга на расстоянии

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)}. \quad (36.2)$$

Если в эту область интерференции введена толстослойная фотопластинка, то в ней, как и в случае фотографии Липпмана, места максимумов будут зафиксированы в виде полупрозрачных слоев металлического серебра. Совокупность слоев представит собой трехмерную синусоидальную решетку. При освещении такой решетки параллельным пучком лучей I (рис. 175, б), составляющим угол  $\alpha/2$  со слоями, они будут отражаться от них под тем же углом  $\alpha/2$ . Между лучами, отраженными от соседних слоев, возникает разность хода  $\Delta = 2d \sin \alpha/2$ , которая по (36.2) равна  $\lambda$ . Следовательно, при освещении снимка излучением той же длины волны  $\lambda$ , с помощью которого получалась интерференционная картина, в направлении отраженных лучей II получится максимум  $\Delta k = +1$ ; второй максимум возникает в направлении лучей III, прошедших через слои без изменения направления ( $\Delta k = 0$ ). Максимум, соответствующий  $\Delta k = -1$ , отсутствует.

Очевидно, эти результаты могут быть обобщены и на случай, когда одна из систем волн, например  $II$  на рис. 175, *а*, представляет собой сложную систему волн, отраженных от какого-либо объемного объекта. Тогда возникающую в эмульсионном слое пластинки интерференционную картину можно рассматривать как наложение большого числа синусоидальных интерференционных решеток, образовавшихся под различными углами  $\alpha$ .

Другими словами, толстослойная фотопластинка представляет собой голограмму с объемной записью интерференционной картины. При ее освещении в соответствии со схемой, изображенной на рис. 175, *б*, в направлении отраженных от слоев лучей  $II$  возникнет мнимое изображение объекта.

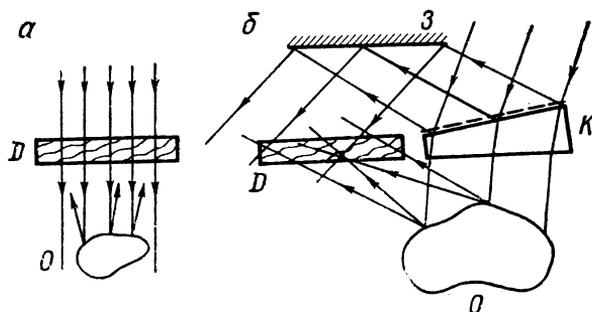


Рис. 176. Запись голограммы по методу Ю. В. Денисюка.

На этом принципе и основан метод Денисюка. В простейшем случае голограмма получается во встречных пучках (рис. 176, *а*) — объект расположен по другую сторону от фотопластинки, чем источник света, дающий опорный пучок. В другом случае (рис. 176, *б*) свет от лазера разделяется с помощью полуотражающего слоя, нанесенного на прозрачный клин  $K$ , на два пучка. Один из них (опорный), после отражения от зеркала  $Z$ , попадает на пластинку  $D$  под косым углом; второй пучок рассеивается от объекта  $O$ .

Для получения голограммы по методу Денисюка требуется, как и для обычной плоской голограммы, применение когерентного света от лазера. Однако для восстановления изображения, зарегистрированного с помощью объемной голограммы, можно использовать и обычный источник белого света. В этом случае интерференция от слоев получается лишь для лучей той же длины волны  $\lambda$ , какими освещалась голограмма при ее изготовлении. Из всех длин волн, присутствующих в источнике белого света, голограмма выберет лишь те, которые совпадают с длиной волны  $\lambda$ , освещавшей пластинку при фотографировании. Восстановленное изображение будет того цвета, который был характерен и для лазерного излучения.

Одновременно снижаются требования к пространственной когерентности источника. Это обусловлено тем, что условие образования максимумов при отражении от большого числа равноотстоящих слоев выполняется лишь в пределах очень малого телесного угла.

Голограммы Денисюка могут быть сделаны и цветными, для чего нужно наложить друг на друга три изображения — красное, желтое (или зеленое) и синее, как это обычно делается при трехцветной печати или в современной цветной фотографии. Для этого на одной и той же пластинке фиксируются три голограммы, одна из которых получается с помощью неон-гелиевого лазера, генерирующего по длине волны  $\lambda = 632,8$  нм, и две других — с помощью аргонового лазера, генерирующего на длинах волн 514,5 и 488,0 нм.

При восстановлении изображения с использованием источника белого света образуются совпадающие в пространстве мнимые изображения в свете этих трех длин волн, но в силу особенностей человеческого глаза субъективно цветность первоначального объекта передается полно.

### § 37. Применения голографии

Применения голографии чрезвычайно многочисленны и разнообразны. Остановимся только на некоторых из них и прежде всего на тех, которые связаны со спецификой голографической записи.

Голографическая запись более информативна, чем обычная фотографическая. Например, три объекта, расположенных на разных расстояниях от фотографического объектива, нельзя одновременно снять в фокусе. Если мы сфокусируем фотоаппарат на одном из них, то изображения двух других будут размыты. Для получения четких изображений всех трех объектов надо сделать три различных снимка. При восстановлении же голографически зарегистрированных изображений таких трех объектов их мнимые изображения получаются на разных расстояниях от голограммы, но каждый из них может наблюдаться вполне четко.

Методы декодирования голограмм открывают добавочные возможности, в частности повышение увеличения. Для этого голограмма освещается светом с длиной волны  $\lambda'$ , большей, чем та длина волны  $\lambda$ , которая использовалась при записи голограммы. Так как при прочих равных условиях углы дифракции пропорциональны длине волны, то получится увеличение, равное  $\lambda'/\lambda$ . При декодировании можно также исправлять недостатки, возникающие при записи голограммы. Например, если опорному пучку соответствует не вполне плоский фронт, то запись интерференционной картины будет искажена. Но это искажение устраняется, если для декодирования голограммы

использовать пучок с такими же отступлениями волнового фронта от плоского.

Особый интерес представляет применение голографии в микроскопии. В обычных оптических микроскопах для достижения больших увеличений применяются весьма короткофокусные объективы. Это ведет к малой глубине резкости изображения и необходимости исследовать объекты в виде очень тонких срезов. Голографический метод открывает большие перспективы благодаря возможности одновременной регистрации световых волн, исходящих от трехмерного объекта. На рис. 177 приведена схема применения голографического метода регистрации в микроскопии. Свет от лазера *A* разделяется полупрозрачной пластинкой *B*<sub>1</sub> на два пучка. Один из них, отразившись от зеркала *C*<sub>1</sub>, проходит через наблюдаемый объект *O* и через микроскоп. Второй отражается от зеркала *C*<sub>2</sub> и от полупрозрачной пластинки *B*<sub>2</sub>. Он образует опорный пучок. Оба пучка сходятся и, будучи когерентными, интерferируют и дают голографическую запись на фотопластинке *D*. Затем на голограмме можно последовательно изучать детали, зафиксированные в разных плоскостях, перемещая лишь при декодировании оптическую систему.

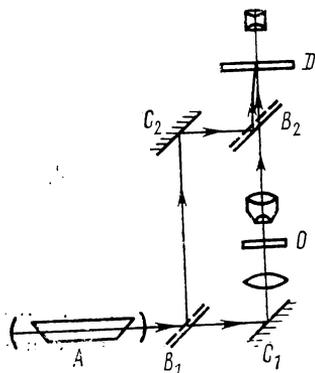


Рис. 177. Схема голографического микроскопа.

Свет от лазера *A* разделяется полупрозрачной пластинкой *B*<sub>1</sub> на два пучка. Один из них, отразившись от зеркала *C*<sub>1</sub>, проходит через наблюдаемый объект *O* и через микроскоп. Второй отражается от зеркала *C*<sub>2</sub> и от полупрозрачной пластинки *B*<sub>2</sub>. Он образует опорный пучок. Оба пучка сходятся и, будучи когерентными, интерferируют и дают голографическую запись на фотопластинке *D*. Затем на голограмме можно последовательно изучать детали, зафиксированные в разных плоскостях, перемещая лишь при декодировании оптическую систему.

Второе применение голографии, которое мы рассмотрим — это применение в интерферометрии. Во всех классических интерференционных опытах интерferируют две волны от одного и того же источника, испускаемые одновременно. Не так может обстоять дело при использовании голографических методов. Голограмма позволяет восстановить зарегистрированный на ней волновой фронт с правильным распределением на нем амплитуд и фаз. Поскольку на одной голограмме могут быть зарегистрированы два фронта, они наложатся при восстановлении друг на друга и будут интерferировать. Таким образом, наблюдение интерференции возможно при отсутствии объектов, а сами волновые фронты могут быть зарегистрированы в разное время.

Рассмотрим фронт когерентного света *a'b'*, падающий на пластинку *D* (рис. 178, *a*), и плоский опорный фронт *ab*. Прежде чем проявить пластинку, сделаем на ней еще один снимок, не смещая ее, от второго фронта *a''b''* и того же опорного фронта *ab*. Пусть фронты *a'b'* и *a''b''* мало отличаются друг от

друга, например, они получены от одного и того же объекта, но несколько смещенного или деформированного после первой съемки. Тогда на пластинке  $D$  будут зарегистрированы две сходные голограммы, лишь незначительно отличающиеся друг

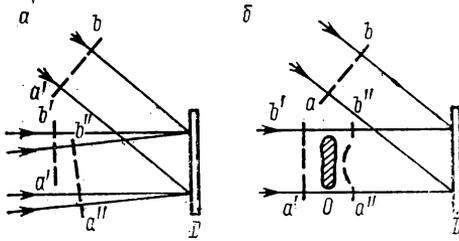


Рис. 178. Применение голографии в интерферометрии.

$a$  — запись голограммы невозмущенного фронта волны;  $b$  — регистрация искаженного фронта.

от друга. При восстановлении возникнут два когерентных между собой фронта. Им будут соответствовать одинаковые мнимые изображения объекта, но с возникающими определенными разностями хода  $\Delta$ , в результате чего изображение окажется перекрытым системой интерференционных полос. По расположению этих пол-

ос можно судить о происшедшем изменении.

Метод пригоден и для изучения прозрачных (фазовых) объектов. Пусть снимки двух голограмм делаются с помощью одинакового волнового фронта  $a'b'$  (рис. 178, б), на пути которого расположен прозрачный объект  $O$ . Он внесет изменения в волновой фронт. Если эти изменения для двух снимков различны (за счет либо изменения локальной протяженности объекта  $l$ , либо изменения его коэффициента преломления  $n$ ), то при восстановлении изображения вновь возникнут разности хода  $\Delta$  между двумя восстановленными фронтами и появятся интерференционные полосы.

Сами изучаемые объекты могут иметь сложный рельеф, так как для возникновения интерференционной картины важна лишь разность хода между волновыми фронтами. Возможно использование даже шероховатых поверхностей при

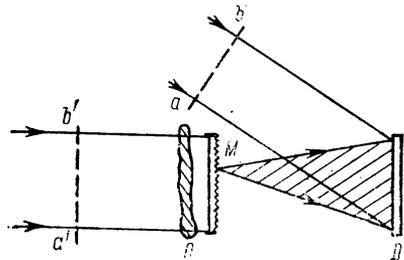


Рис. 179. Голография с использованием рассеивающего экрана.

условии, что шероховатость остается для обоих снимков неизменной. В случае фазового объекта, заключенного в кювету (газ, жидкость), нет необходимости пользоваться окошками высокого оптического качества, без чего нельзя обойтись в случае введения кювет в разные плечи обычного интерферометра.

Рассмотрим еще случай применения рассеивающего экрана (рис. 179), расположенного непосредственно за фазовым объектом  $O$ . Пусть снимок делается дважды с одними и теми же пучками  $ab$  и  $a'b'$ , но один раз в присутствии объекта  $O$ ; а

другой раз — при его удалении. При восстановлении будут видны интерференционные полосы, соответствующие линиям  $(n - 1)l = \text{const}$ . Действительно, рассмотрим точку  $M$  рассеивателя, расположенную за местом объекта  $O$ , характеризуюемого данными значениями  $n$  и  $l$ . Соответствующее изменение фазы  $\Delta\phi$  будет внесено в весь пучок рассеянного света, распространяющегося от точки  $M$  (заштрихован на рис. 170). Поскольку пучок покрывает всю пластинку  $D$ , он будет зарегистрирован по всей ее поверхности. Разным точкам  $M$  будут соответствовать разные изменения фазы  $\Delta\phi$ , которые также будут зарегистрированы по всей пластинке  $D$ . При освещении голограммы восстановится весь волновой фронт, аналогично тому, как это происходит при восстановлении голографического изображения рассеивающего трехмерного объекта. Любая часть голограммы достаточно, чтобы восстановить всю картину. Изображение и интерференционные полосы могут непосредственно наблюдаться глазом как мнимый объект.

Голографические приемы позволяют выделять определенный сигнал из совокупности сигналов, отличающихся друг от друга. Такая операция носит название опознавание образов. Примером может служить выделение какой-либо определенной буквы из текста, содержащего большое число букв. Основан этот способ на следующем: первоначальное изображение разлагается на пространственные гармонические составляющие (производятся Фурье-преобразования), затем с помощью фильтра из них выделяется определенная совокупность составляющих, отвечающих лишь части сигналов, поступающих от изображения. Тогда и в окончательном изображении сохранится (или выпадет) часть составляющих.

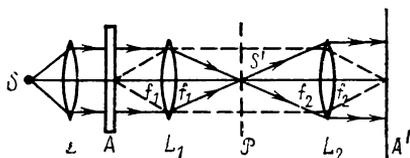


Рис. 180. Считывание изображения при согласованной фильтрации.

Фактически такое двойное преобразование происходит в микроскопе согласно теории Аббе (§ 33). Первоначально возникают дифракционные спектры в фокальной плоскости

объектива, а затем формируется изображение. Если закрыть часть спектров, то изображение изменится. Было, например, указано, что в случае сетки можно так частично закрыть картину, что сохранятся изображения либо вертикальных, либо только горизонтальных штрихов, образующих сетку.

Рассмотрим более подробно операцию, выполняемую с помощью Фурье-голограммы и имеющую целью разделение образов. Пусть объект представляет собой пластинку  $A$  (рис. 180), на которой на темном фоне имеется ряд светлых значков двух типов, например кружков и крестиков. Задача

сводится к отделению одних из этих значков от других. Исследуемая пластинка  $A$  освещается с помощью линзы  $L$  от точечного источника когерентного света  $S$  (сфокусированный в точку свет от лазерного пучка). Линза  $L_1$  образует изображение  $S'$  источника  $S$ , представляющее собой дифракционную картину, соответствующую прохождению света через просветленные места пластинки  $A$ . Это есть Фурье-образ плоского объекта  $A$ . Вторая линза  $L_2$  дает в плоскости  $A'$  действительное изображение объекта  $A$ .

Чтобы отделить друг от друга два типа рассматриваемых образов — кружков и источников, надо в плоскость, проходящую через точку  $S'$ , поместить соответственно подобранный фильтр  $P$ .

Фильтр  $P$  должен представлять собой Фурье-голограмму одного из значков, например, крестиков. Для получения такой голограммы диапозитивное изображение крестиков  $P'$  (рис. 181) помещается вблизи линзы  $L$  и освещается когерентным светом от точечного источника  $S$ ;  $O$  — опорный точечный источник. В точке  $S'$  линза  $L$  дает изображение источника  $S$ . Если в это место поместить фотографическую пластинку  $D$ , то она зарегистрирует Фурье-голограмму от негативного изображения крестика. Эта голограмма и явится фильтром  $P$ , благодаря которому можно отфильтровывать изображения крестиков и кружков друг от друга.

Применение голографического фильтра позволяет также улучшать качество изображения, искаженного аберрациями, уменьшать вредную роль неоднородностей оптической среды и т. д.

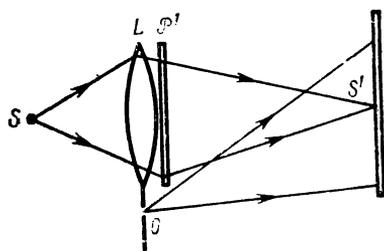


Рис. 181. Схема изготовления согласованного фильтра.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

3

### Глава III. Лучевая оптика

§ 1. Волновые и лучевые представления в оптике	4
§ 2. Неоднородная среда	8
§ 3. Законы отражения и преломления света	11
§ 4. Отражение и преломление лучей у плоской поверхности	14
§ 5. Преломление и отражение лучей у сферической поверхности	16
§ 6. Пространство объектов и пространство изображений	22
§ 7. Система центрированных поверхностей. Главные плоскости	26
§ 8. Нахождение главных плоскостей и главных фокусов системы	33
§ 9. Телескопическая система	36
§ 10. Толстые и тонкие линзы	38
§ 11. Световой поток, проходящий через оптическую систему	45
§ 12. Действующая диафрагма	48
§ 13. Сферическая аберрация оптических систем	52
§ 14. Другие виды аберраций	58
§ 15. Оптическая система глаза	62
§ 16. Простейшие оптические приборы	67

### Глава IV. Границы применимости лучевой оптики

§ 17. Поляризация света при отражении и преломлении	80
§ 18. Простейшие поляризационные приспособления	89
§ 19. Эллиптическая и круговая поляризация света. Вращение плоскости поляризации	95
§ 20. Простейшие дифракционные явления	100
§ 21. Свертка функций объекта и аппаратной функции. Разрешающая сила оптических приборов	111

### Глава V. Интерферометрия

§ 22. Интерференция от двух источников. Временная и пространственная когерентность	119
§ 23. Интерференционные полосы равного наклона и равной толщины	128
§ 24. Интерферометры	139
§ 25. Интерференционные методы изучения аномальной дисперсии	150
§ 26. Многолучевая интерференция	157
§ 27. Интерферометр Фабри — Перо	163
§ 28. Многослойные покрытия	171
§ 29. Интерференционная метрология	175
§ 30. Концевые меры и их измерение	186

### Глава VI. Использование фазовых соотношений

§ 31. Информация, передаваемая световым потоком	192
§ 32. Звездный интерферометр	195
§ 33. Дифракционные явления в микроскопе	200
§ 34. Метод фазового контраста	206
§ 35. Голография	209
§ 36. Фурье-голография. Объемная голография	216
§ 37. Применения голографии	221

ИБ № 912

*Фриш Сергей Эдуардович*

**Оптические методы измерений**

**Часть 2**

**Лучевая оптика и границы ее применимости  
Интерферометрия**

Редактор *Г. А. Григенч*

Техн. редактор *А. В. Борщева*

Корректоры *С. К. Школьникова, Е. К. Терентьева*

---

Сдано в набор 22.10.79. Подписано к печати 17.04.80. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бум. тип. № 1 Гарнитура литературная. Печать высокая. Тираж 2554 экз. Печ. л. 14,25.

Уч.-изд. л. 13,22. Заказ 391. Цена 45 коп.

Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова, 199164, Ленинград, В-164,  
Университетская наб., 7/9.

---

Типография Изд-ва ЛГУ им. А. А. Жданова, 199164, Ленинград,  
Университетская наб., 7/9.

45 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА