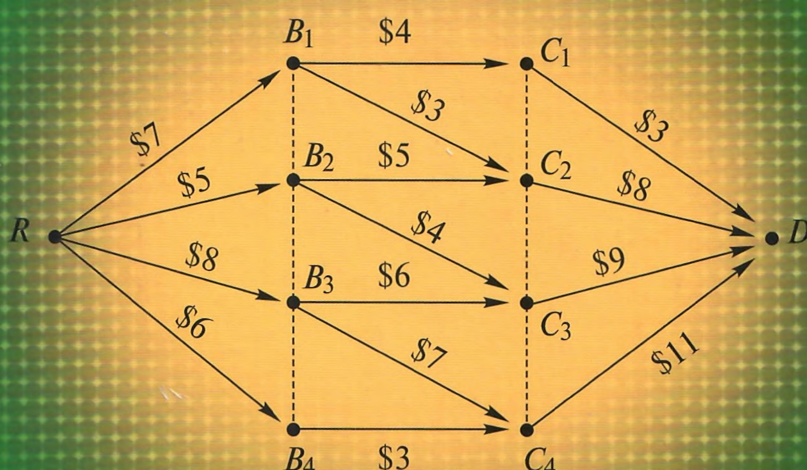
Игры и принятие решений

Каралambос Д. Алипрантис
Субир К. Чакрабарти



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Переводные

учебники ВШЭ

Charalambos D. Aliprantis
Subir K. Chakrabarti

Games and Decision Making

Second edition

Караламбос Д. Алипрантис
Субир К. Чакрабарти

Игры и принятие решений

Перевод с английского
С.В. БУСЫГИНА
под научной редакцией
В.П. БУСЫГИНА

Издательский дом Высшей школы экономики
Москва 2016

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я7
А50

Подготовлено в рамках проекта ВШЭ
по изданию переводов учебной литературы

Алипрантис, К. Д., Чакрабарти, С. К.

А50 Игры и принятие решений [Текст] : учеб. пособие / К. Д. Алипрантис, С. К. Чакрабарти ; пер. с англ. С. В. Бусыгина ; под науч. ред. В. П. Бусыгина ; сост. указ. В. П. Бусыгина ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2016. — 543, [1] с. — (Переводные учебники ВШЭ). — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-1097-1 (в пер.).

Учебник написан с целью представить сложные концепции современной теории решений для читателя, знакомого лишь с элементарным дифференциальным исчислением и элементарной теорией вероятности. Это автономная трактовка практически всего, что может быть названо теорией решений, — от классической теории оптимизации до современной теории игр. Книга содержит множество приложений из экономики, политической науки, финансов и менеджмента и примеров, призванных показать необходимость изучения теории и продемонстрировать границы, внутри которых она применима. Сначала авторы рассматривают наиболее простые варианты принятия решений — такие, в которых участвует только одно лицо, затем постепенно переходят к более сложным задачам, вплоть до анализа секвенциальной рациональности, и наконец объясняют, каким образом полученный интеллектуальный капитал может быть использован для изучения практических проблем — аукционов и торга. Особенность учебника заключается в том, что авторы трактуют теорию принятия решений и теорию игр как часть одной и той же совокупности знания. Теория принятия решений с участием одного лица используется в учебнике как строительный блок для теории игр.

Для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Экономика», «Математика», изучающих вводные курсы по оптимизации и теории игр, а также для слушателей курсов MBA по теории принятия решений.

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я7

Games and Decision Making, Second Edition was originally published in English in 2012. This translation is published by arrangement with Oxford University Press.

ISBN 978-0-1953-0022-2 (англ.)

ISBN 978-5-7598-1097-1 (рус.)

Оглавление

Предисловие к русскому изданию

По замыслу авторов этой книги, она представляет собой введение в теорию принятия решений, которое включает и классическую теорию оптимизации (теорию принятия решений одним лицом), и теорию торга — модели ситуации, где контрагенты сделки (продавцы и покупатели) последовательно делают предложения и контрпредложения об условиях сделки, и (некооперативную) теорию игр. Последняя изучает принятие решений несколькими лицами в так называемых стратегических ситуациях, т.е. в ситуациях, когда на результат решений одних индивидов влияют решения других. Таким образом, авторы данного учебника рассматривают эти три теории как части единого целого, подчеркивая взаимосвязь между проблемами принятия решений одним лицом и несколькими (взаимодействующими друг с другом) индивидами.

Напомним, что идеи, модели и методы теории принятия решений, и прежде всего теории игр, в отличие от других математических дисциплин, мотивируются не физическими, а социальными феноменами. И в частности, теория игр — это фактически «математика конфликта и сотрудничества». Это обстоятельство, кстати, существенно обесценивает аргументы противников применения математических методов в обществоведении, многие из которых формулируются как претензии к моделям и методам, сформировавшимся при исследовании физических феноменов, и сводятся к тому, что успех этих моделей и методов в одной области исследований вовсе не оправдывает их некритическое использование в другой.

Как раздел математики теория игр формируется «почти» на наших глазах, за какие-нибудь 40 лет, с 50-х по 80-е годы прошлого века, одновременно совершая революцию в обществоведении, внося существенные изменения как в способы моделирования общественных феноменов, так и в методы их исследования. Концепции решения игр, которые обсуждает теория игр, можно рассматривать как развитие концепции рационального поведения — краеугольного камня в фундаменте неоклассической экономической теории — и ее распространение на стратегические ситуации. Это предоставило возможность исследователям освободить экономическую теорию от во многом искусственных предпосылок типа гипотезы совершенных рынков, симметричной информации и т.д. и распространить плодотворную идею рационального поведения на новые области исследований. Фактически при активном участии теории игр экономическая теория, прежде всего микроэкономика, превращается из науки, занимающейся производством и распределением материальных благ (по содержанию), в науку о стимулах, порождаемых социальными институтами, и влиянии этих стимулов на поведение и приложение теории игр (по форме). Поэтому изучение теоретико-игрового инструментария анализа социально-экономических феноменов представляется необходимым этапом обучения обществоведа, экономиста в частности, — что и отражают программы подготовки таких специалистов в ведущих университетах.

По прошествии определенного времени, «когда была найдена форма, адекватная простоте содержания дисциплины», стали появляться многочисленные учебные пособия по теории игр, прежде всего на английском языке, ориентированные на разные целевые аудитории. И хотя некоторые великолепные монографии, отражающие состояние теории игр на более раннем этапе ее жизни, переведены на русский язык (Р.Д. Льюс, Х. Райфа «Игры и решения; Г. Оуэн «Теория игр»; Дж. Мак-Кинси «Введение в теорию игр» и др.), переводов книг, представляющих современное ее состояние, практически нет, за исключением изданной на русском языке замечательной презентации возможностей современной теории игр в популярной форме — книги А.К. Диксита и Б. Нэлбаффа «Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни», которая вряд ли может служить пособием для, в частности, полноценного бакалаврского курса.

Представляется, что лежащая перед вами книга таким пособием является. Она поможет хотя бы частично заполнить указанный пробел, а также станет хорошим дополнением к соответствующим учебным пособиям российских авторов. По замыслу авторов этого учебника, он представляет собой «междисциплинарный бакалаврский курс с существенным математическим содержанием» и призван продемонстрировать возможности и ограничения математических методов анализа общественных феноменов. Для этого в него включены многочисленные примеры приложений теории к экономике, политологии, финансам и менеджменту.

Изложенный материал будет доступен читателю с достаточно скромной математической подготовкой, включающей вводные разделы дифференциального исчисления и дискретной математики. Впрочем, все необходимые сведения из указанных дисциплин представлены в самой книге. Тем не менее усвоение некоторых разделов курса, прежде всего доказательств существования соответствующих концепций решения (равновесия) игр, приведенных в заключительной, девятой главе, требует известной аналитической культуры. Но, как представляется, читатели, интересующиеся главным образом приложениями теории и предлагаемыми методами анализа, могут соответствующие разделы, по крайней мере при первом чтении, опустить.

Книга может служить в качестве учебника для студентов бакалавриата многих специальностей, желающих ознакомиться с теорией принятия решений, например, студентов экономических, бизнес- и даже математических факультетов, а также для тех, кто желает самостоятельно овладеть приемами анализа решений. Кроме того, она может использоваться как учебное пособие при изучении более продвинутых курсов по теории принятия решений, теории игр.

В.П. Бусыгин,
научный редактор перевода

Посвящается нашим женам и детям:
Бернадетт и Тухине;
Клэр, Дионисси,
Анише, Девике и Шармите

Предисловие

Второе издание книги «Игры и принятие решений» построено на характерных для первого издания сильных сторонах и расширяет и развивает их, чтобы книга представляла собой достаточно полное и детальное изложение теории игр. Так, во втором издании добавлены две новые главы и несколько новых разделов в семи первоначальных главах. В то время как первое издание соединяет элементы теории принятия решений и теории игр и делает это достаточно оригинальным способом, второе издание идет дальше в направлении более полного представления собственно теории игр. В нем сохранен почти в полном объеме материал первого издания с небольшими модификациями некоторых примеров и некоторой реорганизацией глав.

Изменения во втором издании

- Глава 2 включает достаточно много нового материала с существенно более тщательным обсуждением смешанных стратегий, раздел о наилучших ответах и равновесии по Нэшу, более обширный список известных примеров матричных игр и новый раздел об играх в стратегической форме с неполной информацией и равновесии Байеса — Нэша. Добавлено несколько новых примеров и в раздел о приложениях, прежде всего о приложениях к теории игр экономической теории.
- Глава 4, как и глава 2, расширена достаточно сильно, добавлено несколько новых примеров приложения динамических игр. В разделе о приложениях динамических игр есть теперь несколько приложений из экономической теории.
- Главы 5 и 6 — главы об аукционах и торге из первого издания. В главе 5 появился новый раздел об эквивалентности доходов. Глава 6 в основном повторяет главу о торге из первого издания, хотя мы перенесли материал о торге при неполной информации в главу 8.
- Глава 7 «Повторяющиеся игры» в первом издании отсутствовала.
- Глава 8 «Секвенциальная рациональность» основана на материале главы 5 первого издания. В ней появились два новых раздела: «Совершенное байесовское равновесие» и «Сигналинговые игры». Она включает также скорректированный материал о торге при неполной информации, а также несколько новых примеров в разделе «Приложения».
- Последняя, девятая глава — новая и ориентируется на литературу о существовании разных типов равновесий, рассмотренных в предыдущих главах. Материал этой главы — важная часть основы теории игр. Она дает возможность понять, как выводятся и конструируются различные равновесные точки.

- В то время как первое издание книги ориентируется на то, чтобы дать возможность достаточно подготовленному студенту серьезно изучить сочетание теории принятия решений и теории игр на основе дифференциального исчисления как основного инструмента анализа, второе издание приближается скорее к достаточно обстоятельному учебному пособию по теории игр. Мы полагаем, что материал книги окажется полезным даже для достаточно подготовленных студентов.
- Второе издание теперь покрывает большую часть стандартного материала по теории игр, включая повторяющиеся игры и игры с несовершенной и неполной информацией. Оно также содержит достаточно строгое изложение фундаментальных результатов относительно существования.

И хотя книга включает бóльшую часть проблематики теории игр, в ней рассмотрены не все вопросы. Так, хотя материал и включает некоторые усиления концепции равновесия по Нэшу, он, тем не менее, не покрывает эту проблематику теории игр исчерпывающим образом. В результате остались не освещенными понятия, подобные совершенному равновесию дрожащей руки и собственному равновесию, хотя вполне можно утверждать, что они являются и полезными, и интересными. Не представлен и материал по эволюционной теории игр. При выборе материала мы отдавали предпочтение наиболее полезным и значимым понятиям, имеющим широкое приложение.

В целом книга является попыткой представить достаточно проницательным читателям теорию игр и теорию принятия решений в сочетании, насколько это возможно, с их приложениями к экономике и другим дисциплинам. Следовательно, при каждом удобном случае мы добавляли раздел о приложениях, который иллюстрирует использование теории. Мы старались представить понятия теории в достаточно строгом виде, но в то же время привести примеры использования теории при анализе важных основных проблем в экономике и других дисциплинах.

Наконец, мы хотели бы высказать благодарность всем тем, кто обсуждал и рецензировал текст, и особенно д-ру Эфе Оку из Университета Нью-Йорка, д-ру Катри Сиберг из Университета Бирмингема и д-ру Кларку Робертсону из Северо-Западного университета.

Глава 1 ВЫБОР

Индивиды и группы часто должны принимать решения в многочисленных и различных ситуациях. Как индивиды, мы должны принимать решения о том, как распределить наш доход. Фирма должна принимать решения относительно действий, которые ей необходимо предпринять для того, чтобы эффективно конкурировать на рынке. Правительствам нужно принимать решения относительно их внешней политики, внутренней политики, фискальной и денежной политики. Студентам нужно выбирать курсы в каждом семестре. Многообразие ситуаций, в которых индивиды должны принимать решения, действительно очень впечатляет.

Столкнувшись с необходимостью принять решение, мы всегда пытаемся понять, какое решение было бы наилучшим. Зачастую мы тратим огромное количество времени и энергии, прилагая отчаянные усилия, чтобы решить, что же делать. В одних и тех же условиях различные индивиды могут делать совершенно разный выбор. Кто из них прав? Принял ли один индивид хорошее решение, а другой — плохое? Очевидно, что ответы на данные вопросы зависят от критерия, который используется для оценки решений. Как хорошо известно, индивиды преследуют различные цели и имеют разные интересы, которые могут влиять на принимаемые ими решения.

Задача принятия решения обычно содержит поставленную цель и множество альтернативных выборов для ее достижения. Следовательно, задача принятия решения, или оптимизационная задача, имеет целевую функцию (желаемую цель) и допустимое множество, или множество выбора (множество альтернативных выборов). Тогда вопрос состоит в том, какой выбор окажется лучшим для достижения заданной цели.

В этой главе мы обрисуем некоторые основные принципы математической теории оптимизации. Мы стремимся не засыпать вас техническими деталями, а представить некоторые наиболее важные результаты в этой области. Мы также продемонстрируем, как методы оптимизации могут быть использованы не только для принятия правильных решений, но и, что более важно, для того, чтобы показать, как формулировать и моделировать задачи принятия решений.

1.1. Функции

Функция — основное понятие в математике. Понятие функции существенно для изучения как самой математики, так и ее приложений. Здесь оно также будет иметь фундаментальное значение.

В дифференциальном исчислении обычно полагают, что функция — это «формула» $y = f(x)$, которая устанавливает отношение между двумя перемен-

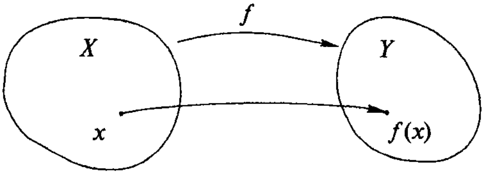


Рис. 1.1

ными x и y. Переменная x называется **независимой переменной**, а y — **зависимой переменной**. Например,

$$y = x^2,\ \ y = \sqrt{x-2},\ \ y = \frac{x+1}{x-1}$$

являются функциями. Множество всех значений переменной x, для которых формула $f(x)$ имеет «алгебраический смысл», называется **областью определения** функции. Например, область определения функции $y = x^2$ — множество R всех вещественных чисел[1], а область определения $f(x) = \sqrt{x-2}$ состоит из всех вещественных чисел, для которых $x - 2 \geq 0$, т.е. $[2; \infty)$.

Понятие функции является намного более широким, чем было показано выше, и оно тесно связано с понятием множества. Вспомним, что **множество** может быть интуитивно определено как набор объектов (или элементов), рассматриваемых как единое целое; как это принято, будем обозначать множества прописными буквами. **Функция** f обычно определяется как «правило», по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственный элемент $y = f(x)$ из множества Y. Элемент x называется **входом**, а элемент $f(x)$ — **выходом**. Схематично функцию f обозначают как $f : X \to Y$, и ее геометрическая иллюстрация приведена на рис. 1.1. Множество X теперь называется областью определения функции. В случае если $Y = R$, f называется **функцией вещественной переменной**.

Вот некоторые примеры функций.

- Определим функцию вещественной переменной $f : R \to R$ с помощью формулы $f(x) = 3x$. Таким образом, правило f информирует нас о том, что если x — вещественное число, то для нахождения выхода $f(x)$ нужно умножить x на 3. Например, $f(2) = 6$, $f(-3) = -9$ и $f(0) = 0$.
- Пусть X обозначает собрание книг в вашей библиотеке, $N = \{1, 2, 3...\}$ (множество **натуральных чисел**). Определим функцию $f : X \to N$ по правилу: $f(x)$ = число страниц в книге x. Например, если книга b содержит 235 страниц, значит, $f(b) = 235$.
- Пусть A обозначает собрание всех машин в вашем городе, а B — множество всевозможных цветов. Тогда можно рассмотреть функцию c, которая присваивает каждой машине какой-то цвет. То есть $c : A \to B$ — правило, которое выбранной машине x ставит в соответствие ее цвет $c(x)$. Если машина a желтого цвета, следовательно, $c(a)$ = желтый, и если x — красная машина, то $c(x)$ = красный.

[1] Всюду в этой книге символ R обозначает множество всех вещественных чисел.

- Пусть множество B — множество всех птиц в лесу, а T — множество всех деревьев в том же лесу. Можно определить функцию $f : B \to T$ по правилу: если b — птица, то $f(b)$ — дерево, на котором находится ее гнездо.
- Предположим, что P обозначает множество всех людей, живущих в США, и пусть C — совокупность всех представителей конгресса США. Определим функцию $f : P \to C$ так, что $f(a)$ — представитель конгресса того района, где проживает индивид a.

Предлагаем читателю подумать над примерами других функций из повседневной жизни.

Упражнения

1. Найти область определения функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
2. Рассмотрим множество P всех индивидов, проживающих в настоящее время в вашем городе. Определите, какие из нижеперечисленных правил являются функциями.
   (a) Для каждого человека x его отец — $f(x)$.
   (b) Для каждого человека x его сын — $g(x)$.
   (c) Для каждого человека x его рост — $h(x)$.
   (d) Для каждого человека x его вес — $w(x)$.
3. Пусть A — множество всех почтовых адресов в вашем городе и I — совокупность всех отправлений в заданный день в почтовом отделении города, которые должны быть доставлены адресатам. Для каждого отправления i пусть

   $f(i)$ = почтовый адрес,
   по которому оно должно быть доставлено.

   Определяет ли это правило функцию на множестве I со значениями во множестве A (из I в A)?
4. Рассмотрим множество натуральных чисел $X = \{1789, 1790, 1791, \ldots, 2008\}$ и множество P всех президентов США. Определим функцию $f : X \to P$ по правилу:

   $f(x)$ = президент США на первое декабря года x.

   Например, $f(1826)$ = Дж.К. Адамс, $f(1863)$ = А. Линкольн, $f(1962)$ = = Дж.Ф. Кеннеди, $f(1971)$ = Р.М. Никсон. Каковы значения функции $f(1789)$, $f(1900)$, $f(1947)$, $f(1988)$, $f(1996)$, $f(2004)$ и $f(2008)$?
5. Пусть X и P — множества, определенные в предыдущем упражнении. Для каждого года x из X положим

   $f(x)$ = президент США на 22 ноября года x.

   Определяет ли это правило функцию из X в P?
6. Пусть B обозначает собрание книг в вашей библиотеке, и пусть для каждой книги x $f(x)$ будет автором этой книги x. Является ли предложенное правило функцией? Если не является, каким образом можно модифицировать его, чтобы оно стало функцией?

1.2. Оптимизационные задачи

Не будет преувеличением сказать, что каждый раз, принимая решение, мы сталкиваемся с задачей оптимизации. Когда мы идем в магазин, например «Волмарт» (Wallmart), у нас имеется список вещей, которые хотели бы купить. Но каковы бы ни были наши намерения, приходится сталкиваться с выбором. Следует ли приобрести самый дешевый бренд? Или лучше выбрать бренд подороже, но более высокого качества? Или вопрос может состоять в том, нужны ли нам еще брюки или же взять еще одну юбку? Собираясь купить дом, семья должна решить, нужен ли ей большой дом или дом поменьше, но в нужном месте. Каждый год федеральное правительство должно утверждать бюджет после принятия решения о том, какое финансирование получит каждая программа. В экономике центральным моментом теории потребления является выбор, который делает потребитель. В теории фирмы фирма решает, каким образом максимизировать прибыль и минимизировать издержки.

Все эти задачи с принятием решений имеют общую характерную черту. Существует множество альтернатив Ω, из которых нужно выбирать. Если индивиду, зашедшему в «Волмарт», нужно купить брюки, у него может быть более десятка альтернатив. В случае семьи, приобретающей дом в заданном диапазоне цен (т.е. при данном бюджете), может быть доступно много различных вариантов домов, расположенных в самых разных местах. Тогда эти варианты определяют множество Ω альтернатив для семьи. Как мы вскоре увидим, у потребителя в теории потребления есть множество выбора, как и у фирмы в теории фирмы.

Еще одна общая характеристика всех решений состоит в том, что лицу, принимающему решение, необходимо выработать некоторый критерий выбора из альтернатив. Другими словами, лицо, принимающее решение, должно иметь некоторое «ранжирование» различных альтернатив из множества выбора. Эти «ранжирование» представляется вещественнозначной функцией $f:\Omega \to R$, причем более высокое значение, приписываемое альтернативе этой функцией, означает, что она имеет более высокий «ранг», чем альтернатива с более низким значением.

Понятия множества и функции, представленные в предыдущем разделе, являются основными инструментами для описания оптимизационных задач. В абстрактной форме оптимизационная задача состоит из множества Ω (которое называется **множеством выбора** или **допустимым множеством**[1]) и функции $f:\Omega \to R$ (которая называется **целевой функцией**). Цель при этом — выбор такой альтернативы из множества Ω, которая максимизирует или минимизирует значение целевой функции f. То есть лицо, принимающее решение, решает одну из задач:

(1) максимизировать $f(\omega)$ при условии $\omega \in \Omega$;

(2) минимизировать $f(\omega)$ при условии $\omega \in \Omega$.

---

[1] Множество выбора также называют **множеством ограничений**, **достижимым множеством** или даже **множеством альтернатив**.

Поскольку минимизация $f(\omega)$ при условии $\omega \in \Omega$ эквивалентна максимизации $-f(\omega)$ при условии $\omega \in \Omega$ (объясните, почему), то обе задачи могут быть объединены в следующую общую оптимизационную задачу[1]:

Оптимизационная задача

Максимум $f(\omega)$
при условии $\omega \in \Omega$

Любой выбор $\omega^* \in \Omega$, на котором достигается максимум целевой функции f (т.е. $f(\omega^*) \geq f(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$), называется **точкой максимума** (или **точкой оптимума**) f на множестве выбора Ω.

Проиллюстрируем идею оптимизационной задачи на некоторых общих примерах.

Пример 1.1. Предположим, что потребитель зашел на рынок, чтобы купить яблок и апельсинов, затратив при этом не более 12 долл. Яблоки стоят 1 долл. за фунт, а апельсины 2 долл. за фунт.

Потребитель не только хочет приобрести наибольший возможный «набор» яблок и апельсинов, но и получить наибольшее возможное «удовлетворение». На практике удовлетворение (или вкус) потребителя выражается в терминах функции, известной как **функция полезности**. В данном случае будем полагать, что функция полезности задана в виде $u(x,y) = xy$.

Пара (x,y) представляет возможный «набор» яблок и апельсинов, который потребитель может купить. Поскольку $u(2,3) = 6 > 4 = u(4,1)$, то он предпочтет набор (2,3) (2 фунта яблок и 3 фунта апельсинов) набору (4,1) (4 фунта яблок и 1 фунт апельсинов).

Стоимость (в долларах) набора (x,y) — это просто число $x+2y$. Ограничение в 12 долл., таким образом, говорит нам, что допустимые наборы должны удовлетворять условию $x+2y \leq 12$. Другими словами, множество альтернатив покупателя имеет вид

$$\Omega = \{(x,y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{и} \quad x+2y \leq 12\}.$$

Теперь можем записать, что задача покупателя состоит в максимизации $u(x,y) = xy$ при условии $(x,y) \in \Omega$. ■

Пример 1.2. Промоутер общественных мероприятий хочет определить цену билета на предстоящее событие исходя из максимизации своего дохода. По своему недавнему опыту он знает, что если установить цену в размере 12 долл. за человека, то мероприятие посетит порядка 1200 людей. Опыт также подсказывает ему, что каждое увеличение стоимости билета на 1 долл. приведет к снижению посещаемости на 150 человек, а уменьшение стоимости на тот же 1 долл. — к увеличению на 150 человек. Дополнительно

[1] Слово *оптимизация* происходит от латинского слова optimum, что значит «наилучший».

ему известно, что каждый посетитель потратит в среднем 6 долл. в торговых лотках на товары, продаваемые по концессии. Задача промоутера состоит в определении, *какой должна быть входная цена, чтобы максимизировать совокупный доход.*

Чтобы сформулировать эту задачу как задачу оптимизации, действуем следующим образом. Обозначим через x величину, на которую цена входного билета превышает 12 долл. (отрицательная величина x означает, что цена ниже 12 долл. на $-x$ долл.). То есть пусть цена за билет равна $12 + x$ долл. Тогда мероприятие посетит $1200 - 150x$ человек, а концессия принесет доход $6(1200 - 150x)$ долл. Обозначим через $R(x)$ доход промоутера, который был бы получен при увеличении цены входного билета на x долл. (сверх 12 долл.). Тогда

$$R(x) = \text{Доход от билетов} + \text{Доход от концессий} =$$

$$= (\text{Число людей}) \times (\text{Цена билета}) + 6(\text{Число людей}) =$$

$$= (1200 - 150x)(12 + x) + 6(1200 - 150x) =$$

$$= (1200 - 150x)(18 + x) =$$

$$= -150x^2 - 1500x + 21\,600.$$

Таким образом, задача промоутера — максимизировать

$$R(x) = -150x^2 - 1500x + 21\,600$$

при условии $x > -12$, или $x \in (-12, \infty)$. ■

Пример 1.3. Экспериментальные данные позволяют предположить, что концентрация наркотика в крови человека (измеренная в миллиграммах на литр) через t часов после инъекции описывается уравнением

$$C(t) = \frac{t}{t^2 + 9}.$$

Когда наблюдается максимальная концентрация?

То есть через сколько часов после инъекции концентрация наркотика максимальна? В терминах теории оптимизации требуется решить следующую задачу: максимум $C(t)$ при условии $t \geq 0$. ■

Пример 1.4. Предположим, что цена бушеля пшеницы составляет 4 долл., а цена удобрения за фунт — 0,25 долл. Фермер подметил, что при использовании n фунтов удобрения на акр он получает $\sqrt{n + 30}$ бушелей пшеницы на акр. *Сколько фунтов удобрения на акр посевной площади максимизирует прибыль фермера?*

Из формулы Прибыль = Доход – Издержки видно, что прибыль на акр составляет

$$P(n) = 4\sqrt{n + 30} - 0{,}25n.$$

Фермер должен максимизировать $P(n)$ при условии $n \geq 0$. ■

Пример 1.5. Владелец автосалона ежегодно продает 200 машин. Складирование одного автомобиля обходится ему в 100 долл. в год. Стоимость заказа новых автомобилей с завода составляет фиксированную величину в 100 долл. и 80 долл. дополнительно за каждую машину. *Сколько раз в год и какой объем партии следует заказывать, чтобы минимизировать годовые расходы на создание и хранение запасов?*

Чтобы сформулировать соответствующую задачу оптимизации, обозначим через x объем партии заказа (конечно, $x > 0$). Тогда количество заказов будет равным $200/x$. Поскольку стоимость заказа партии объемом x составляет величину $100 + 80x$, совокупная стоимость всех заказов будет равна

$$(100 + 80x) \times \frac{200}{x} = \frac{20\,000}{x} + 16\,000 \text{ долл.}$$

С другой стороны, будем предполагать, что из x машин в среднем половина находится на хранении, так что годовая стоимость складирования составит $100 \times \frac{x}{2} = 50x$ долл. Таким образом, совокупные издержки владельца автосалона за год составят

$$C(x) = 50x + \frac{20\,000}{x} + 16\,000 \text{ долл.}$$

Для решения задачи остается лишь минимизировать функцию $C(x)$ при условии $x > 0$. ■

Упражнения

1. По эмпирическим данным компанией был оценен спрос на определенный продукт:
$$D(p) = 120 - 2\sqrt{p},$$
где p — цена продукта в долларах. Сформулируйте оптимизационную задачу для компании, максимизирующей выручку по цене продукта p. [Ответ: $R(p) = 120p - 2p^{3/2}$.]
2. Производитель телевизоров определил, что для продажи x телевизоров цену нужно установить равной
$$p = 1200 - x.$$
Издержки при производстве x телевизоров составляют
$$C(x) = 4000 + 30x.$$
Сформулируйте оптимизационную задачу для максимизации прибыли производителя. [Ответ: $P(x) = -x^2 + 1170x - 4000$.]
3. Вы заходите в цветочный магазин с 20 долларами в кармане и планируете потратить все деньги на букет из гвоздик и роз. Каждая гвоздика стоит 1 долл., роза — 3 долл. Пусть ваше удовлетворение описывается функцией полезности $u(x, y) = x^2 y^3$ (где x — количество гвоздик,

y — количество роз в букете). Решение какой оптимизационной задачи даст наиболее удовлетворительный для вас букет?

4. Владелец магазина электроники прогнозирует, что будет продавать каждый год 6000 батарей для калькуляторов. Стоимость каждой батарейки 0,25 долл. Издержки, связанные с заказом каждой новой партии батареек, составляют 20 долл. Хранение батарейки в течение года стоит 0,96 долл. Предположите, что владелец магазина размещает в год n заказов, так что размер x партии батареек при каждом заказе равен $6000/n$. Сформулируйте соответствующую задачу оптимизации в терминах размера партии, минимизирующего готовые издержки собственника магазина. [Ответ: владелец магазина должен минимизировать функцию издержек $C(x) = 0{,}48x + \dfrac{120\,000}{x} + 1500$.]

1.3. Условия первого и второго порядка

Решение оптимизационной задачи тесно связано со *скоростью изменения* целевой функции. Скорость изменения функции известна в математике как *производная* функции. **Производной** функции $f : (a,b) \to R$ в точке $c \in (a,b)$ называется предел (если он существует)

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Если функция имеет производную в точке c, то говорят, что она **дифференцируема** в этой точке. Как отмечалось ранее, производная $f'(c)$ представляет скорость изменения функции $f(x)$ в точке c относительно изменения x. Постоянные функции имеют нулевую скорость изменения, поэтому их производные также равны нулю.

Перечислим основные правила вычисления производных. Более детальная информация может быть найдена в любом вводном курсе по дифференциальному исчислению, например, см. [23] в библиографическом списке в конце книги.

Правила вычисления производных для:

- степенной функции: $(x^p)' = px^{p-1}$
- суммы функций: $(f + g)' = f' + g'$
- произведения функций: $(fg)' = f'g + fg'$
- частного функций: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Цепное правило: $[f(g(x)] = f'(g(x))g'(x)$

Мы готовы теперь представить следующий основной результат теории оптимизации функций одной переменной, определенной на открытом интервале множества вещественных чисел. Точка c называется **критической** или

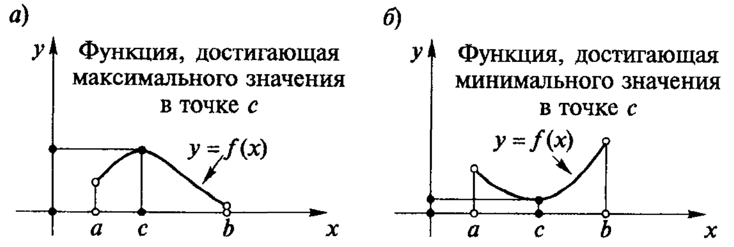


Рис. 1.2

стационарной точкой функции f, если значение ее производной в c равно нулю, т.е. $f'(c)=0$.

Тест первого порядка на оптимальность

Пусть $f:(a,b)\to R$ дифференцируема и имеет единственную критическую точку $c\in(a,b)$, т.е. c является единственной точкой, в которой $f'(c)=0$.

- Если $f'(x)>0$ для $x\in(a,c)$ и $f'(x)<0$ для $x\in(c,b)$, то f достигает своего максимума в точке $x=c$, более того, c — единственная точка максимума функции f на интервале (a,b).
- Если $f'(x)<0$ для $x\in(a,c)$ и $f'(x)>0$ для $x\in(c,b)$, то f достигает своего минимума в точке $x = c$, более того, c — единственная точка минимума функции f на интервале (a,b).

Данный результат называют **тестом первого порядка**, поскольку он включает только первую производную функции. Геометрический смысл максимума и минимума функции на открытом интервале (a,b) показан на рис. 1.2.

Если целевая функция имеет вторую производную, можно использовать следующий тест второго порядка для выявления природы стационарных точек. Напомним, что производная производной f' называется **второй производной** и обозначается как f''.

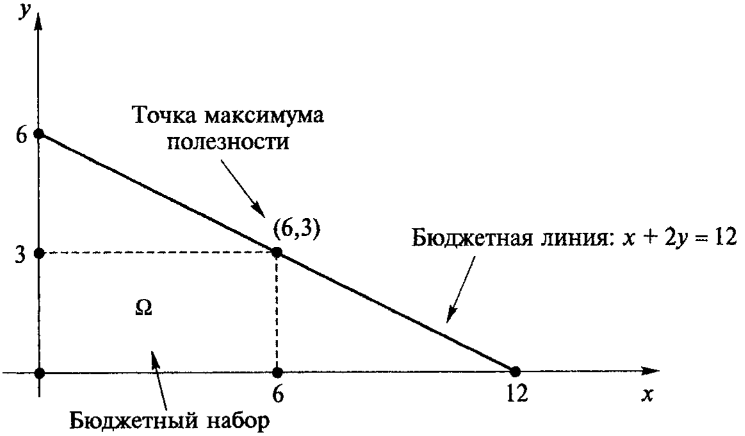


Рис. 1.3

Тест второго порядка на оптимальность

Пусть $f:(a,b)\to R$ дважды дифференцируема и имеет единственную критическую точку $c\in(a,b)$, т.е. c является единственной точкой, в которой $f'(c)=0$.

- Если $f''(c)<0$, то f достигает своего максимума в точке $x = c$, более того, c — единственная точка максимума функции f на интервале (a,b).
- Если $f''(c)>0$, то f достигает своего минимума в точке $x = c$, более того, c — единственная точка минимума функции f на интервале (a,b).

Продемонстрируем использование теста первого порядка на примере решений оптимизационных задач из предыдущего раздела.

Решение оптимизационной задачи из примера 1.1. Множество Ω показано на рис. 1.3. Обычно его называют *бюджетным множеством* потребителя. Линия $x+2y=12$ называется *бюджетной линией.* Заметим, что увеличение в наборе x и y строго увеличивает значение функции полезности $u = xy$. Это гарантирует, что точки максимума $u(x,y)$ будут лежать на бюджетной линии $x+2y=12$ (объясните, почему). Тогда замечаем, что

$$u=u(x,y)=xy=(12-2y)y=-2y^2+12y$$

и $0\le y\le 6$. Следовательно, мы должны максимизировать $u(y)=-2y^2+12y$ при условии $0\le y\le 6$. Так как $u(0)=u(6)=0$ [1], то достаточно максимизировать $u(y)=-2y^2+12y$ при условии $0<y<6$.

Вычисляя производную, получим: $u'(y)=-4y+12=-4(y-3)$. Из соотношения $u'(y)=0$ находим единственную критическую точку $y = 3$. Нетрудно видеть, что $u'(y)>0$ при $y<3$ и $u'(y)<0$ при $y>3$. В соответствии с тестом первого порядка получаем, что функция u достигает своего максимума при $y = 3$. Тогда $x=12-2y=12-2\times 3=6$.

Таким образом, набор (6,3) максимизирует функцию полезности $u(x,y)=xy$ на множестве Ω.

Решение оптимизационной задачи из примера 1.2. Необходимо найти максимум функции

$$R(x)=-150x^2-1500x+21\,600 \text{ при условии } x\in(-12;\infty).$$

Вынося за скобки -150, перепишем выражение в виде

$$R(x)=-150(x^2-10x+144).$$

Дифференцируя, получаем

$$R'(x)=150(-2x-10)=-300(x+5),$$

откуда находим, что $x=-5$ — единственная стационарная точка функции $R(\cdot)$. Более того, $R'(x)>0$ при $x<-5$ и $R'(x)<0$ при $x>-5$, следовательно, функция $R(x)$ достигает своего максимума в точке $x=-5$.

[1] А $u(1) = 10$. — *Примеч. пер.*

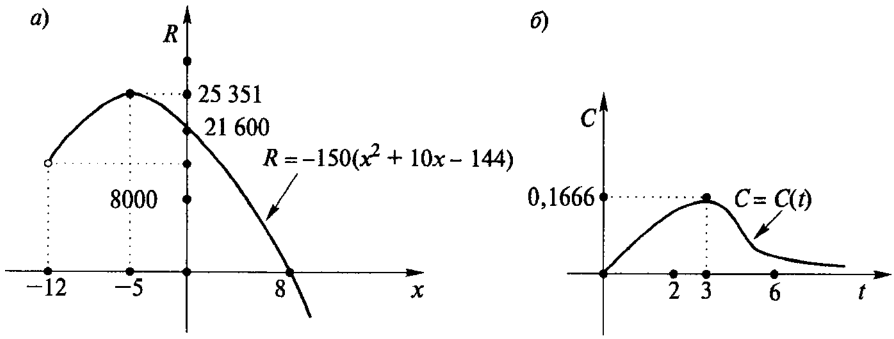


Рис. 1.4

Таким образом, уменьшение стоимости билета на 5 долл. позволяет получить максимальный доход $R(-5) = 25\,351$ долл. Другими словами, входная стоимость билета в размере $12 - 5 = 7$ долл. максимизирует доход. График функции $R(x)$ представлен на рис. 1.4, *а*.

Мы можем использовать также и тест второго порядка на оптимальность, заметив, что $R''(x) = -300$, так что $R''(-5) = -300 < 0$.

Решение оптимизационной задачи из примера 1.3. Дифференцируя функцию $C(t) = \dfrac{t}{t^2+9}$, использовав правило взятия производной от частного двух функций, получим

$$C'(t) = \frac{(t)'(t^2+9) - (t^2+9)'t}{(t^2+9)^2} = \frac{t^2+9-2t^2}{(t^2+9)^2} = \frac{9-t^2}{(t^2+9)^2}.$$

Для нахождения критических точек $C(t)$ мы должны решить уравнение $C'(t) = 0$. В нашем случае это означает, что мы должны решить уравнение $9 - t^2 = 0$. Решая, находим, что $t = \pm 3$. Однако, поскольку оптимизация осуществляется на интервале $[0, \infty)$, нужно рассматривать только критическую точку $t = 3$.

Теперь заметим, что $C'(t) > 0$ при $0 \le t < 3$ и $C'(t) < 0$ для всех $t > 3$. Согласно тесту первого порядка, $C(t)$ достигает максимума в точке $t = 3$. Соответственно максимальная концентрация наркотика равна $C(3) = \dfrac{3}{3^2+9} = \dfrac{1}{6} = 0{,}1666$ миллиграмм на литр и достигается через 3 часа после инъекции. График функции $C(t)$ показан на рис. 1.4, *б*.

Решение оптимизационной задачи из примера 1.4. В данном случае нужно найти оптимум функции

$$P(n) = 4\sqrt{n+30} - \frac{1}{4}n = 4(n+30)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}n \text{ при условии } n \in [0, \infty).$$

Дифференцируя, получаем

$$P'(n) = 4\frac{1}{2}(n+30)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} = \frac{8-\sqrt{n+30}}{4\sqrt{n+30}}.$$

Решив уравнение $P'(n) = 0$, или $8 - \sqrt{n+30} = 0$, найдем критические точки. Последнее уравнение может быть переписано как $\sqrt{n+30} = 8$. Возводя в квадрат левую и правую части уравнения, получим $n + 30 = 64$, или $n = 34$.

Легко видеть, что $P'(n) > 0$ при $0 \le n < 34$ и $P'(n) < 0$ при $n > 34$. Согласно тесту первого порядка, $P(n)$ достигает максимума в точке $n = 34$. Таким образом, для максимизации прибыли фермеру следует использовать 34 фунта удобрений на акр. Величина максимальной прибыли на акр при этом составит

$$P(34) = 4\sqrt{34+30} - \frac{1}{4}34 = 4 \times 8 - 8{,}5 = 23{,}5.$$

Решение оптимизационной задачи из примера 1.5. Дифференцируем функцию издержек $C(x) = 50x + \dfrac{20\,000}{x} + 16\,000$ и получаем

$$C'(x) = 50 - \frac{20\,000}{x^2} = \frac{50(x^2 - 400)}{x^2} = \frac{50(x-20)(x+20)}{x^2}.$$

Откуда видно, что $C'(x) < 0$ при $0 < x < 20$, $C'(x) > 0$ при $x > 20$, $C'(20) = 0$. Так что, согласно тесту первого порядка, $x = 20$ является точкой минимума функции $C(x)$ на интервале $(0, \infty)$.

Другими словами, для минимизации затрат хранения владелец автосалона должен заказывать $\dfrac{200}{20} = 10$ раз в год партии в объеме 20 машин.

Упражнения

1. Найдите максимум и минимум следующих функций на указанных интервалах:
   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ при $0 \le x \le 3$;
   (b) $g(t) = -t^2 + 2t + 4$ при $0 \le t \le 3$.
2. Функция издержек производителя имеет вид $C(x) = 2x^2 + 40x + 5000$. Продажная цена единицы товара на рынке равна 1000 долл. Сколько единиц продукции нужно производить, чтобы максимизировать прибыль? Какова величина максимальной прибыли? [Ответ: 240 единиц обеспечат максимум прибыли размером 110 200 долл.]
3. Температура больного (по Фаренгейту) в момент времени t (измеренного в днях с начала болезни) в первые пять дней может определяться как $T(t) = -0{,}3t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$. Какова наивысшая температура больного и в какой день она должна наблюдаться? [Ответ: значение наивысшей температуры равно 99,8, наблюдается на второй день болезни.]
4. Производитель телевизоров определил, что для продажи x единиц новых телевизоров необходимо установить цену в размере $p = 960 - x$. Общие затраты на производство набора из x телевизоров описываются функцией издержек $C(x) = 4000 + 30x$. Сколько телевизоров необходимо производить, чтобы прибыль была максимальна? [Ответ: 465.]

5. Владелец 80-местного отеля знает, что все места окажутся занятыми, если плата за проживание составит 60 долл. в день. Обслуживание каждого занятого номера обходится в 4 долл. в день. По своему опыту владелец также знает, что если увеличить плату на x долл. свыше 60, то x мест при этом останутся свободными. Какая цена за номер в отеле принесет владельцу максимальную прибыль? [Ответ: 72 долл.]
6. Фирма по предоставлению кабельного телевидения обслуживает 20 000 домохозяйств, взимая плату в размере 30 долл. в месяц. Маркетинговое исследование выявило, что каждое снижение платы на 1 долл. увеличит число клиентов фирмы на 500, а увеличение платы на 1 долл. — уменьшит на 500 соответственно. Какой размер платы позволит фирме получать максимальную прибыль и какова величина этой прибыли? [Ответ: увеличение на 5 долл. (35 долл. в месяц) позволит получать максимальную прибыль в размере 612 500 долл.]
7. Магазин бытовой техники продает 810 телевизоров в год. Стоимость хранения телевизора составляет 12 долл. в год. При заказе партии новых телевизоров магазин несет фиксированные затраты в 60 долл. и дополнительные затраты в 10 долл. за каждый телевизор в партии. Сколько раз в год потребуется магазину делать заказ, чтобы минимизировать затраты создания и хранения запасов? Каков при этом оптимальный объем партии? [Ответ: 9 раз в год, объем партии 90 телевизоров.]
8. Дерево, посаженное в момент времени $t = 0$, имеет текущую стоимость в момент t (после посадки), определяемую соотношением $P(t) = 2t - 10$. Предположим, что ставка процента составляет 5% в год, дисконтирование непрерывное. Когда следует срубить дерево, чтобы максимизировать текущую дисконтированную стоимость? [Подсказка: текущая дисконтированная стоимость дерева равна $Q(t) = (2t - 10)e^{-0,05t}$.]

1.4. Использование метода Лагранжа при оптимизации

В двух предыдущих разделах обсуждались методы нахождения оптимума в случае, когда множество альтернатив — интервал (числовой прямой). Однако в некоторых ситуациях необходимо искать оптимум, когда множество альтернатив описывается набором уравнений. Далее будет рассмотрен случай, в котором множество альтернатив является подмножеством плоскости xy и описывается уравнением $g(x, y) = c$. То есть множество альтернатив задается в виде

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : g(x, y) = c\}.$$

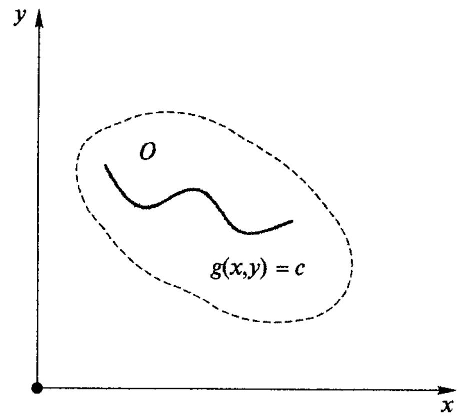


Рис. 1.5

Обычно предполагается, что *функция-ограничение* $g(x,y)$, так же как и целевая функция, имеет непрерывные частные производные на открытом множестве O, содержащем Ω. В данном случае наша оптимизационная задача формулируется так:

$$\boxed{\text{Максимум } u(x,y) \text{ при условии } g(x,y) = c.}$$

Геометрический смысл ограничения $g(x,y) = c$ показан на рис. 1.5.

Оптимизационная задача в этом случае имеет прозрачную физическую интерпретацию. Можно представить, что уравнение $g(x,y) = c$ задает форму проволоки, а $u(x,y)$ — температуру (или плотность массы) проволоки в точке (x,y). В таком случае решение нашей задачи даст расположение самой нагретой точки проволоки (точки с самой высокой плотностью массы).

Для решения подобного типа оптимизационных задач необходимо применить метод, известный как **метод Лагранжа**[1]. Метод использует частные производные. Напомним, что **частной производной** $\partial f/\partial x$ функции двух переменных $f(x,y)$ по переменной x называется производная $f(x,y)$ по x при фиксированном значении y. Аналогично, частной производной $\partial f/\partial y$ функции $f(x,y)$ по переменной y называется производная $f(x,y)$ по y при фиксированном значении x. Например, если $f(x,y) = x^2 + 2xy^3 + y^2$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y^3 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy^2 + 2y.$$

Таким же образом можно находить частные производные функции более чем двух переменных. При вычислении частной производной по переменной нужно помнить о том, что в процессе дифференцирования все остальные

[1] Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — выдающийся французский математик. Известен благодаря его знаменитым уравнениям движения в механике.

переменные полагаются константами. Рассмотрим, например, функции $f(x,y,z)=x^2+2x\sqrt{y}+xz^2$ и $g(x,y,z,v)=xy+zv^2-\cos v$.

Их частные производные равны

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{y}},\ \frac{\partial f}{\partial z}=2xz,\ \frac{\partial g}{\partial z}=v^2 \text{ и } \frac{\partial g}{\partial v}=2zv+\sin v.$$

Использование метода Лагранжа состоит в следующем. С функциями u и g ассоциируем новую функцию L, известную как **функция Лагранжа**, или **лагранжиан**, и определенную формулой

$$L(x,y,\lambda)=u(x,y)+\lambda[c-g(x,y)].$$

При определении функции Лагранжа вводится новая переменная λ, называемая **множителем Лагранжа**.

По аналогии с тестом первого порядка на решении нашей оптимизационной задачи обращаются в нуль все частные производные функции Лагранжа, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0.$$

Рекомендации по применению метода Лагранжа состоят в следующем.

Рекомендации по применению метода Лагранжа

Для нахождения решения задачи

«Максимум (или минимум) $u(x,y)$ при условии $g(x,y)=c$»

необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\ \frac{\partial L}{\partial y}=0 \text{ и } \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0,$$

или, в более явном виде, необходимо решить систему уравнений:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y},\ g(x,y)=c$$

с тремя неизвестными: x, y и λ.

Тогда все точки максимума и минимума целевой функции $u(x,y)$ окажутся среди найденных наборов (x,y).

Заметим, что решение этой системы уравнений не обязательно дает непременно максимум или минимум. Для того чтобы понять, каким типом экстремума оказывается решение этой системы, требуется некоторая дополнительная информация относительно оптимизационной задачи.

Приведем несколько примеров для иллюстрации метода.

Пример 1.6. У компании есть две фабрики, производящие один и тот же товар. Фабрика A производит x единиц продукции с издержками в $2x^2+50\,000$ долл., а фабрика B может производить y единиц товара с издержками в $y^2+40\,000$ долл. *Если требуется выполнить заказ на производство*

1200 единиц товара, как следует распределить производство между двумя фабриками, чтобы совокупные издержки были минимальны? Какими будут эти издержки?

Для решения задачи сначала вычислим функцию издержек $C(x,y)$ производства x единиц товара на фабрике A и y единиц на фабрике B. Это будет сумма издержек производства на каждой фабрике, т.е.

$$C(x,y) = (2x^2 + 50\,000) + (y^2 + 40\,000) = 2x^2 + y^2 + 90\,000 .$$

Если требуется произвести в общей сложности 1200 единиц товара, то будем иметь ограничение $g(x,y) = x + y = 1200$. Таким образом, по методу Лагранжа, нам необходимо решить систему уравнений:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \quad g(x,y) = 1200 .$$

Вычисляя соответствующие производные, получим

$$4x = \lambda , \tag{1.1}$$

$$2y = \lambda , \tag{1.2}$$

$$x + y = 1200 . \tag{1.3}$$

Из (1.1) и (1.2) находим, что $y = 2x$. Подставив это соотношение в (1.3), получим, что $x + 2x = 1200$, или $x = 400$, и $y = 1200 - 400 = 800$.

Таким образом, полные затраты на производство будут минимальны, если фабрика A будет производить 400 единиц товара, а фабрика B — 800 единиц. Общие затраты на производство составят

$$C(400,\ 800) = 2 \times 400^2 + 800^2 + 90\,000 = 1\,050\,000 \text{ долл.} \quad ■$$

Пример 1.7. Изготовление Q единиц продукции осуществляется по технологии

$$Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} ,$$

где K — количество использованного капитала; L — количество часов труда. Цена капитала равна 20 долл. за единицу, а заработная плата составляет 15 долл. за час. *Какие значения K и L позволят произвести 4200 единиц продукта с минимальными издержками? Каковы эти минимальные издержки?*

Функция издержек $C(K,L)$ для K единиц капитала и L часов труда — это

$$C(K,L) = 20K + 15L .$$

Так что наша задача может быть сформулирована в терминах оптимизации следующим образом:

$$\text{минимум } C(K,L) = 20K + 15L$$

$$\text{при условии } Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} = 4200 .$$

Решим эту задачу, используя метод Лагранжа. Для начала вычислим производные $\frac{\partial Q}{\partial K}$ и $\frac{\partial Q}{\partial L}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial K}=\frac{60}{2}K^{\frac{1}{2}-1}L^{\frac{1}{3}}=\frac{Q}{2K},\quad \frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{60}{3}K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}-1}=\frac{Q}{3L}.$$

В соответствии с методом Лагранжа нужно решить систему уравнений:

$$\frac{\partial C}{\partial K}=\lambda\frac{\partial Q}{\partial K},\quad \frac{\partial C}{\partial L}=\lambda\frac{\partial Q}{\partial L},\quad 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}=4200.$$

Подставляя производные, получаем систему

$$20=\lambda\frac{Q}{2K}, \tag{1.4}$$

$$15=\lambda\frac{Q}{3L}, \tag{1.5}$$

$$60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}=4200. \tag{1.6}$$

Разделив (1.4) на (1.5), получаем $\frac{20}{15}=\frac{3L}{2K}$, или $\frac{4}{3}=\frac{3L}{2K}$, откуда

$$L=\frac{8}{9}K. \tag{1.7}$$

Подстановка в (1.6) вместо L этого значения дает $60K^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{9}}K^{\frac{1}{3}}=4200$.

Отсюда следует, что $K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{4200\cdot\sqrt[3]{9}}{120}=72{,}8$. То есть $K^{\frac{5}{6}}=72{,}8$ и, таким образом,

$$K=(72{,}8)^{\frac{6}{5}}=171{,}62.$$

Теперь, используя (1.7), получаем $L=\frac{8\times 171{,}62}{9}=152{,}55$.

Другими словами, с помощью 171,62 единиц капитала и 152,55 часов труда будут произведены требуемые 4200 единиц продукции с минимальными издержками в размере $20\times 171{,}62+15\times 152{,}55=5721$ долл. ■

Следующий пример касается использования метода Лагранжа в центральной задаче теории потребителя. Основной задачей является нахождение набора товаров, доставляющего максимум функции полезности потребителя при его бюджетном ограничении.

Пример 1.8 (максимизация полезности). Бюджетное множество потребителя — это

$$\Omega=\{(x,y)\in R^2: x\ge 0,\ y\ge 0,\ p_1x+p_2y\le m\},$$

где p_1 и p_2 — (положительные) цены товаров, а m — доход потребителя.

Мы предлагаем воспользоваться методом Лагранжа, чтобы проиллюстрировать другой метод решения задачи, поставленной в примере 1.1. Итак, требуется решить следующую задачу оптимизации:

$$\text{максимум } u(x,y)=xy \text{ при условии } x\geq 0\,,\ y\geq 0 \text{ и } x+2y\leq 12\,.$$

Нетрудно убедиться в том, что искомый набор лежит на «бюджетной линии» $x+2y=12$. Следовательно, мы решаем оптимизационную задачу:

$$\text{максимум } u(x,y)=xy \text{ при условии } x\geq 0\,,\ y\geq 0 \text{ и } x+2y=12\,.$$

Согласно методу Лагранжа требуется решить систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lambda\frac{\partial(x+2y)}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\lambda\frac{\partial(x+2y)}{\partial y}\,,\quad x+2y=12\,,$$

или

$$y=\lambda\,, \tag{1.8}$$

$$x=2\lambda\,, \tag{1.9}$$

$$x+2y=12\,. \tag{1.10}$$

Подстановка выражений для x и y из (1.8) и (1.9) в (1.10) дает $2\lambda+2\lambda=12$, откуда $\lambda=3$, $x=6$ и $y=3$. Таким образом, (6,3) — искомая точка максимума. ■

Упражнения

1. Решите задачу 3 из раздела 1.2. [Ответ: букет из 8 гвоздик и 4 роз приносит максимальное удовлетворение.]
2. Производитель выделил 10 000 долл. на разработку и продвижение нового продукта. По своему опыту он знает, что если x тыс. долл. пойдут на разработку и y — на рекламу, то зарплаты будут примерно равны $Q(x,y)=100x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ единицам. Сколько тысяч долларов нужно потратить на разработку и сколько на рекламу, чтобы в дальнейшем иметь максимально высокие зарплаты? Чему равна максимально возможная зарплата? [Ответ: $x=7{,}5$; $y=2{,}5$; максимальная зарплата 3248.]
3. Найдите максимум функции полезности $u(x,y)=x^3y^2$ на бюджетном множестве
$$\Omega=\{(x,y): x\geq 0,\, y\geq 0,\, 3x+5y\leq 15\}\,.$$
4. У компании есть три фабрики, A, B и C, производящие один и тот же товар. Фабрика A производит x единиц продукции с издержками в $400+\frac{1}{50}x^2$ долл., фабрика B может производить y единиц товара с издержками в $200+y+\frac{1}{300}y^3$ долл. Фабрика C может производить z единиц товара с издержками в $300+10z$ долл. Если требуется выполнить заказ на производство 500 единиц товара, как следует распределить

производство между тремя фабриками, чтобы совокупные издержки были минимальны? Какими будут эти издержки?

5. Вы заходите в супермаркет, чтобы купить три продовольственных товара. У вас в кармане 108 долл., и вы хотите их все потратить. Первый товар стоит 1 долл. за фунт, второй — 3 долл. за фунт, третий — 4 долл. за фунт. Если ваше удовлетворение от набора (x,y,z) представляется функцией полезности $u(x,y,z)=x\times y\times z$, какой набор дает вам наибольшее удовлетворение?
6. Имеется 80 ярдов забора, с помощью которого требуется оградить прямоугольный участок. Каковы размеры (т.е. длина и ширина) огражденного участка с наибольшей возможно площадью? Чему равна площадь такого участка? [Ответ: длина = ширина = 20 ярдов.]
7. Цилиндрическая банка содержит 4π кубических дюймов яблочного сока. Стоимость монтирования одного квадратного дюйма металлической крышки и дна в 2 раза превосходит стоимость монтирования одного квадратного дюйма боковой поверхности. Каковы размеры наименее дорогой банки? [Ответ: радиус = 1 дюйм, высота = 4 дюйма.]
8. Найдите кратчайшее расстояние от точки (0, 1) оси ординат до параболы $x^2-4y=0$.

1.5. Неопределенность и случайность

В разделе рассмотрены математические основы, необходимые для моделирования принятия решений при неопределенности. В нем в сжатом виде представлены теория вероятностей и случайные величины. На этом материале основывается значительная часть материала других глав.

1.5.1. Теория вероятностей

Кто-то однажды сказал, что в этом мире неизбежны только смерть и налоги. Все остальное подвластно случаю. Для того чтобы понять феномен случайности (в рамках систематического подхода), математиками была разработана *теория вероятностей*[1], которая основывается на концепции вероятностного пространства.

Под **вероятностным пространством** мы будем понимать пару (S,P), где S — конечное множество, называемое **пространством элементарных событий**[2], а P — функция, которая каждому подмножеству $A\subset S$ ставит в соответствие вещественное число $P(A)\in[0;1]$. Если мы в качестве S рассмотрим

[1] Восхитительный рассказ об этом можно найти в книге Питера Бернштейна «Против Богов» (*Bernstein P.* Against the Gods. N.Y.: John Wiley & Sons, 1996).

[2] Альтернативные названия S — выборочное пространство, пространство выборок. — *Примеч. пер.*

$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ и положим $p_i = P(\{s_i\})$ (вероятность события s_i), то функция P должна удовлетворять следующим условиям:

(1) $p_i \geq 0$ для всех I и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;

(2) если A является подмножеством S, то $P(A) = \sum_{s_i \in A} p_i$.

В частности, мы имеем

$$P(\varnothing) = 0 \text{ и } P(S) = 1^1.$$

Вместо того чтобы говорить, что (S, P) — вероятностное пространство, довольно часто говорят, что P — вероятностное распределение на множестве исходов S.

Вот простой пример, показывающий, как можно использовать вероятностное пространство для моделирования неопределенности. Рассмотрим двухпериодную модель с периодами 0 и 1 (или «сегодня» и «завтра»), в которой все известно о сегодняшнем дне, но присутствует неопределенность относительно завтрашних исходов. То, что может случиться завтра, описывается множеством S возможных исходов. Вероятностное распределение P на S характеризует (чаще всего субъективные) шансы каждого из возможных исходов. Например, рассмотрим турнир NCCA (Национальной ассоциации студенческого спорта) по баскетболу среди мужских команд, который проводится ежегодно в марте. В турнире участвуют 64 лучшие команды колледжей, и, следуя определенной процедуре выбывания, определяется наилучшая мужская баскетбольная команда года Национальной ассоциации студенческого спорта. Таким образом, «сегодня», т.е. перед началом турнира, пространство элементарных событий имеет вид $S = \{1, 2, \ldots, 64\}$, а неопределенность заключается в том, какая из команд окажется победителем «завтра», т.е. к концу турнира. При спецификации распределения вероятностей на S определяем шансы каждой из команд выиграть турнир.

Подмножества пространства элементарных событий S называют **событиями**. Если A — событие, то $P(A)$ — вероятность этого события, т.е. шанс его наступления. Пространство элементарных событий S может быть и бесконечным. Однако в таком случае функция вероятности P является особой функцией на подмножествах S (называемой *вероятностной мерой*), определенной на особом наборе подмножеств S (событий), который обычно включает не каждое подмножество S.

События можно рассматривать как представляющие случайные исходы вероятностных экспериментов. Например, при подбрасывании монеты могут быть два исхода: «орел» (H) или «решка» (T)[2]. В данном примере пространство элементарных событий — это множество $S = \{H, T\}$. Если монета **правильная**

---

[1] Символ $\varnothing$ обозначает **пустое множество**, множество без элементов.

[2] H от английского Heads, T от английского Tails, в соответствии с названиями изображений на монетах. — *Примеч. пер.*

(или **симметричная**), мы полагаем, что $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$. Если же мы полагаем, что монета неправильная, мы можем приписать другие вероятности событиям H и T; например, положить, что $P(H) = \frac{1}{3}$, а $P(T) = \frac{2}{3}$.

В вероятностном эксперименте с подбрасыванием кости (игрального кубика) вероятностное пространство — это множество $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, где каждое число i представляет событие: *после подбрасывания кости число i оказывается на верхней грани кубика.* Если мы предполагаем, что кубик «правильный», то мы приписываем вероятности $p_i = \frac{1}{6}$ любому i.

1.5.2. Случайные величины

Удобный способ описания исходов случайных событий — использование понятия случайной величины. Мы начали с обсуждения вероятностного пространства (S, P), чтобы далее рассмотреть эту концепцию.

Случайной величиной называется функция $X : S \to R$ (из вероятностного пространства во множество вещественных чисел). Со случайной величиной X мы ассоциируем некоторые подмножества (события) выборочного пространства. Если A — подмножество R (множества вещественных чисел), то под записью $X \in A$ мы подразумеваем событие выборочного пространства $\{s \in S : X(s) \in A\}$. То есть мы будем использовать крайне удобные статистические обозначения

$$X \in A = \{s \in S : X(s) \in A\} \in A .$$

Например, если x — произвольное вещественное число, то

$$X \le x = \{s \in S : X(s) \le x\} .$$

Кроме того, $a \le X < b = \{s \in S : a \le X(s) < b\}$.

С каждой случайной величиной связана некоторая функция, называемая *функцией распределения*. Функция распределения указывает вероятности, с которыми случайная величина принимает различные значения, и определяется следующим образом.

Определение 1.9 (распределение случайной величины). *Пусть $X : S \to R$ — случайная величина. Тогда функцией распределения X называется функция $F : R \to R$, определенная для (каждого) вещественного числа x соотношением*

$$F(x) = P(X \le x) .$$

Проиллюстрируем понятие функции распределения случайной величины на двух примерах.

Пример 1.10. Рассмотрим случайный эксперимент с подбрасыванием монеты. Ранее мы упоминали, что вероятностным пространством здесь является множество $S=\{H,T\}$ и (предполагая, что монета идельно ровная) вероятности событий $P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим случайную величину $X:S\to R$, определенную следующим образом:

$$X(H)=1,\ X(T)=2.$$

Легко видеть, что

$$X\le x=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } x<1,\\ \{H\}, & \text{если } 1\le x<2,\\ \{H,T\}, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$$

Это приводит к следующей функции распределения:

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<1,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } 1\le x<2,\\ 1, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 1.6, *а*. ■

Пример 1.11. Теперь рассмотрим эксперимент с бросанием кости. Выборочное пространство — это $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ и $p_i=\frac{1}{6}$ для каждого i. Определим случайную величину $X:S\to R$ как $X(i)=i$. Тогда функция распределения F случайной величины X будет следующей: $F(x)=\frac{k_x}{6}$, где k_x — число целых чисел из множества 1, 2, 3, 4, 5, 6, меньших или равных x. График $F(x)$ изображен на рис. 1.6, *б*. ■

Форма графиков функций распределения на рис. 1.6 отражает фундаментальные свойства всех функций распределения. Они описаны в следующей теореме.

Теорема 1.12 (свойства распределений). Пусть $F:R\to R$ — *функция распределения случайной величины X. Тогда*

(1) $0\le F(x)\le 1$ *для любого* x;

(2) F — *неубывающая функция, т.е.* $F(x)\le F(y)$ *при* $x<y$;

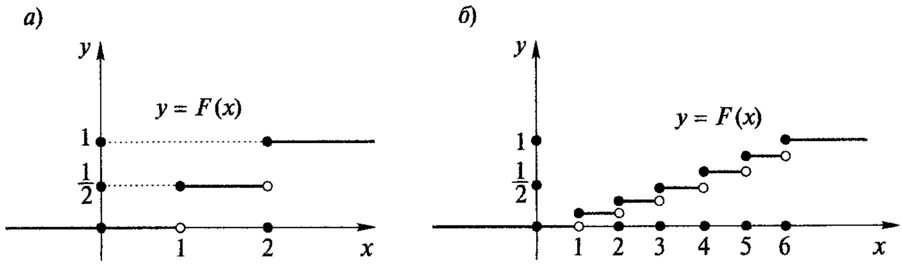


Рис. 1.6

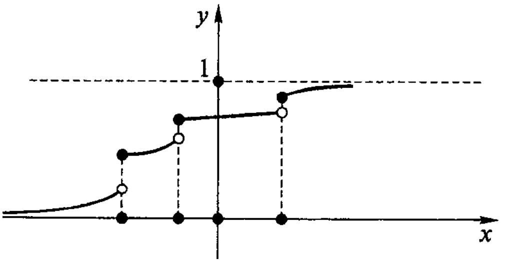


Рис. 1.7. График типичной функции распределения

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$;

(4) $P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$ *при* $a<b$;

(5) $P(X=a)=$ *скачок функции распределения* $F(x)$ *в точке* $x=a$.

Пример типичной функции распределения показан на рис. 1.7.

1.5.3. Ожидаемое значение случайной величины

Со случайными величинами связаны следующие три их характеристики: *математическое ожидание*, *дисперсия* и *стандартное отклонение*. Они определяются следующим образом.

Определение 1.13. *Пусть* $X : S \to R$ *— случайная величина.*

1. ***Математическое ожидание*** или ***ожидаемое значение*** $E(X)$ *случайной величины* X *— это*

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i X(s_i).$$

2. ***Дисперсия*** $Var(X)$ *случайной величины* X *— это*

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i [X(s_i)-E(X)]^2.$$

3. ***Стандартным отклонением*** σ *случайной величины* X *является положительный квадратный корень из дисперсии* X, *т.е.*

$$\sigma=\sqrt{Var(X)}.$$

Ожидание (или ожидаемое значение) измеряет среднее значение случайной величины (или среднее значение). Дисперсия и стандартное отклонение служат мерой «рассеяния» или «разброса» значений случайной величины относительно ожидаемого значения. Как мы увидим далее, данные параметры представляют собой очень полезные обобщенные характеристики распределения случайной величины.

Проиллюстрируем данные понятия на случайных величинах из примеров 1.10 и 1.11.

Что касается примера 1.10, имеем следующие значения:

$$E(X)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 2=\frac{3}{2},$$

$$Var(X)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

В примере 1.11 получаем

$$E(X)=\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{6}\times 4+\frac{1}{6}\times 5+\frac{1}{6}\times 6=\frac{21}{6}=\frac{7}{2},$$

$$Var(X)=16\sum_{i=1}^{6}\left(i-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{\frac{35}{12}}=1{,}708.$$

Во многих ситуациях случайности и неопределенности функция распределения случайной величины достаточно хорошо предоставляет информацию, касающуюся рассматриваемого случайного эксперимента. По этой причине выборочные пространства (и даже случайные величины) во многих приложениях отодвигаются на второй план, и вместо них рассматриваются функции распределения случайных величин. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.14. Рассмотрим акцию, доходности которой и их вероятности описываются в табл. 1.1. Можно трактовать доходность акции как случайную величину R, которая принимает значения 0%, 5%, 8% и 10% с указанными вероятностями. В данном примере не указано пространство элементарных событий, на котором определена случайная величина R, хотя события, которые приводят к искомым доходностям, являются элементами этого пространства. Так обычно и поступают во многих приложениях, где подходящая информация о том, что может произойти, исчерпывающим образом описывается распределением случайной величины. В таком случае существует много способов определить пространство элементарных событий. Например, положим, что $S=\{a,b,c,d\}$, и определим профиль вероятностей на S в виде $P(a)=0{,}3$, $P(b)=0{,}2$, $P(c)=0{,}4$ и $P(d)=0{,}1$. Теперь можно рассмотреть случайную величину $R:S\to R$, определенную как $R(a)=0$, $R(b)=5$, $R(c)=8$ и $R(d)=10$. Как

Таблица 1.1

	Доходность акции	
Вероятности	0,3	0%
	0,2	5%
	0,4	8%
	0,1	10%

видно, не требуется специфицировать пространство элементарных событий, и для нас здесь важно только распределение. (Попробуйте построить другие пространства элементарных событий для этого примера.)

Заметим, что ожидание случайной величины R равно

$$E(R) = 0\% \times 0,3 + 5\% \times 0,2 + 8\% \times 0,4 +$$
$$+ 10\% \times 0,1 = 1\% + 3,2\% + 1\% = 5,2\%.$$

Ее дисперсия имеет вид

$$Var(R) = [0 - 5,2]^2 \times 0,3 + [5 - 5,2]^2 \times 0,2 +$$
$$+ [8 - 5,2]^2 \times 0,4 + [10 - 5,2]^2 \times 0,1 = 13,56,$$

а стандартное отклонение

$$\sigma(R) = \sqrt{Var(R)} = \sqrt{13,56} = 3,6824.$$

Ожидаемое значение в 5,2% представляет среднюю доходность акции, а стандартное отклонение 3,6824% показывает рассеяние фактически реализованных доходностей вокруг среднего значения 5,2%. Стандартное отклонение часто используется в качестве меры волатильности, или «риска», доходности. ■

Некоторые виды распределений являются универсальными и часто возникают во многих задачах. В разнообразных приложениях распределения являются также непрерывными функциями и могут быть выражены в терминах плотности распределения следующим образом.

Определение 1.15. *Говорят, что функция распределения F случайной величины X имеет* ***функцию плотности****, если существует неотрицательная функция $f : R \to R$ (называемая* ***функцией плотности*** *или просто* ***плотностью****), такая что для всех $x \in R$ выполнено*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Кроме того что функция плотности всегда положительна, она также удовлетворяет соотношению $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Функция плотности позволяет находить вероятности случайной величины X в терминах интегралов. Для любых вещественных a и b ($a < b$) выполняется соотношение

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Заметим также, что

$$P(X > a) = \int_{a}^{\infty} f(t)dt.$$

В терминах функции плотности ожидаемое значение (математическое ожидание) и дисперсия случайной величины могут быть вычислены по формулам

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [t - E(X)]^2 f(t)dt.$$

1.5.4. Равномерное и нормальное распределение

Заканчивая раздел, приведем два важных примера функций распределения, которые часто встречаются на практике. Первое из них — равномерное распределение.

Пример 1.16 (равномерное распределение). Говорят, что случайная величина X имеет **равномерное распределение** на конечном замкнутом интервале $[a,b]$, если функция плотности X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 0, & \text{если } x \ge b. \end{cases}$$

Функция распределения выглядит следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 1, & \text{если } x \ge b. \end{cases}$$

Графики функции плотности и функции распределения равномерной случайной величины представлены на рис. 1.8.

Вычислим математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение равномерно распределенной случайной величины X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} tdt = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$Var(X) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 dt = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}.$$

Мы будем использовать равномерно распределенные случайные величины в дальнейшем изложении. ■

Приведем пример с использованием равномерного распределения.

Пример 1.17. Некий индивид обнаружил, что случайная величина X — время, которое он тратит на дорогу до офиса, равномерно распределена на

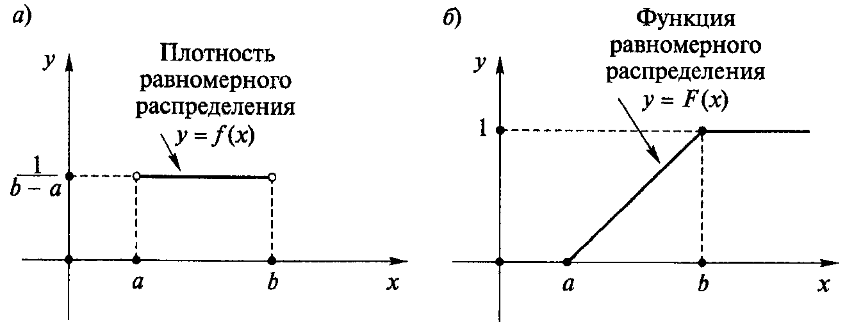


Рис. 1.8

интервале от одного часа до одного часа и 15 минут. Ему необходимо прийти на работу к 8 часам утра. Используя свойства равномерного распределения, мы можем ответить на следующие вопросы.

(1) Когда ему нужно выйти из дома, для того чтобы прийти на работу к 8:00 (i) с вероятностью 1 и (ii) с вероятностью 0,9?

(2) Когда он рассчитывает прийти на работу, если выйдет из дома в 7:00?

(3) Каково стандартное отклонение времени прибытия при выходе из дома в 7:00?

В этом примере время прихода равномерно распределено на замкнутом интервале $[d+1, d+1{,}25]$ часов, где d — время выхода из дома. Таким образом, если индивид выйдет из дома в 6:45, то время его прихода на работу будет расположено в интервале [7:45,8:00] с вероятностью 1. Если ему необходимо прийти на работу к 8:00 с вероятностью 0,9, а X — случайная величина времени его прихода, то время отправления должно удовлетворять соотношению

$$P(d+1 \le X \le 8) = 0{,}9 .$$

Поскольку плотность распределения времени прибытия имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}25} = 4, & \text{если } d+1 \le x \le d+1{,}25, \\ 0, & \text{если } x < d+1 \text{ или } x > d+1{,}25, \end{cases}$$

то из соотношения $P(d+1 \le X \le 8) = 0{,}9$ следует, что

$$[8-(d+1)]\times 4 = 0{,}9 .$$

Следовательно, $d = \dfrac{27{,}1}{4} = 6{,}7777$. Это значит, что этот индивид должен отправиться на работу через 48 секунд после 6:46, если хочет прийти на работу в 8:00 с вероятностью 0,9.

Если он отправится на работу в 7:00, то он придет на работу между 8:00 и 8:15. Ожидаемое время прихода составит 30 секунд после 8:07. Стандартное отклонение времени прихода

$$\frac{0{,}25\sqrt{3}}{6}=0{,}0722 \text{ часа},$$

или 4,33 минуты. ■

Теперь перейдем к нормальному распределению.

Пример 1.18 (нормальное распределение). Говорят, что случайная величина X имеет **нормальное распределение** с параметрами m и σ^2, если ее функция плотности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

То есть функция распределения нормально распределенной случайной величины X с параметрами m и σ^2 задается формулой

$$\Phi_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

(В статистике общепринято использовать прописную греческую букву Ф для обозначения нормального распределения.)

График функции плотности $f(x)$ представляет собой кривую в форме колокола, симметричную относительно прямой $x=m$. Графики функций $f(x)$ и $\Phi_X(x)$ изображены на рис. 1.9.

Оказывается, что математическое ожидание и дисперсия нормально распределенной случайной величины X имеют простой вид

$$E(X)=m \text{ и } Var(X)=\sigma^2.$$

В случае $m=0$, $\sigma=1$ мы имеем дело со *стандартным нормальным распределением* (*стандартным нормальным законом*). Функция распределения Ф для стандартного нормального распределения имеет вид

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Значения функции Ф можно найти в табл. 1.2. Для отрицательных значений x значение Ф находится из соотношения

$$\Phi(x)=1-\Phi(-x).$$

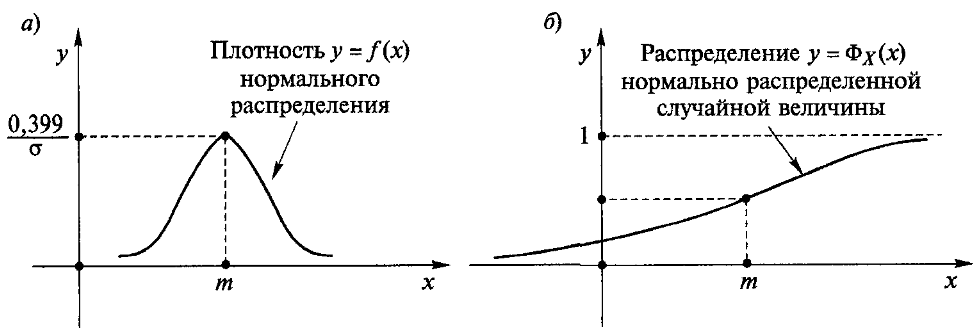


Рис. 1.9

Таблица 1.2. Значения функции Φ(*x*)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7919	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7398	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9485	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9929	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

В общем случае, если X — нормально распределенная случайная величина с параметрами m и σ^2, то ее распределение может быть выражено через распределение стандартной нормальной случайной величины по формуле

$$\Phi_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

По этой формуле и на основе табл. 1.2 значений Φ(*x*) можно вычислять значения любого нормального распределения.

Приведем пример с использованием нормального распределения.

Пример 1.19. Вернемся к примеру 1.17, в котором рассматривалось, сколько времени требуется некоему индивиду на дорогу до работы. Но теперь предположим, что время прихода имеет нормальное распределение со средним $m = 1$ час и стандартным отклонением $\sigma = 8$ минут, или 0,1333 часа.

(i) Если он выйдет на работу в 7:00, то какова вероятность быть на рабочем месте в 8:00?

(ii) Чему равна вероятность прихода на работу к 8:00, если он выходит в 6:45?

Вероятность прихода на работу до 8:00 в случае выхода в 7:00 равна вероятности нахождения в пути не более часа. А это может быть вычислено следующим образом:

$$P(X \le 1) = P(X \le \text{Mean}) = 0{,}5\,[1].$$

Вероятность дойти до работы к 8:00 при условии, что выход состоялся в 6:45, составляет

$$P(X \le 1{,}25) = \Phi_X(1{,}25) = \Phi\left(\frac{1{,}25 - 1{,}0}{0{,}1333}\right) = \Phi(1{,}8755) = 0{,}9696\,.$$

Последнее значение вероятности получено таким образом: по табл. 1.2 вероятность для стандартной случайной величины быть меньшей или равной 1,87 составляет 0,9693, а быть меньшей или равной 1,88 — 0,9699. Мы взяли среднее двух величин и получили вероятность 0,9696. ■

Упражнения

1. Изобразите функцию распределения случайной величины из примера 1.10 с вероятностями $P(H) = \frac{1}{3}$ и $P(T) = \frac{2}{3}$. Вычислите ее математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. [Ответ: $E(X) = \frac{5}{3}$; $Var(X) = \frac{2}{9}$.]
2. Доходность акций может рассматриваться как случайная величина. Изобразите распределение случайной величины X «доходность акции», приносящей доход в 3% с вероятностью 1/3, 6% с вероятностью 1/3 и 10% с вероятностью 1/3. Что является выборочным пространством случайной величины X?
3. Транспортная компания южного направления каждые 30 минут с некоторой станции отправляет на юг автобус. Некая женщина приходит на станцию в случайный момент времени. Пусть X — случайная величина, представляющая время (в минутах) ожидания ею следующего автобуса. Будем полагать, что утверждение «она приходит на станцию в случайный момент времени» означает, что X имеет равномерное распределение на интервале [0,30]. Нарисуйте график распределения и вычислите вероятность того, что ей придется ждать автобуса не более 21 минуты. [Ответ: 70%.]

[1] Mean — среднее значение или ожидаемое значение. — *Примеч. пер.*

4. Пусть X — случайная величина, представляющая количество ошибок на одной странице книги. Если X равномерно распределена на отрезке $[0;1,1]$, какова вероятность, что найдется хотя бы одна типографская ошибка на этой странице? [Ответ: 9,1%.]
5. Годовое количество осадков (в дюймах) на конкретной территории является случайной величиной X. Предположим, что X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 30$ и $\sigma = 5$. Какова вероятность, что в данном году на данной территории выпадет более 35 дюймов осадков? [Ответ: 15,87%.]
6. Пусть X — случайная величина, измеряющая количество миль, которые способен проехать автомобиль до момента выхода из строя его аккумулятора. Будем считать, что распределение X задается формулой

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,0001x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Водитель собирается проехать 5000 миль: с какой вероятностью это путешествие обойдется без замены аккумулятора? [Ответ: $e^{-0,5} \approx 60,65$.]
7. Время работы (в годах) некоей электронной трубки можно описать случайной величиной X с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Чему равно ожидаемое время работы такой трубки? [Ответ: 2 года.]
8. В рекламе некоего бренда хлопьев «Мюсли» утверждается, что среднее количество изюма в каждой коробке составляет 80 штук со стандартным отклонением в 6 штук. Если изюм окажется нормально распределенным, с какой вероятностью в произвольной коробке будет: а) меньше чем 70 штук; б) больше чем 90 штук?

   Как изменится ответ в случае равномерного распределения?
9. Предположим, что единожды подбрасываются две игральные кости. Исход такого эксперимента выражается парой чисел (x,y), представляющих собой числа на верхних гранях этих костей. Чему равно ожидаемое значение абсолютной разницы этих чисел? [Ответ: $\frac{35}{18}$.]
10. Предположим, что Φ — стандартное нормальное распределение, т.е. что

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

   (a) Покажите, что для любого вещественного x верно, что $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

   (b) Докажите, что если X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ^2, то для любого вещественного числа x выполнено соотношение

$$\Phi_X(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right).$$

1.6. Принятие решений в условиях неопределенности

Цель раздела — ввести понятие *ожидаемой полезности* и убедить читателя в том, что это понятие — очень важный (и полезный) инструмент анализа принятия решений при неопределенности.

1.6.1. Концепция ожидаемой полезности

Во многих ситуациях результат решения зависит от случая. При покупке акций или облигаций индивид обычно не знает в точности будущей стоимости своих инвестиций. Когда фермер принимает решение о выращивании той или иной сельскохозяйственной культуры, он не знает, какой будет ее цена на момент сбора урожая. Подобным же образом, покупая лотерейный билет, индивид совсем не уверен в том, что выиграет. Тем не менее принимать решения в условиях неопределенности необходимо, и вопрос состоит в том, существует ли систематический и непротиворечивый метод, позволяющий принимать решения в таких неопределенных условиях. В разделе будут изучены основные положения теории принятия решений при неопределенности, известной как *теория ожидаемой полезности.*

Каждое решение в условиях неопределенности можно рассматривать как решение о выборе лотереи. **Лотерея** L — это не что иное, как вероятностное пространство (S,P), т.е. $L = (S,P)$. Другими словами, лотерея состоит из множества альтернатив (или исходов) $S=\{s_1,\ldots,s_n\}$, характеризующих неопределенность (т.е. возможные «завтрашние» состояния мира) вместе с распределением вероятностей P на S, где $p_i = P(\{s_i\})$ представляет собой вероятность того, что завтра реализуется состояние s_i. Часто с исходом s_i связывают богатство w_i и интерпретируют p_i как вероятность получения богатства w_i при принятии решения или розыгрыша лотереи. Таким образом, мы можем представлять лотерею L как набор пар $L=\{(w_i,p_i):i=1,\ldots,n\}$, когда лотерея имеет n возможных альтернативных исходов $1,2,\ldots,n$, и каждый исход i реализуется с вероятностью p_i. **Ожидаемое богатство** от лотереи L определяется вещественным числом

$$E(L)=\sum_{i=1}^{n} p_i w_i .$$

Приведем пример, предвосхищающий дальнейшую дискуссию.

Пример 1.20. Для простоты предположим, что индивиду требуется решить, куда вложить 100 долл. Альтернативы следующие:

(1) купить облигацию, которая принесет доход в 6% (6 долл.);

(2) инвестировать в акцию, которая принесет доход в 3% с вероятностью 1/3, 6% с вероятностью 1/3 и 10% с вероятностью 1/3.

В наших терминах, индивиду необходимо выбрать из двух лотерей:

$$L_1=\{(6,1)\} \text{ и } L_2=\left\{\left(3,\frac{1}{3}\right),\left(6,\frac{1}{3}\right),\left(10,\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Понятно, что вложение в акцию связано с риском, поскольку имеется шанс, что ее доходность окажется равной 3%. Но с другой стороны, есть хороший шанс получить высокий доход в 10%. Какой выбор сделает индивид в данной ситуации? Очевидно, ответ будет зависеть от склонности индивида к риску. Если он готов на некоторый риск, то будет оценивать ожидаемый доход от обоих вложений

$$E(L_1) = 1 \times 6 = \$6\,,$$

$$E(L_2) = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 10 = \$6{,}33\,.$$

Таким образом, ожидаемый доход по акции оказывается выше, чем ожидаемый доход по облигации. Как уже отмечалось, решение о том, какая из двух лотерей лучше, полностью зависит от склонности индивида к риску и от его выбора. Эта тема и будет предметом нашего обсуждения. ■

При принятии решений в условиях неопределенности различные (возможные) исходы могут привести, вообще говоря, к различным уровням богатства. Богатство чаще всего может быть преобразовано в потребление и, следовательно, в полезность. Таким образом, мы можем говорить о полезности, порожденной богатством w, и записывать это как $u(w)$. На более абстрактном и формальном языке математики мы бы сказали, что если решение, т.е. выбор лотереи, скажем, $L = \{(w_1, p_1), (w_2, p_2), (w_3, p_3)\}$, приводит к одному из альтернативных уровней богатства w_1, w_2, w_3, то это же решение имеет результатом один из трех альтернативных уровней полезности $u(w_1)$, $u(w_2)$, $u(w_3)$. Пусть известно, что эти исходы реализуются с вероятностями p_1, p_2, p_3. Тогда *ожидаемая полезность лотереи* L равна

$$Eu(L) = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) + p_3 u(w_3)\,.$$

Функция $u(w)$ называется *функцией полезности на богатстве* или *функцией полезности Неймана — Моргенштерна*[1]. Она является «внутренней» для индивида и характеризует его предпочтения среди различных уровней богатства.

В дальнейшем мы будем игнорировать отрицательные значения богатства, поскольку законы о банкротстве не позволяют индивидам иметь отрицательный уровень богатства[2].

[1] Альтернативное, и как представляется, более распространенное название для функции полезности на исходах (или соответствующих этим исходам богатствах) — элементарная функция полезности или функция полезности Бернулли (по имени исследователя, который впервые, при объяснении так называемого Петербургского парадокса, ввел и использовал частный случай такой функции $u(w) = \ln w$). Функция полезности Неймана — Моргенштерна в этом случае — альтернативное название функции ожидаемой полезности — аддитивная по вероятностям оценка лотереи или, другими словами, аддитивная по вероятности функция полезности, представляющая предпочтения на лотереях. — *Примеч. ред.*

[2] В некоторых случаях полезность на богатстве $w = 0$ полагают равной $-\infty$, т.е., $u(0) = -\infty$. В принципе можно было бы определить функцию полезности на $(-\infty, \infty)$, однако это приводит к некоторым неудобствам при интерпретации функции полезности. Заметим, что при этом функция полезности может принимать отрицательные значения.

Определение 1.21. ***Функция полезности Неймана — Моргенштерна*** *(или* ***функция полезности на богатстве****) — это строго возрастающая функция* $u:[0,\infty)\to[0,\infty)$*, удовлетворяющая* $u(0)=0$.

Теперь мы готовы определить величину ожидаемой полезности лотереи.

Определение 1.22. *Если u — функция полезности индивида на богатстве, то его* ***ожидаемая полезность*** *от лотереи* $L=\{(w_i,p_i):i=1,\ldots,n\}$ *— это вещественное число, равное*

$$Eu(L)=\sum_{i=1}^{n}p_iu(w_i)\,.$$

Нашей следующей задачей является демонстрация того, что понятие ожидаемой полезности представляет собой центральную идею теории принятия решения при неопределенности. Как уже говорилось, любое решение при неопределенности можно рассматривать как выбор подходящей лотереи. Это значит, что если обозначить через £ множество всех лотерей, то индивид должен иметь предпочтение на этом множестве £ (задаваемое отношением предпочтения $\succcurlyeq$), где запись $L_1 \succcurlyeq L_2$ означает, что «лотерея L_1 как минимум настолько же хороша (для данного индивида), как и лотерея L_2». Конечно, в соответствии с отношением предпочтения $\succcurlyeq$, индивид, поставленный перед выбором из двух лотерей, L_1 и L_2, либо предпочтет лотерею L_1 лотерее L_2, либо предпочтет лотерею L_2 лотерее L_1, либо не будет делать различий между ними, т.е. $L_1 \succcurlyeq L_2$ или $L_2 \succcurlyeq L_1$ или и то и другое одновременно. Возникает следующий вопрос.

- *Каким свойствам «рациональности» должно удовлетворять типичное отношение предпочтения* $\succcurlyeq$ *на множестве лотерей* £?

Три очевидных стандартных условия «рациональности» любого отношения предпочтения $\succcurlyeq$ на множестве £ следующие.

1. **Полнота**, т.е. для любых двух лотерей L_1 и L_2 верно, что либо $L_1 \succcurlyeq L_2$, либо $L_2 \succcurlyeq L_1$, либо и то и другое одновременно (случай безразличия).
2. **Рефлексивность**, т.е. $L \succcurlyeq L$ для любой лотереи L.
3. **Транзитивность**, т.е. если выполняются соотношения $L_1 \succcurlyeq L_2$ и $L_2 \succcurlyeq L_3$, то должно выполняться соотношение $L_1 \succcurlyeq L_3$.

Ясно, что любая (определенная на множестве лотерей £) функция полезности U, $U:£\to R$, представляет следующее отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на £: $L_1 \succcurlyeq L_2$ когда $U(L_1)\ge U(L_2)$), которое должно удовлетворять трем вышеперечисленным свойствам. В частности, ожидаемая функция полезности $Eu:£\to R$ индивида с элементарной функцией u на богатстве, определенная для каждой лотереи $L=\{(w_1,p_1),(w_2,p_2),\ldots,(w_n,p_n)\}$ правилом

$$Eu(L)=\sum_{i=1}^{n}p_iu(w_i)\,, \tag{*}$$

порождает такое предпочтение.

Напомним теперь, что функция полезности U : $£\to R$ **представляет** собой отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на £, если $L_1 \succcurlyeq L_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $U(L_1)\ge U(L_2)$. Рассмотрим следующий вопрос.

- *Каким дополнительным условиям «рациональности» должно удовлетворять отношение предпочтения, для того чтобы гарантировать существование представляющей его функции ожидаемой полезности вида* (*)?

Для существования представляющей данное отношение предпочтения ожидаемой функции полезности необходимо выполнение двух дополнительных условий.

(1) **Независимость:** если $L_1 \succcurlyeq L_2$ и $0 < p < 1$, то для любой лотереи L_3 лотерея $pL_1 + (1-p)L_3$ не хуже, чем лотерея $pL_2 + (1-p)L_3$, или

$$pL_1 + (1-p)L_3 \succcurlyeq pL_2 + (1-p)L_3 \text{ [1]}.$$

(2) **Непрерывность:** для любых трех лотерей L_1, L_2 и L_3 множества

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succcurlyeq L_3\},$$

$$\{\beta \in [0,1] : L_3 \succcurlyeq \beta L_1 + (1-\beta)L_2\}$$

— замкнутые подмножества интервала $[0,1]$.

Следующий пример иллюстрирует аксиому независимости.

Пример 1.21. Рассмотрим лотереи

$$L_1 = \{(6,1)\}, \quad L_2 = \left\{\left(3,\frac{1}{3}\right),\left(6,\frac{1}{3}\right),\left(10,\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Лотерею L_1 можно трактовать как описывающую ситуацию, когда некто покупает актив, приносящий гарантированный доход в 6%, и другую лотерею (L_2), описывающую, что случится при покупке актива, приносящего 3%, 6% либо 10% с вероятностями по 1/3. Рассмотрим теперь третью лотерею,

$$L_3 = \left\{\left(3,\frac{1}{4}\right),\left(5,\frac{1}{4}\right),\left(6,\frac{1}{4}\right),\left(10,\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

Составная лотерея $pL_1 + (1-p)L_3$ имеет вид

$$\left\{\left(3,\frac{1-p}{4}\right),\left(5,\frac{1}{4}(1-p)\right),\left(6,\frac{1+3p}{4}\right),\left(10,\frac{1}{4}(1-p)\right)\right\}.$$

---

[1] Лотерея $pL_1 + (1-p)L_2$ называется **составной лотереей** и определяется так: если две лотереи L_1 и L_2 имеют одно и то же множество альтернатив, скажем,

$$L_1 = \{(w_i, p_i) : i = 1,\dots,n\} \text{ и } L_2 = \{(w_i, p_i') : i = 1,\dots,n\},$$

то любая вероятность p (т.е. $0 < p < 1$) порождает (составную) новую лотерею

$$pL_1 + (1-p)L_2 = \{(pw_i + (1-p)w_i, pp_i + (1-p)p_i') : i = 1,\dots,n\}.$$

Если L_1 и L_2 имеют неодинаковые множества альтернатив, то можно рассмотреть объединение A всех возможных альтернатив обеих лотерей и считать, что L_1 и L_2 имеют одно и то же множество альтернатив A. Заметим, однако, что при этом альтернативы из L_2, которые не содержатся в L_1, имеют нулевую вероятность в лотерее L_1, а альтернативы из L_1, не попавшие в L_2, имеют нулевую вероятность в L_2. Таким образом, для любой вероятности p лотерея $pL_1 + (1-p)L_2$ корректно определена.

В свою очередь, составная лотерея $pL_2 + (1-p)L_3$ имеет вид

$$\left\{\left(3,\frac{3+p}{12}\right),\left(5,\frac{1-p}{4}\right),\left(6,\frac{3+p}{12}\right),\left(10,\frac{3+p}{12}\right)\right\}.$$

Предположим, что индивид предпочитает лотерею L_2 лотерее L_1, тогда, по аксиоме независимости, индивид должен предпочитать составную лотерею $pL_2 + (1-p)L_3$ составной лотерее $pL_1 + (1-p)L_3$ при любом $0 < p < 1$. ■

Как видно из примера, аксиома независимости налагает существенные ограничения на отношения предпочтения среди лотерей. Указывая, каким должно быть отношение предпочтения на семействе составных лотерей, если определено отношение предпочтения между двух простыми лотереями, она не дает возможности рассматривать составные лотереи, получаемые из данных простых, иначе, чем требует отношение предпочтения между двумя простыми лотереями, даже после включения третьей лотереи. С другой стороны, аксиома независимости, налагая ограничения на предпочтения среди составных лотерей, элиминирует отношение порядка, которое во многих случаях может оказаться достаточно парадоксальным.

Если к требованиям полноты, рефлексивности и транзитивности добавить требование непрерывности и независимости, то можно доказать, что удовлетворяющее им отношение предпочтения представимо функцией ожидаемой полезности. Это фундаментальный результат в экономике, известный как теорема об ожидаемой полезности, широко изучен в экономической литературе[1].

Рассмотрим следующую версию теоремы об ожидаемой полезности.

Теорема 1.24 (теорема об ожидаемой полезности). *Если предпочтения индивида $\succcurlyeq$ на множестве лотерей £ (в дополнение к полноте, рефлективности и транзитивности) удовлетворяют условиям независимости и непрерывности, то они представимы функцией ожидаемой полезности. Другими словами, при данных условиях существует функция полезности и на богатстве w, такая что для функции ожидаемой полезности $U : £ \to R$, определенной на любой лотерее $L = \{(w_1, p_1), (w_2, p_2), \ldots, (w_n, p_n)\}$ по правилу*

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i),$$

выполняется следующее условие: $L_1 \succcurlyeq L_2$ тогда и только тогда, когда $U(L_1) \geq U(L_2)$.

Важное заключение из теоремы об ожидаемой полезности:

- *Рациональные индивиды, осуществляя выбор при неопределенности, могут использовать свои функции ожидаемой полезности.*

В завершение подраздела рассмотрим классификацию индивидов на основе их функций полезности Неймана — Моргенштерна. Классификация

[1] Обсуждения теоремы ожидаемой полезности можно найти в: [83, p. 156; 45, p. 76 (Proposition 3.1)]; 53, ch. 6].

учитывает отношение к риску, которое может быть отражено в характеристиках функции полезности на богатстве.

Определение 1.25. *Пусть u — функция полезности индивида на богатстве.*

(1) *Если функция полезности на богатстве линейна, т.е. имеет вид*

$$u(w) = aw\ ,\ a > 0\ ,$$

*то индивид **нейтрален к риску**.*

(2) *Если функция полезности на богатстве вогнута (соответственно строго вогнута), то говорят, что для индивида характерно **неприятие риска** (соответственно **строгое неприятие риска**, или индивид является **рискофобом**).*

(3) *Если функция полезности на богатстве выпукла (соответственно строго выпукла), то говорят, что индивид характеризуется **положительным отношением к риску** (соответственно **строго положительным отношением к риску**, или является **рискофилом**).*

Чтобы дать экономическую интерпретацию вышеизложенных определений, напомним определения вогнутых и выпуклых функций. Вещественнозначная функция $u: I \to R$, где I — вещественный интервал, называется

- **выпуклой**, если

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in I$, таких что $x_1 \ne x_2$, и $0 < \alpha < 1$.

Если неравенство строгое, то u называют **строго выпуклой**;

- **вогнутой**, если

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in I$, таких что $x_1 \ne x_2$ и $0 < \alpha < 1$.

Если неравенство строгое, то u называют **строго вогнутой.**

Стоит иметь в виду, что в соответствии с результатами, полученными методами математического анализа, дважды дифференцируемая функция $u: (a,b) \to R$, где (a,b) — открытый интервал числовой прямой, строго выпукла (соответственно строго вогнута) тогда и только тогда, когда $u''(w) > 0$ (соответственно $u''(w) < 0$) для любого $w \in (a,b)$.

Экономическая интерпретация предпочтений индивида-рискофоба довольно очевидна — индивид со строгим неприятием риска всегда предпочитает определенные, несомненные вещи играм. Покажем это. Предположим, что индивид имеет строго вогнутую функцию полезности на богатстве $u: [0,\infty) \to [0,\infty)$. Предположим, что ему предоставлен выбор между фиксированным количеством денег w и лотереей L, которая принесет w_1 с вероятностью p и w_2 с вероятностью $1-p$, как показано на рис. 1.10, *а*, так что ожидаемое значение лотереи L равно w, т.е.

$$w = Eu(L) = pw_1 + (1-p)w_2\ [1].$$

[1] В этом случае, конечно, $p = \dfrac{w_2 - w}{w_2 - w_1}$.

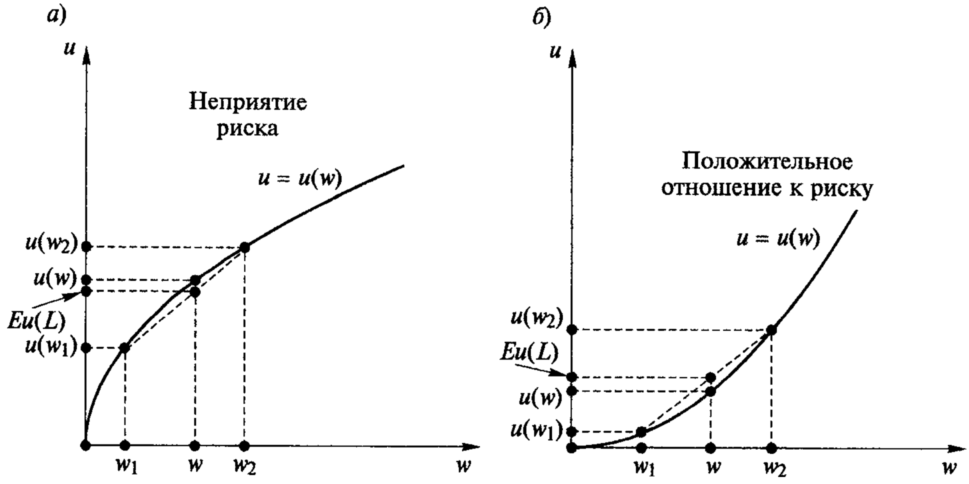


Рис. 1.10

Заметим, что ожидаемая полезность лотереи составляет

$$Eu(L) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2).$$

(См. снова рис. 1.10, *а*.) Поскольку u строго вогнута, то

$$u(w) = u(pw_1 + (1-p)w_2) > pu(w_1) + (1-p)u(w_2) = Eu(L).$$

Таким образом, индивид предпочтет фиксированное количество w игре (лотерее) с ожидаемым выигрышем $pw_1 + (1-p)w_2$. Этот вывод иллюстрирует экономическое понятие строгого неприятия риска.

Обратная ситуация имеет место для индивидов с положительным отношением к риску. Если предоставлены два предложения, то условие строгой выпуклости означает, что

$$u(w) = u(pw_1 + (1-p)w_2) < pu(w_1) + (1-p)u(w_2) = Eu(L),$$

следовательно, индивид предпочтет игру, а не получение фиксированной суммы денег (см. рис. 1.10, *б*.)

Рассмотрим пример, который иллюстрирует теорему об ожидаемой полезности.

Пример 1.26. Предположим, что индивиду было предложено поучаствовать в двух играх. В одной из них, лотерее L_1, требуется заплатить 100 долл., после чего он сможет выиграть либо 500 долл., либо 100 долл. с вероятностью 1/2. Пусть функция полезности Неймана — Моргенштерна на богатстве для данного индивида имеет вид $u(w) = \sqrt{w}$ (следовательно, индивид — рискофоб). Тогда ожидаемая полезность от первой игры равна

$$Eu(L_1) = \frac{1}{2}\sqrt{500-100} + \frac{1}{2}\sqrt{100-100} = \frac{1}{2}\sqrt{400} = \frac{20}{2} = 10.$$

Во второй игре, лотерее L_2, также нужно заплатить 100 долл., далее он сможет выиграть либо 325 долл., либо 136 долл. с вероятностью 1/2.

Полезность от второй игры будет равна

$$Eu(L_2) = \frac{1}{2}\sqrt{325-100} + \frac{1}{2}\sqrt{136-100} = \frac{1}{2}\sqrt{225} + \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{1}{2}(15+6) = 10{,}5\,.$$

Таким образом, индивид предпочтет участвовать во второй игре, хотя в первой можно выиграть несколько бóльшую сумму.

Если же предложить поучаствовать в этих играх индивиду с функцией полезности на богатстве $u(w) = w$ (т.е. нейтральному к риску), то, поскольку ожидаемая полезность от первой игры равна

$$Eu(L_1) = \frac{1}{2}(500-100) = 200\,,$$

а ожидаемая полезность от участия во второй игре равна

$$Eu(L_2) = \frac{1}{2}(325-100) + \frac{1}{2}(136-100) = \frac{1}{2}(225+36) = 130{,}5\,,$$

второй индивид, в отличие от первого, предпочтет участвовать в первой игре. ■

Разница в ожидаемой полезности для двух индивидов возникает, конечно же, в силу различий их функций полезности $u(w)$ на богатстве. Функция полезности на богатстве нейтрального к риску индивида такова, что ожидаемые полезности ранжируются точно так же, как и ожидаемые значения; и чем больше ожидаемое значение, тем больше ожидаемая полезность. Это происходит потому, что функция полезности на богатстве нейтрального к риску индивида является линейной по богатству. С другой стороны, функция полезности на богатстве индивида с неприятием риска вогнута по богатству, в результате чего ожидаемая полезность индивида с неприятием риска всегда больше от определенного (гарантированного) богатства w, т.е. богатства, которое он получает с вероятностью 1, чем от лотереи с ожидаемым богатством w, в которой есть вероятность получения чего-то меньшего, чем w. Это, как мы знаем, делает лотерею рискованной и отражается на выборе индивида с неприятием риска.

Достаточно часто ожидаемый доход в лотерее L описывается непрерывным распределением «дохода» с функцией плотности $f(r)$ на норме доходности r. В этом случае, если индивид, имеющий функцию полезности на богатстве $u(w)$, инвестирует W долл. в лотерею, то ожидаемая полезность для него от такой лотереи выражается формулой

$$Eu(L) = \int_{-1}^{\infty} u((1+r)W)f(r)dr\,.$$

Заметим, что $f(r)$ определена на интервале $[-1,\infty)$, где $r = -1$ является тем значением доходности, при котором богатство индивида обращается в нуль.

1.6.2. Приложение теоремы об ожидаемой полезности

В этом подразделе мы представим несколько приложений теоремы об ожидаемой полезности.

Пример 1.27 (приложение к страхованию). Предположим, что индивид владеет домом стоимостью W долл. Существует некоторая вероятность p того, что дом будет разрушен в результате пожара или наводнения. Предположим также, что индивид может приобрести страховку — право, при наступлении страхового случая, на возмещение (покрытие) ущерба в размере (каждого) доллара по цене x долларов. Здесь x является **страховой премией**. На покрытие какой величины возможного ущерба (или просто, на какую сумму) застрахуется индивид?

В общем случае индивид будет страховаться в соответствии со своим отношением к риску (т.е. в соответствии со своей функцией полезности $u(w)$) и стоимостью страхования (ценой страховки). Мы ожидаем, что индивид выберет оптимальный размер страховки.

Формально мы представляем этот выбор индивида как выбор, максимизирующий ожидаемую полезность от его (случайного) богатства. В основе его выбора лежит теорема об ожидаемой полезности. Таким образом, размер страховки (размер покрытия ущерба) q, который будет выбран индивидом, должен максимизировать его ожидаемую полезность:

$$E(q) \equiv Eu(q) = pu(q - xq) + (1 - p)u(W - xq)\,. \qquad (*)$$

Формула объясняется следующим образом. Если дом будет разрушен, то владелец получит возмещение (части) ущерба в размере q за вычетом своего страхового взноса xq, в целом сумму в $q - xq$ долларов. Поскольку вероятность от величины богатства в случае разрушения дома равна p, то ожидаемая полезность богатства в случае разрушения дома составляет величину $pu(q - xq)$. С другой стороны, с вероятностью $1 - p$ дом останется целым, и ожидаемая полезность в таком случае окажется равной $(1 - p)u(W - xq)$.

Заметим, что функция u не определена для отрицательных значений богатства, поэтому из (*) следует, что $W - xq \geq 0$, или $q \leq \dfrac{W}{x}$. Выполнение этого неравенства гарантирует, что областью определения функции $E(q)$ в данном случае является замкнутый интервал $\left[0, \dfrac{W}{x}\right]$.

Теперь предположим, что W = 100 000 долл., $p = 0{,}01$ и $x = 0{,}02$. Как мы сейчас увидим, метод оптимизации $E(q)$ зависит от типа индивида. Проанализируем ситуацию отдельно для каждого из трех случаев.

Случай I. *Индивид является рискофобом с функцией полезности* $u(w) = \sqrt{w}$.

В данном случае из (*) следует, что

$$E(q) = p\sqrt{(1-x)q} + (1-p)\sqrt{(W-xq)} =$$

$$= 0,01 \times \sqrt{0,98q} + 0,99 \times \sqrt{W - 0,02q} =$$

$$= 0,01[\sqrt{0,98q} + 99 \times \sqrt{(W - 0,02q)}].$$

График функции $E(q)$ показан на рис. 1.11. Вычислим теперь производную этой функции:

$$E'(q) = 0,01\left[\frac{0,98}{2\sqrt{0,98q}} - \frac{99 \times 0,02}{2\sqrt{(W-0,02q)}}\right] = 0,05\left[\sqrt{\frac{0,98}{q}} - \frac{1,98}{\sqrt{(W-0,02q)}}\right].$$

Приравнивая ее нулю, $E'(q) = 0$, получим следующее уравнение относительно q: $\sqrt{\frac{0,98}{q}} = \frac{1,98}{\sqrt{(W-0,02q)}}$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим, что $\frac{0,98}{q} = \frac{(1,98)^2}{W - 0,02q}$ или $0,98(W - 0,02q) = 3,9204q$. Теперь, положив W = 100 000, получим $98\,000 - 0,019q = 3,9204q$ или $3,94q = 98\,000$. Или $q = \frac{98\,000}{3,94} = 24873,10$ долл.

Случай II. *Индивид является рискофилом с функцией полезности* $u(w) = w^2$. Вычислим ожидаемую полезность из (*):

$$E(q) = 0,01(0,98q)^2 + 0,99(W - 0,02q)^2 =$$

$$= 0,01[0,9604q^2 + 99(W^2 - 0,04Wq + 0,0004q^2)] = 0,01(q^2 - 3,96Wq + 99W^2).$$

График этой функции представлен на рис. 1.11. Заметим, что q = 0 является точкой максимума $E(q)$, откуда получаем, что агент-рискофил не будет покупать страховку.

Случай III. *Индивид нейтрален к риску и имеет функцию полезности* $u(w) = w$.

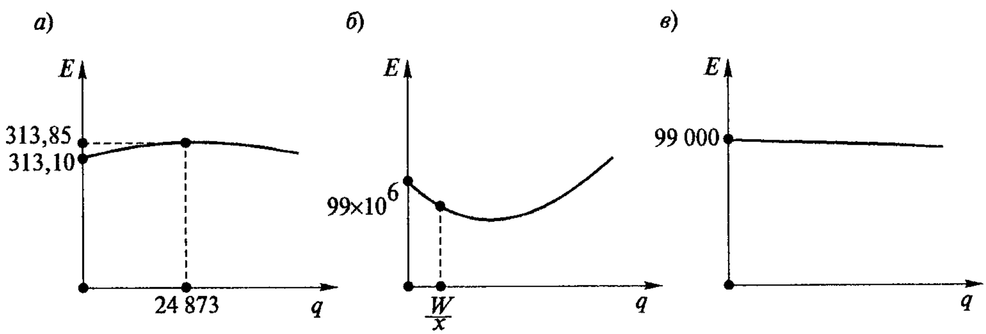


Рис. 1.11. Индивид с неприятием риска (*а*); индивид с положительным отношением к риску (*б*); нейтральный к риску индивид (*в*)

Ожидаемая полезность здесь имеет вид

$$E(q)=p(1-x)q+(1-p)(W-xq)=[p(1-x)-(1-p)x]q+(1-p)W=$$

$$=(p-x)q+(1-p)W=-0{,}01q+99\,000\,,$$

т.е. линейна по q (см. рис. 1.11). Эта функция достигает максимума при $q=0$. Таким образом, если премия составляет 2 цента на покрытие каждого доллара ущерба, то дом стоимостью 100 тыс. долл., который может быть разрушен в результате пожара или наводнения в одном случае из ста, будет застрахован на сумму в 24 873 долл. агентом-рискофобом с функцией полезности $u(w)=\sqrt{w}$ и не будет застрахован вообще ни агентом-рискофилом с функцией полезности $u(w)=w^2$, ни нейтральным к риску агентом с функцией полезности $u(w)=w$. ■

Следующие три примера иллюстрируют выбор оптимального портфеля из нескольких инвестиционных возможностей.

Пример 1.28 (выбор оптимального портфеля). Предположим, что индивиду требуется инвестировать 10 тыс. долл. в акции и облигации. Акция представляет собой финансовый актив, который позволяет получить доход в 2% с вероятностью 37% и доход в 10% с вероятностью 63%. Облигация приносит фиксированный доход в 7%. Индивид является рискофобом и обладает функцией полезности на богатстве $u(w)=\sqrt{w}$.

Сталкиваясь с выбором между вложениями денег в акцию или облигацию, индивид выберет портфель, который максимизирует ее «достаток».

- *Существует ли способ нахождения того оптимального портфеля, который скорее всего и будет выбран индивидом?*

При заданной функции полезности на богатстве обоснованным прогнозом будет выбор портфеля, максимизирующего ожидаемую полезность.

Пусть s — доля (от 10 тыс. долл.), вложенная в акции, где, конечно, $0\le s\le 1$. Инвестор имеет шанс в 37% получения

$$10\,000s\times1{,}02+10\,000(1-s)\times1{,}07=10\,000(1{,}07-0{,}05s)\,,$$

и шанс в 63% получения

$$10\,000s\times1{,}1+10\,000(1-s)\times1{,}07=10\,000(1{,}07+0{,}03s)\,.$$

Ожидаемая полезность инвестора $E(s)=Eu(s)$ имеет вид

$$E(s)=0{,}37\sqrt{10\,000(1{,}07-0{,}05s)}+0{,}63\sqrt{10\,000(1{,}07+0{,}03s)}=$$

$$=37\sqrt{1{,}07-0{,}05s}+63\sqrt{1{,}07+0{,}03s}=37(1{,}07-0{,}05s)^{\frac{1}{2}}+63(1{,}07+0{,}03s)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Рациональный инвестор выберет значение s, которое максимизирует его ожидаемую полезность $E(s)$. Дифференцируя выражение для $E(s)$, получаем, что

$$E'(s) = -37 \times \frac{1}{2} \times 0{,}05(1{,}07 - 0{,}05s)^{-\frac{1}{2}} + 63 \times \frac{1}{2} \times 0{,}03(1{,}07 + 0{,}03s)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 0{,}945(1{,}07 + 0{,}03s)^{-\frac{1}{2}} - 0{,}925(1{,}07 - 0{,}05s)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$E''(s) = -[0{,}014175(1{,}07 + 0{,}03s)^{-\frac{3}{2}} + 0{,}023125(1{,}07 - 0{,}05s)^{-\frac{3}{2}}] < 0 .$$

Доля вложений в акции — величина s — удовлетворяет следующему условию (первого порядка):

$$E'(s) = 0{,}945(1{,}07 + 0{,}03s)^{-\frac{1}{2}} - 0{,}925(1{,}07 - 0{,}05s)^{-\frac{1}{2}} = 0 ,$$

или

$$0{,}945\sqrt{1{,}07 - 0{,}05s} = 0{,}925\sqrt{1{,}07 + 0{,}03s} .$$

Возведя в квадрат обе части этого выражения, получаем

$$0{,}89302(1{,}07 - 0{,}05s) = 0{,}8556(1{,}07 + 0{,}03s) ,$$

откуда, после раскрытия скобок,

$$0{,}9555 - 0{,}0446s = 0{,}9155 + 0{,}0257s ,$$

или $0{,}04 = 0{,}0703s$. Таким образом,

$$s = \frac{0{,}04}{0{,}0703} = 0{,}56899 \approx 56{,}9\% .$$

Это показывает, что инвестор вложит 51,9% от 10 тыс. долл. в акции, а оставшееся 43,1% — в облигации. ■

Пример 1.29 (снижение риска и выбор портфеля). Предположим, что индивид желает инвестировать 10 тыс. долл. в акции двух видов, а именно в акции компании «Сервис инк.» (Service Inc., *S*) и акции компании «Мануфекчеринг Инк.» (Manufacturing Inc., *M*). Оба типа акций представляют собой рисковые активы в том смысле, что каждая из них с некоторой вероятностью может принести как высокий доход, так и низкий. Доходности акций, однако, не являются независимыми, и совместное распределение доходов изображено в табл. 1.3.

Это совместное распределение доходности двух активов показывает следующее: вероятность того, что доходность акций одной компании высока, когда доходность акций другой низкая, оказывается высокой; в то же время вероятность того, что оба актива будут приносить высокий доход, либо оба

Таблица 1.3. Доходность акций *S* и *M*

	Доходность акции *M*		
Доходность акции *S*		20%	5%
	5%	0,4	0,1
	20%	0,1	0,4

этих актива принесут низкий доход, оказывается низкой. Инвестор, который рассчитывает вложить в эти активы 10 тыс. долл., является рискофобом и имеет функцию полезности на богатстве, заданную в виде $u(w)=\sqrt{w}$.

Как и в предыдущем примере, при заданной функции полезности на богатстве индивид выберет такой портфель, который максимизирует его ожидаемую полезность. Пусть $0 \le s \le 1$ — доля (от 10 тыс. долл.), вложенная в акции *S*, и, следовательно, $1-s$ — доля вложений в акции *M*. Тогда ожидаемая полезность инвестора составит

$$E(s)=0,4\sqrt{10^4\times1,05s+10^4\times1,20(1-s)}+0,1\sqrt{10^4\times1,05}+$$

$$+0,4\sqrt{10^4\times1,20s+10^4\times1,05(1-s)}+0,1\sqrt{10^4\times1,20}=$$

$$=40\sqrt{1,20-0,15s}+40\sqrt{1,05+0,15s}+10\sqrt{1,05}+10\sqrt{1,20}.$$

Тест первого порядка $E'(s)=0$ на максимум дает следующее уравнение относительно *s*:

$$E'(s)=\frac{40(-0,15)}{2\sqrt{1,20-0,15s}}+\frac{40(0,15)}{2\sqrt{1,05+0,15s}}=0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$1,05+0,15s=1,20-0,15s,$$

что сводится к виду $0,3s=0,15$. Следовательно,

$$s=\frac{0,15}{0,3}=0,5=50\%.$$

Отсюда следует, что инвестор вложит ровно 50% от 10 тыс. долл. в акции *S*, и остальные 50% — в акции *M*.

При более тщательном рассмотрении распределения доходов становится понятным, почему инвестор предпочтет иметь существенные объемы обоих типов акций, даже если вероятность высокого дохода или низкого дохода от обоих типов акций оказывается примерно одинаковой. Когда акция *S* приносит высокий доход, акция *M* приносит низкий доход; когда же доход от акции *M* высок, доход от акции *S* низок. То есть доходы от двух акций движутся в противоположных направлениях, или они *отрицательно коррелированы*. И таким образом, когда оба типа акций содержатся в портфеле инфестора, значительно снижается риск такого портфеля, так как низкий доход от одного актива компенсируется высоким доходом от другого. ■

Пример 1.30 (еще раз о выборе оптимального портфеля). Предположим, что индивиду требуется распределить инвестиции в размере 10 тыс. долл. между акциями и облигациями. Акция представляет собой финансовый актив с доходностью, которая является равномерно распределенной случайной величиной со средним значением в 8,525% и стандартным отклонением в 3,767%. Облигация приносит фиксированный доход в 8,5%. Индивид является рискофобом, и его функция полезности на богатстве задается в виде $u(w) = \sqrt{w}$.

Как и в предыдущих примерах, индивид сталкивается с выбором между вложением денег в акции и облигации и выберет такой портфель, который принесет максимум его ожидаемой полезности. Пусть $0 \le s \le 1$ — доля от 10 тыс. долл., вложенная в акции. В этом случае ожидаемая полезность инвестора составит

$$Eu(s) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{10\,000s(1+r) + 10\,000(1-s)\times 1{,}085}dr =$$

$$= 100\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{(r-0{,}085)s + 1{,}085}dr\right],$$

где $[a,b]$ — интервал возможных значений доходности по акции, а r — доходность акции.

Поскольку мы имеем дело с равномерным распределением со средним 0,08525 и стандартным отклонением 0,03767, из примера 1.16 следует, что

$$\frac{a+b}{2} = 0{,}08525 \text{ и } \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} = 0{,}03767.$$

Имеем систему: $a+b = 0{,}1705$, $b-a = \dfrac{6\times 0{,}03767}{\sqrt{3}} = 0{,}1305$, решив которую, находим a = 0,02 и b = 0,1505. Таким образом,

$$E(s) = 766{,}28\int_{0.02}^{0,1505} \sqrt{(r-0{,}085)s + 1{,}085}dr.$$

Сделав замену $x = r - 0{,}085$, получим

$$E(s) = 766{,}28\int_{-0,065}^{0,0655} (xs + 1{,}085)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{766{,}28}{s}(xs+1{,}085)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{x=-0,065}^{x=0,0655} =$$

$$= 510{,}85\frac{(0{,}0655s + 1{,}085)^{\frac{3}{2}} - (1{,}085 - 0{,}065s)^{\frac{3}{2}}}{s}.$$

После дифференцирования по x имеем

$$E'(s) = \frac{510{,}85}{s^2}[0{,}09825s(0{,}0655s + 1{,}085)^{\frac{1}{2}} + 0{,}0975(1{,}085 - 0{,}065s)^{\frac{1}{2}} -$$

$$-(0{,}0655s + 1{,}085)^{\frac{3}{2}} + (1{,}085 - 0{,}065s)^{\frac{3}{2}}].$$

Теперь необходимо найти решение уравнения $E'(s) = 0$, представляющего собой условие первого порядка. Поскольку выражение представляется достаточно сложным, для нахождения решения придется воспользоваться компьютерной программой! Однако даже с помощью калькулятора можно убедиться в том, что из $E'(s) = 0$ следует, что

$$s \approx 0{,}935 = 93{,}5\%.$$

Это означает, что инвестор вложит 93,5% от 10 тыс. долл. в акции; а остаток, 6,5%, в облигации. ■

Мы представили «теорию ожидаемой полезности» как теорию поведения при неопределенности. Однако иногда эта теория оказывается неспособной описать, каким образом индивиды фактически принимают решения. Действительно, если бы индивиды были рискофобами или нейтральными к риску, то теория ожидаемой полезности не была бы способна объяснить, почему организаторы лотерей зарабатывают на этом деньги, поскольку ожидаемый доход от лотереи обычно отрицателен. Или почему казино оказываются такими прибыльными, несмотря на то что шансы клиентов обычно малы. Например, если проанализировать лотерею Powerball с джекпотом в 7 млн долл., шанс выигрыша в которой составляет 1 к 85 000 000, а цена билета равна 1 долл., то обнаружим, что ожидаемая величина выигрыша составляет

$$(7\,000\,000-1)\times\frac{1}{85\,000\,000}+(-1)\times\frac{84\,999\,999}{85\,000\,000}=-0,917647\,.$$

Ожидаемое значение выигрыша при участии в лотерее Powerball обычно отрицательно. Следовательно, в соответствии с теорией ожидаемой полезности даже нейтральный к риску индивид не станет покупать лотерейный билет. Однако индивиды, которые в других условиях ведут себя как рискофобы, часто покупают лотерейные билеты.

Подобное кажущееся аномальным поведение также наблюдалось и в экспериментах с лотереями. Первый такой эксперимент, проведенный Морисом Алле[1], теперь известен как *парадокс Алле* и показывает, что поведение индивидов может не соответствовать теории ожидаемой полезности. Рассмотрим следующие лотереи.

- *Лотерея 1*: Возможность получить с гарантией 2 млн долл.
- *Лотерея 2*: Возможность получить 10 млн долл. с вероятностью 15%, 2 млн долл. с вероятностью 75%, и ничего с вероятностью 10%.
- *Лотерея 3*: Возможность получить 2 млн долл. с вероятностью 25% и ничего с вероятностью 75%.
- *Лотерея 4*: Возможность получить 10 млн долл. с вероятностью 15% и ничего с вероятностью 85%.

Если предлагается сделать выбор между лотереями 1 и 2 и лотереями 3 и 4, индивиды чаще всего предпочтут лотерею 1 лотерее 2 и лотерею 4 лотерее 3. Но, как мы покажем, такая последовательность выборов противоречит теории ожидаемой полезности. Если индивид предпочитает лотерею 1 лотерее 2, то в соответствии с теорией ожидаемой полезности

$$u(2)>0,15u(10)+0,75u(2)+0,1u(0)\,,$$

или

$$0,25u(2)>0,15u(10)+0,1u(0)\,.$$

[1] См., например, [6].

Добавим $0{,}75u(0)$ к обеим частям неравенства и получим

$$0{,}25u(2)+0{,}75u(0)>0{,}15u(10)+0{,}85u(0).$$

Последнее неравенство показывает, что индивид должен предпочитать лотерею 3 лотерее 4. Таким образом, индивид, который выбирает лотерею 4, а не лотерию 3, не ведет себя в соответствии с постулатами теории ожидаемой полезности. Данный феномен, именуемый в литературе **инверсией предпочтений**, наблюдался и в дальнейшем во многих иных ситуациях. Это также объясняет, почему индивиды, которые покупают лотерейные билеты, в других случаях ведут себя как рискофобы. Типичная лотерея представляет собой ситуацию, где за небольшую сумму денег индивид получает небольшой шанс выиграть очень большую сумму, так что они часто игнорируют факт отрицательности ожидаемого выигрыша, поскольку потери при этом обычно невелики. Но если потенциальные потери будут намного больше, тот же самый индивид может совершить иной выбор.

Подобные ситуации в теории ожидаемой полезности далеко не редкость. Поэтому использовать теорию ожидаемой полезности для предсказания поведения при неопределенности следует с осторожностью. Теорию следует рассматривать скорее как набор принципов рационального поведения при неопределенности. Таким образом, индивид, который в полной мере осознает следствия всех аксиом теории ожидаемой полезности, всегда захочет использовать ее как «наиболее приемлемый способ» принятия решений при неопределенности.

Упражнения

1. Индивид с функцией полезности $u(w)=w$ на богатстве инвестирует W долл. в лотерею с непрерывным распределением доходности (со ставкой r). Какой будет его ожидаемая полезность? [Ответ: $(1+m)W$, где m — математическое ожидание распределения.]
2. Функция полезности индивида на богатстве имеет вид $u(w)=\sqrt{w}$. Сколько он будет готов заплатить за лотерею, которая выигрывает 1 млн долл. с вероятностью 0,0015 и ничего не выигрывает в противном случае?
3. Представьте, что вы нейтральны к риску и ваше богатство составляет 10 тыс. долл. Вы подумываете об открытии филиальной сети по производству пончиков. Для открытия сети вам необходимо инвестировать 5000 долл. При этом вы с вероятностью 1/3 можете заработать 500 тыс. долл., с вероятностью 1/3 только покрыть свои расходы и с оставшейся вероятностью потерять все свои инвестиции. Каким будет ваше решение? При каких других значениях вероятностей решение изменится?
4. Каким будет ответ, если в упражнении 3 изменить функцию полезности на $u(w)=\ln w$?

5. В примере 1.27 обсуждалось, какое количество страховки приобретет индивид. Предположим, что при покупке страховки необходимо приобретать покрытие на сумму в размере 80% от стоимости дома. Какую страховую премию агент будет готов заплатить за дом стоимостью 100 тыс. долл., если его функция полезности $u(w) = \sqrt{w}$?
6. Рассмотрим задачу страхования из примера 1.27 с параметрами W, p и x. Какой объем страхового покрытия q купит рискофоб с функцией полезности на богатстве $u(w) = 1 - e^{-w}$? Выразите q через параметры W, p и x. [Ответ: $q = W + \ln\dfrac{p(1-x)}{x(1-p)}$.]
7. Каков будет ответ на вопрос предыдущего упражнения, если функция полезности будет иметь вид $u(w) = w$?
8. Во многих казино ожидаемая величина выигрыша отрицательна. Агентов какого типа вы скорее всего встретите в этих казино?
9. Предположим, что индивиду требуется распределить инвестиции в размере 10 тыс. долл. между вложениями в акции и облигации. Акция представляет собой финансовый актив, который позволяет получить доход в 5% с вероятностью 79,5% и доход в 15% с вероятностью 20,5%. Облигация приносит фиксированный доход в 7%. Индивид является рискофобом, и его функция полезности на богатстве задается как $u(w) = \sqrt{w}$. Какой портфель выберет индивид? [Ответ: акции 67,5%; облигации 32,5%.]
10. Имея в виду пример 1.30, рассмотрим агента-рискофила с функцией полезности $u(w) = w^2$. Покажите, что
    (a) его ожидаемая полезность задается формулой
    $$Eu(s) = 10^8\left[\frac{1}{0{,}1305}\int_{0{,}02}^{0{,}1505}[(r-0{,}085)s+1{,}085]^2 dr\right] =$$
    $$= 10^4(14{,}1925s^2 + 4{,}525s + 11\,772{,}25),$$
    где $0 \le s \le 1$ — доля от 10 тыс. долл., которая инвестирована в акции.
    (b) $Eu(s)$ достигает максимума при $s = 1$. То есть покажите, что агент-рискофил будет вкладывать все деньги в акции.
11. Снова имея в виду пример 1.30, рассмотрим нейтрального к риску агента с функцией полезности $u(w) = w$. Покажите, что
    (a) ожидаемая полезность задается формулой
    $$Eu(s) = \frac{10^4}{0{,}1305}\int_{0{,}02}^{0{,}1505}[(r-0{,}085)s+1{,}085]dr =$$
    $$= 2{,}5s + 10\,850),$$
    где $0 \le s \le 1$ — доля из 10 тыс. долл., которая инвестирована в акции;
    (b) $Eu(s)$ достигает максимума при $s = 1$. То есть покажите, что нейтральный к риску агент будет вкладывать все деньги в акции.

12. Рассмотрим множество натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots\}$, и для каждого $n \in N$ положим $p_n = \frac{4}{5^n}$. Установите следующее.

(a) Построенная последовательность $\{p_1, p_2, \ldots\}$ образует распределение вероятностей на N. То есть $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. В частности, мы имеем лотерею

$$L = \left\{\left(1, \frac{4}{5}\right), \left(2, \frac{4}{5^2}\right), \ldots, \left(n, \frac{4}{5^n}\right), \ldots\right\}.$$

(b) Сколько готов будет заплатить за участие в этой лотерее индивид, имеющий функцию полезности на богатстве вида $u(w) = w$?

(c) Сколько готов будет заплатить за участие в лотерее L другой индивид, имеющий функцию полезности на богатстве вида $u(w) = \sqrt{w}$?

Глава 2 РЕШЕНИЯ И ИГРЫ

В предыдущей главе мы обсуждали, как определить наилучший выбор из множества существующих альтернатив. В каждой рассмотренной ситуации предполагалось, что лицо, принимающее решения, посредством выбора «правильной» альтернативы может однозначно повлиять на исход и, следовательно, получаемую при этом полезность и уровень удовлетворения. Но это *не всегда* так. Во многих случаях благосостояние индивида зависит не только от того, что он делает, а также от выбора, сделанного некоторыми другими индивидами. Ситуация усугубляется еще и тем, что благосостояние индивида не только зависит от выборов других индивидов, но может быть в прямой конфликте с благосостоянием этих индивидов! Иногда эти элементы *взаимной зависимости* настолько велики, что обязательно должны быть приняты во внимание при описании такой ситуации.

Например, при обсуждении феномена *глобального потепления* было бы совершенно нелепо предполагать, что любая отдельно взятая страна могла бы, изменив свою политику, существенно повлиять на ситуацию. Глобальное потепление — это глобальное явление. Поэтому любой анализ глобального потепления должен исходить именно из этого. Но тогда возникают вопросы касательно выбора стратегии[1] для решения данной проблемы. Как стоит реагировать каждой отдельной стране? Какой будет реакция всех остальных стран? И так далее. Ясно, что это достаточно сильно отличается от ситуаций, анализируемых в прошлой главе. Здесь важны стратегические аспекты действий и не так очевидно, какая стратегия оптимальна.

Рассмотрим другую ситуацию, в которой важна стратегическая игра (т.е. решения, принимающие во внимание насущные интересы других игроков). Приводимая выдержка взята из газеты «Нью Йорк Таймс»[2], где говорилось о (внесудебном) соглашении относительного судебного иска на предмет ценового сговора среди авиакомпаний.

> Крупные авиакомпании согласились заплатить государству и местному правительству 40 миллионов долларов для урегулирования судебного иска на предмет ценового сговора. Иск с обвинением в ценовом сговоре сосредоточился на практике авиакомпаний объявлять об изменении цен заранее, через системы резервирования. Если бы конкуренты не согласились с предложенным изменением цен, оно могло быть аннулировано прежде, чем должно было вступить в силу.

Кажется, что авиакомпании пытались скоординировать увеличение цен, используя сигнальную схему. Если бы остальные авиакомпании не согла-

---

[1] Слово *стратегия* образовано от греческого στρατηγική, что означает «план, метод, или подход».

[2] См.: Suit settled by airlines // New York Times. 1994. October 12. P. D8.

сились с изменениями, увеличения цен не состоялось бы. Почему каждая авиакомпания заинтересована в том, чтобы знать, как будут реагировать другие авиакомпании? Почему авиакомпании опасаются изменения цен в одностороннем порядке? Причины не так очевидны. О некоторых стимулах таких действий авиакомпаний можно догадаться из следующего описания ситуации.

Пример 2.1. Предположим, что USAir и American Airlines (АА) размышляют о цене авиабилета туда и обратно по маршруту Чикаго — Нью Йорк. Если обе авиакомпании назначат цену в размере 500 долл., прибыль USAir окажется равной 50 млн долл., а прибыль АА будет равна 100 млн долл. Если же USAir назначит цену в 500 долл., а АА — в 200 долл., прибыль АА составит 200 млн долл., в то время как USAir потеряет 100 млн. В случае цены авиабилета на рейс USAir в размере 200 долл., а на рейс АА — в 500 долл. прибыль USAir окажется равной 150 млн долл., а АА потерпит убытки на сумму 150 млн. Если же обе авиакомпании установят цену в 200 долл., обе потерпят убытки в размере 10 млн долл. Таблица 2.1 хорошо отражает описанную выше ситуацию.

Пример иллюстрирует то, что происходит в авиаиндустрии. Стоит отметить, что для обеих компаний будет лучше, если они будут координировать изменение цен, поскольку в противном случае могут потерпеть серьезные убытки. В подобных случаях всегда присутствуют три характерных элемента:

- наличие двух или более участников;
- у каждого участника имеется множество альтернативных выборов;
- для каждого исхода определен выигрыш, получаемый каждым участником.

Это основные компоненты, которые составляют то, что называют *стратегической игрой* (*игрой в стратегической форме*). Если говорить более формально, игра в стратегической форме состоит из *множества игроков*, у каждого игрока есть *множество стратегий* и для каждого *исхода* (комбинации стратегий различных игроков) игры определен *выигрыш* каждого игрока.

Было бы неплохо найти основные принципы, которые позволили бы анализировать решения игр, таким же образом, как мы находили общие принципы решения оптимизационных задач в предыдущей главе. Можно начать с вопроса, что скорее всего произойдет в игре в том случае, когда каждый участник полностью осведомлен об игре, в которой он участвует.

Таблица 2.1. Игра «Назначение цен»

	American Airlines (Американ эйрлайнз, АА)		
USAir (ЮС Эйр)	Цена, долл.	500	200
	500	(50,100)	(–100,200)
	200	(150,–200)	(–10,–10)

Другими словами, если рассматриваемую ситуацию можно моделировать как игру, какими принципами следует руководствоваться для определения наиболее вероятных исходов игры?

Для начала приступим к анализу игр двух лиц, в которых множество стратегий конечно и содержит немного элементов. Некоторые интересные элементы появляются даже в таких простых ситуациях. Мы рассмотрим доминирующие стратегии и решения, получаемые при их исключении. Будет определено *равновесие по Нэшу*, проанализирована матричная игра двух лиц под названием «*Дилемма заключенного*» и другие матричные игры.

Далее в главе обсуждаются стратегические игры n лиц и вводятся концепции доминирующих стратегий и равновесия по Нэшу в более общем виде. Затем рассматриваются смешанные стратегии и равновесие в смешанных стратегиях. Далее в двух разделах приводятся примеры игр двух лиц, нахождения функций наилучших ответов и равновесий по Нэшу. За этим следует раздел, включающий игры с неполной информацией и равновесие Байеса — Нэша.

В завершение (главы) будут рассмотрены приложения: модель дуополии Курно, модель Бертрана и модель Хотеллинга (выбора местоположения). Каждое из этих приложений подчеркивает роль равновесия по Нэшу в решении соответствующих моделей. В том числе и модели медианного избирателя, которая рассматривается далее. Пример добычи ресурсов с общей собственностью на них показывает, насколько важна теория игр в понимании существования искаженных стимулов. Затем приводится пара примеров игр с неполной информацией, один из которых представляет собой вариант модели дуополии Курно, а второй касается проблемы предоставления общественного блага. Последний пример имеет дело с аукционами второй цены, в которых выигрывает лицо, предложившее наибольшую цену, и платит вторую по величине цену.

2.1. Матричные игры двух лиц

Наиболее простым описанием игры может служить приведенный выше пример с назначением цены на билет. В нем было дано описание выигрышей или прибыли, которые могут быть получены авиакомпаниями при каждом возможном исходе игры согласно таблице. Такой матричный формат может быть использован для представления многих интересных игр. Начнем обсуждение с одной распространенной матричной игры, называемой дилеммой заключенного. Она иллюстрирует социальный феномен, который лучше всего воспринимается на основе теоретико-игровых положений. Описывается ситуация, в которой участники действовали бы эффективнее при сотрудничестве, но тем не менее заинтересованы от сотрудничества отказаться.

Пример 2.2 (дилемма заключенного). Эта, возможно, наиболее изученная игра задается матрицей (табл. 2.2).

Таблица 2.2. Дилемма заключенного

		Игрок 2	
Игрок 1	Стратегия	*Молчать*	*Доносить*
	Молчать	(–1,–1)	(–10,0)
	Доносить	(0,–10)	(–5,–5)

Изображенная здесь матричная игра соответствует ситуации, в которой два индивида, совершившие преступление, выбирают, сознаться в совершении преступления или молчать. Если один из них даст показания, а второй будет молчать, то сознавшийся не сядет в тюрьму, а тот, кто не сознается, получит срок в 10 лет. Если оба сознаются в преступлении, тогда оба сядут в тюрьму на 5 лет. Если же никто не сознается, то оба отделаются довольно легко, получив по году.

В игре четко видно наличие двух игроков и множество стратегий для каждого из них {*Молчать*, *Доносить*}. Выигрыши для каждого исхода представляются парой (a,b), где a — выигрыш игрока 1, а b — выигрыш игрока 2. В данном случае $-a$ и $-b$ представляют количество лет в тюрьме. Такая матрица полностью описывает игру в стратегической форме. При изучении игры можно заметить некоторые особенности:

(1) оба игрока заинтересованы сохранять молчание, поскольку в таком случае будут приговорены всего к одному году заключения;

(2) зная, что игрок будет хранить молчание, второй игрок заинтересован в донесении.

Подобные парадоксы вполне характерны для игр. Основной вопрос здесь — это вопрос не только о выборе игрока, но и о выборе всех участников игры.

При более детальном рассмотрении игры видно, что если игрок 1 использует стратегию *Признаться* (*Доносить*), то получает больший выигрыш при любом выборе игрока 2. Покажем это. Пусть $u_1(\cdot,\cdot)$ обозначает функцию полезности игрока 1, тогда при выборе игроком 2 стратегии *Молчать*

$$u_1\,(\textit{Доносить, Молчать}) = 0 > -1 = u_1\,(\textit{Молчать, Молчать}),$$

в то время как при выборе игроком 2 стратегии *Доносить*

$$u_1\,(\textit{Доносить, Доносить}) = -5 > -10 = u_1\,(\textit{Молчать, Доносить}).$$

Другими словами, *независимо от выбора второго игрока, лучшей стратегией для первого является **Доносить***. В таких случаях говорят, что стратегия *доносить* является **строго доминирующей стратегией** игрока 1. Рассуждая аналогично, находим, что для игрока 2 стратегия *Доносить* является строго доминирующей.

В отсутствие возможности договариваться или какой-то схемы координации действий вполне ожидаемо, что рациональные игроки будут выбирать строго доминирующую стратегию, поскольку она позволяет получить при любых обстоятельствах лучший результат. Таким образом, решением дилеммы заключенного будет (*Доносить*, *Доносить*). Это решение при использовании *строго доминирующих стратегий*.

Отметим, что решение в строго доминирующих стратегиях приводит к пяти годам лишения свободы для каждого, что, конечно, хуже, чем исход, при котором игроки доверяют друг другу и хранят молчание. Именно этот конфликт между отказом от сотрудничества, когда решение в строго доминирующих стратегиях кажется столь убедительным, и координацией действий, чтобы получить больший выигрыш, делает сложным предсказание исхода игры. ■

Возвращаясь к игре о назначении цены на билет, заметим, что назначение цены на уровне 200 долларов является строго доминирующей стратегией для обеих авиакомпаний. Следовательно, решение в строго доминирующих стратегиях приводит к тому, что обе авиакомпании терпят убытки в размере 10 млн долл. Это порождает у них заинтересованность достичь соглашения о некотором варианте ценового сговора.

Рассмотренные выше игры — примеры матричных игр, которые формально определяются следующим образом.

Определение 2.3 (матричная игра). *Матричная игра — это игра двух игроков, в которой*:

(1) *игрок 1 имеет конечное множество стратегий S_1 с m элементами*;

(2) *игрок 2 имеет конечное множество стратегий S_2 с n элементами*;

(3) *выигрыши игроков являются функциями $u_1(s_1,s_2)$ и $u_2(s_1,s_2)$ от исходов $(s_1,s_2)\in S_1\times S_2$*.

Если в матричной игре положить $S_1=(s_1^1,s_2^1,\ldots,s_m^1)$, $S_2=(s_1^2,s_2^2,\ldots,s_n^2)$, и обозначить

$$a_{ij}=u_1(s_i^1,s_j^1) \text{ и } b_{ij}=u_2(s_i^1,s_j^1),$$

то выигрыши могут быть представлены в форме матрицы $m\times n$, изображенной в табл. 2.3.

Если для простоты использовать запись $S_1=\{1,2,\ldots,m\}$ и $S_2=\{1,2,\ldots,n\}$, то стратегии игрока 1 — это просто строки матрицы. Аналогично, стратегии игрока 2 — столбцы матрицы. По этой причине игрок 1 также называется **строчным**, а игрок 2 — **столбцевым** (табл. 2.4).

Таблица 2.3. Матричная игра двух лиц

	Игрок 2				
	Стратегия	s_1^2	s_2^2	…	s_n^2
Игрок 1	s_1^1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	…	(a_{1n},b_{1n})
	s_2^1	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})	…	(a_{2n},b_{2n})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	s_m^1	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	…	(a_{mn},b_{mn})

Таблица 2.4. Матричная игра двух лиц

	Столбцевой игрок				
Строчный игрок	Стратегия	1	2	...	n
	1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	...	(a_{1n},b_{1n})
	2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})	...	(a_{2n},b_{2n})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	m	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	...	(a_{mn},b_{mn})

Каждая игра проходит в соответствии с некоторыми правилами; и, конечно, матричная игра не исключение. Она разыгрывается следующим образом.

Розыгрыш матричной игры

Оба игрока выбирают одновременно (и независимо друг от друга) стратегию из своих множеств стратегий, и игра завершается. Если выбраны стратегии $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$, то каждый игрок i получает выигрыш $u_i(s_1,s_2)$.

Пусть игра проходит по вышеуказанным правилам. Возникает естественный вопрос: *как найти наилучшие стратегии для каждого игрока*, или: *каким должно быть решение матричной игры*?

Ответ содержится в следующем определении, которое представляет концепцию равновесия по Нэшу — фундаментального понятия теории игр. Равновесие по Нэшу будет основополагающим на протяжении всей книги.

Определение 2.4 (равновесие по Нэшу). *Пара стратегий* $(s_1^*,s_2^*) \in S_1 \times S_2$ *называется* ***равновесием по Нэшу***[1] *(или просто* ***равновесием****, или даже* ***решением****) матричной игры, если*

(1) $u_1(s_1^*,s_2^*) \geq u_1(s_1,s_2^*)$ *для любых* $s_1 \in S_1$;

(2) $u_1(s_1^*,s_2^*) \geq u_1(s_1^*,s_2)$ *для любых* $s_2 \in S_2$.

Оставим читателю проверку того, что пара стратегий (*Доносить*, *Доносить*) является единственным равновесием по Нэшу в дилемме заключенного и ($200, $200) — единственное равновесие по Нэшу в игре на назначение цены авиабилета.

Перед тем как двигаться дальше, отметим, что матричная игра может иметь одно равновесие по Нэшу, иметь более одного равновесия по Нэшу и не иметь ни одного. Примеры матричных игр каждого из этих типов изображены в табл. 2.5–2.7.

Равновесие по Нэшу — это исход (т.е. пара стратегий) игры, при котором у игроков нет стимула отклониться, поскольку при данном выборе оппонента для данного игрока выбор равновесной по Нэшу стратегии является

---

[1] Концепция равновесия разработана Джоном Нэшем в 1951 г., см. ссылку [65] в библиографии. За эту и еще одну работу профессор Нэш получил Нобелевскую премию по экономике в 1994 г. (вместе с Райнхардом Зелтеном и Джоном Харсаньи).

Таблица 2.5. Игра с одним решением

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(1,1)	(0,0)
	B	(0,1)	(0,0)

Таблица 2.6. Игра с двумя решениями

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(1,1)	(0,0)
	B	(0,0)	(1,1)

Таблица 2.7. Игра, где нет решения

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(1,0)	(0,1)
	B	(0,1)	(1,0)

оптимальным. В этом смысле равновесие по Нэшу характеризуется самопринуждением. Если оба игрока точно знают, что каждый согласен выбрать равновесие по Нэшу, то каждый действительно захочет сыграть таким образом, поскольку это будет оптимальным.

Концепция равновесия по Нэшу широко используется в приложениях теории игр. Возможно, причина такой популярности в том, что в любом исходе, который равновесным по Нэшу не является, хотя бы одному игроку выгоднее выбрать стратегию, отличную от той, которую предполагает выбранный исход. Таким образом, исход, отличный от равновесия по Нэшу, не характеризуется самопринуждением.

Равновесия по Нэшу матричных игр характеризуются следующим образом.

Теорема 2.5. *Рассмотрим матричную игру из табл. 2.8.*

Пара стратегий (k^*, j^*) *образует равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда*

(1) *выигрыш* $a_{k^*j^*}$ *является наибольшим элементом в столбце* j^*;

(2) *выигрыш* $b_{k^*j^*}$ *является наибольшим элементом в строке* k^*.

Другими словами, (k^*, j^*) *— равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда*

$$a_{k^*j^*} = \max_{1 \le k \le m} a_{kj^*} \quad \text{и} \quad b_{kj^*} = \max_{1 \le j \le n} b_{k^*j}.$$

В качестве приложения к теореме 2.5 рассмотрим матричную игру из табл. 2.9. В соответствии с теоремой 2.5 следует внимательно взглянуть на столбцы матричной игры. В первом столбце (столбец α) мы видим, что наибольший выигрыш строчного игрока равен 3, что соответствует строке b. Это значит, что (b,α) — потенциальное равновесие по Нэшу. Выигрыш столбце-

Таблица 2.8

	Столбцевой игрок				
	Стратегия	1	2	...	n
Строчный игрок	1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	...	(a_{1n},b_{1n})
	2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})	...	(a_{2n},b_{2n})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	m	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	...	(a_{mn},b_{mn})

Таблица 2.9

	Столбцевой игрок				
	Стратегия	α	β	γ	δ
Строчный игрок	a	(1,2)	(–1,1)	(0,2)	(3,3)
	b	(3,2)	(2,–2)	(0,1)	(1,0)
	c	(1,1)	(0,0)	(–3,1)	(1,–1)
	d	(2,3)	(1,2)	(–2,3)	(2,1)
	e	(0,2)	(1,–1)	(2,3)	(2,0)

вого игрока в профиле (b,α) равен 2, и это (что непосредственно следует из проверки) наибольший выигрыш столбцевого игрока в строке b. Следовательно, по теореме 2.5 профиль стратегий (b,α) является равновесием по Нэшу. Теперь необходимо проверить тем же способом оставшиеся столбцы.

Во втором столбце (т.е. в столбце β) наибольший выигрыш строчного игрока также в строке b. Это значит, что в столбце β единственное потенциальное равновесие по Нэшу — это (b,β). Заметим теперь, что выигрыш столбцевого игрока при профиле (b,β) равен –2, что не может быть наибольшим выигрышем столбцевого игрока в строке b. Таким образом, (b,β) не является равновесием по Нэшу.

Подобным образом проверяется, что профиль (e,γ) — единственное равновесие по Нэшу в третьем столбце, и (a,δ) — единственное равновесие по Нэшу в четвертом столбце.

Следовательно, в матричной игре существуют три равновесия по Нэшу. Это следующие профили стратегий: (b,α), (e,γ) и (a,δ).

Упражнения

1. Найдите равновесие по Нэшу в игре «Назначение цен» из примера 2.1.
2. Найдите равновесие по Нэшу в игре «Дилемма заключенного» из примера 2.2. Укажите также стратегии, при использовании которых игроки получают больший выигрыш, чем в равновесии по Нэшу.
3. Убедитесь в том, что матричная игра, изображенная в табл. 2.10, не имеет равновесий по Нэшу.
4. Найдите равновесия по Нэшу в матричной игре из табл. 2.11.

Таблица 2.10

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(0,3)	(3,0)
	B	(2,1)	(1,2)

Таблица 2.11

	Столбцевой игрок				
Строчный игрок	Стратегия	1	2	3	4
	1	(1,0)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
	2	(4,2)	(0,2)	(1,1)	(2,2)
	3	(−1,1)	(1,1)	(1,2)	(2,0)
	4	(3,2)	(−1,1)	(2,2)	(−3,2)
	5	(2,1)	(−2,2)	(1,−1)	(1,5)

5. Найдите все равновесия по Нэшу в матричной игре из табл. 2.12. Покажите, что если заменить данные таблицы на данные из табл. 2.13, где параметр x — действительное число, то профиль стратегий (T, C) будет единственным потенциальным равновесием по Нэшу. При каких значениях x профиль стратегий (T, C) окажется равновесием по Нэшу?
6. Рассмотрим матричную игру, изображенную в табл. 2.14, где параметр x — действительное число.
   (а) При каких значениях x в игре нет равновесий по Нэшу?

Таблица 2.12

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	L	C	R
	T	(1,0)	(2,3)	(0,2)
	M	(0,1)	(2,1)	(3,1)
	B	(−1,1)	(2,3)	(1,4)

Таблица 2.13

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	L	C	R
	T	(1,0)	$(x^2 - x, 3)$	(0,2)
	M	(0,2)	(2,1)	(3,1)
	B	(−1,1)	(2,3)	(1,4)

Таблица 2.14

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	L	C	R
	T	(1,0)	$(x,3)$	(0,2)
	M	(0,2)	(2,1)	(3,1)
	B	(−1,1)	(2,3)	$(2x,4)$

(b) При каких значениях параметра x игра имеет в точности одно равновесие по Нэшу?

(c) При каких значениях параметра x игра имеет ровно два равновесия по Нэшу?

7. Игрой **с нулевой суммой** называется матричная игра, в которой $u_1(s_1,s_2) = -u_2(s_1,s_2)$ для всех пар стратегий $(s_1,s_2) \in S_1 \times S_2$. То есть в игре с нулевой суммой выигрыши игроков в сумме всегда дают нуль для любой пары стратегий. Для анализа игр с нулевой суммой необходимо знать лишь матрицу выигрышей A одного из игроков; матрица выигрышей другого игрока будет равна $-A$. Таким образом, любая матрица размера $m \times n$ является матрицей выигрышей некоторой игры с нулевой суммой.

Матрица $A = [a_{kr}]$ размера $m \times n$ имеет **седловую точку** в позиции (k^*, r^*), если

$$a_{k^* r^*} = \max_{1 \le k \le m} a_{kr^*} = \min_{1 \le r \le n} a_{k^* r}.$$

То есть матрица A имеет седловую точку в (k^*, r^*), если $a_{k^* r^*}$ является наибольшим элементом в своем столбце и наименьшим элементом в своей строке.

(a) Найдите седловые точки матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Покажите, что матрица $A = [a_{kr}]$ имеет седловую точку в (k^*, r^*) тогда и только тогда, когда стратегия (k^*, r^*) является равновесием по Нэшу для некоторой игры с нулевой суммой, определенной матрицей A.

(c) Пусть (k^*, r^*) и $(\hat{k}, \hat{r})$ — равновесия по Нэшу в игре с нулевой суммой. Убедитесь, что $(\hat{k}, r^*)$ и $(k^*, \hat{r})$ тоже равновесия по Нэшу в этой игре.

(d) Убедитесь, что если (k^*, r^*) и $(\hat{k}, \hat{r})$ — равновесия по Нэшу игры с нулевой суммой, то $u_i(k^*, r^*) = u_i(\hat{k}, \hat{r})$ для любого игрока i.

(Подробнее об играх с нулевой суммой можно прочитать в гл. 9.)

8. Докажите теорему 2.5.

2.2. Стратегические игры

Мы узнали, что игра двух лиц может быть представлена в виде матричной игры. Мы также поняли, как анализировать эти матричные игры. Однако зачастую во многих приложениях в игре участвует более двух игроков. Более того, множества стратегий могут оказаться такими, что у игры может не быть хорошего представления в матричной форме. К счастью, большинство идей относительно того, как решать игры, которые были введены для матричных игр, можно легко распространить на более общий класс игр — на стратегические игры. Начнем с формального определения стратегической игры.

Определение 2.6 (стратегическая игра). ***Стратегическая игра***[1] *состоит из множества n участников*[2]*, где каждый участник i* $(i=1,\dots,n)$ *имеет*:

(1) *множество выбора* S_i (*также известное как* ***множество стратегий*** *или* ***множество действий***), *элементы которого являются стратегиями игрока i, и*

(2) ***функцию выигрыша*** $u_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to R$ [3].

Игроки, множества стратегий и функции выигрыша стратегической игры в совокупности называются ***характеристиками*** *игры.*

Другими словами, **стратегическая игра *n* лиц** является набором из $2n$ элементов

$$G=(S_1,\dots,S_n,u_1,\dots,u_n),$$

где S_k и u_k удовлетворяют условиям определения 2.6. Таким образом, для описания стратегической игры G нам необходимо указать множества стратегий и функции выигрышей игроков, т.е. ее характеристики.

Стратегическая игра разыгрывается следующим образом.

Разыгрывание стратегической игры

Все игроки выбирают одновременно и независимо друг от друга стратегию из своего множества действий, и игра завершается. Если игрок i выбрал стратегию $s_i \in S_i$, то его выигрыш равен $u_i(s_1,s_2,\dots,s_n)$.

Следует заметить, что каждая функция выигрыша представляет собой действительную функцию n переменных $s_1,s_2,\dots,s_n$, т.е. $u_i(s_1,s_2,\dots,s_n)$, где каждая переменная s_k пробегает множество стратегий игрока k. Значение $u_i(s_1,s_2,\dots,s_n)$ интерпретируется как **выигрыш** (или **полезность**) игрока i в случае, когда каждый игрок k выбирает свою стратегию s_k. Выигрыш $u_i(s_1,s_2,\dots,s_n)$ игрока i может представлять денежные выигрыши (доходы) или потери, или какой-то другой тип «удовлетворения», который важен для игрока.

Декартово произведение $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ множеств стратегий называют множеством **профилей стратегий** или **множеством исходов** игры, а его элементы $(s_1,s_2,\dots,s_n)$ — **профилем стратегий** или **профилем действий**.

Приведем пример стратегической игры.

Пример 2.7 (стратегическая игра). Рассмотрим стратегическую игру с тремя игроками 1, 2, 3. Множества стратегий игроков имеют вид

---

[1] Стратегическая игра также называется **игрой в стратегической форме** или **игрой в нормальной форме**.

[2] Неявно предполагается, что $n \ge 2$. Случай $n = 1$, т.е. случай одного игрока, был рассмотрен в гл. 1.

[3] Функции выигрыша также называют **функциями полезности**.

$$S_1 = S_2 = S_3 = [0,1],$$

т.е. представляют замкнутый интервал от 0 до 1. Функции выигрыша задаются как

$$u_1(x,y,z) = x + y - z,$$
$$u_2(x,y,z) = x - yz, \text{ и}$$
$$u_3(x,y,z) = xy - z,$$

где для простоты полагаем, что $s_1 = x$, $s_2 = y$ и $s_3 = z$[1].

Если участники объявят стратегии $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ и $z = \frac{1}{4}$, то выигрыши окажутся равными

$$u_1\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4},\; u_2\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{ и } u_3\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Заметим, что профиль стратегий $(1,1,0)$ дает наибольший выигрыш каждому игроку.

При разыгрывании стратегической игры цель игроков — максимизация своих выигрышей. Однако поскольку величина выигрыша игрока зависит не только от его выбора, но и от выборов других игроков (что отражает *конфликт интересов* с другими игроками), вопрос оптимизации чьего-либо выигрыша намного тоньше, чем в случае простой задачи принятия решения с участием одного лица. Если индивид знает о выбранных другими игроками стратегиях, он может максимизировать свой выигрыш при заданных выборах других индивидов. Но тогда все другие игроки захотят поступить точно так же. В действительности кажется довольно естественным попытаться найти исход, получаемый в результате одновременной максимизации индивидуальных выигрышей. Такой набор стратегий, обычно называемый — как и в случае матричных игр — равновесием по Нэшу, определяется (как и в матричных играх) следующим образом.

Определение 2.8 (равновесие по Нэшу). ***Равновесием по Нэшу*** *(или просто* ***равновесием*** *или даже* ***решением****) игры в стратегической форме*

$$G = \{S_1,\ldots,S_n,u_1,\ldots,u_n\}$$

называется профиль стратегий $(s_1^*,s_2^*,\ldots,s_n^*)$, *такой что для каждого игрока* i *и любого* $s_i \in S_i$ *выполняется соотношение*

$$u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*) \geq u_i(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*).$$

[1] Если множества стратегий игроков состоят из вещественных чисел, то обычно используют буквы x, y и z для обозначения произвольных стратегий игроков 1, 2 и 3. С одной стороны, представляется, что эти обозначения проще, чем использование s_1, s_2 и s_3; с другой стороны, это обозначение ведет к обычным в дифференциальном исчислении записям для функций двух и трех переменных. Такие обозначения указывают также на то, что любую пару (соответственно тройку) вещественных функций двух (соответственно трех) переменных можно считать функциями выигрышей стратегической игры двух (соответственно трех) лиц!

Несмотря на то что равновесие по Нэшу кажется обоснованным решением стратегической игры, игрок будет заинтересован выбирать равновесную по Нэшу стратегию только в случае, если вполне уверен, что остальные собираются выбрать равновесные по Нэшу стратегии. Часто для этого требуется, чтобы каждый игрок знал это, чтобы каждый игрок знал, что другие знают это, и так далее до бесконечности. Иначе говоря, то, что игроки собираются играть равновесие по Нэшу, должно быть *общим знанием*. Фактически это означает, что *каждый игрок знает*, что будет разыграно данное равновесие по Нэшу. Привлекательность концепции равновесия по Нэшу проистекает из того факта, что если оно является всеобщим знанием, то каждый игрок действительно будет играть свою равновесную по Нэшу стратегию, приводя тем самым к реализации именно равновесия по Нэшу. В этом смысле равновесие по Нэшу характеризуется самопринуждением. Поэтому, если игроки ищут исходы или решения, от которых никто не хотел бы уклоняться, то единственными профилями стратегий, удовлетворяющими этому условию, являются равновесия по Нэшу.

Существует полезный критерий равновесия по Нэшу для стратегической игры в случае, когда множества стратегий представляют собой открытые интервалы вещественных чисел. Перед тем как перейти к обсуждению этого критерия, приведем некоторые понятия. **Внутренность** интервала I вещественных чисел состоит из всех точек $x \in I$, таких что существует $\varepsilon > 0$ (зависящее от x), при котором открытый интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ целиком лежит в I, т.е. $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq I$. Внутренность I обозначается как Int (I). Заметим, что

$$\text{Int}\,([a,b]) = (a,b),\ \text{Int}\,([a,b)) = (a,b),\ \text{и Int}\,([a,\infty)) = (a,\infty).$$

Если каждое множество стратегий S_i является интервалом, то можно говорить о внутренних профилях стратегий. Соответственно профиль стратегий $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ называется **внутренним профилем стратегий**, если $s_i \in \text{Int}\,(S_i)$ для любого игрока i. В этом случае можно говорить о внутренних равновесиях по Нэшу. То есть равновесие по Нэшу $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ называется **внутренним**, если профиль $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ является внутренним.

Теперь нетрудно убедиться (используя основные свойства дифференциального исчисления), что если функции полезности имеют частные производные во внутренности S[1] и $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ — внутреннее равновесие по Нэшу, то профиль стратегий $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ должен быть решением системы уравнений:

$$\frac{\partial u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i} = 0,\quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Или, в расширенной записи, $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ должно быть решением системы из n уравнений

$$\frac{\partial u_1(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_1} = 0,$$

[1] Здесь внутренность S — это множество $\text{Int}(S_1) \times \text{Int}(S_2) \times \ldots \times \text{Int}(S_n)$.

$$\frac{\partial u_2(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_2} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial u_n(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_n} = 0.$$

Таким образом, равновесия по Нэшу находятся среди решений системы (2.1).

Существует удобный тест, который основан на этом замечании и позволяет определить, является ли данное внутреннее решение системы равновесием по Нэшу.

Критерий равновесия по Нэшу
(на основе дифференциального исчисления)

Предположим, что в стратегической игре множества стратегий S_i являются интервалами и функции полезности непрерывны и имеют частные производные второго порядка во внутренности S. Предположим, что профиль стратегий $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) каждая (стратегия) s_i^* лежит во внутренности интервала S_i;

(2) $\dfrac{\partial u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i} = 0$ для каждого игрока i;

(3) каждая стратегия s_i^* — единственная стационарная точка функции $u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$, $s_i \in \operatorname{Int}(S_i)$;

(4) $\dfrac{\partial^2 u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i^2} < 0$ для каждого i.

Тогда $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ является единственным внутренним равновесием по Нэшу.

На практике обычно находят решение системы (2.1), а затем используют другие экономические соображения, чтобы убедиться, что найденное решение является равновесием по Нэшу.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий данный критерий.

Пример 2.9. Рассмотрим игру в стратегической форме с тремя игроками, в которой множество стратегий каждого игрока — открытый интервал $(0,\infty)$ вещественной прямой. Функции выигрышей игроков имеют вид

$$u_1(x, y, z) = 2xz - x^2 y,$$

$$u_2(x, y, z) = \sqrt{12(x + y + z)} - y,$$

$$u_3(x, y, z) = 2z - xyz^2.$$

Поскольку каждое множество S_i является открытым интервалом, а функции выигрыша дифференцируемы, то для нахождения равновесий по Нэшу необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u_2}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u_3}{\partial z}=0.$$

Вычисляя производные, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=2z-2xy,\ \frac{\partial u_2}{\partial y}=\sqrt{\frac{3}{x+y+z}}-1,\ \frac{\partial u_3}{\partial z}=2-2xyz.$$

Таким образом, необходимо решить систему уравнений

$$2z-2xy=0,\ \sqrt{\frac{3}{x+y+z}}-1=0,\ 2-2xyz=0,$$

или, упрощая выражения,

$$z=xy, \tag{2.2}$$

$$x+y+z=3, \tag{2.3}$$

$$xyz=1. \tag{2.4}$$

Подставив выражение для xy из (2.2) в (2.4), получаем $z^2=1$ и (поскольку $z>0$) $z=1$. Теперь подставим значение $z=1$ в (2.2) и (2.3). Имеем систему

$$xy=1,\ x+y=2.$$

Решая данную систему, получаем $x=y=1$. Следовательно, единственным решением системы уравнений (2.2), (2.3) и (2.4) является $x=y=z=1$. Вычислим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=-2y<0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+z)^{-\frac{3}{2}}<0,$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}=-2xy<0,$$

для всех выборов $x>0$, $y>0$ и $z>0$. Критерий равновесия по Нэшу гарантирует, что набор стратегий $(1,1,1)$ является единственным равновесием по Нэшу. ■

Упражнения

1. Предположим, что в стратегической игре существует профиль стратегий $s^*=(s_1^*,s_2^*,\ldots,s_n^*)$, такой что для каждого игрока i

$$u_i(s_1^*,s_2^*,\ldots,s_n^*)=\max\{u_i(s_1,\ldots,s_n):(s_1,\ldots,s_n)\in S_1\times\cdots\times S_n\}.$$

   Покажите, что s^* является равновесием по Нэшу.

2. Докажите, что семейство профилей стратегий $(1,\alpha,0)$, где $0\le\alpha\le 1$, — все возможные равновесия по Нэшу в игре из примера 2.7.

3. Рассмотрим игру из примера 2.7 и предположим, что игроки имеют те же функции выигрыша, но множества стратегий теперь таковы:

$S_1 = S_2 = S_3 = (0,1)$. Существует ли равновесие по Нэшу в такой игре? (Сравните ответ с результатом из предыдущего упражнения.)

4. Два рыбака ловят рыбу недалеко друг от друга; обозначим за x и y количество рыбы, пойманное рыбаками 1 и 2 соответственно. Выигрыш первого рыбака от рыбной ловли равен $\pi_1(x,y) = 2x - \frac{x^2}{4} - \frac{xy}{10}$, где $2x$ — полезность от вылавливания x рыб, а $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{10}$ — издержки рыбной ловли. Здесь $\frac{xy}{10}$ — издержки рыбака 1 вылавливания x рыб, когда рыбак 2 выловит y рыб. Заметим, что эта часть оказалась бы равной нулю, если бы рыбака 2 там не было. Аналогично его выигрыш составляет $\pi_1(x,y) = 2y - \frac{y^2}{4} - \frac{xy}{10}$.
   (a) Опишите ситуацию в виде стратегической игры.
   (b) Найдите равновесие по Нэшу этой игры.
   (c) Сколько рыбы выловил бы каждый, если бы рыбачил в одиночку?

5. Рассмотрите стратегическую игру с двумя участниками, такую что $S_1 = S_2 = R$. Функции полезности игроков имеют вид

$$u_1(x,y) = xy^2 - x^2 \text{ и } u_2(x,y) = 8y - xy^2.$$

   Найдите равновесие по Нэшу этой игры. [Ответ: (2,2).]

6. Найдите равновесие по Нэшу в стратегической игре двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = R$ и функциями выигрыша

$$u_1(x,y) = y^2 - xy - x^2 - 2x + y,$$
$$u_2(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y.$$

   [Ответ: $\left(-\frac{19}{11}, \frac{16}{11}\right)$.]

7. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц с $S_1 = S_2 = R$ и функциями выигрыша

$$u_1(x,y) = x^2 - 2x, \; u_2(x,y) = xy - y^2.$$

   Убедитесь, что в этой стратегической игре нет равновесий по Нэшу.

8. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = [0,1]$ и функциями выигрыша

$$u_1(x,y) = \left(y - \frac{1}{2}\right)x, \; u_2(x,y) = |x - y|.$$

   Покажите, что у этой стратегической игры нет равновесий по Нэшу.

9. Рассмотрим стратегическую игру двух одинаковых игроков. Множества стратегий имеют вид $S_1 = S_2 = [0,2]$, а функции выигрыша

$$u_1(x,y) = u_2(x,y) = \min\{1 - r^2, 1 - (x-1)^2 - (y-1)^2\},$$

   где r — фиксированное положительное число между 0 и 1, т.е. $0 < r < 1$. Теперь рассмотрим круг $D = \{(x,y) \in R^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \le r^2\}$; его гра-

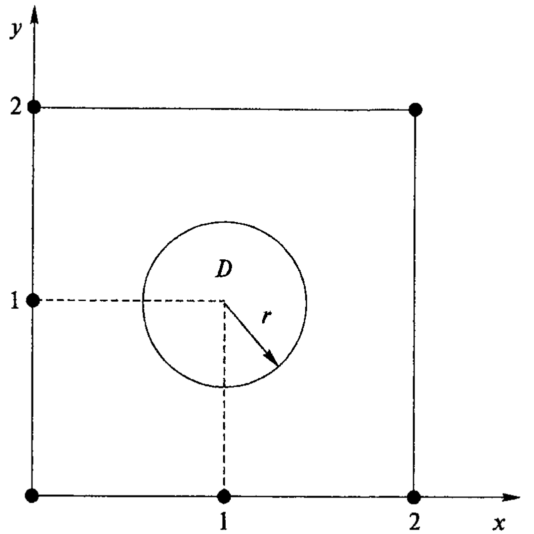


Рис. 2.1

фик изображен на рис. 2.1. Убедитесь, что любой профиль стратегий $(x^*, y^*) \in D$ является равновесием по Нэшу. [Подсказка: воспользуйтесь упражнением 1.]

10. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, заданную матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & x^2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & x \end{bmatrix},$$

где x — параметр, действительное число. (Определение игры с нулевой суммой дано в упражнении 7 раздела 2.1). При каких значениях x игра имеет равновесие по Нэшу? Найдите эти равновесия.

11. Пусть $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ и $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ — два множества, каждое из которых состоит из различных положительных вещественных чисел. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц со следующими характеристиками.

(a) Множество стратегий S_1 игрока 1 состоит из всех n-мерных векторов $s = (s_1,\ldots,s_n)$, где $(s_1,\ldots,s_n)$ — перестановка положительных вещественных чисел $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. (Таким образом, S_1 имеет $n!$ элементов — всевозможных перестановок $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$.) Аналогично S_2 состоит из всех n-мерных векторов $t = (t_1,\ldots,t_n)$, компоненты которых образуются из перестановок вещественных чисел $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$; S_2 снова состоит из $n!$ элементов.

(b) Функции выигрышей игроков задаются в виде

$$\pi_1(s,t) = \sum_{i=1}^{n} s_i t_i, \quad \pi_2(s,t) = \sum_{i=1}^{n} s_i (t_i)^2 .$$

Покажите, что если $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ и $t^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_n^*)$ удовлетворяют соотношениям

$$s_1^* < s_2^* < \cdots < s_n^*, \ t_1^* < t_2^* < \cdots < t_n^*,$$

то профиль стратегий (s^*, t^*) является равновесием по Нэшу. [Указание: заметим, что если стратегия $s = (s_1,...,s_n)$ удовлетворяет условию $s_{k+1} < s_k$ для некоторого k, то $s_{k+1}t_k^* + s_k t_{k+1}^* - (s_k t_k^* + s_{k+1}t_{k+1}^*) = (t_{k+1}^* - t_k^*)(s_k - s_{k+1}) > 0$.]

12. Докажите критерий равновесия по Нэшу (на основе дифференциального исчисления). [Подсказка: доказательство основано на следующем основном результате дифференциального исчисления. *Предположим, что $f:(a,b) \to R$, где (a,b) — открытый интервал в R, — дважды дифференцируемая функция, у которой существует* ***единственная*** *критическая точка x^*, т.е. $f'(x^*) = 0$, такая что $f''(x^*) < 0$. Тогда f достигает (глобального) максимума на (a,b) в точке x^*.* Установите этот результат и воспользуйтесь им для доказательства приведенного выше критерия равновесия по Нэшу.]

2.3. Доминирующие и доминируемые стратегии

Всюду в этом разделе $G = (S_1,\ldots,S_n,u_1,\ldots,u_n)$ будет обозначать стратегическую игру n лиц, как она описана в определении 2.6. Цель данного раздела состоит в том, чтобы изучить особый тип стратегий, называемый *доминирующими стратегиями*. Перед тем как их определить, введем некоторые стандартные и очень полезные обозначения, используемые в теории игр.

Если $s = (s_1,...,s_n)$ — профиль стратегий, а i произвольный игрок, то через s_{-i} будем обозначать профиль стратегий, который получается из s при удалении стратегии s_i. То есть s_{-i} является профилем стратегий, состоящим из стратегий всех игроков, за исключением игрока i. Другими словами, если

$$s = (s_1,\ldots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_i \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$

— профиль стратегий n игроков, то

$$s_{-i} = (s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n.$$

С помощью введенного обозначения можно записать s в виде (s_{-i}, s_i) (или (s_i, s_{-i})); т.е. мы будем записывать профиль стратегий $s = (s_1,\ldots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots,s_n)$ как

$$s = (s_{-i}, s_i) = (s_i, s_{-i}).$$

Кроме того, через s_{-i} будем обозначать произвольный профиль стратегий, принадлежащий Декартову произведению $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$.

Проиллюстрируем введенное обозначение на примере. Рассмотрим стратегическую игру четырех лиц, такую что множество стратегий каждого — это множество натуральных чисел, т.е. $S_i = \{1,2,3,...\}$ для любого i. Рассмотрим профиль стратегий $s = (3,6,9,10)$. Тогда

$$s_{-1} = (6,9,10),$$

$$s_{-2} = (3,9,10),$$

$$s_{-3} = (3,6,10),$$

$$s_{-4} = (3,6,9).$$

С другой стороны, если взять в качестве $s_{-2} = (5,7,8)$ или $s_{-4} = (6,5,10)$, то

$$(s_{-2}, 20) = (5, 20, 7, 8) \text{ или } (s_{-4}, 10) = (6, 5, 10, 10).$$

Заметим, что с учетом этого обозначения

- *профиль стратегий $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда для каждого игрока i неравенство*

$$u_i(s_{-i}^*, s_i^*) \geq u_i(s_{-i}^*, s_i)$$

выполняется при любых стратегиях $s_i \in S_i$ игрока i.

Это компактный и эффективный способ определения концепции равновесия по Нэшу!

С использованием этого обозначения определим понятие доминирования.

Определение 2.10 (доминирующие стратегии). *Будем говорить, что стратегия $a \in S_i$ игрока i **сильно (строго) доминирует** стратегию $b \in S_i$ (или b **сильно доминируется** стратегией a), если для любого профиля стратегий s_{-i} оставшихся $n - 1$ игроков выполняется строгое неравенство*

$$u_i(s_{-i}, a) > u_i(s_{-i}, b).$$

*Аналогично стратегия $a \in S_i$ игрока i **слабо доминирует** стратегию $b \in S_i$ (или b **слабо доминируется** стратегией a), если для любого профиля стратегий $s_{-i} \in S_{-i}$ оставшихся $n - 1$ игроков*

$$u_i(s_{-i}, a) \geq u_i(s_{-i}, b).$$

Существует также понятие доминирующей стратегии. Говорят, что стратегия $a \in S_i$ является **сильно доминирующей**, если она сильно доминирует все другие стратегии игрока i. Аналогично стратегия $a \in S_i$ является **слабо доминирующей**, если она слабо доминирует все другие стратегии игрока i.

Проиллюстрируем эти понятия на двух примерах.

Пример 2.11. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц, изображенную в табл. 2.15. Нетрудно видеть, что стратегия C игрока 2 сильно доминирует стратегию R. А стратегия T игрока 1 слабо (но не сильно) доминирует стратегию M. ■

Таблица 2.15

	Игрок 2			
	Стратегия	L	C	R
Игрок 1	T	(1,0)	(1,3)	(3,0)
	M	(0,2)	(0,1)	(3,0)
	B	(0,2)	(2,4)	(5,3)

Пример 2.12. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц с множествами стратегий $S_1 = [0,1]$, $S_2 = [-1,0]$ и функциями выигрышей

$$u_1(x,y) = x + y \text{ и } u_2(x,y) = xy.$$

Поскольку $u_1(1,y) = 1 + y > x + y = u_1(x,y)$ при всех $0 \le x < 1$ и всех $-1 \le y \le 0$, стратегия 1 является сильно доминирующей стратегией игрока 1. С другой стороны, из неравенства

$$u_2(x,0) = 0 \ge xy = u_2(x,y)$$

при всех $0 \le x \le 1$ и всех $-1 \le y < 0$ из равенства $u_2(0,0) = u_2(0,y)$ мы можем заключить, что стратегия 0 является слабо доминирующей (но не сильно доминирующей) стратегией игрока 2. ■

Заметим, что рациональность игроков гарантирует, что сильно доминируемые стратегии никогда не будут ими выбраны, и, таким образом, могут быть вычеркнуты из множеств их стратегий[1]. Во многих случаях это приводит стратегическую игру к более простой игре. Данный процесс (известный как *последовательное исключение сильно доминируемых стратегий*) формализован в следующей теореме.

Теорема 2.13 (последовательное исключение доминируемых стратегий[2]). *Рассмотрим стратегическую игру n лиц* $G = (S_1,\ldots,S_n,u_1,\ldots,u_n)$ *и предположим, что для каждого i выбрано непустое подмножество* $S_i' \subseteq S_i$, *так что*

- *каждая стратегия игрока i, не принадлежащая* S_i', *т.е. стратегия из множества* $S_i \setminus S_i'$, *сильно доминируется некоторой стратегией из* S_i'.

Тогда новая стратегическая игра n лиц $G' = (S_1',\ldots,S_n',u_1,\ldots,u_n)$ *имеет те же равновесия по Нэшу, что и исходная стратегическая игра G.*

---

[1] Предположение о рациональности игроков гарантирует только, что они не выбирают сильно доминируемые стратегии. Но для того чтобы вычеркнуть их из множества стратегий и проводить дальнейшие шаги по редуцированию игры, нужно быть уверенным, что другие игроки также не рассматривали эти стратегии как возможный выбор этого игрока, а он, в свою очередь, был уверен, что они не рассматривают эту стратегию как его возможный выбор, и т.д. То есть требуется, чтобы другие игроки знали, во-первых, что эти стратегии сильно доминируемы и, во-вторых, что игроки, множества стратегий которых содержат сильно доминируемые стратегии, такие стратегии не выбирают, т.е. являются рациональными. Другими словами, такое вычеркивание строго доминируемых стратегий обоснованно в ситуации, когда структура игры (множества стратегий и функции выигрышей), а также то, что все игроки рациональны, известно каждому игроку. Более того, рассматриваемое далее последовательное вычеркивание строго доминируемых стратегий обоснованно в ситуации, когда все это общеизвестно, т.е. не только каждый игрок знает это, но он знает, что все другие игроки знают это, и т.д. до бесконечности. В этом случае игрок должен не только сам исходить из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию, но и учитывать, что другие игроки исходят из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию. Эту цепочку предположений следует продолжить до бесконечности. — *Примеч. ред.*

[2] На данный результат обычно ссылаются как на *процедуру последовательного исключения сильно доминируемых стратегий.*

Доказательство. Пусть $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ — профиль стратегий. Предположим сначала, что s^* является равновесием по Нэшу в игре G'. Необходимо показать, что s^* — равновесие по Нэшу также и в игре G.

Действуя методом от обратного, предположим, что s^* не является равновесием по Нэшу в игре G. Это означает, что существует игрок i и стратегия $s_i \in S_i$, такие что $u_i(s_{-i}^*, s_i) > u_i(s_{-i}^*, s_i^*)$. Если s_i принадлежит S_i', то это противоречит тому факту, что s^* образует равновесие по Нэшу в игре G'. Таким образом, стратегия s_i не принадлежит S_i'. Но тогда, в соответствии с нашим предположением, существует некоторая стратегия $\sigma_i \in S_i'$, которая сильно доминирует s_i. Отсюда вытекает

$$u_i(s_{-i}^*, \sigma_i) > u_i(s_{-i}^*, s_i) > u_i(s_{-i}^*, s_i^*),$$

следовательно, s^* не может быть равновесием по Нэшу в стратегической игре G'. Это противоречие показывает, что s^* является равновесием по Нэшу в игре G.

Теперь предположим, что s^* — равновесие по Нэшу в игре G. Нужно показать, что s^* также является равновесием по Нэшу в игре G'. Достаточно будет показать принадлежность s_i^* множеству S_i' для любого i (почему?).

Для того чтобы это установить, предположим, что s_i^* не принадлежит S_i' для некоторого i. Тогда можно найти стратегию $s' \in_i S_i'$, которая сильно доминирует s_i^*. В частности, мы имеем

$$u_i(s_{-i}^*, s_i') > u_i(s_{-i}^*, s_i^*),$$

откуда следует, что s^* не может быть равновесием по Нэшу в игре G. Следовательно, s_i^* принадлежит S_i' для всех i, что и требовалось доказать. ■

Приведем пример стратегической игры, которая решается с помощью «исключения сильно доминируемых стратегий».

Пример 2.14. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = [0,1]$ и функциями выигрышей

$$u_1(x,y) = x + y \text{ и } u_2(x,y) = x - y.$$

Заметим, что стратегия $x = 1$ является сильно доминирующей стратегией игрока 1, а стратегия $y = 0$ — сильно доминирующей стратегией игрока 2. Таким образом, если $S_1' = \{1\}$, а $S_2' = \{0\}$, то (согласно теореме 2.13) игра G имеет те же равновесия по Нэшу, что и игра $G' = (S_1', S_1', u_1, u_2)$. Поскольку $(1,0)$ — единственная стратегия в G', то профиль $(1,0)$ является единственным равновесием по Нэшу в игре G. ■

Вернемся к матричной игре из примера 2.11. Беглый взгляд на матрицу позволяет выявить, что при профиле стратегий (B,C) игрок 1 имеет наибольший выигрыш (2) в столбце C, а игрок 2 имеет набольший выигрыш (4) в строке B. Более того, это единственный профиль стратегий с данным свойством. Следовательно, по теореме 2.5 (B,C) — равновесие по Нэшу матричной игры.

Далее мы покажем, как найти это решение с помощью серий матричных игр, используя метод последовательного исключения сильно доминируемых стратегий. Для начала обратим внимание на то, что у игрока 2 стратегия C сильно доминирует стратегию R. Следовательно, игрок 2 исключает стратегию R, и игра редуцируется к матричной игре G_1, изображенной в табл. 2.16. По теореме 2.13 игра G_1 имеет те же равновесия по Нэшу, что и исходная матричная игра из примера 2.11.

Заметим, что в редуцированной игре G_1 стратегия T игрока 1 сильно доминирует стратегию M, следовательно, игра редуцируется к игре G_2, изображенной в табл. 2.17. Снова по теореме 2.13 игра G_2 содержит те же равновесия по Нэшу, что и игра G_1 (а значит, и те же равновесия по Нэшу, что и исходная матричная игра). Заметим теперь, что в матричной игре G_2 игрок 2 имеет сильно доминирующую стратегию C, поэтому L исключается. Игрок 1 теперь выбирает между T и B, и очевидно, что он выберет B. (Эти шаги отражены в матричных играх табл. 2.18 и 2.19.) Ясно, что у последней игры с единственным профилем стратегий (B,C) те же равновесия по Нэшу, что и у исходной матричной игры. Таким образом, решение (B,C) получено с помощью последовательного исключения сильно доминируемых стратегий[1].

Таблица 2.16

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	C
	T	(1,0)	(1,3)
	M	(0,2)	(0,1)
	B	(0,2)	(2,4)

Таблица 2.17

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	C
	T	(1,0)	(1,3)
	B	(0,2)	(2,4)

Таблица 2.18

	Игрок 2	
Игрок 1	Стратегия	C
	T	(1,3)
	B	(2,4)

[1] Это равновесие называется также равновесием в строго недоминируемых стратегиях. Заметим также, что проведение всех последующих шагов исключения строго недоминируемых стратегий требует более сильных предположений об информированности игроков, чем указано выше; фактически оно опирается на предположение о том, что характеристики и рациональность игроков — (потенциально) общеизвестная информация. — *Примеч. ред.*

К сожалению, не каждая матричная игра решается методом последовательного исключения сильно доминируемых стратегий. Например, у матричной игры из табл. 2.20 нет сильно доминируемых стратегий и она имеет два равновесия по Нэшу: (T,L) и (B,R). Стоит также отметить, что если взять некоторый исход, который не совпадает с равновесием по Нэшу, то всегда какой-то из игроков захочет отклониться от этого исхода. Например, для профиля стратегий (T,R) игрок 2 предпочтет выбрать L, если он знает, что игрок 1 собирается играть T.

Таблица 2.19

	Игрок 2	
Игрок 1	Стратегия	*C*
	B	(2,4)

Таблица 2.20

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*L*	*R*
	T	(1,1)	(0,0)
	B	(0,0)	(1,1)

Таблица 2.21

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Опера*	*Бой быков*
	Опера	(1,2)	(0,0)
	Бой быков	(0,0)	(2,1)

Приведенная выше игра является версией хорошо известной игры, называемой **семейным спором**. Она имеет следующую классическую трактовку. Муж и жена выбирают, где провести время: посетить оперу или пойти на бой быков. Жена предпочитает оперу, а муж — бой быков; но прежде всего они хотели бы провести время вместе. Результирующая матричная игра указана в табл. 2.21. В семейном споре тоже нет сильно доминируемых стратегий. (Более подробное обсуждение игры семейный спор можно найти в последней части раздела 2.4.)

В завершение повторим еще раз важное следствие теоремы 2.13.

- *Если матричная игра может быть решена методом последовательного исключения сильно доминируемых стратегий, то она имеет единственное равновесие по Нэшу, которое в точности совпадает с парой стратегий, найденных на последнем этапе процесса последовательного исключения строго доминируемых стратегий.*

Упражнения

1. Используя доминируемые стратегии, покажите, что в стратегической игре из примера 2.7 все равновесия по Нэшу имеют вид $(1,\alpha,0)$, $0 \le \alpha \le 1$.

2. Рассмотрим стратегическую игру трех лиц со следующими характеристиками:
   (a) множества стратегий: $S_1 = [0,1]$, $S_2 = [-2,2]$, $S_3 = [-1,0]$;
   (b) функции выигрышей:

$$\pi_1(x,y,z) = x^2 + yz\,,$$

$$\pi_2(x,y,z) = y^2 + xz\,,$$

$$\pi_3(x,y,z) = xy - z\,.$$

   Найдите равновесия по Нэшу, используя доминируемые стратегии.
3. Покажите, что если матричная игра может быть решена с помощью последовательного исключения доминируемых стратегий, то решение является равновесием по Нэшу.
4. Рассмотрим матричную игру, изображенную в табл. 2.22. Используя последовательное исключение слабо доминируемых стратегий, убедитесь, что стратегии (T,L), (T,R) и (B,R) являются равновесиями по Нэшу.
5. Покажите, что если матричная игра может быть решена методом последовательного исключения сильно доминируемых стратегий, то она имеет единственное равновесие по Нэшу, которое в точности совпадает с парой стратегий, образующейся на последнем этапе итерационного процесса.
6. Найдите равновесие по Нэшу в игре «Семейный спор».
7. Приведите пример матричной игры, имеющей как минимум два равновесия по Нэшу, одно из которых может быть получено методом последовательного исключения слабо доминируемых стратегий, а другое — нет.
8. Рассмотрим матричную игру, изображенную в табл. 2.23, где α — вещественное число. Если стратегия T игрока 1 сильно доминирует стратегию B, то при каких значениях α профиль стратегий (T,R) является равновесием по Нэшу?
9. Рассмотрим матричную игру, изображенную в табл. 2.24, где λ — вещественное число, отличное от нуля. Найдите равновесия по Нэшу.

Таблица 2.22

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(1,0)	(0,0)
	B	(0,0)	(0,1)

Таблица 2.23

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	$(\alpha^2,1)$	$(\alpha,3\alpha)$
	B	$(\alpha,2)$	$(0,2)$

Таблица 2.24

		Игрок 2	
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	$(1,\lambda)$	(λ,λ^2+1)
	B	$(\lambda^2,2)$	$(2-\frac{1}{\lambda},3)$

2.4. Решения матричных игр в смешанных стратегиях

Ранее уже говорилось, что не в каждой матричной игре есть равновесие. Это приводит к появлению нетривиальных вопросов при решении таких игр. Проблема важна, поскольку относится к довольно широкому классу игр. Поиск концепции решения для игр, не имеющих равновесий по Нэшу, будет полезно предварить исследованием этой проблемы с помощью примера. Обратившись к матричной игре, представленной в табл. 2.25, мы видим, что если игрок 1 выберет стратегию T, то игрок 2 захочет выбрать L, однако в таком случае игрок 1 захочет сыграть B, вследствие чего игрок 2 отклонится, сыграв R, и т.д. В итоге возникает ротация игроков, желающих менять свои стратегии.

В самом деле, игрок 1 должен действовать осторожно, не обнаруживая своей стратегии, поскольку в противном случае выбор игрока 2 будет таков, что принесет игроку 1 наихудший из возможных исходов. Например, если игрок 2 знает о том, что игрок 1 собирается выбрать T, то он выберет L, и выигрыш игрока 1 окажется равным 0, т.е. наименьшим из всех возможных.

Ясно, что игроку 1 нужно предпринимать такие действия, чтобы игроку 2 приходилось угадывать, какую именно стратегию тот намеревался выбрать. Одним из способов достичь этого является использование механизмов случайного выбора стратегий. Таким механизмом в данной ситуации может служить монетка или какой-то другой способ, приводящий к случайному выбору T или B.

В аналогичной ситуации находится и игрок 2, поэтому он захочет сделать то же самое. В результате оба игрока будут использовать некоторую случайную схему для выбора своих стратегий. Подобные случайные схемы называются *смешанными стратегиями* и будут обсуждаться ниже.

Напомним, что матричная игра может быть описана «двойной» матрицей размерности $m \times n$, подобной изображенной в табл. 2.26, где a_{ij} и b_{ij} — вы-

Таблица 2.25. Игра без равновесия по Нэшу

		Игрок 2	
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	$(0,1)$	$(1,0)$
	B	$(1,0)$	$(0,1)$

Таблица 2.26

	Столбцевой игрок				
Строчный игрок	Стратегия	s_1^2	s_2^2	…	n
	1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	…	(a_{1n},b_{1n})
	2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})	…	$a_{2n},b_{2n})$
	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
	m	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	…	(a_{mn},b_{mn})

игрыши участников 1 и 2 соответственно. Фактически при необходимости можно расщепить эту матрицу на две матрицы выигрышей:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Это показывает, что матричная игра полностью определяется парой матриц выигрышей A и B. В случае задания матричной игры в виде пары матриц (A,B) выигрышей говорят, что игра представлена в **биматричной форме.**

Смешанной стратегией (или **профилем вероятностей**) строчного игрока называют любой вектор $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_m)$, такой что $p_l \geq 0$ для любой стратегии l и $\sum_{i=l}^{m} p_l = 1$. Другими словами, смешанная стратегия строчного игрока представляется распределением вероятностей на множестве стратегий $\{1,2,\ldots,m\}$.

Аналогично **смешанной стратегией** столбцевого игрока называют любой вектор $\mathbf{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$, такой что $q_j \geq 0$ для любой стратегии j и $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Говорят, что смешанная стратегия $\mathbf{p}$ строчного игрока является **чистой стратегией**, если для некоторой стратегии l выполнено $p_l = 1$ и $p_k = 0$ при $k \neq l$. Таким образом, чистая стратегия l — это такая смешанная стратегия, при которой исходная стратегия i играется с вероятностью 1, а остальные — с вероятностями 0. Другими словами, чистые стратегии игрока 1 описываются векторами

$$\mathbf{p}=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),$$

где 1 встречается только один раз. Ясно, что у строчного игрока имеется в точности m чистых стратегий, которые мы отождествляем с его исходными стратегиями. Или, иначе, чистая стратегия l строчного игрока отождествляется с его смешанной стратегией $\mathbf{p}=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где единственная 1 соответствует l-й координате вектора $\mathbf{p}$.

Аналогичным образом любая стратегия вида

$$\mathbf{q}=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),$$

где 1 встречается только один раз, скажем в координате j, называется чистой стратегией столбцевого игрока и может отождествляться с его стратегией j.

Заметим снова, что столбцевой игрок имеет n чистых стратегий, которые отождествляются с n его исходными стратегиями.

Пусть $S_1 = \{1,2,\ldots,m\}$ и $S_2 = \{1,2,\ldots,n\}$ — множества стратегий строчного и столбцевого игрока соответственно. Будем обозначать множество всех смешанных стратегий строчного игрока через $\Delta(S_1)$, столбцевого игрока — через $\Delta(S_2)$. То есть положим

$$\Delta(S_1) = \left\{\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_m) : p_l \geq 0 \text{ для всех } l = 1,\ldots m \text{ и } \sum_{l=1}^{m} p_l = 1\right\}$$

и

$$\Delta(S_2) = \left\{\mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_n) : q_j \geq 0 \text{ для всех } j = 1,\ldots n \text{ и } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1\right\}.$$

Другими словами, $\Delta(S_1)$ и $\Delta(S_2)$ — множества всех распределений вероятностей на S_1 и S_2 соответственно.

Теперь предположим, что каждый игрок (дабы запутать оппонента) выбирает стратегию согласно некоторому вероятностному профилю: строчный игрок выбирает смешанную стратегию $\mathbf{p}$, а столбцевой — смешанную стратегию $\mathbf{q}$. В этом случае любой игрок не может точно предсказать, какая именно стратегия будет выбрана другим игроком, и может только надеяться максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

- *Как вычислить ожидаемый выигрыш строчного игрока, если игроки выбирают смешанные стратегии* $\mathbf{p}$ *и* $\mathbf{q}$*?*

Для начала заметим, что если столбцевой игрок выбирает стратегию j, то, выбирая смешанную стратегию $\mathbf{p}$, строчный игрок может ожидать выигрыш $\sum_{l=1}^{m} p_l a_{lj}$. Принимая во внимание тот факт, что столбцевой игрок также выбирает смешанную стратегию $\mathbf{q}$, ожидаемый выигрыш строчного игрока составляет $q_j \sum_{l=1}^{m} p_l a_{lj}$ при выборе столбцевым игроком стратегии j с вероятностью q_j. Отсюда вытекает, что совокупный ожидаемый выигрыш строчного игрока 1 для профиля стратегий $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ равен

$$\pi_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_l q_j a_{lj} .$$

Аналогично ожидаемый выигрыш столбцевого игрока составляет

$$\pi_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_l q_j b_{lj} .$$

Мы построили новую стратегическую игру со следующими характеристиками.

(1) Два игрока, те же, что и в исходной игре.

(2) Множества стратегий игроков 1 и 2 имеют вид $\Delta(S_1)$ и $\Delta(S_2)$ соответственно.

(3) Функции выигрышей игроков 1 и 2 — это π_1 и π_2 соответственно.

Описанную стратегическую игру называют игрой **в смешанных стратегиях**. Поскольку легко проверить, что для любой пары чистых стратегий (l,j) выполнено $\pi_1(l,j)=a_{lj}$ и $\pi_2(l,j)=b_{lj}$, можно рассматривать игру в смешанных стратегиях как «расширение» исходной игры, где, в сущности, расширены лишь множества стратегий игроков за счет дополнительных стратегий.

Теперь можно сформулировать следующий вопрос.

- *Есть ли в этой игре равновесие по Нэшу (или: всегда ли существует равновесие в смешанных стратегиях)?*

Ответ положительный! Причем это является знаменитым результатом теории игр. Сформулируем его в качестве теоремы. (Более подробно это обсуждается в гл. 9, см. теорему 9.22; также см.: [70, VII].)

Теорема 2.15. *Любая матричная игра имеет равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях*[1].

Как находить равновесия матричной игры в смешанных стратегиях? Рассмотрим некоторый алгоритм поиска равновесий в смешанных стратегиях для матричных игр.

Алгоритм нахождения равновесий в смешанных стратегиях

Процесс поиска равновесий в смешанных стратегиях можно разбить на 4 этапа.

1. Запись матричной игры в биматричной форме: $A=[a_{lj}]$, $B=[b_{lj}]$.
2. Вычисление двух функций выигрышей

$$\pi_1(\mathbf{p},\mathbf{q})=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_lq_ja_{lj} \text{ и } \pi_2(\mathbf{p},\mathbf{q})=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_lq_jb_{lj}.$$

3. Замена $p_m=1-\sum_{l=1}^{m-1}p_l$ и $q_n=1-\sum_{j=1}^{n-1}q_j$ в функциях выигрышей π_1 и π_2 и выражение этих функций (после соответствующих вычислений) через переменные $p_1,\ldots,p_{m-1},q_1,\ldots,q_{n-1}$.
4. Вычисление частных производных $\frac{\partial\pi_1}{\partial p_l}$ и $\frac{\partial\pi_2}{\partial q_j}$ и решение системы

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial p_l}=0 \quad (l=1,\ldots,m-1) \text{ и } \frac{\partial\pi_2}{\partial q_j}=0 \quad (j=1,\ldots,n-1).$$

Любое решение этой системы $p_1,\ldots,p_{m-1},q_1,\ldots,q_{n-1}$, где $p_l\ge 0$, $q_j\ge 0$ для всех l и j, такое что $\sum_{l=1}^{m-1}p_l\le 1$ и $\sum_{j=1}^{n-1}q_j\le 1$, является равновесием в смешанных стратегиях.

---

[1] Обобщенная версия этого результата была доказана в 1951 г. Джоном Нэшем для игр n лиц; см. ссылку [65] в библиографии. Подробности можно найти в работе [5].

Теорема 2.15 напоминает фундаментальную теорему алгебры, в соответствии с которой полином может не иметь вещественных корней, но он всегда имеет комплексные корни. То есть при добавлении новых чисел (иначе говоря, расширении вещественных чисел до комплексных) мы гарантируем, что любой полином имеет комплексный корень. Здесь мы имеем аналогичную ситуацию. Отсутствие равновесия по Нэшу в чистых стратегиях объясняется тем, что у игроков «недостаточно много» стратегий. Расширяя множество стратегий до множеств смешанных стратегий (т.е. добавляя достаточное количество «новых» стратегий), мы гарантируем, что в любой матричной игре обязательно есть равновесие в смешанных стратегиях!

Некоторые замечания, касающиеся алгоритма.

- Из алгоритма *не следует*, что любое равновесие в смешанных стратегиях является решением данной системы. Утверждается лишь, что *любое решение системы* с указанными ограничениями — равновесие в смешанных стратегиях. (Для доказательства этого заключения см. указание в упражнении 11 в конце раздела.)

- Нетрудно видеть (см. также указание в упражнении 11 в конце раздела), что $\frac{\partial \pi_1}{\partial p_l}$ включает только q_j. Отсюда следует, что первая «подсистема» $\frac{\partial \pi_1}{\partial p_l} = 0 \quad (l = 1,\ldots,m-1)$ нашей системы позволяет найти смешанные стратегии игрока 2. Аналогично вторая «подсистема» $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1,\ldots,n-1)$ дает смешанные стратегии игрока 1.

- Смешанное равновесие **(p,q)** называется **внутренним равновесием**, если $p_l > 0$ и $q_j > 0$ для всех l и j. Внутренние равновесия игры в точности соответствуют решениям $p_1,\ldots,p_{m-1},q_1,\ldots,q_{n-1}$ системы

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_l} = 0 \quad (l = 1,\ldots,m-1) \text{ и } \frac{\partial \pi_2}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1,\ldots,n-1)$$

с $p_l > 0$ и $q_j > 0$ для всех l и j, $\sum_{l=1}^{m-1} p_l < 1$ и $\sum_{j=1}^{n-1} q_j < 1$. В частности, любое внутреннее решение является решением системы. (Для доказательства снова см. указание к упражнению 11 в конце раздела.)

Нетрудно видеть, что равновесия по Нэшу в чистых стратегиях матричной игры (если они существуют) можно отождествить со смешанными стратегиями вида

$$\mathbf{p} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \text{ и } \mathbf{q} = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0).$$

Теорема 2.16. *Профиль стратегий (l,j) матричной игры является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда профиль чистых стратегий (l,j) также является равновесием игры в смешанных стратегиях.*

Другими словами, каждое равновесие по Нэшу в чистых стратегиях также является равновесием по Нэшу игры в смешанных стратегиях. То есть если равновесия по Нэшу существуют, то (как утверждает теорема 2.16), они являются равновесиями игры в ее форме смешанных стратегий[1]. Принципиально важно здесь то, что хотя в игре не всегда имеются равновесия в чистых стратегиях, в ней всегда имеется (по теореме 2.15) хотя бы одно равновесие в смешанных стратегиях!

Проиллюстрируем алгоритм поиска равновесий в смешанных стратегиях на конкретном примере.

Пример 2.17. Легко видеть, что матричная игра

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[1] Называемой еще смешанным расширением (исходной) игры. — *Примеч. ред.*

не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях. Применим описанный выше алгоритм нахождения равновесия в смешанных стратегиях.

Найдем функции ожидаемых выигрышей участников:

$$\pi_1 = 3p_1q_2 + 2p_2q_1 + p_2q_2 = 3p_1(1-q_1) + 2(1-p_1)q_1 + (1-p_1)(1-q_1) =$$
$$= -4p_1q_1 + 2p_1 + q_1 + 1$$

и

$$\pi_2 = 3p_1q_1 + p_2q_1 + 2p_2q_2 = 3p_1q_1 + (1-p_1)q_1 + 2(1-p_1)(1-q_1) =$$
$$= 4p_1q_1 - q_1 - 2p_1 + 2 .$$

Дифференцируя, получим систему

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial p_1} = -4q_1 + 2 = 0 , \ \frac{\partial\pi_2}{\partial q_1} = 4p_1 - 1 = 0 ,$$

откуда находим, что $p_1 = \frac{1}{4}$ и $q_1 = \frac{1}{2}$. Далее, $p_2 = 1 - p_1 = \frac{3}{4}$ и $q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\left(\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ — единственное внутреннее равновесие в смешанных стратегиях. ■

- Существуют матричные игры без равновесий в чистых стратегиях, для которых алгоритм не позволяет найти решения! Однако матричная игра (в соответствии с теоремой 2.15) имеет как минимум одно равновесие в смешанных стратегиях, поэтому в данном случае для его нахождения следует использовать некоторый метод «проб и ошибок». Иначе говоря, алгоритм не предоставляет способа нахождения *всех* равновесий в смешанных стратегиях данной матричной игры.

Приведем пример, иллюстрирующий этот факт.

Рассмотрим матричную игру двух лиц, изображенную в табл. 2.27. Легко проверяется, что она не имеет равновесий в чистых стратегиях. Более того, беря соответствующее распределение вероятностей и рассчитывая ожидаемые выигрыши, получим

$$\pi_1(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1(2q_1 + q_2 - 2) + p_2(-2q_1 - q_2 + 1) - q_1 + 2 ,$$

$$\pi_2(p_1, p_2, q_1, q_2) = q_1(p_1 + 4p_2 - 3) + q_2(2p_1 + p_2 - 1) + 4 - 2p_1 - 3p_2 .$$

Системы уравнений, приведенные в алгоритме, в этом случае имеют вид

$$2q_1 + q_2 = 2 , \ 2q_1 + q_2 = 1 , \ p_1 + 4p_2 - 3 = 0 , \text{ и } 2p_1 + p_2 - 1 = 0 .$$

Таблица 2.27

	Игрок 2			
	Стратегия	*L*	*C*	*R*
Игрок 1	*T*	(1,0)	(1,3)	(0,2)
	M	(0,2)	(2,1)	(3,1)
	B	(1,1)	(2,3)	(2,4)

Ясно, что первые два уравнения несовместны, таким образом, система не имеет решений. Отсюда следует, что данная матричная игра не имеет внутренних равновесий в смешанных стратегиях. Предлагаем вам самостоятельно убедиться методом «проб и ошибок» в том, что профиль смешанных стратегий

$$\left(\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right)$$

является единственным равновесием в смешанных стратегиях.

- Прием смешанных стратегий, описанный для матричных игр, может быть расширен на класс стратегических игр с конечными множествами стратегий. Самостоятельно сформулируйте стратегическую игру в форме *смешанных стратегий* с конечными множествами стратегий. Справедливость теоремы 2.15 в этом случае не нарушается. То есть

  (*) *Любая стратегическая игра n лиц с конечными множествами стратегий имеет равновесие в смешанных стратегиях.*

Этот результат остается верным и в более общих предположениях, которые выходят за рамки книги. Чуть более подробно о равновесиях в смешанных стратегиях будет рассказано в гл. 9.

Упражнения

1. Проверьте напрямую, что вероятностный профиль $\left(\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ является равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях для матричной игры

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

2. Рассмотрим матричную игру в биматричной форме

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

   (a) Найдите равновесие по Нэшу в чистых стратегиях этой игры. [Ответ: (строка 1, столбец 1) и (строка 2, столбец 2).]

   (b) Вычислите функции ожидаемых выигрышей участников. [Ответ: $\pi_1 = 4p_1q_1 - p_1 - q_1 + 1$ и $\pi_2 = 5p_1q_1 - 4p_1 - 4q_1 + 4$.]

   (c) Найдите все равновесия в смешанных стратегиях этой игры. [Ответ: $((1,0),(1,0))$, $((0,1),(0,1))$ и $\left(\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\right)$.]

3. Найдите все равновесия в смешанных стратегиях в матричной игре из табл. 2.28. [Ответ: $((0,1),(0,1))$, $((1,0),(1,0))$, и $\left(\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right)$.]

4. Найдите все равновесия в смешанных стратегиях в матричной игре из табл. 2.29.

5. Рассмотрим матричную игру, изображенную в табл. 2.30, где параметры α и β — действительные числа.

Таблица 2.28

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(1,3)	(1,0)
	B	(0,1)	(3,2)

Таблица 2.29

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	L	C	R
	T	(0,3)	(2,0)	(0,0)
	M	(1,0)	(0,1)	(0,0)
	B	(0,0)	(0,0)	(1,1)

Таблица 2.30

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	$(1,\alpha)$	$(-1,2)$
	B	(1,1)	$(\beta,-1)$

Таблица 2.31

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	$(-1,2)$	(α,β)
	B	(0,1)	$(-1,2)$

(a) При каких значениях α и β игра имеет внутреннее равновесие в смешанных стратегиях?

(b) При каких значениях α и β в игре есть только равновесие в чистых стратегиях?

6. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц из табл. 2.31, где заданы параметры $\alpha > 0$ и $0 < \beta < 2$.

(a) Есть ли в игре равновесие по Нэшу в чистых стратегиях?

(b) При каких значениях α и β игра имеет равновесие в смешанных стратегиях?

(c) Найдите все внутренние равновесия в смешанных стратегиях.

7. Рассмотрим дилемму заключенного (из примера 2.2) в биматричной форме:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Покажите, что в игре есть единственное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

(b) Вычислите функции ожидаемых выигрышей участников.
[Ответ: $\pi_1 = 4p_1q_1 - 5p_1 + 5q_1 - 5$ и $\pi_2 = 4p_1q_1 - 5p_1 + 5q_1 - 5$.]

(c) Покажите, что профиль чистых стратегий (строка 2, столбец 2) является единственным равновесием в смешанных стратегиях.

Таблица 2.32

	Столбцевой игрок				
Строчный игрок	Стратегия	1	2	3	4
	1	(1,0)	(1,0)	(0,1)	(0,1)
	2	(0,1)	(1,0)	(0,1)	(1,0)
	3	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(0,1)
	4	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)

8. Рассмотрим матричную игру из табл. 2.32. Покажите, что при любом выборе s, t, $0 \le s \le 1$ и $0 \le t \le 1$, смешанные стратегии

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = s\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right) + (1-s)\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = t\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right) + (1-t)\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

составляют равновесие в смешанных стратегиях.

9. Матричная игра из табл. 2.33 показывает, что в равновесии в смешанных стратегиях выигрыш может быть больше, чем в равновесии в чистых стратегиях.

(a) Найдите функции выигрышей игроков при использовании смешанных стратегий.

(b) Найдите все равновесия в чистых стратегиях и соответствующие выигрыши. [Ответ: $((1,0,0),(1,0,0))$; $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 1$.]

(c) Найдите все внутренние равновесия в смешанных стратегиях и соответствующие выигрыши. [Ответ: $\left(\left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right), \left(\frac{6}{11}, \frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right)\right)$; $\pi_1 = \frac{6}{11}$, $\pi_2 = \frac{6}{11}$.]

(d) Найдите равновесия в смешанных стратегиях, при которых у обоих игроков одна из вероятностей равна нулю, и соответствующие выигрыши. [Ответ: $\left(\left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right)$; $\pi_1 = \frac{6}{5}$, $\pi_2 = \frac{6}{5}$.]

(e) Убедитесь, что выигрыш каждого игрока в равновесии в смешанных стратегиях в (d) больше, чем его выигрыш в равновесии в чистых стратегиях в (b).

10. Докажите теорему 2.16.

11. Проверьте, что решения системы в алгоритме поиска равновесий в смешанных стратегиях действительно являются равновесиями в сме-

Таблица 2.33

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	L	C	R
	T	(1,1)	(0,0)	(0,0)
	M	(0,0)	(0,2)	(3,0)
	B	(0,0)	(2,0)	(0,3)

Таблица 2.34

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	L	C	R
	T	(1,0)	(1,3)	(0,2)
	M	(0,2)	(2,1)	(3,1)
	B	(1,1)	(2,3)	(2,4)

шанных стратегиях. Покажите также, что любое внутреннее решение является решением системы, т.е. проверьте, что внутренние решения входят в решения системы. [Указание: заметим, что функцию ожидаемого выигрыша π_1 можно записать следующим образом:

$$\pi_1 = \pi_1(p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}) =$$

$$= p_1 L_1 + p_2 L_2 + \cdots + p_{m-1} L_{m-1} + L_0,$$

где каждое L_l — аффинная функция от q_j; т.е. для любого $l = 0, 1, \ldots, m-1$ имеем

$$L_l = \alpha_1^l q_1 + \alpha_2^l q_2 + \cdots + \alpha_{n-1}^l q_{n-1} + \alpha_0^l.$$

Аналогичная запись для π_2 имеет вид

$$\pi_2 = \pi_2(p_1, \ldots, p_{m-1}, q_1, \ldots, q_{n-1}) =$$

$$= q_1 M_1 + q_2 M_2 + \cdots + q_{n-1} M_{n-1} + M_0,$$

где для каждого $j = 0, 1, \ldots, n-1$ имеем

$$M_j = \beta_1^j p_1 + \beta_2^j p_2 + \cdots + \beta_{m-1}^j p_{m-1} + \beta_0^j.$$

Теперь заметим, что $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial p_l} = L_l$ и $\dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_j} = M_j$.]

12. Покажите, что профиль смешанных стратегий $\left(\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right)$ является единственным равновесием в смешанных стратегиях матричной игры из табл. 2.34.

2.5. Примеры игр двух лиц

В этом разделе мы рассмотрим некоторые хорошо известные матричные игры двух лиц, которые используются при описании интересных социальных феноменов. Примеры включают разнообразные игры, начиная от таких, где игрокам приходится координировать стратегии для достижения наилучших результатов, и заканчивая игрой «Петушиный бой», где интересы игроков прямо противоположны. Эти игры также проливают свет на многие ситуации, которые возникают в различного рода контекстах. Анализ этих игр со стратегической точки зрения расширяет наше понимание стимулов, которые побуждают индивидов предпринимать определенные действия, и приводит к более ясному пониманию того, как эти индивиды ведут себя в таких ситуациях. Игры имеют равновесия в чистых и/или смешанных стратегиях.

Начнем с изучения класса игр, изображенных в табл. 2.35, где $a > 0$ и $b > 0$. Подобные матричные игры принадлежат классу так называемых **координационных игр**. В координационной игре каждый игрок имеет две стратегии, и если они в состоянии согласовать свои действия, то окажутся в равновесии по Нэшу в чистых стратегиях. Если согласовать действия не удастся, то оба игрока будут иметь меньший выигрыш, чем могли бы получить в любом из равновесий в чистых стратегиях, (T,L) или (B,R). Координационные игры также имеют единственное равновесие в смешанных стратегиях:

$$\left(\left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right), \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)\right).$$

Довольно интересная игра, имеющая некоторые черты координационных игр, — это **охота на оленя**, предложенная великим французским философом Руссо. В этой матричной игре есть два игрока, которые обожают охоту и собираются поохотиться на оленя или на зайца. Каждый из охотников способен добыть зайца в одиночку; но для успешной охоты на оленя им необходимо делать это вместе. Если охотник попытается в одиночку завалить оленя, то, вероятнее всего, в этом не преуспеет. Выигрыш каждого игрока при успешной охоте на оленя много больше его выигрыша при его самостоятельной охоте на зайца. Одна из версий игры «Охота на оленя» представлена матрицей в табл. 2.36, где $a >> b > 0$, т.е., a много больше b.

Заметим, что, как и в случае координационных игр, в этой матричной игре существует два равновесия в чистых стратегиях, из которых равновесие (*Олень*, *Олень*) (равновесие координации на охоте на оленя) приносит наибольшие возможные выигрыши. Однако в отличие от случая координационных игр игроки могут с гарантией получать равновесный выигрыш (соответствующий второму равновесию (*Заяц*, *Заяц*) — равновесию координации на охоте на зайца), выбирая стратегию охоты на зайца. Заметим также, что игра «Охота на оленя» имеет единственное внутреннее равновесие в смешанных стратегиях: $\left(\left(\frac{b}{a}, \frac{a-b}{a}\right), \left(\frac{b}{a}, \frac{a-b}{a}\right)\right)$.

Таблица 2.35

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(a,a)	$(0,0)$
	B	$(0,0)$	(b,b)

Таблица 2.36

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Олень*	*Заяц*
	Олень	(a,a)	$(0,b)$
	Заяц	$(b,0)$	(b,b)

Следующей игрой, которую мы обсудим, является **петушиный бой**. Это матричная игра двух лиц, пытающихся выяснить, кто может успешнее отстоять свою позицию, настоять на своем. Таким образом, каждый игрок выбирает либо сдаться или не сдаваться, либо не моргать или моргнуть. Интересной особенностью игры является то, что если ни один из игроков не моргнет, это приведет к разногласию или конфликту, который может оказаться пагубным для обоих игроков. Матрица выигрышей игры «Петушиный бой» изображена в табл. 2.37, где, как и ранее, $a >> b > 0$. В этой матричной игре есть два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, (*Не моргать*, *Моргнуть*) и (*Моргнуть*, *Не моргать*), в каждом из которых один из игроков моргнет, а другой нет. Но выигрыш игрока, который моргнул, гораздо меньше выигрыша игрока, который не моргнул. Игра привлекает внимание к стимулам для выбора той или иной стратегии, которые в данном случае есть у игроков. Очевидно, что возникает много интересных вопросов, когда игроки сталкиваются с подобной ситуацией. Стоит ли игроку выбирать пассивную стратегию или выбрать стратегию более рискованную, но ведущую к более высокому результату, который может быть получен в предпочитаемом им равновесии? Заметим снова, что здесь также существует единственное внутреннее равновесие в смешанных стратегиях: $\left(\left(\frac{a-b}{2a-b},\frac{a}{2a-b}\right),\left(\frac{a-b}{2a-b},\frac{a}{2a-b}\right)\right)$.

Еще одна матричная игра, которую называют **семейный спор**, делает акцент на довольно обычную ситуацию. Это матричная игра, в которой два игрока получают высокие выигрыши при координации действий, но какой-то из игроков предпочитает одно из них, в то время как его оппонент предпочитает другое. У игроков есть выбор: либо пойти в кино, либо пообедать. Игрок 1 предпочитает пойти в кино, а игрок 2 — пообедать, но никто не хочет делать все это в одиночку. Матричная игра подобной ситуации изображена в табл. 2.38, где $a > b > 0$. В этой матричной игре также два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, и одно — равновесие в смешанных стратегиях (профиль смешанных стратегий имеет вид $\left(\left(\frac{b}{a+b},\frac{a}{a+b}\right),\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right)\right)$). Заметим также, что эта игра имеет сходство с координационными играми и отличается от них тем, что одно из равновесий в чистых стратегиях предпочитается одним игроком, а другое — соответственно другим. Название

Таблица 2.37

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Не моргать*	*Моргнуть*
	Не моргать	$(-a,-a)$	$(a,0)$
	Моргнуть	$(0,a)$	(b,b)

Таблица 2.38

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Кино*	*Обед*
	Кино	(a,b)	$(0,0)$
	Обед	$(0,0)$	(b,a)

происходит из обычной истории, лежащей в основе этого класса игр, в которой семейная пара решает, пойти в оперу или на бой быков, причем муж предпочитает бой быков.

Рассмотрим пример хорошо известной игры, в которую многие играли, — **камень-ножницы-бумага**. Каждый из двух игроков одновременно показывает при помощи руки один из трех знаков: ножницы (выставленные вперед два пальца), бумагу (ладонь с вытянутыми пальцами), камень (пальцы, сжатые в кулак). Ножницы побеждают бумагу («ножницы разрезают бумагу»), бумага побеждает камень («бумага накрывает или заворачивает камень»); камень затупляет (ломает) ножницы. Тот, кто может «разрезать», «накрыть», или «сломать» другого игрока, выигрывает одну единицу, проигравший теряет одну единицу. Если оба игрока покажут одно и то же, каждый получит ноль. Матрица данной игры представлена в табл. 2.39. Игра не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях, но имеет равновесие в смешанных стратегиях.

Упражнения

1. **(«Орлянка»)** Рассмотрим следующую простую игру двух участников, известную как «орлянка». Каждый игрок прячет от другого в ладони монетку в один цент (P) либо в 5 центов (N). После чего они одновременно раскрывают ладони, показывая монетку, и если монетки окажутся одинаковыми, игрок 2 получает 1 долл. от игрока 1. Если же монетки окажутся разными, игрок 2 платит 1 долл. игроку 1. Матричная форма игры представлена в табл. 2.40.
   (a) Покажите, что в игре нет равновесий по Нэшу.
   (b) Вычислите функции ожидаемых выигрышей игроков.
   [Ответ: $\pi_1 = -4p_1q_1 + 2p_1 + 2q_1 - 1$ и $\pi_2 = 4p_1q_1 - 2p_1 - 2q_1 + 1$.]
   (c) Покажите, что эта стратегическая игра имеет единственное равновесие в смешанных стратегиях.
   [Ответ: $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$.]
   (d) Каков ожидаемый выигрыш каждого участника в этом равновесии в смешанных стратегиях?
   [Ответ: нуль!]

Таблица 2.39

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	*Камень*	*Бумага*	*Ножницы*
	Камень	(0,0)	(−1,1)	(1,−1)
	Бумага	(1,−1)	(0,0)	(−1,1)
	Ножницы	(−1,1)	(1,−1)	(0,0)

Таблица 2.40

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	P	N
	P	(−1,1)	(1,−1)
	N	(1,−1)	(−1,1)

Таблица 2.41

	Студент		
Профессор	Стратегия	*Работать*	*Не работать*
	Работать	(3,3)	(1,1)
	Не работать	(4,2)	(2,4)

2. Найдите равновесия в смешанных стратегиях для следующих игр двух лиц: «Игра координации» и «Охота на оленя».
3. Найдите равновесия в смешанных стратегиях игр «Петушиный бой» и «Семейный спор».
4. Найдите равновесие в смешанных стратегиях игры «Камень-ножницы-бумага». Имеет ли она единственное равновесие в смешанных стратегиях?
5. Рассмотрим другую игру двух участников, игру между студентом и профессором. У профессора есть выбор, работать или не работать. Аналогично студент может работать или не работать. Матрица выигрышей задана в табл. 2.41.
   (a) Каковы равновесия по Нэшу в чистых стратегиях?
   (b) Есть ли в игре равновесие в смешанных стратегиях? Если да, найдите его.

2.6. Равновесие по Нэшу и функции наилучших ответов

Существует альтернативный подход к определению равновесия по Нэшу: в терминах «наилучших ответов» игроков. Как уже отмечалось ранее, игрок не может определить свою наилучшую стратегию, не имея представления о стратегиях других игроков, поскольку его выигрыш зависит от стратегий других игроков. Однако если на мгновение представить, что один из игроков, например игрок i, знает о том, что все остальные собираются выбрать профиль s_{-i}, то он будет действовать так, чтобы выбор s_i максимизировал его выигрыш при условии, что все остальные участники выбирают профиль стратегий s_{-i}. Иначе говоря, при заданном s_{-i} игрок i «отреагирует» выбором стратегии s_i, такой что

$$u_i(s_{-i}, s_i) = \max_{a_i \in S_i} u_i(s_{-i}, a_i).$$

Такая стратегия носит название **наилучшего ответа** (или **оптимального отклика**, или **наилучшей реакции**) игрока i на профиль стратегий других игроков s_{-i}. Например, в матричной игре из примера 2.11 (см. табл. 2.42) наилучший ответ игрока 2 на стратегию M игрока 1 — это стратегия L, а наилучший ответ игрока 1 на стратегию L игрока 2 — это стратегия T.

Набор всех наилучших ответов игрока i на s_{-i} обозначается через $B_i(s_{-i})$. То есть

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_{-i}, s_i) = \max_{a_i \in S_i} u_i(s_{-i}, a_i)\} =$$
$$= \{s_i \in S_i : u_i(s_{-i}, s_i) \geq u_i(s_{-i}, a_i) \text{ для всех } a_i \in S_i\}.$$

Таблица 2.42

		Игрок 2		
	Стратегия	L	C	R
Игрок 1	T	(1,0)	(1,3)	(3,0)
	M	(0,2)	(0,1)	(3,0)
	B	(0,2)	(2,4)	(5,3)

Должно быть понятно, что множество наилучших откликов $B_i(s_{-i})$ может быть пустым или может содержать более одной стратегии игрока i.

Важно иметь в виду, что профиль стратегий $s = (s_1, \ldots, s_n)$ является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда каждая s_i является наилучшим ответом на s_{-i} для каждого игрока i. Другими словами, имеем следующую важную характеризацию равновесий по Нэшу.

Теорема 2.18 (характеризация равновесий по Нэшу). *Профиль стратегий $s = (s_1, \ldots, s_n)$ стратегической игры n лиц является равновесием по Нэшу в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда для каждого игрока i стратегия s_i является наилучшим откликом на профиль стратегий s_{-i} остальных игроков.*

Этот фундаментальный результат используется для установления существования равновесий по Нэшу в стратегических играх общего вида. Он используется таким образом. Во-первых, строится **отображение наилучшего ответа (наилучшей реакции** или **оптимального отклика)** $B : S_1 \times \cdots \times S_n \twoheadrightarrow S_1 \times \cdots \times S_n$ по правилу

$$B(s) = B_1(s_{-1}) \times \cdots \times B_n(s_{-n}).$$

Причина, по которой его называют отображением, а не функцией, в том, что значения $B(s)$ являются подмножествами $S_1 \times \cdots \times S_n$ (возможно, пустыми), и могут содержать более одного элемента. На тот факт, что значения B-подмножества множества $S_1 \times \cdots \times S_n$, также принято указывать двойной стрелкой. С учетом этого заметим, что профиль стратегий $s = (s_1, \ldots, s_n)$ является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда $s \in B(s)$.

Профили стратегий s, которые удовлетворяют условию $s \in B(s)$, называются **неподвижными точками** B. Другими словами, мы получаем новую формулировку теоремы 2.18, которая является основой для многих исследователей в теории игр.

Теорема 2.19. *Профиль стратегий в стратегической игре n лиц является равновесием по Нэшу в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда он является неподвижной точкой отображения наилучших ответов*[1].

Иначе говоря, из теоремы 2.19 следует, что если отображение наилучших ответов не имеет неподвижных точек, то игра не имеет равновесий по Нэшу

[1] Данный результат — представительный образец метода, который используется при доказательстве существования «равновесий» в экономических моделях общего вида. Он представляет собой установление существования неподвижной точки определенного отображения — такого как отображение наилучших ответов, избыточного спроса и т.д. Для установления подобных результатов необходимо владеть достаточно продвинутым математическим аппаратом.

в чистых стратегиях. В общем случае мы будем налагать ограничения на множества стратегий и функции выигрыша, которые будут гарантировать существование неподвижной точки отображения наилучших ответов. В гл. 9 представлены соответствующие доказательства.

В завершение раздела рассмотрим пример на использование отображений наилучших ответов для поиска равновесий по Нэшу в чистых стратегиях. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = [0,1]$ и функциями выигрышей

$$u_1(x,y) = \left(y - \frac{1}{2}\right)x \quad \text{и} \quad u_2(x,y) = (x-y)^2 .$$

Путем прямых вычислений находим, что отображения наилучших откликов $B_1 : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ и $B_2 : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ двух игроков имеют вид

$$B_1(y) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } 0 \le y < \frac{1}{2}, \\ [0,1], & \text{если } y = \frac{1}{2}, \\ \{1\}, & \text{если } \frac{1}{2} < y \le 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad B_2(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{если } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ \{0,1\}, & \text{если } x = \frac{1}{2}, \\ \{0\}, & \text{если } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

По теореме 2.19 равновесные по Нэшу профили стратегий (x,y) удовлетворяют соотношениям $x \in B_1(y)$ и $y \in B_2(x)$.

Пусть профиль стратегий (x,y) удовлетворяет соотношениям $x \in B_1(y)$ и $y \in B_2(x)$. Из выражения для $B_2(x)$ следует, что либо $y = 0$, либо $y = 1$.

Если $y = 0$, то из $x \in B_1(0) = \{0\}$ вытекает $x = 0$, и в этом случае мы имеем $y \in B_2(0) = \{1\}$, или $y = 1$, получаем противоречие. Аналогично, если $y = 1$,

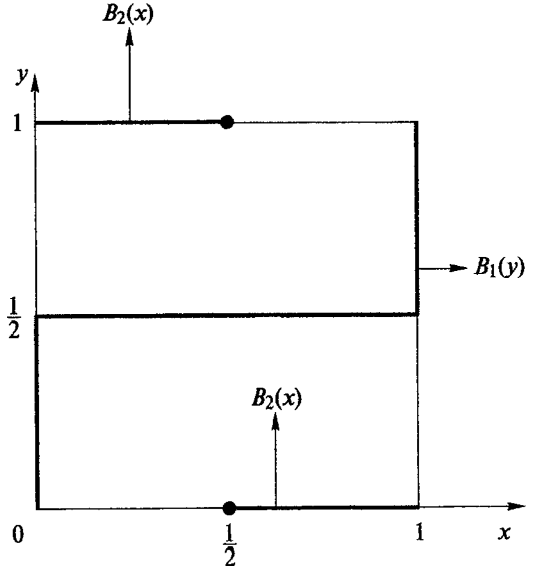


Рис. 2.2. Отображение наилучшего отклика игроков 1 и 2

то $x \in B_1(1) = \{1\}$ дает $x = 1$, и в этом случае имеем $y \in B_2(1) = \{0\}$, противоречие.

Это также очевидно следует из графиков отображений наилучших ответов игроков, изображенных на рис. 2.2. Заметим, что эти два отображения не имеют точек пересечения, следовательно, не существует профиля стратегий (x,y), который удовлетворял бы соотношениям $x \in B_1(y)$ и $y \in B_2(x)$, поэтому стратегическая игра не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях.

Упражнения

1. Найдите отображение наилучших ответов игроков в матричной игре из табл. 2.43.
2. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = [0,1]$ и функциями выигрышей
$$u_1(x,y) = \left(y - \frac{1}{2}\right)x \text{ и } u_2(x,y) = (x-y)^2.$$
Покажите, что отображения наилучших ответов двух игроков, $B_1 : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ и $B_2 : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$, имеют вид
$$B_1(y) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } 0 \le y < \frac{1}{2}, \\ [0,1], & \text{если } y = \frac{1}{2}, \\ \{1\}, & \text{если } \frac{1}{2} < y \le 1 \end{cases} \quad \text{и } B_2(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{если } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ \{0,1\}, & \text{если } x = \frac{1}{2}, \\ \{0\}, & \text{если } \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$
3. Рассмотрим стратегическую игру двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = [0,1]$ и функциями выигрышей
$$u_1(x,y) = x + y \text{ и } u_2(x,y) = xy.$$
Постройте отображения наилучших ответов игроков.
4. В стратегической игре двух лиц с множествами стратегий $S_1 = S_2 = [0,1]$ отображения наилучших ответов игроков
$$B_1(y) = \{x \in [0,1] : 1 - 2y \le x \le 1 - y\},$$
$$B_2(x) = \left\{y \in [0,1] : x \le y \le \frac{1}{2}\right\}.$$
Найдите равновесия по Нэшу.

Таблица 2.43

	Столбцевой игрок				
Строчный игрок	Стратегия	1	2	3	4
	1	(1,2)	(−1,1)	(0,2)	(3,3)
	2	(3,2)	(2,−2)	(0,1)	(1,0)
	3	(1,1)	(0,0)	(−3,0)	(1,−1)
	4	(2,3)	(1,2)	(−2,2)	(2,1)
	5	(0,2)	(1,−1)	(2,3)	(2,0)

5. Рассмотрим игру с нулевой суммой с матрицей выигрышей первого игрока
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
(Определение игры с нулевой суммой дано в упражнении 7 раздела 2.1.) Если игрок 1 играет смешанную стратегию $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$, то каков наилучший ответ в смешанных стратегиях игрока 2?
6. Докажите теорему 2.18.

2.7. Игры с неполной информацией

Во всех рассмотренных нами ранее играх предполагалось, что игрок знает функцию полезности или функцию выигрыша остальных игроков. Хотя в некоторых ситуациях это может быть правдоподобным допущением, во многих других, однако, таковым не является. В действительности чаще всего игрок может знать лишь распределение возможных выигрышей другого игрока. Так, фирма может знать только диапазон возможных издержек других фирм в отрасли. Участник аукциона имеет только некоторое представление о действительной величине реальных оценок других участников. В дилемме заключенного один из игроков может не знать в точности, имеет ли другой игрок такие выигрыши, которые склонят его к выбору *Доносить*, или же другой игрок получит большую полезность, храня молчание из-за чувства «верности» партнеру. Ясно, что во всех этих случаях концепция равновесия должна быть модифицирована, поскольку отклик игрока должен учитывать тот факт, что отклики других игроков будут определяться их точными выигрышами. Часто это может изменить равновесие и, следовательно, предсказание исхода игры.

Рассмотрим следующий вариант игры *«Петушиный бой»*, в которой два игрока вовлечены в противостояние и кто-то из них должен уступить. В то время как относительно игрока 1 известно, что он рационален и заботится только о своих выигрышах при том или ином исходе и не сильно тревожится насчет того, моргнул он или нет, есть некоторая неопределенность относительно *типа* игрока 2. Вполне возможно, что игрок 2 заботится не только о финальном исходе, но также получает большой негативный выигрыш, если моргнет. Матрица выигрышей в случае, когда игрок 2 является игроком первого *типа*, изображена в табл. 2.44. В случае, когда игрок 2 второго *типа* и получает огромный негативный выигрыш, если моргнет, матрица выигрышей может быть чем-то вроде матрицы выигрышей из табл. 2.45. Заметим, что выигрыш игрока 1 при четырех возможных исходах игры один и тот же в обоих случаях, в то время как выигрыш игрока 2 меняется в зависимости от его *типа*. Игрок 2 знает, какого он типа, но игроку 1 его тип неизвестен; в этом случае только игрок 1 сталкивается с неопределенностью. Игрок 2 имеет *частную информацию* о своем типе.

Таблица 2.44

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Не моргать*	*Моргнуть*
	Не моргать	(–100,–100)	(100,0)
	Моргнуть	(0,100)	(10,10)

Таблица 2.45

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Не моргать*	*Моргнуть*
	Не моргать	(–100,–10)	(100,–50)
	Моргнуть	(0,100)	(10,–10)

В соответствии с матрицей выигрышей из табл. 2.45 оба игрока понесут большие потери, если никто из них не моргнет, однако потери представляются обоим игрокам асимметричными, поскольку часть потерь игрока 2 компенсируется тем фактом, что он не моргнул. Аналогичным образом игроки смогут избежать огромных потерь, если оба моргнут, но опять же обе партии видят эту ситуацию асимметрично, так как выигрыш игрока 2 уменьшается, в силу того что он моргнул. Предположим, что игрок 1 ожидает, что вероятность того, что игрок 2 первого типа, равна 1/3, и, следовательно, вероятность того, что он второго типа, равна 2/3. Игрок 1 осознает, что если он выберет стратегию *Не моргать*, то игрок 2 выберет стратегию *Моргнуть* в случае, если он первого типа, и выберет стратегию *Не моргать*, если он второго типа. С точки зрения игрока 1 это значит, что игрок 2 будет выбирать *Моргнуть* с вероятностью 1/3 и *Не моргать* с вероятностью 2/3. Таким образом, ожидаемый выигрыш игрока 1 составляет

$$Eu_1(\textit{Не моргать}) = \frac{1}{3}100 + \frac{2}{3}(-100) = -33\frac{1}{3}.$$

Если игрок 1 выберет *Моргнуть*, то игрок 2 выберет *Не моргать* вне зависимости от своего типа. Выигрыш игрока 1 в этом случае равен

$$Eu_1(\textit{Моргнуть}) = 0.$$

Следовательно, игрок 1 выберет *Моргнуть*, и тогда игрок 2 выберет *Не моргать* вне зависимости от своего типа. Наиболее правдоподобным представляется решение игры, при котором игрок 1 выбирает *Моргнуть*, а игрок 2 любого типа выбирает *Не моргать*. У этого равновесия интересная особенность: даже если игрок 2 первого типа, исход игры, при котором игрок 1 выбирает *Моргнуть*, — наиболее правдоподобный. И конечно, исключительно в силу того, что игроку 1 тип игрока 2 не известен в точности.

Рассмотренная нами игра является примером игр, где один из участников обладает частной информацией о своих выигрышах при различных исходах, или, иначе говоря, игрок 1 не знает в точности тип игрока 2. Игры, в которых игроки не имеют полной информации о выигрышах других игроков, называются **играми с неполной информацией**.

Определение 2.20. *Игра G в стратегической форме с множествами стратегий S_i игроков $i = 1,\ldots,n$ и функциями выигрышей $u_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to R$ называется* ***игрой с неполной информацией****, если существует как минимум один игрок i, который не знает функцию выигрыша u_j некоторого игрока $j \neq i$.*

Таким образом, рассмотренная нами версия игры «Петушиный бой» является игрой с неполной информацией, поскольку игрок 1 не знает функции выигрыша игрока 2. В большинстве игр с неполной информацией, хотя игрок и не знает точной функции выигрыша некоторого игрока, обычно у него есть представление о распределении возможных функций выигрышей. Это как раз и имеет место в проанализированной нами версии (с неполной информацией) игры «Петушиный бой».

Любое решение игры с неполной информацией должно принимать во внимание тот факт, что игроки обусловливают выбор стратегии своей частной информацией. Так, в игре «Петушиный бой», если игрок 2 первого типа, он будет соответствующим образом реагировать на стратегии, выбранные игроком 1; если игрок 2 второго типа, то также будет выбирать в зависимости от своего типа. Таким образом, выигрыш игрока 1 от выбранной им стратегии является ожидаемым выигрышем, порожденным откликами различных типов игрока 2 на его стратегию. Это имеет место и в общем случае.

В общем случае стратегической игры с неполной информацией имеется n игроков, каждый из которых может принадлежать к одному из нескольких типов. Пусть T_i (индексное) множество типов игрока i. (Общий) элемент множества T_i будем обозначать через t_i. Индексное множество типов всех игроков задается множеством $T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$, а (общий) элемент T будем обозначать через $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$. В игре с неполной информацией игроки обычно знают распределение вероятностей на T, как и свой тип. Будем обозначать распределение вероятностей на T через μ и условное распределение на T при условии, что $t_i = t_i'$, через $\mu(\cdot|t_i')$. Таким образом, если игрок 1 знает свой тип t_i', он также знает, что вероятность того, что игроки имеют тип t, равна $\mu(t|t_i')$.

Функция выигрыша игрока i типа t_i обозначается как $u_i(\cdot, t_i) : S \to R$. Заметим, что функция выигрыша игрока i зависит от его типа. Следовательно, если игрок i типа t_i' и игроки выбрали комбинацию стратегий $s \in S$, то выигрыш игрока i задается как $u_i(s, t_i')$. В то время как в стратегической игре с полной информацией стратегия игрока i — это элемент множества S_i, в игре с неполной информацией стратегия игрока i — это функция $s_i : T_i \to S_i$, так как выбор игрока зависит от его типа t_i. Таким образом, если игрок i выбирает элемент $s_i \in S_i$, его выигрыш задается как $u_i(s_i, (s_j(t_j))_{j \neq i}, t_i)$, когда его тип t_i, другие игроки типа $(t_j)_{j \neq i}$ и используют стратегии $(s_j(t_j))_{j \neq i}$. Следовательно, когда игрок i выбирает $s_i \in S_i$, игроки $j \neq i$ выбирают стратегии $s_j(\cdot)$, а игрок i типа t_i', его ожидаемый выигрыш составляет

$$Eu_i(s_i, (s_j(t_j))_{j \neq i}, t_i') = \sum_{t \in T} \mu(t|t_i') u_i(s_i, (s_j(t_j))_{j \neq i}, t_i').$$

Принимая во внимание ту информацию, которую игрок i имеет относительно типов других игроков и своем собственном типе, ожидаемый выигрыш показывает выигрыш, который он ожидает получить, когда выбирает стратегию s_i. При заданных стратегиях $s_j(\cdot)$ игроков $j \neq i$ игрок i выберет s_i так, чтобы максимизировать этот ожидаемый выигрыш. Каждый игрок сделает то же самое. Это приводит нас к концепции равновесия, в которой игрок максимизирует соответствующий ожидаемый выигрыш при заданных стратегиях остальных игроков и их частной информации.

Определение 2.21. *Набор стратегий* $(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_n^*(\cdot))$ *стратегической игры с неполной информацией называется* ***равновесием Байеса — Нэша***, *если для любого* $i = 1, \ldots, n$ *неравенство*

$$Eu_i(s_i^*(t_i'), (s_j^*(t_j))_{j \neq i}, t_i') \geq Eu_i(s_i, (s_j^*(t_j))_{j \neq i}, t_i')$$

выполняется при любом $s_i \in S_i$ *и* $t_i' \in T_i$.

Следует сразу же отметить, что равновесие Байеса — Нэша является равновесием в том смысле, что оно скорее всего будет выбрано игроками, принимая во внимание, что им известно в тот момент, когда игра разыгрывается (на момент, когда соответствующие характеристики не известны точно, являются вероятностными). Вполне возможно, что исход, который реализуется при выборе игроками своих стратегий Байеса — Нэша, не окажется равновесным исходом реальной игры.

Пример 2.22. Это игра, где два участника оказываются в конфликтной ситуации, которую они могут разрешить схваткой или путем переговоров. Игрок 1 не против при необходимости вступить в драку, но осознает, что выигрыши окажутся больше, если удастся договориться. Игрок 1, однако, не знает типа игрока 2, который может быть либо «ястребом», получая при этом максимальный выигрыш от участия в драке, либо «голубем», питая неприязнь к драке и получая более высокий выигрыш при переговорах. Если игрок 2 является «ястребом», то матрица выигрышей имеет вид матрицы из табл. 2.46. Если же он является «голубем», то его выигрыши оказываются отличными от тех, которые характерны для «ястреба», поскольку в этом случае он отдает предпочтение переговорам. Матрица выигрышей в этом случае представлена в табл. 2.47. Заметим прежде всего, что соответствующие две игры имеют два различных равновесия по Нэшу в чистых стратегиях: (*Схватка*, *Схватка*) в первом случае и (*Переговоры*, *Переговоры*) во втором. Рассмотрим ситуацию, при которой игрок 1 ожидает, что имеет дело с «ястребом» или «голубем» с вероятностью 1/2. В этом случае ожидаемый выигрыш игрока 1 при выборе стратегии *Схватка* равен

$$Eu_1(\textit{Схватка}) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 2 = 1, \tag{2.5}$$

так как игрок 2 выберет *Схватка*, если является «ястребом», и *Переговоры*, если окажется «голубем». Если игрок 1 выберет стратегию *Переговоры*, то его ожидаемый выигрыш составит

$$Eu_1(\textit{Переговоры}) = \frac{1}{2} \times (-6) + \frac{1}{2} \times 6 = 0, \tag{2.6}$$

Таблица 2.46

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Схватка*	*Переговоры*
	Схватка	(0,0)	(2,–6)
	Переговоры	(–6,6)	(6,1)

Таблица 2.47

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Схватка*	*Переговоры*
	Схватка	(0,–1)	(2,0)
	Переговоры	(–6,0)	(6,6)

так как игрок 2 выберет *Схватка*, если является «ястребом», и *Переговоры*, если окажется «голубем». Из (2.5) и (2.6) следует, что *Схватка* — наилучшая стратегия игрока 1, принимая во внимание, что ему известно о типе игрока 2. В свою очередь игрок 2 выберет *Схватка*, если является «ястребом», и *Переговоры*, если окажется «голубем». Таким образом, равновесие Байеса — Нэша имеет вид

(*Схватка*, *Схватка*), если игрок 2 — «ястреб»,

(*Схватка*, *Переговоры*), если игрок 2 — «голубь».

Отметим, что если игрок 2 окажется «голубем», то равновесие Байеса — Нэша (*Схватка*, *Переговоры*) не будет равновесным исходом игры в ситуации, когда игрок 1 точно знает, что игрок 2 «голубь». ■

В рассмотренных примерах удавалось довольно легко найти равновесие Байеса — Нэша. Конечно, стоит задаться вопросом: а всегда ли можно найти такое равновесие. Ответ состоит в том, что если множество типов T_i каждого игрока $i = 1,\ldots,n$ конечно и множество стратегий S_i каждого игрока конечно, то равновесие Байеса — Нэша в смешанных стратегиях всегда существует.

Теорема 2.23. *Игра в стратегической форме с неполной информацией G с множествами стратегий S_i игроков $i = 1,\ldots,n$ и функциями выигрышей $u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \times T_i \to R$ имеет равновесие Байеса — Нэша в смешанных стратегиях, если для всех $i = 1,\ldots,n$ множества стратегий S_i и множества типов T_i конечны.*

Доказательство теоремы будет рассмотрено в гл. 9. Оно проводится знакомым нам способом, который показывает, что отображения наилучших ответов игроков имеют неподвижную точку. Стоит также отметить, что результат гарантирует существование равновесия Байеса — Нэша только *в смешанных стратегиях.*

Упражнения

1. Каково равновесие Байеса — Нэша в игре «Петушиный бой» с неполной информацией, где игрок 1 знает, что игрок 2 относится к первому либо ко второму типу с вероятностью 1/2?

2. Найдите равновесие Байеса — Нэша в игре из примера 2.22, где игрок 1 знает, что игрок 2 может оказаться «ястребом» с вероятностью 2/3. Отличается ли оно от того, что было получено в примере? Поясните.
3. Снова рассмотрим версию с неполной информацией игры «Петушиный бой», только теперь не только игрок 1 знает о том, что игрок 2 может быть одного из двух типов, но и игрок 2 знает лишь то, что игрок 1 может быть либо первого, либо второго типа. Предположим, что оба игрока ожидают, что другой игрок первого или второго типа с вероятностью 1/2.
   (a) Запишите четыре матрицы выигрышей для этой игры с неполной информацией.
   (b) Каковы ожидаемые выигрыши игроков для каждой их стратегии?
   (c) Найдите равновесие Байеса — Нэша.
4. Рассмотрим игру с неполной информацией из примера 2.22, в которой игрок 1 знает, что игрок 2 является либо «ястребом», либо «голубем» с вероятностью 1/2, и аналогично игрок 2 знает, что игрок 1 либо «ястреб», либо «голубь» с вероятностью 1/2.
   (a) Запишите четыре матрицы выигрышей для этой игры с неполной информацией.
   (b) Каковы ожидаемые выигрыши игроков для каждой их стратегии?
   (c) Найдите равновесие Байеса — Нэша.
5. Рассмотрим следующую *игру входа*. Новичок на рассматриваемом рынка — фирма (E) — собирается войти на рынок, в котором имеется единственная действующая фирма (I). Если фирма E входит на рынок, то фирма I может выбрать либо стратегию *Смириться*, либо *Бороться*. Фирма E может выбрать *Входить* или *Не входить*. Фирма E знает о том, что действующая фирма может быть либо «слабой» (не захочет вступить в борьбу в случае входа), либо «сильной» (скорее всего захочет вступить в борьбу в случае входа). Матрицы выигрышей для двух типов фирмы I заданы в табл. 2.48 и 2.49.
   (a) Каков ожидаемый выигрыш фирмы E для каждой возможной стратегии, если она знает о том, что фирма I может быть «слабой» или «сильной» с вероятностью 1/2?

Таблица 2.48. Слабая

	Фирма E		
Фирма I	Стратегия	*Входить*	*Не входить*
	Бороться	(−1,−3)	(2,0)
	Смириться	(1,2)	(2,0)

Таблица 2.49. Сильная

	Фирма E		
Фирма I	Стратегия	*Входить*	*Не входить*
	Бороться	(1,−3)	(2,0)
	Смириться	(0,2)	(2,0)

(b) Найдите равновесие Байеса — Нэша. Какой выбор сделает фирма *E*?

(c) Пусть p обозначает вероятность того, что фирма I окажется сильной. При каких значениях p фирма E сделает такой же выбор, как в (b)? Существуют ли значения p, при которых выбор фирмы E будет другим?

6. Рассмотрим стратегическую игру с двумя участниками с множествами стратегий каждого игрока — множеством действительных чисел R. Стратегию игрока 1 обозначим через x, а стратегию игрока 2 — через y. Это игра с неполной информацией, следовательно, функции выигрышей игроков зависят от их типов. Функция выигрыша игрока 1 имеет вид

$$u_1(x,y,t_1) = xy - x^2 - t_1 x,$$

где $t_1 \in T_1 = \{-1,0,1\}$. Функция выигрыша игрока 2 задается как

$$u_2(x,y,t_2) = xy - y^2 - t_2 y,$$

где $t_2 \in T_2 = \{-1,0,1\}$.

(a) Пусть совместное распределение вероятностей типов $\mu(t_1,t_2)$ таково, что вероятности пар любых двух типов равны, т.е. $\mu(t_1,t_2) = \mu(t_1',t_2')$ для любых $t_i \neq t_i'$, $i = 1,2$. Запишите ожидаемые выигрыши игроков в предположении, что каждый из них знает свой тип.

(b) Найдите равновесие Байеса — Нэша. Каковы возможные исходы игры?

2.8. Приложения

Теперь обратимся к примерам игр в стратегической форме из экономики и политической науки. Одна из первых экономических игр была изучена в XVIII веке французским математиком Августином Курно[1]. Его решение игры для двух участников предвосхитило равновесие по Нэшу почти на сто лет.

Модель дуополии Курно описывает, каким образом две фирмы, производящие в точности тот же самый товар, принимают решение о своем объеме выпуска. Представленная модель во многом является упрощенной, однако демонстрирует ряд существенных особенностей конкуренции между фирмами и стала основой *теории отраслевых рынков*. Разновидности модели включают случаи, когда вместо двух фирм рассматриваются n фирм, или в которых фирмы конкурируют по ценам, а не по объемам производства (модель Бертрана, обсуждается ниже).

Пример 2.24 (модель дуополии Курно). Модель представляет собой стратегическую игру, разыгрываемую между двумя фирмами; будем обозначать

[1] Антуан-Августин Курно (1801–1877) — французский математик и философ науки. В его знаменитой книге «Recher chessur le Principles Mathematique de la Theorie de a Richesses» (Paris, 1838), впервые была сформулирована задача формирования цен на рынке двух фирм. Его считают основателем современной математической экономики.

их фирма 1 и фирма 2. Фирмы производят одинаковые товары, причем фирма 1 выпускает q_1 единиц товара, а фирма 2 — q_2 единиц. Суммарное производство окажется равным $q_1 + q_2 = q$.

Пусть $p(q) = A - q$ — цена единицы товара на рынке, где A — фиксированное число. Предположим, что общие издержки фирмы производства q_i единиц товара составляют $c_i q_i$, где c_i — положительные константы.

Описанная экономическая модель может быть представлена в виде игры в стратегической форме, в которой:

- участвуют два игрока — две фирмы;
- множество стратегий каждого игрока — множество положительного объемов выпуска, т.е. $(0,\infty)$;
- функция выигрыша фирмы i — ее функция прибыли

$$\pi_i(q_1,q_2) = (A - q_1 - q_2)q_i - c_i q_i.$$

Фирмы сталкиваются с задачей определения объемов производства с целью максимизировать прибыль — обратим внимание, что прибыль каждой фирмы зависит от выпуска другой фирмы. Поскольку мы полагаем, что фирмы выбирают объемы производства одновременно и независимо, рационально ожидать, что решением будет равновесие по Нэшу.

Пользуясь критерием равновесия по Нэшу, найдем его. С этой целью заметим, что

$$\pi_1(q_1,q_2) = (A - q_1 - q_2)q_1 - c_1 q_1 = -(q_1)^2 + (-q_2 + A - c_1)q_1$$

и

$$\pi_2(q_1,q_2) = (A - q_1 - q_2)q_2 - c_2 q_2 = -(q_2)^2 + (-q_1 + A - c_2)q_2.$$

Согласно критерию, равновесие по Нэшу, (q_1^*,q_2^*), — среди решений системы уравнений

$$\frac{\partial \pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = -2q_1 - q_2 + A - c_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \pi_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = -q_1 - 2q_2 + A - c_2 = 0,$$

или, после преобразования,

$$2q_1 + q_2 = A - c_1,$$

$$q_1 + 2q_2 = A - c_2.$$

Решая систему линейных уравнений, получим

$$q_1^* = \frac{A + c_2 - 2c_1}{3} \text{ и } q_2^* = \frac{A + c_1 - 2c_2}{3}.$$

Поскольку множества стратегий представляют собой открытые интервалы, это единственно возможное равновесие по Нэшу. Вычислив частные производные второго порядка, видим, что

$$\frac{\partial^2 \pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 \pi_2(q_1,q_2)}{\partial q_2^2} = -2 < 0,$$

следовательно, согласно критерию, (q_1^*, q_2^*) – единственное равновесие по Нэшу.

Предполагая, что A достаточно велико, так что $q_1^* > 0$ и $q_2^* > 0$, равновесие по Нэшу (q_1^*, q_2^*) должно быть единственным приемлемым решением модели дуополии Курно. ■

Следующий пример имеет дело с тем же рынком дуополии, где две фирмы продают один и тот же товар, однако теперь они участвуют в ценовой игре, выбирая цены, а не объемы производства. Это модель дуополии Бертрана[1]. Естественно встает вопрос, имеет ли это какое-то значение, ведь анализируется тот же тип рынка. Из примера станет ясно, что различие между прогнозами по двум моделям значительно. Модель дуополии Курно и модель дуополии Бертрана иллюстрируют тот факт, что способ разыгрывания важен, поскольку эти разные способы приводят к различным исходам, несмотря на одинаковые базовые условия. На самом деле может случиться, как мы увидим в следующем примере, что равновесия по Нэшу (в модели Бертрана) может не быть.

Пример 2.25 (модель ценообразования Бертрана[2]). Подобно модели дуополии Курно, это пример рынка, где две фирмы, 1 и 2, продают идентичный продукт. Однако в отличие от модели дуополии Курно, фирмы конкурируют посредством выбора цен, а не объемов. Для упрощения наших рассуждений отметим, что если говорится о фирме i, то под индексом j будем понимать «дополняющую» ее фирму. То есть если $i = 1$, то $j = 2$; и если $i = 2$, то $j = 1$.

Напомним, что общие издержки фирмы i производства q_i единиц продукции равны $c_i q_i$, где c_i (предельные издержки фирмы i, т.е. издержки производства единицы продукта) — положительная константа. Каждая фирма i продает продукт по цене p_i, и покупатели покупают только у той фирмы, которая предлагает более низкую цену. Если же обе фирмы назначат одинаковую цену, то каждая из них получает половину всего рынка. Фирмы продают один и тот же товар на рынке с функцией спроса

$$q(p) = A - p \text{ при } 0 \le p \le A.$$

Условие экономической целесообразности деятельности фирм требует, чтобы $0 < c_i < A$ для каждой фирмы i.

Таким образом, количество товара, проданного фирмой i, определяется как

$$q_i(p_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_i > p_j, \\ \frac{1}{2}(A - p), & \text{если } p_i = p_j = p, \\ A - p_i, & \text{если } p_i < p_j. \end{cases}$$

[1] Джозеф Луи Франсуа Бертран (1822–1900) — выдающийся французский математик. Хотя он крайне критически относился к работам известных современных ему экономистов-теоретиков (таких как Леон Мари Эспри Вальрас (1834–1910)) и отвергал модель дуополии Курно, он «переработал» модель Курно, используя цены, а не объемы, в качестве стратегий.

[2] Игра также известна под названием **игра дуополии Бертрана**.

Следовательно, рыночная среда, где конкурируют две фирмы, может быть представлена стратегической игрой двух лиц со следующими характеристиками.

(1) Участниками игры являются фирмы.

(2) Множества стратегий S_i каждой фирмы i — это множество всех доступных цен, т.е., $S_i = [0, A]$.

(3) Функция выигрыша каждой фирмы i — это ее функция прибыли, которая задается как

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_i > p_j, \\ \frac{1}{2}(A - p)(p_i - c_i), & \text{если } p_i = p_j = p, \\ (A - p_i)(p_i - c_i), & \text{если } p_i < p_j. \end{cases}$$

Каждая фирма хочет максимизировать прибыль путем установления оптимальной цены при данной цене другой фирмы. Таким образом, мы ищем равновесие по Нэшу данной игры. Докажем следующие утверждения.

- *Если $c_1 = c_2$, то (c_1, c_2) (т.е. $p_1^* = p_2^* = c_1 = c_2$) образует равновесие по Нэшу.*
- *Если $c_1 > c_2$, то имеем следующее*[1].

(a) *Если $c_1 \geq \frac{A + c_2}{2}$, то $\left(c_1, \frac{A + c_2}{2}\right)$ — равновесие по Нэшу.*

(b) *Если $c_1 < \frac{A + c_2}{2}$, то равновесий по Нэшу нет.*

Случай I. $c_1 = c_2 = c$.

В этом случае профиль стратегий $c = (c, c)$ — равновесие по Нэшу. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для любой фирмы i и любого $p_i \in S_i$

$$\pi_i(c_{-i}, p_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_i \geq c, \\ (A - p_i)(p_i - c), & \text{если } p_i < c \end{cases}$$

$$\leq \pi_i(c_{-i}, c).$$

Случай II. $c_1 > c_2$.

Заметим, что существует две возможности: либо (a) $c_1 \geq \frac{A + c_2}{2}$, либо (b) $c_1 < \frac{A + c_2}{2}$.

Перед тем как перейти к рассмотрению этих возможностей, обратимся к следующему результату, который будет неоднократно использован в будущем.

(*) *Если $0 < c < A$, то квадратичная функция*

$$f(p) = (A - p)(p - c)$$

---

[1] В силу симметрии ситуации результаты, аналогичные перечисленным, верны и для случая, когда $c_1 < c_2$.

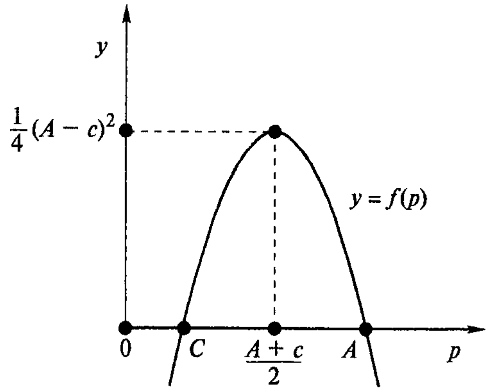


Рис. 2.3

достигает максимума $\frac{1}{4}(A-c)^2 > 0$ *в точке* $\frac{A+c}{2}$ (*середина отрезка с концами A и c*), *строго возрастает на интервале* $\left(-\infty, \frac{A+c}{2}\right)$ *и строго убывает на интервале* $\left(\frac{A+c}{2}, \infty\right)$. (*Ее график изображен на рис. 2.3.*)

Для доказательства заметим, что $f(p) = -p^2 + (A+c)p - Ac$, $f'(p) = -2p + A + c$ и $f''(p) = -2 < 0$. Из условия первого порядка $f'(p) = -2p + A + c = 0$ следует, что максимум достигается в точке $\frac{A+c}{2}$. Что касается свойств строгой монотонности f (на соответствующих интервалах), заметим, что $f'(p) > 0$ выполнено для всех $-\infty < p < \frac{A+c}{2}$ и $f'(p) < 0$ при всех $\frac{A+c}{2} < p < \infty$ (см. рис. 2.3).

Докажем утверждение (a). Заметим, что $\pi_1\left(c_1, \frac{A+c_2}{2}\right) = 0$, и, принимая во внимание, что $\frac{A+c_2}{2} - c_1 \le 0$, имеем

$$\pi_1\left(p_1, \frac{A+c_2}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1 > \frac{A+c_2}{2}, \\ \frac{1}{2}(A-c_2)\left(\frac{A+c_2}{2} - c_1\right), & \text{если } p_1 = \frac{A+c_2}{2}, \\ (A-p_1)(p_1-c_1), & \text{если } p_1 < \frac{A+c_2}{2} \end{cases} \le 0$$

$$= \pi_1\left(c_1, \frac{A+c_2}{2}\right).$$

Для прибыли фирмы 2, если $c_1 > \frac{A+c_2}{2}$, выполняется соотношение

$$\pi_2\left(c_1, \frac{A+c_2}{2}\right) = \left(A - \frac{A+c_2}{2}\right)\left(\frac{A+c_2}{2} - c_2\right) = \frac{1}{4}(A-c_2)^2 \ge 0\,.$$

С другой стороны, если $c_1 = \frac{A+c_2}{2}$, то

$$\pi_2\left(c_1, \frac{A+c_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(A - \frac{A+c_2}{2}\right)\left(\frac{A+c_2}{2} - c_2\right) = \frac{1}{8}(A-c_2)^2 \geq 0.$$

Кроме того,

$$\pi_2(c_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_2 > c_1, \\ \frac{1}{2}(A-c_2)(p_2-c_2), & \text{если } p_2 = c_1, \\ (A-p_2)(p_1-c_1), & \text{если } p_2 < c_1. \end{cases}$$

Поскольку $c_1 > c_2$, то $p_2 > c_1$ влечет $\pi_2(c_1, p_2) \leq 0 \leq \pi_2\left(c_1, \frac{A+c_2}{2}\right)$ при любых $p_2 > c_1$. При $p_2 < c_1$, в соответствии с (*), квадратичная функция $\pi_2(c_1, p_2) = (A - p_2)(p_2 - c_2)$ достигает максимума по p_2 в точке $\frac{A+c_2}{2} \leq c_1$. Отсюда следует, что $\pi_2(c_1, p_2) \leq \pi_2\left(c_1, \frac{A+c_2}{2}\right)$ при всех $0 \leq p_2 < c_1$. Если $p_2 = c_1$, то нетрудно видеть (как именно?), что

$$\pi_2(c_1, c_1) = \frac{1}{2}(A-c_1)(c_1-c_2) \leq \frac{1}{8}(A-c_2)^2 \leq \pi_2\left(c_1, \frac{A+c}{2}\right).$$

Из этого вытекает, что профиль $\left(c_1, \frac{A+c_2}{2}\right)$ — равновесие по Нэшу при $c_1 \geq \frac{A+c_2}{2}$.

Теперь установим справедливость утверждения (b). Для этого воспользуемся методом от противного и предположим, что существует равновесие по Нэшу (p_1^*, p_2^*). Покажем, что такое предположение ведет к противоречию, установив, что невозможны все три альтернативы, $p_2^* > p_1^*$, $p_1^* > p_2^*$ и $p_1^* = p_2^*$. Заметим предварительно, что

$$\pi_1(c_1, p_2^*) = \pi_2(p_1^*, c_2) = 0.$$

(1) *Если $p_2^* > p_1^*$, то (p_1^*, p_2^*) не может быть равновесием по Нэшу.* В этом случае $\pi_1(p_1^*, p_2^*) = (A - p_1^*)(p_1^* - c_1)$, а $\pi_2(p_1^*, p_2^*) = 0$. Мы утверждаем, что $p_1^* \geq c_1$. В самом деле, если $p_1^* < c_1$, то $p_1^* - c_1 < 0$ и, следовательно, $\pi_1(p_1^*, p_2^*) = (A - p_1^*)(p_1^* - c_1) < 0$. Но тогда $\pi_1(c_1, p_2^*) > \pi_1(p_1^*, p_2^*)$, что противоречит тому, что (p_1^*, p_2^*) — равновесие по Нэшу. Теперь заметим, что для любой цены $c_2 < p_2' < c_1$ имеет место соотношение

$$\pi_2(p_1^*, p_2') = (A - p_2')(p_2' - c_1) > 0 = \pi_2(p_1^*, p_2^*),$$

которое противоречит тому, что (p_1^*, p_2^*) — равновесие по Нэшу. Значит, соотношение $p_2^* > p_1^*$ невозможно.

(2) *Если $p_1^* > p_2^*$, то (p_1^*, p_2^*) не может быть равновесием по Нэшу.* В этом случае $\pi_1(p_1^*, p_2^*) = 0$, а $\pi_2(p_1^*, p_2^*) = (A - p_2^*)(p_2^* - c_2)$. Поскольку квадратичная функция $\pi_2(p_1^*, p_2) = (A - p_2)(p_2 - c_2)$ строго возрастает по

переменной p_2 на интервале $\left(-\infty, \frac{A+c_2}{2}\right)$ и (p_1^*, p_2^*) образует равновесие по Нэшу, то $p_2^* \geq \frac{A+c_2}{2}$. (В противном случае, если $p_2^* < \frac{A+c_2}{2}$, то любая цена p_2', такая что $p_2^* < p_2' < p_1^*$ и $p_2^* < p_2' < \frac{A+c_2}{2}$, удовлетворяет неравенству $\pi_2(p_1^*, p_2') > \pi_2(p_1^*, p_2^*)$, что ведет к противоречию.) Используя гипотезу $\frac{A+c_2}{2} > c_1$ (здесь нужно строгое неравенство!), заметим, что при любой цене p_1', такой что $c_1 < p_1' < \frac{A+c_2}{2} \leq p_2^*$, выполнено

$$\pi_1(p_1', p_2^*) = (A - p_1')(p_1' - c_1) > 0 = \pi_1(p_1^*, p_2^*).$$

Это противоречит тому факту, что (p_1^*, p_2^*) является равновесием по Нэшу. Отсюда следует, что $p_1^* > p_2^*$ не может быть равновесием по Нэшу.

(3) *Если* $p_1^* = p_2^*$, *то* (p_1^*, p_2^*) *не может быть равновесием по Нэшу.* Пусть $p_1^* = p_2^* = p^*$. В этом случае имеем

$$\pi_1(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}(A - p_1^*)(p_1^* - c_1) \text{ и } \pi_2(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}(A - p_2^*)(p_2^* - c_2).$$

Сначала заметим, что $0 \leq p^* < A$ (и, следовательно, $A - p^* > 0$). В самом деле, если $p^* = A$, то фирма 1 может увеличить прибыль, назначив цену p_1', близкую к A, что ведет к противоречию.

Из неравенства $c_2 < c_1$ вытекает $\frac{A+c_2}{2} < \frac{A+c_1}{2}$. Если $p^* > \frac{A+c_2}{2} > c_2$, то, выбирая любую цену p_2', такую что $\frac{A+c_2}{2} < p_2' < p^*$, и достаточно близкую к p^*, получим

$$\pi_2(p_1^*, p_2') = (A - p_2')(p_2' - c_2) > \frac{1}{2}(A - p_2^*)(p_2^* - c_2) = \pi_2(p_1^*, p_2^*).$$

Это противоречит тому факту, что (p_1^*, p_2^*) является равновесием по Нэшу. Таким образом, должно выполняться неравенство $p^* \leq \frac{A+c_2}{2}$. С другой стороны, неравенство $p^* \geq c_1$ также должно выполняться. В противном случае $p^* < c_1$ приводит к

$$\pi_1(p_1^*, p_2^*) = \frac{1}{2}(A - p_1^*)(p_1^* - c_1) < 0 = \pi_1(c_1, p_2^*),$$

что вступает в противоречие с тем, что (p_1^*, p_2^*) — равновесие по Нэшу. Следовательно, мы установили, что $c_1 \leq p^* \leq \frac{A+c_2}{2}$.

Если $c_1 < p^* \leq \frac{A+c_2}{2}$, то для любой цены p_2', такой что $c_1 < p_2' < p^*$ и достаточно близкой к p^*,

$$\pi_2(p_1^*, p_2') = (A - p_2')(p_2' - c_2) > \frac{1}{2}(A - p_2^*)(p_2^* - c_2) = \pi_2(p_1^*, p_2^*).$$

Если $c_1 = p^*$, то для любой цены p_2', такой что $p_2' < c_1 = p^*$ и достаточно близкой к p^*, мы видим, что

$$\pi_2(p_1^*, p_2') = (A - p_2')(p_2' - c_2) > \frac{1}{2}(A - p_2^*)(p_2^* - c_2) = \pi_2(p_1^*, p_2^*),$$

что опять противоречит тому факту, что (p_1^*, p_2^*) — равновесие по Нэшу.

Мы показали, что ни одна из трех альтернатив не может быть верна, таким образом, в этом случае не существует равновесия по Нэшу. ■

В примере игры ценообразования по Бертрану фирмы продают те же товары, т.е. товары фирм являются совершенными субститутами. Однако во многих ситуациях производимые фирмами товары хоть и являются субститутами, но не совершенными. Как будет выглядеть равновесие в случае *дифференциации продукции*? Окажутся ли цены похожими на те, что были получены в модели ценообразования по Бертрану, или будут отличаться от них? Следующий пример дает ответы на поставленные вопросы.

Пример 2.26 (игра ценообразования с дифференциацией продукции). Как и в модели ценообразования по Бертрану, рассмотрим рынок с двумя действующими фирмами, 1 и 2, но в отличие от модели Бертрана предположим, что производимый фирмами продукт неодинаков. Так, функция спроса на товар фирмы i имеет вид

$$q_i(p_1, p_2) = A_i - a_i p_i + b_i p_j,$$

где индекс j отражает комплементарную к i фирму. Будем предполагать, что $a_i > b_i > 0$, $i = 1,2$. Следовательно, функция спроса на товар фирмы i является линейной функцией цены двух фирм, и спрос «отрицательно» связан со «своей» ценой p_i, но «положительно» — с ценой другой фирмы p_j. Другими словами, если фирма i снизит свою цену, то спрос на ее товар увеличится; но если фирма j снизит свою цену, то спрос на товар фирмы i уменьшится. В таком случае говорят, что товары фирм являются *субститутами*. Однако поскольку $a_i > b_i$, влияние цены конкурента на спрос фирмы оказывается меньше, чем влияние собственной цены.

Как и ранее, общие издержки производства фирмы i составляют $c_i q_i$, т.е. предельные издержки $c_i > 0$ постоянны. Функция прибыли фирмы i имеет вид

$$\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c_i)(A_i - a_i p_i + b_i p_j).$$

Для существования рынка фирмы должны иметь возможность получать положительную прибыль. Для достижения этого наложим следующее ограничение «жизнеспособности (рынка)» на параметры модели:

$$A_1 - a_1 c_1 > 0 \text{ и } A_2 - a_2 c_2 > 0.$$

Данное предположение гарантирует, что фирма сможет получить положительную прибыль при некоторых ценах. Например, если $p_2 = 0$, то, установив цену $p_1 = \frac{A_1 - a_1c_1}{2a_1} > 0$, фирма 1 получит прибыль $\pi_1(p_1, p_2) > 0$ [1].

Стратегическая игра, которая описывает этот рынок, обладает следующими характеристиками.

(1) Имеется два игрока.

(2) Множество стратегий фирмы i имеет вид $S_i = (0, \infty)$ (множество всех положительных цен).

(3) Функция выигрыша фирмы i — это ее функция прибыли,

$$\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c_i)(A_i - a_i p_i + b_i p_j).$$

Ясно, что равновесием по Нэшу в данной игре будет пара равновесных цен. Таким образом, необходимо найти равновесие по Нэшу, если таковое существует. Воспользуемся критерием для равновесия по Нэшу и рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0 \text{ и } \frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 0.$$

Дифференцируя функции прибыли, получаем $\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = A_i - 2a_i p_i + b_i p_j + a_i c_i$ для каждого i. После перегруппировки слагаемых приходим к системе

$$2a_1 p_1 - b_1 p_2 = A_1 + a_1 c_1,$$
$$-b_2 p_1 + 2a_2 p_2 = A_2 + a_2 c_2.$$

Далее, $\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial p_1^2} = -2a_i < 0$ для любого i; отсюда следует, что система имеет единственное решение, которое будет единственным равновесием по Нэшу в данной игре. Решая систему, получаем

$$p_1^* = \frac{2a_2 A_1 + A_2 b_1 + a_2 b_1 c_2 + 2a_1 a_2 c_1}{4a_1 a_2 - b_1 b_2}$$

и

$$p_2^* = \frac{2a_1 A_2 + A_1 b_2 + a_1 b_2 c_1 + 2a_1 a_2 c_2}{4a_1 a_2 - b_1 b_2}.$$

Следовательно, (p_1^*, p_2^*) — единственное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Заметим теперь, что соотношение $a_i > b_i > 0$ влечет за собой выполнение неравенства $0 < 4a_1a_2 - b_1b_2 < 4a_1a_2$. Принимая это во внимание и учитывая тот факт, что $A_1 - a_1c_1 > 0$, после перезаписи p_1^* имеем

$$p_1^* = \frac{2a_2(A_1 - a_1c_1) + 4a_1a_2c_2 + A_2b_1 + a_2b_1c_2}{4a_1a_2 - b_1b_2} > \frac{4a_1a_2c_1}{4a_1a_2} = c_1,$$

[1] Это, вообще говоря, не так. Но такой ценой, гарантирующей фирме положительную прибыль, будет, в частности, $p_1 = \frac{A_1 + a_1c_1}{2a_1}$, при которой, в частности, $p_1 - c = \frac{A_1 - a_1c_1}{2a_1} > 0$ и положительность спроса на продукцию фирмы. По-видимому, в оригинале опечатка. — *Примеч. ред.*

и, аналогично, $p_2^* > c_2$. Кроме того, обратим внимание, что

$$A_1 - a_1 p_1^* + b_1 p_2^* = \frac{2a_1 a_2 (A_1 - a_1 c_1) + a_1 b_1 (A_2 + b_2 c_1 + a_2 c_2)}{4a_1 a_2 - b_1 b_2} > 0 .$$

Поскольку $p_1^* - c_1 > 0$, из последнего неравенства вытекает, что

$$\pi_1(p_1^*, p_2^*) = (p_1^* - c_1)(A_1 - a_1 p_1^* + b_1 p_2^*) > 0 ,$$

и, аналогично, $\pi_2(p_1^*, p_2^*) > 0$.

Рассмотрение полученных равновесных цен показывает, что они сильно отличаются от тех, что были получены в модели Бертрана с однородными благами. Равновесные цены превышают предельные издержки обеих фирм, и обе фирмы получают в равновесии положительную прибыль. Это расходится с равновесием (в случае, если оно существует) в игре ценообразования по Бертрану — поразителен тот факт, что равновесные цены получены и для случая, когда предельные издержки различны. Это подтверждает вывод о том, что равновесие на рынке зависит от того, как разыгрывается рыночная игра. В данном случае, например, довольно незначительная продуктовая дифференциация (отражаемая небольшими различиями в параметрах a_1, a_2, b_1, b_2) значительно меняет равновесный исход. ■

Дуополия Курно, дуополия Бертрана и пример рынка с дифференциацией продукта — все это примеры, в которых изучение рынка происходит с помощью анализа стратегической игры. Следующий пример также представляет собой пример рынка, который можно успешно исследовать на основе анализа соответствующей стратегической игры. В нем две фирмы, расположенные на определенном расстоянии друг от друга, должны назначить цены с учетом того, что покупатели распределены некоторым способом около этих фирм. Поскольку покупатели несут транспортные расходы, если покупают товар фирмы, расположенной на некотором расстоянии о них, то они предпочтут покупать у той фирмы, которая расположена ближе. Пример представляет собой одну из версий модели Хотеллинга[1].

Пример 2.27 (модель Хотеллинга линейного города). Рассмотрим рынок, в котором покупатели распределены равномерно на единичном отрезке $[0,1]$. Таким образом, $1/2$ часть всех покупателей расположена слева от середины, и оставшаяся $1/2$ часть — справа. Две фирмы производят идентичный продукт и расположены в некоторых точках единичного отрезка. Они продают единицу товара (длительного пользования) каждому покупателю, желающему купить товар. Фирма 1 расположена в точке 0 отрезка $[0,1]$, а фирма 2 — в точке 1. Предельные издержки производства обеих фирм равны $c > 0$.

Каждый покупатель готов заплатить величину A за единицу товара, но несет транспортные расходы в размере t долл. за единицу пройденного для

[1] Гарольд Хотеллинг (1895–1973) — выдающийся американский экономист, математик и статистик. Хотя его статьи по экономике немногочисленны, они оказали значительное влияние на современную экономику.

покупки товара пути. Следовательно, если покупатель расположен на расстоянии x от фирмы, его транспортные расходы составят tx. Таким образом, полезность покупателя, который приобретает товар по цене p у фирмы, расположенной на расстоянии x, равна

$$u(p,x) = A - (p + tx)\,,\ \ 0 \le x \le 1\,.$$

Ясно, что у покупателя есть возможность не покупать товар, и он действительно не станет это делать, если $u(p,x) < 0$. Будем предполагать, что $A > c + t$.

При заданном расположении фирм и распределении покупателей объем продаж и прибыль фирмы зависят от назначенной ей цены и цены другой фирмы. Поэтому фирмы конкурируют по ценам. Соответствующая стратегическая игра описана ниже.

(1) Имеется два игрока, две фирмы.

(2) Множество стратегий фирмы i — это множество возможных цен $[c,A]$; будем обозначать цену фирмы i через p_i.

(3) Функция выигрыша игрока i — это функция прибыли, имеющая вид

$$\pi_i(p_1, p_2) = (p_i - c)m_i(p_1, p_2)\,,$$

где $m_i(p_1,p_2)$ — доля покупателей, выбравших купить товар у фирмы i при заданной паре цен (p_1,p_2).

Доля покупателей $m_1(p_1,p_2)$, которые станут покупать товар у фирмы 1, задается формулой

$$m_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1 \ge p_2 + t, \\ \dfrac{p_2 - p_1}{2t} + \dfrac{1}{2}, & \text{если } p_2 - t < p_1 < p_2 + t, \\ 1, & \text{если } p_1 < p_2 - t. \end{cases}$$

Эти значения $m_1(p_1,p_2)$ поясняются далее.

Случай I. $p_1 \ge p_2 + t$.

В этом случае для любого расположения $x \in (0,1]$ имеем

$$A - p_1 - tx \le A - p_2 - t - tx < A - p_2 - t(1 - x)\,.$$

Отсюда следует, что $m_1(p_1,p_2) = 0$.

Случай II. $p_2 - t < p_1 < p_2 + t$.

В этом случае существует местоположение l', такое что $a < l' < b$, удовлетворяющее

$$p_1 + tl' = p_2 + t(1 - l')\,. \tag{2.7}$$

Для того чтобы показать это, рассмотрим непрерывную функцию

$$f(x) = p_2 - p_1 + t(1 - 2x)\,,\ \ 0 \le x \le 1\,,$$

и заметим, что $f(0) = p_2 - p_1 + t > 0$ и $f(1) = p_2 - p_1 - t < 0$. Следовательно, по теореме о промежуточном значении существует некоторое $0 < l' < 1$, такое что $f(l') = 0 = p_2 - p_1 + t(1 - 2l')$. Из этого вытекает соотношение (2.7). Решая (2.7) относительно l', получим $l' = \frac{p_2 - p_1}{2t} + \frac{1}{2}$.

В частности, мы имеем $A - p_1 - tl' = A - p_2 - t(1 - l')$. Нетрудно видеть, что при $l < l'$ выполняется неравенство

$$A - p_1 - tl > A - p_2 - t(1 - l).$$

А соответственно при $l > l'$ выполняется неравенство

$$A - p_1 - tl < A - p_2 - t(1 - l).$$

Поэтому в данном случае

$$m_1(p_1, p_2) = l' = \frac{p_2 - p_1}{2t} + \frac{1}{2}.$$

Случай III. $p_1 < p_2 - t$.

Этот случай аналогичен случаю I, поскольку теперь имеем $p_2 > p_1 + t$, и ясно, что доля покупателей фирмы 2 составляет

$$m_2(p_1, p_2) = 1 - m_1(p_1, p_2) = 0,$$

следовательно, $m_1(p_1, p_2) = 1$.

Теперь заметим, что функция выигрыша фирмы 1 имеет вид

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)m_1(p_1, p_2) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } p_1 \geq p_2 + t, \\ (p_1 - c)\left(\dfrac{p_2 - p_1}{2t} + \dfrac{1}{2}\right), & \text{если } p_2 - t < p_1 < p_2 + t, \\ p_1 - c, & \text{если } p_1 \leq p_2 - t. \end{cases}$$

Соответственно функция выигрыша фирмы 2 тогда имеет вид

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)[1 - m_1(p_1, p_2)].$$

Перейдем к поэтапному поиску равновесия по Нэшу. Для этого предположим, что профиль цен (p_1, p_2), где $c \leq p_i \leq A$ для каждого i, является равновесием по Нэшу.

Этап I. Если $p_1 \geq p_2 + t$, то (p_1, p_2) не может быть равновесием по Нэшу.

В этом случае $m_1(p_1, p_2) = 0$ и $\pi_1(p_1, p_2) = 0$. Ясно, что $p_2 + t > c$. Выберем некоторое p_1', такое что

$$\max\{c, p_2 - t\} < p_1' < p_2 + t.$$

Тогда $p_2 - p_1' + t > 0$ и $p_2 - t < p_1' < p_2 + t$. Отсюда имеем

$$\pi_1(p_1', p_2) = (p_1' - c)\left(\frac{p_2 - p_1'}{2t} + \frac{1}{2}\right) = (p_1' - c)\left(\frac{p_2 - p_1' + t}{2t}\right) > 0 = \pi_1(p_1, p_2).$$

Поэтому в этом случае (p_1, p_2) не может быть равновесием по Нэшу.

Этап II. Если $p_1 \le p_2 - t$, то (p_1, p_2) не может быть равновесием по Нэшу. Это случай, при котором $p_2 \ge p_2 + t$. Мы получили ситуацию, подобную проанализированной на этапе I, где фирмы 1 и 2 поменялись местами, поэтому опять-таки (p_1, p_2) не может быть равновесием по Нэшу.

Этап III. Профиль стратегий (p_1^*, p_2^*), где $p_1^* = p_2^* = t + c$, является единственным равновесием по Нэшу, удовлетворяющим $p_2^* - t < p_1^* < p_2^* + t$.

При $p_2 - t < p_1 < p_2 + t$ прибыли фирм составляют

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)\left(\frac{p_2 - p_1}{2t} + \frac{1}{2}\right)$$

и (по симметрии)

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c)\left(1 - \frac{p_2 - p_1}{2t} - \frac{1}{2}\right) = (p_2 - c)\left(\frac{p_1 - p_2}{2t} + \frac{1}{2}\right).$$

Предположим, что профиль стратегий (p_1^*, p_2^*) — равновесие по Нэшу, причем цены p_1^*, p_2^* удовлетворяют соотношению $p_2^* - t < p_1^* < p_2^* + t$.

Тогда, например, выигрыш первой фирмы на профиле цен p_1, p_2^*, равный

$$\pi_1(p_1, p_2^*) = (p_1 - c)\left(\frac{p_2^* - p_1}{2t} + \frac{1}{2}\right), \quad p_2^* - t < p_1 < p_2^* + t,$$

достигает своего максимума в точке p_1^*. Отсюда следует, что $\dfrac{\partial \pi_1(p_1, p_2^*)}{\partial p_1} = 0$ при $p_1 = p_1^*$. Аналогично $\dfrac{\partial \pi_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = 0$ в $p_2 = p_2^*$. Другими словами, равновесный по Нэшу профиль (p_1^*, p_2^*) должен быть решением системы уравнений

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \frac{p_2 - 2p_1 + c}{2t} + \frac{1}{2} = 0 \tag{2.8}$$

и

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = \frac{p_1 - 2p_2 + c}{2t} + \frac{1}{2} = 0. \tag{2.9}$$

После упрощения получаем

$$2p_1 - p_2 = c + t \quad \text{и} \quad p_1 - 2p_2 = -c - t.$$

Решая эту систему, имеем

$$p_1^* = p_2^* = t + c.$$

Это показывает, что единственным возможным равновесием по Нэшу является профиль $(c + t, c + t)$. Проверим теперь, что это действительно равновесие по Нэшу.

Для начала заметим, что $c < p_i^* < A$ для каждого $i = 1,2$ и $p_2^* - t < p_1^* < p_2^* + t$. Отсюда следует, что $\pi_1(p_1^*, p_2^*) = \dfrac{t}{2}$. Более того, легко понять, что

$$\pi_1(p_1, p_2^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_1 \ge 2t + c, \\ \dfrac{1}{2t}(p_1 - c)(2t + c - p_1), & \text{если } c < p_1 < 2t + c, \\ 0, & \text{если } p_1 = c. \end{cases}$$

Эта функция достигает своего максимума в точке $p_1^* = t + c$. Таким образом, $\pi_1(p_1, p_2^*) \le \pi_1(p_1^*, p_2^*)$ для всех p_1 и, аналогично, $\pi_2(p_1^*, p_2) \le \pi_2(p_1^*, p_2^*)$ для всех p_2.

Хотя этот пример ценовой конкуренции был преподнесен в качестве примера пространственной конкуренции, можно его рассматривать как модель, в которой «близость» фирмы обеспечивает предпочтение покупателя в отношении продукции этой фирмы. Следовательно, если фирмы «расположены» в различных местах, их товары «отличаются» друг от друга. То, что покупатель «располагается» ближе к одной из фирм, интерпретируется как предпочтение товара той фирмы, которая к нему ближе. Таким образом, модель часто используется для иллюстрации продуктовой дифференциации на рынках. Одним из важных результатов анализа модели является то, что дифференциация товара, представленная транспортными расходами t, весьма значима. Чем больше t, тем больше влияние дифференциации товара, и тем больше транспортная наценка по отношению к предельным издержкам. ■

Следующий пример позволяет понять природу предвыборных платформ. Несмотря на то что можно спорить о том, насколько полно представлены в модели институциональные детали, она дает глубокое понимание мотивов и причин, которыми руководствуются кандидаты при выборе избирательных платформ. Выбор избирательной платформы редко является независимым от платформы других кандидатов, а причины участия в предвыборной гонке всегда имеют какое-то отношение к желанию победить. Таким образом, ввиду того что победа для кандидата важна, интересно выяснить, как это повлияет на выбор позиции кандидата в идеологическом многообразии (системе взглядов).

Пример 2.28 (модель медианного избирателя). Представим, что избиратели равномерно распределены во множестве (идеологических) позиций, представленных отрезком $[0,1]$. Есть два кандидата, скажем кандидат 1 и кандидат 2, среди которых выиграет тот, кто наберет наибольшее число голосов. Каждый избиратель голосует за кандидата, который ему ближе по идеологической позиции. Кандидаты это знают и заботятся только о выигрыше. В случае ничьей (равного числа набранных голосов) победитель определяется, например, броском монеты. Возможно ли при таком сценарии предсказать, какие идеологические позиции займут кандидаты?

Заметим сначала, что мы можем рассматривать эту ситуации как стратегическую игру двух лиц — двух кандидатов. Стратегией каждого игрока будет выбор идеологической позиции $a_i \in [0,1]$. Функция выигрыша $u_i(a_1,a_2)$ игрока i — процент полученных им голосов, если игроками выбран профиль стратегий (a_1,a_2). Легко видеть, что

$$u_1(a_1,a_2) = \begin{cases} \dfrac{a_1 + a_2}{2}, & \text{если } a_1 < a_2, \\ 0{,}5, & \text{если } a_1 = a_2, \\ 1 - \dfrac{a_1 + a_2}{2}, & \text{если } a_1 > a_2, \end{cases}$$

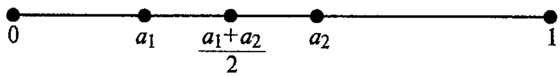


Рис. 2.4

и

$$u_2(a_1,a_2)=\begin{cases}1-\dfrac{a_1+a_2}{2}, & \text{если } a_1<a_2,\\ 0{,}5, & \text{если } a_1=a_2,\\ \dfrac{a_1+a_2}{2}, & \text{если } a_1>a_2.\end{cases}$$

Чтобы убедиться в правильности этих соотношений, рассмотрим профиль стратегий (a_1,a_2), при котором $a_1 < a_2$; см. рис. 2.4. Тогда идеологические позиции, расположенные ближе к a_1, чем к a_2, находятся в интервале $\left[0,\dfrac{a_1+a_2}{2}\right]$. Это значит, что доля людей, голосующих за первого кандидата, равна $\dfrac{a_1+a_2}{2}$, т.е. $u_1(a_1,a_2)=\dfrac{a_1+a_2}{2}$. Аналогично интервал $\left[\dfrac{a_1+a_2}{2},1\right]$ представляет собой идеологические позиции, которые ближе к a_2, чем к a_1, и соответственно $u_2(a_1,a_2)=1-\dfrac{a_1+a_2}{2}$. Логично предположить, что если оба кандидата займут одинаковую идеологическую позицию (т.е. $a_1 = a_2$), то голоса будут разделены между ними.

Можно с уверенностью сказать, что равновесие по Нэшу в такой игре будет наиболее вероятным исходом, поскольку каждый кандидат будет бороться за максимальное число голосов при данной позиции соперника. Собственно говоря, утверждается следующее:

- *Единственным равновесием по Нэшу в этой игре является профиль* $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Покажем это в несколько этапов. Предположим сначала, что (s_1,s_2) — равновесие по Нэшу в данной игре. Докажем, что тогда $(s_1,s_2)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, и это будет свидетельствовать о том, что данный профиль — единственное возможное равновесие по Нэшу $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Этап I. $s_1 = s_2$.

Предположим, что это не так и $s_1 \neq s_2$. В силу симметричности ситуации можем считать, что $s_1 < s_2$. В таком случае легко видеть, что при любой стратегии кандидата 2 из интервала $\left[\dfrac{s_1+s_2}{2},s_2\right]$ выполняется соотношение $u_2(s_1,a)>u_2(s_1,s_2)$; см. рис. 2.5. Последнее неравенство вступает в противоречие с определением равновесия по Нэшу. Таким образом, $s_1 = s_2$.

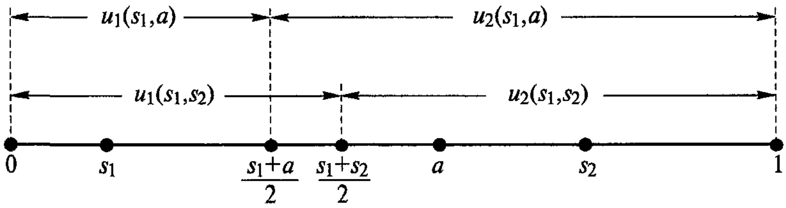


Рис. 2.5

Этап II. $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$.

Чтобы показать это, снова предположим, что это не так и $s_1 = s_2 \neq \frac{1}{2}$. Поскольку мы имеем дело с симметричной ситуацией, то будем полагать, что $s_1 = s_2 < \frac{1}{2}$. Если кандидат 2 выберет стратегию a из интервала $s_1 < a < \frac{1}{2}$, то $u_2(s_1, a) > u_2(s_1, s_2) = \frac{1}{2}$; см. рис. 2.6. Это неравенство противоречит предположению о том, что (s_1,s_2) — равновесие по Нэшу. Следовательно, $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$.

Предыдущие два этапа гарантируют нам, что набор стратегий $(s_1, s_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ может быть равновесием по Нэшу данной игры. Остается только показать, что $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ действительно является равновесием по Нэшу.

Этап III. Набор стратегий $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — равновесие по Нэшу.

Из рис. 2.7 видно, что если кандидат 2 придерживается стратегии $\frac{1}{2}$, то кандидат 1 не может никаким способом увеличить свою полезность $u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, выбрав какую-то другую стратегию $a \neq \frac{1}{2}$.

Таким образом, модель предсказывает, что каждый кандидат будет ориентироваться на медианного избирателя, т.е. избирателя, который находится точно в середине распределения возможных идеологических позиций. Более общий вариант модели обсуждается в упражнении 10 в конце раздела. ■

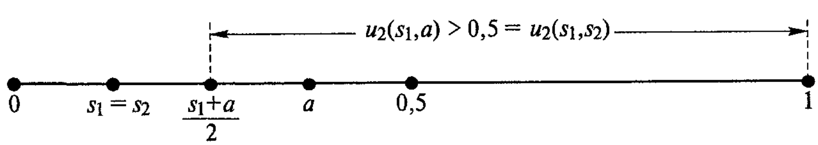


Рис. 2.6

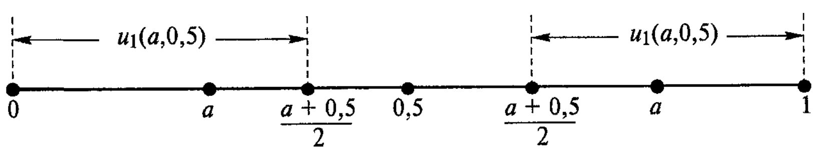


Рис. 2.7

Следующий пример, возможно, представляет собой самое интересное приложение теории игр. Он показывает, как неправильные стимулы могут иногда работать против общих интересов. В то время как пример касается эксплуатации ресурсов в общей собственности, таких как (мировые) рыбопромысловые районы, незначительная его модификация показывает, что он имеет отношение и к глобальному потеплению, и к эксплуатации мировых тропических лесов, если упомянуть только пару ситуаций, которые вписываются в общую модель. Он делает явным момент, присутствующий во многих играх, включая дилемму заключенного: равновесие по Нэшу, которое описывает, что происходит, если участники не сотрудничают друг с другом, может порождать исход, при котором каждый участник получает меньше, чем мог бы в случае соблюдения соглашений о сотрудничестве, подобных, например, договорам между странами о правах на рыбную ловлю.

Пример 2.29 (использование ресурсов в общей собственности). Предположим, что n стран имеют доступ к рыбопромысловым районам в открытых морях. Фактически общепризнано, что рыболовные угодья, которые могут рассматриваться в качестве ресурса в общей собственности, истощены по всему миру, т.е. рыбная ловля шла столь интенсивно, что, по всей видимости, в ближайшем будущем рыбная популяция достигнет столь низких уровней, что некоторые виды могут оказаться на грани вымирания.

Одним из важных достижений теории игр — с практической точки зрения — было объяснение, почему ресурсы в общей собственности всегда будут эксплуатироваться сверх желательного с коллективной точки зрения уровня. Доказательство, которое достаточно подробно приводится ниже, состоит в том, что равновесие по Нэшу в игре, описывающей поведение потребителей таких ресурсов, всегда приводит к исходу, который оказывается хуже, чем общественно желаемый.

Покажем это, используя простую модель стратегической игры. Пусть имеется n игроков (n стран); игрок i потребляет r_i единиц ресурса. Общий объем потребления ресурса составляет величину $\sum_{i=1}^{n} r_i$. Определяющие характеристики игры следующие.

1. Затраты игрока i на приобретение r_i единиц ресурса зависят не только от величины r_i, используемой этим игроком, но также и от количества $R - r_i = \sum_{j \neq i} r_j$ этого ресурса, используемого другими игроками. Соответствующая функция затрат (издержек) (которая, по предположению, одинакова для всех игроков) обозначается через $C(r_i, R - r_i)$. Будем предполагать, что функция затрат $C : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ удовлетворяет следующим условиям.

   (a) $\dfrac{\partial C(r,R)}{\partial r} > 0$, $\dfrac{\partial C(r,R)}{\partial R} > 0$, $\dfrac{\partial^2 C(r,R)}{\partial r^2} > 0$ и $\dfrac{\partial^2 C(r,R)}{\partial R^2} > 0$ при всех $r > 0$ и $R > 0$. То есть предельные издержки использования ресурса возрастают при росте его совокупного потребления[1]. Таким образом, если страны вылавливают больше рыбы, предельные издержки ловли возрастают.

(b) Функции предельных издержек удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial C(r,R)}{\partial r}=\infty \text{ и } \lim_{R\to\infty}\frac{\partial C(r,R)}{\partial R}=\infty .$$

Действительно, логично предположить, что предельные издержки монотонно и неограниченно возрастают, начиная с малого положительного значения. Эти свойства функции издержек совместимы с интуитивным представлением о том, что чем больше рыбы уже выловлено, тем сложнее оказывается выловить дополнительное количество.

(c) Для упрощения изложения будем предполагать, что функция C является сепарабельной, т.е. имеет форму $C(r,R)=\kappa(r)+K(R)$. В этом случае свойства из пункта (a) принимают вид

$$\kappa'(r)>0\ ,\ \kappa''(r)>0\ ,\ K'(r)>0 \text{ и } K''(R)>0$$

при всех $r > 0$ и $R > 0$. Примером сепарабельной функции издержек такого типа служит функция $C(r,R)=r^2+R^2$.

2. Полезность игрока от r_i единиц ресурса равна $u(r_i)$. Предполагается, что функция $u:(0,\infty)\to(0,\infty)$ удовлетворяет требованиям $u'(r)>0$ и $u''(r)<0$ для любых $r > 0$. Это просто означает, что при увеличении потребления ресурса ценность дополнительных единиц уменьшается. (В математических терминах u — строго возрастающая и строго вогнутая функция.)

Будем считать также, что предельная полезность в нуле больше предельных издержек в нуле, т.е.

$$\lim_{r\to 0^+}u'(r)>\lim_{r\to 0^+}\kappa'(r).$$

Описанная только что ситуация может быть представлена в виде стратегической игры n лиц со следующими характеристиками:

- участвует n игроков;
- множество стратегий игрока i представляет собой открытый интервал множества вещественных положительных чисел $(0,\infty)$ (фактически $S_i=(0,R_{\max})$, где $R_{\max}$ — максимальное доступное количество ресурса);
- выигрыш игрока i составляет

$$\pi_i(r_1,r_2,\dots,r_n)=u_i(r_i)-C(r_i,R-r_i)=u_i(r_i)-[\kappa(r_i)-K(R-r_i)]\,.$$

Согласно критерию, равновесия по Нэшу в данной игре можно найти как решения $(r_1^*,r_2^*,\dots,r_n^*)$ следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial\pi_i(r_1,r_2,\dots,r_n)}{\partial r_i}=0\ ,\ i=1,2,\dots,n\ .$$

[1] Напомним, что **предельные издержки** для функции затрат $C(x)$ — это производная $C'(x)$ функции $C(x)$. Как обычно, функция $C'(x)$ интерпретируется как затраты на производство дополнительной единицы продукции при условии, что уже произведено x единиц.

Принимая во внимание то, что $R = \sum_{j=1}^{n} r_j$ и $R - r_i = \sum_{j \neq i} r_j$, прямое вычисление производных дает следующие соотношения:

$$\frac{\partial \pi_i(r_1, r_2, \ldots, r_n)}{\partial r_i} = u'(r_i) - \kappa'(r_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

и $\dfrac{\partial^2 \pi_i(r_1, r_2, \ldots, r_n)}{\partial r_i^2} = u''(r_i) - \kappa''(r_i) < 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. (Здесь мы используем тот факт, что $u''(r) < 0$, а $\kappa''(r) > 0$ для любого $r > 0$.)

Характеристики ситуации (в частности, ее симметричность) гарантируют, что $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \rho^*$[1]. Таким образом, в равновесии по Нэшу каждый игрок потребляет одинаковое количество ресурса:

$$r_1^* = r_2^* = \cdots = r_n^* = \rho^* = \frac{R^*}{n},$$

где $R^* = r_1^* + r_2^* + \cdots + r_n^* = n\rho^*$. Так что $\left(\frac{R^*}{n}, \ldots, \frac{R^*}{n}\right)$ — единственное равновесие по Нэшу в данной игре; см. также упражнение 6 в конце раздела.

Следовательно, количество потребляемого ресурса в равновесии по Нэшу — единственное решение уравнения

$$u'\left(\frac{R^*}{n}\right) = \kappa'\left(\frac{R^*}{n}\right). \tag{*}$$

Ясно, что $\lim\limits_{n \to \infty} R^* = \lim\limits_{r \to \infty} n\rho^* = R_{\max}$, где $R_{\max}$ — максимальное количество доступного ресурса. Это означает, что если все большее число стран участвует в рыбной ловле, то совокупный улов приблизится к предельно возможному и в какой-то момент запасы рыбы истощатся.

В отличие от условия (*) для равновесия по Нэшу, приведенного выше, общественный оптимум[2] R^{**} решает задачу

$$\max_{R > 0} \left\{ n \left[u\left(\frac{R}{n}\right) - [\kappa\left(\frac{R}{n}\right) - K\left(R - \frac{R}{n}\right)] \right] \right\}.$$

Таким образом, общественный оптимум R^{**} выбирается так, чтобы максимизировать совокупный выигрыш всех членов общества, где при заданном уровне улова R каждая страна получает $\frac{R}{n}$.

Условия первого порядка для приведенной выше задачи дают следующее соотношение, которому удовлетворяет R^{**}:

---

[1] Поскольку $u''(r) < 0$ для любого $r > 0$, функция u' является строго убывающей. Поскольку $\kappa''(r) > 0$ для любого $r > 0$, функция κ' является строго возрастающей. Следовательно, $u'(r) = \kappa'(r)$ имеет единственное решение ρ^*; см. рис. 2.8. Более подробно об этом см. в упражнении 6 в конце раздела.

[2] **Общественный оптимум** — это количество, которое приводит к наибольшему *суммарному выигрышу*. Следовательно, если общество состоит из участников игры, то общественный оптимум дает то количество, которое ведет к наиболее предпочтительному с общественной точки зрения исходу.

$$n\left[\frac{1}{n}u'\left(\frac{R^{**}}{n}\right)-[\frac{1}{n}\kappa'\left(\frac{R^{**}}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)K'\left(R^{**}-\frac{R^{**}}{n}\right)]\right]=0\,.$$

После некоторых алгебраических преобразований этого соотношения получаем:

$$u'\left(\frac{R^{**}}{n}\right)=\kappa'\left(\frac{R^{**}}{n}\right)+(n-1)K'\left(\frac{n-1}{n}R^{**}\right). \qquad (**)$$

И снова в качестве упражнения предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что (**) имеет единственное решение $R^{**}=n\rho^{**}$; см. упражнение 6 в конце раздела и рис. 2.8. Из анализа соотношений (*) и (**) и рис. 2.8 заключаем, что $R^{*}>R^{**}$. Однако в этом случае ρ^{**} зависит от n. Собственно говоря, $\lim\limits_{n\to\infty} R^{**}=\lim\limits_{r\to\infty} n\rho^{**}$ конечен, и в этом случае не имеет значения, сколько стран задействовано в рыбной ловле, поскольку совокупный улов оказывается ограниченным и истощения ресурса можно избежать.

Ясно, что количество ресурса R^{*}, которое используется в равновесии по Нэшу, строго больше, чем объем R^{**} потребления ресурса, который является количеством, наилучшим с точки зрения общественного блага.

Основная идея этого достаточно удивительного результата в том, что если решения в таких ситуациях принимаются участниками независимо, то личная заинтересованность каждого — в том, чтобы использовать ресурс в объеме, оправданном только издержками, связанными с потреблением этого ресурса данным индивидуальным игроком. В равновесии по Нэшу игрок заботится о влиянии своего потребления только на свои издержки и игнорирует издержки, накладываемые его решением на других игроков. Издержки каждого индивида, однако, намного меньше, чем издержки, налагаемые на общество всеми коллективно. Так как при расчете социально оптимального объема потребления ресурса принимаются во внимание издержки, налагаемые на каждого, то объем потребления, оправданный полными издержками общества, оказывается меньшим. ■

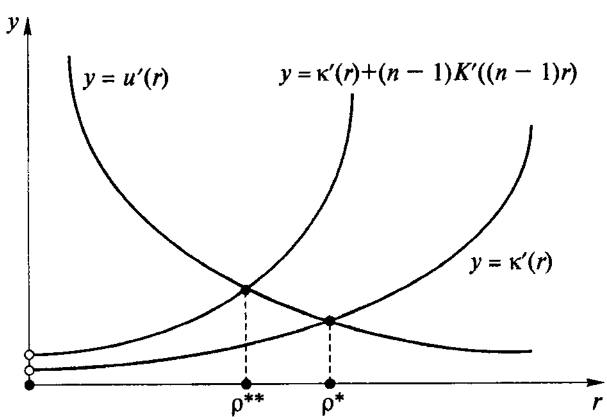


Рис. 2.8

Следующие примеры касаются игр с неполной информацией. При решении игр с неполной информацией используется концепция равновесия Байеса — Нэша, которая была рассмотрена ранее. Первый пример имеет дело с уже знакомой нам дуополией Курно, в которой фирмы не знают предельных издержек своих конкурентов.

Пример 2.30 (дуополия Курно с неполной информацией). Как и в случае дуополии Курно, есть две фирмы, производящие один и тот же товар, где фирма 1 производит q_1 единиц товара, а фирма 2 соответственно q_2 единиц товара. Совокупное производство фирм обозначается через q, где $q = q_1 + q_2$.

Пусть $p(q) = A - q$ — цена за единицу товара на рынке, где A — соответствующее положительное число. Предельные издержки фирмы i, $i = 1,2$, могут быть либо c_L, либо c_H, причем $c_L < c_H$. Множества типов фирм, таким образом, — это $T_1 = T_2 = \{L, H\}$, где если фирма типа L, то ее предельные издержки равны c_L. Пусть μ — совместное распределение вероятностей на множестве типов $T = T_1 \times T_2$, так что $\mu(L,H)$ — вероятность того, что предельные издержки фирмы 1 равны c_L, а предельные издержки фирмы 2 равны c_H. Следовательно, вероятность $\mu(c_1 = c_L)$ того, что предельные издержки фирмы 1 равны c_L, составляет $\mu(c_1 = c_L) = \mu(L, L) + \mu(L, H)$. Вероятность $\mu(c_1 = c_H)$ того, что предельные издержки фирмы 1 равны c_H, есть $\mu(c_1 = c_H) = \mu(H, L) + \mu(H, H)$. Аналогичные соотношения верны и для фирмы 2.

Таким образом, условные вероятности того, что предельные издержки фирмы 2 равны c_L или c_H при условии, что предельные издержки фирмы 1 равны c_L, есть

$$\mu_2(L|L) = \mu(c_2 = c_L | c_1 = c_L) = \frac{\mu(L, L)}{\mu(c_1 = c_L)}$$

и

$$\mu_2(H|L) = \mu(c_2 = c_H | c_1 = c_L) = \frac{\mu(L, H)}{\mu(c_1 = c_L)}$$

соответственно. Данные условные вероятности — это вероятности того, что фирма 2 имеет тот или иной тип, когда фирма 1 обнаруживает, что ее предельные издержки равны c_L.

Напомним теперь, что в играх с неполной информацией стратегия фирмы определяет ее выборы как функцию от ее типа. Пусть

$$q_1 : \{L, H\} \to [0, \infty)$$

— стратегия фирмы 1. Ожидаемая прибыль фирмы 1 в случае, когда она имеет тип L, составляет

$$\begin{aligned} E\pi_1(q_1, q_2(L), q_2(H), L) &= \mu_2(L|L)[(A - q_1 - q_2(L))q_1 - c_L q_1] + \\ &+ \mu_2(H|L)[(A - q_1 - q_2(H))q_1 - c_L q_1] = \\ &= (A - q_1 - c_L)q_1 - [\mu_2(L|L)q_2(L) + \mu_2(H|L)q_2(H)]q_1 . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Аналогично ожидаемая прибыль фирмы 1 в случае, когда ее тип H, составляет

$$E\pi_1(q_1, q_2(L), q_2(H), H) =$$
$$= (A - q_1 - c_H)q_1 - [\mu_2(L|H)q_2(L) + \mu_2(H|H)q_2(H)]q_1 . \tag{2.11}$$

Соответствующие функции ожидаемой прибыли фирмы 2

$$E\pi_2(q_1(L), q_1(H), q_2(L), L) =$$
$$= (A - q_2 - c_L)q_2 - [\mu_1(L|L)q_1(L) + \mu_1(H|L)q_1(H)]q_2 , \tag{2.12}$$

если тип фирмы 2 L, и

$$E\pi_2(q_1(L), q_1(H), q_2, H) =$$
$$= (A - q_2 - c_H)q_2 - [\mu_1(L|H)q_1(L) + \mu_2(H|H)q_1(H)]q_2 , \tag{2.13}$$

если ее тип H.

Каждая фирма каждого типа будет максимизировать ожидаемую прибыль при заданной стратегии другой фирмы. Условия первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial E\pi_1(q_1, q_2(L), q_2(H), L)}{\partial q_1(L)} = 0 ,$$

$$\frac{\partial E\pi_1(q_1, q_2(L), q_2(H), H)}{\partial q_1(H)} = 0 ,$$

$$\frac{\partial E\pi_2(q_1, q_2(L), q_2(H), L)}{\partial q_2(L)} = 0 ,$$

$$\frac{\partial E\pi_2(q_1, q_2(L), q_2(H), H)}{\partial q_2(H)} = 0 .$$

Условия первого порядка тогда имеют вид

$$A - 2q_1(L) - c_L - \mu_2(L|L)q_2(L) - \mu_2(H|L)q_2(H) = 0 ,$$

$$A - 2q_1(H) - c_H - \mu_2(L|H)q_2(L) - \mu_2(H|H)q_2(H) = 0 ,$$

$$A - 2q_2(L) - c_L - \mu_1(L|L)q_1(L) - \mu_1(H|L)q_1(H) = 0 ,$$

$$A - 2q_2(H) - c_H - \mu_1(L|H)q_1(L) - \mu_1(H|H)q_1(H) = 0 .$$

Заметим, что в каждом случае выполняются условия второго порядка для максимума, так как

$$\frac{\partial E\pi_j^2(q_1, q_2(L), q_2(H), L)}{\partial^2 q_j(L)} = \frac{\partial E\pi_j^2(q_1, q_2(L), q_2(H), H)}{\partial^2 q_j(H)} = -2 < 0$$

для $j = 1,2$.

Перепишем условия первого порядка в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \mu_2(L|L) & \mu_2(H|L) \\ 0 & 2 & \mu_2(L|H) & \mu_2(H|H) \\ \mu_1(L|L) & \mu_1(H|L) & 2 & 0 \\ \mu_1(L|H) & \mu_1(H|H) & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(L) \\ q_1(H) \\ q_2(L) \\ q_2(H) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - c_L \\ A - c_H \\ A - c_L \\ A - c_H \end{bmatrix} .$$

Равновесие Байеса — Нэша игры с неполной информацией теперь получается при решении этой системы (необходимых условий оптимальности) относительно четырех переменных: $q_1(L)$, $q_1(H)$, $q_2(L)$, $q_2(H)$. Один из способов ее решения — использование правила Крамера. В нашем случае

$$q_1^*(L)=\frac{D_1}{M},\ q_1^*(H)=\frac{D_2}{M},\ q_2^*(L)=\frac{D_3}{M},\ q_2^*(H)=\frac{D_4}{M}, \qquad (2.14)$$

где

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \mu_2(L|L) & \mu_2(H|L) \\ 0 & 2 & \mu_2(L|H) & \mu_2(H|H) \\ \mu_1(L|L) & \mu_1(H|L) & 2 & 0 \\ \mu_1(L|H) & \mu_1(H|H) & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

D_1 имеет вид

$$D_1=\begin{vmatrix} A-c_L & 0 & \mu_2(L|L) & \mu_2(H|L) \\ A-c_H & 2 & \mu_2(L|H) & \mu_2(H|H) \\ A-c_L & \mu_1(H|L) & 2 & 0 \\ A-c_H & \mu_1(H|H) & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

а D_2, D_3 и D_4 получаются путем замены второго, третьего и четвертого столбца M соответственно на столбец

$$\begin{bmatrix} A-c_L \\ A-c_H \\ A-c_L \\ A-c_H \end{bmatrix}.$$

Если вероятности того, что фирмы имеют определенную пару типов (t_1,t_2), равны (т.е. каждая вероятность равна $\frac{1}{4}$), то все условные вероятности окажутся равными $\frac{1}{2}$ и мы получим

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

В этом случае имеем

$$q_1^*(L)=\frac{4A+5(c_H-c_L)}{12} \quad \text{и} \quad q_1^*(H)=\frac{4A+3c_L-2c_H}{12}$$

для фирмы 1 и такие же выражения для фирмы 2. Поскольку $c_H > c_L$, отсюда следует, что в равновесии фирма производит больше, если имеет тип L. ■

Следующий пример представляет приложение концепции Байеса — Нэша к задаче финансирования *общественного блага*. Напомним, что общественное благо характеризуется тем, что, если оно предоставлено, то может потребляться всеми индивидами. Сигнал маяка, предупреждающий суда об опасных береговых линиях, виден всем судам, проплывающим в зоне видимости маяка, так что маяк можно рассматривать как пример общественного блага.

Пример 2.31 (финансирование общественного блага). Есть два индивида, которые могут делать взносы на финансирование общественного блага. Взнос первого индивида обозначим через c_1, а взнос второго — через c_2. Если $c_1 + c_2 \geq 1$, то общественное благо будет предоставлено; но если $c_1 + c_2 < 1$, то общественное благо предоставлено быть не может. Полезности или выигрыши индивидов 1 и 2 (если общественное благо предоставляется) заданы в виде

$$u_1(c_1, c_2, \alpha) = \alpha - c_1 \text{ и } u_2(c_1, c_2, \beta) = \beta - c_2,$$

где $\alpha \in [0,1]$ и $\beta \in [0,1]$ — значения, которые приписываются соответственно индивидами 1 и 2 единице общественного блага. Эти значения являются частной информацией индивидов, однако вместе оба индивида знают, что распределение α на $[0,1]$ задано функцией распределения $F_\alpha(\cdot)$, а распределение β на $[0,1]$ задано функцией распределения $F_\beta(\cdot)$. Таким образом, множество типов каждого индивида — это интервал $[0,1]$.

Стратегия индивида i в данной игре с неполной информацией задается функцией $s_i : [0,1] \to [0,1]$, которая ставит в соответствие типу индивида его выбор величины взноса c_i, т.е. $s_1(\alpha) = c_1$ задает взнос индивида 1, когда его тип α. При заданной стратегии $s_2(\cdot)$ индивида 2 ожидаемый выигрыш индивида 1 в случае, если его тип α, составит

$$Eu_1(c_1, s_2(\cdot), \alpha) = \begin{cases} \alpha - c_1, & \text{если } c_1 + E(s_2(\cdot)) \geq 1, \\ 0, & \text{если } c_1 + E(s_2(\cdot)) < 1, \end{cases}$$

где $E(s_2(\cdot)) = \int_0^1 s_2(x) dF_\beta(x)$ — ожидаемое значение взноса индивида 2, если им выбрана стратегия $s_2(\cdot)$, а распределение его возможных типов задано функцией распределения $F_\beta(\cdot)$. Следовательно, оптимальная стратегия индивида 1 имеет вид

$$s_1^*(\alpha, s_2(\cdot)) = \begin{cases} 1 - E(s_2(\cdot)), & \text{если } 1 - E(s_2(\cdot)) \geq \alpha, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, равновесие Байеса — Нэша $(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot))$, при котором реализации типов α и β таковы, что оба осуществляют взносы на финансирование общественного блага, удовлетворяет условиям

$$s_1^*(\alpha) = 1 - E(s_2^*(\cdot)) \tag{2.15}$$

и

$$s_2^*(\beta) = 1 - E(s_1^*(\cdot)). \tag{2.16}$$

Важно отметить, что в игре имеется континуум возможных равновесий. Существует равновесие, в котором ни один из индивидов не делает взносов, вне зависимости от его типа. Рассмотрим случай $\hat{s}_2(\beta)=0$ для всех $\beta\in[0,1]$; тогда оптимальная стратегия $\hat{s}_1(\alpha)=0$ для всех $\alpha\in[0,1]$. Но тогда $\hat{s}_2(\beta)=0$ для всех $\beta\in[0,1]$ — оптимальный отклик на $\hat{s}_1(\alpha)=0$, следовательно, $(\hat{s}_1(\alpha),\hat{s}_2(\beta))$ является равновесием в чистых стратегиях, причем в этом случае общественное благо не предоставляется. Рассмотрим теперь равновесия, в которых общественное благо будет предоставлено. Предположим, что распределение обоих типов индивидов является равномерным распределением на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$. То есть известно, что оценка общественного блага каждого индивида лежит в интервале $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Утверждается тогда, что равновесие Байеса — Нэша имеет вид $s_1^*(\alpha)=\frac{1}{2}$ и $s_2^*(\beta)=\frac{1}{2}$ для любых $\alpha,\beta\geq\frac{1}{2}$. Из (2.15) и (2.16) имеем

$$s_1^*(\alpha,s_2^*(\cdot))=\begin{cases}1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, & \text{если}\,\alpha\geq\frac{1}{2},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

и

$$s_2^*(\beta,s_1^*(\cdot))=\begin{cases}1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, & \text{если}\,\beta\geq\frac{1}{2},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Отсюда следует, что $s_1^*(\alpha)=\frac{1}{2}$ и $s_2^*(\beta)=\frac{1}{2}$ при всех $\alpha,\beta\geq\frac{1}{2}$ — равновесие Байеса — Нэша. ■

Заключительный пример основывается на модели «аукциона второй цены». Проблемой тут является размер предложения, которое индивиду стоит делать, чтобы максимизировать свой излишек от аукциона. Очевидно, непосредственная сложность состоит здесь в том, что получаемый индивидом излишек зависит от того, выигрывает или нет сделанное им предложение. Поскольку факт выигрыша или проигрыша аукциона данным индивидом зависит от предложений, сделанных другими участниками аукциона, выигрыш данного индивида зависит от всего набора сделанных предложений. Аукционы, таким образом, могут быть описаны стратегической игрой n лиц — участников торгов. В этом примере будет видно, что теоретическое обоснование аукционов как формы игры может привести к очень интересному и тонкому пониманию поведения их участников. (Аукционы будут подробно рассмотрены в гл. 5.)

Пример 2.32 (аукцион второй цены). Продавец хочет продать дорогую картину на аукционе, в котором будут участвовать n потенциальных покупателей. Каждому покупателю (называемому также участником) приписан номер, так что участники занумерованы как $1,2,\ldots,n$. У каждого участника есть собственная оценка картины $v_i>0$. Участники одновременно предлагают некоторую сумму денег (ставку); будем обозначать предложение участника i через $b_i\in[0,\infty)$. Таким образом, исход аукциона описывается **вектором предложений** $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, где b_i представляет собой предложение участника i.

В аукционе второй цены тот участник, чье предложение самое высокое, выигрывает аукцион и получает картину, выплачивая за нее сумму, равную второму по величине предложению. Если найдется более одного участника с максимальной величиной предложения, то победитель выявляется с помощью жребия, и за картину выплачивается сумма, равная этому максимальному предложению. Остальные получают нулевой выигрыш.

Для упрощения анализа введем следующее обозначение. Если $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — вектор ставок, то положим

$$m_{-i} = \max_{j \neq i} b_j .$$

Другими словами, m_{-i} — максимальное предложение всех участников, за исключением участника i. В частности заметим, что если максимальным предложением обладает только участник i, то m_{-i} обозначает второе по величине предложение.

Мы можем представить такой аукцион в виде игры в стратегической форме, где:

- участвует n игроков (аукционер не рассматривается как игрок);
- множество стратегий каждого игрока — это интервал $[0,\infty)$;
- выигрыш игрока i задается как

$$\pi_i(b_1, \ldots, b_n) = \begin{cases} v_i - m_{-i}, & \text{если } b_i > m_{-i}, \\ 0, & \text{если } b_i < m_{-i}, \\ \dfrac{1}{r}(v_i - m_{-i}), & \text{если } i \text{ среди } r \text{ участников} \\ & \text{с максимальным предложением.} \end{cases}$$

Отметим, что это игра с неполной информацией, поскольку участник знает только свою оценку выставленного на аукцион блага, но необязательно знает оценки других покупателей. Стратегия игрока i задается функцией $s_i(v_i) = b_i$, которая ставит в соответствие оценке величину предложения. Довольно неожиданным является следующее утверждение относительно аукциона второй цены:

- *Стратегия $s_i(v_i) = v_i$ является слабо доминирующей стратегией игрока i. В частности, профиль стратегий $(s_1(v_1) = v_1, s_2(v_2), \ldots, s_n(v_n))$ — равновесие Байеса — Нэша.*

Для того чтобы убедиться в этом, выберем игрока i и рассмотрим s_{-i} — произвольный набор предложений всех игроков за исключением i. Нужно показать, что

$$\pi_i(s_{-i}, v_i) \geq \pi_i(s_{-i}, a_i)$$

для любого $a_i \in S_i$ игрока i.

Пусть m обозначает максимальное предложение в профиле предложений s_{-i}. То есть если $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, то $m = \max_{j \neq i} s_j$. Рассмотрим два случая.

Случай I. $v_i > m$.

В этом случае игрок i, делая предложение v_i, выигрывает аукцион, и его выигрыш составляет

$$\pi_i(s_{-i}, v_i) = v_i - m > 0 .$$

Если участник i делает предложение $a_i < m$, то (при профиле предложений (s_{-i}, a_i)) он не выигрывает аукцион, так что

$$\pi_i(s_{-i}, a_i) = 0 < v_i - m = \pi_i(s_{-i}, v_i) .$$

Если участник i делает предложение $a_i = m$, то он оказывается среди участников с максимальным предложением. Если участников с максимальным предложением r, то

$$\pi_i(s_{-i}, a_i) = \frac{1}{r}(v_i - m) < v_i - m = \pi_i(s_{-i}, v_i) ,$$

так как $r > 1$.

Наконец, если $a_i > m$, то участник i делает предложение, которое выигрывает аукцион (m — вторая по величине ставка), и, значит,

$$\pi_i(s_{-i}, a_i) = v_i - m = \pi_i(s_{-i}, v_i) .$$

Таким образом, покупатель i не может увеличить свой выигрыш, сделав предложение, отличное от v_i, при том условии, что все остальные покупатели не отклоняются от s_{-i}.

Случай II. $v_i \le m$.

В этом случае игрок i, сделав предложение v_i, либо проигрывает аукцион (т.е. $\pi_i(s_{-i}, v_i) = 0$), либо оказывается среди $r \ge 1$ игроков с максимальным предложением m и получает при этом выигрыш $\pi_i(s_{-i}, v_i) = \frac{1}{r}(v_i - m) = 0$.

Если игрок i сделает предложение $a_i < m$, то он проиграет аукцион, следовательно,

$$\pi_i(s_{-i}, a_i) = 0 = \pi_i(s_{-i}, v_i) .$$

Если игрок i сделает предложение $a_i > m$, то он выиграет аукцион (m — второе по величине предложение) и получит выигрыш

$$\pi_i(s_{-i}, a_i) = v_i - m \le 0 = \pi_i(s_{-i}, v_i) .$$

Если игрок i сделает предложение $a_i = m$, то его выигрыш будет равен $\pi_i(s_{-i}, a_i) = \frac{1}{r}(v_i - m) \le 0$, откуда следует, что ему невыгодно отклоняться от стратегии v_i.

Таким образом, мы установили, что профиль стратегий $(s_1(v_1) = = v_1, s_2(v_2) = v_2, \ldots, s_n(v_n) = v_n)$ является равновесием Байеса — Нэша. Следовательно, можно ожидать, что каждый участник предложит свою истинную оценку картины и участник с самой высокой оценкой выиграет аукцион. Заметим, что это верно в случае, когда участники не знают оценок своих оппонентов. (О «нерациональном» равновесии по Нэшу в аукционе второй цены, при котором покупатель с максимальной оценкой не выигрывает аукцион, см. упражнение 17 в конце раздела.)

Упражнения

1. Две фирмы (назовем их 1 и 2) выпускают один и тот же товар. Фирма 1 производит q_1 единиц товара, а фирма 2 производит q_2 единиц, так что общее количество товара составляет $q = q_1 + q_2$. Предполагается, что
(a) рыночная цена товара при производстве его в объеме q составляет $p(q) = 100 - 2\sqrt{q}$;
(b) издержки производства q_1 единиц товара фирмой 1 равны $C_1(q_1) = q_1 + 10$;
(c) издержки производства q_2 единиц товара фирмой 2 равны $C_1(q_1) = 2q_2 + 5$.

Сформулируйте стратегическую игру двух лиц (как в примере 2.24), функции выигрышей которых являются функциями прибыли фирм. Найдите:
(a) функции прибыли фирм $\pi_1(q_1,q_2)$ и $\pi_2(q_1,q_2)$;
(b) равновесие по Нэшу;
(c) рыночную цену при равновесии по Нэшу;
(d) прибыли фирм в равновесии.

[Указания:
(i) $\pi_1(q_1,q_2) = (99 - 2\sqrt{q_1 + q_2})q_1 - 10$ и $\pi_2(q_1,q_2) = (98 - 2\sqrt{q_1 + q_2})q_2 - 5$;
(ii) равновесие по Нэшу находится из системы

$$\frac{\partial \pi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 0 \text{ и } \frac{\partial \pi_2(q_1,q_2)}{\partial q_2} = 0, \text{ или}$$

(после вычисления производных и упрощения)

$$3q_1 + 2q_2 = 99\sqrt{q_1 + q_2}, \qquad (2.17)$$

$$2q_1 + 3q_2 = 98\sqrt{q_1 + q_2}. \qquad (2.18)$$

Разделим (2.17) на (2.18) и, упростив, получим соотношение $q_2 = \frac{96}{101}q_1$.

Подставим его в (2.17) и после алгебраических преобразований вычислим $q_1 = 795{,}88$. Следовательно, $q_2 = 756{,}48$. Таким образом, $(q_1^*,q_2^*) = (795{,}88, 756{,}48)$ — равновесие по Нэшу;
(iii) рыночная цена $p = 21{,}2$;
(iv) $\pi_1(795{,}88, 756{,}48) = 16\,066{,}78$; $\pi_2(795{,}88, 756{,}48) = 14519{,}2$].

2. Рассмотрите дуополию Курно из примера 2.24.
(a) Найдите отображения наилучших ответов (здесь это функции) двух фирм.
[Ответ: $B_1(q_2) = \frac{A - q_2 - c_1}{2}$ и $B_2(q_1) = \frac{A - q_1 - c_2}{2}$.]
(b) Найдите равновесие по Нэшу в дуополии Курно с использованием функций наилучшего ответа.

(c) Вычислите прибыли фирм в равновесии по Нэшу. [Ответ: если (q_1^*, q_2^*) — равновесие по Нэшу, то

$$\pi_1(q_1^*, q_2^*) = \frac{(A + c_2 - 2c_1)^2}{9} \text{ и } \pi_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(A + c_1 - 2c_2)^2}{9},$$

где предполагается, что $A + c_2 - 2c_1 \geq 0$ и $A + c_1 - 2c_2 \geq 0$.]

3. Рассмотрите дуополию Курно с функцией спроса $q = 20 - p$. Предельные издержки каждой фирмы равны 2 долл.

(a) Опишите данный рынок в виде стратегической игры.

(b) Найдите равновесие по Нэшу.

(c) Получают ли фирмы максимально возможные прибыли, если производят равновесные по Нэшу объемы выпуска?

4. Рассмотрите модель дуополии Курно из примера 2.24. Найдите равновесие по Нэшу, если на рынке действуют три фирмы. Если на рынке n фирм? Что произойдет при $n \to \infty$?

5. Говорят, что набор стратегий $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ стратегической игры n лиц является ε**-равновесием по Нэшу** (где $\varepsilon > 0$), если для каждого игрока выполнено

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) - \varepsilon$$

при любом $s_i \in S_i$. Покажите, что хотя в модели дуополии Бертрана равновесия по Нэшу может не существовать, при любом $\varepsilon > 0$ всегда существует ε-равновесие по Нэшу.

6. В этом упражнении будут рассмотрены некоторые математические тонкости, касающиеся использования ресурсов в общественной собственности, затронутые в примере 2.29. Предположим, что функции C и u удовлетворяют свойствам из примера 2.29.

(a) Докажите, что уравнение $u'(r) = \kappa'(r)$ имеет единственное решение ρ^*, которое образует равновесие по Нэшу игры $R^* = n\rho^*$. [Указание: поскольку u' строго убывает, а κ' строго возрастает, то уравнение не может иметь более одного решения. Но поскольку $\lim\limits_{r \to 0^+}[u'(r) - \kappa'(r)] > 0$ и $\lim\limits_{r \to \infty}[u'(r) - \kappa'(r)] = -\infty$, можно заключить, что действительно имеется единственное решение ρ^*; см. рис. 2.8.]

(b) Покажите, что модель использования ресурсов в общественной собственности из примера 2.29 имеет единственный общественный оптимум R^{**}, установив, что уравнение $u'(r) = \kappa'(r) + (n-1)K'((n-1)r)$ имеет единственное решение ρ^{**}. [Указание: заметим, что функция $f(r) = u'(r)$ строго убывает, а функция $g(r) = \kappa'(r) + (n-1)K'((n-1)r)$ строго возрастает. Далее следуют аналогичные пункту (a) рассуждения; также см. рис. 2.8.]

(c) Покажите, что $R^{**} < R^*$. Что произойдет при $n \to \infty$?

7. Рассмотрим задачу «о ресурсах в общественной собственности» из примера 2.29 с функциями $u(r) = \sqrt{r}$, $\kappa(r) = 2r^2$ и $K(R) = R^2$. Покажите, что данные функции удовлетворяют требуемым свойствам, и найдите равновесие по Нэшу R^* и общественный оптимум R^{**}. [Ответ: $R^* = \frac{n}{4}$ и $R^{**} = \frac{n}{\sqrt[3]{4(4+2(n-1)^2)^2}}$.]

8. Рассмотрим $u, \kappa, K : (0,\infty) \to (0,\infty)$ в виде

$$u(r) = r + 1 - e^{-2r}, \ \kappa(r) = r + e^{-r} - 1 \ \text{и} \ K(R) = R^2.$$

Покажите, что:

(a) $u'(r) > 0$ и $u''(r) < 0$ при любом $r > 0$, а $\lim_{r\to 0^+} u'(r) = 3 > 0$.

(b) $\kappa'(r) > 0$ и $\kappa''(r) > 0$ при любом $r > 0$, а $\lim_{r\to 0^+} \kappa'(r) = 0$ и $\lim_{r\to\infty} \kappa'(r) = 1$.

(c) $K'(R) > 0$ и $K''(R) > 0$ при любом $R > 0$, а $\lim_{R\to 0^+} K'(R) = 0$ и $\lim_{R\to\infty} K'(R) = \infty$.

(d) С такими данными задача о ресурсах в общественной собственности (пример 2.29) не имеет равновесия по Нэшу. Почему это не противоречит результату примера 2.29?

(e) С этими функциями задача о ресурсах в общественной собственности имеет общественный оптимум.

9. **(Глобальное потепление)** Предположим, что существует n стран, которые выпускают товары, производство которых является причиной выбросов углекислого газа. Пусть $B(x)$ обозначает выгоду от совокупного производства товаров в объеме x единиц, $B'(x) > 0$ и $B''(x) < 0$. Предположим также, что совокупные издержки при производстве x_i единиц товара страной i составляют $\kappa(x_i) + K(X - x_i)$, где $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Функции $\kappa, K : (0,\infty) \to (0,\infty)$ удовлетворяют условиям $\kappa'(x) > 0$, $\kappa''(x) > 0$, $K'(X) > 0$ и $K''(X) > 0$ для любых $x > 0$ и $X > 0$. Кроме того, предполагается, что предельная выгода каждой страны при нулевых объемах производства больше предельных издержек при таких объемах.

(a) Запишите задачу в виде игры в стратегической форме (где в качестве игроков выступают страны).

(b) Найдите условия для равновесия по Нэшу.

(c) Найдите условия для общественно оптимального количества производства.

(d) Сравните условия и сделайте выводы.

10. **(Обобщенная модель избирателя)** Данное упражнение представляет собой обобщение модели примера 2.28. Пусть электорат распределяется вдоль идеологического спектра от $a = 0$ до $a = 1$ в соответствии с **идеологической функцией плотности** $\delta : [0,1] \to R$. Это значит, что функция δ непрерывна и удовлетворяет $\delta(x) > 0$ для любого $x \in (0,1)$ и $\int_0^1 \delta(x)dx = 1$. Интеграл $\int_a^b \delta(x)dx$, где $0 \le a < b \le 1$, интерпретируется

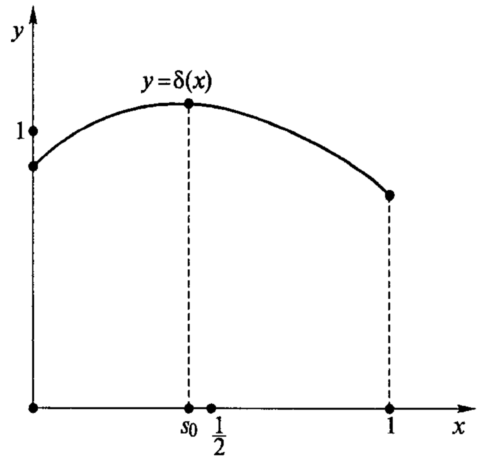


Рис. 2.9

как доля избирателей, чьи идеологические предпочтения лежат между a и b. Типичная идеологическая функция плотности распределения представлена на рис. 2.9.

Как и в примере 2.28, предполагается, что есть два кандидата, 1 и 2, каждый избиратель голосует за кандидата, который ему «ближе» по идеологической позиции, и кандидат с большим числом голосов побеждает.

(a) Определите идеологическую функцию плотности в модели медианного избирателя из примера 2.28.

(b) Покажите, что функции выигрышей кандидатов имеют вид

$$u_1(a_1,a_2) = \begin{cases} \int_0^{\frac{a_1+a_2}{2}} \delta(x)dx, & \text{если } a_1 < a_2, \\ 0{,}5, & \text{если } a_1 = a_2, \\ \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^1 \delta(x)dx, & \text{если } a_1 > a_2 \end{cases}$$

и

$$u_2(a_1,a_2) = \begin{cases} \int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^1 \delta(x)dx, & \text{если } a_1 < a_2, \\ 0{,}5, & \text{если } a_1 = a_2, \\ \int_0^{\frac{a_1+a_2}{2}} \delta(x)dx, & \text{если } a_1 > a_2. \end{cases}$$

(c) Покажите, что существует единственное $s_0 \in (0,1)$, такое что $\int_0^{s_0} \delta(x)dx = \frac{1}{2}$.

(d) Докажите, что (s_0,s_0) — единственное равновесие по Нэшу в данной игре с двумя кандидатами.

11. Идеологическая функция плотности (см. предыдущее упражнение) избирателей штата Индиана задается как $\delta(x) = -1{,}23x^2 + 2x + 0{,}41$.

(a) Изобразите график плотности.

(b) Найдите $s_0 \in (0,1)$, такое что $\int_0^{s_0} \delta(x)dx = \frac{1}{2}$. [Ответ: $s_0 \approx 0{,}585$.]

(c) После долгих лет правления республиканцев в 1988г. губернатором штата Индиана был избран демократ Эван Бай (Evan Bayh). Попробуйте угадать (и пояснить) идеологическое направление кампании Эвана Бая.

12. Рассмотрим модель избирателя (из примера 2.28) с тремя кандидатами.

(a) Запишите функцию выигрыша каждого кандидата.

(b) Покажите, что существует набор стратегий с различными идеологическими позициями, который позволяет получить всем кандидатам по 1/3 голосов.

(c) Покажите, что в игре нет равновесия по Нэшу.

(d) Будут ли кандидаты по-прежнему стараться понравиться медианному избирателю?

13. Рассмотрим снова обобщенную модель избирателя из упражнения 10, где, как обычно, выигрывает тот кандидат, который набрал больше всего голосов. Предположим, что у каждого кандидата есть возможность не участвовать в борьбе. Будем также считать, что каждый кандидат:

(a) предпочитает быть единственным победителем, а не делить первое место;

(b) предпочитает участвовать в борьбе и поделить первое место, а не отказаться от участия;

(c) предпочитает не участвовать, а не проиграть.

Выразите это в терминах стратегической игры и найдите ее равновесия по Нэшу.

14. Рассмотрим модель дуополии Курно с неполной информацией из примера 2.30. Найдите равновесие Байеса — Нэша, если общеизвестно, что предельные издержки фирмы 1 равны c_L, а предельные издержки фирмы 2 могут принимать значения c_H и c_L с вероятностью $0 < p < 1$.

15. Найдите равновесие Байеса — Нэша в условиях примера 2.31, где два индивида осуществляют взносы на финансирование общественного блага. Оценки индивидов распределены равномерно на интервале $[0,2]$, а совокупные издержки предоставления общественного блага равны 1.

16. Рассмотрим пример 2.31, где оценки общественного блага индивидами равномерно распределены на интервале $[0,1]$. Существует ли равновесие Байеса — Нэша, при котором общественное благо предоставляется? Приведите подробное объяснение.

17. В этом упражнении приводится пример равновесия по Нэшу в аукционе второй цены, при котором покупатель с максимальной оценкой не выигрывает аукцион.

Предположим, что в аукционе второй цены с двумя или более участниками, например, участник k имеет максимальную оценку, т.е. $v_k > v_i$ для любого $i \neq k$. Рассмотрим участника $l \neq k$ и вектор ставок $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, такой что

$$b_l > v_k,\ b_k < v_l,\ \text{и}\ b_i = 0\ \text{при всех}\ i \neq k, l.$$

Покажите, что $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – равновесие по Нэшу[1].

[1] Заметим, что ситуация в данном примере описывается игрой с полной информацией (и подходящей концепцией равновесия является равновесие Нэша), тогда как в примере 2.32 ситуация описывается игрой с неполной информацией (и речь идет о равновесии Байеса — Нэша).

Глава 3 # ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Всюду ранее предполагалось, что решения принимаются однократно, после чего участники получают вознаграждение. Однако во многих случаях решения должны приниматься последовательно, а получение вознаграждения возможно лишь после того, как принята вся цепочка решений. В сфере производства, например, продукт проходит через несколько этапов, на каждом из которых производитель должен решить, какой из нескольких альтернативных процессов использовать. Для того чтобы сделать карьеру, требуется принять последовательность решений, которые приведут к окончательному результату. Финансовое планирование в течение жизни обусловливает последовательность решений, принятых в различные периоды жизни индивида.

На данный момент у нас имеется довольно четкое представление о том, как действовать оптимально, если решения принимаются один раз. Последовательное принятие решений отличается тем, что процесс принятия решений оказывается более сложным. Изначально принятое решение влияет на выбор, который может быть сделан позже. Например, если индивид решил не поступать в университет, его выбор возможной профессии будет ограничен теми из них, которые не требуют высшего образования. Если кто-то решит не слишком много сберегать в ранние годы жизни, то выбор относительно того, сколько накапливать до выхода на пенсию, будет более ограниченным. Тот факт, что решения, принятые на начальных этапах, влияют на доступные в последующие годы в более поздних этапах альтернативы, оказывается центральным в последовательном принятии решений.

В этой главе мы сначала закладываем аналитические основы последовательного принятия решений, начав с обсуждения графов и деревьев. Затем будут рассмотрены последовательные решения как при определенности, так и при неопределенности. Наконец, в разделе 3.3 обсуждается принятие решений при неопределенности и вводится теорема Байеса как метод использования информации для переоценки априорных вероятностей или ожиданий (вер).

3.1. Графы и деревья

Графы позволяют глубже понять теорию последовательного принятия решений. По этой причине понятие графа будет играть ключевую роль в нашем изложении. Начнем с определения направленного графа.

Определение 3.1. ***Направленный граф*** (*или просто* ***граф***) — это пара

$$G = (V, E),$$

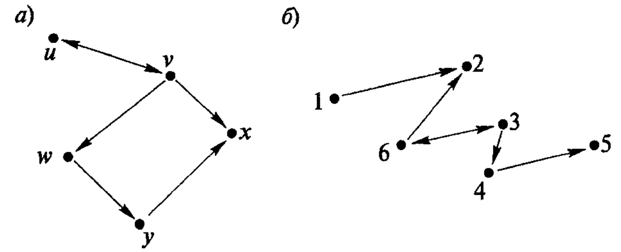


Рис. 3.1

*где V — конечное множество точек (называемых **узлами** или **вершинами** графа), а E — множество пар из V (называемых **ребрами** графа)*[1].

Направленный граф легко изобразить диаграммой. Диаграмма направленного графа состоит из его вершин (они как точки на плоскости) в совокупности с несколькими ориентированными отрезками, соединяющими пары вершин. Например, если (u,v) — ребро, то в диаграмме направленного графа рисуем отрезок $\overrightarrow{uv}$ со стрелкой в точке v. На рис. 3.1, *а* изображена диаграмма направленного графа с вершинами

$$V = \{u, v, w, x, y\}$$

и ребрами

$$E = \{(u,v),(v,u),(v,w),(v,x),(w,y),(y,x)\}.$$

На рис. 3.1, *б* изображен направленный граф с вершинами $\{1,2,3,4,5,6\}$ и ребрами $\{(1,2),(6,2),(6,3),(3,6),(3,4),(4,5)\}$.

Общепринято (и полезно) идентифицировать направленный граф с его диаграммой.

Если (u,v) — ребро, то обычно говорят, что u является **предшественником** v или v является **наследником (последователем)** u. Например, на рис. 3.1, *а* v — предшественник x и w, на рис. 3.1, *б* вершины 2 и 3 являются наследниками вершины 6.

Говорят, что в графе существует *путь* из вершины u в вершину v, если найдутся узлы $w_1, w_2, \ldots, w_k$, такие что пары

$$(u,w_1),\ (w_1,w_2),\ (w_2,w_3),\ldots,(w_{k-1},w_k),\ ),\ldots,(w_k,v) \qquad (*)$$

— ребра этого направленного графа. Набор ребер в (*) называют также **путем** графа от узла u к узлу v. Иначе говоря, путь из вершины u к другой вершине v показывает, каким образом v может быть достигнута из u, следуя серии ребер графа. Путь (*) также обозначается как

$$u \to w_1 \to w_2 \to w_3 \to \cdots \to w_{k-1} \to w_k \to v.$$

Длина пути — это количество его ребер. Так, путь, отмеченный (*), имеет длину $k + 1$.

[1] Существует также графы с бесконечным числом вершин и бесконечным числом ребер. В этой книге мы имеем дело с «конечными» графами, т.е. с графами с конечным числом вершин и ребер.

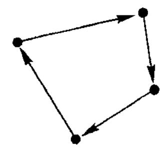


Рис. 3.2

Если существует путь из u в v, то принято говорить, что можно *соединить* u с v. Например, на рис. 3.1, *б* существует путь из вершины 6 к вершине 5 (путь $6 \to 3 \to 4 \to 5$), но нет пути из вершины 3 к вершине 1. В направленном графе на рис. 3.1, *а* имеются следующие пути из вершины u к вершине x: $u \to v \to x$; $u \to v \to w \to y \to x$; $u \to v \to u \to v \to x$.

Терминальным узлом направленного графа называется узел, из которого не выходит ни одного ребра. Например, узел x на рис. 3.1, *а* является терминальным. На рис. 3.1, *б* терминальными узлами направленного графа будут только 2 и 5. Направленный граф может не иметь терминальные узлы. Например, у графа на рис. 3.2 нет терминальных узлов.

С каждым направленным графом $G = (V,E)$ можно связать другой естественным образом определенный направленный граф, называемый **обратным графом**: он состоит из тех же узлов и ребер, однако ребра имеют противоположную ориентацию. То есть обратный граф (V, E') графа G — это граф с узлами V и ребрами $E' = \{(u,v) : (v,u) \in E\}$. Важно отметить, что пути обратного графа являются в точности путями исходного, имеющими противоположную направленность. Направленные графы (рис. 3.1) и их обратные графы (с пунктирными ребрами) показаны ниже на рис. 3.3.

Теперь мы подошли к важному понятию дерева — центральной идее в теории последовательных (динамических) игр.

Определение 3.2. *Направленный граф T называется* ***деревом****, если*

(1) *существует особый узел R (называемый* ***корнем*** *дерева), не имеющий входящих в него ребер, и*

(2) *для любого другого узла v существует единственный путь из корня R к u.*

Нетрудно понять, что направленные графы, изображенные на рис. 3.3, не являются деревьями. Пример дерева приведен на рис. 3.4.

Существуют и другие свойства деревьев. Мы оставляем проверку этих свойств читателю в качестве упражнения.

Теорема 3.3. *В каждом дереве*:

(1) *существует не более одного пути из узла u к другому узлу v*;

(2) *если существует путь от u к v, то не существует пути от v к u*;

(3) *для каждого отличного от корня узла v существует единственный узел u, такой что (u,v) — ребро дерева*;

(4) *для каждого нетерминального узла u существует (по крайней мере один) путь из u к некоторому терминальному узлу дерева.*

При работе с деревьями обычно принято использовать терминологию, которая удобна и хорошо усваивается.

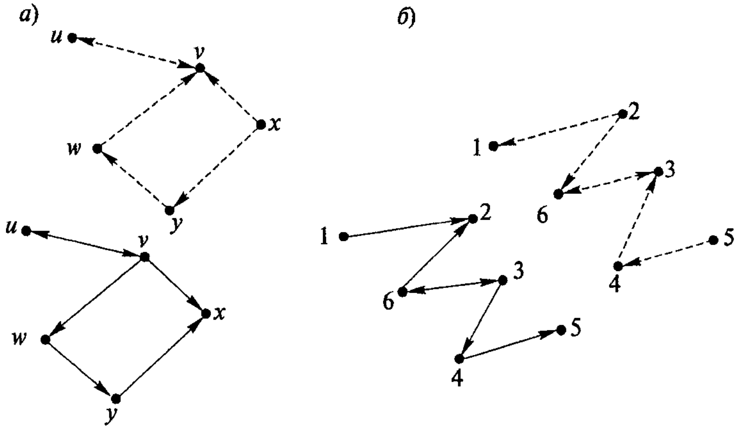


Рис. 3.3

- Если (u,v) — ребро дерева, то u называют **родителем** v, а v — **прямым потомком** u.
- Если существует путь из вершины u в v, то u — **предок** v, а v — **потомок** u.

Заметим, что в соответствии со свойствами, перечисленными в теореме 3.3, можно легко проверить, что у каждого узла, отличного от корня, имеется в точности один родитель. Следовательно, данные выше определения родителя и прямого потомка корректны. Следуя предложенной терминологии, корень R является предком всех узлов и каждый узел является потомком корня R.

Единственный путь, соединяющий узел u с узлом v, будем обозначать через $P(u,v)$. Например, в дереве из рис. 3.3 $P(u,4) = u \to 1 \to 3 \to 4$. Заметим, что путь $P(u,v)$ сам по себе является деревом с корнем u и конечным узлом v.

Ветвь дерева T — направленный граф с вершинами, начинающимися с вершины u, и содержащий всех ее потомков с соответствующими ребрами. Начинающуюся с u ветвь будем обозначать через T_u. Нетрудно понять, что T_u

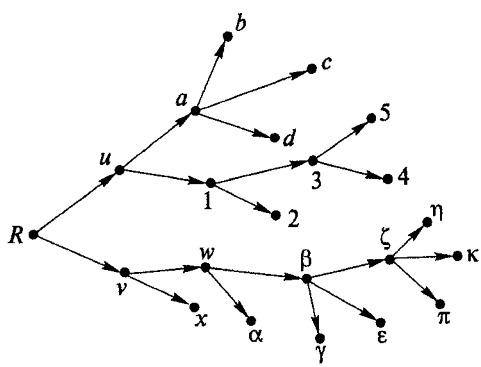


Рис. 3.4

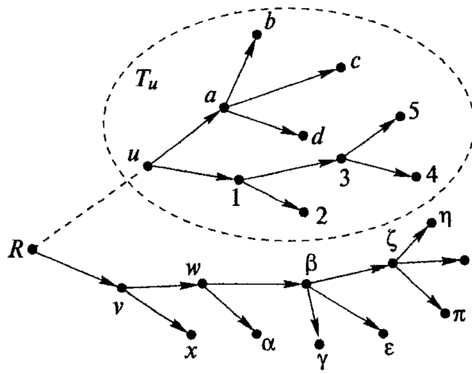


Рис. 3.5

является деревом с корнем u. На рис. 3.5 обозначена ветвь T_u направленного графа T из рис. 3.4.

В завершение обсуждения этой темы рассмотрим понятие поддерева.

Определение 3.4. *Дерево S называется* ***поддеревом*** *T, если*

(1) *узлы S образуют подмножество узлов T;*

(2) *ребра между узлами S в точности те же, что и у дерева T;*

(3) *конечные узлы S образуют подмножество конечных узлов T и*

(4) *корень S тот же, что и корень T.*

На рис. 3.4 направленный граф с вершинами $\{R, v, w, \beta, \varepsilon, \zeta, \pi, \kappa\}$ вместе с исходными ребрами между ними является поддеревом.

Упражнения

1. Рассмотрим дерево на рис. 3.4.

(a) Опишите ветви T_u и T_v.

(b) Найдите терминальные узлы дерева.

(c) Опишите пути $P(R,\kappa)$ и $P(R,5)$.

(d) Нарисуйте обратный граф для этого дерева.

2. Рассмотрим направленный граф, изображенный на рис. 3.6.

(a) Опишите этот граф в терминах множества.

(b) Укажите пути (и их длины) из вершины 1 к вершине 6.

(c) Найдите пути из вершины 3 до вершины 4.

(d) Нарисуйте обратный граф.

3. Проверьте справедливость всех свойств, перечисленных в теореме 3.3.

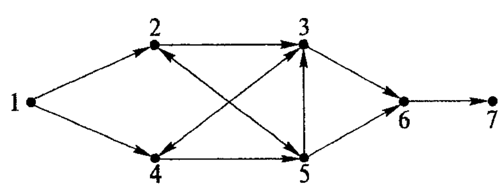


Рис. 3.6

4. Покажите, что любой путь $P(u,v)$ сам является графом с корнем u и терминальным узлом v. В частности, покажите, что любой путь от корня дерева до конечного узла является поддеревом.
5. Проверьте, что любая ветвь T_u дерева T является деревом с корнем u.
6. Покажите, что после удаления всех потомков некоторого узла оставшаяся часть дерева сама будет деревом с корнем, совпадающим с корнем данного дерева. Будет ли она поддеревом?
7. Найдите все поддеревья дерева из рис. 3.4.
8. Покажите, что если дерево имеет n ребер и k вершин, то $n = k - 1$. Другими словами, покажите, что число ребер дерева на единицу меньше числа вершин этого дерева.
9. Покажите, что в любом дереве существует по крайней мере один узел, прямые потомки которого — только терминальные узлы. (Это свойство деревьев используется в методе обратной индукции, который будет обсуждаться в разделе 3.2.)

3.2. Принятие решений

Лицо, принимающее решения, часто сталкивается с ситуацией, когда необходимо принять серию решений в последовательном порядке — одно за другим. Например, предприятие, производящее определенный продукт, стартует с выбора исходного процесса, затем совершает выбор из нескольких промежуточных процессов, прежде чем будет достигнут финальный этап. Многие решения личного характера также включают последовательное принятие решений. Один из наиболее удачных способов описания процесса последовательного принятия решений — описание на основе построенных для этой цели направленных графов. Их называют графами решений и определяют следующим образом.

Определение 3.5. ***Графом решений*** *является любой направленный граф с единственным корнем R, такой что*

(1) *R — единственный узел, в который не входит ни одно ребро*;
(2) *для каждого узла N, отличного от R, есть единственный путь из R в N*;
(3) *существует как минимум один конечный узел и*
(4) *из любого не конечного узла N есть как минимум один путь до конечного узла.*

Любое дерево является графом решений, однако не всякий граф решений будет деревом. Пример графа решений изображен на рис. 3.7. Граф решений интерпретируется как описание последовательности принятия решений в следующем смысле. Корень R представляет собой начало процесса последовательного принятия решений индивидом, узлы — различные этапы этого процесса, ребра — сами решения, доступные индивиду. Терминальные узлы являются конечными этапами процесса принятия решений и обычно дополняются значениями выигрышей на таких этапах. Или, иначе, выигрыш в любом терминальном узле — это «вознаграждение» (которое может присутствовать в различных формах), получаемое индивидом в конце

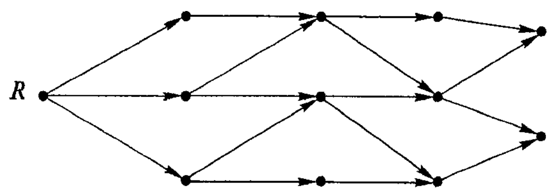


Рис. 3.7. Граф решений

последовательности решений, которые привели его к этому конкретному терминальному узлу. Другими словами, процесс принятия решений состоит из графа решений вместе с заданием выигрышей в каждом терминальном узле этого графа.

Проиллюстрируем процесс принятия решений на примере.

Пример 3.6. Выпускник школы решает, продолжить ли образование в колледже. Если он выберет «не поступать в колледж», то дальше придется выбирать между устройством на работу и поступлением в техническую школу для освоения профессии. Последствия в терминах заработка на протяжении жизни будут в двух этих ситуациях (поступать или не поступать в колледж) различны. Если же он решит поступать в колледж, то после окончания (при условии, что он колледж закончит) нужно снова решать, получать ли профессиональное образование (профессиональную степень), идти учиться в магистратуру или же выходить на рынок труда и искать работу. Заметим, что каждое решение подразумевает различные издержки и выгоды.

Описанная задача последовательного принятия решений может быть представлена в виде дерева решений. На рис. 3.8 представлены выигрыши гипотетического выпускника средней школы. Выигрыши окажутся различными для разных выпускников школ, в результате мы увидим разнообразие

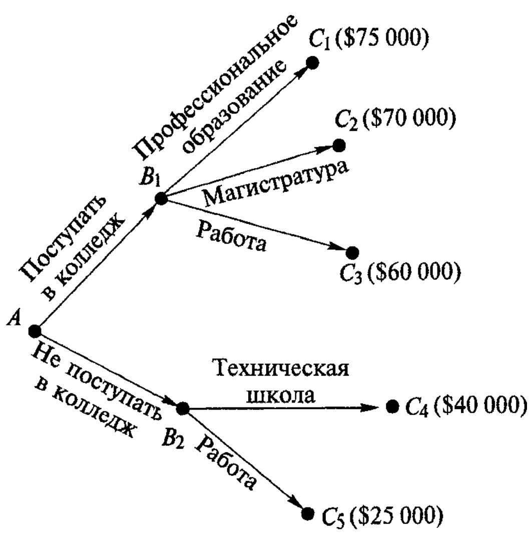


Рис. 3.8. Карьерное дерево решений

решений, ни одно из которых априори не может быть отвергнуто как нерациональное. Центральной задачей в процессе принятия решений является выбор «оптимального пути принятия решений». *Оптимальный путь принятия решений*, как следует из его названия, — это путь, приводящий к терминальному узлу с наилучшим возможным выигрышем. На дереве решений обычно существует единственный оптимальный путь, за исключением случаев, когда присутствуют два или более терминальных узлов с одинаковыми выигрышами. Из примера 3.6 с очевидностью вытекает, что для рассматриваемого выпускника средней школы оптимальным является путь $A \to B_1 \to C_3$.

Вместо того чтобы указывать выигрыши для каждого терминального узла, часто перечисляют выигрыши отдельных решений вдоль ребер графа решений. В этом случае выигрыш заданного пути

$$N \to N_1 \to N_2 \to \cdots \to N_{k-1} \to N_k$$

(из вершины N к вершине N_k) будет равен сумме выигрышей на ребрах

$$NN_1,\ N_1N_2, \ldots, N_{k-1}N_k.$$

Широко используемый в приложениях метод нахождения оптимальных путей в дереве решений называется *методом обратной индукции*. Он основывается на следующем простом свойстве.

Теорема 3.7. *Если в графе решений путь*

$$N \to N_1 \to N_2 \to \cdots \to N_k \to N_{k+1} \to \cdots \to N_l \to \cdots \to N_m$$

является оптимальным, то $N_k \to N_{k+1} \to \cdots \to N_l$ *также будет оптимальным путем из* N_k *в* N_l.

Доказательство. Если $N_k \to N_{k+1} \to \cdots \to N_l$ не является оптимальным путем из N_k в N_l, то существует путь $N_k \to M_1 \to \cdots \to M_r \to N_l$ из N_k в N_l, лучший, чем $N_k \to N_{k+1} \to \cdots \to N_l$. Но тогда путь

$$N_1 \to N_2 \to \ldots \to N_k \to M_1 \to \cdots \to M_r \to N_l \to \cdots \to N_m$$

был бы лучше, чем путь $N \to N_1 \to N_2 \to \cdots \to N_k \to N_{k+1} \to \cdots \to N_l \to \cdots \to N_m$. Полученное противоречие и доказывает утверждение. ■

Теперь опишем применение **метода обратной индукции** для дерева решений[1] более подробно. Этот метод состоит в продвижении по шагам в обратном (от терминальных узлов) направлении начиная с терминальных узлов дерева решений, при этом в каждый период времени выполняется один шаг, до тех пор пока не будет достигнут корень. Точная процедура «обратных шагов» описывается следующим образом.

Сперва выбираются все предшественники конечных узлов, прямые *наследники которых являются терминальными узлами* (т.е. все узлы, ребра которых входят в терминальные); будем называть их узлами шага 1 (или этапа 1). Припишем каждому узлу шага 1 значение выигрыша, который может быть

[1] В общем случае для дерева решений метод обратной индукции применим не всегда; см. упражнение 1 в конце этого раздела.

получен путем достижения наилучшего терминального узла из данного. (Заметим, что поскольку мы будем работать с деревьями решений, а не графами, то всегда существуют узлы, все прямые потомки которых являются терминальными узлами. Последнее неверно в случае графа общего вида; см. упражнение 1 в конце этого раздела.) Затем удалим прямых потомков узлов шага 1 и получим усеченное дерево шага 1.

Второй шаг повторяет процесс путем выбора предшественников узлов шага 1, прямые потомки которых являются конечными узлами усеченного дерева шага 1. Таким образом, узлы шага 2 представляют собой все узлы, ребра которых заканчиваются в конечных узлах усеченного дерева шага 1. По аналогии называем их узлами шага 2. Для каждого узла N шага 2 существует ребро, ведущее к узлу шага 1 с наибольшим возможным суммарным выигрышем; приписываем узлу N значение этого выигрыша. (Ясно, что это наибольший выигрыш, который может быть получен участником при старте из узла N.) Далее удалим от усеченного дерева прямых потомков узлов шага 2 и получим усеченное дерево шага 2.

Все предшественники узлов шага 2, ребра которых оканчиваются в конечных узлах усеченного дерева шага 2, будут узлами шага 3. Как и ранее, для каждого узла N шага 3 находим ребро, ведущее к узлу шага 2 с лучшим суммарным выигрышем, и приписываем этот выигрыш узлу N. В свою очередь, этот выигрыш является лучшим из того, что может получить участник при старте из узла N. Усеченное дерево шага 3 получается путем удаления из усеченного дерева шага 2 прямых потомков узлов шага 3.

Продолжаем этот обратный процесс, до тех пор пока все предшественники узлов этого шага не будут состоять из корня R. Путь из корня R до узла этого шага, который дает наибольший общий выигрыш, является началом оптимального пути, который теперь можно проследить в обратном направлении.

Проиллюстрируем метод обратной индукции на примере графа решений 3.6, приведенного на рис. 3.8. Множество конечных узлов графа решений в данном случае состоит из $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$. Согласно методу обратной индукции, на первом шаге выбираются все предшественники множества конечных узлов, потомки которых — терминальные узлы; здесь это множество узлов $\{B_1, B_2\}$. Каждому узлу B_1 и B_2 припишем наилучшие

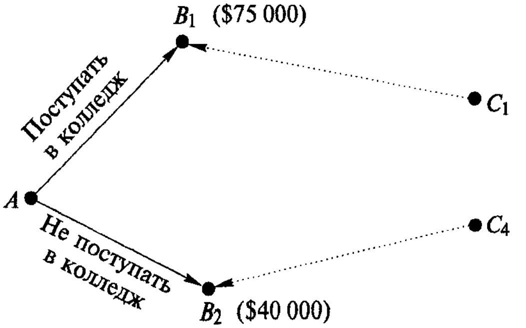


Рис. 3.9. Усеченное дерево решений

выигрыши выпускника, которые он может получить, достигнув терминальных узлов. Видим, что лучший выигрыш для узла B_1 равен 75 тыс. долл., а лучший выигрыш для узла B_2 — 40 тыс. долл. Это отражено на усеченном дереве решений рис. 3.9. В усеченной версии исходного дерева решений оптимальное ребро — это ребро, которое приводит к узлу B_1. Следовательно, оптимальным путем будет $A \to B_1 \to C_1$; т.е. выпускник решит пойти учиться в колледж, а затем получит профессиональное образование.

Приведем еще один пример, иллюстрирующий метод обратной индукции.

Пример 3.8. Рассмотрим дерево решений, приведенное на рис. 3.10. Числа вдоль ребер отражают издержки. Таким образом, оптимальный путь будет иметь минимально возможные издержки.

На первом шаге находим все узлы, прямые потомки которых являются терминальными узлами. Нетрудно видеть, что множество таких узлов — это $\{D, T, L\}$. Лучшим ребром, выходящим из точки D в направлении терминального узла, является DL с минимальными издержками, равными 1; поэтому оставляем это ребро и удаляем другое, указывая в узле D этот минимальный уровень издержек как $D(1)$. Аналогичным образом будут найдены ребра TN и GS (рис. 3.10).

Далее ищем узлы второго шага. Они в точности совпадают с теми узлами, ребра которых входят в терминальные узлы усеченного дерева шага 1. Легко видеть, что это будут элементы множества $\{A, B, C\}$; см. рис. 3.10. Теперь

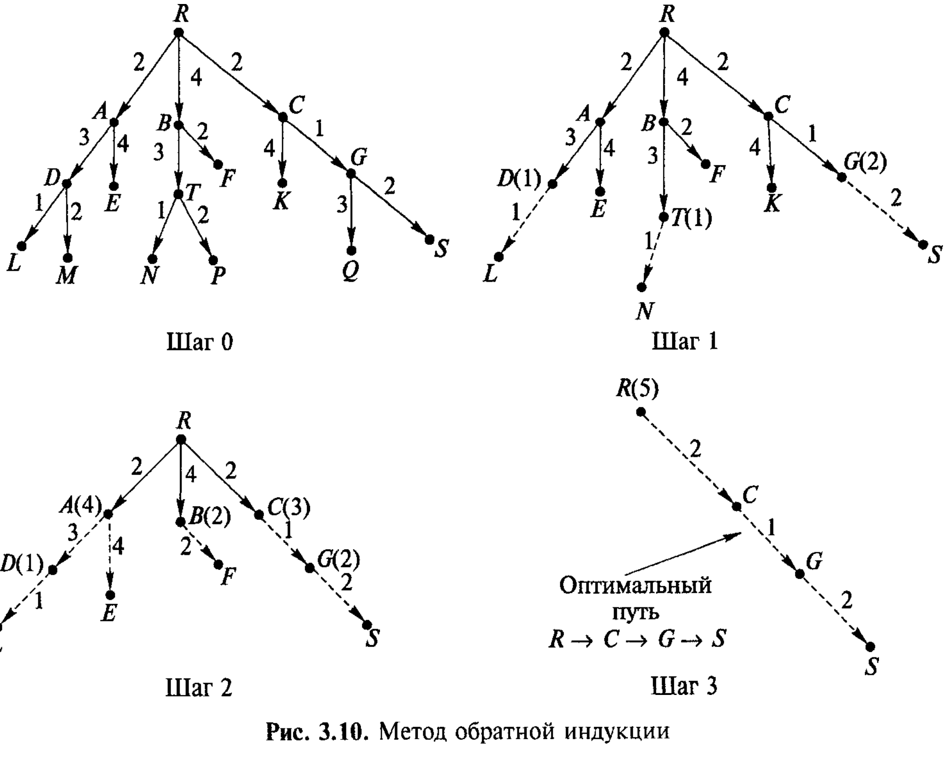


Рис. 3.10. Метод обратной индукции

находим выходящие из узлов *A*, *B* и *C* ребра с минимальными издержками на пути к соответствующим терминальным узлам. Новое усеченное дерево изображено на рис. 3.10 (шаг 2). Отметим, что числа в скобках указывают минимальные издержки на пути от текущего узла до терминального. Например, *C*(3) означает, что достичь из узла *C* некоторого терминального узла исходного дерева решений удастся с издержками, не меньшими 3. Подобным же образом *B*(2) указывает на тот факт, что из узла *B* можно достичь некоторого терминального узла исходного дерева решений с минимальными издержками, равными 2.

Узлы шага 3 состоят из единственного корня *R*. Ясно, что среди ребер, выходящих из *R* к узлам *A*, *B* и *C*, наименьшие издержки у *RC*. Это завершает анализ на основе метода обратной индукции, который дает оптимальный путь $R \to C \to G \to S$.

Обратимся к еще одной иллюстрации обратной индукции на примере процесса принятия решений, направленный граф которого не является деревом.

Пример 3.9. Предположим, что некий предприниматель выпускает товар, производство которого проходит четыре отдельных этапа начиная с этапа *A* и заканчивая этапом *D*. При переходе от одного этапа к другому производитель может выбирать из нескольких процессов. Переходя от *A* к *B*, он сталкивается с выбором из четырех различных вариантов. В дальнейшем (как при переходе от этапа *B* к этапу *C*, так и при переходе от этапа *C* к этапу *D*) его выбор зависит от решения, принятого на предыдущем этапе. Ясно, что производитель хотел бы организовать свое производство так, чтобы общие издержки оказались минимальными.

Эта задача подразумевает последовательное принятие решений, поскольку выбор на каждом этапе зависит от того, что было предпринято на более ранних этапах. Лучше всего описать задачу, составив граф решений, представленный на рис. 3.11. Цель — найти путь, характеризующийся наименьшими совокупными издержками. На графе указаны издержки в расчете на единицу при использовании каждого возможного процесса. Например, если производитель выберет процесс $A \to B_1$, то удельные издержки составят 7 долл.

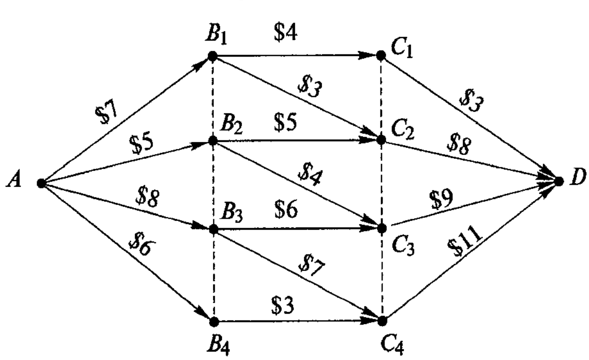


Рис. 3.11

при переходе от этапа (узла) A к этапу (узлу) B_1. Как и ранее, будем искать оптимальный путь с помощью метода обратной индукции, что отображено на рис. 3.12.

Находим все узлы, ребра которых заканчиваются в терминальном узле D; совокупность этих узлов индукции — множество узлов шага 1 индукции — это $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$. Минимальные издержки достижения D из различных узлов C_i

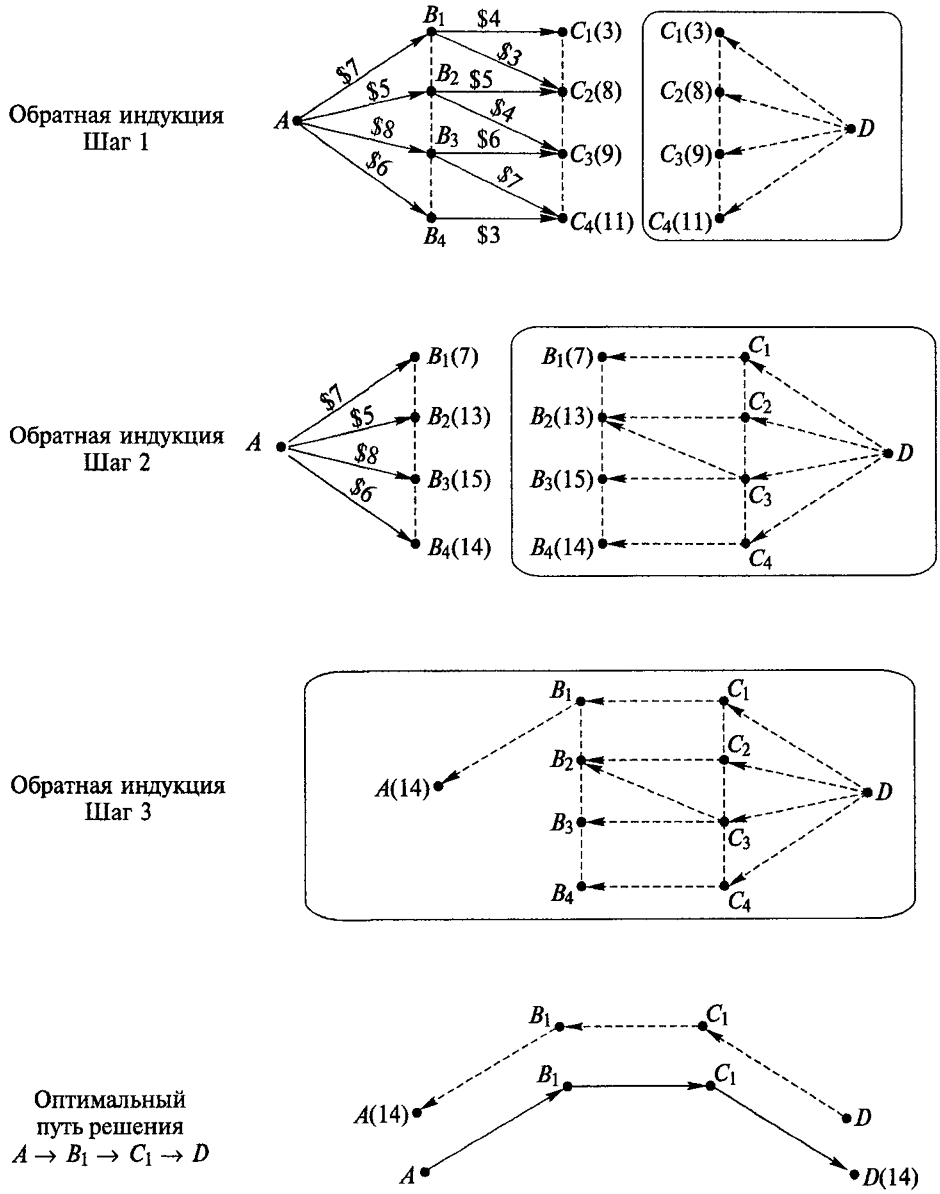


Рис. 3.12. Метод обратной индукции для примера 3.11

указаны на верхней диаграмме рис. 3.12. На этом завершается первый шаг обратной индукции.

На втором шаге индукции находим узлы, для которых ребра, из них выходящие, заканчиваются в узлах множества $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$. Это узлы множества $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Для каждого узла B_i добавляем в скобках совокупные минимальные издержки, необходимые для достижения узлов шага 1 из B_i. Это показано на второй сверху диаграмме рис. 3.12. Следующий шаг приводит к корню A. Видим, что ребро AB_1 дает минимум совокупных издержек среди всех ребер из A в B_1, B_2, B_3, B_4.

Таким образом, на основе обратной индукции получаем путь

$$D \to C_1 \to B_1 \to A,$$

обратный оптимальному.

Изменяя направление этого пути на обратное, получаем оптимальный путь решений $A \to B_1 \to C_1 \to D$, см. рис. 3.12. ■

Упражнения

1. Это упражнение показывает, что, вообще говоря, метод обратной индукции не может применяться для поиска оптимального пути решения, если процесс принятия решений описывается графом, а не деревом. Рассмотрите процесс принятия решений, описанный графом из рис. 3.13.

(a) Найдите оптимальный путь решений.
[Ответ: $R \to B \to C \to E \to A \to D \to G$.]

(b) Покажите, что метод обратной индукции (описанный в этом разделе) в данном случае неприменим.

2. Граф на рис. 3.14 описывает процесс принятия решения (одним лицом). Числа вдоль ребер представляют издержки принятия соответствующих решений. Процесс принятия решений начинается с корня R и заканчивается в одном из терминальных узлов L, M, N, P, Q, S.

(a) Покажите, что граф решения не является деревом.

(b) Проверьте, что в данном случае для поиска оптимального пути можно воспользоваться методом обратной индукции, и найдите этот путь и минимальные издержки вдоль него.
[Ответ: $R \to C \to E \to H \to K \to S$ и $R \to C \to F \to H \to K \to S$.]

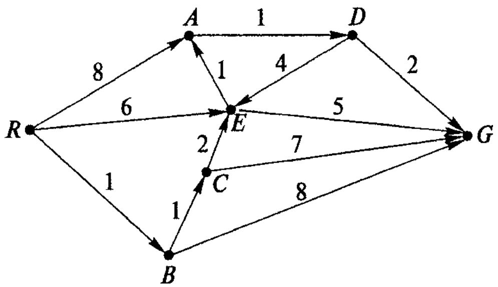


Рис. 3.13

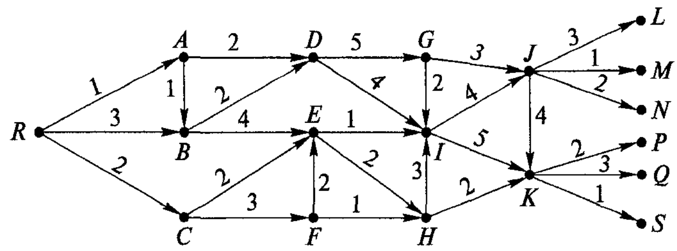


Рис. 3.14

3. Покажите, что любой процесс принятия решений имеет оптимальный путь.
4. Пилоты American Airlines объявили забастовку 17 февраля 1997 г., требуя более выгодных условий контракта.
   (a) Изобразите дерево решений, отражающее проблему, с которой столкнулись пилоты, до того момента как приняли решение о забастовке.
   (b) Какие выигрыши в дереве согласуются с принятым решением о забастовке?
5. Рассмотрим задачу о выборе карьеры из примера 3.6 (выигрыши — потоки доходов за вычетом расходов на обучение). Оптимальным выбором в примере было пойти учиться в колледж и далее выходить на рынок труда и устраиваться на работу.
   (a) Предположим, что при поступлении в профессиональное училище выпускник будет получать стипендию. Повлияет ли это на его выбор?
   (b) Теперь рассмотрим другого выпускника, предпочтения которого относительно магистратуры подразумевают, что он готов получать меньший доход, но учиться в магистратуре. Как это отразится на выигрышах? Укажите на дереве решений.
6. Инвестор подумывает о покупке фирмы, которая выставлена на торги. После приобретения (если согласится) он сможет либо распустить ее и перепродать, либо назначить новое руководство и управлять ею. Затем в ближайшем будущем он сможет продать ее или оставить.
   (a) Составьте дерево решений инвестора.
   (b) Запишите выигрыши в конечных узлах и найдите оптимальный путь. Объясните ваш выбор выигрышей и прокомментируйте полученное оптимальное решение.
7. Венчурный капиталист выбирает, какую из двух альтернативных авантюр ему финансировать. Одной из них является внедрение на рынок препарата, патент на который вскоре истекает. Другая требует вложений в развитие коммерческого применения методики сращивания генов.
   (a) Нарисуйте дерево решений для венчурного капиталиста. [Подсказка: заметьте, что второй проект даст высокую отдачу только на втором этапе, если будет продаваться.]
   (b) Какой вариант выберет капиталист? [Подсказка: запишите прибыль от каждого варианта и проанализируйте оптимальный путь.]

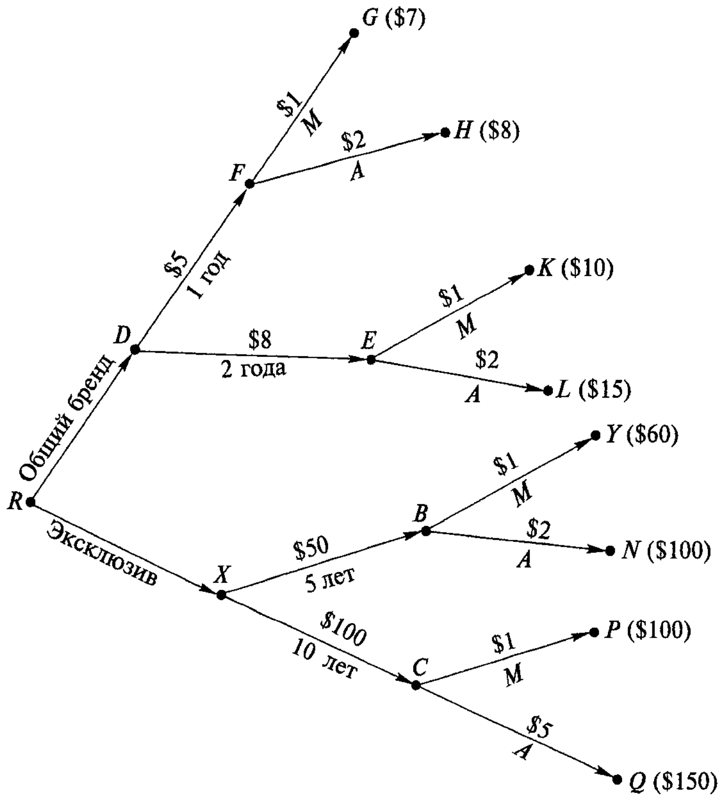


Рис. 3.15

8. Винодел может выбирать, производить ли ему и продавать обычные вина или эксклюзивный бренд. Процесс принятия решений является последовательным и представлен деревом решений на рис. 3.15. Дерево решений показывает издержки производства в расчете на одну бутылку на каждом этапе процесса принятия решений (*M* означает маркетинг, *A* — рекламу[1]). В терминальных узлах указана цена бутылки (соответствующего сорта) вина.
   (a) Найдите путь решений, максимизирующий прибыль в расчете на одну бутылку.
   (b) Приведет ли этот путь к оптимальному решению для винодела? Почему нет? [Подсказка: обычные сорта вин могут продаваться в бóльших количествах, чем эксклюзивные вина.]

3.3. Принятие решений при неопределенности

В предыдущем разделе, обсуждая проблему последовательного принятия решений, мы отмечали, что выбор на каждой стадии может иметь неизвестные точно определенные последствия. Так, в задаче выбора

[1] От английского «advertising». — *Примеч. пер.*

карьеры вполне возможно, что если индивид решит после окончания школы стать актером, шансы, что его доход на протяжении всей жизни будет очень высоким, небольшие, тогда как высока вероятность того, что его доход будет намного более скромным. Похожим образом выбору производителя на каждом этапе производственного процесса может сопутствовать более высокая или более низкая вероятность того, что в результате товар окажется бракованным. Иначе говоря, когда решения принимаются последовательно, влияние некоторых из этих решений на успешность финального исхода неизвестны.

Неопределенность данного типа вводится в задачах последовательного принятия решений путем добавления узлов, в которых выбор делает природа. Следующие примеры показывают, как иметь дело с неопределенностью в задачах последовательного принятия решений.

Пример 3.10 (оптимальные решения в конкурирующем спорте)[1]. Рассмотрим футбольную команду (американский футбол), которая оказалась в двух ярдах от тачдауна (линии розыгрыша, конца зоны). В этот момент команда сталкивается с выбором: пробить по мячу или продолжать продвигаться к тачдауну. Попадание (гол) с игры (с двухъярдовой линии) принесет команде 3 очка с вероятностью 1. Тачдаун, с другой стороны, имеет вероятность успеха, равную 0,4, и в этом случае приносит команде 6 очков и свободный удар, который приносит еще одно очко, что в целом дает 7 очков. Итак, если сразу же после этого игра заканчивается, ожидаемый выигрыш от тачдауна составляет $0,4\times 7 = 2,8$ против $3\times 1 = 3$ от гола с игры. Однако если ожидается, что игра будет продолжена после тачдауна, другие стартовые позиции оппонентов тогда ведут к другим выигрышам продолжения. Пусть v_1, v_2 и v_3 обозначают выигрыши продолжения в случае после успешного тачдауна, после неудачи тачдауна и после гола с игры соответственно. Дерево решений этой футбольной команды показано на рис. 3.16.

Ожидаемый выигрыш от тачдауна теперь уже не 2,8, а равен

$$0,4\times(7+v_1)+0,6\times v_2 = 2,8+0,4v_1+0,6v_2.$$

А ожидаемый выигрыш от гола с поля составляет тогда

$$3+v_3.$$

Если игра продолжается вне зависимости от того, был ли тачдаун, то в случае, если тачдаун имел место, игра начинается с удара от мяча на 27-ярдовой линии зоны противника. В случае фиаско (открыть счет) мяч получают оппоненты, но уже на 99-ярдовой линии от линии розыгрыша (тачдауна). В случае тачдауна или гола с игры мяч снова у оппонентов, но они начинают на 27-ярдовой линии. Ожидаемый счет (очков) команды с 99-ярдовой линии составляет 1,6, а с 27-ярдовой линии к 1 очку. Это означает, что при фиаско в открытии счета (неудачи тачдауна) (т.е. в случае потери мяча) ожидаемый

[1] Этот пример представлен в статье в «New York Times» (2003, September 12) на с. C2.

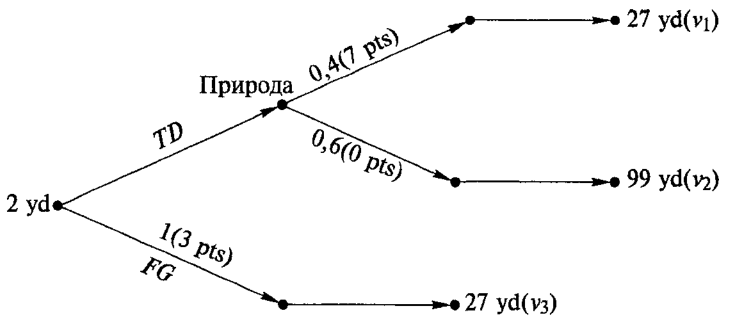


Рис. 3.16

выигрыш команды равен +1,6, т.е. $v_2 = 1{,}6$. В случае гола с поля или тачдауна ожидаемый выигрыш оценивается как $v_1 = v_3 = -0{,}75$, поскольку у противника теперь более высокие шансы набрать очки. Итак, ожидаемый выигрыш после решения продвигаться к тачдауну составляет

$$2{,}8 + 0{,}4v_1 + 0{,}6v_2 = 2{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}75 + 0{,}6 \times 1{,}6 = 3{,}46,$$

а ожидаемый выигрыш от гола с игры равен

$$3 + v_3 = 3 - 0{,}75 = 2{,}25.$$

Оптимальное решение, когда принимаются во внимание выигрыши продолжения, — это решение продвигаться к тачдауну, а не пробить по мячу. ■

Вот еще один пример, иллюстрирующий роль неопределенности при принятии решений.

Пример 3.11. Фармацевтическая фирма *X* должна принять решение о внедрении нового препарата. Это значит, что существует изначальное решение о том, сколько вкладывать в исследование и разработку. Существует вероятность провала вследствие того, что препарат не будет создан в отведенные сроки, и из-за того, что он окажется не вполне успешным на рынке. На каждом этапе процесса принятия решений, как можно заметить, присутствует неопределенность. Дерево решений задачи изображено на рис. 3.17.

На первом этапе фирма *X* решает, вложить много (*Hi*) или мало (*Lo*) средств в исследование и разработку или ничего не предпринимать (*DN*). Результат вложений может привести к успеху или неудаче с вероятностью *p* успеха, причем эта вероятность *p* окажется выше в случае бóльших вложений в разработку. Даже в случае успешного производства препарата фирма может решить не продавать его. Неопределенность относительно того, может ли препарат быть произведен, разрешается здесь введением узла «природа», где выбор осуществляется природой. Ребра *M* и *DM* означают решение «продавать» и «не продавать» препарат соответственно.

Эту задачу можно решить методом обратной индукции. На первом шаге индукции фирма решает с учетом выигрышей, указанных на рис. 3.17, прода-

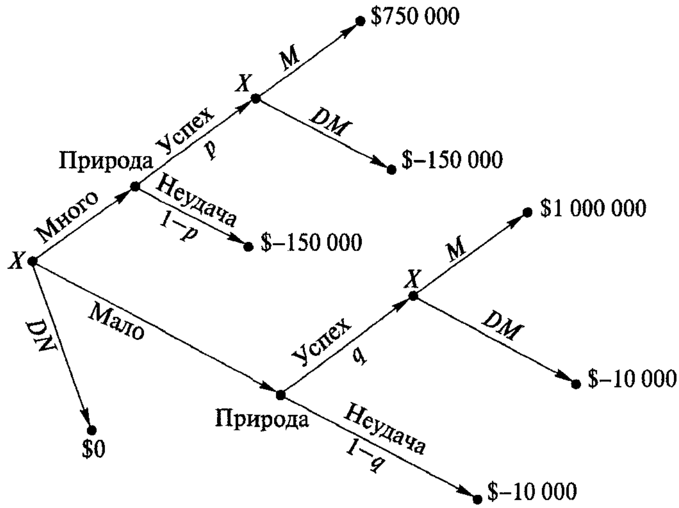


Рис. 3.17

вать или не продавать препарат. Фирма всегда выбирает продавать препарат. Это ведет к усеченной версии дерева решений, изображенной на рис. 3.18, причем значения выигрышей выражены в форме ожидаемых выигрышей.

Теперь фирме предстоит сравнить две лотереи, которые порождают решение о выборе высоких или низких расходов на исследования и разработку. Если фирма нейтральна к риску, то будет выбрана лотерея с наибольшим ожидаемым выигрышем, в противном случае выбор будет зависеть от вида функции полезности Неймана — Моргенштерна данной фирмы. Если фирма нейтральна к риску и ожидаемые прибыли отрицательны, то она не будет приступать к производству препарата (т.е. выберет *DN*). ■

Однако фирма может столкнуться с несколько более сложной задачей, если у нее нет уверенности в том, насколько успешной окажется рыночная реализация препарата. Обычно в таких случаях фирмы пытаются собрать информацию о рыночной реализуемости своих товаров и на основе этой информации пересматривают свои оценки успешности будущих продаж.

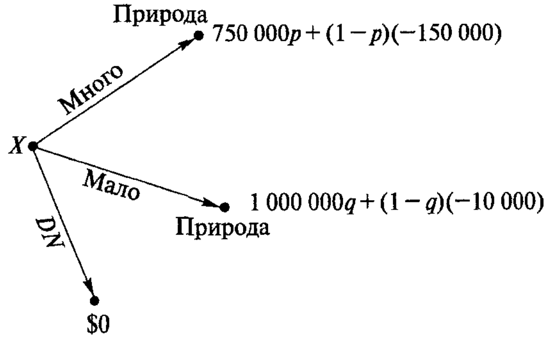


Рис. 3.18

Обработка подобной информации с целью дальнейшего принятия решений очень важна для любой фирмы. Обратимся к предыдущему примеру, чтобы проиллюстрировать данное замечание.

Пример 3.12. Рассмотрим фармацевтическую компанию X из примера 3.11. Теперь, однако, расширим исходное дерево решений таким образом, чтобы оно включало событие, заключающееся в том, что поступивший в продажу препарат может не очень успешно продаваться на рынке. Это новое дерево решений изображено на рис. 3.19.

Ребра G (хорошие рыночные условия) и B (плохие рыночные условия), добавленные к узлам, где вмешивается «*природа*», представляют варианты, при которых (с вероятностью s) производимый препарат хорошо продается или (с вероятностью $1 - s$) окажется на рынке неуспешным. Значение s является *априорной вероятностью* того, что товар будет успешно продаваться. После того как фирма соберет достаточно информации о рынке, эта вероятность будет пересмотрена до *апостериорной вероятности*. Обычно это делается с помощью формулы Байеса из теории вероятности. ■

Формула Байеса — одна из самых известных в теории вероятностей. Она позволяет ответить на следующий важный вопрос.

- *Если известно, что произошло событие B, какова вероятность того, что произойдет другое событие A?*

Ответ на этот вопрос следующий: если произошло событие B, то вероятность события A, величина $P(A|B)$, (по определению) задается формулой

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

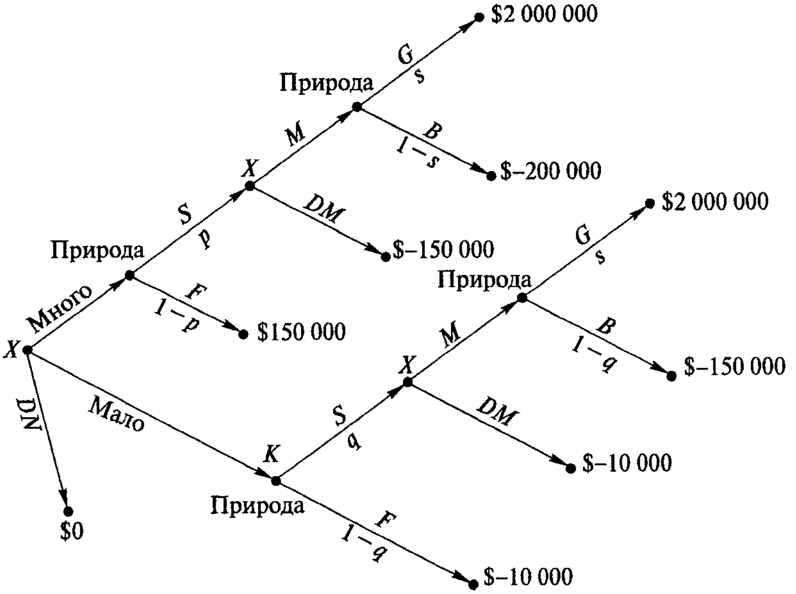


Рис. 3.19

в предположении, что $P(B) > 0$. Мы также будем говорить, что $P(A|B)$ является **условной вероятностью** A **при условии** B.

Теорема Байеса представляет собой на первый взгляд сложную формулу для вычисления условной вероятности события и формулируется следующим образом.

Теорема 3.13 (формула Байеса). *Если A и B — два события вероятностного пространства (S,P) и $P(B) > 0$, то*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)}$$[1].

Как обычно, A^C — дополнение события A, т.е.

$$A^C = S \setminus A = \{x \in S : x \notin A\},$$

таким образом, $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Следующий пример служит иллюстрацией применения формулы Байеса и подчеркивает ее высокую значимость и широкую применимость. ■

Пример 3.14. Известно, что определенное заболевание оказывается смертельным в 40% случаев. В настоящее время единственным методом лечения болезни является особый вид лучевой терапии. Согласно статистическим данным, 45% всех выздоровевших людей посещали лучевые процедуры и 20% тех, кто не выжил, также проходили эти процедуры. *Какова вероятность того, что страдающий от заболевания выздоровеет после прохождения лучевой терапии?*

Поставим эту задачу следующим образом. Рассмотрим сначала два события в выборочном пространстве всех заболевших:

A — индивид выздоровел;

B — индивид посещал процедуры с лучевой терапией.

Задача сводится к вычислению $P(A|B)$.

Заметим, что A^C означает, что индивид не выжил. Для применения формулы Байеса необходимо найти несколько вероятностей. Из условия задачи нам известно, что

$$P(A) = 0,6;$$

$$P(B|A) = 0,45;$$

$$P(A^C) = 0,4;$$

$$P(B|A^C) = 0,2.$$

Подставляя эти значения в формулу Байеса, получим

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)} = \frac{0,45 \times 0,6}{0,45 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4} = 0,7714.$$

[1] Эта известная формула получена Томасом Байесом (1702–1761), английским теологом и математиком. Она появилась в статье «Essays towards solving a problem in the doctrine of chances» (Philosophical Transaction of the Royal Society of London. 1763. P. 370–418).

Таким образом, заболевший индивид с вероятностью 77,14% излечится после прохождения лучевой терапии.

Комментарий для подготовленного читателя. Студенту, который предпочитает более формальный и более согласующийся с современной теорией вероятности подход, предлагается следующая скорректированная формулировка предыдущей задачи. Наше выборочное пространство элементарных событий S состоит из всех индивидов, страдающих от данного заболевания. Событие A — подмножество S, состоящее из всех индивидов, излечившихся от болезни. Событие B — подмножество S, состоящее из всех индивидов, принимавших сеансы лучевой терапии. Другими словами,

$$A = \{a \in S : \text{индивид } a \text{ излечился от болезни}\},$$

$$B = \{b \in S : \text{индивид } b \text{ принимал сеансы лучевой терапии}\}.$$

Здесь, однако, не каждое подмножество множества элементарных событий S является событием. События представляют собой в точности те подмножества S, которые принадлежат «алгебре» всех событий, «порождаемой» событиями A и B; см. рис. 3.20, *а*, *б*. Они определяются «разбиением» множества S, указанным на рис. 3.20, *в*. Это разбиение состоит из множеств $\{A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c\}$. Событие здесь — одно из указанных множеств.

Остается только приписать вероятности множествам этого разбиения. Вероятности этих событий могут быть вычислены на основе свойства аддитивности функций вероятности. При наличии статистической информации нетрудно видеть, что эти вероятности составляют

$$P(A \cap B) = 0,45 \times 0,6 = 0,27;$$

$$P(A \cap B^c) = 0,55 \times 0,6 = 0,33;$$

$$P(A^c \cap B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08;$$

$$P(A^c \cap B^c) = 0,8 \times 0,4 = 0,32.$$

В частности, на основе этих вероятностей можно заключить, что

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = 0,27 + 0,08 = 0,35.$$

Рис. 3.20. События, порожденные A и B

И теперь относительно требуемой вероятности заметим, что

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,27}{0,35} \approx 77,14\% .$$

(Кстати, формулу $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}$ можно использовать для доказательства теоремы Байеса.)

Формула Байеса оказывается полезной в ситуациях, когда требуется пересмотреть или уточнить априорные вероятности после получения новой информации. Мы показали, как фармацевтическая фирма из примера 3.12 может уточнить априорные вероятности успешности продаж производимого ей препарата.

Пример 3.15 (пересчет априорной вероятности). Вернемся к задаче о фармацевтической фирме X (пример 3.12). **Априорная вероятность** того, что препарат окажется успешно продаваемым (реализуется благоприятный исход G), составляет $P(G) = s$. Желая узнать больше о будущих продажах препарата, фирма может провести тест с целью получения дополнительной информации I. Например, информация I может быть получена на основе выборки потенциальных покупателей препарата.

Основываясь на полученной информации, фирма захочет пересмотреть априорную вероятность $P(G)$. Если тест окажется благоприятным, фирма сделает вывод о том, что рыночные условия даже лучше, чем предполагалось ранее, и захочет соответствующим образом пересмотреть вероятность $P(G)$. Однако в том случае, если тест окажется неблагоприятным, заключение будет иным. Формула Байеса предоставляет инструмент для пересчета вероятностей $P(G)$, обусловленных появлением новой информации I, полученной на основе проведенного теста. Обозначим благоприятный тест через I^+, а неблагоприятный — через I^-. **Апостериорная вероятность** (пересмотренная априорная вероятность) вычисляется по формуле Байеса:

$$P(G|I^+) = \frac{P(I^+|G)P(G)}{P(I^+|G)P(G) + P(I^+|B)P(B)},$$

где $P(I^+|G)$ — вероятность того, что тест окажется благоприятным в случае состояния рынка G (рыночная ситуация хорошая), $P(I^+|B)$ — вероятность того, что тест благоприятный в случае состояния рынка B (плохие рыночные условия).

Например, если рыночная ситуация хорошая (G), фармацевтическая фирма может опросить некоторую выборку потенциальных покупателей относительно их мнения о новом препарате. Если, скажем, из выборки в 100 потенциальных покупателей 85 отзовутся о препарате положительно и если рыночная ситуация хорошая, то фирма может заключить, что $P(I^+|G) = 0,85$. Подобным же образом, если из выборки в 100 индивидов только у 13 будет позитивное мнение относительно препарата и будут иметь место плохие рыночные условия, то можно заключить, что $P(I^-|B) = 0,13$.

Интересно отметить тот факт, что если новая информация достаточно обоснованная и надежная, тогда апостериорная (или пересмотренная) вероятность будет предсказывать состояние рынка с большей аккуратностью. Это также означает, что пересмотренная вероятность будет близка к нулю или единице, в зависимости от состояния рынка. Формула Байеса, таким образом, является отличным способом использования адекватной информации для «обновления ожиданий относительно событий».

Предположим теперь, что $P(I^+|G)=0{,}9$ и $P(I^+|B)=0{,}2$. Если $s=0{,}6$ и тест состояния рынка дал положительный результат, то пересмотренная апостериорная вероятность

$$P(G|I^+)=\frac{0{,}9\times 0{,}6}{0{,}9\times 0{,}6+0{,}2\times 0{,}4}=0{,}87,$$

что заметно выше, чем априорная вероятность 0,6. Таким образом, фирма пересматривает свои ожидания после получения положительного результата проведенного теста. Информация, почерпнутая из теста, позволила пересмотреть вероятность в сторону ее увеличения. Это будет отражено в дереве принятия решений, поскольку ожидаемый выигрыш от продажи препарата резко возрастет.

Подобным же образом, если тест окажется неблагоприятным, пересмотренная вероятность состояния рынка

$$P(G|I^-)=\frac{0{,}1\times 0{,}6}{0{,}1\times 0{,}6+0{,}2\times 0{,}4}=0{,}16.$$

Заметим, что в зависимости от оценки вероятности состояния рынка значение ожидаемого выигрыша фирмы меняется существенно. Ожидаемый выигрыш в случае априорной вероятности состояния G, величины $P(G)$, равной 0,6, составляет

$$\$2\,000\,000\times 0{,}6-\$200\,000\times 0{,}4=\$1\,120\,000.$$

Однако если фирма проведет рыночный тест и получит положительный результат, ожидаемый выигрыш составит

$$\$2\,000\,000\times P(G|I^+)-\$200\,000\times P(B|I^+)=$$

$$=\$2\,000\,000\times 0{,}87-\$200\,000\times 0{,}13=\$1\,714\,000.$$

Если же тест окажется неблагоприятным, то пересмотренный ожидаемый выигрыш фирмы составит

$$\$2\,000\,000\times P(G|I^-)-\$200\,000\times P(B|I^-)=$$

$$=\$2\,000\,000\times 0{,}16-\$200\,000\times 0{,}84=\$152\,000.$$

Как и на рис. 3.18, фирма должна сравнивать ожидаемые выигрыши, представленные на рис. 3.21. Она выберет *Hi* или *Lo* в зависимости от того, что даст бóльший ожидаемый выигрыш. Полезно сравнить ожидаемые результаты (рис. 3.21) с ожидаемыми результатами (рис. 3.18). ■

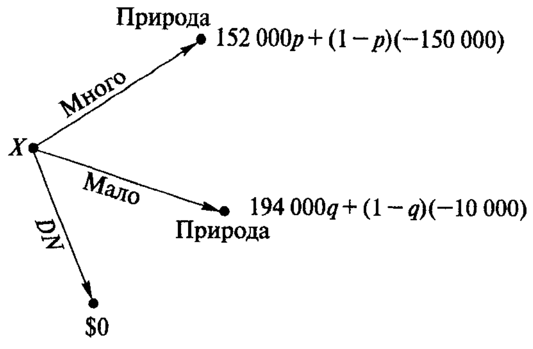


Рис. 3.21

Упражнения

1. Вам известно, что один из двух детей в семье является мальчиком. Какова вероятность того, что другой ребенок окажется девочкой? [Подсказка: вероятностное пространство состоит из $\{(b,b),(b,g),(g,g),(g,b)\}$.]
2. В коробке содержится пять монет с орлом на обеих сторонах и четыре правильные монеты, т.е. монеты с орлом на одной стороне и решкой на другой. Предположим, что из коробки случайным образом выбирается монета и затем однократно подбрасывается.
   (a) Какова при этом вероятность, что выпадет орел?
   (b) При условии, что выпадет орел, какова вероятность, что орел и на второй стороне монеты?
3. Предположим, что у нас две одинаковые коробки, B_1 и B_2. Коробка B_1 содержит два белых и три красных шара. Коробка B_2 содержит три белых и три красных шара. Случайным образом выбирается коробка, и из нее извлекается шар. Если шар оказался красным, то какова вероятность того, что шар извлечен из коробки B_1?
4. В двух электоральных округах, округе 1 и округе 2, либералы составляют 35 и 55% соответственно от числа всех избирателей. Предположим, что случайным образом выбирается округ, и в нем также случайным образом выбирается избиратель. Если избиратель оказался либералом, то какова вероятность того, что это избиратель из второго избирательного округа?
5. Предварительные оценки показывают, что 0,3% населения Соединенных Штатов Америки являются носителями передающегося половым путем вируса иммунодефицита человека (ВИЧ-инфекции), который известен как причина смертельно опасной болезни — СПИДа. Чтобы изучить распространение инфекции среди населения, конгресс США принял закон, требующий проведения анализа крови на ВИЧ-инфекцию перед регистрацией бракосочетания. Тест на ВИЧ-инфекцию считается очень «эффективным», поскольку:
   (a) инфицированный вирусом человек получит положительный результат теста с вероятностью 95% и

(b) неинфицированный индивид получит положительный результат теста с вероятностью 4%.

После нескольких продолжительных дискуссий было принято решение о неэффективности теста для определения распространенности СПИДа. Поэтому закон был отменен.

Выясните, какой аргумент смог убедить законодателей в неэффективности теста для определения распространенности СПИДа. [Подсказка: рассмотрите следующие события: A — «прошедший тест человек инфицирован» и B — «тест дал положительный результат». Используя формулу Байеса, убедитесь, что $P(A|B) \approx 6{,}67\%$.]

6. Найдите оптимальный путь решений фирмы в примере 3.11 в терминах значений p и q. [Подсказка: фирма выберет Hi, если $90p > 101q + 14$ и $p > \frac{1}{6}$.]

7. Рассмотрим задачу о принятии решений из примера 3.12 в предположении, что фирма нейтральна к риску.

(a) Решите задачу фирмы.

(b) Выразите решение в терминах p, q и s.

(c) Что произойдет, если $p = 0{,}9$, а $q = 0{,}4$?

(d) При каком значении s фирма решит продавать препарат? Зависит ли оно от p и q?

8. Рассмотрим пример 3.15 с теми же значениями условных вероятностей. Пусть фирма нейтральна к риску.

(a) Решите задачу фирмы в терминах p и q.

(b) Что произойдет, если $p = 0{,}9$, а $q = 0{,}5$?

(c) Предположим, что проведение теста обойдется фирме в 50 тыс. долл. Проведет ли она тест?

(d) Найдите наибольшую стоимость теста, при которой фирма согласна его проводить.

9. У фирмы есть возможность реализовать инвестиционный проект, потенциальная доходность которого зависит от величины инвестиций. Инвестируя 2 млн долл., фирма может получить 2 млн долл. с вероятностью 0,8 и только 1 млн долл. с вероятностью 0,2. В случае если фирма инвестирует только 1 млн долл., она может получить 5 млн долл. с вероятностью 0,5 и 1 млн долл. с вероятностью 0,5.

(a) Изобразите дерево принятия решений и соответствующие выигрыши, которые указывают прибыли фирмы.

(b) Каким будет оптимальное решение фирмы?

10. Фирме известно, что она увеличит свою эффективность, проведя модернизацию производственного оборудования. Она может инвестировать либо 2 млн долл., либо 1 млн долл. на первом этапе этого процесса. Выбор варианта с «высоким» уровнем инвестиций приводит к двум возможным ситуациям в начале второго этапа: перерасход средств, так что, для того чтобы завершить модернизацию, фирма будет вынуждена инвестировать дополнительно 2 млн долл.; в противном случае фирме необходимо инвестировать только 1 млн долл. Перерасход средств может случиться с вероятностью 0,4.

Если фирма выбирает вариант с низким уровнем инвестиций, т.е. инвестирует только 1 млн долл., то перерасход средств может потребовать дополнительных 2,5 млн долл. и может произойти с вероятностью 0,6. В случае когда перерасхода средств не происходит, фирма заканчивает проект, инвестируя дополнительно 1 млн долл. После завершения модернизации фирма получает дополнительный доход в размере 5 млн долл.

(a) Изобразите дерево принятия решений и укажите выигрыши в терминальных узлах.

(b) Каким будет оптимальное решение фирмы?

11. В баскетболе считается, что в отдельных случаях нарушить правила с целью помешать сопернику забросить мяч (когда он наверняка это сделает) — хорошая стратегия. Задача принятия решений в этом случае следующая. Соперник способен получить два очка с вероятностью 1, но нарушение правил даст ему возможность осуществить три броска, каждый из которых может оказаться промахом с вероятностью 0,1.

(a) Изобразите подробно дерево принятия решений.

(b) Будет ли нарушение правил оптимальной стратегий в данном случае?

12. Рассмотрите пример 3.15 и задачу принятия решений с условными вероятностями $P(G|I^+) = 0{,}85$ и $P(B|I^+) = 0{,}13$. Предположим, что результат теста оказался положительным.

(a) Запишите ожидаемые выигрыши в различных узлах.

(b) Для каких значений p и q выбор Hi будет оптимальным?

13. Докажите формулу Байеса. [Подсказка: по определению имеем: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, при условии $P(V) > 0$. Заметим теперь, что $P(B) = P(B \cap A) + P(B^c \cap A)$.]

Глава 4 ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ

В предыдущей главе рассматривались последовательные решения, принимаемые одним индивидом. Во всех ситуациях, с которыми мы сталкивались, выигрыш индивида зависел от последовательности принятых им решений. Однако в подавляющем большинстве случаев выигрыш индивида будет зависеть не только от его действий, но также от последовательности действий других индивидов.

Таким образом, мы будем иметь дело с игрой, в которую вовлечено несколько участников, причем процесс принятия решений происходит не одновременно, игроки могут принимать решения последовательно. Например, если инвестор делает предложение о поглощении, то оно должно быть сделано до того, как менеджер фирмы может на него ответить. Ситуации такого типа удобно анализировать в виде игры, где инвестор делает свой ход на первом этапе, а менеджер дает ответ на втором этапе. Очевидно, что участники данной игры ходят не одновременно, а последовательно. Игры, разыгрываемые в несколько этапов, называют *многоступенчатыми играми*, *играми в развернутой форме или последовательными* (*динамическими*) *играми*. В нашем случае будем использовать термин *динамические игры* для игр, в которых несколько игроков ходят последовательно.

Динамические игры предоставляют широкие возможности для изучения ситуаций, где решения принимаются в рамках последовательности этапов, в которых выбор должны делать различные индивиды. Таким образом, последовательные игры содержат как элементы последовательного принятия решений, так и элементы игр. Что касается последовательного принятия решений, то вопрос о том, что знает участник на данном этапе своего выбора, является важным и приводит к классификации динамических игр на *игры с совершенной информацией* и *игры с несовершенной информацией*. Кроме того, как и в случае последовательного принятия решений, идея о секвенциальной рациональности (динамической согласованности) играет существенную роль.

В первом разделе этой главы вводится концепция дерева игры, обсуждается общая структура динамических игр и объясняется различие между играми с *совершенной информацией* и играми с *несовершенной информацией*. В разделе 4.2 мы обсуждаем подходящие понятия равновесия для динамических игр, включая важные концепции *подыгр* и *совершенного в подыграх равновесия*. В разделе 4.3 представлены приложения динамических игр к интересным ситуациям, которые возникают в различных контекстах. Далее для иллюстрации принципов приводится несколько приложений. Они включают модель дуополии Штакельберга, а также игру «Принципал — агент». В разделе 4.4, завершающем главу, вводится и обсуждается концепция поведенческих стратегий в динамических играх.

4.1. Структура динамической игры

Динамическая игра тесно связана с деревом (игры). В сущности, как мы увидим далее, любое дерево может рассматриваться разными способами как «дерево игры». Определим понятие дерева игры с n лиц.

Определение 4.1. *Говорят, что дерево является деревом игры n лиц (или деревом игры с n игроками* 1, 2, ..., *n) если*

(a) *любой не терминальный узел дерева*[1] *«принадлежит» ровно одному из участников;*

(b) *любое ребро не терминального узла не может иметь узлов, принадлежащих одному и тому же игроку*[2], *и*

(c) *каждому терминальному узлу Q приписан n-мерный вектор выигрышей* $\pi(Q) = (\pi_1(Q), \pi_2(Q), \ldots, \pi_n(Q))$.

Сразу поясним и подчеркнем две важные особенности дерева игры:

(1) *любой терминальный узел не принадлежит ни одному из участников и*

(2) *вовсе не обязательно, чтобы каждому игроку принадлежал хотя бы один не терминальный узел. То есть в динамической игре n лиц могут быть участники, которым не принадлежит ни одного узла! Игрок, которому не принадлежит ни одного узла, рассматривается как неактивный. Дерево игры двух лиц, в которой оба игрока активны, изображено на рис. 4.1, а. Дерево игры трех лиц, в которой третий игрок неактивный, изображено на рис. 4.1, б.*

Не терминальные узлы дерева игры называют **узлами решений**.

Говорят, что два узла N_1 и N_2 дерева игры **эквивалентны** для игрока i, если

(1) одно и то же число ветвей, скажем k, берет начало как в N_1 и N_2 и

(2) ветви, берущие начало в N_1 и N_2,

$$\{e_1^1, e_2^1, \ldots, e_k^1\} \text{ и } \{e_1^2, e_2^2, \ldots, e_k^2\},$$

могут быть упорядочены таким способом, что для каждого s ветви e_s^1 и e_s^2 игрок I рассматривает как идентичные; мы будем указывать на эту идентичность, записывая $e_s^1 \approx e_s^2$.

Это приводит нас к понятию информационного множества.

Определение 4.2. *В дереве игры множество узлов* $\mathcal{I} = \{N_1, \ldots, N_l\}$ *называют* ***информационным множеством*** *игрока i, если*

(1) *все узлы из* $\mathcal{I}$ *принадлежат игроку i и не являются терминальными;*

(2) *ни один из узлов* $\mathcal{I}$ *не связан с ни каким другим узлом из* $\mathcal{I}$, *т.е. если* N_s *и* N_t *— произвольные узлы из* $\mathcal{I}$, *то* N_s *не является ни предшественником, ни последователем* N_t *и*

[1] Или узел решения. — *Примеч. ред.*

[2] Мы исключаем возможность того, что какой-то игрок в течение игры ходит два раза подряд.

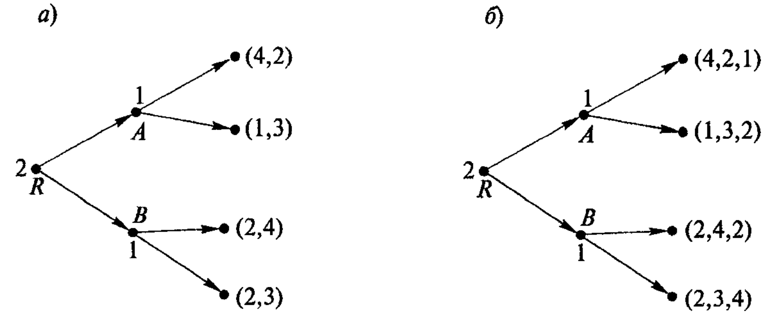


Рис. 4.1. Дерево игры двух лиц (*а*); дерево игры (трех лиц) (*б*), третий игрок неактивен

(3) *все узлы из* $\mathcal{I}$ *эквивалентны для игрока i, т.е. существует перестановка k ребер* $\{e_1^s, e_2^s, \ldots, e_k^s\}$, *выходящих из каждого узла* N_s, *такая что* $e_r^s \approx e_r^t$ *для всех r, s и t.*

Смысл понятия «информационное множество» следующий. Предположим, что на некотором этапе процесса принятия решений в игре с n участниками игроку i нужно принять «следующее решение». Будем полагать, что из-за отсутствия информации об «истории» игры он знает, что должен принять решение в одном из узлов информационного множества $\mathcal{I}$, но не знает в точности, в каком именно. Более того, в каждом узле $\mathcal{I}$ имеется набор одних и тех же вариантов действий (например, k), т.е. игрок i понимает, что в каждом узле имеется k одинаковых альтернатив, обозначенных $1,2,\ldots,k$. Это вынуждает игрока i сделать выбор из альтернатив $1,2,\ldots,k$, основываясь лишь на самих альтернативах, а не на фактическом расположении узла, где происходит выбор.

Пример информационного множества изображен на рис. 4.2. Обратим внимание, что информационное множество $\mathcal{I} = \{N_1, N_2, N_3\}$ состоит из узлов, принадлежащих игроку 2. Тот факт, что узлы N_1, N_2 и N_3 являются узлами одного информационного множества, обозначается соединением этих узлов

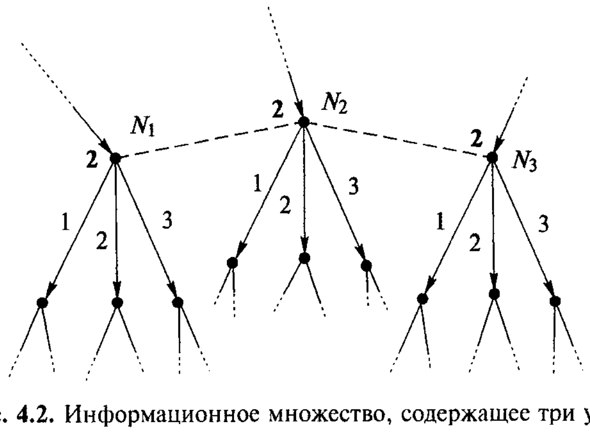


Рис. 4.2. Информационное множество, содержащее три узла

пунктирной линией. Заметим также, что в каждом узле из $\mathcal{I}$ у игрока 2 имеются три альтернативы, обозначенные как 1, 2 и 3.

Динамическая игра теперь может быть определена следующим образом.

Определение 4.3. ***Динамическая игра*** *— это дерево игры n лиц, такое что узлы принятия решений разбиваются на информационные множества, которые принадлежат игрокам, и для каждого терминального узла задан n-мерный вектор выигрышей*[1].

Разыгрывание динамической игры

Дерево игры с n участниками представляет собой процесс последовательного принятия решений игроками начиная от начального (корневого) узла (или корня) дерева игры и заканчивая одним из терминальных узлов. Игра разыгрывается следующим образом.

Игрок, которому принадлежит начальный узел, начинает игру, принимая решение (т.е. выбирая ребро), что приводит процесс принятия решений в другой узел. Если узел не является терминальным, игрок, владеющий им, в свою очередь выбирает ребро. Снова, если достигаемый при этом узел не терминальный, он принадлежит игроку; следовательно, его очередь принимать решение, выбирая некоторое ребро. Этот процесс последовательного принятия решений продолжается до тех пор, пока не будет достигнут терминальный узел и игра не закончится. Соответственно каждый игрок получает свой выигрыш, указанный вектором выигрышей в этом терминальном узле.

Например, в игре трех лиц на рис. 4.3 узел a принадлежит игроку 2, который начинается игру. Предположим, что он выберет ребро (ad), так что достигается узел d, принадлежащий игроку 1. Теперь игрок 1 должен принять следующее решений, выбирая одно из ребер; будем считать, что он выберет ребро (de), т.е. его решение приводит процесс принятия решений в узел e. Этот узел принадлежит игроку 3, который должен принять следующее решение; предположим, что он выбрал ребро (eq). Поскольку q является терминальным узлом, игра заканчивается в узле q. В этом случае путь решений, выбранных игроками, — это $a \to d \to e \to q$. Вектор выигрышей в терминальном узле q — это (2,1,2), т.е. игрок 1 получает выигрыш 2, игрок 2 — выигрыш 1 и игрок 3 — выигрыш 2.

В отличие от случая игр в стратегической форме, концепция стратегии в динамических играх несколько сложнее. Чтобы понять и определить стратегии в динамических играх, потребуются несколько новых понятий.

Выбор игрока, владеющего узлом N в дереве игры, — это ребро, выходящее из N. В дереве игры **функция выбора** игрока, владеющего множеством узлов $\mathcal{N}$, — это функция $f\colon \mathcal{N} \to V$, где V обозначает множество узлов дере-

[1] Разумеется, каждый узел, не являющийся частью какого-то информационного множества, можно рассматривать как отдельное информационное множество.

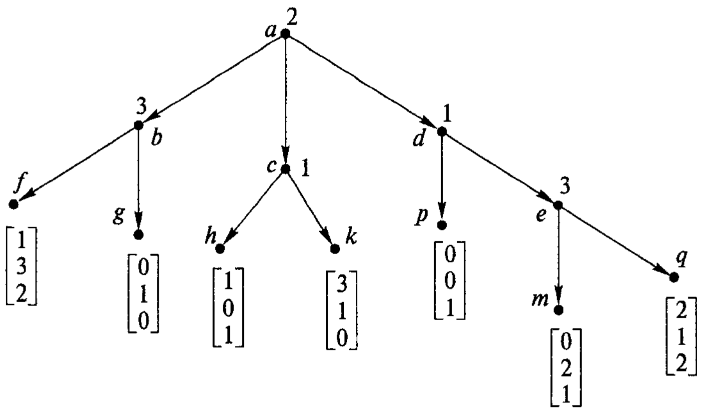


Рис. 4.3

ва, таких что $f(N)$ будет потомком (последователем) N для любого $N \in \mathcal{N}$. Поскольку потомок C узла N однозначно определен ребром NC, принято отождествлять $F(N)$ с ребром, выходящим из узла N. Кроме того, довольно часто функцию f определяют как множество ребер, содержащее ровно по одному ребру, берущему начало из каждого узла множества $\mathcal{N}$.

Говорят, что функция выбора f игрока i **согласуется с информационным множеством** $\mathcal{I}$, если $f(N_1) \approx f(N_2)$ для любой пары узлов $N_1, N_2 \in \mathcal{I}$. Таким образом, выбор будет одинаков для узлов, принадлежащих одному и тому же информационному множеству.

Определим понятие стратегии игрока.

Определение 4.4. *Пусть $\mathcal{N}$ — множество узлов, принадлежащих игроку i дерева игры, разбитое на информационные множества. Тогда* ***стратегия*** *игрока i — это функция выбора s: $\mathcal{N} \to V$, которая согласуется со всеми его информационными множествами.*

Стратегия в «динамической» игре, таким образом, — довольно тонкое понятие и описывает альтернативы, которые игрок будет выбирать в каждом информационном множестве. Значит, стратегия игрока в динамической игре — исчерпывающий план того, как играть игру, описывающий его выбор в каждом информационном множестве, который игрок планирует сделать априори (т.е. до начала игры) в том случае, если это информационное множество будет достигнуто в ходе игры.

Прежде чем двигаться дальше, проиллюстрируем концепцию стратегии примером. Напомним, что, как отмечалось ранее, под функцией выбора понимается набор ребер, выходящих изо всех узлов, принадлежащих игроку, причем в каждом информационном множестве игрока выбирается только одно из таких ребер. Чтобы было понятнее, рассмотрим игру с двумя участниками, изображенную на рис. 4.4.

В данной игре игроку 1 принадлежит начальный узел (узел O) и два информационных множества, $\{E, F\}$ и $\{G, H\}$. В каждом информационном

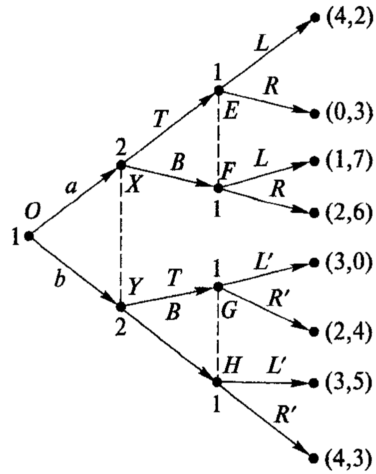


Рис. 4.4. Игра с информационными множествами

множестве нужно выбрать одно ребро. Таким образом, возможными стратегиями участника 1 являются:

$$\{a, L, L'\},\ \{a, R, L'\},\ \{a, L, R'\},\ \{a, R, R'\},$$

$$\{b, L, L'\},\ \{b, R, L'\},\ \{b, L, R'\},\ \{b, R, R'\}.$$

С другой стороны, у игрока 2 — одно информационное множество $\{X, Y\}$. Так что его стратегия ограничивается выбором среди $\{T\}$ и $\{B\}$.

Профиль стратегий в динамической игре n лиц — это упорядоченный набор n стратегий $(s_1,s_2,...,s_n)$, где s_i — стратегия игрока i. Важно отметить, что если в динамической игре задан профиль стратегий $(s_1,...,s_n)$, терминальный узел будет достигаться автоматически. Другими словами, как отмечено выше, динамическая игра реализуется следующим образом. Пусть игрок (например, j), владеющий начальным узлом R, выбирает узел в соответствии с выбранной им стратегией s_j; здесь это будет узел $s_j(R)$. Затем игрок, владеющий узлом $s_j(R)$, выбирает узел согласно своей стратегии и так далее, до тех пор пока не будет достигнут терминальный узел Q, на этом игра заканчивается, и каждый игрок получает выигрыш $\pi_i(Q)$. Заметим, что профиль стратегий $(s_1,...,s_n)$ однозначно определяет терминальный узел Q, который будет достигнут. Следовательно, выигрыш (или полезность) каждого участника i — это функция $u_i(\cdot)$ профиля стратегий $s = (s_1,s_2,...,s_n)$. То есть если Q_s — терминальный узел, (однозначно) определяемый профилем s, то обычно записывают

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \pi_i(Q_s).$$

Таким образом, динамическая игра представляется деревом игры с игроками, делающими ходы последовательно. В каждом информационном множестве игрок, который должен делать выбор, определяет альтернативу (т.е. выбирает ребро) в каждом узле этого информационного множества, при этом следует иметь в виду, что выбираемые альтернативы одинаковы во всех узлах одного и того же информационного множества. После того как все игроки выбрали свои действия во всех информационных множествах, достигается терминальный узел и реализуются выигрыши участников.

Рассмотрим пример, включающий деловые операции, которые могут быть переведены на язык динамической игры двух лиц.

Пример 4.5 (игра на поглощение). Инвестор I, которого мы будем считать игроком 1, обдумывает возможность сменить руководство компании, назовем ее «Фортуна» (F). На данный момент акции компании оцениваются в 100 долл. Известно, что если I сменит руководство компании, то ее акции будут стоить 110 долл. Чтобы это сделать, инвестор может предложить цену $b > 100$ долл. за акцию и приобрести 50% акций F. При рассмотрении подобных игр возникают два основных вопроса.

(1) *Сколько необходимо предложить?*

(2) *Как действовать акционерам F после того, как I внесет предложение?*

Мы фактически описали игру двух лиц, в которой на первом этапе игрок I делает предложение для F, а на втором этапе игрок F решает принять или отклонить предложение I. Схематично ситуация может быть описана как динамическая игра двух лиц, представленная на рис. 4.5.

Выигрыши следует интерпретировать следующим образом. Если инвестор предлагает b долл. за акцию, то фирма F может либо согласиться с предложением и продать акции инвестору по цене b, либо отказаться, выкупив его акции по той же цене b. В случае согласия фирмы ее доход будет $b - 100$ долл. за акцию. При этом инвестор получит $110 - b$ долл. за акцию, поскольку с новым руководством стоимость акции возрастет до 110 долл. Если фирма F откажется от предложения, ей придется выкупить акции по цене b, потеряв $b - 100$ (или получив $100 - b$) долл. за акцию. Инвестор в этом случае не получает ничего.

В рассматриваемой игре каждый участник точно знает узел, в котором он должен сделать свой выбор. Этому условию удовлетворяют многие динамические игры. В таких играх каждый игрок знает всю относящуюся к делу прошлую информацию, необходимую для идентификации узла, в котором он должен сделать свой выбор. Динамические игры, удовлетворяющие этому условию, называются *играми с совершенной информацией*, а игры, для кото-

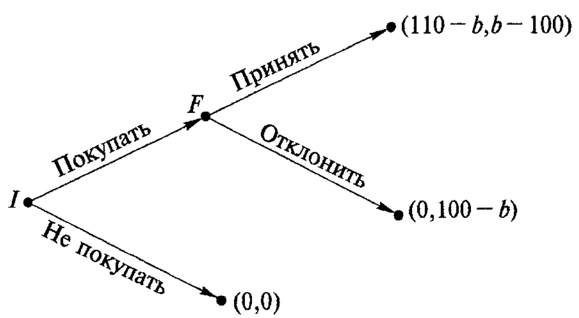


Рис. 4.5. Игра на поглощение в условиях совершенной информации

рых оно не выполнено, *играми с несовершенной информацией* соответственно. Точное определение дается ниже.

Определение 4.6. *Динамическая игра является игрой с* ***совершенной информацией****, если все информационные множества состоят из одного узла. В противном случае это игра с* ***несовершенной информацией****.*

Таким образом, динамическая игра с совершенной информацией — это динамическая игра, в которой каждый участник точно знает, какие альтернативы были выбраны в игре к моменту, когда он должен делать выбор. Конечно, такое случается не всегда, но все-таки довольно часто.

Напротив, игры с несовершенной информацией — это игры, в которых участники не знают о выборах, сделанных на предшествующих стадиях игры, либо игроки, делающие ход на более ранних стадиях, предпочитают не раскрывать информацию игрокам в более поздних стадиях. Игры с полной информацией, как и игры с неполной информацией, возникают вполне естественно во многих контекстах. Мы уже рассматривали пример (пример 4.5) динамической игры с совершенной информацией. Следующий пример покажет, как просто игра с совершенной информацией становится игрой с несовершенной информацией.

Пример 4.7 (модифицированная игра на поглощение). Модифицируем игру примера 4.5. Известно, что теперь фирма F занимается разработкой

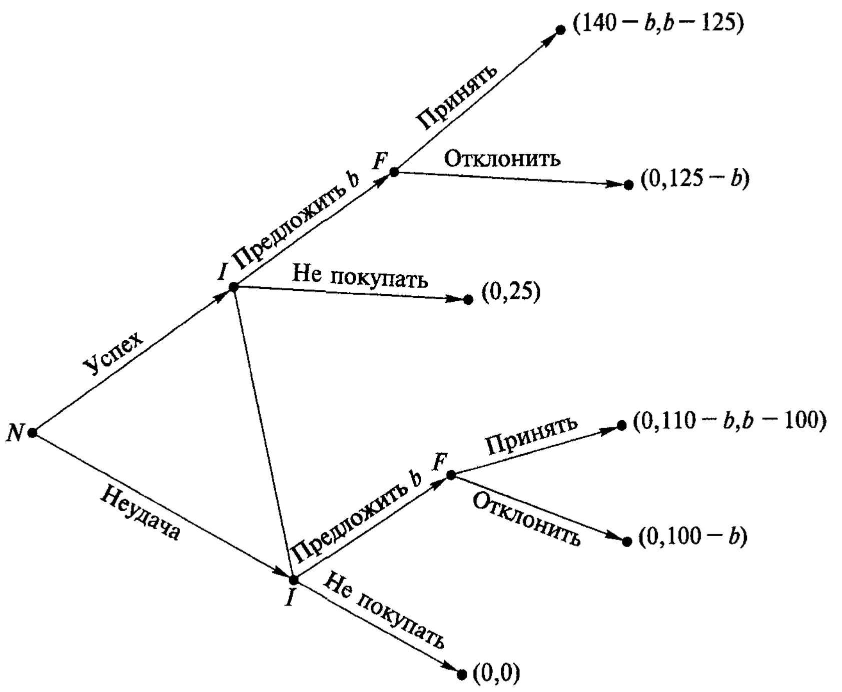


Рис. 4.6. Дерево игры на поглощение с несовершенной информацией

проекта, который в случае успеха мог бы увеличить стоимость ее акций до 125 долл. при нынешнем руководстве и до 140 долл. при руководстве инвестора *I*. На момент, когда инвестор делает свое предложение *b*, только фирма знает, оказался ли проект успешным. То есть мы имеем дело с несовершенной информацией, поскольку инвестор, когда принимает свое решение, не располагает информацией о судьбе проекта. Один из способов описания новой ситуации в игре на поглощение как динамической игры трех лиц представлен на рис. 4.6.

Заметим, что информационное множество инвестора *I* на момент принятия решения о том, делать или нет предложение, состоит из двух узлов, зависящих от того, что решит Природа (*N*) относительно проекта. Таким образом, на основе той информации, которой он располагает, *I* не способен различить эти два узла. Заметим, однако, что в момент, когда фирма решает, принять или отклонить это предложение, она знает о состоянии проекта. Поскольку информационное множество *I* состоит более чем из одного узла, это пример игры с несовершенной информацией.

В этой игре, которая является развитием динамической игры на рис. 4.5, фирма получит выигрыш в размере $b - 125$ долл. за акцию, а инвестор $140 - b$ долл. за акцию, если проект окажется успешным и инвестор *I* предложит цену в *b* долл. за акцию, а фирма *F* согласится на предложение. Если *F* откажется от сделки, тогда ей придется выкупить акции по цене *b* долл. за акцию, в результате чего она получит $125 - b$ долл. за акцию, что является чистым убытком при $b > 125$. Инвестор в данном случае не получает ничего.

С другой стороны, если проект окажется неуспешным, инвестор сделает предложение *b*, а фирма *F* согласится на это предложение, то она получит $b - 100$ долл. за акцию, а инвестор $110 - b$ долл. за акцию. Если *F* откажется от предложения, инвестор не получит ничего, а *F* потеряет $b - 110$ долл. за каждую акцию. ■

Динамические игры с полной и неполной информацией подробно обсуждаются в следующих разделах.

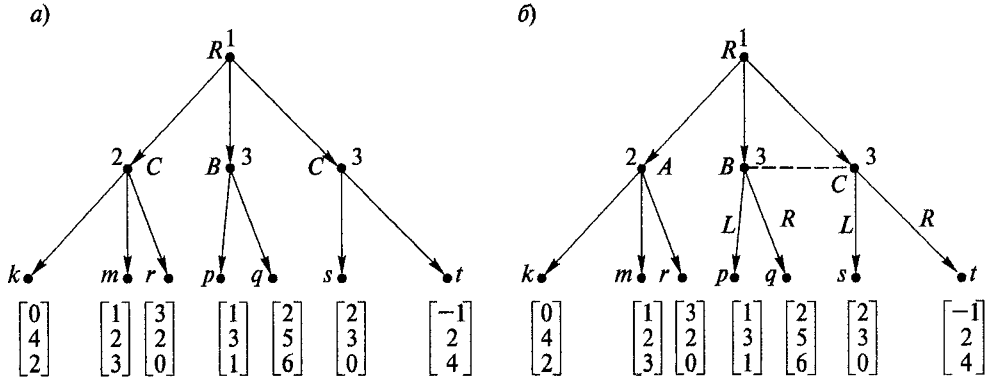


Рис. 4.7. Дерево игры из упражнения 2

Упражнения

1. Покажите, что в динамической игре с совершенной информацией у игрока есть столько же стратегий, сколько существует функций выбора для этого игрока.
2. Рассмотрим два дерева игры на рис. 4.7.
   (a) Убедитесь, что дерево игры из рис. 4.7, *а* описывает динамическую игру с совершенной информацией, а дерево игры из рис. 4.7, *б* представляет игру с несовершенной информацией соответственно.
   (b) Опишите стратегии игроков в каждой игре.
   (c) Опишите функции выигрышей игроков $u_i(s_1, s_2, s_3)$ $(i = 1,2,3)$ в каждой игре.
3. Рассмотрите игру на поглощение из примера 4.5. Какую максимальную и минимальную ставку *b* рациональный инвестор предложит компании «Фортуна». (Ответ обоснуйте.)
4. Убедитесь, что дилемма заключенного может быть представлена в виде динамической игры, дерево которой изображено на рис. 4.8. Опишите стратегии каждого игрока.

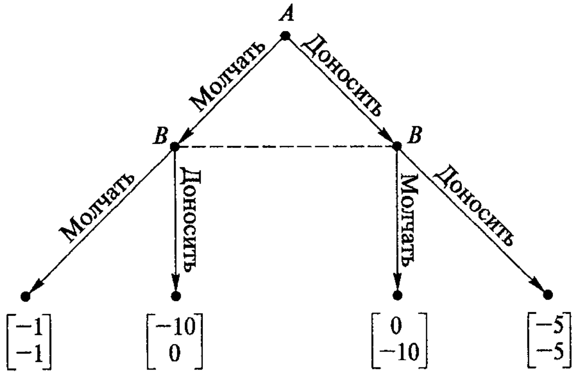


Рис. 4.8. Дилемма заключенного

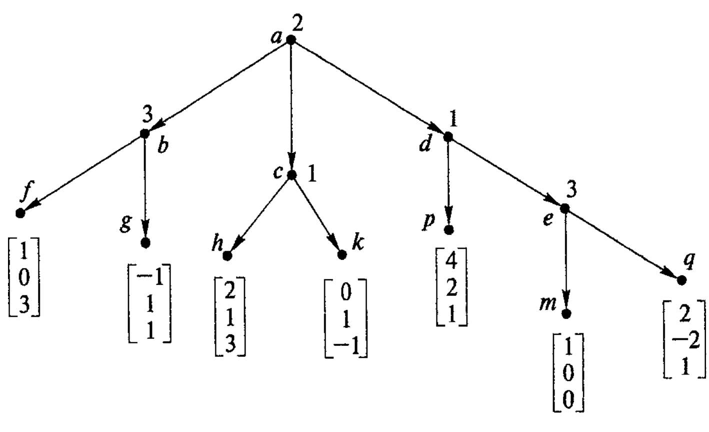


Рис. 4.9. Дерево игры из упражнения 6

5. Рассмотрите динамическую игру, представленную на рис. 4.9.
   (a) Укажите ветви этого дерева.
   (b) Найдите оптимальный выбор каждого участника во всех поддеревьях игры.
   (c) Каков будет выбор игрока 2 в этой игре?
6. Рассмотрите игру на поглощение из примера 4.7. Предположим, что в случае успеха проекта цена акций F увеличится до 140 долл. при нынешнем руководстве и до 125 долл. при руководстве игрока I. Какими в этом случае будут векторы выигрышей на дереве игры (рис. 4.6)?

4.2. Равновесия в динамических играх

Как уже отмечалось в предыдущем разделе (см. определение 4.6), в классе динамических игр с совершенной информацией каждый игрок в точности знает ходы, которые игроки сделали на более ранних этапах игры. Игра на поглощение из примера 4.5 принадлежит этому классу, поскольку игрок F знает о том, какое предложение сделал игрок I на первом этапе. Возникает вопрос — как «решать» динамические игры? Прежде чем перейти к его обсуждению, мы должны объяснить мотивацию «концепции решения» для таких игр.

Рассмотрим некоторую динамическую игру n лиц. Будем обозначать через S_i множество стратегий игрока i. Как обычно, ***профиль стратегий*** — это $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, где $s_i \in S_i$, т.е. s_i является стратегией игрока i. Каждый профиль стратегий $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ *единственным* образом определяет терминальный узел Q_s (исход игры в том случае, если каждый участник i играет стратегию s_i). В терминальном узле Q_s определен вектор выигрыша $(\pi_1(Q_s),\ldots,\pi_n(Q_s))$. Переводя это на язык функций полезности, мы видим, что функция полезности $u_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to R$ игрока i определяется как

$$u_i(s_1,s_2,\ldots,s_n)=\pi_i(Q_s),$$

где $(\pi_1(Q_s),\ldots,\pi_n(Q_s))$ — вектор выигрышей в узле Q_s, определенный (однозначно) профилем стратегий $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$.

Отсюда вытекает, что динамическая игра n лиц может быть представлена как стратегическая игра со следующими характеристиками:

(1) игроками являются n игроков динамической игры;
(2) множество стратегий каждого игрока i — это S_i;
(3) функция выигрыша каждого игрока i — это функция полезности $u_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to R$, определенная ранее.

Данная стратегическая игра называется *стратегической формой динамической игры n лиц.*

Теперь мы можем определить концепцию равновесия по Нэшу для динамической игры. Это равновесие по Нэшу связанной с ней стратегической игры. Таким образом, имеем следующее определение.

Определение 4.8 (равновесие по Нэшу). *Говорят, что профиль стратегий* $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ *динамической игры (с совершенной или несовершенной информацией) является* ***равновесием по Нэшу*** *(или просто* ***равновесием*** *или* ***решением*** *игры), если для каждого игрока* i

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^* \ldots, s_n^*) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^* \ldots, s_n^*)$$

или если для каждого игрока i

$$u_i(s_{-i}^*, s_i^*) \geq u_i(s_{-i}^*, s_i)$$

для любой стратегии игрока i.

Таким образом, как и ранее, равновесие по Нэшу — это профиль стратегий $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$, такой что ни один из игроков не может улучшить свой выигрыш, если остальные игроки не уклоняются от выбранных стратегий.

Теперь мы переходим к обсуждению равновесного по Нэшу профиля стратегий для динамических игр. Вспомним, что для любого терминального узла Q дерева T существует единственный путь из начального узла R в этот терминальный узел Q. Так что, если T также является деревом динамической игры, то каждый профиль стратегий $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ определяет единственный путь от начального узла до некоторого терминального узла дерева. Будем называть его **путем, согласованным с профилем стратегий** $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Путь, согласованный с равновесием по Нэшу, будем называть **равновесным путем.** Заметим, что

(1) различные профили стратегий могут иметь один и тот же путь (см. пример 4.9) и

(2) любой путь от корня до терминального узла согласуется хотя бы с одним профилем стратегий.

Вышесказанное иллюстрирует следующий пример.

Пример 4.9. Рассмотрим простую динамическую игру двух лиц с совершенной информацией, дерево которой изображено на рис. 4.10. Если игрок 1 выбирает L, то достигается узел B и игрок 2 выберет R', при этом участник 1 получит нулевой выигрыш. Если же игрок 1 выберет R, игра переходит в узел C, где игрок 2 выберет L'' (и игрок 1 получит 4). Таким образом, путь

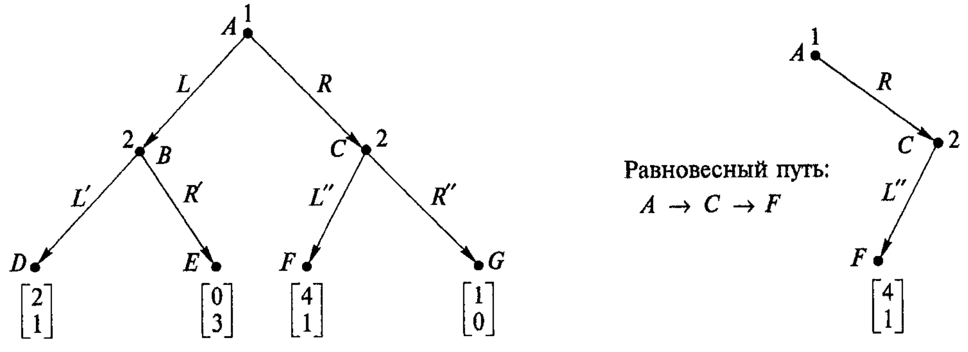


Рис. 4.10

Таблица 4.1

	Игрок 2				
Игрок 1	Стратегия	$\{L',L''\}$	$\{L',R''\}$	$\{R',L''\}$	$\{R',R''\}$
	L	(2,1)	(2,1)	(0,3)	(0,3)
	R	(4,1)	(1,0)	(4,1)	(1,0)

решения — это $A \to C \to F$, что приводит к терминальному узлу F с вектором выигрышей (4,1).

Теперь посмотрим на то, какие стратегии используют участники данной игры. Игрок 1 делает выбор в единственном узле (узел A), где он может выбрать либо R, либо L. Однако игрок 2 должен делать выбор в двух различных узлах: B и C. Следовательно, стратегия игрока 2 — функция из $\{B,C\}$ в $\{L',R',L'',R''\}$ со следующим ограничением допустимости: из узла B можно выбрать только R' и L', и аналогичным ограничением на узел C. Какой профиль стратегий тогда будет равновесием по Нэшу?

Оставим читателю убедиться самостоятельно в том, что два профиля стратегий,

$$(\{R\},\{L',L''\}) \text{ и } (\{R\},\{R',L''\})$$

действительно являются равновесиями по Нэшу. Оба профиля согласуются с равновесным путем $A \to C \to F$. (Альтернативный, полезный и простой способ нахождения равновесия по Нэшу в этой динамической игре состоит в нахождении ее матричной формы — табл. 4.1 — и последующем применении теоремы 2.5.) ■

Итак, мы показали, что динамическая игра может быть представлена в виде стратегической игры и что равновесие по Нэшу в этой стратегической игре также является равновесием в динамической игре. Однако, хотя любая динамическая игра может рассматриваться как игра стратегическая, все же имеется тонкое, но тем не менее важное различие между динамическими и стратегическими играми. Оно состоит в том, что в динамических играх можно определить новый класс игр, известный как *подыгры*.

Подыгры можно понять в терминах ветви дерева[1]. Подыгра динамической игры — это другая динамическая игра, дерево которой является ветвью дерева исходной игры, имеющая те же информационные множества и те же векторы выигрышей. Точное определение выглядит так.

Определение 4.10. Подыгра *динамической игры n лиц — другая динамическая игра n лиц, такая что*

(1) *ее деревом игры является ветвь дерева исходной игры*;

(2) *информационные множества этой ветви совпадают с информационными множествами исходной игры и не могут содержать узлов вне этой ветви*;

[1] Напомним, что ветвь T_u дерева T — это ориентированный граф, имеющий узлы начиная с узла u и включающий всех его последователей вместе с их ориентированными ребрами. Ясно, что T_u сам является деревом с корнем (начальным узлом) u.

(3) *векторы выигрышей в терминальных узлах ветви в точности совпадают с векторами выигрышей исходной игры в этих терминальных узлах.*

Заметим, что условие 2 определения 4.10 подразумевает, что информационные множества подыгры не могут пересекаться с информационными множествами исходной игры, которые не содержатся в соответствующей ветви (определяющей подыгру). В частности, начальный узел подыгры (т.е. начальный узел ветви, определяющей подыгру) должен быть узлом исходной игры, в которой он является единственным узлом в своем информационном множестве. Поскольку любое дерево само по себе является ветвью, любая динамическая игра автоматически оказывается подыгрой — это так называемая **тривиальная подыгра**.

Изображенная на рис. 4.11 игра является игрой с несовершенной информацией, поскольку узлы C и D принадлежат информационному множеству игрока 1. Нетрудно видеть, что в игре есть две (собственные) подыгры: первая с ветвью, начинающейся в узле A, вторая — в узле B; см. рис. 4.11.

Напомним, что стратегией игрока называется функция, согласующаяся с информационными множествами и ставящая в соответствие узлам, принадлежащим этому игроку, их потомков (последователей) этих узлов. Поскольку подыгра сама по себе является динамической игрой, стратегия игрока в подыгре также является функцией, определенной на узлах, принадлежащих игроку, со значениями во множестве их потомков, и согласующейся с информационными множествами в подыгре. Так как все информационные множества подыгры являются также информационными множествами исходной игры, легко понять, что любой профиль стратегий динамической игры автоматически порождает профиль стратегий любой ее подыгры. И обратно (снова нетрудно видеть из определения подыгры): любой профиль стратегий подыгры может быть расширен до профиля стратегий самой игры. Другими словами, имеет место следующее свойство.

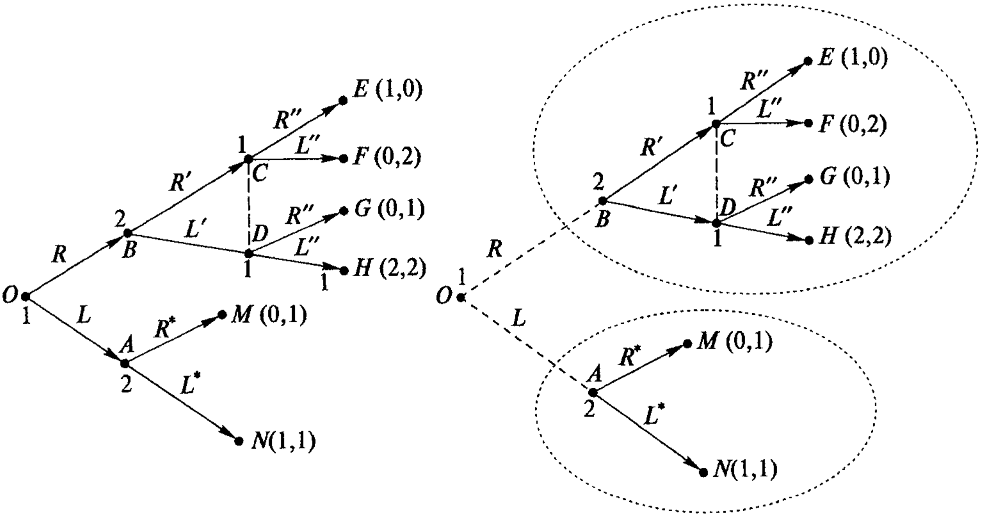


Рис. 4.11. Динамическая игра с несовершенной информацией

Таблица 4.2

	Игрок 2				
Игрок 1	Стратегия	$\{L',L^*\}$	$\{L',R^*\}$	$\{R',L^*\}$	$\{R',R^*\}$
	$\{R,L''\}$	(2,2)	(2,2)	(0,2)	(0,2)
	$\{R,R''\}$	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)
	$\{L,L''\}$	(1,1)	(0,1)	(1,1)	(0,1)
	$\{L,R''\}$	(1,1)	(0,1)	(1,1)	(0,1)

- *Профили стратегий подыгры в точности являются ограничениями профилей стратегий исходной игры на эту подыгру.*

Теперь обратимся к концепции *совершенного в подыграх равновесия*. Оно было предложено Р. Зельтеном[1].

Определение 4.11 (Зельтен). *Профиль стратегий динамической игры является* ***совершенным в подыграх равновесием****, если он индуцирует равновесие по Нэшу в каждой подыгре исходной игры.*

Отметим сразу, что поскольку сама игра является подыгрой, совершенное в подыграх равновесие автоматически оказывается равновесием по Нэшу исходной игры. Таким образом, профиль стратегий будет совершенным в подыграх равновесием, если помимо того, что он является равновесием по Нэшу в самой игре, он также окажется равновесием по Нэшу в любой ее подыгре[2].

Проиллюстрируем концепцию совершенного в подыграх равновесия на примере.

Пример 4.12. Рассмотрим динамическую игру, изображенную на рис. 4.11. Быстро найти ее равновесия по Нэшу можно, записав ее стратегическую (матричную) форму (табл. 4.2). На основе теоремы 2.5 мы понимаем, что следующие профили стратегий будут ее равновесиями по Нэшу:

(1) $(\{R,L''\},\{L',L^*\})$;
(2) $(\{R,L''\},\{L',R^*\})$;
(3) $(\{L,L''\},\{R',L^*\})$;
(4) $(\{L,R''\},\{R',L^*\})$.

Заметим также, что табл. 4.3 представляет матричную форму подыгры с началом в узле B. Легко видеть, что (L'',L') — единственное равновесие по Нэшу в подыгре с началом в узле B. Кроме того, нетрудно понять, что равновесия по Нэшу в подыгре с началом в узле A — это $(-,L^*)$ и $(-,R^*)$ (здесь «–» показывает, что у игрока нет возможности выбора, т.е. он неактивен).

Теперь проверим, окажутся ли найденные равновесия по Нэшу совершенными в подыграх равновесиями. Равновесие по Нэшу $(\{R,L''\},\{L',L^*\})$

[1] Рейнхард Зельтен — заслуженный профессор экономики (в отставке) Университета Бонна, Германия. Лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 г. (которую он разделил с Джоном Нэшем и Джоном Харсани). Был первым, кто осознал значение концепции совершенного в подыграх равновесия и развил и изложил эту концепцию в своей основополагающей работе «Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit» в «Zeitschrift fur die gesample Staatswissenschaft» (1965. Nr. 121. S. 301–324).

[2] Точнее, равновесием является сужение этого профиля на подыгру. — *Примеч. пер.*

Таблица 4.3

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	R'	L'
	R''	(1,0)	(0,1)
	L''	(0,2)	(2,2)

превращается в (L'', L') для подыгры с началом в B и в $(-, L^*)$ для подыгры с началом в A. Следовательно, это совершенное в подыграх равновесие.

Равновесие $(\{R, L''\}, \{L', R^*\})$, ограниченное на подыгру с началом в A, — это $(-, R^*)$, т.е. равновесие по Нэшу. Равновесие по Нэшу $(\{L, L''\}, \{R', L^*\}$ индуцирует (L'', R') в подыгре с началом в B, однако оно не будет равновесием по Нэшу в этой подыгре. Наконец, ограничение равновесия по Нэшу $(\{L, R''\}, \{R', L^*\})$ на подыгру с началом в B — это (R'', R'), что также не является равновесием по Нэшу.

В итоге получается, что из четырех равновесий по Нэшу в исходной игре только $(\{R, L''\}, \{L', L^*\})$ и $(\{R, L''\}, \{L', R^*\})$ являются совершенными в подыграх равновесиями. Оптимальный равновесный путь — это $O \to B \to D \to H$. ■

Таким образом, концепция совершенного в подыграх равновесия оказывается усилением концепции равновесия по Нэшу. Накладывая условие, требующее, чтобы равновесие по Нэшу[1] было также равновесием в каждой подыгре, мы исключаем равновесия, которые часто ведут себя «странно» и «иррационально» в некоторых подыграх, а именно в подыграх «вне» равновесного пути (определяемого профилем таких стратегий).

Это ясно видно из рассмотренного выше примера 4.12. Заметим, что равновесный профиль $(\{L, R''\}, \{R', L^*\})$ (определяющий путь $O \to A \to N$), ограниченный на подыгру с началом в B, — это профиль стратегий (R'', R'). Однако при таком профиле стратегий у игроков есть выгодное уклонение, т.е. такой профиль стратегий не является равновесием по Нэшу. Действительно, если игрок 2 выберет L' вместо R' в узле B, а игрок 1 при этом не изменит своего выбора R'' в своем информационном множестве, то игрок 2 получит больший выигрыш. Значит, выбор игроком 2 R' в узле B нерационален, или, согласно современной терминологии теории игр, выбор R' в узле B **не заслуживает доверия (недостоверен)**[2].

[1] Как предлагаемое решение игры, как прогноз поведения рациональных игроков. — *Примеч. ред.*

[2] То есть такой выбор, которого рациональный игрок не должен делать (так как такой выбор ему невыгоден, а поэтому рациональные его оппоненты не должны ожидать, что он такой выбор сделает). Заметим, что в книге обсуждается «рационалистический» вариант теории игр — все игроки рациональны, т.е. во всех ситуациях, в которых они оказываются или даже могут оказаться, они выбирают наилучшие возможные варианты. Далее, все игроки знают, что все игроки рациональны, а значит, знают, что они во всех ситуациях выбирают наилучшие из возможных вариантов. И при необходимости предполагается, что все игроки знают, что все игроки рациональны и т.д. Поэтому, т.е. если выбор игроком 2 стратегии R' в узле B нерационален, то игрок 1 не ожидает (не может ожидать), что игрок 2 такой выбор сделает. — *Примеч. ред.*

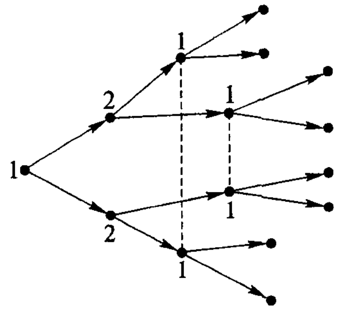


Рис. 4.12. Игра без собственных подыгр

Равновесие по Нэшу, не являющееся совершенным в подыграх равновесием, также известно как равновесие по Нэшу, которое поддерживается **недостоверным поведением**. Тогда возникает вопрос: почему же подобное недостоверное поведение случается при равновесии по Нэшу? Дело в том, что та часть дерева игры, для которой специфицируется недостоверное поведение, никогда не достигается, если разыгрывается равновесие по Нэшу!

Не все динамические игры имеют собственные подыгры. Например, в игре из рис. 4.11 ветвь с началом в узле *B* не имеет собственных (нетривиальных) подыгр. Изображенная на рис. 4.12 игра также не имеет собственных подыгр, поскольку для любой из ветвей дерева игры не выполняется условие 2 из определения подыгры.

Для динамических игр, не имеющих собственных (нетривиальных) подыгр, концепция совершенного в подыграх равновесия «не действует», поскольку каждое равновесие по Нэшу автоматически будет совершенным в подыграх равновесием. Если игра обладает собственными подыграми, концепция совершенного в подыграх равновесия позволяет получить более правдоподобные результаты[1], исключая необоснованные равновесия по Нэшу. Для игр без собственных подыгр имеется класс равновесий по Нэшу, известных как *секвенциальные равновесия*, который будет рассмотрен в гл. 8.

На данном этапе должен возникнуть естественный вопрос:

- *Всегда ли в динамической игре существует совершенное в подыграх равновесие по Нэшу?*

Ответом будет «да», если динамическая игра является игрой с совершенной информацией. Этот важный результат был доказан Г.У. Куном.

Теорема 4.13 (Кун). *В каждой динамической игре с совершенной информацией существует совершенное в подыграх равновесие.*

Более того, все совершенные в подыграх равновесия в играх с совершенной информацией могут быть получены методом обратной индукции.

Доказательство теоремы вытекает из знакомого нам метода обратной индукции, который состоит (как мы видели раньше) из следующих шагов.

На первом шаге выбираются все предшественники терминальных узлов, потомки (последователи) которых являются терминальными узлами, т.е.

[1] Прогнозы поведения рациональных игроков. — *Примеч. ред.*

узлы, ребра которых заканчиваются терминальными узлами. Будем называть полученное множество узлами первого этапа (или шага). После этого каждому узлу N первого этапа приписывается вектор выигрышей терминального узла, дающий наибольший возможный выигрыш участнику — владельцу данного узла N среди всех возможных векторов выигрышей, приписанных всем терминальным узлам — потомкам (последователям) N. Хотя для каждого узла N существует как минимум один терминальный узел, дающий наибольший выигрыш игроку, который владеет узлом N, узлов с такими свойствами может быть и несколько. Выбор различных терминальных узлов с наибольшим выигрышем может привести к нескольким совершенным в подыграх равновесиям. Выбрав терминальные узлы, дающие максимальный выигрыш для своих предшественников, удаляем всех потомков узлов первого этапа, оставшееся дерево — это усеченное дерево этапа 1.

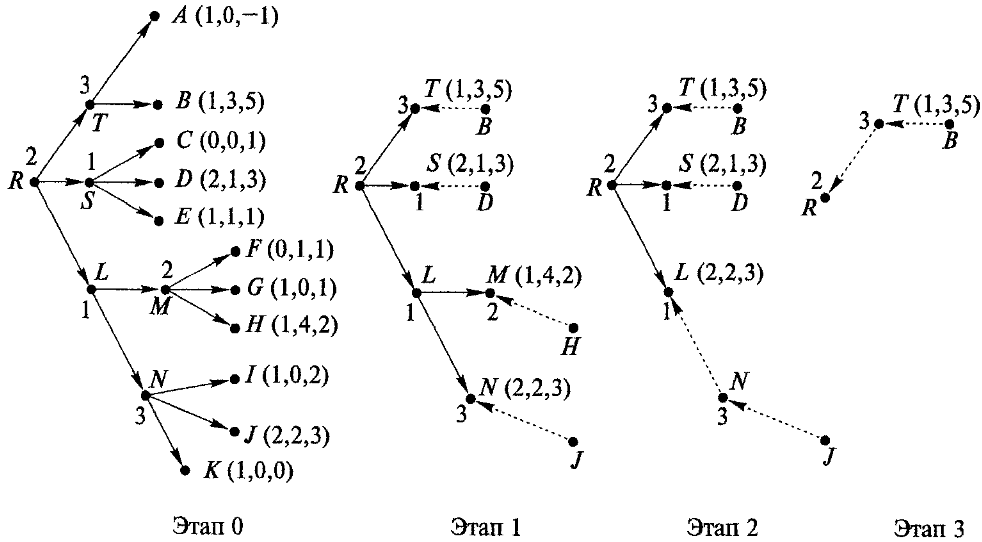
Второй этап повторяет процесс путем поиска предшественников узлов этапа 1, потомки которых оказываются терминальными узлами усеченного дерева этапа 1. Таким образом, к узлам второго этапа относятся такие узлы, *все ребра которых* заканчиваются терминальными узлами усеченного дерева этапа 1. С каждым узлом N второго этапа ассоциируем потомка N, например Q, с наибольшим выигрышем для участника — владельца данного узла N среди всех возможных терминальных узлов — потомков от N. Затем присваиваем вектор выигрыша в узле Q узлу N. (Ясно, что если узел N принадлежит игроку k, то k-я координата данного вектора выигрыша представляет собой лучший выигрыш игрока k, который он может получить начиная с узла N и заканчивая в терминальном узле изначального дерева игры[1].) Далее удаляем с усеченного дерева этапа 1 всех потомков узлов второго этапа, тем самым получая усеченное дерево этапа 2.

Предшественники узлов второго этапа, все ребра которых заканчиваются в терминальных узлах усеченного дерева этапа 2, будут узлами третьего этапа. Как и ранее, для каждого узла N третьего этапа находим ребро, ведущее к узлу второго этапа, например P, дающему наибольший возможный выигрыш игроку-владельцу узла N, и присваиваем узлу N вектор выигрыша узла P. (Снова, если узел N принадлежит игроку j, то j-я координата данного вектора выигрыша представляет наилучший выигрыш игрока j, который он может получить в узле N.) Усеченное дерево этапа 3 получается путем удаления потомков узлов третьего этапа с усеченного дерева этапа 2.

Процесс обратной индукции продолжается, до тех пор пока предшественники узлов некоторого этапа не будут в точности состоять из корня дерева R. Путь из корня R до узла этого этапа, дающего наибольший выигрыш игроку — владельцу корня, является началом оптимального пути (принятия) решений, который можно теперь проследить в обратном направлении.

Заметим, что описанный процесс обратной индукции также генерирует профиль стратегий, поддерживающий оптимальный путь. Любой такой профиль стратегий является совершенным в подыграх равновесием.

[1] С учетом оптимального поведения (одного из его) оппонентов. — *Примеч. ред.*



Равновесный путь:

$R \to T \to B$

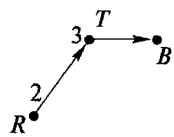


Рис. 4.13. Метод обратной индукции

Пример, изображенный на рис. 4.13, иллюстрирует алгоритм Куна нахождения совершенных в подыграх равновесий (и, значит, равновесий по Нэшу). Мы видим, что метод обратной индукции дает путь $B \to T \to R$. Обратив его, получим искомый путь решений $R \to T \to B$.

Как уже отмечалось ранее, метод обратной индукции также порождает равновесие по Нэшу, которое поддерживает оптимальный путь $R \to T \to B$. Заметим сначала, что любой профиль стратегий данной игры имеет форму

$$(\{L\underline{?},S\underline{?}\},\{R\underline{?},M\underline{?}\},\{T\underline{?},N\underline{?}\})$$ [1],

где $\underline{?}$ представляют потомков узлов L, S, R, M, T и N соответственно. Теорема Куна 4.13 гарантирует, что профили стратегий, полученные заполнением позиций, отмеченных $\underline{?}$, на основе использования по шагам метода обратной индукции, являются совершенными в подыграх равновесиями. Вот так выглядит заполнение $\underline{?}$ в конце каждого этапа для данной игры:

$$\text{Этап 1: } (\{L\underline{?},SD\},\{R\underline{?},MH\},\{TB,NJ\})$$

$$\text{Этап 2: } (\{LN,SD\},\{R\underline{?},MH\},\{TB,NJ\})$$

$$\text{Этап 3: } (\{LN,SD\},\{RT,MH\},\{TB,NJ\})$$

[1] Узлы, где впервые игрок 1, игрок 2 и игрок 3 делают выбор. — *Примеч. ред.*

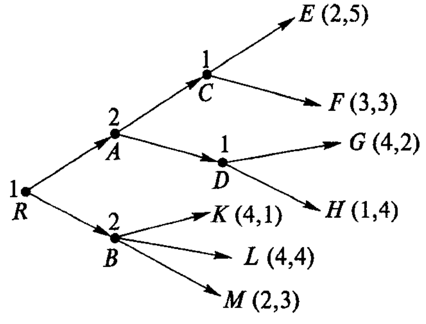


Рис. 4.14

Таким образом, игра имеет единственный совершенный в подыграх равновесный профиль стратегий

$$(\{LN,SD\},\{RT,MH\},\{TB,NJ\}),$$

который поддерживает оптимальный путь $R \to T \to B$.

Особо отметим следующий факт, относящийся к методу обратной индукции.

Хотя метод обратной индукции всегда порождает равновесный путь для динамической игры, однако, вообще говоря, он порождает не все равновесные пути! Он дает в точности те пути, которые соответствуют совершенным в подыграх равновесиям.

Пример динамической игры, иллюстрирующий этот факт, представлен на рис. 4.14. Нетрудно видеть, что метод обратной индукции дает совершенное в подыграх равновесие $(\{RB,CF,DG\},\{AC,BL\})$. Однако в этой динамической игре существуют и другие равновесия по Нэшу (см. упражнение 2 в конце раздела).

Завершая этот раздел, найдем решение игры на поглощение из примера 4.5. Игра решается описанным методом обратной индукции: игрок I знает, что если предложит цену $b < 100$ долл. за акцию, то игрок F откажется принять предложение, поскольку ему это невыгодно. Зная это, игрок I, если его намерения достаточно серьезны, должен будет предлагать цену как минимум на уровне 100 долл. за акцию[1]. Тогда отказ от предложения будет не в интересах игрока F. Если игрок I предложит $b > 100$ долл. за акцию, игрок F примет предложение и игрок I получит прибыль в размере $110 - b$ долл. за акцию. Ясно, что игрок I предложит как минимум 100 долл. за акцию, но сколько конкретно (каким окажется b)? Игрок I, максимизируя прибыль, будет предлагать чуть больше 100 долл. за акцию; при этом он получит в качестве прибыли (около) 10 долл. за акцию. Таким образом, метод обратной индукции приводит к следующему равновесию по Нэшу: *игрок I предлагает 100 долл. за акцию, а игрок F принимает предложение.*

[1] В действительности игрок I должен предлагать чуть больше 100 долл.

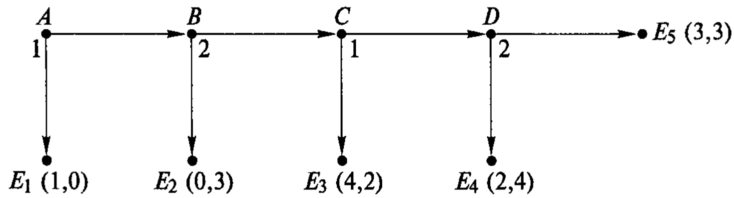


Рис. 4.15

Стоит проанализировать использованный нами метод решения игры на поглощение. Мы уже отмечали, что, когда игрок I делал свое предложение, он серьезно обдумывал, как игрок F будет реагировать на это предложение. Принимая во внимание возможную реакцию игрока F на предложение, игрок I выбирает оптимальное для него предложение. Это можно сделать и по-другому — найти оптимальный отклик игрока F на каждое предложение, которое мог бы сделать игрок I, а затем выяснить, что оптимально выбрать игроку I в этой модифицированной игре.

Рассмотрим пример динамической игры с совершенной информацией, которая заставит задаться вопросом: всегда ли метод обратной индукции дает самое разумное решение, даже при том, что оно обладает прекрасными свойствами: является совершенным в подыграх и совместимо с максимизацией выигрышей участников[1].

Пример 4.14 («Сороконожка»). Эта динамическая игра имеет много общего с игрой «Дилемма заключенного» (обсужденной в примере 2.2), поскольку равновесные выигрыши участников много ниже тех, что могли быть в случае, если бы игроки играли так, чтобы получить как можно большие совокупные выигрыши. Дерево игры изображено на рис. 4.15.

В узле D игрок 2 выберет E_4. Учитывая это, игрок 1 (в узле C) выберет E_3. В таком случае E_2 — оптимальный выбор игрока 2 в узле B. Следовательно, оптимальный выбор игрока 1 в узле A — E_1. Следовательно, полученный по методу обратной индукции совершенный в подыграх равновесный профиль стратегий — это:

$$(\{AE_1, CE_3\}, \{BE_2, DE_4\}).$$

$A \to E_1$ — равновесный путь, который ведет к вектору выигрыша (1,0). Это единственное совершенное в подыграх равновесие в данной игре. Интригующая характеристика этой игры заключается в том, что равновесный выигрыш значительно ниже, чем выигрыш (3,3), который игроки могли бы получить, если бы решили играть профиль стратегий

$$(\{AB, CD\}, \{BC, DE_5\}).$$

Интересно еще и то, что если игра достигнет точки C, выигрыш игроков будет гарантированно выше, чем равновесный выигрыш (1,0). ■

[1] Пример предложен Р. Розенталем и взят из его статьи «Games of perfect information, predatory pricing and the chain store paradox» (Journal of Economic Theory. 1981. Vol. 25. P. 92–100).

Упражнения

1. Покажите, что в динамической игре любой путь от начального узла до терминального узла поддерживается по крайней мере одним профилем стратегий. Приведите пример, в котором один и тот же путь поддерживается двумя различными профилями стратегий.
2. Рассмотрим динамическую игру с двумя участниками, изображенную на рис. 4.14.
   (a) Проверьте, что профиль стратегий $(\{RB,CF,DG\},\{AC,BL\})$ является единственным совершенным в подыграх равновесием, которое может быть получено методом обратной индукции.
   (b) Покажите, что профили стратегий $(\{RB,CF,DH\},\{AC,BL\})$ и $(\{RA,CF,DG\},\{AC,BM\}$ оказываются равновесиями по Нэшу, но не совершенными в подыграх равновесиями (и, таким образом, не могут быть получены методом обратной индукции).
3. Рассмотрим динамическую игру с совершенной информацией, изображенную на рис. 4.16, *а*.
   (a) Найдите все равновесия по Нэшу.
   (b) Найдите все совершенные в подыграх равновесия и объясните, почему они таковыми являются.
4. Приведите пример динамической игры с совершенной информацией, имеющей два совершенных в подыграх равновесия с различными равновесными путями.
5. Рассмотрим динамическую игру с несовершенной информацией, изображенную на рис. 4.16, *б*.
   (a) Запишите игру в матричной форме и найдите все равновесия по Нэшу.
   (b) Найдите все совершенные в подыграх равновесия этой динамической игры.

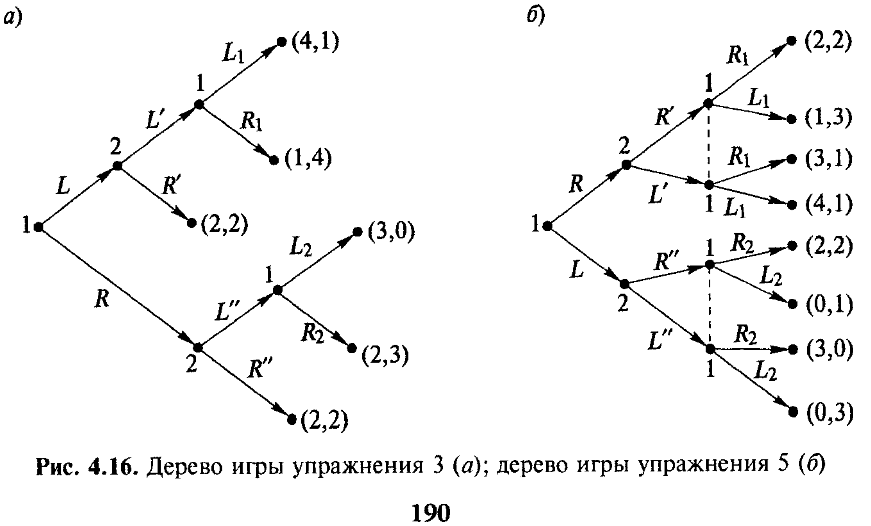


Рис. 4.16. Дерево игры упражнения 3 (*а*); дерево игры упражнения 5 (*б*)

6. Приведите пример динамической игры с несовершенной информацией, имеющей два совершенных в подыграх равновесия с различными равновесными путями.
7. В динамической игре, изображенной на рис. 4.17, параметр x — вещественное число. Найдите все совершенные в подыграх равновесия в этой динамической игре.
8. Найдите совершенные в подыграх равновесия, которые могут быть получены методом обратной индукции, в динамической игре, изображенной на рис. 4.18.
9. Рассмотрим динамические игры, изображенные на рис. 4.19. Найдите равновесия по Нэшу и совершенные в подыграх равновесия.

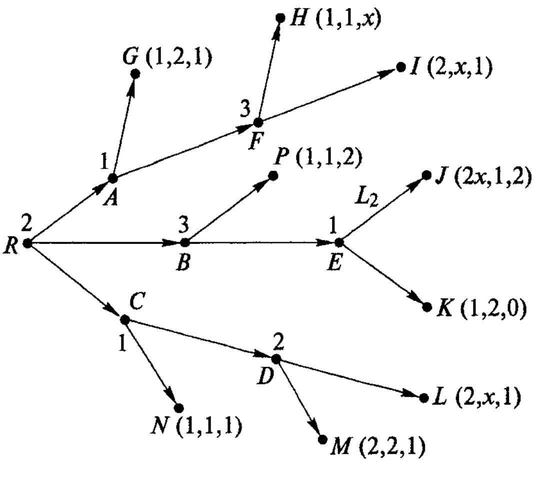


Рис. 4.17. Дерево игры к упражнению 7

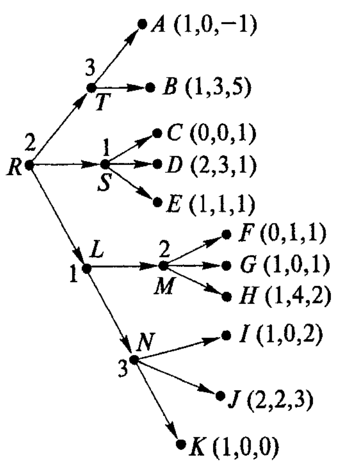


Рис. 4.18. Дерево игры к упражнению 8

10. Докажите, что стратегии игрока i в подыгре представляют собой ограничения стратегий игрока i в самой игре.

11. Найдите совершенные в подыграх равновесия в динамической игре, изображенной на рис. 4.20.

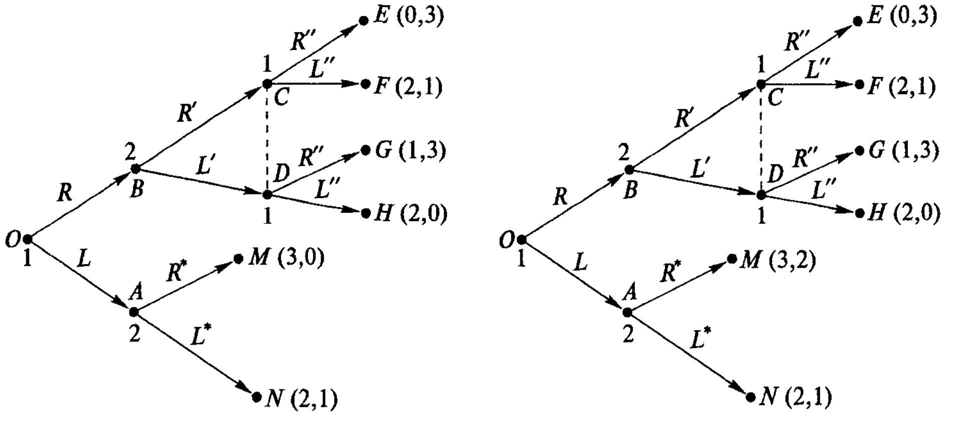


Рис. 4.19. Дерево игры к упражнению 9

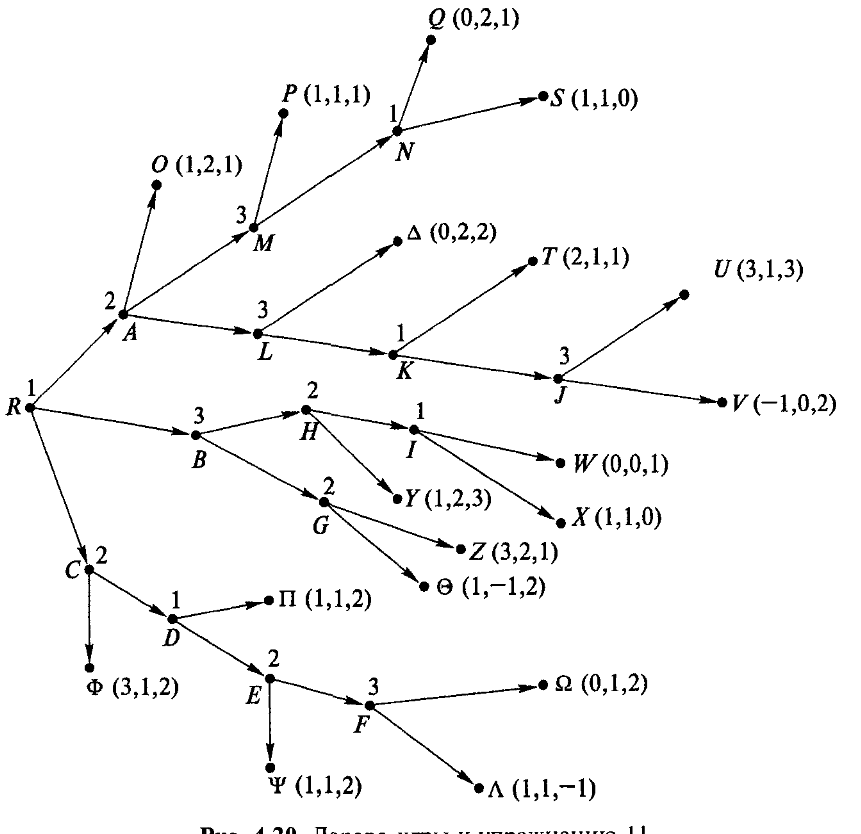


Рис. 4.20. Дерево игры к упражнению 11

12. Покажите, что метод обратной индукции позволяет доказать теорему 4.13. То есть покажите, что в динамической игре с совершенной информацией любой равновесный путь, полученный методом обратной индукции, является совершенным в подыграх равновесным путем.
13. Рассмотрим динамическую игру n лиц с терминальными узлами $Q_1,\ldots,Q_k$ и вектором выигрышей в каждом Q_i:

$$(\pi_1(Q_i),\pi_2(Q_i),\ldots,\pi_n(Q_i)).$$

Предположим, что найдется терминальный узел Q_l, такой что для каждого участника выполнено $\pi_i(Q_l)=\max_{1\le r\le k}\pi_i(Q_r)$. То есть в узле Q_l все участники получают наибольший выигрыш. Покажите, что (единственный) путь из начального узла в Q_l является равновесным по Нэшу путем.

4.3. Приложения динамических игр

В этом разделе будут рассматриваться примеры политических и экономических задач, для анализа которых могут быть использованы динамические игры. В каждом случае мы ищем и анализируем совершенное в подыграх равновесие. Во всех рассматриваемых примерах совершенное в подыграх равновесие кажется и правдоподобным, и осмысленным; оно позволяет объяснить и понять действия и решения участников. Первый пример представляет собой очень простую игру «Ядерное устрашение». Совершенное в подыграх равновесие достаточно ясно выявляет стимулы наращивания ядерной мощи странами-участниками.

Пример 4.15 («Ядерное устрашение»). Две ядерные державы вовлечены в гонку вооружения, где каждая сторона накапливает ядерное оружие. Встает вопрос о рациональности такого поведения для обеих сторон.

Попытаемся ответить на вопрос на основе стилизованной версии этой игры. Держава 1 делает ход на первом этапе и может выбрать между обладанием ядерным оружием, N, или его нераспространением, NP. Держава 2 на втором этапе, зная о выборе державы 1, также осуществляет выбор между N и NP.

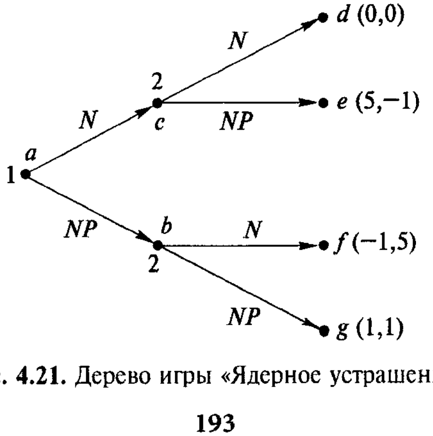


Рис. 4.21. Дерево игры «Ядерное устрашение»

Таблица 4.4. Матричная форма игры ядерная оборона

	Держава 2		
Держава 1	Стратегия	*N*	*NP*
	N	(0,0)	(5,–1)
	NP	(–1,5)	(1,1)

Типичное дерево игры изображено на рис. 4.21, откуда мы видим, что (N,N) — единственное равновесие по Нэшу этой игры. Матричная форма этой игры представлена в табл. 4.4[1].

Продолжим анализировать эту игру. В соответствии с указанными на рис. 4.21 выигрышами держава 2 предпочитает альтернативу N альтернативе NP вне зависимости от выбора державы 1. Если держава 1 выберет NP, держава 2, выбирая N, гарантирует себе сильное преимущество в противостоянии с державой 1. Если же держава 1 выберет N, держава 2 хотела бы выбрать N, поскольку она в этом случае получает эффективное средство ядерного устрашения для предотвращения ядерной атаки державы 1.

Зная, как представляет себе эту проблему держава 2, держава 1 понимает, что для нее оптимально выбрать N. Легко, таким образом, видеть, что метод обратной индукции ведет к следующему решению.

- *Держава 2 выбирает N независимо от выбора державы 1.*
- *Держава 1 выбирает N.*

Иначе говоря, путь $a \to c \to d$ — единственный путь в этой игре, определяемый единственным совершенным в подыграх равновесием.

Хотя, что очевидно, пример и является сильно стилизованным, он указывает на стимулы, которые возникают у стран, вовлеченных в гонку вооружений. В этой игре накопление ядерного оружия является рациональным для обеих держав. Предоставленные самим себе, ядерные державы обычно делают то, что и предсказывает модель.

Также очевидно и то, что обеим странам было бы лучше без бремени расходов на гонку вооружений. Однако равновесное решение предсказывает другое поведение. И именно поэтому гонка вооружений столь распространена, и именно поэтому так трудно убедить державы следовать другим стратегиям[2].

Заметим, что игра «ядерная оборона» очень похожа на дилемму заключенного, рассмотренную в примере 2.2. Очевидно, что N является строго доминирующей стратегией для обоих игроков. ■

Следующий пример хорошо известен в экономике. Вернемся к сценарию дуопольной игры из примера 2.24, однако вместо сделанного там предположения о том, что фирмы принимают решения (об объеме выпуска) одновременно, теперь будем предполагать, что одна из фирм делает свой ход до того, как свой

---

[1] Обратите внимание на некоторую неаккуратность анализа авторами этой ситуации. Так, у второго игрока не две, а четыре стратегии. Единственное равновесие по Нэшу — это (N,NN) и т.д. Фактически авторы анализируют эту игру как игру с одновременными ходами. — *Примеч. ред.*

[2] Представляется, что это объясняет, почему некоторые страны пытаются создавать потенциал производства ядерного оружия. Фактически это также позволяет представить в более широком контексте некоторые события времен холодной войны.

ход делает другая фирма. То есть одна из фирм определяет свой выпуск перед тем, как это сделает вторая фирма. Это меняет всю игру. Теперь она становится динамической игрой с совершенной информацией, поскольку выбор объема выпуска фирмы, которая первой определяет выпуск, известен второй фирме к тому моменту, когда она принимает решение об объеме производства. Впервые эта модель дуополии исследовалась фон Штакельбергом[1].

Пример 4.16 (модель дуополии Штакельберга). Дуополия Штакельберга разыгрывается следующим образом. Две фирмы производят один и тот же товар. Фирма 1 выбирает количество (объем производства) $q_1 \geq 0$, фирма 2 наблюдает q_1 и затем выбирает $q_2 \geq 0$. Итоговый выигрыш, или прибыль, фирмы i составит

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i[p(q) - c_i],$$

где $q = q_1 + q_2$ и $p(q) = A - q$ — рыночная цена товара (уравнивающая спрос и предложение на него) при совокупном производстве q, c_i — предельные издержки производства (или удельные издержки) фирмы i. Иначе говоря, прибыль каждой фирмы i это

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i(A - q_1 - q_2 - c_i).$$

Заметим, что эта игра — динамическая игра с двумя участниками, двумя этапами и с совершенной информацией. Для решения игры методом обратной индукции необходимо сначала найти наилучший отклик фирмы 2 на всевозможные объемы выпуска фирмы 1. А именно найти выпуск q_2^*, максимизирующий прибыль фирмы 2 при заданном выпуске q_1 фирмы 1. То есть $q_2^* = q_2^*(q_1)$, которое решает задачу

$$\pi_2(q_1, q_2^*) = \max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1, q_2) = \max_{q_2 \geq 0} q_2(A - q_1 - q_2 - c_2).$$

Поскольку $\pi_2(q_1, q_2) = -(q_2)^2 + (A - q_1 - c_2)q_2$, взяв первую и вторую производную по q_2, получим:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = -2q_2 + A - q_1 - c_2 \text{ и } \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial q_2^2} = -2 < 0.$$

Согласно условиям первого и второго порядков, точка максимума q_2^* является решением уравнения $\dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = -2q_2 + A - q_1 - c_2 = 0$. Отсюда получаем, что

$$q_2^* = q_2^*(q_1) = \frac{A - q_1 - c_2}{2} \qquad (*)$$

в предположении, что $q_1 < A - c_2$.

Фирма 1 должна теперь предвидеть, что если она выберет q_1, то фирма 2 выберет q_2^*. Следовательно, фирма 1 должна хотеть выбрать q_1, максимизирующее функцию

[1] Барон Гейнрих (или Генрих) фон Штакельберг (1905–1946) — германский экономист (родился в Кудиново, под Москвой. — *Примеч. ред.*). Член имеющей дурную репутацию нацистской партии, как и печально известной организации СС. Он продолжал разрабатывать теорию олигополии. Широко известен также как популяризатор модели Курно.

$$\pi_1(q_1,q_2^*) = q_1(A - q_1 - q_2^* - c_1) = q_1\left(A - q_1 - \frac{A - q_1 - c_2}{2} - c_1\right),$$

или

$$\pi_1(q_1,q_2^*) = \frac{1}{2}q_1[-(q_1)^2 + (A + c_2 - 2c_1)q_1],$$

при условии, что $q_1 \geq 0$. Используя снова условия первого и второго порядков, получим

$$\frac{\partial\pi(q_1,q_2^*)}{\partial q_1} = -q_1 + \frac{A + c_2 - 2c_1}{2} = 0 \text{ и } \frac{\partial^2\pi(q_1,q_2^*)}{\partial q_1^2} = -1 < 0.$$

Следовательно, точкой максимума функции $\pi_1(q_1,q_2^*)$ является $q_1^* = \frac{A + c_2 - 2c_1}{2}$. Подставим это значение в (*) и получим, что $q_2^* = \frac{A + 2c_1 - 3c_2}{4}$.

Это решение дуополии Штакельберга, полученное методом обратной индукции. То есть совершенным в подыграх равновесием (q_1^*,q_2^*) в игре будет

$$q_1^* = \frac{A + c_2 - 2c_1}{2} \text{ и } q_2^* = \frac{A + 2c_1 - 3c_2}{4}.$$

Иначе говоря, равновесной стратегией фирмы 1 является $q_1^* = \frac{A + c_2 - 2c_1}{2}$, а равновесной стратегией фирмы 2 $q_2^* = \frac{A + 2c_1 - 3c_2}{4}$[1].

Сравните полученный результат с решением модели дуополии Курно из примера 2.24, — версии модели дуополии с одновременным принятием решений (фирмами относительно объема выпуска). При этом вы увидите, что прибыль фирмы 1 в модели дуополии Штакельберга оказывается большей, нежели в модели дуополии Курно, в то время как прибыль фирмы 2 ниже в модели дуополии Штакельберга, чем в модели дуополии Курно; см. упражнение 1 в конце данного раздела.

С точки зрения стратегического поведения, как представляется, первый ход дает известное преимущество. Данный феномен часто имеет место в динамических играх и получил название **преимущества первого хода**. Интуитивное объяснение этого феномена может быть следующим: поскольку фирма 2 реагирует на наблюдаемый ею выпуск фирмы 1 (обязательства, которыми фирма 1 связывает себя, делая первый ход), фирма 1 придерживается наиболее выгодной для себя стратегии и тем самым усиливает свои позиции.

---

[1] Если $q_1^* = \frac{A + c_2 - 2c_1}{2}$ действительно является равновесной стратегией фирмы 1 (в профиле стратегий, составляющем единственное совершенное в подыграх равновесие), то $q_2^* = \frac{A + 2c_1 - 3c_2}{4}$ — это не равновесная стратегия (таковой будет найденная ранее функция $q_2^* = \frac{A + 2c_1 - 3c_2}{4}$ наилучшего отклика, или просто функция отклика), а значение равновесного объема выпуска фирмы 2 — а именно, то количество товара, которое она выпустит в ответ на выпуск фирмой 1 величины $q_1^* = \frac{A + c_2 - 2c_1}{2}$.

В дальнейшем мы часто будем видеть силу подобного рода обязательств в других ситуациях. ■

Следующий пример описывает ситуацию, в которой родители могут составить завещание в пользу ребенка. Ожидаемая ребенком сумма в завещании оказывает влияние на усилия e, которые он прилагает к заработку для себя и для родителей. Оставляемая родителями сумма зависит от дохода, порождаемого усилиями ребенка. Зная это, ребенок выбирает уровень усилий, учитывая то, как он отразится на сумме оставляемого завещания[1].

Пример 4.17 (завещание и стимулы). Ситуация может быть рассмотрена в виде двухшаговой игры, где на первом ходу ребенок выбирает уровень усилий e, которые он прилагает для того, чтобы обеспечить доход (в размере) $Y_C(e)$ себе и (в размере) $Y_P(e)$ своим родителям. После этого родители принимают решение о сумме завещания B на втором этапе игры. Динамическая игра, описывающая эту ситуацию, представлена на рис. 4.22.

Выигрыш ребенка составляет $u_C(Y_C(e)+B)$, а выигрыш родителей — $u_P(Y_P(e)-B)+\beta u_C(Y_C(e)+B)$, где $\beta > 0$. Функции выигрышей отражают то обстоятельство, что хотя ребенок может и не беспокоиться о благосостоянии родителей, выигрыш родителей зависит не только от полезности своего собственного дохода, но также и от выигрыша ребенка. Таким образом, родители альтруистичны по отношению к ребенку, но ребенок таковым по отношению к родителям не является.

При анализе этой игры с совершенной информацией будем предполагать, что функции выигрышей являются строго возрастающими и вогнутыми по доходам. Будем предполагать также, что функции дохода $Y_C(e)$ и $Y_P(e)$ являются строго вогнутыми и достигают максимума в точках $e_C > 0$ и $e_P > 0$ соответственно. То есть будем предполагать, что

$$u_C' > 0,\ u_C'' < 0 \text{ и } u_P' > 0,\ u_P'' < 0,$$
$$Y_C'' < 0 \text{ и } Y_P'' < 0.$$

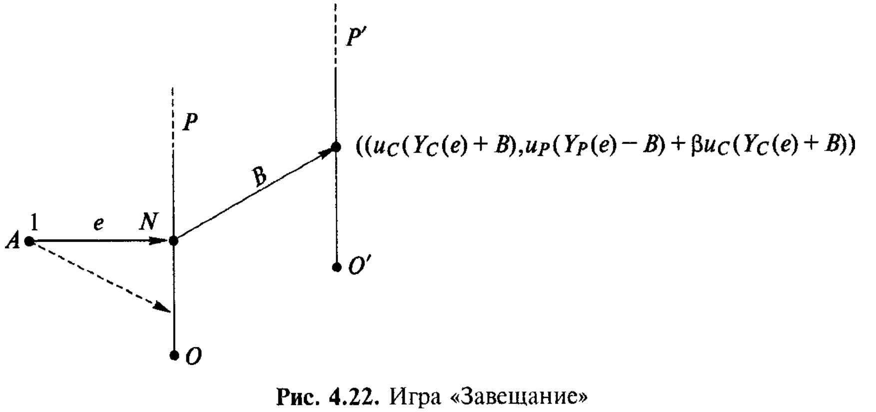


Рис. 4.22. Игра «Завещание»

[1] Следующий пример основан на работе Г. Беккера «A theory of social interactions» (Journal of Political Economy. 1974. Vol. 82. P. 1063–1093).

Совершенное в подыграх равновесие находится методом обратной индукции. На втором этапе игры оптимальным решением родителей является выбор завещания $B^*(e)$, зависящий от наблюдаемого уровня усилий ребенка. Оптимальная величина завещания является решением следующей оптимизационной задачи

$$\max_B [u_P(Y_P(e)-B)+\beta u_C(Y_C(e)+B)].$$

Из условий первого порядка получим

$$-u'_P(Y_P(e)-B)+\beta u'_C(Y_C(e)+B)=0.$$

Из условий второго порядка

$$u''_P(Y_P(e)-B)+\beta u''_C(Y_C(e)+B)<0.$$

Следовательно, оптимальная величина завещания $B^*(e)$ задается неявно соотношением

$$-u'_P(Y_P(e)-B^*(e))+\beta u'_C(Y_C(e)+B^*(e))=0. \tag{4.1}$$

Дифференцируя по e, получим

$$-u''_P(Y_P(e)-B^*(e))\left[Y'_P(e)-\frac{dB^*(e)}{de}\right]+\beta u''_C(Y_C(e)+B^*(e))\left[Y'_C(e)+\frac{dB^*(e)}{de}\right]=0. \tag{4.2}$$

Ребенок, выбирая уровень усилий e, решает задачу

$$\max_e u_C(Y_C(e)+B^*(e)).$$

Условия первого порядка дают $u'_C(Y_C(e)+B^*(e))\left[Y'_C(e)+\frac{dB^*(e)}{de}\right]=0$; можно проверить, что выполняются условия второго порядка для точки максимума. Поскольку $u'_C>0$, получим, что

$$Y'_C(e)+\frac{dB^*(e)}{de}=0. \tag{4.3}$$

Подставляя это в (4.2), получим, что

$$-u''_P(Y_P(e)-B^*(e))\left[Y'_P(e)-\frac{dB^*(e)}{de}\right]=0.$$

Поскольку $u''_P<0$, это означает, что

$$Y'_P(e)-\frac{dB^*(e)}{de}=0. \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) следует

$$Y'_C(e^*)+Y'_P(e^*)=0, \tag{4.5}$$

где e^* — равновесный уровень усилий ребенка.

Таким образом, совершенное в подыграх равновесие — это $(e^*,B^*(e))$, где e^* удовлетворяет (4.5), а $B^*(e)$ удовлетворяет (4.1).

Заметим, что если бы ребенок должен был выбрать уровень усилий e так, чтобы максимизировать совокупный доход семьи — величину $Y_C(e)+Y_P(e)$, то такие усилия $\hat{e}$ также должны удовлетворять соотношению

$$Y_C'(\hat{e})+Y_P'(\hat{e})=0\,. \tag{4.6}$$

Так как $Y_C(e)+Y_P(e)$ — строго вогнутая функция по e (т.е. $Y_C''(e)+Y_P''(e)<0$ для всех e), то

$$Y_C'(\hat{e})+Y_P'(\hat{e})=Y_C'(e^*)+Y_P'(e^*)$$

тогда и только тогда, когда $e^* = \hat{e}$.

Таким образом,

$$e^* = \hat{e}. \tag{4.7}$$

Это показывает, что соответствующий совершенному в подыграх равновесию (равновесный) уровень усилий e^* также является уровнем усилий, максимизирующим семейный доход $Y_C(e)+Y_P(e)$. ■

Следующий пример представляет собой динамическую игру с совершенной информацией, в которой принципалу предстоит решить, нужно ли осуществлять мониторинг деятельности агента. Отказ от мониторинга означает, что принципал не может наблюдать уровень усилий агента и должен решить, какую заработную плату платить агенту, не наблюдая уровня его усилий (не зная, насколько добросовестно он трудится). Мониторинг позволит наблюдать уровень усилий и назначать зарплату в зависимости от этого уровня. Высокий уровень усилий агента, а также мониторинг принципалом агента связаны с издержками. Ситуация анализируется путем рассмотрения совершенного в подыграх равновесия в этой динамической игре.

Пример 4.18 (игра мониторинга). Принципал нанял агента для выполнения некоторой задачи (реализации проекта). Теперь ему нужно выбрать, осуществлять мониторинг деятельности агента (*M*) или нет (*DM*). Будем предполагать, что такой мониторинг (контроль) сопряжен с некоторыми издержками, и агент знает, наблюдают за ним или нет.

В свою очередь при выполнении задания агент может прилагать как высокие (работать прилежно), так и низкие усилия (отлынивать). При мониторинге принципал наблюдает выбранный им уровень усилий; в противном случае наблюдать уровень усилий он не может. Принципал платит высокую либо низкую зарплату после того, как агент сообщает, что задание выполнено. Ценность для принципала (завершенного) проекта в случае, когда агент прилагает высокий уровень усилий (h), составляет $v(h) = 90$, а в случае низкого уровня усилий (l) равна $v(l) = 30$ соответственно. Высокая заработная плата составляет $w_h = 30$, а низкая — $w_l = 10$. При мониторинге принципал наблюдает прилагаемый им уровень усилий. Он платит агенту заработную плату, равную w_h, если наблюдаются h', и низкую заработную плату w_l, если наблюдает l'. Описанная ситуация может быть представлена в виде динамической игры с несовершенной информацией, см. рис. 4.23.

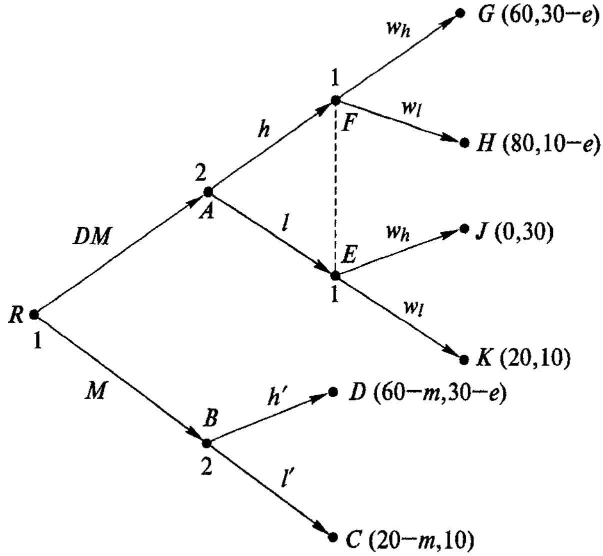


Рис. 4.23. Дерево игры мониторинга

На первом этапе принципал (игрок 1) решает, нужно ли осуществлять мониторинг. На втором этапе агент (игрок 2) выбирает уровень усилий $[h',h]$ или $[l,l']$. На последнем этапе игрок 1 (принципал) решает, какую заработную плату платить, высокую w_h или низкую w_l.

Обозначим через m издержки принципала, связанные с мониторингом агента, а через e издержки, которые несет агент, если выбирает высокие усилия. Будем предполагать, что $0 < m < 20$ и $0 < e < 10$. (Эти условия подразумевают следующие неравенства, которые используются при нахождении равновесий по Нэшу в подыграх в матричных формах: $60 - m > 40$ и $30 - e > 20$.)

Матричная форма игры представлена в табл. 4.5. Матричная форма игры с началом в A представлена в табл. 4.6.

Матричная форма игры с началом в B дана в табл. 4.7.

Используя теорему 2.5, нетрудно видеть из матричной формы динамической игры, что в игре есть следующие два равновесия по Нэшу:

$$(\{M,w_l\},\{l,h'\}) \text{ и } (\{M,w_h\},\{l,h'\}).$$

Таблица 4.5. Матричная форма игры мониторинга

	Игрок 2				
Игрок 1	Стратегия	$\{h,h'\}$	$\{h,l'\}$	$\{l,h'\}$	$\{l,l'\}$
	$\{M,w_l\}$	$(60 - m,30 - e)$	$(20 - m,10)$	$(60 - m,30 - e)$	$(20 - m,10)$
	$\{M,w_h\}$	$(60 - m,30 - e)$	$(20 - m,10)$	$(60 - m,30 - e)$	$(20 - m,10)$
	$\{DM,w_l\}$	$(80,10 - e)$	$(80,10 - e)$	$(20,10)$	$(20,10)$
	$\{DM,w_h\}$	$(60,30 - e)$	$(60,40 - e)$	$(0,30)$	$(0,30)$

Таблица 4.6. Матричная форма игры с началом в A

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	h	l
	w_l	$(80, 10 - e)$	$(20, 10)$
	w_h	$(60, 30 - e)$	$(0, 30)$

Таблица 4.7. Матричная форма игры с началом в B

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	h'	l'
	–	$(60 - m, 30 - e)$	$(20 - m, 10)$

При этом из матричной формы игры с началом в A (табл. 4.6) видим, что (w_l, l) — единственное равновесие по Нэшу в этой игре. Равновесие по Нэшу в подыгре с началом в B (табл. 4.7) имеет вид $(-, h')$.

Отметим, что:

(1) равновесие по Нэшу $(\{M, w_l\}, \{l, h'\})$ сводится к (w_l, l) в подыгре с началом в A, т.е. профилю стратегий в этой подыгре, который также является равновесием по Нэшу. В подыгре с началом в B оно сводится к профилю стратегий $(-, h')$, который также является равновесием по Нэшу в этой подыгре. Таким образом, $(\{M, w_l\}, \{l, h'\})$ — совершенное в подыграх равновесие;

(2) равновесие по Нэшу $(\{M, w_h\}, \{l, h'\})$ в подыгре с началом в B сводится к $(-, h')$, что является в ней равновесием по Нэшу. Однако в подыгре с началом в A оно сводится к профилю стратегий (w_h, l), который равновесием по Нэшу не является. Следовательно, $(\{M, w_h\}, \{l, h'\})$ не будет совершенным в подыграх равновесием.

Таким образом, игра имеет единственное совершенное в подыграх равновесие, а именно

$$(\{M, w_l\}, \{l, h'\})^{1}.$$

Равновесный путь (соответствующий этому совершенному в подыграх равновесию) имеет вид

$$R \to B \to D.$$

Представляется, что это наиболее осмысленное равновесие в данной игре. Так, хотя профиль стратегий $(\{M, w_h\}, \{l, h'\})$ и является равновесием по Нэшу, он теряет это свойство при ограничении на подыгру с началом в узле A. И потому при заданных выигрышах было бы необоснованным ожидать, что агент будет работать прилежно (выберет высокие усилия) и принципал будет выплачивать высокую заработную плату, учитывая, что игроку 2 выгоднее отлынивать, а игроку 1 выгоднее платить низкую зарплату. Требование, чтобы равновесие по Нэшу было бы еще и совершенным в подыграх равновесием, исключает это второе необоснованное (и недостоверное) равновесие. ■

[1] В игре еще одно равновесие по Нэшу $(\{DM, \omega_l\}, \{l, l'\})$, которое также не является совершенным в подыграх равновесием. — *Примеч. ред.*

Следующий пример служит приложением теории динамических игр к международной торговле. Игра происходит в два этапа. На первом этапе делают ход две страны, каждая из которых устанавливает таможенные ставки (ставки тарифа) на импорт. При заданных таможенных ставках фирма i, $i = 1, 2$, которая производит в стране i, решает, какое количество продукта производить для домашнего потребления и сколько на экспорт в другую страну. Таким образом, на первом этапе между странами разыгрывается стратегическая игра на установление ставок тарифов. На втором этапе две фирмы разыгрывают игру (в стратегической форме) на установление объемов выпуска.

Пример 4.19 (игра «Международная торговля»). Рассмотрим две страны, в каждой из которых есть фирма, производящая некоторый товар, который потребляется как внутри данной страны, так в другой стране. Спрос на товар в стране i задается как $p_i(q_i) = a - q_i$, где $q_i = y_i + x_j$ — совокупное количество проданного в стране i товара, y_i — количество, проданное фирмой i (т.е. фирмой, производящей в стране i) на внутреннем рынке, а x_j — количество, экспортированное фирмой j (т.е. фирмой, производящей в стране j) в страну i. Каждая страна выбирает ставку тарифа r_i. При заданных ставках тарифов каждая фирма решает, сколько всего производить, сколько продавать на внутреннем рынке и сколько экспортировать. Каждая страна выбирает ставки тарифов, максимизирующие благосостояние. То есть страна i выбирает r_i так, чтобы максимизировать благосостояние W_i, где

W_i = Излишек потребителя + Прибыль фирмы i + Таможенные доходы.

Принимая во внимание, что таможенные ставки (r_1,r_2) заданы, фирма i выбирает (y_i,x_i) так, чтобы максимизировать свою прибыль:

$$\pi_i((r_1,r_2),(y_i,x_i),(y_j,x_j)) = \text{Доход от продаж в своей стране} +$$
$$+ \text{Поступление от экспорта} -$$
$$- \text{Издержки} - \text{Уплаченные тарифы} =$$
$$= [a-(y_i+x_j)]y_i + [a-(y_j+x_i)]x_i - c(y_i+x_i) - r_j x_i .$$

Здесь c — постоянные предельные издержки обеих фирм.

В совершенном в подыграх равновесии двухэтапной игры объемы выпусков фирм должны быть равновесными при любых значениях (r_1,r_2) тарифных ставок, выбираемых странами. С учетом объемов выпуска выбираемые странами тарифные ставки должны быть также равновесными. Найдем совершенное в подыграх равновесие методом обратной индукции.

Этап II. При заданных значениях (r_1,r_2) тарифных ставок фирма i выберет (y_i,x_i), максимизируя прибыль:

$$[a-(y_i+x_j)]y_i + [a-(y_j+x_i)]x_i - c(y_i+x_i) - r_j x_i .$$

Условия первого порядка (такой максимизации):

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial y_i} = a - 2y_i - x_j - c = 0 ,$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = a - y_j - 2x_i - c - r_j = 0 .$$

Следовательно, в соответствии с равновесием по Нэшу равновесные уровни выпуска при заданных тарифных ставках (r_1,r_2) находятся путем решения системы уравнений:

$$a - 2y_1 - x_2 - c = 0 ,$$
$$a - y_2 - 2x_1 - c - r_2 = 0 ,$$
$$a - 2y_2 - x_1 - c = 0 ,$$
$$a - y_1 - 2x_2 - c - r_1 = 0 .$$

Из первого и третьего уравнений системы получим

$$x_2 = a - 2y_1 - c ,$$
$$x_1 = a - 2y_2 - c .$$

Подставив эти выражения во второе и четвертое уравнения, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными (y_1,y_2):

$$-a + 3y_2 + c - r_2 = 0 ,$$
$$-a + 3y_1 + c - r_1 = 0 .$$

Отсюда находим равновесный объем выпуска фирмы i:

$$y_i^*(r_1,r_2) = \frac{a - c + r_i}{3} ,$$
$$x_i^*(r_1,r_2) = \frac{a - c - 2r_j}{3} . \tag{4.8}$$

Этап I. На этом этапе при установлении тарифных ставок страны предвидят, что фирмы устанавливают объемы выпуска, максимизируя собственную прибыль, т.е. что фирма i установит объем выпуска, заданный уравнением (4.8). Следовательно, при выборе своей ставки r_i страна i максимизирует функцию благосостояния вида

$$W_i((r_1,r_2),(y_1^*(r_1,r_2),x_1^*(r_1,r_2)),(y_2^*(r_1,r_2),x_2^*(r_1,r_2))) .$$

Излишек потребителя в стране i в этом случае задается как[1]

$$\frac{(y_j^* + x_j^*)^2}{2} = \frac{(2a - 2c - r_i)^2}{18} . \tag{4.9}$$

Цена товара в стране i составит

$$p_i^* = a - y_i^* - x_j^* = \frac{a + 2c + r_i}{3} .$$

[1] Потребительский излишек задается площадью под кривой спроса, которая лежит над текущей рыночной ценой. Так, когда кривая спроса — график функции $q = a - p$, и (текущая рыночная) цена равна $\hat{p}$, эта площадь равна $\frac{(a-\hat{p})^2}{2}$.

Следовательно, при условии что на втором этапе фирмы выберут равновесные объемы производства, благосостояние страны i будет равно

$$W_i^*(r_1,r_2)=\frac{(2a-2c-r_i)^2}{18}+p_i^*y_i^*+p_j^*x_i^*-c(y_i^*+x_i^*)-r_jx_i^*+r_ix_j^*=$$

$$=\frac{(2a-2c-r_i)^2}{18}+\frac{a+2c+r_i}{3}\times\frac{a-c+r_i}{3}-c\times\frac{a-c+r_i}{3}+r_i\times\frac{a-c-2r_i}{3}+F(r_j), \quad (4.10)$$

где $F(r_j)$ — функция, зависящая только от r_j и не зависящая от r_i. Условия первого порядка для функции $W_i^*(r_1,r_2)$ имеют вид

$$\frac{\partial W_i^*}{\partial r_i}=-\frac{2a-2c-r_i}{9}+\frac{a-c+r_i}{9}+\frac{a+2c+r_i}{9}-\frac{c}{3}+\frac{a-c-4r_i}{3}=0\,.$$

Откуда получим, что

$$r_i^*=\frac{a-c}{3}\,. \quad (4.11)$$

Следовательно, профиль стратегий, составляющих совершенное в подыграх равновесие, — это

$$r_1^*=\frac{a-c}{3},\ r_2^*=\frac{a-c}{3},$$

$$y_i^*(r_1,r_2)=\frac{a-c+r_i}{3},\ x_i^*(r_1,r_2)=\frac{a-c-2r_j}{3},\ i=1,2\,.$$

Выясним теперь, как ставки, соответствующие (найденному) совершенному в подыграх равновесию, соотносятся с тарифными ставками, максимизирующими совокупное благосостояние обеих стран. Общее благосостояние двух стран $W(r_1,r_2)=W_1(r_1,r_2)+W_2(r_1,r_2)$ имеет вид

$$W(r_1,r_2)=\frac{(2a-2c-r_1)^2}{18}+\frac{(2a-2c-r_2)^2}{18}+p_1^*(y_1^*+x_2^*)+p_2^*(y_2^*+x_1^*)-$$

$$-c(y_1^*+y_2^*+x_1^*+x_2^*)-r_1x_2^*-r_2x_1^*+r_1x_2^*+r_2x_1^*\,.$$

Следовательно,

$$W(r_1,r_2)=\frac{(2a-2c-r_1)^2}{18}+\frac{(2a-2c-r_2)^2}{18}+\frac{a+2c+r_1}{3}\times\frac{2(a-c)-r_1}{3}+$$

$$+\frac{a+2c+r_2}{3}\times\frac{2(a-c)-r_2}{3}-c\frac{4(a-c)-r_1-r_2}{3}\,.$$

Теперь заметим, что при $a>c$ (условие, необходимое для существования рынка) имеем

$$\frac{\partial W}{\partial r_1}=\frac{-(a-c)-r_1}{9}<0$$

и

$$\frac{\partial W}{\partial r_2}=\frac{-(a-c)-r_2}{9}<0\,.$$

Это показывает, что совокупное благосостояние убывает с ростом как r_1, так и r_2. Отсюда получается, что максимум общего благосостояния достигается при $r_1 = r_2 = 0$[1]. Сопоставляя этот результат с равновесными ставками тарифов, заключаем, что для обеих стран было бы выгоднее устанавливать нулевые ставки тарифов, однако такие ставки не являются равновесием игры. Следовательно, равновесие в этом примере характеризуется тем же типом неэффективности, который мы наблюдали в случае игры «Дилемма заключенного»: выигрыш стран в равновесии строго меньше, чем если бы они сотрудничали в установлении нулевых ставок тарифа. ■

В публикациях о **моральном риске**[2] в экономической теории рассматриваются ситуации, в которых агенты могут предпринимать действия, нежелательные с точки зрения эффективности. Например, агент может решить работать с прохладцей (лениться) или вовсе уклоняться от работы, выполнения своих обязанностей, вместо того чтобы трудиться усердно.

Обычно это происходит, когда нет контроля за работой агента и доход не полностью определяется его усилиями. Это имеет место, когда высокий уровень усилий не обязательно приводит к высоким результатам или низкий уровень усилий может привести к высоким результатам. Конечно, в таких ситуациях чем выше уровень усилий, тем лучше шансы получить хороший результат, т.е. чем выше уровень усилий, тем выше вероятность хорошего результата. Следующие два примера представляют ситуации, в которых могут возникать такие моменты «морального риска». В первом из них принципал или наниматель способен напрямую наблюдать уровень усилий агента (агента). Во втором примере, который отталкивается от первого, «моральный риск» может стать проблемой, поскольку принципал, в отличие от ситуации в первом примере, не может наблюдать усилий агента.

Пример 4.20 (оптимальный контракт: случай совершенной информации). Этот пример лежит в основе исследований *морального риска* в экономической теории. Здесь мы исходим из того, что моральный риск отсутствует. Но мы можем использовать версию этой же модели, чтобы проиллюстрировать основные результаты, полученные в литературе. Обратите внимание также на следующий пример в этом разделе.

В этой динамической игре с двумя участниками *принципал P* рассматривает возможность заключить контракт на некоторый вид работ (на реализацию некоторого проекта) с *агентом A*. Агент может либо согласиться на предла-

---

[1] Здесь мы имеем граничное решение, поскольку условие первого порядка для внутреннего максимума не выполняется.

Следует отметить, что это имеет место лишь в том случае, если в качестве инструментов торговой политики ограничиваться тарифами. Но как нетрудно видеть, совокупное благосостояние достигает максимума при субсидировании внешней торговли — «отрицательных тарифах» r_1, r_2, таких что $r_1 = r_2 = -(a - c)$. Впрочем, это почти очевидно и без большей части проделанных вычислений: товары при таких субсидиях продаются по ценам, в точности равным предельным издержкам, — выполняется критерий эффективности состояния такой экономики. — *Примеч. ред.*

[2] Альтернативные термины, используемые в русскоязычной литературе: субъективный риск, моральное искушение. — *Примеч. пер.*

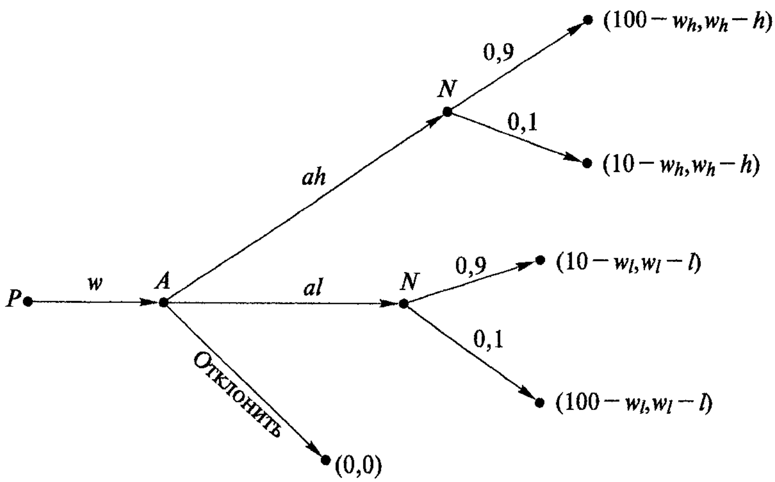


Рис. 4.24. Дерево игры «Оптимальный контракт»

гаемый контракт, либо отказаться от него. Если агент соглашается на предложенный контракт, он может усердно трудиться, неся при этом издержки h, или лениться (работать спустя рукава, отлынивать), неся издержки l. Будем предполагать, что издержки h и l измеряются в долларах. Предположим также, что выполняются следующие неравенства:

$$h > l > 0 .$$

Обозначим решения «согласиться и работать усердно» через ah и «согласиться и лениться» через al.

Если агент трудится усердно, ценность проекта с вероятностью 0,9 окажется равной 100 долларам и с вероятностью 0,1 — всего лишь 10 долларам. Если агент ленится, ценность проекта окажется равной 100 долларам с вероятностью 0,1 и 10 долларам с вероятностью 0,9. Будем предполагать, что в этой игре принципал может наблюдать, трудится агент усердно или ленится. Таким образом, эта игра — динамическая игра с совершенной информацией.

Принципал может предложить контракт, при котором оплата зависит от того, какие усилия прилагаются агентом. Поэтому будем обозначать контракт как функцию $w(\cdot)$, принимающую два значения: w_h и w_l[1]. Результирующая игра изображена на рис. 4.24.

Ожидаемый выигрыш[2] принципала в случае «согласиться и работать усердно» составит

$$0{,}9 \times (100 - w_h) + 0{,}1 \times (10 - w_h) = 91 - w_h .$$

[1] w_h — плата по контракту, если агент трудится усердно, и w_l — плата по контракту, если агент ленится. — *Примеч. ред.*

[2] Здесь предполагается, что выигрыш принципала — это его ожидаемый чистый доход. И в частности, то, что принципал нейтрален к риску. Агент в этой ситуации, соглашаясь с предложением, с риском не сталкивается. — *Примеч. ред.*

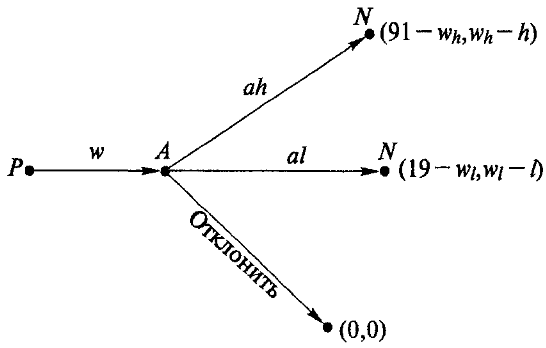


Рис. 4.25. Обратная индукция игры с оптимальным контрактом

Подобным образом выигрыш принципала в случае «согласиться и лениться» составит

$$0{,}1\times(100-w_l)+0{,}9\times(10-w_l)=19-w_l.$$

Метод обратной индукции приводит к усеченному дереву игры, изображенному на рис. 4.25.

Отсюда можно заключить, что

- агент трудится усердно, если $91-w_h>19-w_l$ и $91-w_h\ge 0$,

$$\text{или } 0<w_h-w_l<72 \text{ и } 91-w_h\ge 0.$$

- иначе агент ленится[1].

Зная действия агента, принципал будет действовать следующим образом.

Случай I. $0<w_h-w_l<72$[2].

(a) Принципал предложит контракт $w_h > h$, где $w_h \cong h$ и $w_l = l$.

(b) Агент «согласится и трудится усердно».

Случай II. $w_h-w_l>72$.

Принципал предложит контракт $w_h = h$ и $w_l = l$, а агент согласится и будет лениться[3].

[1] Агент трудится усердно при условии, что принимает предложение и если $w_h-h>w_l-l$. С другой стороны, он принимает предложение принципала, если его выигрыш при этом, w_h-h, выше (не ниже) выигрыша, который он получает при отказе от предложения (резервного выигрыша, резервной полезности). Из дальнейшего изложения следует, что неявно авторы предполагают, что этот выигрыш, как и выигрыш принципала при отказе агента от его предложения, равен нулю. Приведенные авторами оценки показывают, что если выплаты по контракту w_h и w_l удовлетворяют указанным соотношениям, то принципал заинтересован, во-первых, такой контракт предложить, а во-вторых, заинтересован стимулировать агента трудиться усердно. — *Примеч. ред.*

[2] Здесь и далее также неточности. Это соотношение должно иметь вид $h-l<72$, $91>h$. Аналогичные изменения следует сделать и для случая 2, и для вывода из проведенного анализа. — *Примеч. ред.*

[3] По аналогии со случаем 1 следовало бы записать $w_h=h$ и $w_l>l$, где $w_l\cong l$. Вообще говоря, любой такой профиль стратегий равновесным не является. Единственный равновесный профиль стратегий в этой ситуации — это как раз описанный выше профиль: принципал предлагает контракт $w_h=h$ и $w_l=l$, агент согласится и будет лениться. Как и в первом случае — профиль: принципал предлагает контракт $w_h=h$ и $w_l=l$, агент выбирает «согласиться и трудиться усердно». — *Примеч. ред.*

Данное решение показывает, что предлагаемый принципалом контракт будет стимулировать агента трудиться усердно только в том случае, если разница между w_h и w_l будет существенно мала, т.е. высокий уровень зарплаты, необходимый для стимуляции усердной работы, не слишком высок. ■

В рассмотренном примере принципал P способен напрямую наблюдать уровень усилий агента. В реальной ситуации это может быть сопряжено со слишком высокими издержками (такого наблюдения) либо оказаться просто невозможным. И как следствие, контракт, который принципал захочет предложить, обусловливается теми характеристиками сделки, которые он в состоянии наблюдать. Обычно уровень заработной платы зависит от наблюдаемых результатов. Так, зарплата будет высокой в случае, если наблюдаемый результат близок к тому, который предпочитает принципал. Следующий пример исследует такого рода ситуацию.

Пример 4.21 (оптимальный контракт: случай несовершенной информации). Рассмотрим снова общую формулировку игры из примера 4.20. Здесь мы будем предполагать, что принципал способен наблюдать результат, но не сам уровень усилий агента. Поскольку принципал больше не способен наблюдать уровень усилий агента, игра становится игрой с несовершенной информацией. Дерево игры изображено на рис. 4.26.

В этом случае, поскольку принципал не может наблюдать уровня усилий агента, заработная плата по контракту (зарплатный контракт, договор о заработной плате) $w(\cdot)$ зависит от результата (деятельности агента), наблюдаемого принципалом. То есть $w(\cdot)$ теперь представляет собой функцию от результата, а не уровня усилий. Положим

$$w_1 = w\ (\textit{высокий результат}) \text{ и } w_2 = w\ (\textit{низкий результат})$$

и заметим, что заработная плата, обусловленная предлагаемым принципалом зарплатным контрактом, — просто пара $w = (w_1, w_2)$; при этом $w_1 \geq 0$ и $w_2 \geq 0$.

В этой динамической игре стратегия принципала состоит в предложении контракта (договора о заработной плате) $w = (w_1, w_2)$, а стратегия агента состоит в плане действий: принять или отказаться от предложения в узле x и работать усердно или лениться (отлынивать) (другими словами, выбрать ah или al). Важно заметить, что узел x, который достигается после предложения о заработной плате $w = (w_1, w_2)$, отличается от узла x, который достигается после предложения о зарплате $w' \neq w$. Будем обозначать достигаемый в результате предложенной зарплаты узел x через $x(w)$. Это значит, что мы имеем дело с бесконечно большим множеством возможных узлов x (собственно, с континуумом узлов). Множество альтернатив для узла x отражено лучом (полупрямой) OM на рис. 4.26. Другими словами, как только узел $x = x(w)$ достигнут, оставшаяся часть игры (с началом в x) выглядит так, как изображено на рис. 4.26.

Заметим, что в узле x у агента есть три выбора: ah, al и R (отказаться). Вычислим ожидаемые выигрыши π_P и π_A принципала и агента соответственно:

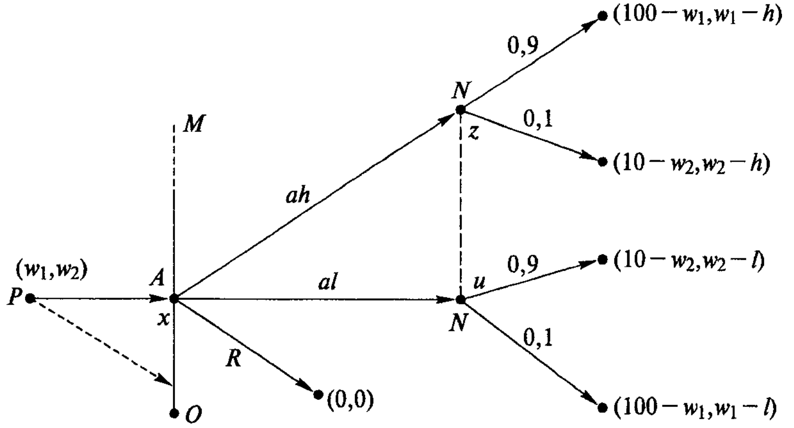


Рис. 4.26. Дерево игры с оптимальным контрактом в случае несовершенной информации

$$\pi_P(w,s)=\begin{cases}91-0{,}1(9w_1+w_2), & \text{если } s=ah,\\ 19-0{,}1(w_1+9w_2), & \text{если } s=al,\\ 0, & \text{если } s=R,\end{cases}$$

и

$$\pi_A(w,s)=\begin{cases}0{,}1(9w_1+w_2-10h), & \text{если } s=ah,\\ 0{,}1(w_1+9w_2-10l), & \text{если } s=al,\\ 0, & \text{если } s=R.\end{cases}$$

Следовательно, равновесием в игре будет профиль стратегий (w^*,s^*), где $w^*=(w_1^*,w_2^*)$, такой что

$$\pi_P(w,s^*)\le\pi_P(w^*,s^*)$$

для любых предложений заработной платы $w=(w_1,w_2)$ принципалом P и

$$\pi_A(w^*,s)\le\pi_A(w^*,s^*)$$

для любых стратегий s агента A.

Как только контракт $w=(w_1,w_2)$ предложен, т.е. достигнет узел x, агент A выберет стратегию $s\in\{ah,al,R\}$ исходя из решения задачи

$$\max\{0{,}1(9w_1+w_2-10h),0{,}1(w_1+9w_2-10l),0\},$$

т.е. s является наилучшим ответом (откликом) на контракт w. Пусть $s^*=s^*(w)$ и есть отклик на $w=(w_1,w_2)$. Следовательно, s^* удовлетворяет соотношениям

$$\pi_A(w,s^*)=\max\{0{,}1(9w_1+w_2-10h),0{,}1(w_1+9w_2-10l),0\}=$$

$$=\begin{cases}0{,}1(9w_1+w_2-10h), & \text{если } 9w_1+w_2-10h>\max\{w_1+9w_2-10l,0\},\\ 0{,}1(w_1+9w_2-10l), & \text{если } w_1+9w_2-10l>\max\{9w_1+w_2-10h,0\},\\ 0{,}1(w_1+9w_2-10l), & \text{если } w_1+9w_2-10l=9w_1+w_2-10h>0,\\ 0, & \text{если } \max\{9w_1+w_2-10h,w_1+9w_2-10l\}\le 0.\end{cases}$$

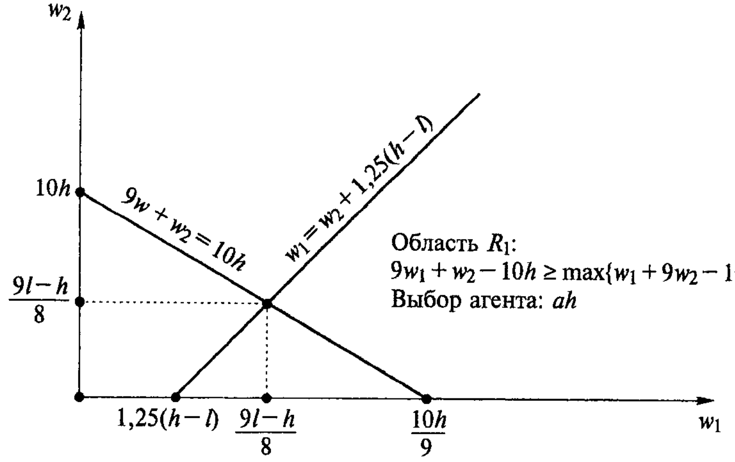


Рис. 4.27

Говоря иначе, отклик s^* на контракт w — это

$$s^* = \begin{cases} ah, & \text{если } 9w_1 + w_2 - 10h > \max\{w_1 + 9w_2 - 10l, 0\}, \\ al, & \text{если } w_1 + 9w_2 - 10l > \max\{9w_1 + w_2 - 10h, 0\}, \\ ah(al), & \text{если } w_1 + 9w_2 - 10l = 9w_1 + w_2 - 10h > 0\ ^1, \\ 0, & \text{если } \max\{9w_1 + w_2 - 10h, w_1 + 9w_2 - 10l\} \leq 0. \end{cases}$$

Чтобы упростить анализ примера, сделаем следующие предположения относительно параметров h и l:

$$\boxed{0 < l < h < 91\,,\ l < 19 \text{ и } 9l > h\,.}$$

При заданной зарплате w агент выберет ah, если предложение $w = (w_1, w_2)$ будет удовлетворять

$$9w_1 + w_2 - 10h > \max\{w_1 + 9w_2 - 10l, 0\},$$

или, что эквивалентно,

$$w_1 - w_2 \geq 1{,}25(h - l),\ 9w_1 + w_2 \geq 10h,\ w_1 \geq 0 \text{ и } w_2 \geq 0\ ^2.$$

Полученное множество геометрически изображено на рис. 4.27.

Аналогично агент выберет al, если предложение $w = (w_1, w_2)$ будет лежать в заштрихованной области R_2 рис. 4.28, определенной неравенствами

$$w_1 - w_2 \leq 1{,}25(h - l),\ w_1 + 9w_2 \geq 10l,\ w_1 \geq 0 \text{ и } w_2 \geq 0\,.$$

[1] Здесь и ниже авторы не всегда аккуратны со спецификацией знаков неравенств; в третьей строке неравенство нестрогое, а в четвертой, наоборот, строгое. При такой спецификации множества допустимых решений задач, на основе которых определяется стратегия принципала, замкнуты. — *Примеч. ред.*

[2] Условие $w_2 \geq 0$, вообще говоря, не следует из соотношения $9w_1 + w_2 - 10h > \max\{w_1 + 9w_2 - 10l, 0\}$, как и соотношения $w_1 + 9w_2 - 10l > \max\{9w_1 + w_2 - 10h, 0\}$. Таким образом, неявно предполагается, что оплата не может принимать отрицательных значений, т.е. контракт не предусматривает таких инструментов стимулирования, как штрафы. — *Примеч. ред.*

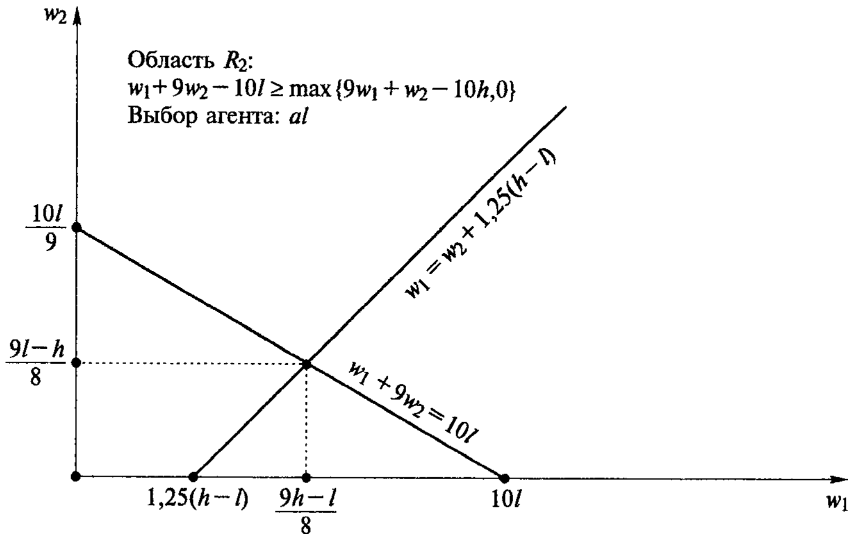


Рис. 4.28

Принципал P выберет контракт $w = (w_1, w_2)$ так, чтобы максимизировать свой ожидаемый выигрыш. При стимулировании высокого уровня усилий агента принципал должен решить следующую задачу:

$$\text{максимум } 91 - 0{,}9w_1 - 0{,}1w_2) \text{ при условии:} (w_1, w_2) \in R_1$$

или

$$\text{максимум } 91 - 0{,}1(9w_1 + w_2)$$

при условии $w_1 - w_2 \geq 1{,}25(h - l)$,

$$9w_1 + w_2 \geq 10h, \; w_1 \geq 0 \text{ и } w_2 \geq 0.$$

Заметим, что при выборе оптимального предложения заработной платы принципал должен учитывать отклики агента. И он делает это путем включения двух ограничений в свою оптимизационную задачу. Первое ограничение гарантирует, что агент (если примет предложение) сделает правильный выбор между h и l [1]. Второе ограничение, называемое **ограничением индивидуальной рациональности (ограничением участия)**, гарантирует, что агент подпишет контракт. В таком случае должно быть понятно, т.е. если принципал стимулирует агента выбрать ah, то его ожидаемый выигрыш, величина

$$\pi_P(w, ah) = 91 - 0{,}1(9w_1 + w_2)$$

достигнет его максимального значения $91 - h$, если контракт (w_1, w_2) удовлетворяет соотношениям

$$9w_1 + w_2 = 10h \text{ и } w_1 \geq \frac{9h - l}{8}.$$

[1] В литературе это ограничение называется ограничением **совместимости стимулов**.

Аналогично, если принципал хочет стимулировать агента выбрать *al*, он должен предложить ему контракт $w = (w_1, w_2)$, который максимизирует ожидаемый выигрыш принципала

$$\pi_P(w, al) = 19 - 0{,}1(w_1 + 9w_2).$$

Это достигается при $w_1 + 9w_2 = 10l$ и $0 \le w_1 \le \frac{9h - l}{8}$. В этом случае ожидаемый выигрыш принципала составит $19 - l$.

Теперь, решая, какой из двух зарплатных контрактов предложить агенту, принципал сравнивает величины $91 - h$ и $19 - l$. После чего выбирает первый зарплатный контракт, если $91 - h \ge 19 - l (> 0)$ (и безразличен между ними, если $91 - h = 19 - l$); в противном случае — второй. Таким образом, поскольку из $91 - h \ge 19 - l$ следует $l + 72 \ge h$, *оптимальный* контракт (w_1^*, w_2^*) может быть описан следующим образом.

- Если $l + 72 \ge h$, то $w_1^* \ge \frac{9h - l}{8}$ и $9w_1^* + w_2^* = 10h$, в этом случае стратегия агента $s^*(w_1^*, w_2^*) = ah$.
- Если $l + 72 < h$, то $0 \le w_1^* \le \frac{9h - l}{8}$ и $w_1^* + 9w_2^* = 10l$, в этом случае стратегия агента $s^*(w_1^*, w_2^*) = al$.

Важно отметить, что при заданном предложении (заработной платы) $w^* = (w_1^*, w_2^*)$ стратегия агента максимизирует его выигрыш, т.е. является наилучшим ответом (откликом) на w^*. Аналогично зарплатный контракт w^*, предлагаемый принципалом, таков, что предлагаемая в каждом случае зарплата максимизирует ожидаемый выигрыш принципала при заданной стратегии агента. Другими словами, профиль стратегий $(w^*, s^*(w^*))$ является равновесием по Нэшу этой игры[1]. Заметим, что профиль стратегий $(w^*, s^*(w^*))$ будет также равновесием по Нэшу при ограничении его на подыгру с началом в *A*. Следовательно, $(w^*, s^*(w^*))$ будет совершенным в подыграх равновесием в этой динамической игре.

Стоит также отметить, что наилучшим ответом (откликом) агента на контракт $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$ является выбор $s(w_1, w_2) = R$. Следовательно, зарплатный контракт $w_1 = 0$ и $w_2 = 0$[2] оказывается равновесием по Нэшу, приводящим к нулевому выигрышу для обеих сторон, поскольку агент от такого предложения откажется. Но это равновесие по Нэшу игры, которое никогда не будет сыграно по очевидным соображениям. ■

Пример 4.22 (оптимальный контракт: континуальное множество усилий). В ранее рассмотренных примерах оптимальных контрактов мы имели дело с двумя уровнями усилий и двумя возможными результатами. Эти очень

---

[1] Точнее, равновесный исход, а не равновесный профиль стратегий. Равновесный профиль стратегий — это $(w^*, s^*(w)), w_1 \ge 0, w_2 \ge 0$. Другими словами, если равновесная стратегия принципала — это его предложение w^*, то равновесная стратегия агента — его отображение отклика. — *Примеч. ред.*

[2] Вместе со стратегией агента, которая является его отображением наилучших ответов. — *Примеч. ред.*

простые ситуации позволяют проиллюстрировать некоторые из основных характеристик оптимальных контрактов в моделях «принципал — агент». Хотя значительную часть анализа (таких моделей) можно понять на основе уже рассмотренных простых примеров, есть достаточно много особенностей анализа моделей «принципал — агент», которые возникают, только когда множество возможных уровней усилий агента и получающихся результатов является континуумом. В этом примере будут рассмотрены некоторые из таких особенностей.

Как и ранее, рассматривается ситуация, когда принципал (игрок P) предлагает агенту (игрок A) зарплатный контракт $W(\cdot)$, который представляет собой функцию от результатов q, реализованных при заданном уровне усилий e агента. Предположим, что результат q определяется формулой

$$q = C + e + \varepsilon,$$

где уровень усилий e может лежать в интервале $[0, e_{\max}]$, а ε — непрерывная случайная величина, принимающая положительные и отрицательные значения со средним $E(\varepsilon) = 0$. Предположим также, что носителем ε является интервал $[-C, C]$, т.е. ε распределена на интервале $[-C, C]$, где C — некоторое положительное число, и что распределение ε не зависит от e.

Выигрыш принципала, если он предлагает агенту контракт $W(\cdot)$, составит

$$E[q - W(q)].$$

Это означает, что мы предполагаем, что принципал нейтрален к риску. Выигрыш агента — его ожидаемый выигрыш

$$E[W(q)] - f(e),$$

где $f(e)$ — издержки агента приложения усилий на уровне e. Будем считать, что $f' > 0$ и $f'' > 0$, т.е. $f(e)$ выпуклая функция и $f(0) = 0$[1].

Динамическая игра, представленная на рис. 4.29, разыгрывается между двумя игроками следующим образом. На первом этапе принципал объявляет зарплатный контракт $W(\cdots)$. Будем предполагать, что этот зарплатный контракт является линейной функцией от результатов, т.е. имеет вид

$$W(q) = a + bq.$$

Для заданного контракта агент выбирает уровень усилий e на втором этапе игры. Наконец, на последнем этапе «природа» выбирает результат в соответствии с функцией распределения $F(\varepsilon)$ случайной величины ε.

В этой динамической игре есть подыгра, которая начинается после объявления контракта $W(q) = a + bq$. Таким образом, можно воспользоваться методом обратной индукции для нахождения совершенного в подыграх равновесия. Следовательно, определим сначала оптимальный выбор агента после объявления принципалом зарплатного контракта.

---

[1] Мы предполагаем, что агент также нейтрален к риску и что его ожидаемая полезность от уровня богатства $W(q)$ — это его ожидаемое значение, $E[W(q)]$. Анализ может быть проведен также и в предположении, что функция полезности от уровня богатства агента — строго вогнутая функция богатства, указывающая, что агент является рискофобом.

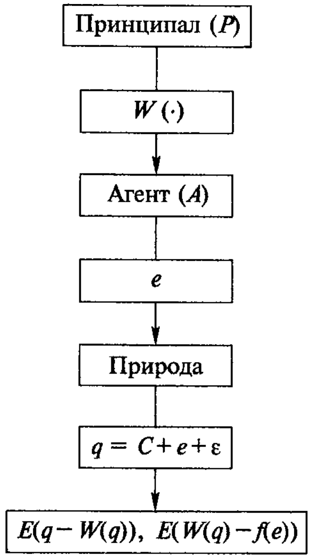


Рис. 4.29. Игра нахождения оптимального контракта: континуум уровней усилий

Ожидаемый выигрыш агента задается как

$$U_A = E[a + bq] - f(e) = E[a + b(C + e + \varepsilon)] - f(e) =$$
$$= a + bC + be + bE(\varepsilon) - f(e) = a + bC + be - f(e),$$

поскольку $E(\varepsilon) = 0$. Так как агент выбирает e, чтобы максимизировать U_A, получаем следующее условие первого порядка:

$$f'(e) = b. \tag{4.12}$$

Условие второго порядка выполняется автоматически, поскольку $-f''(e) < 0$. Следовательно, оптимальный уровень усилий агента определяется соотношением (4.12)[1].

На первом этапе игры принципал выбирает $W(q) = a + bq$ так, чтобы максимизировать

$$U_P = E[q - W(q)] = E[e + \varepsilon - a - b(e + \varepsilon)] + (1 - b)C =$$
$$= e - a - be + (1 - b)C \tag{4.13}$$

(снова $E(\varepsilon) = 0$) при условии

$$a + be - f(e) + bC \geq U_0 \tag{4.14}$$

и

$$f'(e) = b. \tag{4.15}$$

Здесь U_0 — резервный уровень полезности агента, т.е. минимальный уровень полезности, который агент должен получить, соглашаясь на контракт. В противном случае он от контракта откажется. Ограничение (4.14) — условие

[1] Здесь должно быть понятно, что $b < f'(e_{\max})$.

участия, а ограничение (4.15) — ограничение совместимости стимулов. Уравнение (4.15) указывает принципалу на вероятный уровень усилий, который будет выбран агентом при данной функции заработной платы.

Подставляя (4.15) в (4.13), получим

$$U_P = e - a - f'(e)e + (1 - f'(e))C .$$

Случай, когда ограничение (4.14) становится равенством, приводит к соотношению

$$a = f(e) - f'(e)e + U_0 - f'(e)C .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U_P &= e - f'(e)e - [f(e) - f'(e)e + U_0 - f'(e)C] + (1 - f'(e))C = \\ &= e - f(e) - U_0 + 1 . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Принципал максимизирует выражение (4.16), включающее переменную e, выбирая a и b в зарплатном контракте $W(q) = a + bq$ так, чтобы стимулировать агента выбрать e^*, максимизирующее (4.16). Условие первого порядка — это

$$f'(e^*) = 1 .$$

Условие второго порядка для максимума выполнено, поскольку $-f''(e) < 0$. Учитывая (4.15), имеем

$$b = 1, \text{ и } a = f(e^*) - e^* + U_0 - C .$$

Таким образом, оптимальный контракт задается функцией

$$W^*(q) = f(e^*) - e^* + U_0 + q - C ,$$

где e^* удовлетворяет

$$f'(e^*) = 1 .$$[1] ■

Следующий пример[2] также основан на взаимодействии принципала с агентами, но теперь принципал предлагает контракты двум независимым агентам. Предлагаемые принципалом заработные платы обусловливаются относительными результатами двух агентов (зависят от соотношения результатов агентов), так что более высокую зарплату получит агент с более высоким результатом, а более низкую — тот, чей результат ниже. Как и в предыдущем примере, результаты агентов зависят случайным образом от уровней их усилий.

Пример 4.23 (оптимальные контракты с двумя агентами: игра «Соревнование» (турнир). Эта модель отличается от предыдущей наличием двух агентов. Как и в игре «Принципал — агент», принципал (игрок 1) предла-

---

[1] Заметим, что, как и в предыдущем примере, ненаблюдаемость усилий «не имеет значения», поскольку выигрыши обоих контрагентов те же, что и в случае наблюдаемости усилий. Можно показать, что этот результат — следствие предположения о нейтральности к риску агента и, вообще говоря, не имеет места, если агент — рискофоб, а зарплатный контракт — линейный. — *Примеч. ред.*

[2] Этот пример основан на статье: *Lazear E., Rosen S.* Rank-order tournaments as optimum labor contracts // Journal of Political Economy. 1981. Vol. 89. P. 841–864.

гает зарплатные контракты (договоры, обусловливающие политику оплаты) $W_i(\cdot\cdot)$, $i = 2, 3$, двум агентам (игроки 2 и 3), где каждый такой зарплатный контракт является функцией результатов q_2, q_3. Результат, получаемый i-м агентом, задается формулой

$$q_i = C + e_i + \varepsilon_i \,.$$

Уровень усилий e_i лежит в интервале $[0, e_{\max}]$, а ε_i — непрерывная случайная величина, принимающая положительные и отрицательные значения, со средним значением $E(\varepsilon_i) = 0$. Будем предполагать, что носителем ε_i является интервал $[-C, C]$, где C — положительное число, ε_i не зависит от e_i и имеет плотность распределения $h(\varepsilon_i)$.

Ожидаемый выигрыш принципала в случае, если он предлагает агентам контракт $W(\cdot)$[1], задается как

$$U_P = E[q_2 + q_3 - W(q_2) - W(q_3)] \,.$$

Поскольку полезность принципала — это его ожидаемая прибыль, это предполагает, что он нейтрален к риску. Выигрыш агента i — это его ожидаемый выигрыш:

$$E[W(q_i) - f(e_i)] \,,$$

где $f(e_i)$ — функция уровня усилий e_i агента i, измеряющая издержки усилий e_i. Предполагается, что $f(e_i)$ — выпуклая функция e_i, такая что $f' > 0$, $f'' > 0$ и $f(0) = 0$.

Если бы принципал предлагал агентам отдельные контракты, то оптимальные контракты были бы аналогичны тем, что принципал предлагал агенту в предыдущем примере; так как каждый агент работал бы независимо от другого. Природа рассматриваемого нами зарплатного контракта несколько иного рода. Предлагаемая каждому агенту зарплата зависит не только от результатов этого агента, но также и от результатов другого агента. Таким образом, подобный контракт приводит к соревнованию между агентами, так как высокую зарплату W_H получит тот, у кого результат окажется лучшим, низкую зарплату W_L получит агент с низким результатом.

Динамическая игра между тремя агентами разыгрывается следующим образом. На первом этапе принципал объявляет пару зарплат (W_H, W_L). На втором этапе агенты, исходя из предлагаемых зарплатных контрактов, выбирают уровни усилий (e_2, e_3). Наконец, на третьем этапе «природа», через случайные величины ε_2 и ε_3, определяет результаты q_2 и q_3. Дерево игры изображено на рис. 4.30.

В этой динамической игре есть собственная подыгра, которая начинается после объявления пары зарплат (W_H, W_L). Поэтому можно использовать метод обратной индукции для нахождения совершенного в подыграх равновесия. Сначала найдем оптимальные выборы агентов при объявленном зарплатном контракте (W_H, W_L).

[1] И при условии, что агенты соглашаются на предложенные условия. — *Примеч. пер.*

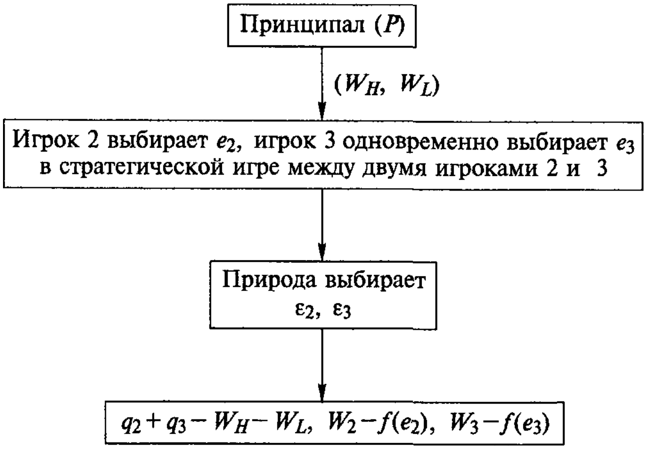


Рис. 4.30. Игра «Соревнование» с двумя агентами

В силу природы зарплатного контракта ожидаемый выигрыш[1] i-го агента составит

$$U_A^i = W_H P[q_i(e_i) \geq q_j(e_j)] + W_L P[q_i(e_i) \leq q_j(e_j)] - f(e_i) =$$

$$= (W_H - W_L) P[q_i(e_i) > q_j(e_j)] + W_L - f(e_i),$$

где $i = 2, 3$ и $i \neq j$. Здесь $P[q_i(e_i) > q_j(e_j)]$ — вероятность того, что результаты q_i, q_j удовлетворяют неравенству $q_i > q_j$.

Таким образом, игра на втором этапе представляет собой стратегическую игру двух лиц с функциями выигрышей U_A^2 и U_A^3. Мы, следовательно, ищем равновесную пару уровней усилий (e_2^*, e_3^*). Эта равновесная пара удовлетворяет условию

$$(W_H - W_L) P[q_i(e_i^*) > q_j(e_j^*)] - f(e_i^*) \geq (W_H - W_L) P[q_i(e_i) > q_j(e_j^*)] - f(e_i)$$

для всех $e_i \in [0, e_{\max}]$, $j \neq i$ и $i = 2, 3$.

Иначе говоря, e_i^* решает задачу

$$\max_{e_i}\{(W_H - W_L) P[q_i(e_i) > q_j(e_j^*)] - f(e_i)\}.$$

Условия первого порядка имеют вид

$$(W_H - W_L)\frac{\partial P[q_i(e_i) > q_j(e_j^*)]}{\partial e_i} = f'(e_i)^2. \tag{4.17}$$

В рассматриваемом случае

$$P[q_i(e_i) > q_j(e_j^*)] = P[e_i + \varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j] =$$

$$= P[\varepsilon_i > e_j^* + \varepsilon_j - e_i] = 1 - P[\varepsilon_i \leq e_j^* + \varepsilon_j - e_i].$$

[1] Заметим, что вероятность «ничьей» (одинаковых результатов двух агентов) в рассматриваемой ситуации равна нулю.

[2] Это соотношение выполняется при $e_i = e_i^*$. — *Примеч. ред.*

Здесь $F(\cdot)$ — функция распределения случайных величин. Поскольку ε_2 и ε_3 независимы, для совместной плотности распределения имеем

$$g(\varepsilon_2\varepsilon_3) = h(\varepsilon_2)h(\varepsilon_3)\,.$$

Следовательно,

$$P[\varepsilon_i \le e_j^* + \varepsilon_j - e_i] = \int_{-C}^{C}\int_{-C}^{e_j^*+\varepsilon_j-e_i} h(v_i)h(v_j)dv_i dv_j =$$

$$= \int_{-C}^{C}\left[\int_{-C}^{e_j^*+\varepsilon_j-e_i} h(v_i)dv_i\right]h(v_j)dv_j = \int_{-C}^{C} F(e_j^* + v_j - e_i)\,h(v_j)dv_j\,.$$

Условия первого порядка (4.17) тогда преобразуются к виду

$$(W_H - W_L)\frac{\partial[1 - \int_{-C}^{C} F(e_j^* + v_j - e_i)\,h(v_j)dv_j]}{\partial e_i} = f'(e_i)\,.$$

В симметричном равновесии игры на втором этапе $e_2^* = e_3^* = e^*$. Тогда условия первого порядка перепишутся в виде

$$(W_H - W_L)\frac{\partial[1 - \int_{-C}^{C} F(v_j)\,h(v_j)dv_j]}{\partial e_i} = f'(e_i)\,,$$

что приводит к

$$(W_H - W_L)\int_{-C}^{C} h(v_j)^2 dv_j = f'(e^*)\,, \tag{4.18}$$

где $i = 2,\ 3$.

Принципал, следовательно, захочет назначить (W_H, W_L) так, чтобы максимизировать

$$U_P = E[q_2(e^*) + q_3(e^*) - W(q_2(e^*) - W(q_3(e^*)]\,.$$

Поскольку вероятность того, что один из агентов получит больший результат, равна 1, ожидаемый выигрыш принципала можно записать в виде

$$E[e^* + \varepsilon_2 + e^* + \varepsilon_3] - W_H - W_L = 2e^* - W_H - W_L\,,$$

где, стоит отметить, e^* определяется соотношением (4.18) и является функцией от пары (W_H, W_L).

Принципал, таким образом, выбирает (W_H, W_L), чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш при условиях[1]

$$W_H P[q_2(e^*) > q_3(e^*)] + W_L P[q_2(e^*) < q_3(e^*)] - f(e^*) \ge U_A\,,$$

$$W_H P[q_3(e^*) > q_2(e^*)] + W_L P[q_3(e^*) < q_2(e^*)] - f(e^*) \ge U_A\,.$$

Здесь U_A — уровень резервной полезности (*резервная полезность* — это минимальный уровень полезности, необходимый, чтобы агент согласился на сделку) каждого из двух агентов.

Заметим, что

$$P(q_i^* > q_j^*) = P(e^* + \varepsilon_i > e^* + \varepsilon_j) = P(\varepsilon_i > \varepsilon_j)\,.$$

---

[1] В оригинальном тексте отсутствуют величины издержек $f(e^*)$. — *Примеч. пер.*

Поскольку ε_i и ε_j независимы и одинаково распределены, то

$$P(\varepsilon_i < \varepsilon_j) = P(\varepsilon_j < \varepsilon_i).$$

Следовательно,

$$P(\varepsilon_i > \varepsilon_j) = 1 - P(\varepsilon_j < \varepsilon_i) = 1 - P(\varepsilon_i > \varepsilon_j).$$

Откуда

$$2P(\varepsilon_i > \varepsilon_j) = 1 \text{ или } P(\varepsilon_i > \varepsilon_j) = \frac{1}{2}.$$

Тем самым задача принципала приводится к максимизации

$$2e^* - W_H - W_L$$

при условии

$$\frac{1}{2}W_H + \frac{1}{2}W_L - f(e^*) = U_A.$$

Поэтому принципал должен максимизировать

$$2e^* - 2U_A - 2f(e^*), \tag{4.19}$$

выбирая (W_H, W_L) таким образом, чтобы e^* максимизировало (4.19).

Из условия первого порядка получаем

$$f'(e^*) = 1. \tag{4.20}$$

Таким образом, из (4.18) и (4.20) следует, что совершенное в подыграх равновесие задается парой (W_H, W_L), которая является решением уравнения

$$W_H - W_L = \frac{1}{\int_{-C}^{C} h^2(\varepsilon)\,d\varepsilon},$$

где

$$W_H = 2f(e^*) + 2U_A - W_L,$$

а e^* определяется из (4.18).

Решение показывает, что равновесный уровень усилий каждого агента задается условием типа (4.20), однако уровни заработных плат и разница между ними являются функцией от плотности или распределения шума, содержащегося в полученных результатах. Чем меньше влияние шума на итоговый результат, тем больше разница между W_H и W_L. Это вытекает из того факта, что когда влияние шума меньше, уровень усилий становится более значимым в определении того, какой из агентов получит больший результат. Следовательно, должно быть предложено относительно большое вознаграждение, для того чтобы добиться более высокого уровня усилий и более высокого результата. ■

Упражнения

1. Это упражнение иллюстрирует феномен преимущества первого хода для моделей дуополии Курно и Штакельберга, описанных в примерах 2.24 и 4.16 соответственно.

(a) Найдите прибыли фирм π_1^S и π_2^S в модели дуополии Штакельберга в равновесии по Нэшу (q_1^*, q_2^*), полученном в примере 4.16. [Ответ:

$$\pi_1^S = \frac{(A + c_2 - 2c_1)^2}{8} \text{ и } \pi_2^S = \frac{(A + 2c_1 - 3c_2)^2}{16}.]$$

(b) Пусть π_1^C и π_2^C — прибыли фирм в равновесии по Нэшу в модели дуополии Курно, рассмотренной в примере 2.24. Покажите, что

$$\pi_1^S \geq \pi_1^C \text{ и } \pi_2^S \leq \pi_2^C.$$

[Подсказка: воспользуйтесь выражениями для π_1^C и π_2^C из упражнения 2 раздела 2.8.]

2. Найдите равновесие Штакельберга на дуопольном рынке с функцией спроса $q = 22{,}5 - 1{,}5p$ и предельными издержками $c_1 = c_2 = 3$ долл. Будет ли фирма-лидер заинтересована в сговоре, целью которого является объем производства, максимизирующий совокупную прибыль фирм? Объясните подробно.

3. Это упражнение показывает, что *преимущество первого хода* не всегда имеет место. Рассмотрите игру ценообразования по Бертрану из примера 2.25 и динамическую игру, в которой фирма 1 является ценовым лидером, а фирма 2 является (ценовым) последователем.

(a) Опишите функцию реакции (т.е. оптимальный отклик) фирмы 2 на цены, которые может установить фирма 1. [Подсказка: для некоторых цен не существует наилучшего отклика, но существует его приближенный наилучший отклик.]

(b) Покажите, что прибыль фирмы 1, $\pi_1(p_1, \hat{p}_2(p_1))$, равна нулю для любой назначаемой ею цены p_1, где $\hat{p}_2(p_1)$ — функция отклика фирмы 2.

(c) Покажите, что в любом совершенном в подыграх равновесии прибыль фирмы 1 равна нулю.

4. Рассмотрим игру ценообразования по Бертрану с товарной дифференциацией, в которой функции спроса на товары первой и второй фирмы равны соответственно

$$q_1(p_1, p_2) = 10 - p_1 + p_2 \text{ (функция спроса фирмы 1),}$$

$$q_2(p_1, p_2) = 10 - p_2 + p_1 \text{ (функция спроса фирмы 2).}$$

(a) Найдите совершенное в подыграх равновесие в динамической игре, где фирма 1 является ценовым лидером, а фирма 2 является (ценовым) последователем.

(b) Вычислите прибыли обеих фирм.

(c) Имеет ли здесь место преимущество первого хода?

5. Проверьте, что путь $a \to c \to d$ является единственным равновесным путем в игре примера 4.15. Найдите также все равновесные профили стратегий, поддерживающие путь $a \to c \to d$.

6. В игре примера 4.15 выигрыши держав таковы, что в совершенном в подыграх равновесии обе выбирают N. Предположим, что субъективные выгоды выбора N сравнительно малы, а издержки выбора N сравнительно высоки, так что выигрыш, или *чистая выгода*, от выбора N теперь меньше, чем от выбора NP.

(a) Изобразите динамическую игру с новыми выигрышами.

(b) Найдите совершенное в подыграх равновесие в этой игре.

(c) Возможна ли ситуация, когда (N,N) больше не будет совершенным в подыграх равновесием?

7. Рассмотрим игру «Партнерство», в которой выигрыши участников составляют $u_i(e_1,e_2) = (A + e_j - e_i)e_i$, где e_k — уровень усилий участника k, $A > 0$ — константа. (Как обычно, если $i = 1$, то $j = 2$, и наоборот.) Предположим, что участник 1 является лидером и первым выбирает уровень усилий. Участник 2 является последователем, выбирая уровень усилий после наблюдения уровня усилий, выбранного первым участником. Найдите совершенное в подыграх равновесие в этой игре с совершенной информацией.

8. Рассмотрим динамическую игру примера 4.18, дерево которой указано на рис. 4.23. Наложим следующие ограничения на параметры e и m: $0 < e < 10$ и $20 < m < 30$. Найдите равновесия по Нэшу и совершенные в подыграх равновесия этой игры. [Ответ: $(\{DM, w_l\},\{l,h'\})$, совершенное в подыграх; $(\{DM, w_l\},\{l,l'\})$ равновесие по Нэшу, но не совершенное в подыграх.]

9. Рассмотрим игру примера 4.18. Пусть издержки мониторинга отсутствуют (т.е. $m = 0$), а издержки приложения усилий e удовлетворяет соотношению $20 < e < 30$. Найдите все равновесия по Нэшу и совершенные в подыграх равновесия.

10. Снова обратимся к примеру 4.18. Предположим, что агент не знает, наблюдают ли за его усилиями. Опишите полученную динамическую игру и найдите в ней равновесия по Нэшу.

11. Рассмотрим игру примера 4.20 с параметрами h и l, такими, что $h - l > 72$ и $l < 19$. Покажите, что принципал предложит контракт $w(h) = h$ и $w(l) = l$, а агент согласится на сделку и будет работать «спустя рукава».

12. Обратимся к игре примера 4.21. Предположим, что принципал предлагает контракт (w_1,w_2), удовлетворяющий соотношению $w_1 - w_2 < 1{,}25(h - l)$. Проведите полный анализ (в терминах параметров h и l) равновесий по Нэшу и опишите ожидаемые выигрыши игроков.

13. В игре примера 4.21 функция полезности агента имела вид $u(w,e) = w - e$, где w — полученная заработная плата, а e — уровень усилий агента. Пусть теперь функция полезности задается как

$$u(w,e) = \ln\left(\frac{w}{e}\right).$$

Предположим, что, как и в примере 4.21, принципал не наблюдает за усилиями агента, а параметры и контракты удовлетворяют условиям $0 < 2l = h < 85$ и $w_1 \geq 2^{1,25} w_2$.

(a) Изобразите дерево игры с новой функцией полезности агента.
(b) Как теперь будет выглядеть задача оптимизации, которую должен решить принципал?
(c) Решите задачу принципала из пункта (b).
(d) Каков оптимальный контракт, предлагаемый принципалом?

14. Найдите оптимальный зарплатный контракт в примере 4.21 в случае, если параметры удовлетворяют неравенству $9l < h$.

4.4. Решение динамических игр в поведенческих стратегиях

Мы уже рассмотрели концепции подыгр и совершенного в подыграх равновесия в динамических играх. Однако в наших рассуждениях мы использовали лишь чистые стратегии. Для динамических игр с совершенной информацией всегда существует равновесие в чистых стратегиях, поскольку получаемые с помощью метода обратной индукции равновесия не только является равновесиями по Нэшу, но также и равновесиями, совершенными в подыграх. Однако в случае игр с несовершенной информацией это не всегда верно. Иначе говоря, динамическая игра с несовершенной информацией может не иметь равновесия по Нэшу; см. пример на рис. 4.31. Матричная форма такой игры представлена в табл. 4.8.

Похожая проблема встречалась ранее в разделе 2.4: игра не имеет равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Однако, как и в разделе 2.4, матричная игра имеет равновесие в *смешанных стратегиях*. Таким образом, расширение множества стратегий с чистых до смешанных стратегий позволяет найти равновесие. Как будет видно далее, такого рода расширение множества стра-

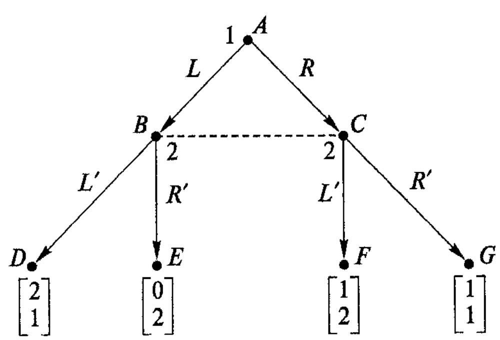


Рис. 4.31

Таблица 4.8

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L'	R'
	L	(2,1)	(0,2)
	R	(1,2)	(1,1)

тегий для динамических игр также позволит найти равновесный профиль стратегий в том случае, когда равновесие в чистых стратегиях отсутствует. Начнем обсуждение стратегий в динамических играх, в которых участники рандомизируют, с концепции **поведенческих стратегий**.

Рассмотрим динамическую игру (с совершенной или несовершенной информацией). Пусть $\mathcal{I}$ — информационное множество некоторого игрока i [1]. Обозначим через $v(\mathcal{I})$ множество ребер или выборов в каждом узле информационного множества $\mathcal{I}$. И как обычно, обозначим множество распределений вероятностей на $v(\mathcal{I})$ через $\Delta(v(\mathcal{I}))$. Наконец, для каждого игрока i $\{\mathcal{I}_i^1,\dots,\mathcal{I}_i^{l_i}\}$ — набор всех информационных множеств игрока i в этой динамической игре. Тогда *поведенческая стратегия* игрока i указывает его выбор в каждом $\Delta(v(\mathcal{I}_i^j))$, $j=1,\dots,l_i$. Точнее, определение звучит так.

Определение 4.24. ***Поведенческая стратегия*** *b_i игрока i — это функция*

$$b_i:\{\mathcal{I}_i^1,\dots,\mathcal{I}_i^{l_i}\}\to\bigcup_{j=1}^{l_i}\Delta(v(\mathcal{I}_i^j)),$$

такая что каждое $b_i(\mathcal{I}_i^j)$ является вероятностным распределением на $\Delta(v(\mathcal{I}_i^j))$, т.е.

$$b_i(\mathcal{I}_i^j)\in\Delta(v(\mathcal{I}_i^j)) \quad \text{для всех } j=1,\dots,l_i\text{ [2]}.$$

Таким образом, поведенческая стратегия описывает выборы (возможно, случайные) игрока i в каждом его информационном множестве. Таким образом, понятие поведенческой стратегии является прямым обобщением понятия стратегии в динамических играх, позволяющим рандомизировать выборы в каждом информационном множестве. Заметим, что можно представлять поведенческую стратегию b_i как элемент множества

$$B_i=\Delta(v(\mathcal{I}_i^1))\times\Delta(v(\mathcal{I}_i^2))\times\dots\times\Delta(v(\mathcal{I}_i^{l_i})),$$

которое является выпуклым компактным подмножеством в некотором Евклидовом пространстве.

Определение 4.25. ***Профиль поведенческих стратегий*** *— это набор n элементов $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$, где b_i — поведенческая стратегия игрока i. Следовательно, профиль поведенческих стратегий b является элементом выпуклого компактного множества*

$$B=B_1\times B_2\times\dots\times B_n.$$

Пусть $Q_1,Q_2,\dots,Q_k$ — терминальные узлы динамической игры, и пусть b — профиль поведенческих стратегий. Нетрудно понять, что профиль поведенческих стратегий b приписывает вероятность $P_b(e)$ каждому ребру e динамической игры. Это автоматически порождает распределение вероятнос-

[1] Информационное множество $\mathcal{I}$ может быть и одноэлементным, т.е. состоять из одной точки.

[2] То есть, если e — ребро информационного множества $\mathcal{I}_i^j$ игрока i, то будем обозначать вероятность, с которой игрок i выбирает e, через через $b_i(e)$.

тей $\{\pi_b(Q_1),\pi_b(Q_2),\ldots,\pi_b(Q_k)\}$ на множестве узлов $\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_k\}$ следующим образом. Если

$$e_1,e_2,\ldots,e_\lambda$$

— путь (единственный) из корня в терминальный узел Q_r, то

$$\pi_b(Q_r)=P_b(e_1)P_b(e_2)\cdots P_b(e_\lambda)\,.$$

Убедитесь самостоятельно, что $\sum_{r=1}^{k}\pi_b(Q_r)=1$.

Таким образом, **динамическая игра в поведенческих стратегиях** — это динамическая игра n лиц со следующими характеристиками:

(1) игроки — это те же игроки, что и в исходной игре;

(2) множество стратегий каждого игрока i — это B_i, где

$$B_i=\Delta(v(\mathcal{I}_i^1))\times\Delta(v(\mathcal{I}_i^2))\times\cdots\times\Delta(v(\mathcal{I}_i^{l_i}))\,;$$

(3) функция выигрыша каждого игрока i — функция ожидаемого выигрыша $U_i:B\to R$, определяемая правилом

$$U_i(b)=U_i(b_1,b_2,\ldots,b_n)=\sum_{r=1}^{k}\pi_b(Q_r)u_i(Q_r)\,.$$

Равновесие (соответственно совершенное в подыграх равновесие) в поведенческих стратегиях определяется как равновесие по Нэшу (соответственно как совершенное в подыграх равновесие) в игре с поведенческими стратегиями. Определение равновесия выглядит так.

Определение 4.26. *Профиль поведенческих стратегий $b^*=(b_1^*,b_2^*,\ldots,b_n^*)$ называется **равновесием в поведенческих стратегиях** в динамической игре, если для любого игрока i и любой его поведенческой стратегии b_i, т.е. $b_i\in B_i$, выполнено*

$$U_i(b_i^*,b_{-i}^*)\ge U_i(b_i,b_{-i}^*)\,.$$

*Профиль поведенческих стратегий b называется **совершенным в подыграх равновесием в поведенческих стратегиях**, если он порождает равновесие в поведенческих стратегиях в любой подыгре исходной динамической игры.*

Сразу же возникает вопрос: *любая ли динамическая игра имеет равновесие (совершенное в подыграх равновесие) в поведенческих стратегиях?* К сожалению, не любая. Следующий пример показывает, почему оно есть не в каждой игре[1].

Пример 4.27 (динамическая игра без равновесия в поведенческих стратегиях). Покажем, что динамическая игра, представленная на рис. 4.32, не имеет равновесия в поведенческих стратегиях. Рассмотрим произвольный профиль поведенческих стратегий (b_1,b_2), где

$$b_1(L)=p \text{ и } b_1(L'')=r$$

[1] Простой пример несуществования равновесия в поведенческих стратегиях можно найти в [63]. Приведенный здесь пример предложен И. Топольяном и является модифицированной версией примера из: *Wichardt P.C.* Existence of Nash equilibria in finite extensive form games with imperfect recall // Games and Economic Behavior. 2008. Vol. 63. P. 366–369.

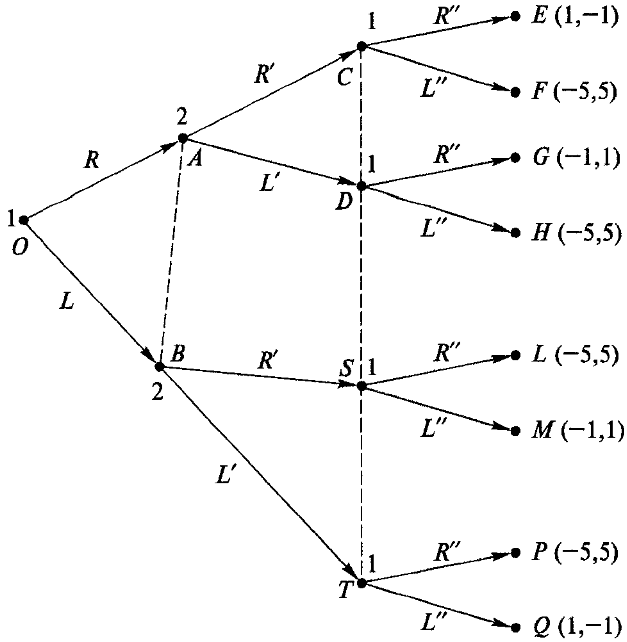


Рис. 4.32

и

$$b_2(L') = q\,.$$

В таком случае ожидаемые полезности равны

$$U_1(b_1,b_2) = pqr - 5pq(1-r) - p(1-q)r - 5p(1-q)(1-r) - 5(1-p)qr -$$
$$-(1-p)q(1-r) - 5(1-p)(1-q)r + (1-p)(1-q)(1-r) =$$
$$= 2(5pr - 3p + pq - 3r + qr) - 2q + 1$$

и

$$U_2(b_1,b_2) = -U_1(b_1,b_2) = 2q(1-p-r) - 10pr + 6p + 6r - 1\,.$$

Ожидаемые полезности являются функциями p, q и r. Следовательно, при дальнейшем анализе будем писать $U_i(b_1,b_2) = U_i(p,q,r)$, где $b_1 = \{p,r\}$ и $b_2 = \{q\}$.

Теперь предположим, что в игре существует равновесие в поведенческих стратегиях, скажем $b^* = (b_1^*,b_2^*) = (\{p^*,r^*\},\{q^*\})$. Рассмотрим возможные случаи отдельно.

Случай I. $p^* + r^* > 1$.

В этом случае $1 - p^* - r^* < 0$. Если $q^* > 0$, то очевидно, что $U_2\left(\frac{q^*}{2}, b_{-2}^*\right) > U_2(q^*, b_{-2}^*)$. Но это противоречит тому, что b^* — равновесие в поведенческих стратегиях. Поэтому в этом случае $q^* = 0$. Теперь заметим, что

$$U_1(p,0,r) - U_1(0,0,0) = 10pr - 6p - 6r = -6p(1-r) - 4r(1-p) - 2r \le 0 \quad (4.21)$$

при любом выборе (p,r) игрока 1. Выбор (0,0) оказывается наилучшим откликом игрока 1 на выбор $q^* = 0$ игрока 2[1].

Поскольку по предположению $(p^*,0,r^*)$ — равновесие по Нэшу, следовательно (p^*,r^*) должно также быть наилучшим откликом на стратегию $q^* = 0$ игрока 2. Однако это влечет неравенство

$$U_1(p^*,0,r^*) - U_1(0,0,0) = -6p^*(1-r^*) - 4r^*(1-p^*) - 2r^* \geq 0 . \qquad (4.22)$$

Из формул (4.21) и (4.22) получаем

$$6p^*(1-r^*) + 4r^*(1-p^*) + 2r^* = 0 ,$$

где каждый член суммы является неотрицательным, значит, обязан быть нулевым. Откуда, $r^* = 0$, а следовательно, и $p^* = 0$. Требование $p^* + r^* > 1$ не выполняется.

Случай II. $p^* + r^* < 1$.

Тогда $1 - p^* + r^* > 0$, откуда следует, что $q^* = 1$. Однако если $q^* = 1$, то

$$U_1(p,1,r) = 10pr - 4p - 4r = 4p(r-1) + 4r(p-1) + 2pr\,^2.$$

Утверждается, что максимум функции $U_1(p,1,r)$ достигается при $p = r = 1$. Ясно, что при $p < 1$ и $r < 1$

$$U_1(p,1,r) < U_1(1,1,1) = 2 ,$$

так как $4p(r-1) < 0$, $4r(p-1) < 0$ и $2pr < 2$.

Если $r < 1$, а $p = 1$, то

$$U_1(1,1,r) = 6r - 4 < 2 = U_1(1,1,1) .$$

Наконец, при $p < 1$, $r = 1$

$$U_1(p,1,1) = 6p - 4 < 2 = U_1(1,1,1) .$$

Это показывает, что выбор (p,r), для которого $p + r < 1$, не является наилучшим откликом на $q^* = 1$. Следовательно, $p^* + r^* < 1$ не может быть частью равновесия в поведенческих стратегиях.

Случай III. $p^* + r^* = 1$.

В этом случае $q^* = 0$, $q^* = 1$ или $0 < q^* < 1$.

Если $q^* = 0$, то доводы случая I приведут к противоречию.

Если $q^* = 1$, то доводы случая II приводят к противоречию.

Остается только случай $0 < q^* < 1$. Если $p + r = 1$, то

$$U_1(p,q^*,r) = -2q^*(1-p-r) + 10pr - 6p - 6r + 1 = 10p - 10p^2 - 5 .$$

---

[1] Следующий шаг в доказательстве представляется избыточным. — *Примеч. пер.*

[2] В действительности $U_1(p,1,r) = 10pr - 4p - 4r - 1$, но функции $10pr - 4p - 4r - 1$ и $10pr - 4p - 4r$ достигают своего максимума при одних и тех же значениях аргументов. — *Примеч. пер.*

Максимум этой функции достигается в точке $p^* = \frac{1}{2}$, т.е. выбор $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ оказывается наилучшим откликом игрока 1 на выбор q^* игрока 2. Однако заметим, что

$$U_1(1, q^*, 1) = 2q^* - 1 > -1 > -2.5 = U_1\left(\frac{1}{2}, q^*, \frac{1}{2}\right).$$

Тем самым выбор $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ не может быть наилучшим откликом игрока 1 на стратегию q^* игрока 2, получаем противоречие.

Таким образом, в конечном итоге мы показали, что любой выбор (p, q, r) не может быть частью равновесия в поведенческих стратегиях; следовательно, в этой динамической игре не существует равновесия в поведенческих стратегиях. ■

Как мы увидим далее, проблема с динамической игрой в примере 4.27 возникает вследствие того, что это игра с несовершенной памятью. Из рис. 4.32 видно, что игрок 1 забывает о своем выборе в узле O; в результате игрок 1 не знает, какой из узлов информационного множества $\{C, D, S, T\}$ достигнут. Если бы он помнил выбор в узле O, то наверняка знал бы, что находится или в узлах $\{C, D\}$ или в узлах $\{S, T\}$. В связи с этим обстоятельством динамические игры разделяют на *игры с совершенной* и *игры с несовершенной памятью.*

Определение 4.28. *Динамическая игра является игрой* ***с совершенной памятью****, если для любого игрока i и любых его двух выборов c_i' и c_i'' в информационном множестве $\mathcal{I}_i$ любые информационные множества $\mathcal{I}_i'$ и $\mathcal{I}_i''$, такие что $\mathcal{I}_i'$ и $\mathcal{I}_i''$ — наследники $\mathcal{I}_i$ и содержат узлы, соединяющиеся некоторым путем с c_i' и c_i'' соответственно, не пересекаются между собой. То есть, если для любой пары $c_i' \neq c_i''$ информационное множество $\mathcal{I}_i'$ достигается через выбор c_i', а информационное множество $\mathcal{I}_i''$ — через выбор c_i'', то $\mathcal{I}_i' \cap \mathcal{I}_i'' = \varnothing$.*

Это просто означает, что игрок никогда не забудет о сделанном в информационном множестве выборе, так что тот же выбор не сможет привести к узлам из того же информационного множества игрока на более позднем этапе игры. Таким образом, два различных выбора игрока всегда ведут к различным информационным множествам на последующих этапах динамической игры.

Различие между динамическими играми с совершенной и несовершенной памятью проиллюстрировано на рис. 4.33. В динамической игре с несовершенной памятью два различных выбора игрока 1 ведут к одному и тому же информационному множеству на последующей стадии игры.

Хотя пример 4.27 показывает нам, что в динамических играх *с несовершенной памятью* равновесия в поведенческих стратегиях может не существовать, в конечных динамических играх *с совершенной памятью* такое равновесие всегда существует. Мы сформулируем сейчас этот важный и полезный результат. Его доказательство будет представлено в гл. 9, теорема 9.26.

Теорема 4.29. *Любая конечная динамическая игра с совершенной памятью имеет совершенное в подыграх равновесие в поведенческих стратегиях.*

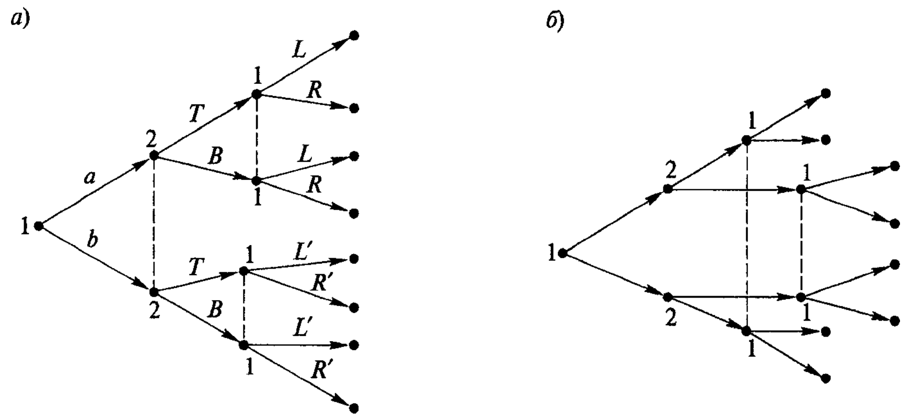


Рис. 4.33. Игра с совершенной памятью (*а*); игра с несовершенной памятью (*б*)

Ниже в этом разделе мы остановимся на иллюстрации и анализе совершенных в подыграх равновесий в поведенческих стратегиях на нескольких примерах.

Пример 4.30. Рассмотрим динамическую игру с несовершенной информацией, представленную на рис. 4.31. Было установлено (с помощью матричной формы игр), что игра не имеет равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Также отмечалось, что игра не имеет собственных подыгр. Так что любое равновесие по Нэшу в поведенческих стратегиях автоматически будет являться совершенным в подыграх равновесием в поведенческих стратегиях. У игрока 1 только одно информационное множество $\mathcal{I}_1$: $\mathcal{I}_1 = \{A\}$ и $v(\mathcal{I}_1) = \{L, R\}$. У игрока 2 также одно информационное множество $\mathcal{I}_2$, включающее узлы B и C, т.е. $\mathcal{I}_2 = \{B, C\}$. Понятно, что $v(\mathcal{I}_2) = \{L', R'\}$. Из этого следует, что

$$\Delta(v(\mathcal{I}_1)) = \{(p, 1-p) : 0 \le p \le 1\} \text{ и } \Delta(v(\mathcal{I}_2)) = \{(q, 1-q) : 0 \le q \le 1\},$$

где p и $1 - p$ — вероятности выбора L и R, а q и $1 - q$ — вероятности выбора L' и R' соответственно. Произвольная поведенческая стратегия в данной динамической игре имеет вид

$$b = (b_1, b_2) = ((p, 1-p), (q, 1-q)),\ 0 \le p \le 1 \text{ и } 0 \le q \le 1.$$

Нетрудно видеть, что

$$\pi_b(D) = P_b(AB)P_b(BD) = P_b(L)P_b(L') = pq,$$

$$\pi_b(E) = P_b(AB)P_b(BE) = P_b(L)P_b(R') = p(1-q),$$

$$\pi_b(F) = P_b(AC)P_b(CF) = P_b(R)P_b(L') = (1-p)q,$$

$$\pi_b(G) = P_b(AC)P_b(CG) = P_b(R)P_b(R') = (1-p)(1-q).$$

Следовательно, ожидаемые функции выигрыша

$$U_1(b_1, b_2) = pq \times 2 + p(1-q) \times 0 + (1-p)q \times 1 + (1-p)(1-q) \times 1 = p(2q-1) + 1,$$

$$U_2(b_1, b_2) = pq \times 1 + p(1-q) \times 2 + (1-p)q \times 2 + (1-p)(1-q) \times 1 = q(1-2p) + p + 1.$$

Учитывая вид функций выигрыша, легко убедиться, что совершенное в подыграх равновесие должно удовлетворять условиям

$$2q-1=0 \text{ и } 1-2p=0\,.$$

Таким образом, мы установили, что $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ — единственное равновесие в поведенческих стратегиях в этой игре.

Следующий пример демонстрирует, почему игрок может захотеть осуществить случайный выбор и чем полезна рандомизация. Рассмотрим динамическую игру с несовершенной информацией, изображенную на рис. 4.34. В этой игре в интересах игрока 2 — держать игрока 1 в неведении относительно того, какой выбор был сделан им в узле C. Если игрок 1 полагает, что игрок 2 выбрал L', то он выберет L'', в результате чего выигрыш игрока 2 составит 0. Аналогично, если игрок 1 верит, что игрок 2 выбрал R', то сам выберет R'', вследствие чего игрок 2 снова получит 0. Единственный способ для игрока 2 увеличить свой выигрыш — смешивать (рандомизировать) свои выборы в узле C. Заметим, что подыгра с началом в узле C представляется матричной игрой двух лиц и изображена в табл. 4.9.

В игре нет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях, так что в этой динамической игре нет и совершенных в подыграх равновесий в чистых стратегиях. У игры есть только одно равновесие в смешанных стратегиях: $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$. Ограничение смешанного равновесия на подыгру с началом в C требует от игрока 2 выбора

$$L' \text{ с вероятностью } \frac{1}{2} \text{ и } R' \text{ с вероятностью } \frac{1}{2}$$

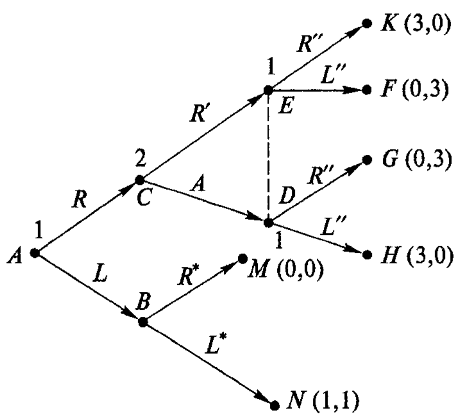


Рис. 4.34

Таблица 4.9

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L'	R'
	L''	(3,0)	(0,3)
	R''	(0,3)	(3,0)

и от игрока 1 выбора

$$L'' \text{ с вероятностью } \frac{1}{2} \text{ и } R'' \text{ с вероятностью } \frac{1}{2}$$

в информационном множестве $\{D,E\}$.

Возвращаясь к игре на рис. 4.34, заметим, что игрок 1 осуществляет выбор в информационных множествах $\{A\}$ и $\{D,E\}$. Возможные выборы в этих множествах — это $\nu(\{A\})=\{L,R\}$ и $\nu(\{D,E\})=\{L'',R''\}$. Таким образом, поведенческая стратегия игрока 1 включает элемент $\Delta(\{L,R\})$ множества распределения вероятностей на $\{L,R\}$, и элемент $\Delta(\{L'',R''\})$ множества распределения вероятностей на $\{L'',R''\}$.

Нетрудно проверить, что профиль поведенческих стратегий

$$\left(\left\{R,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\},\left\{L^*,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\right)$$

является единственным совершенным в подыграх равновесием в поведенческих стратегиях. То есть игрок 1 выбирает R в узле A и стратегии L'', R'' с вероятностями $\frac{1}{2}$ в информационном множестве $\{D,E\}$, а игрок 2 выбирает L^* в узле B и стратегии L', R' с вероятностями $\frac{1}{2}$ в узле C.

Следующий пример имеет дело с динамической игрой с несовершенной информацией, в которой отсутствует равновесие в чистых стратегиях. Найдем совершенное в подыграх равновесие в поведенческих стратегиях, пользуясь непосредственно методом обратной индукции.

Пример 4.31 (совершенное в подыграх равновесие и обратная индукция). Рассмотрим игру, изображенную на рис. 4.35. У нее имеются две собственные подыгры, одна из них начинается в узле B, другая в узле C. Подыгра с началом в B эквивалентна игре в стратегической форме, представленной в табл. 4.10. Несложно убедиться в том, что единственным равновесием в

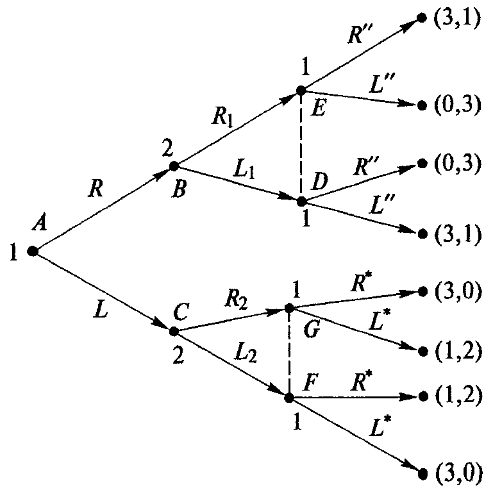


Рис. 4.35

Таблица 4.10

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L_1	R_1
	L''	(3,1)	(0,3)
	R''	(0,3)	(3,1)

Таблица 4.11

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L_2	R_2
	L^*	(3,0)	(1,2)
	R^*	(1,2)	(3,0)

поведенческих стратегиях этой игры является профиль $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$. Ожидаемый выигрыш участников при выборе равновесных поведенческих стратегий составляет $(\frac{3}{2},2)$. То есть, игрок 1 ожидает получить $\frac{3}{2}$, игрок 2 ожидает получить 2.

Игра с началом в узле C эквивалентна матричной игре на табл. 4.11. Нетрудно убедиться, что и в этом случае единственным равновесием в поведенческих стратегиях этой динамической игры будет профиль $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$. Ожидаемый выигрыш игрока 1 равен 2, ожидаемый выигрыш игрока 2 равен 1.

Поскольку (согласно теореме 4.29) любое совершенное в подыграх равновесие в поведенческих стратегиях порождает равновесие в поведенческих стратегиях в каждой подыгре, то единственным совершенным в подыграх равновесием в поведенческих стратегиях (b_1^*,b_2^*) является следующее:

Игрок 1: $b_1^*(A)=L$, $b_1^*(L'')=b_1^*(R'')=b_1^*(L^*)=b_1^*(R^*)=\frac{1}{2}$,

Игрок 2: $b_2^*(R_1)=b_2^*(L_1)=b_2^*(R_2)=b_2^*(L_2)=\frac{1}{2}$.

Заметим, что в узле A игрок 1 выберет L, поскольку его ожидаемый выигрыш в узле B равен $\frac{3}{2}$, а в узле C равен 2. ■

Упражнения

1. Проверьте, что динамическая игра с несовершенной информацией на рис. 4.34 является игрой с совершенной памятью. Убедитесь, что в табл. 4.12 приведена ее матричная форма.
2. Рассмотрим динамическую игру, представленную на рис. 4.34. Покажите, что $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ является единственным равновесием в поведенческих стратегиях в подыгре с началом в C.

Таблица 4.12

	Игрок 2				
Игрок 1	Стратегия	$\{L',R^*\}$	$\{L',L^*\}$	$\{R',R^*\}$	$\{R',L^*\}$
	$\{R',R''\}$	(0,3)	(0,3)	(3,0)	(3,0)
	$\{R,L''\}$	(3,0)	(3,0)	(0,3)	(0,3)
	$\{L,R''\}$	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)
	$\{L,L''\}$	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)

3. Снова обратимся к динамической игре на рис. 4.34. Покажите, что

$$\left(\left\{R,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\},\left\{L^*,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}\right)$$

— единственное совершенное в подыграх равновесие этой игры.

4. Запишите представление динамической игры на рис. 4.34 в матричной форме.
   (a) Существует ли равновесие в чистых стратегиях в этой матричной игре?
   (b) Найдите все равновесия в смешанных стратегиях в этой матричной игре.
   (c) Убедитесь, что среди всех найденных в пункте (b) равновесий в смешанных стратегиях только одно является совершенным в подыграх равновесием.
5. Найдите представление динамической игры на рис. 4.35 в матричной форме.
   (a) Существует ли равновесие в чистых стратегиях в этой матричной игре?
   (b) Найдите все равновесия в смешанных стратегиях этой матричной игры.
   (c) Убедитесь, что среди всех равновесий в смешанных стратегиях (найденных в пункте (b)) только одно является совершенным в подыграх равновесием.
6. Покажите, что в динамической игре (с совершенной или несовершенной информацией) с терминальными узлами $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ для произвольного профиля поведенческих стратегий имеет место

$$\sum_{r=1}^{k} \pi_b(Q_r) = 1\,.$$

7. Покажите, что совершенное в подыграх равновесие в поведенческих стратегиях в примере 4.31 определяет профиль смешанных стратегий для представления динамической игры на рис. 4.35 в матричной форме. Убедитесь также, что этот профиль смешанных стратегий является равновесием в смешанных стратегиях данной матричной игры.
8. Покажите, что каждый профиль поведенческих стратегий в динамической игре на рис. 4.35 индуцирует эквивалентный по выигрышу (т.е. имеющий тот же ожидаемый выигрыш для каждого игрока) профиль смешанных стратегий в матричной форме динамической игры.
9. Покажите, что в динамической игре на рис. 4.35 для каждого профиля смешанных стратегий матричной формы динамической игры существует как минимум один эквивалентный по выигрышу (т.е. имеющий тот же ожидаемый выигрыш для каждого игрока) профиль поведенческих стратегий.
10. Игра в матричной форме, представляющая динамическую игру из примера 4.27, имеет равновесие в смешанных стратегиях. У игры, однако, не существует равновесия в поведенческих стратегиях. Объясните, почему.

Глава 5 АУКЦИОНЫ

Аукционы использовались для покупки и продажи товаров еще в доисторические времена, и даже на сегодняшний день они используются довольно-таки часто. Лондонский «Сотби» с филиалами во многих богатых столицах мира проводит аукционы редких товаров и произведений искусства среди состоятельных покупателей. Муниципалитеты также используют некоторые формы аукциона для найма подрядчиков для проведения определенных видов работ. С помощью механизма аукциона регулярно осуществляется аренда офшорных месторождений нефти как среди крупных нефтяных компаний, так и среди независимых предпринимателей. Один из самых больших аукционов со ставками в размере миллиардов долларов был проведен в 1994 г. Правительство Соединенных Штатов «проводило аукцион по предоставлению лицензий на право использования радиочастот для средств персональной связи: мобильные телефоны, двусторонний пейджинг, портативный факс и беспроводные компьютерные сети»[1]. Как мы видим, аукционы используются часто и в разных ситуациях.

В гл. 2 уже кратко говорилось о том, что аукционы могут быть описаны как игры. Был рассмотрен аукцион с одновременным выбором ставок на один товар, причем участники аукциона знали ценность товара. Но это лишь один вид аукциона. Существуют аукционы, где продается только единица неделимого товара, а есть аукционы, где на продажу выставлены n различных товаров. Аукцион радиочастот относится к последнему типу. Аукционы также классифицируются в соответствии с тем, платит ли победитель максимальную ставку или вторую по величине ставку. В некоторых аукционах участники знают ценность для них выставленного на аукцион товара, в то время как в других имеется значительная неопределенность относительно этой ценности. В аукционе лицензий на право бурения офшорных месторождений участники формируют лишь некоторую оценку реальной ценности аренды.

Аукционы могут принимать различные формы. Участники могут делать ставки *одновременно* и запечатывать их в конверты или *последовательно*, когда аукционист последовательно оглашает ставки. Бывают *аукционы первой цены*, в которых победитель платит максимальную по величине ставку, и *аукционы второй цены*, где победитель платит только вторую по величине ставку.

В этой главе используется аппарат теории игр для анализа аукционов при их классификации согласно имеющейся у участников информации о ценности предмета, выставленного на аукцион, и информации оценки его другими участниками. Для начала рассмотрим *аукционы с совершенной информацией*,

---

[1] *McAfee R.P., McMillan J.* Analyzing the airwaves auction // Journal of Economic Perspectives. 1996. Vol. 10. P. 159–175.

в которых все участники знают оценки этого предмета каждым их них. Далее перейдем к анализу *английских аукционов* и *аукционов с индивидуальными частными оценками*, в которых участник знает только свою оценку. И наконец, рассмотрим *аукционы с общими оценками*, где участник получает лишь зашумленный сигнал относительно реальной ценности предмета.

5.1. Аукционы с совершенной информацией

Аукцион[1] состоит из n лиц (называемых **участниками торгов** или **игроками**), пронумерованных от 1 до n, каждый из которых заинтересован в покупке предмета (или товара). Победитель аукциона определяется согласно заранее продекларированным правилам, которые находят отражение в названии аукциона. Следующее общепринятое обозначение будет использоваться на протяжении всей главы.

- *Ценность продаваемого на аукционе товара для i-го игрока равна v_i. Величина v_i, называемая* ***оценкой*** *товара игроком i, есть количество, которое внутренне связано с этим игроком*[2].

Подчеркнем, что v_i отражает субъективную оценку предмета участником i; т.е. насколько данный предмет ценен конкретно для него. Обычно только сам игрок i знает v_i, а в определенных случаях (как, например, аукционы с общими оценками, которые будут обсуждаться в разделе 5.4) даже сам игрок i в точности не знает v_i!

Аукционы классифицируются как в соответствии с правилами, так и в соответствии с информацией о **векторе оценок** $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, которой обладают участники торгов. Аукцион, в котором все участники знают вектор $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, называется аукционом **с совершенной информацией**, в противном случае — аукционом **с несовершенной информацией**. В данном разделе будут обсуждаться **закрытые аукционы первой цены** и **закрытые аукционы второй цены**.

Обратимся сначала к **закрытому аукциону первой цены** с совершенной информацией. В этом случае каждый участник торгов знает вектор оценок $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Без ограничения общности (при необходимости, перенумеровав участников) можно полагать, что

$$0 < v_n \le v_{n-1} \le \dots \le v_2 \le v_1 . \qquad (*)$$

Даже если оценки неизвестны, общепринятой является нумерация участников в соответствии с (*). Для дальнейших рассуждений полезно иметь в виду это упорядочение ставок на вещественной прямой, как показано на рис. 5.1.

Название «закрытый аукцион первой цены» подразумевает следующие правила проведения. Каждый участник торгов i делает ставку b_i, т.е. выбирает

[1] Термин «аукцион» происходит из латинского языка и буквально означает «возрастание».

[2] Для практических целей v_i — «небольшой» интервал $[v_i - \varepsilon, v_i + \varepsilon]$, границы которого представляют наибольшее и наименьшее значение ценности предмета для участника. Для упрощения нашего анализа, однако, v_i всегда рассматривается как положительное вещественное число.

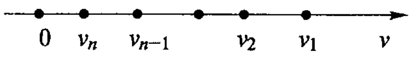


Рис. 5.1

число $b_i \in [0, \infty)$ и помещает в запечатанный конверт. После того как будут собраны все конверты, отвечающий за проведение аукциона (**аукционист**) вскрывает конверты и обнародует ставки. Победителем провозглашается участник, сделавший самую высокую ставку, который может затем получить предмет, уплатив аукционисту свою (максимальную) ставку. В случае r различных участников с максимальной ставкой будем предполагать, что победитель определяется среди них с помощью жеребьевки — таким образом, каждый участник с максимальной ставкой (**финалист**) получает предмет с вероятностью $1/r$.

В закрытом аукционе первой цены полезность участника i (или его выигрыш) — это

$$u_i(b_1,\ldots,b_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i < m = \max\{b_1,\ldots,b_n\}, \\ \dfrac{1}{r}(v_i - b_i), & \text{если } i \text{ среди } r \text{ финалистов,} \end{cases} \qquad (**)$$

где $b = (b_1,\ldots,b_n)$ — вектор ставок всех участников. То есть если участник i оказывается победителем, он платит максимальную ставку; его выигрыш — разница между его оценкой товара и тем, сколько он уплатил. Если ставка оказывается меньше максимальной, выигрыш будет нулевым. Заметим, что если находится более одного финалиста, то выигрыш участника определяется как ожидаемый выигрыш. Заметим также, что выигрыш участника будет положительным только в том случае, если он победитель и платит меньше, чем его собственная оценка данного товара.

Какую ставку следует сделать исходя из вышесказанного? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 5.1. *В закрытом аукционе первой цены любая ставка $b_i > v_i$ «неоптимальна» в том смысле, что любая ставка $b_i' \le v_i$ дает как минимум такой же выигрыш, как и ставка b_i.*

Более того, в закрытом аукционе первой цены с полной информацией «рациональные» участники должны вести себя следующим образом.

(1) *Если $v_1 > v_2$ (т.е. если участник 1 единственный среди имеющих максимальную оценку), то участник 1 выигрывает при ставке b_1, такой что $v_1 > b_1 > v_2$. (Для получения наибольшего выигрыша b_1 должна быть близка к v_2.)*

(2) *Если два или более участников имеют максимальную оценку, то каждый финалист i сделает ставку $b_i = v_1$.*

Доказательство. Если $b_i > v_i$ и участник i выигрывает, то его полезность $u_i = \dfrac{1}{r}(v_i - b_i) < 0$. Если не выигрывает, то $u_i = 0$. Заметим, что участник i может гарантированно получить как минимум $u_i = 0$, если $b_i \le v_i$.

(1) Из вышеупомянутого наблюдения мы знаем, что при $i \geq 2$ имеет место $b_i \leq v_2$. Следовательно, игрок 1 выиграет при ставке $v_2 < b_1 < v_1$.

(2) Если ставка b_i финалиста i удовлетворяет $b_i < v_i = v_1$, то он проиграет другому участнику j с максимальной оценкой, если тот предлагает b_j, такое что $b_i < b_j \leq v_1$. Таким образом, ставка каждого финалиста должна быть равна v_1, максимальной оценке товара. ■

Как следствие теоремы можно объявить победителя закрытого аукциона первой цены.

Следствие 5.2. *Для закрытого аукциона первой цены с совершенной информацией и «рациональными» участниками торгов имеют место следующие утверждения.*

(1) *Участник 1 (участник с наибольшей оценкой) всегда финалист.*

(2) *Если $v_1 > v_2$, то он выигрывает с помощью ставки, превосходящей вторую по величине оценку v_2 (но достаточно близкой к ней).*

Теперь становится ясно, что можно рассматривать закрытый аукцион первой цены как стратегическую игру с n участниками, обладающую следующими свойствами.

(1) n игроков — это n участников (аукциона).

(2) Множество стратегий игрока i — $S_i = [0, \infty)$.

(3) Функция выигрыша игрока i представляет собой функцию полезности u_i, заданную (**) (которая была описана перед теоремой 5.1).

Выясним, есть ли в игре равновесие по Нэшу, и если есть, то как равновесие по Нэшу[1] может быть связано с решением, описанным в следствии 5.2.

Теорема 5.3. *Для закрытого аукциона первой цены выполняется следующее.*

(a) *Если есть только один участник с наибольшей оценкой, т.е. $v_1 > v_2$, то аукционная игра не имеет равновесия по Нэшу, но имеет бесконечное множество «приближенных» равновесий по Нэшу.*

(b) *Если найдется как минимум два участника с наибольшей оценкой, то равновесие по Нэшу существует. В частности, вектор оценок $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ является равновесием.*

Доказательство. (a) Утверждается, что равновесие по Нэшу не может быть достигнуто, поскольку участник 1 всегда может улучшить свой выигрыш, делая ставку b_1 все ближе к значению v_2. Однако он никогда не поставит $b_1 \leq v_2$.

Заметим, что участник 1 всегда имеет выигрыш, меньший чем $v_1 - v_2$, но может получить сколь угодно близкий к $v_1 - v_2$ выигрыш. То есть для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти такую ставку b_1, что $v_2 < b_1 < v_2 + \varepsilon$ и участник получает выигрыш, который отличается от $v_1 - v_2$, меньше чем

[1] В этом разделе мы интересуемся только равновесиями в чистых стратегиях. Так что «равновесие по Нэшу» здесь является синонимом термина «равновесие по Нэшу в чистых стратегиях».

на ε. Если подходящий стратегический профиль ставок позволяет участникам иметь выигрыш, бесконечно близкий к максимальному, говорят, что в игре есть ε-**равновесие по Нэшу**, или **приближенные равновесия по Нэшу**. Следовательно, в этом случае не существует формального равновесия по Нэшу, однако есть приближенные равновесия по Нэшу.

(b) В этом случае нетрудно проверить, что вектор оценок $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ действительно является равновесием по Нэшу. Также должно быть понятно, что это равновесие не единственно; см. упражнение 7 в конце раздела. ■

Теперь посмотрим, что происходит с *закрытым аукционом второй цены*[1] в случае совершенной информации. Напомним, что согласно правилам аукциона второй цены победителем становится участник, предложивший наибольшую ставку, но в этом случае он платит по второй от максимальной величины ставке. Если же имеется r финалистов (где $1 < r \le n$) с максимальной ставкой, то победитель определяется с помощью жеребьевки и платит *по максимальной цене*. Между прочим, закрытый аукцион второй цены уже рассматривался в примере 2.32.

Пусть $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — вектор ставок. Для каждого игрока i положим

$$m_{-i} = \max_{j \ne i} b_j .$$

Ясно, что m_{-i} отражает максимальную ставку среди всех участников, за исключением i-го. Заметим, что если $b_i > m_{-i}$, то m_{-i} — вторая по величине ставка.

С учетом всего этого функция полезности (или выигрыша) i-го участника закрытого аукциона второй цены представляется в виде

$$u_i(b_1, \ldots, b_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i < m_{-i}, \\ \dfrac{1}{r}(v_i - m_{-i}), & \text{если } b_i = m_{-i} \text{ и всего } r \text{ финалистов}, \\ v_i - m_{-i}, & \text{если } b_i > m_{-i}. \end{cases}$$

Теперь можем установить некоторые факты относительно аукционов второй цены.

Теорема 5.4. *Если в закрытом аукционе второй цены ставка b_i участника i удовлетворяет $b_i > v_i$, то существует другая ставка $b_i' \le v_i$, гарантирующая неотрицательный выигрыш, который не хуже, чем при ставке b_i. Другими словами, рациональный игрок всегда поставит $b_i \le v_i$.*

Более того, для закрытого аукциона второй цены с совершенной информацией выполнено следующее:

(1) *если $v_1 > v_2$ (т.е. игрок 1 является единственным игроком с максимальной оценкой), то игрок 1 победит на аукционе при любой ставке b_1, такой что $v_1 > b_1 > v_2$, и*

(2) *вектор оценок $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ является равновесием по Нэшу.*

[1] Эти аукционы часто называют **аукционами Викри** по имени Уильяма Викри, получившего Нобелевскую премию по экономике 1996 г. (совместно с Джеймсом Мирлисом).

Доказательство. Предположим, что $b_i > v_i$ для некоторого участника i. Рассмотрим случаи:

(a) $m_{-i} > b_i$. В этом случае какой-то другой участник сделал более высокую ставку. Таким образом, i-й участник получает нулевой выигрыш, который также был бы получен и при ставке $b_i = v_i$.

(b) $m_{-i} = b_i$. В этом случае участник оказывается среди $r > 1$ участников с максимальной ставкой, поэтому имеет выигрыш $\frac{1}{r}(v_i - m_{-i}) < 0$. Но при ставке $b_i = v_i$ выигрыш получился бы бóльшим (равным нулю).

(c) $v_i \le m_{-i} < b_i$. В таком случае участник i выигрывает и платит вторую по величине ставку m_{-i}, имея выигрыш $v_i - m_{-i} \le 0$. Однако при ставке $b_i = v_i$ он мог либо проиграть (получив при этом нулевой выигрыш), либо оказаться среди $r > 1$ участников с максимальной ставкой (в этом случае ожидаемый выигрыш опять же нулевой). В противном случае ставка $b_i = v_i$ позволяет получить выигрыш, не меньший, чем ставка $m_{-i} < b_i$.

(d) $m_{-i} < v_i$. Тогда игрок i побеждает и получает выигрыш $v_i - m_{-i}$. Заметим, что такой же выигрыш будет и при ставке $b_i = v_i$.

(1) Повторите рассуждение в доказательстве теоремы 5.1.

(2) См. пример 2.32. ■

Сравнивая результаты аукционов первой и второй цен с совершенной информацией, отметим, что в случае единственного участника с максимальной ставкой аукционист гарантированно получает что-то близкое ко второй по величине оценке v_2. В случае более одного участника с максимальной ставкой аукционист имеет гарантированный выигрыш, равный величине максимальной ставки. Таким образом, с точки зрения аукциониста выигрыши в этих двух аукционах практически не различаются.

Однако в аукционе второй цены равновесие по Нэшу, в котором участник 1 ставит близко к v_2, оказывается достаточно неустойчивым, поскольку участник 2 может отклоняться путем снижения ставки до величины $b_2 < v_2$, не неся при этом никаких издержек. В таком случае аукционист может получить меньше, чем ожидаемая вторая по величине оценка v_2. Возможно, по этой причине аукционы второй цены редко используются на практике. Не исключена вероятность того, что аукционист получит меньше, чем при аукционе первой цены.

Рассмотренный до этого момента механизм аукциона подразумевал одновременное назначение ставок. На практике зачастую ставки делаются последовательно, при этом аукционист начинает с предложения некоторой цены. В случае совершенной информации аукцион с последовательным объявлением ставок может закончиться быстро, если участник 1 сразу предложит v_2. Если такое произойдет, никто из других участников не станет «перебивать» первую ставку, поскольку получит отрицательный выигрыш. В результате получается то же самое, что и в закрытом аукционе первой цены.

Упражнения

1. Местный муниципалитет размещает тендер на создание парка. В тендере участвует пять фирм-подрядчиков. Фирма, которая сможет предложить наименьшую ставку, выигрывает контракт. Запишите стратегическую форму игры данного аукциона и объясните, как подрядчики будут действовать в случае, если издержки создания парка каждой фирмой известны всем фирмам.
2. В Западной Африке обнаружили залежи редкого ископаемого. Было решено, что залежи выставят на аукцион. Аукционисту известно, что два музея одинаково оценивают покупку в размере 5 млн долл., а следующий возможный покупатель оценит ее в 4 млн долл. Следует ли аукционисту проводить закрытый аукцион первой цены или закрытый аукцион второй цены? Каков ожидаемый выигрыш аукциониста?
3. В условиях предыдущего упражнения один музей оценивает покупку в 5 млн долл., второй в 4,5 млн, все остальные — не более 4 млн каждый. Как изменится ваш ответ?
4. Предположим, что оценки потенциальных покупателей неизвестны. Пусть участники делают ставки последовательно. Как вы думаете, будут ли участники повышать свои ставки вплоть до величины своей индивидуальной оценки? Ответ обоснуйте.
5. Рассмотрим закрытый аукцион первой цены и представим его в виде стратегической игры с n участниками, где множество стратегий i-го игрока составляет $S_i = [0, \infty)$, множество всех возможных ставок b_i. Покажите, что если $v_1 = v_2$, то вектор $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — равновесие по Нэшу. (Это часть (b) теоремы 5.3.)
6. Покажите, что если в закрытом аукционе первой цены с совершенной информацией существует как минимум два участника с максимальной оценкой, то в равновесии по Нэшу $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ выигрыши всех участников равны нулю.
7. Рассмотрим закрытый аукцион второй цены и представим его в виде стратегической игры с n участниками, где множество стратегий i-го игрока составляет $S_i = [0, \infty)$, множество всех возможных ставок b_i. Предположим, что $0 < v_n < v_{n-1} < \ldots < v_2 < v_1$. Покажите, что любой вектор ставок $(v_2, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, удовлетворяющий соотношениям $v_3 \le b_2 < v_2$ и $b_i \le v_i$ для всех $3 \le i \le n$, является равновесием по Нэшу.
8. Предположим, что аукцион с n участниками и совершенной информацией таков, что оценки участников удовлетворяют $0 < v_n < v_{n-1} < \ldots < v_2 < v_1$. Правила аукциона следующие: если есть два или более участников с максимальной ставкой, то выигрывает участник с наибольшей ставкой и наименьшим порядковым номером. Например, в аукционе с четырьмя участниками и ставками (3,4,2,4) покупатели 2 и 4 имеют одинаковые максимальные ставки, и покупатель 2 оказывается победителем, поскольку его порядковый номер меньше (2 против 4).

(a) Найдите равновесие по Нэшу, если аукцион является закрытым аукционом первой цены.

(b) Пусть аукцион проводится как закрытый аукцион второй цены. Установите, что

(i) вектор оценок $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — равновесие по Нэшу;

(ii) вектор ставок $(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_n^*)$, где $b_2^* > v_1$, $0 < b_1^* < v_2$ и $b_i^* = 0$ для всех $i \neq 1, 2$, — тоже равновесие по Нэшу.

9. Рассмотрим некоторое примечание к аукциону с n участниками. Пусть $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — вектор ставок. Положим $m = \max\{b_1, \ldots, b_n\}$. Если $A = \{i : b_i = m\}$, то вторая по величине ставка задается как

$$m_s = \max\{b_i : i \notin A\}$$

при условии, что $A \neq \{1, 2, \ldots, n\}$. Если $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, то положим $m_s = m$, общее значение всех b_i. Теперь r отражает мощность множества A, т.е. r — это число участников с максимальной ставкой.

Рассмотрим закрытый аукцион второй цены с совершенной информацией, который разыгрывается следующим образом. Участник с наибольшей ставкой выигрывает и платит вторую по величине ставку m_s. Функция полезности (выигрыш) i-го участника задается

$$u_i(b_1, \ldots, b_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i < m, \\ v_i - m_s, & \text{если } b_i = m \text{ и } r = 1, \\ \dfrac{1}{r}(v_i - m), & \text{если } b_i = m \text{ и } 1 < r \leq n. \end{cases}$$

Будет ли $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ равновесием по Нэшу в данной аукционной игре?

10. Рассмотрим закрытый аукцион первой цены с совершенной информацией и представим его в виде стратегической игры с n участниками, где $S_i = [0, \infty)$ — множество стратегий игрока i. Пусть $0 \leq v_n \leq \ldots \leq v_4 \leq v_3 < v_2 = v_1$. Найдите все равновесия по Нэшу.

5.2. Английский аукцион

Аукционы, в которых аукционист использует процедуры последовательного предложения цен, — одни из наиболее популярных. Существует несколько разновидностей таких аукционов с последовательными ставками. Наиболее распространена версия **английского аукциона**, в котором аукционист называет все более высокие ставки, а участник показывает, согласен ли сделать такую ставку. Тот, кто сделал последнюю ставку в этой серии, выигрывает аукцион и платит по этой ставке. В Японии используется иной формат английского аукциона. Текущая цена высвечивается на электронном табло, причем она непрерывно увеличивается. Если участника цена устраивает, он не отпускает специальную кнопку. Как только кнопка отпущена, участник автоматически выходит из аукциона. Голландцы зачастую используют аукцион с последовательными ставками для продажи тюльпанов и луковиц тюльпанов. Однако аукцион стартует с высокой цены, которая затем постепенно снижается до того момента, пока какой-нибудь участник не согласится. Такие аукционы называют **голландскими**, и они довольно сильно отличаются от английских. Здесь мы попытаемся проанализировать стандартную версию английского аукциона, который проходит следующим образом.

(1) Аукционист (лицо, отвечающее за аукцион) начинает с установления ставки в размере b_0. Это **предварительный (нулевой) этап** проведения аукциона. Цена b_0 является **минимальной ставкой** на этом раунде. Будем предполагать, что $b_0 > 0$.

(2) Как только цена b_0 анонсирована, участники начинают последовательно делать ставки, т.е. по очереди, один за другим. Последующие ставки должны превышать минимальную ставку на этом раунде. Первый участник обычно ставит b_0, и это нулевой этап аукциона. Затем аукционист поднимает минимальную ставку до $b_1 > b_0$, и это уже первый этап. Если никто не сделает ставку b_1, то участник со ставкой b_0 выигрывает аукцион и платит b_0. Если кто-то объявляет b_1, то аукционист поднимает минимальную ставку до $b_2 > b_1$, переходя ко второму этапу. Опять же, если никто не поставит b_2, участник со ставкой b_1 выигрывает и платит b_1. И так далее. На каждой стадии аукциона одному и тому же участнику разрешается делать ставку, даже если он делал ставку на предыдущих раундах[1]. В результате минимальная ставка b_k на этапе k такова, что

$$0 < b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k .$$

(3) Как отмечалось ранее, если на некотором этапе k никто не повысил ставку, то игрок со ставкой b_k выигрывает, и аукцион заканчивается. Затем он платит аукционисту b_k и забирает предмет.

Поскольку процесс торгов в английском аукционе сильно отличается от того, что происходит при закрытом аукционе, естественно поинтересоваться, будут ли отличаться финальные ставки. Мы начинаем обсуждение английского аукциона, предположив, что все участники имеют собственную оценку предмета v_i, причем ее величина неизвестна другим участникам.

В английском аукционе участникам совершенно необязательно знать оценки своих оппонентов. Поэтому необязательно, чтобы английский аукцион был аукционом с полной информацией. Как мы увидим, преимущество английского аукциона состоит в том, что участникам не нужно знать распределение возможных оценок, чтобы предложить оптимальную цену. Перейдем к изучению оптимальных стратегий.

[1] Здесь само собой разумеется, что рациональные участники аукциона не станут делать двух следующих друг за другом предложений, так как это бы просто снижало их ожидаемый выигрыш в случае победы. Два последовательных предложения цены одним и тем же игроком равносильны игре против самого себя.

> **Утверждение 1.** *Ни один из участников не будет предлагать цену, бо́льшую его индивидуальной оценки.*

Если в каком-то из этапов последовательных раундов предложения цены участник i поставит $b_i > v_i$ и никто эту ставку не перебьет, то выигрыш i-го участника составит

$$b_i - v_i < 0.$$

Если найдется некоторый участник j, который поставит $b_j > b_i > v_i$, то выигрыш i-го участника будет 0. Ожидаемый выигрыш при ставке $b_i > v_i$ имеет вид

$$p(b_i - v_i) + (1 - p) \times 0,$$

где p — вероятность выиграть аукцион со ставкой b_i.

> **Утверждение 2.** *Участник не станет выходить из аукциона, пока текущая максимальная ставка меньше, чем v_i.*

Для доказательства следует рассмотреть два случая. Во-первых, если участник i сделал последнюю ставку b_k, он не станет ее поднимать, коль скоро никто не предлагает более высоких цен. В этом случае он является победителем и получает выигрыш $v_i - b_k$. Если, однако, $b_k > v_i$, выигрыш отрицателен и было бы лучше, если бы этот участник либо вообще не делал предложения на k-м раунде, либо, в случае $b_{k-1} < v_i$, предложил поставить b_k, такое что $b_{k-1} < b_k \le v_i$.

Если минимальная ставка после k раундов $b_k < v_i$ и последняя ставка была сделана не участником i, то он сможет поставить $b_k < b_{k+1} < v_i$ на $k+1$ этапе, поскольку ожидаемый выигрыш от ставки составит

$$p(v_i - b_{k+1}) + (1 - p) \times 0 = p(v_i - b_{k+1}) \ge 0.$$

Ожидаемый выигрыш окажется положительным, если существует положительная вероятность того, что b_{k+1} окажется наивысшей ставкой. В этом случае ожидаемый выигрыш участника i при отказе делать ставку равен нулю независимо от его ожиданий.

Теперь можно воспользоваться двумя этими утверждениями для определения победителя в английском аукционе. Ясно, что участники прекратят делать ставки в тот момент, когда минимальная ставка b_t в раунде t окажется не меньшей, чем v_2, вторая по величине оценка. Поскольку участник с оценкой v_2 не заинтересован делать предложение $b_t > v_2$, ставка будет сделана участником 1, следовательно $b_t < v_1$. Таким образом, в английском аукционе финальная ставка b^* всегда удовлетворяет $v_2 \le b^* \le v_1$. Отметим, что финальная ставка совершенно не зависит от информации или ожиданий участников относительно оценок оппонентов. Итак, мы установили следующее.

Факт

В английском аукционе финальная ставка не зависит от того, насколько участники осведомлены об оценках других участников.

Финальная ставка является просто следствием второй по величине оценки, которая может быть как известна, так и неизвестна участникам в момент начала аукциона.

Рассмотрим следующий вариант аукциона с последовательными ставками[1]. В качестве выставляемого на аукцион предмета выступает доллар, а правила аукциона следующие.

(a) Игрок с наибольшей ставкой получает доллар.

(b) Игрок с максимальной ставкой, а также игрок со второй по величине ставкой обязаны заплатить свою ставку.

Разница между этим аукционом и обычным аукционом с последовательными ставками состоит в том, что заплатить должен не только победитель, но также и участник со второй по величине ставкой.

В данном аукционе единственное равновесие по Нэшу: *участник, который делает ставку первым, ставит 1 доллар, остальные не ставят ничего.* Убедимся в этом при помощи следующих утверждений.

- *В равновесии по Нэшу ни один из участников не поставит больше чем доллар.*

Если вы делаете ставку первым и ставите $b > 1$, то ваш выигрыш задается как

$$u(b) = \begin{cases} 1 - b < 0, & \text{если вы выиграете,} \\ -b < 0, & \text{если ваша ставка вторая по величине,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что лучше предложить за доллар 0, поскольку выигрыш в этом случае всегда равен 0. Таким образом, выигрыш при ставке $b > 1$ не выше, чем при ставке 0.

- *Ставка меньше доллара не может быть выигрывающим предложением в равновесии по Нэшу.*

Чтобы убедиться в этом, предположим, что $b_1 < b_2 < \cdots < b_{k-1} < b_k$ — последовательные ставки на аукционе, которые образуют равновесие по Нэшу. Если $k = 1$, то $b_k = 1$. В противном случае любой участник $j \neq i$ может сделать предложение b, такое что $b_k < b < 1$, и тем самым выиграть аукцион и получить положительный выигрыш.

Если $k > 1$, то снова $b_k = 1$. При $b_k < 1$ участник j со ставкой b_{k-1} сможет поставить b так, что $b_{k-1} < b < 1$, и избежать штрафа b_{k-1}.

---

[1] Этот аукцион впервые был использован профессором Мартином Шубиком в Йельском университете.

Следовательно, единственный кандидат на равновесие — это тот исход, при котором первый участник ставит 1 долл., и никто другой не делает предложений.

В том случае, если первый участник ставит 1 долл., любой другой участник, желающий победить, должен сделать ставку выше чем 1 долл. Но из первого утверждения следует, что такая стратегия доминируется предложением цены, равной 0. Поэтому у каждого участника кроме первого, который предлагает цену в 1 долл., оптимальная стратегия — воздержаться от участия в аукционе. Второе утверждение тогда гарантирует, что это единственное равновесие по Нэшу.

Хотя в данном аукционе одно равновесие по Нэшу, он обладает замечательным свойством. Если по какой-то причине первая ставка оказалась меньше 1 долл., то торги разворачиваются столь драматически, что финальная ставка окажется намного больше, чем 1 долл. Пусть, например, первая ставка оказалась равной 50 центам. Второй участник тогда имеет шанс выиграть, если поставит, скажем, 75 центов. Но как только эта вторая ставка сделана, участник, сделавший первую ставку в 50 центов, вынужден поставить больше, поскольку в противном случае потеряет 50 центов, ведь если он не сделает этого, его ставка окажется второй по величине. Поэтому он делает новую ставку, в интервале от 75 центов до 1 долл. Теперь участник со ставкой в 75 центов рискует потерять 75 центов, поскольку его ставка оказывается второй по величине, и он поэтому хочет перебить предыдущую ставку. Остановится ли этот процесс после того, как ставка достигнет одного доллара? Ответ будет отрицательным в случае, если уже нашелся участник, сделавший вторую ставку. Если вторая по величине ставка составляет 90 центов, то участник с этой ставкой захочет перебить максимальную ставку (1 долл.), предлагая 1,05 долл., поскольку если он выиграет, то потеряет всего 5 центов, а не сделав предложения, потеряет 90 центов.

Но теперь участник со ставкой 1 долл. будет предлагать более высокую ставку, скажем, 1,10 долл. Этот явно порочный (но кажущийся рациональным) процесс торгов будет продолжаться до тех пор, пока ставки не достигнут очень высоких и даже, возможно, абсурдных значений. Единственное ограничение на их величину — это бюджет участников. Этот феномен наблюдался во многих аукционах данного типа по всему миру. Например, как вы думаете, за сколько можно продать на аукционе чек на 20 долл.? В некоторых случаях ставки достигали целых 15 тыс. долл.![1]

Упражнения

1. Как мы убедились ранее, финальная ставка в английском аукционе $b^* \geq v_2$, где v_2 — вторая по величине оценка предмета. Как это соотносится с финальной ставкой в закрытом аукционе второй цены?
2. Вспомним, что в голландском аукционе начальная ставка очень высока, а затем постепенно снижается, до тех пор пока не найдется желающий

---

[1] См.: The Indianapolis Star. Busyness Monday. 1997. Week of April 14.

купить по этой цене. Как финальная ставка в голландском аукционе соотносится с финальной ставкой в английском аукционе? Объясните подробно.

3. Как аукционист, вы знаете, что один из участников имеет высокую индивидуальную оценку, причем остальные участники об этом не знают. Какую форму аукциона вы предпочтете?
4. Аукционист обладает информацией о том, что двое участников имеют очень высокие индивидуальные оценки, но остальные участники об этом не знают. Какую форму аукциона он выберет?
5. Обязательства несостоятельных ссудно-сберегательных ассоциаций (S&L) часто выставляются на аукцион трастовой корпорацией по урегулированию (Resolution Trust Commission, RTC[1]). Перед тем как сделать ставку, участник может получить всю интересующую его информацию для формирования оценки. Эти аукционы проводятся в форме закрытых аукционов первой цены. Как вы думаете, приносит ли такая форма аукциона максимум прибыли RTC? Если нет, какой тип аукциона следовало бы использовать?
6. Представьте, что вы участвуете в английском аукционе, где на продажу выставлена «Хонда Цивик» (Honda Civic), пробег которой составляет 20 тысяч миль. Аукционист решил продать машину участнику с наибольшей ставкой, но заплатить этому участнику придется вторую по величине ставку. Вы готовы заплатить за машину не более 10 тыс. долл.
   (a) Вы уверены, что сможете выиграть, если поставите 15 тыс. долл. Объясните, почему это не самая хорошая стратегия.
   (b) Вы сделали ставку в 9 тыс. долл. после цепочки ставок, выиграли аукцион и заплатили 8,5 тыс. долл. Объясните, почему вы могли добиться того же результата, если бы поставили 10 тыс. долл. сразу в начале аукциона при условии, что кто-то уже сделал ставку перед вами или аукционист начал аукцион с минимальной ставки.
   (c) Какова оптимальная ставка для вас в этом аукционе?
7. Известный торговец произведениями искусства «Сотби» выставил картину Гогена на аукцион английского типа. В комнате присутствует 20 человек, наибольшая субъективная оценка составляет 2 млн долл., вторая после нее — 1,5 млн. Можно ли сказать, какой цены достигнет картина или требуется дополнительная информация об оценках других участников? Смог бы аукционист добиться лучшей цены при закрытом аукционе второй цены? Подробно объясните.

[1] Трастовая корпорация для урегулирования; создана в США в 1989 г. при участии правительства, в соответствии с законом о спасении от банкротства (ссудо-сберегательных ассоциаций) для объединения или ликвидации ссудо-сберегательных институтов, ставших несостоятельными в период с 1989 г. по август 1992 г. (http://www.multitran.ru/c/M.exe?l1=1&l2=2&s=Resolution%20Trust%20Corporation). — *Примеч. пер.*

8. Услуги интернет-сайта позволяют пользователям выставлять на аукцион свои собственные товары. Заинтересованный в покупке участник может либо
   (a) анонсировать *максимальную цену MV*, при которой он согласен купить товар; эта цена недоступна другим участникам, или
   (b) присоединиться к последовательным ставкам, которые доступны другим участникам, и сделать более высокую ставку.

   Правила таковы, что все ставки должны быть сделаны в течение определенного времени. Если ставки не превысят максимальную ставку *MV*, то участник с наибольшей ставкой *MV* выигрывает и платит либо по самой высокой ставке, либо по второй по величине *MV*, смотря что больше. Если вы делаете ставку в последний момент перед закрытием, есть вероятность, что вы можете не успеть.
   (a) Существует ли оптимальная стратегия в таком аукционе?
   (b) Может ли быть оптимальной стратегией такая, при которой вы совершаете ставку в последний момент? (Имейте в виду, что можете не успеть.)

5.3. Аукционы с индивидуальными частными оценками

Аукцион с индивидуальными частными оценками — это такой аукцион, в котором каждый участник знает только свою оценку, хотя и имеет некоторые представления о чужих оценках. Например, если вы находитесь на аукционе редких художественных произведений, вы знаете о том, сколько готовы заплатить сами, но имеете только смутное представление о том, сколько готовы заплатить остальные.

В данном разделе будет детально изучен аукцион первой цены с индивидуальными частными оценками и двумя участниками, которые используют «линейные правила» в качестве своих стратегий подачи заявок. В таком закрытом аукционе первой цены с индивидуальными частными оценками каждый участник i имеет собственную оценку v_i и выигрывает участник с наибольшей ставкой. Если два участника имеют наибольшую ставку, победитель выбирается случайным образом. Как и ранее, функции выигрыша участников имеют вид

$$u_1(b_1,b_2)=\begin{cases} v_1-b_1, & \text{если } b_1>b_2,\\ \frac{1}{2}(v_1-b_1), & \text{если } b_1=b_2,\\ 0, & \text{если } b_1<b_2 \end{cases}$$

и

$$u_2(b_1,b_2)=\begin{cases} v_2-b_2, & \text{если } b_2>b_1,\\ \frac{1}{2}(v_2-b_2), & \text{если } b_2=b_1,\\ 0, & \text{если } b_2<b_1. \end{cases}$$

Здесь, как сказано ранее, мы предполагаем, что при одинаковых ставках победитель определяется с помощью подбрасывания монеты, так что вероятность выигрыша составляет $\frac{1}{2}$. Следовательно, полезность в данном случае вычисляется как ожидаемый выигрыш от победы в аукционе.

В отличие от участников аукционов в разделе 5.1, теперь участники *не знают* реальную оценку предмета другим участником. Хотя каждый участник не уверен (ввиду отсутствия информации) относительно реальной оценки оппонента, он имеет ожидания относительно ее величины. Поскольку участник i не знает оценку v_j участника j, он трактует v_j как случайную величину. Это значит, что ожидания игрока i относительно реальной оценки v_j выражаются в терминах функции распределения F_i. То есть игрок i рассматривает v_j как случайную величину с функцией распределения F_i. Таким образом, игрок i полагает, что событие $v_j \le v$ случится с вероятностью

$$P_i(v_j \le v) = F_i(v)\,.$$

(См. раздел 1.5.4 для знакомства с определением функции распределения.)

Отметим с самого начала, что поскольку мы имеем дело с игрой, каждый участник может прийти к оптимальной ставке только после того, как угадает поведение в процессе торгов других участников. Естественно, что ставки b_1 и b_2 должны быть функциями соответствующих оценок v_1 и v_2. Другими словами, $b_1 = b_1(v_1)$ и $b_2 = b_2(v_2)$.

Ввиду недостатка информации относительно других игроков лучшее, что может сделать любой игрок, — это выбрать ставку, которая максимизирует его ожидаемый выигрыш. Заметим, что ожидаемый выигрыш игроков задается как

$$\begin{aligned}E_1(b_1,b_2) &= P_1(b_1 > b_2)u_1(b_1,b_2) + P_1(b_1 = b_2)u_1(b_1,b_2) + P_1(b_1 < b_2)u_1(b_1,b_2) = \\ &= (v_1 - b_1)P_1(b_1 > b_2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)P_1(b_1 = b_2)\,,\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$E_2(b_1,b_2) = (v_2 - b_2)P_2(b_2 > b_1) + \frac{1}{2}(v_2 - b_2)P_2(b_2 = b_1)\,.$$

Заметим, что первый член в формуле для $E_1(b_1,b_2)$ описывает вероятность того, что участник 1 станет победителем и получит выигрыш $v_1 - b_1$, второй член — выигрыш в случае равенства ставок, при которой ожидаемый выигрыш участника 1 составляет $\frac{1}{2}(v_1 - b_1)$. Третий член обращается в нуль, поскольку $u_1(b_1,b_2) = 0$ при $b_1 < b_2$.

Таким образом, в этом аукционе стратегия участника, например участника 1, — это просто функция предложения цены $b_1(v_1)$, приносящая максимальный ожидаемый выигрыш при заданной функции предложения цены $b_2(v_2)$ участника 2. Следовательно, функции ожидаемых выигрышей могут быть записаны в виде

$$E_1(b_1|b_2) = (v_1 - b_1)P_1(b_1 > b_2) + \frac{1}{2}(v_1 - b_1)P_1(b_1 = b_2)$$

и

$$E_2(b_2|b_1) = (v_2 - b_2)P_2(b_2 > b_1) + \frac{1}{2}(v_2 - b_2)P_2(b_2 = b_1).$$

Значит, равновесие по Нэшу определяется следующим образом.

Определение 5.5. *Пара функций ставок $(b_1^*(v_1), b_2^*(v_2))$ называется **равновесием по Нэшу** в аукционе с индивидуальными частными оценками, если для любой функции предложения цены $b_1(v_1)$ игрока 1 выполнено*

$$E_1(b_1|b_2^*) \le E_1(b_1^*|b_2^*)$$

и для любой функции предложения цены игрока 2 выполнено

$$E_2(b_2|b_1^*) \le E_2(b_2^*|b_1^*).$$

Исследуем подробно следующий частный случай. Будем предполагать, что оба участника знают о том, что оценка предмета лежит в интервале между нижним значением $\underline{v} \ge 0$ и верхним значением $\overline{v} \ge 0$. Пусть также каждый участник знает, что оценка другого участника равномерно распределена на интервале $[\underline{v}, \overline{v}]$. То есть участник i знает только то, что реальная оценка v_j участника j — случайная величина с плотностью распределения $f_i(v)$, которая имеет вид

$$f_i(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{v} - \underline{v}}, & \text{если } \underline{v} \le v \le \overline{v}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Другими словами, участник i ожидает, что вероятность $v_j \le v$ задается формулой

$$P_i(v_j \le v) = \int_{-\infty}^{v} f_i(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{если } v < \underline{v}, \\ \dfrac{v - \underline{v}}{\overline{v} - \underline{v}}, & \text{если } \underline{v} \le v \le \overline{v}, \\ 1, & \text{если } v < \overline{v}. \end{cases}$$

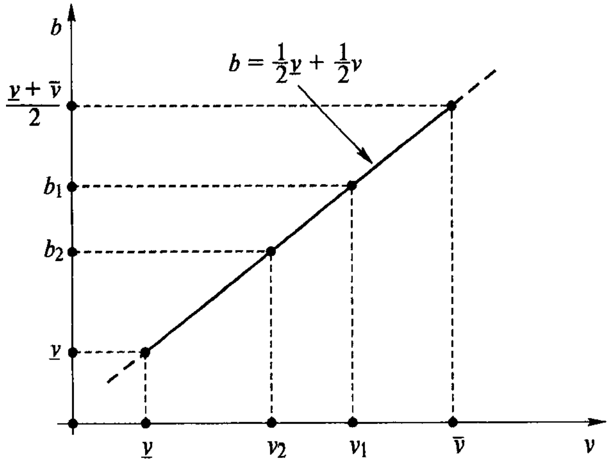


Рис. 5.2. Линейное правило предложения цены

(См. пример 1.6 с дискуссией относительно равномерного распределения.) Ясно, что должны выполняться следующие два условия «рациональности»:

$$\underline{v} \le b_2(\underline{v}) \le \bar{v} \text{ и } \underline{v} \le b_1(\underline{v}) \le \bar{v}.$$

Поскольку оба участника обладают симметричной информацией относительно друг друга, каждый должен использовать в сущности те же самые умозаключения относительно выбора оптимальной стратегии. Таким образом, имеем следующий результат.

Правило предложения цены в случае двух участников

Предположим, что в аукционе с индивидуальными частными оценками и двумя участниками оценки последних являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале $[\underline{v}, \bar{v}]$. Тогда линейные правила предложения цены

$$b_1(v_1) = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_1 \text{ и } b_2(v_2) = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_2$$

составляют симметричное равновесие по Нэшу.

График линейного правила изображен на рис. 5.2.

Теперь мы переходим к проверке того, что пара линейных правил предложения цены,

$$b_1^* = b_1^*(v_1) = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_1 \text{ и } b_2^* = b_2^*(v_2) = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_2,$$

действительно является симметричным равновесием по Нэшу[1] в аукционе с индивидуальными частными оценками. В силу симметричности ситуации достаточно проделать необходимые вычисления только для участника 1. Начнем с вычисления вероятности выигрыша игрока 1. С точки зрения участника 1, v_2 является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[\underline{v}, \bar{v}]$. Следовательно,

$$P_1(b_1 > b_2^*) = P_1\left(b_1 > \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_2\right) = P_1(v_2 < 2b_1 - \underline{v}) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } b_1 < \underline{v}, \\ \dfrac{2(b_1 - \underline{v})}{\bar{v} - \underline{v}}, & \text{если } \underline{v} \le b_1 \le \dfrac{1}{2}(\bar{v} + \underline{v}), \\ 1, & \text{если } b_1 > \dfrac{1}{2}(\bar{v} + \underline{v}). \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 5.3, *а*.

[1] На языке теории игр равновесие называется симметричным равновесием по Нэшу, если все игроки используют одни и те же стратегии, что ведет к одинаковым выигрышам этих игроков.

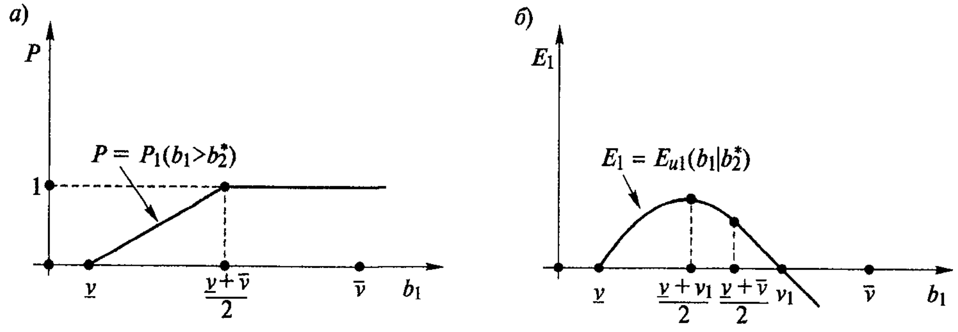


Рис. 5.3

Поскольку v_2 равномерно распределена (т.е. относится к классу непрерывных распределений) на $[\underline{v}, \bar{v}]$, имеем

$$P_1(b_1 = b_2^*) = P_1\left(b_1 = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_2\right) = P_1(v_2 = 2b_1 - \underline{v}) = 0 .$$

Поэтому получаем

$$Eu_1(b_1|b_2^*) = P_1(b_1 > b_2^*)(v_1 - b_1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } b_1 < \underline{v}, \\ \dfrac{2(b_1 - \underline{v})(v_1 - b_1)}{\bar{v} - \underline{v}}, & \text{если } \underline{v} \le b_1 \le \dfrac{1}{2}(\bar{v} + \underline{v}), \\ v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > \dfrac{1}{2}(\bar{v} + \underline{v}). \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 5.3, *б*.

Теперь нетрудно видеть, что ожидаемая функция полезности $E_1(b_1|b_2^*)$ достигает максимума в закрытом интервале $\left[\underline{v}, \frac{1}{2}(\bar{v} + \underline{v})\right]$. А точнее, в точке $b_1 = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}v_1$; см. рис. 5.3. Это показывает, что пара линейных правил $(b_1^*(v_1), b_2^*(v_2))$ в действительности является равновесием по Нэшу в аукционе с индивидуальными частными оценками.

Однако стоит заметить следующее. Хотя мы и смогли найти явные решения для равновесия по Нэшу, нам удалось это благодаря предположению о равномерности распределения оценок. Поэтому полученные ранее линейные правила предложения цены могут оказаться не равновесными в случае какого-то другого распределения.

Посмотрим, как линейные правила предложения цены работают в простом примере.

Пример 5.6. Предположим, что два участника аукциона предлагают цену за картину, зная, что ее стоимость находится между 100 тыс. долл. и 500 тыс. долл. и что оценка картины каждым участником равномерно распределена на интервале [100 000,500 000]. То есть в данном случае $\underline{v} = 100\,000$, а

$\bar{v} = 500\,000$. Равновесные правила назначения цены в данном случае следующие:

$$b_i(v_i) = \frac{1}{2}v_i + 50\,000\,, \quad i = 1,2\,.$$

Если реальная оценка игрока 1 равна 200 тыс. долл., то он предложит цену b_1 = 150 000; если при этом реальная оценка игрока 2 составляет 250 тыс. долл., то его ставка будет b_2 = 175 000. В данном случае аукционист соберет 175 тыс. долл., а игрок 2 приобретет картину за 175 тыс. долл. ■

Здесь мы имели дело со случаем двух участников. Поскольку обычно в аукционе более двух участников, важно понять, как устроены такие аукционы. Проиллюстрируем все аргументы и рассуждения для общего случая аукциона с индивидуальными частными оценками на аукционе с тремя участниками. Случай с n участниками рассматривается абсолютно по той же схеме, и мы оставим это читателю в качестве упражнения.

Как и ранее, каждый участник i рассматривает оценки других игроков как независимые случайные величины, которые, как всем известно, являются равномерно распределенными на интервале $[\underline{v}, \bar{v}]$. Ну и, конечно, каждый участник знает свою реальную индивидуальную оценку. Поскольку это закрытый аукцион первой цены, то при заданном векторе ставок (b_1, b_2, b_3) функция выигрыша игрока i имеет вид

$$u_i(b_1,b_2,b_3) = \begin{cases} v_i - b_i, & \text{если } b_i > b_j \text{ для всех } j \neq i, \\ \frac{1}{r}(v_i - b_i), & \text{если } i \text{ среди } r \text{ финалистов}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш игрока i задается формулой

$$E_i(b_1,b_2,b_3) = P_i(b_i > b_j \text{ для всех } j \neq i)\; u_i(b_1,b_2,b_3).$$

Поскольку все случайные величины v_j при $j \neq i$ равномерно распределены, то вероятность, что любые две ставки совпадут, равна нулю, поэтому такое совпадение ставок не влияет на ожидаемую полезность. В силу симметрии задачи разумно ожидать, что все участники будут использовать одни и же оптимальные правила предложения цены. Как и в случае двух участников, можно установить следующий результат (аналогичный результату в случае двух участников).

Правило предложения цены в случае трех участников

Предположим, что в аукционе с индивидуальными частными оценками и тремя участниками оценки участников являются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале $[\underline{v}, \bar{v}]$. Тогда линейные правила предложения цены

$$b_i(v_i) = \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}v_i\,, \quad i = 1,2,3\,,$$

образуют симметричное равновесие по Нэшу.

Чтобы убедиться в том, что линейные правила предложения цены

$$b_i^* = b_i^*(v_i) = \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}v_i, \; i = 1,2,3,$$

образуют равновесие по Нэшу, будем рассуждать так же, как и в случае с двумя участниками. В силу симметричности можно доказать, что такое поведение первого участника будет равновесным. Предположим, что все участники делают ставки независимо, что вполне разумно в случае закрытого аукциона. В теории вероятностей это предположение интерпретируется как *независимость* случайных величин, что означает

$$P_1(b_1 > b_2 \text{ и } b_1 > b_3) = P_1(b_1 > b_2)\, P_1(b_1 > b_3).$$

Следовательно, имеем

$$P_1(b_1 > b_2^* \text{ и } b_1 > b_3^*) = P_1(b_1 > b_2^*) P_1(b_1 > b_3^*) =$$

$$= P_1(b_1 > \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}v_2) P_1(b_1 > \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}v_3) =$$

$$= P_1(v_2 < \frac{3b_1 - \underline{v}}{2}) P_1(v_3 < \frac{3b_1 - \underline{v}}{2}) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } b_1 < \underline{v}, \\ \dfrac{9(b_1 - \underline{v})^2}{4(\bar{v} - \underline{v})^2}, & \text{если } \underline{v} \le b_1 \le \dfrac{1}{3}\underline{v} + \dfrac{2}{3}\bar{v}, \\ 1, & \text{если } b_1 > \dfrac{1}{3}\underline{v} + \dfrac{2}{3}\bar{v}. \end{cases}$$

Мы видим, что если игрок 2 и игрок 3 используют правила b_2^* и b_3^*, то ожидаемый выигрыш игрока 1 составит

$$Eu_1(b_1 | b_2^*, b_3^*) = P_1(b_1 > b_2^* \text{ и } b_1 > b_3^*)(v_1 - b_1) =$$

$$= P_1(b_1 > b_2^*) P_1(b_1 > b_3^*)(v_1 - b_1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } b_1 < \underline{v}, \\ \dfrac{9(b_1 - \underline{v})^2 (v_1 - b_1)}{4(\bar{v} - \underline{v})^2}, & \text{если } \underline{v} \le b_1 \le \dfrac{1}{3}\underline{v} + \dfrac{2}{3}\bar{v}, \\ v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > \dfrac{1}{3}\underline{v} + \dfrac{2}{3}\bar{v}. \end{cases}$$

График этой функции при $\underline{v} < b_1 < \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\bar{v}$ изображен на рис. 5.4.

Ясно, что эта функция достигает своего максимума во внутренней точке замкнутого интервала $\left[\underline{v}, \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\bar{v}\right]$. После дифференцирования получим

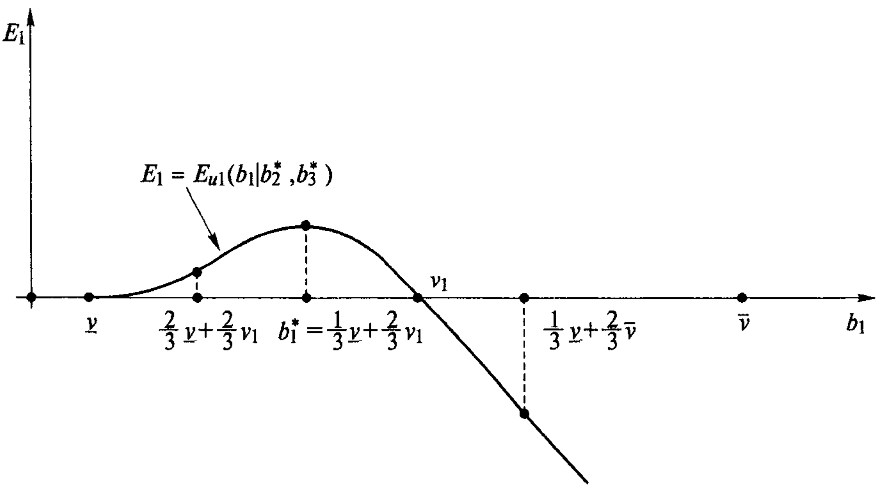


Рис. 5.4. График ожидаемой функции выигрыша Eu_1

$$E_1'(b_1|b_2^*, b_3^*) = \frac{9(b_1 - \underline{v})^2(-3b_1 + \underline{v} + 2v_1)}{4(\bar{v} - \underline{v})^2},$$

$$E_1''(b_1|b_2^*, b_3^*) = \frac{9(-3b_1 + 2\underline{v} + v_1)}{2(\bar{v} - \underline{v})^2}.$$

Решение уравнения $E_1'(b_1|b_2^*, b_3^*) = 0$ приводит к единственной критической точке $b_1^* == \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}v_1$, расположенной внутри интервала $\left[\underline{v}, \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\bar{v}\right]$. Поскольку вторая производная отрицательна, т.е. удовлетворяет условию

$$E_1''(b_1^*|b_2^*, b_3^*) = \frac{9}{2(\bar{v} - \underline{v})^2}(\underline{v} - v_1) < 0,$$

можно заключить, что $E_1(\cdot|b_2^*, b_3^*)$ имеет максимум в точке b_1^*. Это является доказательством того факта, что тройка правил предложения цены

$$b_i^*(v_i) = \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}v_i, \quad i = 1,2,3,$$

является (симметричным) равновесием по Нэшу.

Вернемся к закрытому аукциону второй цены. Поскольку участник с наибольшей ставкой выигрывает аукцион и выплачивает вторую по величине ставку, функция выигрыша задается как

$$u_i(b_1, \dots, b_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i < m_{-i}, \\ \frac{1}{r}(v_i - m_{-i}), & \text{если } b_i = m_{-i} \text{ и всего } r \text{ финалистов}, \\ v_i - m_{-i}, & \text{если } b_i > m_{-i}, \end{cases}$$

где $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ — произвольный вектор ставок, а $m_{-i} = \max_{j \neq i} b_j$.

Для аукциона первой цены поведение участников в случае индивидуальных частных оценок отличается от того, что происходит в случае совершенной информации. Однако предложения цены в аукционе второй цены совпадают в обоих случаях. В самом деле, как и в случае полной информации, участники будут делать ставки на уровне своей истинной оценки и в случае индивидуальных частных оценок. Об этом замечательном результате будет упомянуто еще раз; до этого мы встречались с ним в примере 2.32 и в части 2 теоремы 5.4.

Теорема 5.7. *В закрытом аукционе второй цены оптимальной ставкой участника i является v_i. То есть $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — равновесие по Нэшу.*

Доказательство. В примере 2.32 мы показали, что $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — слабо доминирующая стратегия, и следовательно, является равновесием по Нэшу. Представим здесь прямое доказательство того, что вектор $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — равновесие по Нэшу. Как обычно, будем предполагать, что $v_n \le v_{n-1} \le \cdots \le v_2 \le v_1$. Будем различать два случая.

Случай I. $v_2 < v_1$.

В этом случае $u_1(v) = v_1 - v_2 > 0$ и $u_i(v) = 0$ при всех $i \ne 1$. Участник $i \ne 1$ может получить ненулевой выигрыш только в том случае, если поставит $b_i = v_1$ или $b_i > v_1$. Но $u_i(v_1, v_{-i}) = \frac{1}{2}(v_i - v_1) < 0$, и для $b_i > v_1$ имеем: $u_i(b_i, v_{-i}) = v_i - v_1 < 0$. Следовательно, ни один из участников $i \ne 1$, уклонившись, не может увеличить своего выигрыша, если остальные участники придерживаются своих стратегий.

Теперь проверим участника 1. Нетрудно видеть, что изменение ставки участника 1 на $b_1 < v_2$, $b_1 = v_2$ или на $b_1 > v_2$, при том что стратегии остальных участников неизменны, приведет к выигрышу в 0, $\frac{1}{2}(v_1 - v_2)$, или $v_1 - v_2$. Это не больше, чем выигрыш $u_1(v)$.

Случай II. $v_2 = v_1$.

Предположим, что имеется r финалистов. Заметим, что в этом случае $u_i(v) = 0$ для любого участника i. Если кто-то из финалистов j предложит цену $b_j \le v_1$, то ясно, что $u_j(b_j, v_{-j}) = 0$. А если финалист j предложит цену $b_j > v_1$, то $u_j(b_j, v_{-j}) = v_j - v_1 = 0$. Таким образом, мы показали, что ни один из финалистов не сможет увеличить своего выигрыша при условии, что стратегии остальных участников неизменны.

Если участник i не является финалистом, то (если все остальные остаются при своих стратегиях $b_i = v_i$) ставки $b_i < v_1$, $b_1 = v_1$ и $b_1 > v_1$ приводят, соответственно, к выигрышам 0, $\frac{1}{r+1}(v_i - v_1) < 0$ и $(v_i - v_1) < 0$. Ни один из получаемых выигрышей не больше, чем $u_i(v_i, v_{-i}) = 0$. ■

Стоит иметь в виду, что в закрытом аукционе второй цены есть и другие равновесия по Нэшу, отличающиеся от $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$; см. упражнение 17 в разделе 2.8.

Сравнивая закрытые аукционы первой и второй цены, мы выяснили, что они приводят к различным результатам в случае индивидуальных частных оценок, это отличается от случая полной информации. Мы видели, что в этом случае закрытый аукцион первой цены приносит такой же доход аукционисту, как и закрытый аукцион второй цены. Как показывает следующий пример, в случае индивидуальных частных оценок закрытый аукцион второй цены может приносить больший доход.

Пример 5.8. Рассмотрим аукцион из примера 5.6. Если бы картина была выставлена на закрытый аукцион второй цены, то игрок 1 поставил бы 200 тыс. долл., а игрок 2 поставил бы 250 тыс. долл. Таким образом, за картину можно было бы выручить 200 тыс. долл., что значительно больше, чем 175 тыс. долл., полученных в случае аукциона первой цены.

Однако заметим, что если оценка участника 2 составит 350 тыс. долл., то наибольшая ставка в аукционе первой цены составит 225 тыс. долл., и аукционист получит 225 тыс. долл. Если же провести аукцион второй цены, то выручка составит по-прежнему 200 тыс. долл. Следовательно, трудно определить, какой тип аукциона сможет принести больший доход в случае индивидуальных частных оценок. ■

Этот пример наводит на мысль, что аналогичная ситуация может возникнуть при сравнении английского аукциона с аукционом второй цены или с аукционом с индивидуальными частными оценками. Проведем такого рода сравнение.

Пример 5.9. Вернемся к примеру 5.6, в котором рассматриваются два участника с оценками $v_1 = 250\ 000$ долл. и $v_2 = 200\ 000$ долл. При использовании английского аукциона торги остановятся, как только ставка превысит 200 тыс. долл. Таким образом, аукционист получил бы чуть более 200 тыс. долл. за выставленный на аукцион предмет. В случае закрытого аукциона, где ожидания участников относительно оценок других участников равномерно распределены на интервале [100 000,500 000], выигрывающая ставка составляет всего 175 тыс. долл. Следовательно, в этом случае английский аукцион приносит аукционисту значительно больший доход, чем закрытый аукцион.

Если изменить параметры на следующие:

$$\underline{v} = 200\,000\,,\ v_1 = 300\ 000 \text{ и } v_2 = 200\ 000,$$

то в закрытом аукционе выигрывающая ставка составит 250 тыс. долл., в то время как в английском аукционе — лишь 200 тыс. долл. Таким образом, в этом случае закрытый аукцион позволяет получить существенно бóльшую выручку, чем английский аукцион. ■

Из рассмотренного примера становится ясно, что в некоторых случаях закрытый аукцион может превзойти английский аукцион, в то время как в других случаях — наоборот. Поэтому нет ничего удивительного в том, что на практике часто используются оба вида аукционов, поскольку какой именно тип аукциона окажется лучше в точки зрения аукциониста, зависит от ожидаемой группы участников и их оценок выставленного на аукцион предмета. Иначе говоря, выгода аукциониста зависит от организации проводимого аукциона.

Упражнения

1. Рассмотрим аукцион, описанный в примере 5.6. Предположим, что появился третий участник аукциона с оценкой v_3 = 125 000 долл. Изменятся ли торги? Предпочтет ли аукционист новые торги старым?
2. Рассмотрим аукцион с индивидуальными частными оценками и двумя участниками. Каждый участник предполагает, что оценка другого участника — равномерно распределенная на интервале $[\underline{v}, \overline{v}]$ случайная величина, где $\overline{v} - \underline{v} = 1$. Участник 1 также знает, что функция предложения цены участника 2 имеет вид
$$b_2(v_2) = (v_2 - \underline{v})^2 + \overline{v},$$
но участник 2 ничего не знает о функции предложения цены участника 1. Найдите наилучший отклик $b_1(v_1)$ участника 1. [Ответ: $b_1(v_1) = \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}v_1$.]
3. Предположим, что два игрока предлагают цену за некоторое произведение искусства и знают, что его реальная стоимость лежит в интервале 300 тыс. и 800 тыс. долл. и что оценка этого произведения искусства другим участником равномерно распределена на интервале [300 000,800 000]. Игрок 2 знает, что функция предложения цены игрока 1 имеет вид
$$b_1(v_1) = \frac{1}{400\,000}(v_1 - 300\,000)^2 + 300\,000,$$
но игрок 1 не знает функцию предложения цены игрока 2. Найдите оптимальные ставки игроков, если их истинные оценки равны v_1 = 500 000 долл. и v_2 = 600 000 долл. [Ответ: $b_1 = b_2 = 400\,000$ долл.]
4. Убедитесь, что график ожидаемой функции выигрыша игрока 1
$$Eu_1(b_1|b_2^*, b_3^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_1 < \underline{v}, \\ \dfrac{9(b_1 - \underline{v})^2(v_1 - b_1)}{4(\overline{v} - \underline{v})^2}, & \text{если } \underline{v} \le b_1 \le \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\overline{v}, \\ v_1 - b_1, & \text{если } b_1 > \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{2}{3}\overline{v} \end{cases}$$
действительно совпадает с тем, что изображено на рис. 5.4. Найдите наибольший ожидаемый выигрыш игрока 1. [Ответ: наибольший ожидаемый выигрыш игрока $\frac{(v_1 - \underline{v})^3}{3(\overline{v} - \underline{v})^2}$.]
5. Предположим, что в аукционе с индивидуальными частными оценками с n участниками каждый участник знает, что оценки других участников — случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[\underline{v}, \overline{v}]$. Покажите, что вектор ставок
$$\left(\frac{1}{n}\underline{v} + \frac{n-1}{n}v_1, \frac{1}{n}\underline{v} + \frac{n-1}{n}v_2, \ldots, \frac{1}{n}\underline{v} + \frac{n-1}{n}v_n\right)$$
является симметричным равновесием по Нэшу этого аукциона. Каков ожидаемый выигрыш каждого участника в этом равновесии по Нэшу? Что произойдет с этим равновесием по Нэшу и ожидаемыми выигрышами при $n \to \infty$?

5.4. Аукционы с общими оценками

Аукцион с общими оценками — это закрытый аукцион первой цены, в котором:

- исходная реальная оценка предмета одинакова для всех участников (откуда и название: аукцион с общими оценками);
- участники получают информацию о реальной стоимости предмета посредством «сигналов».

В аукционе с общими оценками участники наименее информированы. Кроме того, что они не знают оценок других участников, они также не уверены и относительно своих собственных оценок. В подобных аукционах каждый участник получает нечеткий зашумленный сигнал о реальной стоимости предмета и на его основе формирует свою предварительную оценку. Следовательно, на аукционах с общими оценками оценка участника i рассматривается как случайная величина не только другими участниками, но также и им самим.

Типичным примером аукционов с общими оценками является аукцион по аренде нефтеносных участков континентального шельфа. В этих аукционах участники — обычно крупные нефтедобывающие компании и некоторые независимые предприниматели — не имеют точных представлений о ценности соответствующих участков. Они формируют прогноз относительно ценности участков на основе наблюдаемых ими сигналов. Правительство США, которое и выставляет на аукционы участки океана, предоставляет юридическое описание сдающегося в аренду участка. Сбор информации об участке, которая может быть им необходима, ложится на плечи самих участников аукциона. В данном случае информация, предоставляемая геологами и сейсмологами, обычно является зашумленным сигналом, наблюдаемым участниками.

В дальнейшем ценность объекта (случайная величина) будет обозначаться через v, сигнал, получаемый участником i, — через ω_i. Ценность объекта v коррелирует с произвольным сигналом ω согласно **совместной плотности распределения** $f(v,\omega)$, которая известна всем участникам. Функция плотности $f(v,\omega)$ представляет вероятность одновременного наблюдения v и ω[1]. Проиллюстрируем понятие плотности совместного распределения на следующем примере. Предположим, что v может принимать два значения, скажем, v_1 и v_2, а участник получает один из трех возможных сигналов: ω_1, ω_2 и ω_3. Таблица 5.1 задает плотность совместного распределения $f(v,\omega)$ в этих точках[2].

Предположим, что участник наблюдает сигнал ω_2. *Что он может сказать о ценности объекта v?* Полученная информация позволяет пересмотреть ве-

---

[1] Если мы предположим, что область значений v — интервал $[0,\infty]$ и область значений сигнала ω — интервал $[0,1]$, то, согласно теории вероятностей функция плотности $f:[0,\infty)\times[0,1]\to R$ удовлетворяет

$$0 \le f(v,\omega) \le 1 \text{ для всех } v,\ \omega \text{ и } \int_0^1\int_0^\infty f(v,\omega)\,dv\,d\omega = 1.$$

[2] Заметим, что «дискретная» плотность совместного распределения удовлетворяет условию $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} f(v_i,\omega_j) = 1$.

Таблица 5.1. Совместная плотность распределения

v/ω	v_1	v_2
ω_1	0,1	0,2
ω_2	0,2	0,2
ω_3	0,2	0,1

роятности возможных значений v_1 и v_2. Новые вероятности, известные как **условные вероятности**, вычисляются (как это было показано в разделе 3.3) по формуле

$$P(v_1|\omega_2) = \frac{P(v = v_1 \text{ и } \omega = \omega_2)}{P(\omega = \omega_2)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5,$$

где

$$P(\omega = \omega_2) = P(v = v_1 \text{ и } \omega = \omega_2) + P(v = v_2 \text{ и } \omega = \omega_2) =$$
$$= 0,2 + 0,2 = 0,4\,.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$P(v_2|\omega_2) = 0,5\,.$$

Таким образом, **условная ожидаемая ценность** v дает ценность v объекта при условии получения сигнала ω_2.

$$E(v|\omega_2) = v_1\,P(v_1|\omega_2) + v_2\,P(v_2|\omega_2) = 0,5v_1 + 0,5v_2$$

предоставляет ответ на поставленный вопрос.

Вернемся к обсуждению аукциона с общими оценками. Как уже отмечалось, участник предлагает цену после того, как получает сигнал, передающий ему некоторую информацию относительно ценности объекта. Наблюдение сигнала ω позволяет ему переоценить ожидаемую ценность объекта. Эта пересмотренная ожидаемая ценность, т.е. условная ожидаемая ценность v, будет обозначаться, как и ранее, через $E(v|\omega)$. Если v может принимать конечное число значений $v_1,\ldots,v_k$, то

$$E(v|\omega_j) = \sum_{i=1}^{k} v_i\,P(v_i|\omega_j),$$

где

$$P(v_i|\omega_j) = \frac{P(v = v_i \text{ и } \omega = \omega_j)}{P(\omega = \omega_j)}$$

и

$$P(\omega = \omega_j) = \sum_{i=1}^{k} P(v = v_i \text{ и } \omega = \omega_j).$$

Если v является непрерывной случайной величиной, то суммы следует заменить на интегралы[1].

Следовательно, при наблюдении сигнала ω_1 и данном векторе ставок $(b_1,\ldots,b_n)$ ожидаемый выигрыш участника 1 составит

[1] В нашем случае $E(v|\omega) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} sP(s|\omega)ds$, где $P(s|\omega) = \dfrac{f(v,\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t,\omega)dt}$.

$$E_1(b_1,\dots,b_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{r}[E(v|\omega_1)-b_1], & \text{если участник 1 среди } r \text{ финалистов},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

В общем случае ожидаемый выигрыш участника i имеет вид

$$E_i(b_1,\dots,b_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{r}[E(v|\omega_i)-b_i], & \text{если участник } i \text{ среди } r \text{ финалистов},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Поскольку участник i не может наблюдать сигналы других участников, он обусловливает свою ставку только сигналом ω_i. Таким образом, ставка каждого игрока является функцией от наблюдаемого им сигнала. То есть ставка игрока 1 — это функция $b_1(\omega_1)$, а ставка игрока i — это функция $b_i(\omega_i)$.

Как и в аукционе с индивидуальными частными оценками, анализ поведения участников на аукционе с общими оценками будет проведен для случая двух участников. В дальнейшем для упрощения модели будем предполагать следующее.

- *Наблюдаемые участниками сигналы являются независимыми реализациями случайных величин, равномерно распределенных на интервале* $[0,1]$.
- *Известно, что выставляемый на аукцион объект может иметь только две возможные ценности: высокую ценность* v_h *и низкую ценность* v_l.
- *Совместная плотность распределения случайной величины* v *и сигнала* ω *задается формулой*

$$f(v,\omega)=\begin{cases}\omega, & \text{если } v=v_h,\\ 1-\omega, & \text{если } v=v_l.\end{cases}$$

При такой совместной плотности распределения вероятность того, что ценность высокая, — возрастающая функция величины сигнала. Например, при $\omega=\frac{1}{2}$ условная вероятность того, что ценность является высокой, составляет

$$P\left(v_h|\omega=\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(v_h,\frac{1}{2}\right)}{f\left(v_h,\frac{1}{2}\right)+f\left(v_l,\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Аналогично, при $\omega=\frac{3}{4}$ условная вероятность составляет $P\left(v_h|\omega=\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$. Таким образом, мы видим, что получаемые сигналы полезны для определения возможной реальной ценности объекта. Поскольку сигналы ω равномерно распределены на $[0,1]$, то до получения участником сигнала априорная вероятность того, что цена является высокой, задается как

$$P(v=v_h)=\int_0^1 f(v_h,\omega)d\omega=\int_0^1 \omega\, d\omega=\frac{1}{2}.$$

После получения сигнала $\omega=k$ условная вероятность того, что $v=v_h$, составляет

$$P(v_h|k)=\frac{f(v_h,k)}{f(v_h,k)+f(v_l,k)}=\frac{k}{k+(1-k)}=k.$$

Следовательно, условная ожидаемая ценность v при наблюдении сигнала $\omega = k$ равна

$$E(v|\omega = k) = P(v_h|k)v_h + [1 - P(v_h|k)]v_l = kv_h + (1-k)v_l.$$

Поскольку сигнал является числом из интервала $[0,1]$, вполне естественно спросить, смогут ли участники найти «оптимальную» стратегию, являющуюся линейной по наблюдаемым сигналам? Прежде чем продолжить обсуждение «линейных правил предложения цены», поговорим о цели каждого участника. Предположим, что в общем случае $b_1 = b_1(\omega_1)$ и $b_2 = b_2(\omega_2)$. Посмотрим на цель участника 1 при условии, что участник 2 пользуется правилом предложения цены $b_2 = b_2(\omega_2)$. Он выиграет аукцион в случае, если $b_1 > b_2$, проиграет, если $b_1 < b_2$, и выиграет с вероятностью 50% в случае $b_1 = b_2$. Следовательно, вероятность выигрыша

$$P_1(b_1 \geq b_2) = P_1(b_1 \geq b_2(\omega_2)).$$

Таким образом, когда участник 1 наблюдает сигнал ω_1, а участник 2 использует правило $b_2(\omega_2)$, ожидаемый выигрыш участника 1 при ставке b_1 равен

$$Eu_1(b_1|b_2(\omega_2)) = P_1(b_1 \geq b_2)[E(v|\omega_1) - b_1) + P_1(b_1 < b_2) \times 0 =$$
$$= P_1(b_1 \geq b_2(\omega_2))[\omega_1 v_h + (1-\omega_1)v_l - b_1].$$

Аналогично, когда игрок 2 наблюдает сигнал ω_2, а игрок 1 использует правило $b_1(\omega_1)$, ожидаемый выигрыш игрока 2 при ставке b_2 равен

$$Eu_2(b_2|b_1(\omega_1)) = P_2(b_2 \geq b_1(\omega_1))[\omega_2 v_h + (1-\omega_2)v_l - b_2].$$

Как и ранее, говорят, что пара правил предложения цены $(b_1^*(\omega_1), b_2^*(\omega_2))$ в аукционе с общими оценками является **равновесием по Нэшу**, если

$$Eu_1(b_1|b_2^*(\omega_2)) \leq Eu_1(b_1^*|b_2^*(\omega_2))$$

для любого правила предложения цены $b_1(\omega_1)$ игрока 1 и

$$Eu_2(b_2|b_1^*(\omega_1)) \leq Eu_2(b_2^*|b_1^*(\omega_1))$$

для любого правила предложения цены $b_2(\omega_2)$ игрока 2.

Перейдем к важнейшему результату относительно равновесия по Нэшу в аукционе с общими оценками.

Правило предложения цены в аукционе с общими оценками в случае двух участников

Если участники наблюдают сигналы ω_1 и ω_2, являющиеся реализациями равномерно распределенной случайной величины на интервале $[0,1]$, то пара линейных правил предложения цены

$$b_1 = v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_1 \quad \text{и} \quad b_2 = v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_2$$

образует симметричное равновесие по Нэшу в аукционе с общими оценками.

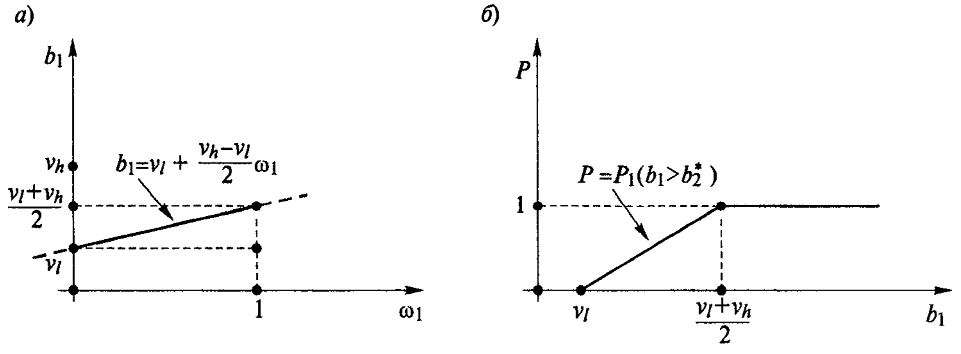


Рис. 5.5

Чтобы убедиться в этом, положим

$$b_1^*(\omega_1) = v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_1 \text{ и } b_2^*(\omega_2) = v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_2.$$

График функции $b_1^*(\omega_1)$ изображен на рис. 5.5, *а*.

Чтобы установить, что пара правил предложения цен $(b_1^*(\omega_1), b_2^*(\omega_2))$ действительно является равновесием по Нэшу, достаточно показать, что

$$Eu_1(b_1 | b_2^*(\omega_2)) \le Eu_1(b_1^* | b_2^*(\omega_2))$$

для любого правила предложения цены $b_1(\omega_1)$. Заметим сначала, что

$$P_1(b_1 \ge b_2^*(\omega_2)) = P_1\left(b_1 \ge v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_2\right) = P_1\left(\omega_2 \le \frac{2(b_1 - v_l)}{v_h - v_l}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } b_1 < v_l, \\ \dfrac{2(b_1 - v_l)}{v_h - v_l}, & \text{если } v_l \le b_1 \le \dfrac{1}{2}(v_l + v_h), \\ 1, & \text{если } b_1 > \dfrac{1}{2}(v_l + v_h), \end{cases}$$

где вторая строка в последнем равенстве следует из того, что ω_2 — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0,1]$. Рисунок 5.5, *б* иллюстрирует график этой функции. Теперь, если положим $c = \omega_1 v_h + (1 - \omega_1)v_l$, то ожидаемый выигрыш участника 1 составит

$$E_1(b_1) = Eu_1(b_1 | b_2^*(\omega)) = P_1(b_1 \ge b_2^*(\omega_2))(c - b_1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } b_1 < v_l, \\ \dfrac{2(b_1 - v_l)}{v_h - v_l}(c - b_1), & \text{если } v_l \le b_1 \le \dfrac{1}{2}(v_l + v_h), \\ (c - b_1), & \text{если } b_1 > \dfrac{1}{2}(v_l + v_h). \end{cases}$$

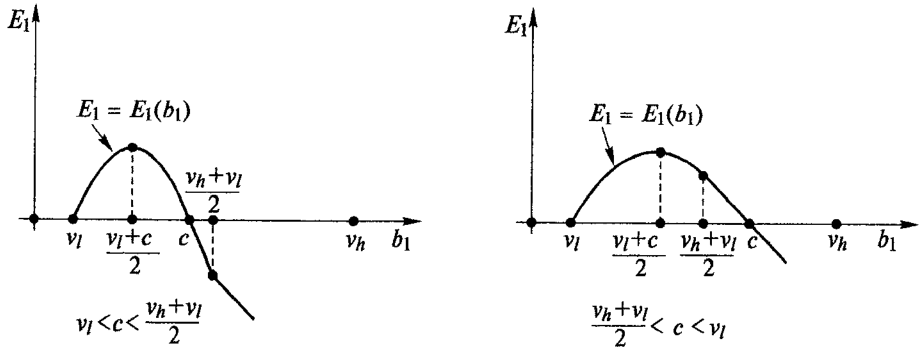


Рис. 5.6

График функции $E_1(\cdot)$ изображен на рис. 5.6.

Ясно, что максимум $E_1(\cdot)$ достигается в точке внутри интервала $\left[v_l, \frac{v_l+v_h}{2}\right]$. Значит, функция $E_1(\cdot)$ имеет максимум, когда

$$E_1'(b_1) = \frac{2(c - b_1 - b_1 + v_l)}{v_h - v_l} = \frac{2(2v_l + (v_h - v_l)\omega_1 - 2b_1)}{v_h - v_l} = 0 .$$

Это означает, что $2v_l + (v_h - v_l)\omega_1 - 2b_1 = 0$, или что $b_1 = v_l + \frac{1}{2}(v_h - v_l)\omega_1$. Таким образом, мы установили, что правило $b_1^*(\omega_1)$ максимизирует ожидаемый выигрыш участника 1. В силу симметричности ситуации аналогичное правило верно и для участника 2. Другими словами, пара правил предложения цены $(b_1^*(\omega_1), b_2^*(\omega_2))$ в действительности образует равновесие по Нэшу.

Рассмотрим теперь исходы аукциона с общими оценками, в котором участники используют оптимальные правила предложения цены.

Пример 5.10. На аукцион выставлена картина, предположительно Ренуара. Однако существуют сомнения относительно ее подлинности, и даже у экспертов нет единого мнения на этот счет. Если картина действительно подлинная, то она стоит 1 млн долл., в противном случае это хорошая копия, и она может быть продана только за 100 тыс. долл. В приобретении картины заинтересованы два индивида, которые запросили разрешения на проверку ее подлинности. Тестирования проводились независимо друг от друга. Потенциальные покупатели предлагают цену за картину на основании сигнала, полученного от теста. Сигналы — случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[0,1]$. Совместная плотность распределения цены картины и сигнала имеет вид

$$f(v,\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если } v = 1\,000\,000, \\ 1-\omega, & \text{если } v = 100\,000. \end{cases}$$

В результате проведенных тестов участник 1 получил сигнал $\omega_1 = \frac{1}{2}$, а участник 2 получил сигнал $\omega_2 = \frac{3}{4}$. Если участники используют равновесные по Нэшу правила предложения цены, то участник 1 предложит цену

$$b_1 = v_l + \frac{1}{2}(v_l + v_h)\omega_1 = 100\,000 + 225\,000 = 325\,000 \text{ долл.}$$

В свою очередь, участник 2 предложит цену $b_2 = 100\,000 + 412\,500 =$ $= 512\,500$ долл. Следовательно, участник 2 выиграет аукцион и заплатит 512 500 долл.

Заметим, что сумма, которую получает аукционист, зависит от сигнала, который получает победитель. ■

Перейдем теперь к обсуждению общего случая с n участниками, которые независимо предлагают цену за объект торга после получения своего собственного частного сигнала о его ценности. Как и в случае двух участников, предполагается общеизвестным, что возможные значения реальной ценности объекта — это либо v_l, либо v_h. Пусть $(b_1,\ldots,b_n)$ — вектор предложений цен. Как и ранее, положим

$$m_{-i} = \max_{j \neq i} b_j .$$

Напомним также, что ожидаемый выигрыш участника i составляет

$$E_i(b_1,\ldots,b_n) = \begin{cases} \frac{1}{r}[E(v|\omega_i) - b_i], & \text{если участник } i \text{ среди } r \text{ финалистов,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Как и раньше, симметричность ситуации подсказывает, что можно попытаться найти симметричное равновесие по Нэшу. Следующие правила предложения цены оказываются равновесными в случае n участников.

Правила предложения цены в аукционе с общими оценками в случае n участников

Предположим, что в аукционе с общими оценками участники наблюдают сигналы, которые представляют собой независимые реализации равномерно распределенной случайной величины $\omega \in [0,1]$. Совместная плотность распределения цены объекта v и сигнала ω задана как

$$f(v,\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если } v = v_h, \\ 1-\omega, & \text{если } v = v_l. \end{cases}$$

Тогда линейные правила ставок

$$b_i = v_l + \frac{n-1}{n}(v_h - v_l)\omega_i\,, \quad i = 1,\ldots,n$$

образуют симметричное равновесие по Нэшу в аукционе с общими оценками.

Упражнения

1. Рассмотрим аукцион с общими оценками из n участников. Все участники получают сигналы, являющиеся независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале $[0,1]$. Пред-

положим, что каждый участник руководствуется линейным правилом $b_i = v_l + \frac{n-1}{n}(v_h - v_l)\omega_i$.

(a) Покажите, что вероятность выигрыша аукциона участником i равна

$$P_i(b_i > m_{-i}) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i < v_l, \\ \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-1} \dfrac{(b_i - v_l)^{n-1}}{(v_h - v_l)^{n-1}}, & \text{если } v_l \le b_i \le v_l + \dfrac{n-1}{n}(v_h - v_l), \\ 1, & \text{если } b_i > v_l + \dfrac{n-1}{n}(v_h - v_l), \end{cases}$$

где $m_{-i} = \max\{b_j : j \neq i\}$.

(b) Покажите, что ожидаемый выигрыш участника i составляет

$$E_i(b_i | m_{-i}) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_i < v_l, \\ \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-1} \dfrac{(b_i - v_l)^{n-1}(c_i - b_i)}{(v_h - v_l)^{n-1}}, & \text{если } v_l \le b_i \le v_l + \dfrac{n-1}{n}(v_h - v_l), \\ (c_i - b_i), & \text{если } b_i > v_l + \dfrac{n-1}{n}(v_h - v_l), \end{cases}$$

где $c_i = \omega_i v_h + (1 - \omega_i)v_l$.

(c) Изобразите графики функций $P_i(b_i > m_{-i})$ и $E_i(b_i | m_{-i})$.

2. Предположим, что в аукционе с общими оценками n участников наблюдают сигналы, являющиеся независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале $[0,1]$. Совместная плотность распределения цены предмета v и сигнала ω задана как

$$f(v,\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если } v = v_h, \\ 1-\omega, & \text{если } v = v_l. \end{cases}$$

Покажите, что симметричные линейные правила

$$b_i = v_l + \frac{n-1}{n}(v_h - v_l)\omega_i, \quad i = 1,\ldots,n,$$

образуют симметричное равновесие по Нэшу.

3. Рассмотрим аукцион с общими оценками из двух участников. Общеизвестно, что цена предмета может принимать значения v_l и v_h. Все участники получают сигналы, являющиеся независимыми реализациями случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале $[0,1]$. Совместная плотность распределения цены предмета v и сигнала ω имеет вид

$$f(v,\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если } v = v_h, \\ 1-\omega, & \text{если } v = v_l. \end{cases}$$

Пусть участник 2 использует правило $b_2(\omega_2) = a_2 + m_2\omega_2$, где $v_l \le a_2$, $m_2 > 0$ и $a_2 + m_2 \le v_h$. Каков наилучший отклик $b_1(\omega_1)$ участника 1?

4. Рассмотрим аукцион с общими оценками с двумя участниками. Совместная плотность распределения задается функцией

$$f(v,\omega)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}e^{-v(1+\omega^2)}, & \text{если } v\ge 0, \omega\ge 0,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

(a) Найдите условную ожидаемую оценку $E(v|\omega)$.
[Ответ: $E(v|\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}$.]

(b) Допустим, что участник 2 использует правило $b_2=\omega_2$, а участник 1 знает, что ω_2 — равномерно распределенная случайная величина на интервале $[0,1]$. Найдите ожидаемый выигрыш участника 1 и нарисуйте график. [Ответ:

$$Eu_1(b_1|b_2)=\begin{cases}0, & \text{если } b_1<0,\\ b_1[(1+\omega_1^2)^{-3}-b_1], & \text{если } 0\le b_1\le 1,\\ (1+\omega_1^2)^{-3}-b_1, & \text{если } b_1>1.]\end{cases}$$

(c) Как выглядит наилучшее правило предложения цены для участника 1 в допущениях пункта (b)? [Ответ: $b_1(\omega_1)=\dfrac{1}{2}(1+\omega_1^2)^{-3}$.]

5.5. Теорема об эквивалентности доходов

Мы видели, что аукционы могут принимать различные формы. Основными среди них являются английский аукцион, голландский аукцион, аукционы первой и второй цены. В предыдущих разделах достаточно детально обсуждались возможные выигрывающие предложения цен для таких аукционов и оптимальные стратегии предложения цены. Мы видели, что аукционы можно рассматривать как игры, и можно исследовать равновесие в этих играх и получить представление о том, какие предложения цены, вероятнее всего, будут сделаны в различных версиях аукционов. При этом мы обнаружили, что английский аукцион и аукцион второй цены порождают одинаковое выигрывающее аукцион предложение цены, равное второй по величине максимальной оценке. Это верно при любом типе информации относительно оценок оппонентов, которой обладают участники. Выигрывающее аукцион предложение цены в закрытом аукционе первой цены, как и в голландском аукционе, существенно отличается от выигрывающего аукцион предложения цены в английском аукционе или в аукционе второй цены в случае, когда участники не знают оценок других участников.

Мы изучали аукционы с точки зрения участников, а теперь будем рассматривать их с точки зрения аукциониста. Основной вопрос, на который аукционист хотел бы ответить, — это вопрос о том, какой тип аукциона приведет к наибольшему возможному доходу. Мы уже знаем, что доходы, которые аукционист ожидает получить от английского аукциона и аукциона второй цены, одинаковы, поскольку выигрывающее аукцион предложение цены в обоих аукционах — это вторая по величине максимальная оценка.

Труднее понять, каким будет ожидаемый доход от голландского аукциона и от закрытого аукциона первой цены. Ниже мы рассмотрим эти вопросы и покажем, что ожидаемые доходы аукциониста от четырех типов аукционов одинаковы, если оценки участников — независимые выборки из одного и того же распределения.

Выбирая тип аукциона, аукционист обычно не знает, каковы истинные оценки потенциальных покупателей. Однако он имеет достаточно хорошее представление о характере распределения, из которого эти оценки выбираются. Так, в случае продажи редкой картины аукционист не знает в точности, сколько готовы заплатить за нее присутствующие на аукционе покупатели, но хорошо представляет диапазон возможных значений таких оценок для этой картины. Так, может быть общепринятым, что картина стоит от одного до двух миллионов долларов. Аукционисту может быть даже известно, что оценки покупателей имеют равномерное распределение на этом интервале.

Начнем с вывода формулы ожидаемого дохода от аукциона второй цены и английского аукциона. Как и ранее, предполагаем, что оценка каждого из n участников — реализация непрерывной случайной величины, распределенной на интервале $[\underline{v}, \bar{v}]$. Предположим также, что распределение случайной переменной на этом интервале задается функцией распределения $F(\cdot)$, которая имеет плотность распределения $f(\cdot)$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Ожидаемый доход от аукциона второй цены и английского аукциона

Предположим, что в аукционе с n участниками оценки v_i — реализации случайных величин, независимо (и одинаково) распределенных на интервале $[\underline{v}, \bar{v}]$ согласно функции распределения $F(\cdot)$ с функцией плотности $f(\cdot)$. Тогда ожидаемый доход аукциониста в аукционе второй цены или английском аукционе равен

$$R_{SP} = n(n-1)\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} vF^{(n-2)}(v)(1-F(v))f(v)dv.$$

Чтобы показать это, заметим прежде всего, что если $v_1, \ldots, v_n$ — реализации n независимых (и одинаково распределенных) случайных величин — оценок участников, то существуют n случайных переменных $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, которые представляют, в порядке возрастания, наименьшее и т.д. вплоть до наибольшего значения случайных переменных $v_1, \ldots, v_n$. То есть

$$Y_1 = \min\{v_1, \ldots, v_n\},\ Y_n = \max\{v_1, \ldots, v_n\},$$

а Y_{n-1} тогда случайная величина, дающая вторую по величине оценку, так что $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_{n-1} < Y_n$. Совместное распределение этих порядковых статистик имеет вид[1]

$$g(y_1, \ldots, y_n) = n!f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n).$$

[1] Полное и детальное обсуждение порядковой статистики и вывод функции плотности совместного распределения можно найти в: [39, р. 196].

Функция плотности Y_{n-1}, второй по величине порядковой статистики, имеет вид[1]

$$g_{n-1}(y_{n-1}) = \int_{\underline{v}}^{y_1}\int_{\underline{v}}^{y_2}\dots\int_{\underline{v}}^{y_{n-1}}\int_{y_{n-1}}^{\bar{v}} n!f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)dy_1\dots dy_n =$$

$$= \frac{n!}{(n-2)!}[F(y_{n-1})^{(n-2)}(y_{n-1})(1-F(y_{n-1}))]f(y_{n-1}).$$

Следовательно, ожидаемое значение второй по величине максимальной оценки составляет

$$\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} g_{n-1}(y_{n-1})dy_{n-1} = n(n-1)\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} xF^{(n-2)}(x)(1-F(x))f(x)dx. \tag{5.1}$$

Поскольку вторая по величине максимальная оценка и есть то, что ожидает получить аукционист, то это также и ожидаемый доход от аукциона. Следующий пример детально объясняет выражение для ожидаемого дохода в формуле (5.1) для случая двух участников.

Пример 5.11. Рассмотрим случай двух участников, оценки которых выбираются независимо из интервала $[\underline{v}, \bar{v}]$ с одной и той же функцией распределения $F(\cdot)$ и плотностью $f(\cdot)$. В этом случае случайная величина, которая дает вторую по величине (максимальную оценку), равна $Y_1 = \min\{v_1, v_2\}$. Совместная плотность распределения двух независимых случайных величин v_1 и v_2 имеет вид $f(v_1)f(v_2)$. Пусть G_{Y_1} обозначает функцию распределения (случайной величины) Y_1. Тогда, заметив, что $Y_1 = v_1$, когда $v_1 < v_2$, и $Y_1 = v_2$, когда $v_2 < v_1$, получим

$$G_{Y_1}(v) = P(Y_1 < v) = P(Y_1 < v; v_1 < v_2) + P(Y_1 < v; v_2 < v_1) =$$

$$= \int_{\underline{v}}^{v}\int_{v_1}^{\bar{v}} f(v_1)f(v_2)dv_1dv_2 + \int_{\underline{v}}^{v}\int_{v_2}^{\bar{v}} f(v_1)f(v_2)dv_1dv_2 =$$

$$= \int_{\underline{v}}^{v} f(v_1)\left[\int_{v_1}^{\bar{v}} f(v_2)dv_2\right]dv_1 + \int_{\underline{v}}^{v} f(v_2)\left[\int_{v_2}^{\bar{v}} f(v_1)dv_1\right]dv_2 =$$

$$= \int_{\underline{v}}^{v} f(v_1)[1-F(v_1)]dv_1 + \int_{\underline{v}}^{v} f(v_2)[1-F(v_2)]dv_2 =$$

$$= 2\int_{\underline{v}}^{v} f(x)[1-F(x)]dx.$$

Таким образом, плотность распределения Y_1 в этом случае имеет вид $2f(y_1)[1-F(y_1)]$, а ожидаемый доход от аукциона второй цены равен

$$2\int_{\underline{v}}^{\bar{v}} xf(x)[1-F(x)]dx. \quad \blacksquare$$

Ожидаемый доход от закрытого аукциона первой цены находится, во-первых, с учетом замечания о том, что, в отличие от аукциона второй цены

[1] См. снова: [39, p. 139], где объясняется достаточно подробно, как выводится эта формула.

или английского аукциона, ожидаемое выигрывающее предложение цены не является второй по величине оценкой, а определяется оптимальными правилами предложения цены, используемыми участниками, а также из того, что выигрывающее предложение цены — это функция реализованного значения (предложения) участника с максимальной оценкой. Эти оптимальные правила были получены в разделе 5.3 для случая двух и трех участников при условии, что оценки покупателей — реализации независимых равномерно распределенных на интервале $[\underline{v},\bar{v}]$ величин. Теперь получим выражения для оптимальных предложений цены и выигрывающего предложения в аукционе первой цены для случая, когда оценки покупателей определяются произвольной функцией распределения $F(\cdot)$[1].

Пусть $b^*(\cdot)$ — правило предложения цены участников в симметричном равновесии (если такое равновесие существует). Предполагается, что $b^*(\cdot)$ строго возрастает по оценкам v участников. Если участник i предлагает цену b, то вероятность того, что это предложение окажется выигрывающим, равна

$$P(b > b^*(v_1)) \times \cdots \times P(b > b^*(v_{i-1})) \times P(b > b^*(v_{i+1})) \times \cdots \times P(b > b^*(v_n)).$$

Таким образом, если участник i используя стратегию предложения цены $b^*(\cdot)$, предлагает цену $b^*(q)$, то вероятность того, что это предложение наибольшее, равна

$$\begin{gathered} P(b^*(q) > b^*(v_1)) \times \cdots \times P(b^*(q) > b^*(v_{i-1})) \times \\ \times P(b^*(q) > b^*(v_{i+1})) \times \cdots \times P(b^*(q) > b^*(v_n)) = \\ = P(q > v_1) \times \cdots \times P(q > v_{i-1}) \times P(q > v_{i+1}) \times \cdots \times P(q > v_n) = F^{(n-1)}(q). \end{gathered}$$

Ожидаемый выигрыш участника i в случае, если он предлагает цену $b^*(q)$ и его оценка равна v, таким образом, равен

$$Eu_i(q,v) = F^{(n-1)}(q)(v - b^*(q)).$$

Условие первого порядка максимума тогда имеет вид

$$(n-1)F^{(n-2)}(q)f(q)(v - b^*(q)) - F^{(n-1)}(q)(b^*)'(q) = 0.$$

Для того чтобы $b^*(v)$ было равновесным правилом предложения цены, условия первого порядка должны выполняться при $q = v$. Следовательно, получаем

$$(n-1)F^{(n-2)}(v)f(v)(v - b^*(v)) - F^{(n-1)}(v)(b^*)'(v) = 0.$$

Это можно переписать как

$$(n-1)F^{(n-2)}(v)f(v)b^*(v) + F^{(n-1)}(v)(b^*)'(v) = (n-1)F^{(n-2)}(v)f(v)v,$$

откуда

$$\frac{d}{dv}F^{(n-1)}(v)b^*(v) = (n-1)F^{(n-2)}(v)f(v)dv. \tag{5.2}$$

[1] Другими словами, реализации независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(\cdot)$. — *Примеч. ред.*

Соотношение (5.2) должно выполняться для любого v. Следовательно,

$$F^{(n-1)}(v)b^*(v)=(n-1)\int_{\underline{v}}^{v} vF^{(n-2)}(v)f(v)dv+C,$$

где C — константа интегрирования. Из того, что $F^{(n-1)}(\underline{v})=0$ и $\int_{\underline{v}}^{\underline{v}} vF^{(n-2)}(v)f(v)dv=0$, заключаем, что $C=0$. В итоге получаем следующее соотношение (для $b^*(v)$):

$$F^{(n-1)}(v)b^*(v)=(n-1)\int_{\underline{v}}^{v} vF^{(n-2)}(v)f(v)dv,$$

что, в свою очередь, дает

$$b^*(v)=\frac{(n-1)}{F^{(n-1)}(v)}\int_{\underline{v}}^{v} xF^{(n-2)}(x)f(x)dx. \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) характеризует природу равновесного правила предложения цены в симметричном равновесии аукциона первой цены, если такое равновесие существует.

Равновесное правило предложения цены в аукционе первой цены

Предположим, что в аукционе с n участниками оценки v_i участников независимо распределены на интервале $[\underline{v},\overline{v}]$ согласно функции распределения $F(\cdot)$ с плотностью $f(\cdot)$. Тогда равновесное правило предложения цены в симметричном равновесии в закрытом аукционе первой цены имеет вид

$$b^*(v)=\frac{(n-1)}{F^{(n-1)}(v)}\int_{\underline{v}}^{v} xF^{(n-2)}(x)f(x)dx.$$

Посмотрим, как выглядит это соотношение в случае двух участников и равномерного распределения оценок на интервале $[\underline{v},\overline{v}]$. Сравним с результатами, полученными нами в разделе 5.3.

Пример 5.12. Рассмотрим случай, когда $n=2$ и $F(\cdot)$ — функция равномерного распределения на $[\underline{v},\overline{v}]$. Для $v\in[\underline{v},\overline{v}]$ имеем

$$F(v)=\frac{v-\underline{v}}{\overline{v}-\underline{v}} \text{ и } f(v)=\frac{1}{\overline{v}-\underline{v}}.$$

Из (5.3) получаем, что

$$b^*(v)=\frac{\overline{v}-\underline{v}}{v-\underline{v}}\int_{\underline{v}}^{v} xf(x)dx=\frac{\overline{v}-\underline{v}}{v-\underline{v}}\int_{\underline{v}}^{v}\frac{x}{\overline{v}-\underline{v}}dx=\frac{\overline{v}-\underline{v}}{v-\underline{v}}\times\frac{v^2-\underline{v}^2}{2(\overline{v}-\underline{v})},$$

откуда находим

$$b^*(v)=\frac{v+\underline{v}}{2}=\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}\underline{v}.$$

Заметим, что это правило в точности совпадает с полученным ранее в разделе 5.3 правилом. ■

Перейдем к характеризации величины ожидаемого дохода в закрытом аукционе первой цены. Ясно, что если все участники руководствуются равновесными правилами предложения цены, которые являются возрастающими по их оценкам функциями, то выигрывающее предложение цены будет сделано участником с самой высокой оценкой. Случайная величина, дающая максимальную оценку, является порядковой статистикой:

$$Y_n = \max\{v_1, \dots, v_n\}.$$

Плотность распределения[1] этой порядковой статистики имеет вид

$$g(y_n) = \frac{n!}{(n-1)!}[F(y_n)]^{(n-1)} f(y_n).$$

Следовательно, ожидаемый доход в закрытом аукционе первой цены выражается как

$$R_{FP} = n\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} b^*(x)[F(x)]^{n-1} f(x)dx.$$

Если подставить сюда выражение $b^*(x)$ из (5.3), то получим

$$R_{FP} = n\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} \frac{n-1}{[F(v)]^{(n-1)}}[\int_{\underline{v}}^{v} x[F(x)]^{(n-2)} f(x)dx][F(v)]^{(n-1)} f(v)dv =$$

$$= n(n-1)\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\int_{\underline{v}}^{v} x[F(x)]^{(n-2)} f(x)f(v)dx\,dv.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Ожидаемый доход в закрытом аукционе первой цены

Предположим, что в аукционе с n участниками оценки v_i независимо распределены на интервале $[\underline{v}, \overline{v}]$ согласно функции распределения $F(\cdot)$ с плотностью $f(\cdot)$. Тогда ожидаемый доход в закрытом аукционе первой цены равен

$$R_{FP} = n(n-1)\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\int_{\underline{v}}^{v} x[F(x)]^{(n-2)} f(x)f(v)dx\,dv.$$

Теперь, имея представление об ожидаемых доходах от аукциона второй цены и закрытого аукциона первой цены, можем сравнить их. При детальном рассмотрении обнаруживается, что ожидаемые доходы оказываются одинаковыми, даже несмотря на то что правила предложения цены различны. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.13. *Если оценки участников v_i выбираются независимо из интервала $[\underline{v}, \overline{v}]$, и имеют одну и ту же функцию распределения $F(\cdot)$ и плотность $f(\cdot)$, то ожидаемые доходы в аукционе второй цены и закрытом аукционе первой цены одинаковы.*

[1] Полное и детальное обсуждение порядковой статистики и вывод функции плотности совместного распределения можно найти в следующей книге: [39, p. 197], где подробно обсуждается эта функция плотности.

Доказательство. Покажем, что $R_{FP} = R_{SP}$.

$$R_{FP} = n(n-1)\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\int_{\underline{v}}^{v} x[F(x)]^{(n-2)} f(x) f(v) dx\, dv =$$

$$= n(n-1)\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\left[\int_{v}^{\overline{v}} f(y)dy\right] x[F(x)]^{(n-2)} f(x)dx .$$

Это следует из того, что область интегрирования двойного интеграла

$$\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\int_{\underline{v}}^{v} x[F(x)]^{(n-2)} f(x)\, dx\, f(v)\, dv$$

— это множество

$$R = \{(v,x) : \underline{v} \le v \le \overline{v} \text{ и } \underline{v} \le x \le v\},$$

что эквивалентно

$$\{(x,y) : \underline{v} \le x \le \overline{v} \text{ и } v \le y \le \overline{v}\}.$$

Таким образом,

$$R_{FP} = n(n-1)\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\left[\int_{v}^{\overline{v}} f(y)dy\right] x[F(x)]^{(n-2)} f(x)dx =$$

$$= n(n-1)\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} x[F(x)]^{(n-2)} f(x)(1-F(x))dx = R_{SP} . \quad \blacksquare$$

Пример 5.14. Рассмотрим случай двух участников, оценки которых независимо и равномерно распределены на интервале $[\underline{v}, \overline{v}]$, т.е. случай, когда $n = 2$ и $F(\cdot)$ — функция равномерного на $[\underline{v}, \overline{v}]$ распределения. Ожидаемый доход от аукциона второй цены равен

$$R_{SP} = 2\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} vf(v)(1-F(v))\,dv = 2\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} v\left(\frac{1}{\overline{v}-\underline{v}}\right)\left(1-\frac{v-\underline{v}}{\overline{v}-\underline{v}}\right)dv =$$

$$= \frac{2}{(\overline{v}-\underline{v})^2}\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} (v\overline{v} - v^2)\,dv = \frac{2}{(\overline{v}-\underline{v})^2}\left(\frac{\overline{v}v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_{\underline{v}}^{\overline{v}} =$$

$$= \frac{1}{3(\overline{v}-\underline{v})^2}[\overline{v}^3 - 3\overline{v}\underline{v}^2 + 2\underline{v}^3] .$$

Ожидаемый доход от закрытого аукциона первой цены равен

$$R_{FP} = 2\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\int_{\underline{v}}^{v}[xf(x)dx] f(v)\,dv = 2\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\int_{\underline{v}}^{v}[x\frac{1}{\overline{v}-\underline{v}}dx]\frac{1}{\overline{v}-\underline{v}}dv =$$

$$= \frac{2}{(\overline{v}-\underline{v})^2}\int_{\underline{v}}^{\overline{v}}\int_{\underline{v}}^{v} x\, dx\, dv = \frac{2}{(\overline{v}-\underline{v})^2}\int_{\underline{v}}^{\overline{v}} \frac{v^2-\underline{v}^2}{2} dv =$$

$$= \frac{1}{(\overline{v}-\underline{v})^2}\left(\frac{v^3}{3} - \underline{v}^2 v\right)\Bigg|_{\underline{v}}^{\overline{v}} = \frac{1}{3(\overline{v}-\underline{v})^2}[\overline{v}^3 - 3\overline{v}\underline{v}^2 + 2\underline{v}^3] .$$

Получается одно и то же выражение для двух типов аукционов. $\blacksquare$

В наших рассуждениях несколько раз упоминался голландский аукцион, однако этот тип аукциона не сравнивался с другими. Напомним, что голландский аукцион начинается с того, что аукционист запрашивает высокую цену, непрерывно понижая ее до тех пор, пока кто-то из участников не согласится на эту цену. На этом аукцион заканчивается, и предмет продается участнику, который первым сделал предложение, по цене, равной этому предложению. Хотя на первый взгляд может показаться, что голландский аукцион отличается от закрытого аукциона первой цены, при тщательном анализе становится ясно, что выигрывающее предложение цены в голландском аукционе в точности совпадает с выигрывающим предложением в закрытом аукционе первой цены. Оптимальное правило предложения цены в симметричном равновесии в голландском аукционе в точности такое же, как и оптимальное правило в симметричном равновесии в закрытом аукционе первой цены, поскольку функции ожидаемого выигрыша одинаковы. Но из этого следует, что ожидаемые выигрывающие предложения цены совпадают, следовательно, ожидаемые доходы от голландского аукциона и закрытого аукциона первой цены одинаковы. Мы установили следующий факт.

> В аукционе с n участниками, оценки которых имеют одинаковое и независимое распределение на интервале $[\underline{v}, \overline{v}]$, ожидаемый доход от закрытого аукциона первой цены, аукциона второй цены, английского аукциона и голландского аукциона одинаков.

Упражнения

1. Рассмотрим аукцион второй цены, на который выставлен старинный автомобиль. Три участника проявили интерес к участию в торгах. Известно, что стоимость автомобиля находится в интервале между 20 тыс. долл. и 40 тыс. долл. Каждому из участников разрешается делать ставку один раз. Если аукционист верит, что оценки трех покупателей равномерно распределены на интервале [\$20 000; \$40 000].
   (a) Какова ожидаемая величина выигрывающего (аукцион) предложения цены?
   (b) Какой доход от аукциона ожидает получить аукционист?
   (c) Как вы думаете, изменятся ли эти величины, если провести английский аукцион?
2. Рассмотрим тот же аукцион, что и в предыдущем упражнении, но теперь с пятью участниками. Аукционист полагает, что оценки участников равномерно распределены на интервале [\$20 000; \$40 000].
   (a) Какова ожидаемая величина выигрывающего (аукцион) предложения цены?
   (b) Какой доход ожидает получить аукционист?
   (c) Отличаются ли значения в случае с пятью участниками от случая с тремя участниками? Объясните свой ответ.

3. Известный аукционный дом «Сотби» планирует выставить на аукцион оригинал картины Ван Гога. Стоимость картины находится в пределах от 1,5 млн до 2,2 млн долл. Два участника проявили интерес к приобретению картины, и аукционный дом считает, что их оценки равномерно распределены на интервале [\$1,5 млн; \$2,2 млн]. Нам известно, что «Сотби» продает картины на английском аукционе.

(a) Какова ожидаемая величина выигрывающего аукцион предложения?

(b) Каков ожидаемый доход?

4. Если «Сотби» решает продать картину, описанную в предыдущем упражнении, через закрытый аукцион первой цены, то

(a) Какова ожидаемая величина выигрывающего аукцион предложения цены?

(b) Каков ожидаемый доход?

(c) Отличаются ли полученные значения от тех, что ожидаются в случае английского аукциона?

5. Пусть, выставляя на аукцион картину, описанную в предыдущих упражнениях, «Сотби» обнаруживает, что нашлось пять заинтересованных в ее покупке участников, оценки которых равномерно распределены на [\$1,5 млн; \$2,2 млн]. Найдите:

(a) ожидаемое значение выигрывающего (аукцион) предложения цены;

(b) ожидаемый доход от аукциона.

6. Нами были получены выражения ожидаемого дохода для четырех различных типов аукционов. Что происходит с ожидаемым доходом при увеличении числа участников?

7. Получите выражение для ожидаемого выигрывающего (аукцион) предложения цены в аукционе второй цены с n участниками при условии, что оценки покупателей равномерно распределены на $[\underline{v}, \overline{v}]$.

8. Получите выражение для ожидаемого выигрывающего (аукцион) предложения цены в закрытом аукционе первой цены с n участниками при условии, что оценки покупателей равномерно распределены на $[\underline{v}, \overline{v}]$.

9. Получите выражение ожидаемого дохода от аукциона с n участниками при условии, что оценки покупателей равномерно распределены на $[\underline{v}, \overline{v}]$.

10. Рассмотрим закрытый аукцион первой цены с двумя участниками, оценки которых равномерно распределены на $[\underline{v}, \overline{v}]$. Предположим, что одному из участников, скажем участнику 1, стало известно, что оценка участника 2 на самом деле равномерно распределена на $\left[\underline{v}, \frac{\underline{v}+\overline{v}}{2}\right]$; однако участник 2 не знает о том, что это известно участнику 1. Какое предположение можно сделать о стратегии участника 2? Найдите оптимальную выигрывающую стратегию участника 1.

11. Рассмотрим закрытый аукцион первой цены с двумя участниками. Оценка участника 1 равномерно распределена на интервале $[\underline{v}, \bar{v}]$, а оценка участника 2 равномерно распределена на интервале $\left[\underline{v}, \frac{\underline{v}+\bar{v}}{2}\right]$. Предположим, что участники руководствуются линейными (относительно их оценок) правилами предложения цены.

(a) Запишите выражение ожидаемого выигрыша для каждого из участников.

(b) Каковы оптимальные правила предложения цены каждым из участников?

(c) Найдите равновесные правила предложения цены.

(d) Как отличается равновесная пара правил от равновесия в симметричном случае?

Глава 6 Торг

В прошлой главе мы использовали аппарат теории игр, для того чтобы понять, как функционируют аукционы различных типов. Мы увидели, что аукционы представляют собой особые формы рынка, в которых покупатели делают ставки на товар. Однако существуют другие формы рынков, где место участников, делающих ставки, занимают продавцы и покупатели, которые выступают с предложениями и контрпредложениями. Для понимания и анализа подобных рынков требуется подход, отличающийся от использованного в прошлой главе. В этой главе мы рассмотрим несколько моделей торга и торговли. Рынок жилья, как и рынок автомобилей, является хорошим примером рынков, где товар продается только после того, как обе стороны достигли взаимного согласия по поводу цены. В этих случаях соглашение достигается после некоторого торга.

Когда индивид входит на рынок жилья, скажем в качестве покупателя, он изучает дома, которые продаются по объявленным ценам. После этого он принимает решение о том, какой из домов является наиболее подходящим, учитывая свой бюджет. Приняв решение, покупатель делает предложение продавцу, причем обычно по цене, меньшей, чем объявленная. В свою очередь продавец либо соглашается, либо делает контрпредложение, которое находится между исходной ценой и предложением покупателя. Покупатель либо принимает контрпредложение, либо делает еще одно контрпредложение, либо может завершить процесс торга. Другим примером рынка, использующим подобный механизм, является рынок автомобилей, где покупатель также начинает процесс торга с цены, объявленной продавцом. Ясно, что такие рынки сильно отличаются от аукционов и, как мы увидим далее, могут быть описаны последовательными (динамическими) играми. Современные теории торга широко распространены и применимы не только к рынкам жилья и автомобилей, но также позволяют решать такие задачи, как дележ пирога, использование общих ресурсов и распределение затрат.

Мы начнем с обсуждения *аксиоматических теорий* торга. Эти теории исходят из предположения о том, что торги должны обладать некоторыми разумными свойствами. Как правило, они используются при распределении денег или ресурсов или при распределении затрат среди индивидов, где механизм распределения должен удовлетворять некоторым требованиям справедливости или эффективности.

В разделе 6.1 будет рассмотрено *решение игры торга по Нэшу*. В разделе 6.2 мы изучим монотонность при торге и *решение игры торга по Калаи — Смородинскому*. В разделах 6.3 и 6.4 исследуем понятия *ядра* и *вектора значений Шепли*, которые можно рассматривать как концепции, использующие элементы торга между коалициями или группами. Наконец, в разделе 6.5

мы обсудим торги, фундаментальным элементом которых является фактор стратегический. Поскольку процессы торга являются последовательными, будем называть их *динамическими торгами.*

6.1. Решение по Нэшу

Здесь мы представим и обсудим решение следующей классической задачи.

• *Как разделить пирог между несколькими индивидами?*

Поставленная таким способом задача является достаточно специфической. Но на самом деле она дает ключ к решению других более сложных задач.

Мы начнем с обсуждения решения по Нэшу в задаче торга между двумя участниками. Такого рода задача возникает во многих ситуациях. Когда продавец и покупатель ведут переговоры о цене дома, они имеют дело именно с задачей торга. Таким же образом две страны проводят торги касательно условий торговли, игрок в баскетбол обсуждает контракт с владельцами команды, две корпорации договариваются о деталях совместного предприятия — это все примеры торга между двумя участниками.

Во всех ситуациях, связанных с торгом, обычно есть множество альтернативных исходов (результатов) S, и обе стороны должны достичь соглашения, выбрав один из элементов этого множества. Как только соглашение достигнуто, торг окончен и обе стороны получают соответствующие выигрыши. В случае если они не могут достичь соглашения, результатом является статус-кво (исходное состояние, существующее положение. — *Примеч. пер.*), и мы говорим, что имеет место *разногласие.* Ясно, что стороны не станут участвовать в торгах, если во множестве S не существует элементов, которые приносят обеим сторонам бóльшие выигрыши, чем выигрыши в состояниях статус-кво. Статус-кво или **точка несогласия** торга[1], которая будет обозначаться через s_0, также является альтернативой из множества S. Если (d_1,d_2) — выигрыши в точке несогласия s_0, то интересующая нас часть S состоит из исходов, при которых обе стороны имеют бóльший выигрыш, чем (d_1,d_2). Теперь определим задачу торга следующим образом.

Определение 6.1. ***Задача торга между двумя участниками*** *(или просто торг) состоит из*

(1) *двух участников (или игроков), 1 и 2;*

(2) *множества S* ***доступных альтернатив*** *(или* ***результатов торга****, или просто* ***результатов****), имеющего точку несогласия $s_0 \in S$;*

(3) *функций полезности $u_i : S \to R$, таких что*

(a) $u_1(s) \geq d_1 \equiv u_1(s_0)$ *и* $u_2(s) \geq d_2 \equiv u_2(s_0)$ *для всех* $s \in S$,

(b) *хотя бы для одного* $s \in S$ *имеем* $u_1(s) > d_1$ *и* $u_2(s) > d_2$.

---

[1] Альтернативные термины в русскоязычной литературе: точка разногласия, точка разлада. — *Примеч. пер.*

Заметим, что условие 3(b) гарантирует наличие доступной альтернативы, при которой выигрыши обоих участников строго выше, чем в точке несогласия s_0. Это условие делает торг нетривиальным. Формально торг можно представить в виде тройки

$$B = ((S, s_0), u_1, u_2),$$

где (S, s_0), u_1 и u_2 удовлетворяют свойствам определения 6.1.

Далее отметим, что каждой альтернативе $s \in S$ соответствует пара выигрышей $(u_1(s), u_2(s))$. Эту пару называют **аллокацией полезностей**[1]. Таким образом, каждому торгу можно поставить в соответствие множество аллокаций полезностей

$$\mathcal{U} = \{(u_1(s), u_2(s)) : s \in S\}.$$

В случае когда необходимо указать, к какой игре принадлежит $\mathcal{U}$, вместо $\mathcal{U}$ будем писать $\mathcal{U}_s$. Ясно, что $\mathcal{U}$ является подмножеством плоскости u_1u_2. Множество $\mathcal{U}$ играет важную роль в данном разделе.

Как и в любой игре, мы заинтересованы в поиске «удовлетворительного» решения. Формально определим **решение** игры торга как **правило** (т.е. функцию), которое ставит в соответствие игре B подмножество $s(B)$ множества всех результатов S. Можно трактовать $s(B)$ как совокупность взаимно удовлетворительных соглашений торга B или просто как **решения** игры торга. Очевидно, что любое такое правило должно удовлетворять определенным условиям рациональности. Обсудим некоторые из этих условий.

Для начала обратимся к эффективности по Парето.

- **Парето-оптимальность (или Парето-эффективность):** *элемент* $s^* \in S$ *является* ***эффективным по Парето*** (*или Парето-оптимальным*), *если не существует другого элемента* $s \in S$, *такого что*

  (1) $u_1(s) \geq u_1(s^*)$ *и* $u_2(s) \geq u_2(s^*)$;

  (2) $u_i(s) > u_i(s^*)$ *для хотя бы одного игрока i.*

Результат торга, являющийся Парето-эффективным, гарантирует, что не существует возможности увеличить полезность одного из участников, не уменьшая полезности другого. Иначе говоря, если результат Парето-эффективен, то улучшение состояния одного из участников неминуемо ведет к ухудшению состояния другого.

Определение 6.2. *Правило* $s(\cdot)$ *является* ***Парето-эффективным***, *если для любой игры* $B = ((S, s_0), u_1, u_2)$ *подмножество «решений»* $s(B)$ *состоит исключительно из Парето-оптимальных исходов.*

Другим разумным свойством правила является независимость от несвязанных альтернатив. Чтобы установить это свойство, нам потребуется понятие подыгры торга. **Подыгрой** торга $B = ((S, s_0), u_1, u_2)$ называется любая игра торга $B' = ((T, s_0), u_1, u_2)$, где T — подмножество S и $s_0 \in T$.

[1] Альтернативные термины в русскоязычной литературе: вектор достижимых полезностей, вектор доступных полезностей. Соответственно: множество векторов достижимых полезностей, множество векторов доступных полезностей или просто множество достижимых полезностей или множество доступных полезностей. — *Примеч. пер.*

- **Независимость от несвязанных альтернатив**[1]: *Правило $s(\cdot)$ удовлетворяет **условию независимости от несвязанных альтернатив**, если для любой игры торга $B = ((S, s_0), u_1, u_2)$ и любой подыгры торга $B' = ((T, s_0), u_1, u_2)$, такой что $s(B) \subseteq T$, выполнено*

$$s(B') = s(B).$$

Это условие гарантирует, что любое приемлемое правило должно оставаться приемлемым, если отбросить все альтернативы, менее привлекательные для обоих игроков.

Можно предположить также, что решение игры торга не должно зависеть от изменений масштаба функций полезности. Следовательно, приходим к следующему свойству.

- **Независимость от линейных преобразований:** *Правило $s(\cdot)$ не зависит от линейных преобразований, если для любой игры торга $B = ((S, s_0), u_1, u_2)$ и любых функций полезности вида $u_i' = b_i u_i + a_i$, где a_i и $b_i > 0$ — константы, игра торга*

$$B' = ((S, s_0), u_1', u_2')$$

удовлетворяет $s(B') = s(B)$.

Таким образом, на правило не будет оказывать влияния изменение масштаба или единиц измерения полезности. Другими словами, правило не должно быть чувствительным к линейным преобразованиям функций полезности.

Теперь мы можем перейти к построению важного правила принятия решений, которое удовлетворяет всем перечисленным требованиям. С каждой игрой торга $B = ((S, s_0), u_1, u_2)$ ассоциируем функцию $g_B : S \to R$, определенную как

$$g_B(s) = [u_1(s) - d_1] \times [u_2(s) - d_2],$$

где $d_1 = u_1(s_0)$ и $d_2 = u_2(s_0)$. Пусть $\sigma(B)$ — множество точек максимума функции g_B, т.е.

$$\sigma(B) = \{s \in S : g_B(s) = \max_{t \in S} g_B(t)\}.$$

Заметим, что если g_B не имеет ни одной точки максимума на множестве S, то $\sigma(B) = \varnothing$ — пустое множество.

Определение 6.3. *Правило $\sigma(\cdot)$ называется **правилом** решения (**принятия решений**) **Нэша**[2], и в любой игре торга B точки множества $\sigma(B)$ (если таковые имеются) называются **решениями по Нэшу*** игры B.

Хорошим математическим свойством множества аллокаций полезностей

$$U = \{(u_1(s), u_2(s)) : s \in S\},$$

достаточным для непустоты $\sigma(B)$, является его компактность. Множество аллокаций полезности U является **компактным**, если оно ограничено (т.е. целиком содержится внутри некоторого круга) и замкнуто (т.е. содержит

[1] Другой термин, используемый в русскоязычной литературе, — независимость от посторонних альтернатив. — *Примеч. пер.*

[2] Альтернативный термин в русскоязычной литературе: правило коллективного выбора. — *Примеч. пер.*

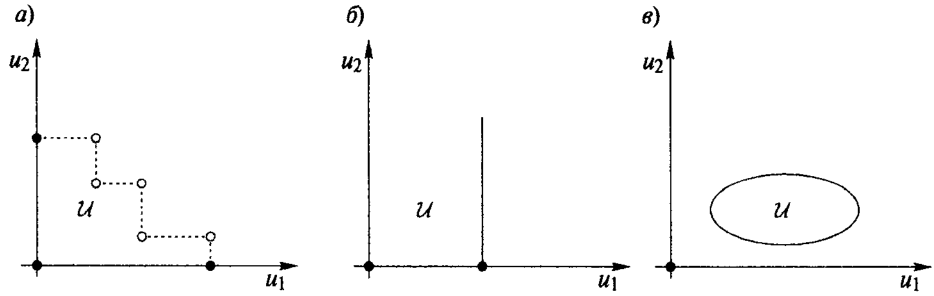


Рис. 6.1. Незамкнутое ограниченное множество (*а*); замкнутое неограниченное множество (*б*); компактное множество (*в*)

все свои граничные точки). Несколько примеров множества $\mathcal{U}$ представлено на рис. 6.1. Предположение о компактности позволяет гарантировать, что непрерывная на $\mathcal{U}$ функция всегда достигает своего максимума и минимума. Доказательство этого свойства можно найти в любом учебнике по дифференциальному исчислению. Формально оно выглядит так.

- *Непрерывная функция $f : X \to R$ на компакте X достигает своего максимума и минимума. То есть существуют $x_1, x_2 \in X$, такие что*
$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$
для любых $x \in X$.

Таким образом, если множество алллокаций полезностей $\mathcal{U}$ торга B является компактным, то непрерывная функция $g : \mathcal{U} \to R$, определенная как
$$g(u_1, u_2) = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2),$$
имеет хотя бы одну точку максимума. То есть существует некоторая пара $(u_1^*, u_2^*) \in \mathcal{U}$, такая что
$$g(u_1, u_2) \le g(u_1^*, u_2^*)$$
для любых $(u_1, u_2) \in \mathcal{U}$. Теперь заметим, что любое $s^* \in S$, такое что $u_1(s^*) = u_1^*$ и $u_2(s^*) = u_2^*$, удовлетворяет $s^* \in \sigma(B)$. Это означает, что множество $\sigma(B)$ не пусто, поэтому любая игра торга B с компактным множеством аллокаций полезностей имеет хотя бы одно решение по Нэшу.

Установим первую часть центрального результата, полученного Джоном Нэшем[1]. Она описывает основные свойства правила решения по Нэшу.

Теорема 6.4 (теорема Нэша). *В классе всех игр торга с компактным множеством аллокаций полезностей правило решения Нэша $\sigma(\cdot)$ обладает следующими свойствами: $\sigma(B)$ не пусто; Парето-оптимально; не зависит от несвязанных альтернатив; не зависит от линейных преобразований.*

Доказательство. Рассмотрим игру торга B с компактным множеством аллокаций полезностей $\mathcal{U}$ и положим
$$M = \max\{g_B(s) : s \in S\},$$

[1] The bargaining problem // Econometrica. 1950. Vol. 18. P. 155–162.

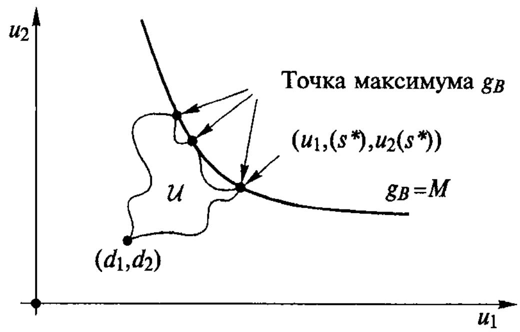


Рис. 6.2

где $g_B(s)=[u_1(s)-d_1][u_2(s)-d_2]$. Как уже говорилось, в этом случае $\sigma(B)$ не пусто. Рассмотрим $s^*\in\sigma(B)$, т.е. $g_B(s^*)=M$. Геометрическая иллюстрация ситуации приведена на рис. 6.2.

Покажем методом от противного, что s^* эффективно по Парето. Пусть найдется некоторое s, такое что $u_1(s)>u_1(s^*)$ и $u_2(s)\ge u_2(s^*)$. Поскольку существует доступная альтернатива $t\in S$, удовлетворяющая $u_1(t)>d_1$ и $u_2(t)>d_2$, то $g_B(s^*)\ge g_B(t)>0$. Из последнего следует, что $u_1(s^*)-d_1>0$ и $u_2(s^*)-d_2>0$, и, следовательно,

$$u_1(s)>u_1(s^*)>d_1 \text{ и } u_2(s)\ge u_2(s^*)>d_2.$$

Имеем далее

$$g_B(s)=[u_1(s)-d_1][u_2(s)-d_2]>[u_1(s^*)-d_1][u_2(s^*)-d_2]=g_B(s^*),$$

что противоречит выбору точки s^* как точки максимума функции g_B. Следовательно, s^* является эффективной по Парето.

Чтобы убедиться в том, что правило Нэша $\sigma(\cdot)$ не зависит от несвязанных альтернатив, рассмотрим подыгру $B'=((T,s_0),u_1,u_2)$. В соответствии с определением подыгры $T\subseteq S$ и, кроме того, $g_{B'}=g_B$ на T. В частности, если $\sigma(B)$ (множество всех точек максимума g_B на множестве S) таково, что $\sigma(B)\subseteq T$, то $\sigma(B')$ (множество точек максимума $g_{B'}$ на T) должно совпадать с $\sigma(B)$, т.е. $\sigma(B')=\sigma(B)$.

Что касается независимости от линейных преобразований, то пусть $u_i'(s)=b_iu_i(s)+a_i$ — произвольное линейное преобразование u_i с коэффициентом $b_i>0$ для каждого игрока i. Рассмотрим торг $B'=((S,s_0),u_1',u_2')$. Ясно, что $g_{B'}:S\to R$ задается формулой

$$g_{B'}(s)=[u_1'(s)-b_1d_1-a_1][u_2'(s)-b_2d_2-a_2].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}g_{B'}(s)&=[u_1'(s)-b_1d_1-a_1][u_2'(s)-b_2d_2-a_2]=\\&=[b_1u_1(s)+a_1-b_1d_1-a_1][b_2u_2(s)+a_2-b_2d_2-a_2]=\\&=b_1b_2[u_1(s)-d_1][u_2(s)-d_2]=b_1b_2g_B(s).\end{aligned}$$

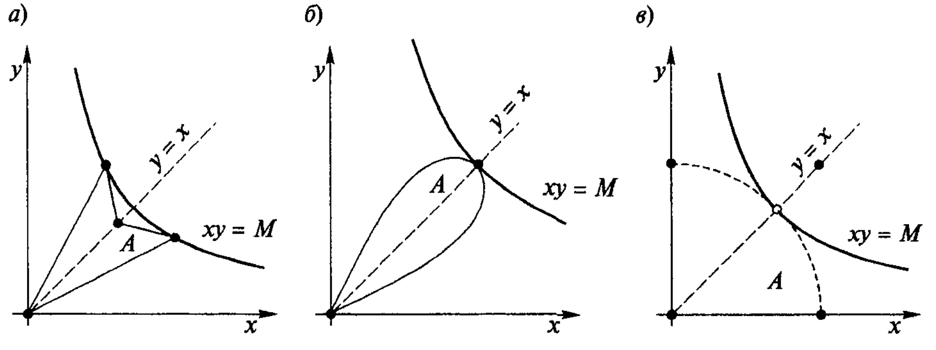


Рис. 6.3. Симметричное, компактное невыпуклое множество (*а*); симметричное, компактное и выпуклое множество (*б*); симметричное, незамкнутое, ограниченное и выпуклое множество (*в*)

Таким образом, $g_{B'}(s) = b_1 b_2 g_B(s)$ для любых $s \in S$. Заметим, что любой результат $x^* \in S$ максимизирует g_B тогда и только тогда, когда он максимизирует $g_{B'}$. Последнее влечет равенство $\sigma(B') = \sigma(B)$. ■

Напомним, что подмножество A плоскости xy называется

(1) **выпуклым**, если оно содержит весь отрезок, соединяющий любые две его точки;

(2) **симметричным**, если $(x, y) \in A$ влечет $(y, x) \in A$.

С геометрической точки зрения симметричность множества означает симметричность относительно биссектрисы $y = x$. Эти свойства показаны на рис. 6.3. (Мы также указали точки максимума функции $u = xy$ на этих множествах, если они есть.)

Для того чтобы ввести четвертое условие для правила решения, нам понадобится следующее определение.

Определение 6.5. *Игра торга B называется*

(1) ***выпуклой****, если множество аллокаций полезностей выпукло и компактно*;

(2) ***симметричной****, если $d_1 = d_2$ и множество аллокаций полезностей симметрично и компактно.*

Теперь мы готовы сформулировать четвертое условие приемлемости для игр торга.

- **Симметричность:** *Правило $s(\cdot)$ называется* ***симметричным****, если для любой симметричной игры торга B выполняется условие $u_1(s) = u_2(s)$ для любого $s \in s(B)$.*

Таким образом, правило решения симметрично, если в любой симметричной игре торга оно обходится с участниками одинаково в том смысле, что если оба участника имеют один и тот же выигрыш в точке несогласия, то они должны получить одинаковый выигрыш в любой точке согласия.

Вторая часть теоремы Нэша формулируется следующим образом.

Теорема 6.6 (теорема Нэша). *Если B — выпуклая игра торга, то существует единственная аллокация полезностей (u_1^*, u_2^*), такая что*

$$\sigma(B) = \{s \in S : u_1(s) = u_1^* \text{ и } u_2(s) = u_2^*\}.$$

Кроме того, если B — симметричная игра торга, то $u_1^* = u_2^*$.

В частности, правило решения Нэша $\sigma(\cdot)$ в классе выпуклых и симметричных игр торга является не только определенным, эффективным по Парето, независящим от несвязанных альтернатив и независимым от линейных преобразований, но и симметричным.

Доказательство. Пусть B — выпуклая игра торга. Рассмотрим непрерывную функцию $g_B : \mathcal{U} \to R$, определенную как

$$g_B(u_1, u_2) = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2).$$

Поскольку $\mathcal{U}$ выпукло и компактно, g_B имеет единственную точку максимума (u_1^*, u_2^*); см. упражнение 12 в конце раздела.

Теперь предположим, что выпуклая игра торга B является кроме того и симметричной. По определению $d_1 = d_2$, и $(u_2^*, u_1^*) \in \mathcal{U}$ тоже является точкой максимума g_B. Поскольку точка максимума единственна, то $(u_1^*, u_2^*) = (u_2^*, u_1^*)$. Отсюда следует, что $u_1^* = u_2^*$ для любого выпуклой симметричной игры торга. ■

Геометрическую интерпретацию заключений теоремы можно увидеть на рис. 6.4. Для более наглядного представления о правиле решения Нэша рассмотрим простой пример.

Пример 6.7. Предположим, что два индивида хотят поделить некоторую сумму денег, скажем, 100 долл. Если они не смогут договориться о дележе, то никто не получит ни цента. Допустимое множество торга состоит из всех пар (m_1, m_2) неотрицательных вещественных чисел, таких что $m_1 + m_2 \le 100$, где m_i — то количество денег, которое получит участник i. Таким образом,

$$S = \{(m_1, m_2) : m_1 \ge 0, m_2 \ge 0, m_1 + m_2 \le 100\}.$$

Полезность каждого участника определяется количеством денег, которое он получает. Следовательно, функции полезности участников имеют вид

$$u_1(m_1, m_2) = m_1 \text{ и } u_2(m_1, m_2) = m_2.$$

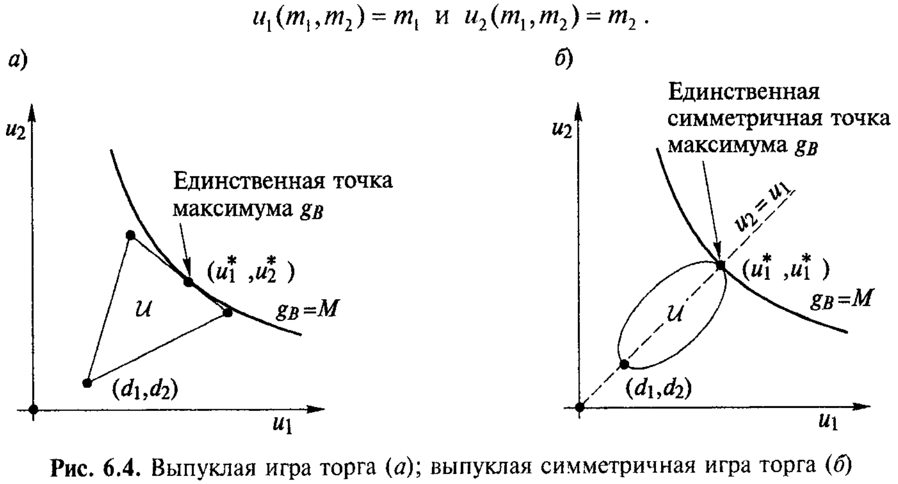


Рис. 6.4. Выпуклая игра торга (*а*); выпуклая симметричная игра торга (*б*)

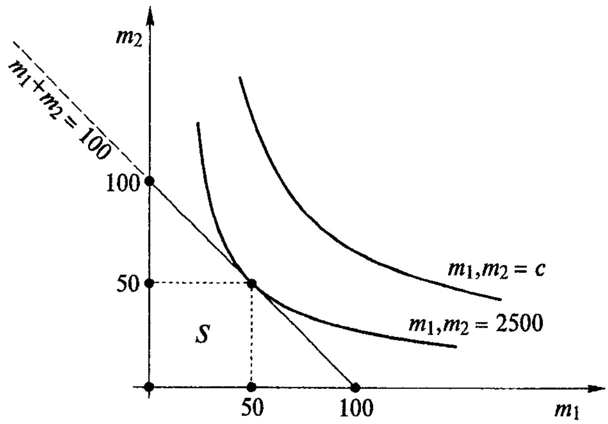


Рис. 6.5

Заметим, что если стороны не достигнут соглашения, то игроки получат $d_1 = d_2 = 0$. Ясно, что рассматриваемая игра торга является выпуклой и симметричной (см. рис. 6.5). Кроме того, имеем

$$g(m_1, m_2) = u_1(m_1, m_2)u_2(m_1, m_2) = m_1 m_2 .$$

По теореме 6.6, существует единственная точка максимума функции g, которая и является единственным решением по Нэшу. Этот дележ оптимален по Парето, не зависит от несвязанных альтернатив, не зависит от линейных преобразований и симметричен. Единственная точка максимума g это $m_1^* = m_2^* = 50$. Следовательно, согласно решению по Нэшу, в рассматриваемой игре торга необходимо дать каждому участнику по 50 долл. (см. рис. 6.5). ■

Сила теоремы 6.6 состоит в утверждении, что любая симметричная выпуклая игра торга имеет единственное решение, удовлетворяющее всем желаемым условиям. Это хорошо просматривается на примере 6.7. Любой дележ (m_1, m_2) 100 долл., такой что $m_1 + m_2 = 100$, эффективен по Парето, не зависит от несвязанных альтернатив и не зависит от линейных преобразований. Однако единственной парой, удовлетворяющей симметрии, является $m_1 = m_2 = 50$ долл. Это ярко подчеркивает идею теоремы Нэша: правило решения Нэша — единственное симметричное решение для любой симметричной и выпуклой игры торга. Более того, можно показать, что правило решения Нэша является единственным правилом решения с этим свойством; см. упражнение 11 в конце раздела.

Рассмотрим пример еще одного торга.

Пример 6.8. Индивид указал цену продажи дома в 120 тыс. долл. Его резервная цена дома 100 тыс. долл. Он знает, что продавать дом по цене, меньшей 100 тыс. долл., — это хуже, чем не продавать вовсе. Потенциальный покупатель готов отдать за этот дом 120 тыс. долл., что совпадает с его резервной ценой. Однако, конечно, ему хотелось бы заплатить меньше.

Мы имеем дело с задачей торга, где два участника могут получить суммарный выигрыш в размере 20 тыс. долл. Вопрос состоит в том, как следует их поделить. Если выигрыши участников представляют собой количество получаемых ими денег, то (в соответствии с решением Нэша) оба участника согласятся поделить 20 тыс. долл. поровну и совершить сделку по цене 110 тыс. долл. Таким образом, решение игры торга по Нэшу дает интуитивно удовлетворительный результат и четкий ответ в задаче ценообразования на рынке жилья. ■

В предыдущем примере нашлось единственное решение по Нэшу, которое удовлетворяет требованиям эффективности по Парето, независимости от несвязанных альтернатив, независимости от линейных преобразований и симметричности. В самом деле, решение по Нэшу дает в точности то решение, которое, по-нашему мнению, и должно иметь место. Во многих случаях, однако, этот подход к задаче торга не позволяет получить удовлетворительного решения. Следующий пример показывает, почему это может происходить, и подчеркивает важность предположения о выпуклости в теореме 6.6.

Пример 6.9. Предположим, что пара (индивид A и индивид B) выбирает между походом на футбольный матч и посещением бродвейского шоу. Множество исходов имеет вид

$$S = \{\text{пойти на матч, пойти на шоссе, несогласие}\}.$$

Если они идут на шоу, то полезность индивида A составит $u_A = 4$, а полезность индивида B — $u_B = 1$. Если они идут на футбольный матч, то значения полезностей поменяются местами: $u_A = 1$ и $u_B = 4$. В случае полного несогласия полезности обоих $u_A = u_B = 0$.

При использовании подхода из теоремы 6.4 к решению задачи торга мы получим два решения:

(1) оба посетят бродвейское шоу;

(2) оба пойдут на футбольный матч.

И это все, что можно получить, опираясь на теорему 6.4. Однако можно утверждать, что в действительности этим индивидам стоит подбросить монетку, чтобы решить, куда пойти. Должна ли монетка быть при этом справедливой? То есть должны ли они решить пойти в определенное место с вероятностью $\frac{1}{2}$?

Пусть с вероятностью p участники решат пойти на шоу, а с вероятностью $1 - p$ — пойти на футбол. Тогда ожидаемые их выигрыши составят

$$Eu_A = 4 \times p + 1 \times (1-p) = 3p + 1\,;$$

$$Eu_B = 1 \times p + 4 \times (1-p) = 4 - 3p\,.$$

Если p выбирается с целью максимизации $(Eu_A - 0)(Eu_B - 0)$, то вероятность p должна быть точкой максимума функции

$$g(p) = (3p+1)(4-3p) = -9p^2 + 9p + 4\,.$$

Максимум функции достигается в том случае, если выполняются условия первого порядка

$$g'(p) = -18p + 9 = 0,$$

откуда получаем, что $p = 1/2$. Таким образом, действительно участникам нужно выбрать справедливую монетку. Как видим, использованный подход является разумным путем решения задачи торга, и мы обнаруживаем, что расширение множества альтернатив путем включения *совместной рандомизации или корреляции* приводит к более удовлетворительным решениям задачи торга. ■

Понятие корреляции, использованной в предыдущем примере, тесно связано с выпуклостью множества аллокаций полезности

$$\mathcal{U} = \{(u_1(s), u_2(s)) : s \in S\}.$$

Напомним, что **распределение вероятностей** на некотором множестве исходов $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ — это произвольный вектор $(p_1, p_2, \dots, p_k)$, такой что $p_i \geq 0$ для любого i и $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Теперь формально определим понятие корреляции.

Определение 6.10. ***Коррелированная аллокация полезностей*** *на множестве исходов* $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ *с распределением вероятностей* $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ *— это 2-мерный вектор*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} p_i u_1(s_i), \sum_{i=1}^{k} p_i u_2(s_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i (u_1(s_i), u_2(s_i)).$$

Множество всех коррелированных аллокаций полезности будем обозначать через $C(\mathcal{U})$.

Заметим, что любое распределение вероятностей $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ совместно рандомизирует альтернативы множества $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. В частности, коррелированная аллокация полезностей представляет собой не что иное, как пару ожидаемых полезностей относительно рандомизированного распределения вероятностей $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$. То есть

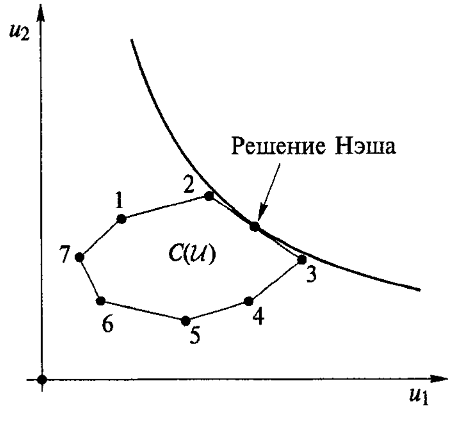


Рис. 6.6

$$E_1(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{k} p_i u_1(s_i) \text{ и } E_2(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{k} p_i u_2(s_i).$$

Говоря математическим языком, множество всех коррелированных аллокаций полезности $C(\mathcal{U})$, известное как **выпуклая оболочка** множества $\mathcal{U}$, является наименьшим выпуклым множеством, содержащим $\mathcal{U}$. Другими словами, если участникам позволено рандомизировать альтернативы, то множество $\mathcal{U}$ доступных аллокаций полезностей становится множеством выпуклым.

Если обозначить через i точку $(u_1(s_i), u_2(s_i))$ на плоскости u_1u_2, то $C(\mathcal{U})$ — многогранник, изображенный на рис. 6.6. Любая точка внутри или на границе многогранника представима в виде $(E_1(\mathbf{p}), E_2(\mathbf{p}))$ при некотором подходящем (необязательно единственном) распределении вероятностей $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$. В этом случае правило Нэша является разумным решением игры торга (снова см. рис. 6.6).

Можно продемонстрировать этот подход на примере 6.9. Множество аллокаций полезностей, изображенное на рис. 6.7, *а*, имеет вид

$$\mathcal{U} = \{(0,0),(1,4),(4,1)\}.$$

Множество всех доступных выигрышей, если возможна рандомизация, состоит из всех пар (u_1,u_2), лежащих внутри или на ребрах треугольника с вершинами (0,0), (1,4) и (4,1). Это множество — закрашенный треугольник на рис. 6.7, *б*, который, очевидно, является выпуклым.

Любая точка треугольника может быть получена подходящей рандомизацией на множестве $\mathcal{U}$. Например, если взять (1,4) с вероятностью 1/3, (4,1) с вероятностью 1/3 и (0,0) с вероятностью 1/3, то получим внутреннюю точку треугольника. Таким образом, множество коррелированных аллокаций полезностей $C(\mathcal{U})$, показанное как затененный треугольник на рис. 6.7, *б*, можно представить в виде

$$C(\mathcal{U}) = \{p(0,0) + q(1,4) + (1-p-q)(4,1) : p \geq 0, q \geq 0 \text{ и } p+q \leq 1\} =$$
$$= \{(4-4p-3q, 1-p+3q) : p \geq 0, q \geq 0 \text{ и } p+q \leq 1\}.$$

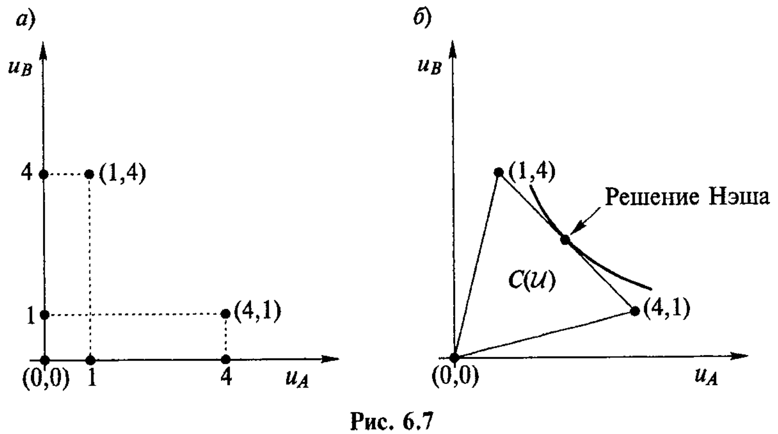


Рис. 6.7

Понятие рандомизации можно расширить на произвольное множество аллокаций полезностей. Как в примере 6.9, при использовании рандомизации выигрыши превращаются в ожидаемые выигрыши, к которым применяется решающее правило (например, правило Нэша). В таком случае решение является вероятностным распределением. В качестве приложения см. упражнение 9 в конце раздела.

Таким образом, рассмотренное в разделе правило Нэша отлично работает в условиях симметрии. Однако большинство торгов не является симметричным либо в силу различного отношения участников к риску, либо в силу неодинаковости выигрышей в точке несогласия или даже потому, что имеется асимметрия множества аллокаций полезностей U. В случае различного отношения к риску или неодинаковости выигрышей в точке несогласия правило решения Нэша по-прежнему работает хорошо. Напомним, что решающее множество Нэша $\sigma(B)$ игры торга B состоит из всех точек максимума функции $g_B(s) = [u_1(s) - d_1][u_2(s) - d_2]$; т.е.

$$\sigma(B) = \{s \in S : g_B(s) = \max_{t \in S} g_B(t)\}.$$

Изменение в отношении к риску отразится на функции полезности, соответственно изменится решение по Нэшу. Аналогично различные выигрыши в точке несогласия изменят значения d_i, и, следовательно, изменятся значения функции g_B, что повлияет на решение по Нэшу. В самом деле, если значение d_1 увеличится (например, благодаря внешней альтернативе), то в решении по Нэшу выигрыш участника 1 тоже увеличится. В обоих типах асимметрии решение по Нэшу по-прежнему дает разумное и интуитивно верное решение, поскольку эти типы асимметрии влияют либо на функцию полезности, либо на выигрыши в точке несогласия.

Однако в случае асимметрии множества аллокаций полезностей решение по Нэшу приводит к неудовлетворительному результату. В следующем разделе мы обсудим детали этой слабости решающего правила Нэша и альтернативное решение игры торга, которое ведет себя лучше, если игра имеет асимметричное множество аллокаций полезностей.

Упражнения

1. Покажите, что любой эффективный по Парето результат торга не зависит от линейных преобразований.
2. Рассмотрим функцию $g(m_1, m_2) = m_1 m_2$ из примера 6.7. Покажите, что на множество доступных альтернатив

$$S = \{(m_1, m_2) : m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, m_1 + m_2 \leq 100\}$$

функция $g(m_1, m_2) = m_1 m_2$ достигает максимума в единственной точке $(m_1^*, m_2^*) = (50, 50)$.

3. Рассмотрим задачу торга из примера 6.7. Покажите, что любой результат торга из множества

$$T = \{(m_1, m_2) : m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, m_1 + m_2 = 100\}$$

является эффективным по Парето.

4. Рассмотрим задачу торга с множеством альтернатив $S = (0,1)$ (открытый интервал от 0 до 1) и функциями полезностей $u_1(s) = 1 - s$ и $u_2(s) = -\ln(1-s)$.

(a) Изобразите графики функций полезности.

(b) Покажите, что каждый исход оптимален по Парето.

(c) Докажите, что эта задача торга имеет единственный оптимальный по Парето и симметричный исход. [Подсказка: если $t = -\ln t$, то $t \approx 0{,}567$.]

5. Рассмотрим задачу торга B из предыдущего упражнения.

(a) Изобразите множество $\mathcal{U}$ всех аллокаций полезности и покажите, что $\mathcal{U}$ замкнуто, но не является ограниченным, выпуклым и симметричным.

(b) Изобразите график функции $g(s) = -(1-s)\ln(1-s)$.

(c) Найдите множество решений по Нэшу $\sigma(B)$.

6. Два индивида хотят поделить имущество; множество доступных альтернатив

$$S = \{(s_1, s_2) : s_1 \ge 0, s_2 \ge 0, s_1 + s_2 \le 1\}.$$

Функции полезности заданы в виде

$$u_1(s_1, s_2) = s_1 + s_2 \text{ и } u_2(s_1, s_2) = s_1 + \sqrt{s_2}.$$

Каков должен быть исход торга, если оба участника ищут Парето-эффективное решение? Найдите выигрыши участников для такого решения.

7. Если внимательно проанализировать торг из примера 6.7, то можно заметить, что игроки являются нейтральными к риску. Почему? Предположим, что игрок 1 — рискофоб и имеет функцию полезности вида

$$u_1(m_1, m_2) = \sqrt{m_1}.$$

Найдите решение по Нэшу для этой игры торга. Обсудите следствие для правила решения Нэша.

8. Предположим, что вы торгуетесь о цене за «Тойоту Камри» (Toyota Camry). Цена по прейскуранту равна 20 тыс. долл. Фактурная цена составляет 18 тыс. долл.

(a) Пусть функции полезности пропорциональны количеству получаемых денег. Сформулируйте игру торга и найдите ее решение по Нэшу.

(b) Предположим, что торговый агент находится в 60 милях от вас и согласен продать машину по цене 18,5 тыс. долл. Переформулируйте игру торга с учетом этого условия и найдите ее решение по Нэшу.

9. Предположим, что предприниматель ведет переговоры с венчурным капиталистом на предмет выбора стратегии:

(a) инвестировать в бизнес за 5 лет до размещения продукта на рынке;

(b) разработать несколько другой продукт в течение трех лет и продавать его;

(c) инвестировать в течение года, а затем продать бизнес фирме-конкуренту.

Пусть предприниматель выступает в качестве игрока 1, а венчурный капиталист — в качестве игрока 2. Нормализованные выигрыши игроков от трех альтернатив равны (4,1), (3,3) и (2,5) соответственно. В случае несогласия инвестиций не будет и выигрыши составят (0,0).

(i) Опишите множества $\mathcal{U}$ и $C(\mathcal{U})$.

(ii) Сформулируйте условия теоремы Нэша для данного случая.

(iii) Каково решение игры торга, если использовать правило решения Нэша для множества $\mathcal{U}$?

(iv) Каково решение игры торга, если использовать правило Нэша для множества $C(\mathcal{U})$?

10. Для игры торга $B = ((S, s_0), u_1, u_2)$ определим функцию $h_B : S \to R$ вида

$$h_B(s) = [u_1(s) - d_1] + [u_2(s) - d_2]$$

рассмотрим множество

$$\sigma_1(B) = \{s \in S : h_B(s) = \max_{t \in S} h_B(t)\}.$$

Покажите, что $\sigma_1(\cdot)$ является правилом решения на всем классе игр торга. Каким свойствам удовлетворяет $\sigma_1(\cdot)$?

11. Покажите, что правило Нэша определено однозначно в том смысле, что если найдется другое правило $s(\cdot)$, которое является эффективным по Парето и симметричным, а игра торга B — симметричная и выпуклая, то

$$s(B) \subseteq \sigma(B).$$

Это значит, что $s(B)$ и $\sigma(B)$ порождают одну и ту же единственную аллокацию полезностей (u^*, u^*).

12. Упражнение представляет пару общих свойств, удобных для анализа игр торга. Пусть A — непустое выпуклое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию $g : A \to R$ вида

$$g(x, y) = (x - x_0)(y - y_0).$$

Предполагается, что $g(x, y) > 0$ для некоторых $(x, y) \in A$. Установите следующее.

(a) Непрерывная функция g имеет не более одной точки максимума на множестве A. (Рисунок 6.3 показывает, что его может не быть вовсе.)

(b) Если A является компактом, то g имеет ровно одну точку максимума на A.

[Подсказка: предположим противное, а именно, что существуют две различные точки максимума, (x_1, y_1) и (x_2, y_2). То есть $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2) = M$, где M — максимум функции g на множестве A. Пусть $x_2 > x_1$ (или $x_2 - x_1 > 0$). Нетрудно понять, что тогда $y_1 > y_2$ (или $y_1 - y_2 > 0$). Заметим, что выпуклость множества A гарантирует, что точка $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$] принадлежит A и удовлетворяет соотношению

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2} - x_0\right)\left(\frac{y_1+y_2}{2} - y_0\right) =$$

$$= \left(\frac{x_1-x_0}{2} - \frac{x_2-x_0}{2}\right)\left(\frac{y_1-y_0}{2} - \frac{y_2-y_0}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1-x_0)(y_1-y_0)+(x_2-x_0)(y_2-y_0)] + \frac{1}{4}(y_1-y_2)(x_2-x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}[M+M] + \frac{1}{4}(y_1-y_2)(x_2-x_1) = M + \frac{1}{4}(y_1-y_2)(x_2-x_1) > M,$$

приходим к противоречию.]

6.2. Монотонность при торге

В предыдущем разделе мы рассмотрели правило решения Нэша игры торга. Как выяснилось, оно позволяет получать интуитивно привлекательные решения в симметричных играх торга. Отмечалось также, что правило решения Нэша хорошо работает и в случае асимметрии в отношениях к риску и асимметрии в точках несогласия. Однако оно может порождать совершенно неудовлетворительные решения в случае асимметрии множества аллокаций полезностей. В некоторых подобных ситуациях правило решения Нэша оказывается не вполне разумным. Наиболее распространенными ситуациями, в которых правило решения Нэша не приводит к удовлетворительным результатам, являются ситуации, где «пирог» либо сжимается, либо расширяется способом, при котором множество аллокаций полезностей оказывается асимметричным. Классический пример: то, что получают кредиторы в случае банкротства.

До тех пор пока бизнес является платежеспособным, кредиторы ожидают получить часть своих займов в виде процентных выплат от величины займа. Однако когда бизнес становится несостоятельным, правило Нэша предписывает равноправное распределение активов среди кредиторов. Это правило дележа имеет мало смысла в случае, когда размеры займов были различными. Более оправданным способом дележа может служить такой, при котором активы распределяются пропорционально размерам займов.

В данном разделе будет рассмотрено альтернативное правило решения игры торга, не удовлетворяющее свойству симметрии, но соответствующее требованию монотонности. Мы увидим, что данное правило решения является более подходящим для несимметричных торгов.

Начнем с примера, который наглядно показывает, что происходит с правилом Нэша в случае банкротства.

Пример 6.11 (игра банкротства). Банкротство чаще всего наступает в случае, когда активы фирмы становятся менее ценными, чем ее обязательства. Так, например, банкротство может наступить, если ссудно-сберегательная ассоциация делает заем, обеспеченный залогом, который обесценивается, когда стоимость компании, ведущей операции с недвижимостью и находящейся в собственности застройщика, становится меньше совокупного долга застройщика или когда активы фирмы стоят меньше, чем совокупный долг фирмы. В любом из этих случаев, если K — стоимость активов, а D_i — совокупный долг фирмы кредитору i, то банкротство наступит в случае

$$K < \sum_i D_i \,.$$

Поскольку стоимость активов оказывается меньше, чем совокупный долг кредиторам, фирма не может выполнить своих финансовых обязательств и объявляет о банкротстве. Теперь задача состоит в том, чтобы поделить K между кредиторами.

Предположим, что есть всего два кредитора и выполнено условие банкротства $K < D_1 + D_2$. Имеем следующую задачу торга. Переговорное множество имеет вид

$$S = \{(k_1, k_2) : k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 \leq K\}.$$

Если кредиторы нейтральны к риску, то можно представить их функции полезности как

$$u_1(k_1, k_2) = k_1 \text{ и } u_2(k_1, k_2) = k_2,$$

т.е. дележ оценивается тем количеством денег, которое они получают. В этом случае точка несогласия — это $(-D_1, -D_2)$, в ней кредиторы не получают активов и не имеют возможности вернуть займы. Поскольку решение по Нэшу инвариантно к линейным преобразованиям, можем сдвинуть точку несогласия в точку (0,0). Тогда задача сводится к дележу K долларов между двумя нейтральными к риску участниками при ограничении, что кредитор 1 может получить не более чем D_1, а кредитор 2 — не более чем D_2. Предположим, что $D_1 > D_2$, и рассмотрим отдельно случаи.

Случай I. $D_2 > \frac{K}{2}$.

В этом случае правило решения по Нэшу предписывает каждому кредитору $\frac{K}{2}$ долларов; см. рис. 6.8, *а*.

Случай II. $D_2 \leq \frac{K}{2}$.

Поскольку $D_1 + D_2 > K$, то из этого следует, что мы имеем дело с игрой торга, изображенной на рис. 6.8, *б*. Заметим, что долг кредитору 2 погасится полностью, а кредитор 1 получит остаток $K - D_2$.

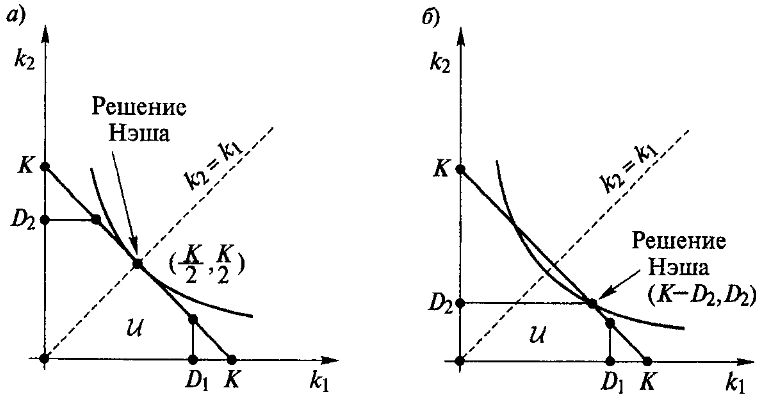


Рис. 6.8

Решение задачи о банкротстве, предписываемое решением по Нэшу, приводит к определенным затруднениям, так как относится к обоим кредиторам одинаково, даже если перед каким-либо из них гораздо бóльшая задолженность. Если, однако, $D_1 > D_2$, то логично предположить, что кредитор 1 должен получить бóльшую долю активов K, чем кредитор 2. В самом деле, можно утверждать, что количество активов K должно быть поделено между кредиторами пропорционально их требованиям. То есть дележ (k_1^*, k_2^*) активов K должен удовлетворять соотношениям

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{k_1^*}{k_2^*}, \quad k_1^* + k_2^* = K.$$

Решение системы дает $k_1^* = \frac{D_1}{D_1 + D_2} K$ и $k_2^* = \frac{D_2}{D_1 + D_2} K$.

Другими словами, K делится между кредиторами пропорционально задолженности. Например, если $K = 1$ млн долл., $D_1 = 1$ млн долл., а $D_2 = 500$ тыс. долл., то описанное ранее правило предписывает 667 667 долл. кредитору 1 и 333 333 долл. кредитору 2. Напротив, согласно решению по Нэшу, стоило бы отдать каждому по 500 тыс. долл. Очевидно, что решение по Нэшу здесь не вполне приемлемо. ■

Если внимательно проанализировать решение по Нэшу в задаче о банкротстве, то становится ясным, что когда задача торга фундаментально асимметрична, как это было в предыдущем примере, решение по Нэшу часто приводит к неразумным ответам. Причиной возникновения подобных трудностей является симметричность. Условие симметричности можно заменить альтернативным условием. Одним из наиболее интересных альтернативных условий оказывается *монотонность*. Это свойство требует от решения торга обеспечить игроку как минимум такую же полезность, когда множество альтернатив расширено по отношению к исходному. Формально условие можно записать в следующем виде.

- **Монотонность:** *Правило решения $s(\cdot)$ называется **монотонным**, если для любой игры торга B и любой подыгры торга B' игры B решающее множе-*

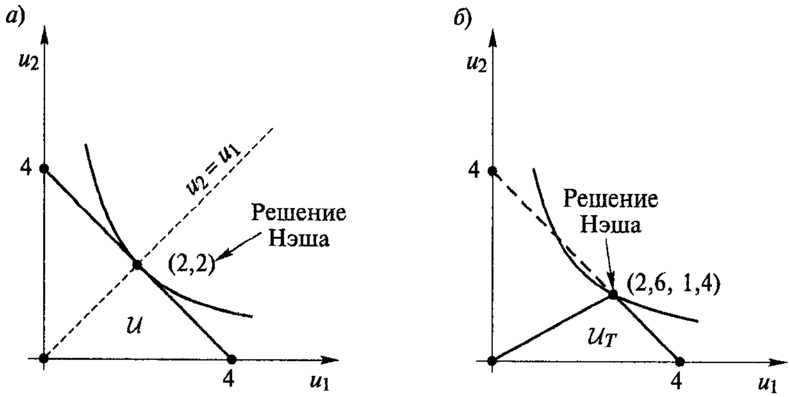


Рис. 6.9

ство $s(B)$ доминирует решающее множество $s(B')$ в следующем смысле: для любого $s' \in s(B')$ существует некоторое $s \in s(B)$, такое что

$$u_1(s) \geq u_1(s') \text{ и } u_2(s) \geq u_2(s').$$

Правило решения Нэша не является монотонным. Например, игра торга B', изображенная на рис. 6.9, *б*, является подыгрой торга для игры *B*, изображенной на рис. 6.9, *а*. Ясно, что для любого $s' \in s(B')$ имеет место $(u_1(s'), u_2(s')) = (2{,}6, 1{,}4)$, а из $s \in s(B)$ следует, что $(u_1(s), u_2(s)) = (2{,}2)$. В частности, для любого $s \in s(B)$ выполнено $u_1(s) < u_1(s')$ при всех $s' \in s(B')$. Последнее показывает, что правило решения Нэша немонотонно.

На рис. 6.9, *б* игра торга *несимметрична*, и правило решения Нэша приводит к паре выигрышей (2,6, 1,4). На рис. 6.9, *а* игра торга симметрична, и правило решения Нэша приводит к паре выигрышей (2,2). Это показывает, что хотя множество аллокаций полезностей U_T игры торга на рис. 6.9, *б* является строгим подмножеством множества аллокаций полезностей U игры торга на рис. 6.9, *а*, согласно правилу решения Нэша выигрыш игрока 1 оказывается больше. Поэтому в ситуациях с асимметрией, подобных играм торга на рис. 6.9, *б*, нам нужно использовать несколько другое множество критериев. Правило решения, которое хорошо работает при асимметричности, было предложено Е. Калаи и Р. Смородинским[1]. Это правило решения — предмет дальнейшего обсуждения.

Для понимания этого монотонного правила нам потребуются предварительные сведения. Для заданной игры торга $B = ((S, s_0), u_1, u_2)$ положим

$$\mu_1 = \max_{s \in S} u_1(s) \text{ и } \mu_2 = \max_{s \in S} u_2(s),$$

если эти максимумы существуют. В случае когда множество аллокаций полезностей *B* является компактным, ясно, что μ_1 и μ_2 определены корректно. Для того чтобы наши дальнейшие рассуждения были осмысленными, будем предполагать, что μ_1 и μ_2 определены корректно.

[1] См.: [42].

Определение 6.12. *Линией Калаи — Смородинского (или **КС-линией**) игры торга $B=((S,s_0),u_1,u_2)$ называется прямая на плоскости u_1u_2, проходящая через точки (d_1,d_2) и (μ_1,μ_2).*

Таким образом, КС-линия имеет наклон $k=\dfrac{\mu_2-d_2}{\mu_1-d_1}$ и задается уравнением

$$u_2-d_2=k(u_1-d_1)\,.$$

Геометрический смысл КС-линии отражен на рис. 6.10.

Аллокация полезностей Калаи — Смородинского (или КС-распределение полезностей) игры торга B — это

- *наиболее удаленная от (d_1,d_2) точка $(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ КС-линии, лежащая в множестве аллокаций полезностей $\mathcal{U}$.*

Более формально, если предположить, что $\mathcal{U}$ компактно, и рассмотреть множество

$$\mathcal{K}=\{s\in S:(u_1(s),k[u_1(s)-d_1]+d_2)\in\mathcal{U}\}\,,$$

то $\mathcal{K}\neq\varnothing$ (поскольку $s_0\in\mathcal{K}$) и

$$\bar{u}_1=\max_{s\in\mathcal{K}}u_1(s)\ \text{ и }\ \bar{u}_2=k(\bar{u}_1-d_1)+d_2\,.$$

Геометрический смысл КС-распределения показан на рис. 6.10. Если $\mathcal{U}$ не является компактом, то для игры торга может не существовать КС-распределения. Также очевидно, что произвольная игра торга может иметь не более одного КС-распределения. То есть в игре либо есть одно КС-распределение, либо нет ни одного. Однако, как было замечено ранее, игра торга с компактным множеством аллокаций полезностей всегда имеет в точности одно КС-распределение.

Теперь мы готовы определить **правило решения Калаи — Смородинского** (или просто КС-**правило решения**) $\kappa(\cdot)$ в виде

$$\kappa(B)=\{s\in S:u_1(s)=\bar{u}_1\ \text{ и }\ u_2(s)=\bar{u}_2\}\,.$$

Если игра торга B не имеет КС-распределения, то $\kappa(B)=\varnothing$.

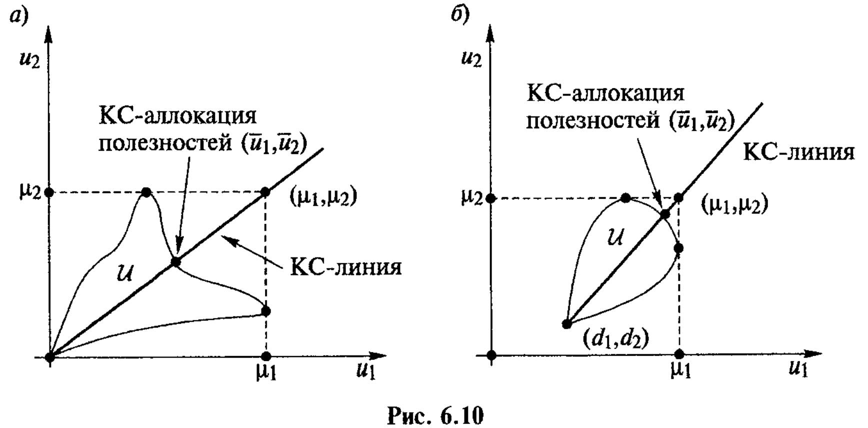


Рис. 6.10

Основные свойства правила решения Калаи — Смородинского описывает следующая теорема.

Теорема 6.13. *Правило решения Калаи — Смородинского удовлетворяет следующим фундаментальным свойствам.*

(1) *В классе игр торга с компактным множеством аллокаций полезностей правило решения Калаи — Смородинского всегда дает непустое множество решений и не зависит от линейных преобразований, но не является зависящим от несвязанных альтернатив.*

(2) *В классе выпуклых игр торга B непустое множество решений Калаи — Смородинского* $\kappa(B)$ *состоит из эффективных по Парето исходов торга.*

(3) *Если B — выпуклая и симметричная игра торга, то правила решения Калаи — Смородинского и правило решения Нэша совпадают, т.е.* $\kappa(B)=\sigma(B)$.

Доказательство. Проверим только свойство 1, оставив достаточно простое доказательство свойств 2 и 3 в качестве упражнения. Заметим, что игра торга на рис. 6.11 демонстрирует, что независимость от несвязанных альтернатив для правила решения Калаи — Смородинского не имеет места.

Покажем, что правило решения КС не зависит от линейных преобразований полезности. Пусть $B=((S,s_0),u_1,u_2)$ — произвольная игра торга. Тогда его КС-линия имеет наклон $k=\dfrac{\mu_2-d_2}{\mu_1-d_1}$, следовательно, решение по Калаи — Смородинскому имеет вид

$$\kappa(B)=\{s\in S: u_1(s)=\bar{u}_1 \text{ и } u_2(s)-d_2=k(\bar{u}_1-d_1)\}.$$

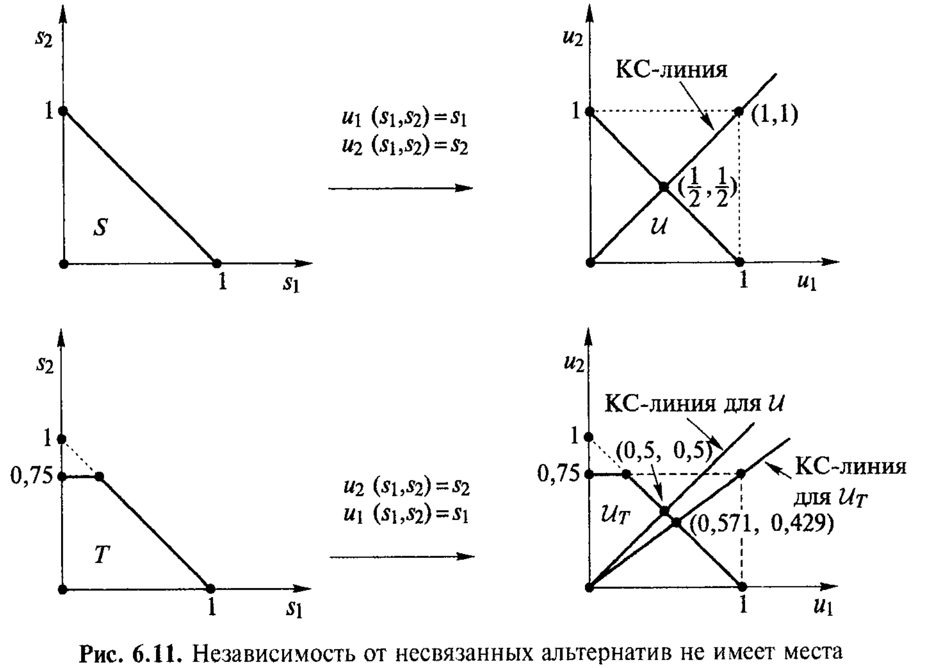


Рис. 6.11. Независимость от несвязанных альтернатив не имеет места

Рассмотрим игру торга B', полученную на основе игры торга B путем линейных преобразований $v_1 = b_1u_1 + a_1$ и $v_2 = b_2u_2 + a_2$, где $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$. Для новой игры торга B' точка несогласия (d_1', d_2') задается как

$$d_1' = b_1d_1 + a_1 \text{ и } d_2' = b_2d_2 + a_2,$$

а наклон линии КС равен

$$k' = \frac{\mu_2' - d_2'}{\mu_1' - d_1'} = \frac{b_2\mu_2 + a_2 - (b_2d_2 + a_2)}{b_1\mu_1 + a_1 - (b_1d_1 + a_1)} = \frac{b_2(\mu_2 - d_2)}{b_1(\mu_1 - d_1)} = \frac{b_2}{b_1}k.$$

Предположим, что $s \in S$ удовлетворяет $v_1(s) = \bar{v}_1$ и $v_2(s) - d_2' = k'(\bar{v}_1 - d_1')$. Следовательно,

$$v_1(s) = b_1u_1(s) + a_1 = \bar{v}_1 = b_1\bar{u}_1 + a_1$$

тогда и только тогда, когда $u_1(s) = \bar{u}_1$. Кроме того, $v_2(s) - d_2' = k'(\bar{v}_1 - d_1')$ означает, что

$$[b_2u_2(s) + a_2] - (b_2d_2 + a_2) = k'[b_1\bar{u}_1 + a_1 - (b_1d_1 + a_1)],$$

или $b_2[u_2(s) - d_2] = \frac{b_2}{b_1}k(\bar{u}_1 - d_1)$, что эквивалентно равенству $u_2(s) - d_2 = k(\bar{u}_1 - d_1)$. Следовательно, имеем

$$\kappa(B') = \{s \in S : v_1(s) = \bar{v}_1 \text{ и } v_2(s) - d_2' = k'(\bar{v}_1 - d_1')\} =$$
$$= \{s \in S : u_1(s) = u_1 \text{ и } u_2(s) - d_2 = k(\bar{u}_1 - d_1)\} = \kappa(B).$$

Это показывает, что правило решений Калаи — Смородинского не зависит от линейных преобразований.

Проанализируем сущность КС-правила решения на примере задачи торга, которая представляет собой классическую игру торга между работниками и менеджментом.

Пример 6.14 (игра торга относительно заработной платы). Профсоюз и менеджеры фирмы часто торгуются между собой по поводу заработной платы. Мы рассмотрим простую форму этой игры торга. Пусть W_m — тот уровень зарплаты на одного работника, который профсоюз может получить в случае неуспеха переговоров. Пусть L — количество работников в профсоюзе. Фирма может продавать товар по фиксированной цене p (за единицу). То есть фирма может продавать свою продукцию на рынке совершенной конкуренции. Выпуск фирмы определяется как функция $f(L)$ от количества нанятых работников. Таким образом, если фирма нанимает L работников, то выпуск составит величину $f(L)$, а полученная выручка — $pf(L)$. Также в обычном порядке фирме необходимо выплачивать акционерам дивиденды D из полученной прибыли. Соответственно, если фирма платит каждому работнику заработную плату W, то ее прибыль выражается как

$$pf(L) - LW - D = R - LW - D.$$

Профсоюз и менеджеры торгуются об уровне заработной платы W. В точке несогласия работники имеют зарплату W_m, а прибыль фирмы равна нулю.

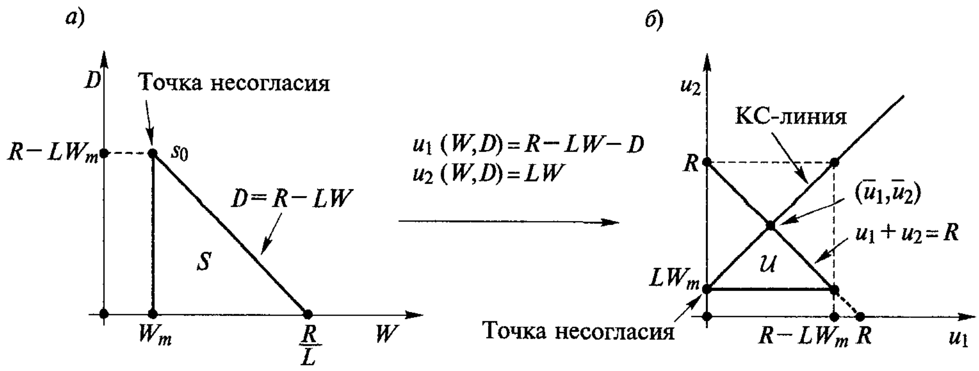


Рис. 6.12

В этом случае $0 < W_m < \frac{R}{L}$ и $D = R - LW_m > 0$. В противном случае профсоюз получает LW, а фирма $R - LW - D$. Все это можно выразить в терминах игры торга со следующими характеристиками.

(1) Участниками являются профсоюз и фирма. Будем обозначать фирму как игрока 1, а профсоюз — как игрока 2.

(2) Множество альтернативных исходов S является подмножеством плоскости WD, которое определено неравенствами

$$W_m \le W \le \frac{R}{L} \text{ и } 0 \le D \le R - LW .$$

Графически оно представлено на рис. 6.12, *а*.

(3) Точка несогласия $s_0 = (W_m, R - LW_m)$.

(4) Функции полезности игроков равны

$$u_1(W,D) = R - LW - D \text{ и } u_2(W,D) = LW .$$

Легко убедиться в том, что множество аллокаций полезностей U игры торга выпукло, компактно и имеет вид, как на рис. 6.12, *б*. Заметим, что хотя игра торга является выпуклой, она не симметрична. Ясно, что $d_1 = 0$, $d_2 = LW_m$.

Вычислим наклон КС-линии торга. Очевидно, что

$$k = \frac{R - LW_m}{R - LW_m} = 1 .$$

Таким образом, КС-линия задается уравнением

$$u_2 = u_1 + LW_m .$$

Положив $u_2 = R - u_1$[1], имеем: $R - u_1 = u_1 + LW_m$. Решение относительно u_1 дает

$$\bar{u}_1 = \frac{R - LW_m}{2} \text{ и } \bar{u}_2 = \frac{R + LW_m}{2} .$$

[1] То есть рассматривая только Парето-эффективные дележи. — *Примеч. пер.*

Поскольку $\bar{u}_2 = LW^*$, видим, что согласно решению по КС-правилу уровень зарплаты составит

$$W^* = \frac{R + LW_m}{2L}. \qquad (*)$$

Прибыль фирмы равна

$$\pi = R - LW^* - D^* = R - L\frac{R + LW_m}{2L} - D^* = \frac{R - LW_m}{2} - D^*.$$

Но мы также знаем, что прибыль равна $\bar{u}_1 = \frac{R - LW_m}{2}$. Следовательно, $D^* = 0$. Таким образом, по правилу Калаи — Смородинского прибыль фирмы составляет $R - LW^* = \frac{R - LW_m}{2}$, а дивиденды равны нулю.

Посмотрим, как это все будет выглядеть на конкретном числовом примере. Пусть $f(L) = 10\sqrt{L}$, $L = 25$, $p = 10$ и $W_m = 10$. Тогда

$$R = pf(L) = 100\sqrt{25} = 500.$$

Подставляя это выражение в (*), получаем, что $W^* = 15$. Уровень заработной платы W^* значительно выше резервного уровня $W_m = 10$ долл., однако значительно ниже максимально возможного $\frac{R}{L} = 20$ долл. ■

Ранее мы утверждали, что КС-правило решения удовлетворяет условию монотонности и позволяет получать интуитивно более убедительные решения игр торга, не являющихся симметричными. Следующий результат показывает, почему решение КС удовлетворяет условию монотонности. Доказательство достаточно простое, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Теорема 6.15. *Пусть $B' = ((T, s_0), u_1, u_2)$ — подыгра игры торга $B = ((S, s_0), u_1, u_2)$, а $(\bar{u}_1(T), \bar{u}_2(T))$ и $(\bar{u}_1(S), \bar{u}_2(S))$ — их аллокации полезности Калаи — Смородинского соответственно. Если B и B' имеют одну и ту же КС-линию, то*

$$\bar{u}_1(S) \geq \bar{u}_1(T) \text{ и } \bar{u}_2(S) \geq \bar{u}_2(T).$$

В качестве иллюстрации к теореме см. игру торга, представленную на рис. 6.13.

Правило решения Калаи — Смородинского и правило решения Нэша позволяют получить решения, удовлетворяющие некоторым нормативным свойствам. Однако для каких-то игр торга один набор кажется более осмысленным, чем другой, в то время как для других совершенно иной набор условий представляется более подходящим. До сих пор мы ограничивались рассмотрением торгов между двумя участниками. Но довольно часто распределение излишка осуществляется между более чем двумя индивидами. Это прежде всего относится к рынкам. В ситуации, когда излишек порождается в результате обмена товарами или услугами, его распределение содержит характерные черты торга, однако процесс торга несколько отличается от

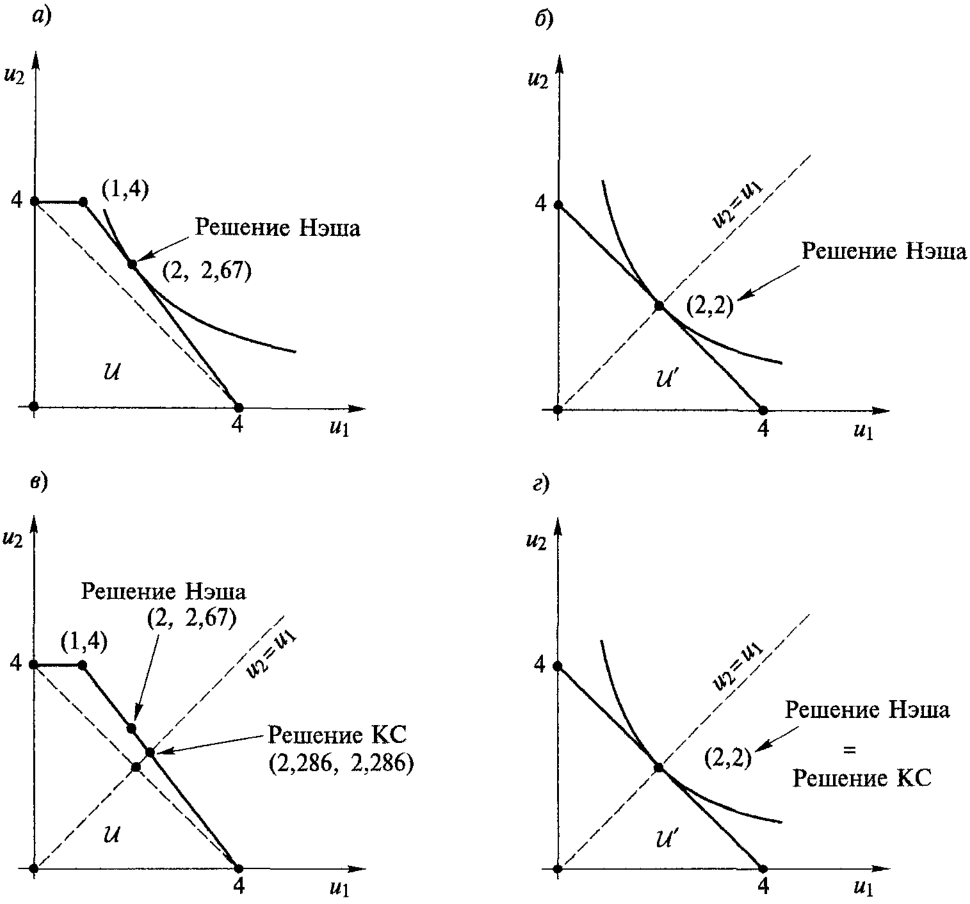


Рис. 6.13

того, с которым мы имели дело ранее. Во многих задачах торга индивиды пытаются получить наилучшее для себя предложение с помощью других возможностей или альтернатив. В следующем разделе мы покажем, как n участников могут достичь соглашения, удовлетворяющего «условию групповой рациональности».

Упражнения

1. Покажите, что любой торг имеет не более одной аллокации полезностей КС.
2. В данном упражнении предлагается установить существование аллокации полезностей Калаи — Смородинского для класса игр торга с компактным множеством аллокаций полезностей. Пусть торг B имеет компактное множество аллокаций полезностей $\mathcal{U}$, рассмотрим (непустое) множество элементов из S, определенное правилом

$$\mathcal{K} = \{s \in S : (u_1(s), k[u_1(s) - d_1] + d_2) \in \mathcal{U}\}.$$

Покажите, что решение Калаи — Смородинского $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in \mathcal{U}$ торга B существует и задается как

$$\bar{u}_1 = \max_{s \in \mathcal{K}} u_1(s) \text{ и } \bar{u}_2 = k(\bar{u}_1 - d_1) + d_2.$$

3. Предположим, что множество аллокаций полезностей $\mathcal{U}$ игры торга B представляет собой замкнутый треугольник с вершинами (0,0), (1,2) и (2,0), где (0,0) также является точкой несогласия. Изобразите множество $\mathcal{U}$ и найдите аллокации полезностей игры торга по Нэшу и по Калаи — Смородинскому.
4. Рассмотрим игру о банкротстве из примера 6.11. Покажите, что в случае K = 1 млн долл., D_1 = 1 млн долл. и D_2 = 500 000 долл. КС-правило решения предпишет 666 667 долл. кредитору 1 и 333 333 долл. кредитору 2.
5. Снова обратимся к игре о банкротстве из примера 6.11. Пусть K = 800 000 долл. Сколько получит каждый кредитор согласно правилу решения Калаи — Смородинского? Что произойдет при K = 1,2 млн долл.? Будет ли КС-правило решения в данном случае монотонным?
6. Для игры торга в примере 6.14 был найден уровень заработной платы по КС-правилу решения. Каково правило решения Нэша для этой задачи торга относительно заработной платы? Дают ли правило решения Нэша и КС-правило решения разные ответы? Какое из этих двух правил решения, по вашему мнению, является более подходящим?
7. Покажите, что если игра торга B выпуклая и симметричная, то КС-правило решения и правило решения Нэша совпадают, т.е. $\kappa(B) = \sigma(B)$.
8. Пусть B — выпуклая игра торга, такая что множество аллокации полезностей U симметрично относительно КС-линии и наклон КС-линии равен 1. Покажите, что $\kappa(B) = \sigma(B)$; т.е. в данном случае решения по Калаи — Смородинскому и решения по Нэшу совпадают.
9. Докажите свойства 2 и 3 теоремы 6.13.
10. Докажите теорему 6.15.
11. В условиях теоремы 6.15 покажите, что если торг B и торг B_T имеют различные КС-линии, то аллокация полезностей по Калаи — Смородинскому может не удовлетворять условию монотонности.
12. Это упражнение призвано показать, что в определенных случаях решение по Калаи — Смородинскому может быть очень «плохим». Рассмотрим торг, изображенный на рис. 6.9, *б*.
    (a) Найдите решение по Калаи — Смородинскому этой игры торга.
    (b) Рассмотрите новую игру торга, в которой множество аллокаций полезностей $\mathcal{U}_T$ заменено на множество $\mathcal{U}_T \cup \{(0,4)\}$.
    Найдите решение по Нэшу и решение по Калаи — Смородинскому.
    (c) Какое из двух решений пункта (b) выглядит более приемлемым?

6.3. Ядро игры торга

Предыдущие два раздела были посвящены обсуждению игры торга с двумя участниками. Однако довольно часто задачи торга включают большее количество игроков. Это особенно касается рынков, где индивиды продают свои начальные запасы. В такого рода торговлю обычно вовлечено более двух участников. Игры торга нескольких лиц также возникают в процессе принятия решений в группах. Зачастую члены такой группы имеют конфликтующие интересы. В таких случаях группа должна найти решение, приемлемое для всех ее членов.

В этом разделе мы займемся изучением подобных вопросов. Для анализа игр торга нескольких лиц нам потребуется ввести понятие *ядра*. Идея ядра, согласно Ф.И. Эджуорту[1], состоит в описании минимальных требований, которым должно удовлетворять любое приемлемое соглашение.

Мы начнем с описания базовой модели игры торга нескольких лиц. Как и в случае задачи торга двух участников, здесь есть множество альтернатив S, точка несогласия, которая отражает статус-кво, и функции полезности каждого участника.

Определение 6.16. ***Игра торга n лиц*** (*или* ***задача торга n лиц***) *состоит из*

(1) *множества игроков* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$;

(2) *множества* S *доступных альтернатив* (*или исходов торга*, *или просто исходов*), *имеющего точку несогласия* $s_0 \in S$;

(3) *функций полезности* $u_i : S \to R$ *каждого игрока*, *таких что*

   (a) $u_i(s) \geq d_i \equiv u_i(s_0)$ *для любых* $s \in S$,

   (b) *Найдется как минимум одно* $s \in S$, *при котором* $u_i(s) > d_i$ *для всех игроков i.*

На первый взгляд может показаться, что эта задача представляет собой прямое обобщение задачи торга двух лиц. Однако тут есть одно фундаментальное различие. В игре торга n лиц возможно объединение игроков в некоторые группы или **коалиции**. Коалиция — непустое подмножество N множества всех игроков. Такого рода коалиция может достичь согласия среди альтернатив, которые могут быть реализованы ее членами, и, возможно, сможет гарантировать ее участникам более высокие выигрыши, чем те, что могли быть получены ими в случае участия в **большой коалиции**, т.е. коалиции всех n игроков. Таким образом, когда большая коалиция выдвигает некоторую альтернативу, предложение должно предоставить как минимум столько же удовлетворения каждому игроку, сколько может быть им получено в составе любой другой коалиции. Следовательно, для анализа любых приемлемых альтернатив в задаче торга необходимо знать выигрыши игроков в составе произвольных коалиций. В дальнейшем через $\mathcal{N}$ будем обозначать множество всех коалиций, т.е. $\mathcal{N}$ состоит из всех непустых подмножеств N.

Будем предполагать, что для каждой коалиции C существует особое непустое подмножество $S_C \subseteq S$, которое отражает исходы торга, доступные данной коалиции C. Таким образом, в заданной игре торга n лиц существует функция (называемая **функцией применимости, effectivity function**), которая ставит в соответствие любой коалиции C подмножество S_C в S. Будем обозначать функцию применимости в виде $C \mapsto S_C$. Множество S_C, которое

---

[1] *Edgeworth F.Y.* Mathematical Psychics. L.: Kegan Paul, 1881.

может оказаться и пустым, является множеством альтернатив, которые могут быть реализованы только членами коалиции C. Поскольку большая коалиция N может реализовать любой исход из S, то ясно, что $S_N = S$. Множество доступных исходов торга внутри коалиции C порождает множество $v(C)$ всех выигрышей участников C, которые могут быть получены только из альтернатив множества S_C. В общем случае $v(C)$ состоит из всевозможных векторов $(v_1,\ldots,v_n)\in R^n$, таких что существует некоторое $s\in S_C$, при котором выполняется равенство $v_i = u_i(s)$ для всех $i\in C$.

Из предшествующего рассуждения должно быть понятно, что любая игра торга n лиц имеет приписанную ей функцию эффективности, которая в явном виде описывает альтернативы, доступные каждой коалиции. Это приводит нас к понятию характеристической функции, определяемой следующим образом.

Определение 6.17. *Характеристической* (*или* ***коалиционной***) ***функцией*** *игры торга n лиц с функцией эффективности $C\mapsto S_C$ называется функция*

$$v:\mathcal{N}\to\mathcal{P}(R^n),$$

где $\mathcal{N}$ — множество всех коалиций, а $\mathcal{P}(R_n)$ — множество всех подмножеств R^n, определенная как

$$v(C)=\{(u_1(s),u_2(s)\ldots,u_n(s)):s\in S_C\}.$$

В отличие от функции эффективности, которая описывает доступные коалиции C альтернативы S_C, характеристическая функция описывает выигрыши, или полезности, которые могут быть получены членами коалиции C при исходах из S_C. Таким образом, для каждой коалиции C множество $v(C)$ представляет собой подмножество в R^n и описывает всевозможные аллокации полезностей внутри коалиции C. Ввиду того что элемент $v(C)$ является n-мерным вектором $(u_1,\ldots,u_n)$, имеют значение только те координаты вектора, которые соответствуют участникам в составе коалиции C, поскольку остальные координаты могут быть либо нулевыми, либо варьироваться произвольным образом. Заметим, что $v(C)$ не обязательно является подмножеством $v(N)$.

Обычно функцию эффективности отодвигают на задний план и рассматривают лишь характеристическую функцию игры торга. На самом деле, после того как специфицирована характеристическая функция $v:\mathcal{N}\to\mathcal{P}(R^n)$, функции полезности играют минимальную роль. По этой причине игра торга n лиц зачастую определяется для всех практических целей в следующей редуцированной форме.

- ***Игра торга** n **лиц** состоит из группы n участников $\{1,2,\ldots,n\}$ и характеристической функции $v:\mathcal{N}\to\mathcal{P}(R^n)$.*

Для упрощения дальнейшего анализа примем это определение в качестве базового и будем ссылаться на любую такую игру торга как игру в **форме характеристической функции**. Как и ранее, $v(C)$ трактуется как множество всех аллокаций полезностей между игроками в коалиции C.

Посмотрим на конкретном примере, каким образом можно представить игру торга n лиц в форме характеристической функции.

Пример 6.18 (совместное предприятие). Рассмотрим три энергетические компании, расположенные в смежных географических районах. Каждая из компаний имеет четко определенные юрисдикции, в которых она является единственным поставщиком электроэнергии. Однако расположение и возраст заводов таковы, что если компании согласятся обмениваться поставками электроэнергии, то они смогут поставлять электроэнергию дешевле. Один из способов описания того, что будет происходить в различных сценариях, состоит в составлении игры торга в форме характеристической функции.

В этом случае значения характеристической функции для коалиции размерности 1 имеют вид

$$v(\{1\}) = \{(0, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in R\},$$
$$v(\{2\}) = \{(x_1, 0, x_3) : x_1, x_3 \in R\},$$
$$v(\{3\}) = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in R\}.$$

Например, множество $v(\{1\})$ указывает, что прибыль первой компании в случае, когда она не участвует в партнерстве, нормализована к нулю, в то время как прибыль оставшихся компаний составляет x_2 и x_3 (поскольку она неизвестна игроку 1 и может принимать любые значения). Здесь нулевая прибыль означает просто, что компания получает нормальную прибыль, т.е. получает среднюю норму прибыли на свой капитал.

Для коалиций размерности 2 имеем

$$v(\{1,2\}) = \{(0{,}5, 0{,}5, x_3) : x_3 \in R\},$$
$$v(\{2,3\}) = \{(x_1, 0{,}5, 0{,}5) : x_1 \in R\},$$
$$v(\{1,3\}) = \{(0{,}6, x_2, 0{,}4) : x_2 \in R\},$$

и, наконец, для большой коалиции значения равны

$$v(\{1, 2, 3\}) = \{(0{,}8, 1, 0{,}5)\}.$$

Как уже говорилось, выигрыши участников вне коалиции игнорируются. Таким образом, координата, соответствующая игроку i вне коалиции, обозначается x_i; при этом можно считать, что x_i принимает произвольное значение.

В дальнейшем мы будем использовать общепринятое соглашение и просто описывать значения характеристической функции без упоминания о выигрышах участников, не входящих в данную коалицию. Например, будем писать $v(\{1\}) = \{(0)\}$ вместо набора векторов $\{(0, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in R\}$, а для коалиции $\{1,2\}$ будем использовать запись $v(\{1,2\}) = \{(0{,}5, 0{,}5)\}$.

Рассмотрим другой пример игры торга в форме характеристической функции.

Пример 6.19 (игра торга). Рассмотрим экономику с тремя товарами, обозначенными x, y и z, и тремя индивидами, у каждого из которых есть некоторые начальные запасы этих товаров. Все индивиды имеют одинаковые функции полезности

$$u(x,y,z)=\sqrt{xyz}\ ,\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ z\geq 0\ .$$

Вектор начальных запасов первого индивида (игрока 1) $e_1=(1,0,1)$, второго индивида (игрока 2) — $e_2=(0,1,1)$ и третьего индивида (игрока 3) — $e_3=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

По существу, в этой игре коалиции могут позволить любые обмены, которые допускает совокупный начальный запас товаров коалиции. Таким образом, коалиция размерности 1 позволяет игроку потреблять только свои начальные запасы, в то время как в коалиции размерности 2 участник может совершать обмены с другим участником коалиции. Это значит, что функция эффективности $C\mapsto S_C$ для коалиции размерности 2 имеет вид

$$S_{\{1,2\}}=\{((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)):x_i\geq 0,y_i\geq 0,z_i\geq 0 \text{ для } i=1,2, \text{ и}$$

$$x_1+x_2\leq 1,y_1+y_2\leq 1,z_1+z_2\leq 2\},$$

$$S_{\{1,3\}}=\{((x_1,y_1,z_1),(x_3,y_3,z_3)):x_i\geq 0,y_i\geq 0,z_i\geq 0 \text{ для } i=1,3, \text{ и}$$

$$x_1+x_3\leq 1{,}5,y_1+y_3\leq 0{,}5,z_1+z_3\leq 1{,}5\},$$

$$S_{\{2,3\}}=\{((x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)):x_i\geq 0,y_i\geq 0,z_i\geq 0 \text{ для } i=2,3, \text{ и}$$

$$x_2+x_3\leq 0{,}5,y_2+y_3\leq 1{,}5,z_2+z_3\leq 1{,}5\}.$$

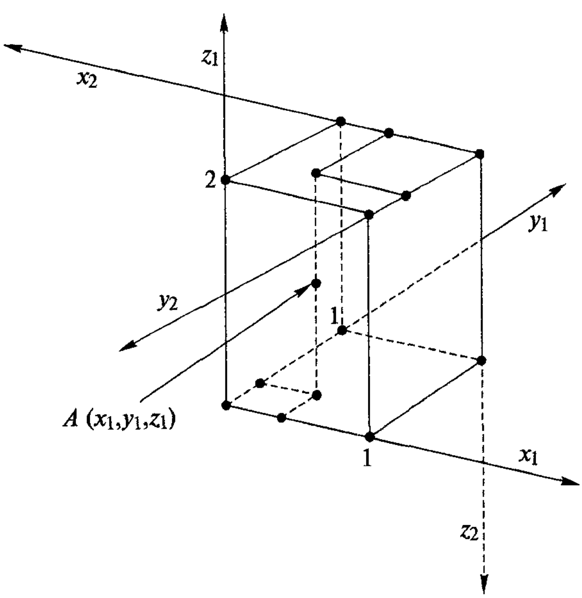


Рис. 6.14

Так что для данных коалиций множества альтернатив являются парами векторов. Множество всех «первых» (относящихся к игроку 1. — *Примеч. пер.*) векторов для множества $S_{\{1,2\}}$ показано на рис. 6.14. Произвольная точка $A(x_1, y_1, z_1)$ внутри ящика на рис. 6.14 является точкой, отвечающей некоторому распределению $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \in S_{\{1,2\}}$.

Теперь опишем характеристические функции коалиций. Для любой коалиции C множество $v(C)$ состоит из всех векторов $(v_1, v_2, v_3) \in R^3$, таких что существуют неотрицательные векторы (x_i, y_i, z_i), $i \in C$, удовлетворяющие

$$\sum_{i \in C}(x_i, y_i, z_i) \le \sum_{i \in C} e_i \quad \text{и} \quad v_i \le \sqrt{x_i y_i z_i} \quad \text{для любого } i \in C.$$

Заметим, что значения v_i для $i \notin C$ любые. Например, имеем

$$v(\{1\}) = \{(v_1, v_2, v_3) : v_1 \le 0, v_2, v_3 \in R\},$$

$$v(\{2\}) = \{(v_1, v_2, v_3) : v_2 \le 0, v_1, v_3 \in R\},$$

$$v(\{3\}) = \{(v_1, v_2, v_3) : v_3 \le \sqrt{\frac{1}{8}} = 0{,}3536, v_1, v_2 \in R\},$$

$$v(\{1,2\}) = \{(v_1, v_2, v_3) : \exists (x_1, y_1, z_1) \ge 0, (x_2, y_2, z_2) \ge 0, \text{ удовлетворяющие}$$
$$x_1 + x_2 \le 1, y_1 + y_2 \le 1, z_1 + z_2 \le 2,$$
$$v_1 \le \sqrt{x_1 y_1 z_1} \quad \text{и} \quad v_2 \le \sqrt{x_2 y_2 z_2}\},$$

$$v(\{1,2,3\}) = \{(v_1, v_2, v_3) : \exists (x_1, y_1, z_1) \ge 0, (x_2, y_2, z_2) \ge 0, (x_3, y_3, z_3) \ge 0,$$
$$\text{такие что } x_1 + x_2 + x_3 \le 1{,}5, y_1 + y_2 + y_3 \le 1{,}5, z_1 + z_2 + z_3 \le 2{,}5,$$
$$v_1 \le \sqrt{x_1 y_1 z_1}, \; v_2 \le \sqrt{x_2 y_2 z_2} \; \text{ и } \; v_3 \le \sqrt{x_3 y_3 z_3}\}.$$

Пересечение множества $v(\{1,2\})$ с плоскостью $v_1 v_2$, т.е. с плоскостью $v_3 = 0$, изображено на рис. 6.15.

Если совокупный начальный запас

$$e = e_1 + e_2 + e_3 = (1{,}5, 1{,}5, 2{,}5)$$

большой коалиции отдать целиком одному индивиду, то его полезность составит 2,37, в то время как полезность других будет нулевой. Однако если поделить весь запас поровну, то потребительский набор каждого индивида составит (0,5, 0,5, 0,8333). Соответствующие полезности участников равны (0,46, 0,46, 0,46). Таким образом, аллокации полезностей (2,37, 0, 0), (0, 2,37, 0), (0, 0, 2,37) и (0,46, 0,46, 0,46) принадлежат множеству $v(\{1,2,3\})$. ■

Одной из важнейших особенностей ситуаций торга n лиц является то, что коалиции зачастую могут предложить своим участникам лучший выигрыш, чем большая коалиция. В таких случаях коалиция, которая гарантирует своим членам больший выигрыш, конечно же, захочет выйти из большой коалиции. На языке теории игр мы говорим, что такая коалиция *блокирует* предложение большой коалиции. Говоря формально, состояние $s \in S$ **блокируется**

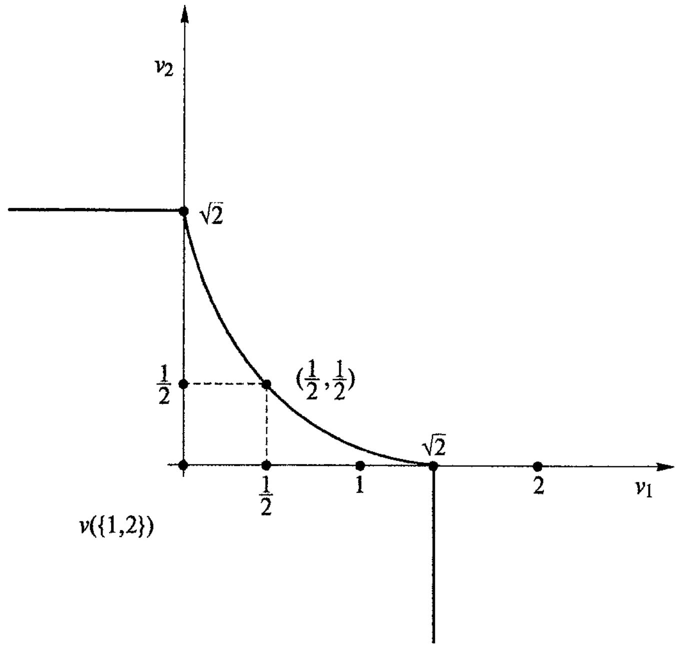


Рис. 6.15. График множества $v(\{1,2\})$

коалицией C (или C **блокирует** s), если существует вектор $(v_1,\ldots,v_n) \in v(C)$, такой что

$$v_i > u_i(s) \text{ для любых } i \in C .$$

Тот факт, что некоторые предложения большой коалиции могут быть заблокированы, гарантирует, что имеют реальный шанс быть принятыми только те предложения большой коалиции, которые не блокируются ни одной из коалиций. Эта идея лежит в основе понятия исходов из ядра, которое мы сейчас определим.

Определение 6.20. *Состояние $s \in S_N$ игры торга n лиц, которое не может быть блокировано ни одной коалицией, называется исходом из ядра (**точкой ядра**). Множество всех точек ядра называется **ядром** игры торга.*

Любая аллокация полезностей $(u_1(s),u_2(s),\ldots,u_n(s))$, где $s \in S_N$ является точкой из ядра, называется **аллокацией полезностей из ядра**. Множество всех аллокаций полезностей из ядра игры торга с характеристической функцией v обозначается $\mathrm{Core}(v)$. То есть

$$\mathrm{Core}(v) = \{(u_1(s),u_2(s),\ldots,u_n(s)) : s \in S_N$$

и не может быть блокировано ни одной коалицией$\}$.

Заметим, что:

(1) $\mathrm{Core}(v)$ является подмножеством $v(N)$;

(2) аллокация полезностей $(u_1,\ldots,u_n) \in v(N)$ принадлежит $\mathrm{Core}(v)$ тогда и только тогда, когда не существует коалиции C и вектора $(v_1,\ldots,v_n) \in v(C)$, удовлетворяющего $v_i > u_i(s)$ для любых $i \in C$.

Теперь должно быть очевидным, что любое «решение» игры торга n лиц должно принадлежать ее ядру, поскольку в противном случае некоторая коалиция будет возражать против предлагаемого решения. Также здесь стоит отметить, что любая точка из ядра удовлетворяет следующему *условию эффективности*: Если s^* лежит в ядре, то не существует другой точки $s \in S_N$, такой что $u_i(s) > u_i(s^*)$ для любого игрока i. (Если существует $s \in S_N$, такое что $u_i(s) > u_i(s^*)$ для любого игрока i, то большая коалиция N заблокирует s^*.)

Важным вопросом в теории игр торгов n лиц является вопрос о непустоте ядра. Очевидно, что это вопрос непосредственной важности, так как игра с пустым ядром не имеет шансов предложить альтернативы, приемлемые для каждой коалиции. Условие, гарантирующее (вместе с некоторыми стандартными предположениями), что ядро игры n лиц непусто, называется *сбалансированностью* и будет вскоре рассмотрено.

Напомним, что символ $\mathbf{1}_C$ обозначает **индикаторную функцию** C, которая действует из N в R и определяется по правилу $\mathbf{1}_C(k) = 1$, если $k \in C$, и $\mathbf{1}_C(k) = 0$, если $k \notin C$[1].

Определение 6.21. *Семейство коалиций $\mathcal{C}$ называется* ***сбалансированным***, *если найдутся такие неотрицательные веса $\{w_C : C \in \mathcal{C}\}$ (называемые* ***сбалансированными весами***), *что*

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} w_C \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_N .$$

Другими словами, семейство коалиций $\mathcal{C}$ сбалансировано, если существуют неотрицательные числа $\{w_C : C \in \mathcal{C}\}$ (балансирующие веса), такие что, положив в качестве $\mathcal{C}_i = \{C \in \mathcal{C} : i \in C\}$ (т.е. $\mathcal{C}_i$ состоит из всех коалиций C, в которые входит игрок i), получим

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_i} w_C = 1$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. К сожалению, не всегда легко проверить, является ли семейство коалиций сбалансированным. Например, если $N = \{1,2,3\}$, то семейства

$$\mathcal{C}_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\} \text{ и } \mathcal{C}_2 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$$

сбалансированы. Для семейства $\mathcal{C}_1$ достаточно взять веса $\{1,1,1\}$, а для семейства $\mathcal{C}_2$ — $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$. В то же время семейство $\mathcal{C}_3 = \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ не сбалансировано.

Определение 6.22 (Бондарева). *Игра торга n лиц называется* ***сбалансированной***[2], *если для любого сбалансированного семейства коалиций $\mathcal{C}$ выполняется условие*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} v(C) \subseteq v(N) .$$

---

[1] В математике индикаторная функция (множества) C называется также **характеристической функцией** C и обозначается также как χ_C.

[2] Важное понятие сбалансированности было введено в теории игр российским экономистом Ольгой Бондаревой в работе: *Бондарева О.Н.* Теория ядра в игре n лиц // Вестник ЛГУ (Математика, механика, астрономия). 1962. Т. 13. № 3. С. 141–142.

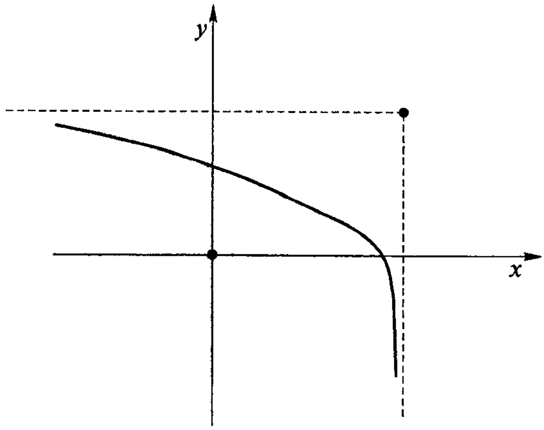


Рис. 6.16. Исчерпывающее, замкнутое и ограниченное сверху множество

Для дальнейшего анализа нам потребуется еще одно свойство множеств — исчерпаемость. Подмножество A Евклидова пространства R^n называется исчерпывающим, если из $(u_1,\ldots,u_n)\in A$ следует $(v_1,\ldots,v_n)\in A$ для любых векторов $(v_1,\ldots,v_n)\in R^n$, таких что $v_i \le u_i$ для любого i. Двумерное исчерпывающее множество изображено на рис. 6.16.

Теперь обратимся к одному из фундаментальных результатов теории кооперативных игр (полученному Гербертом Е. Скарфом), касающемуся существования исходов из ядра.

Теорема 6.23 (Скарф)[1]. *Предположим, что характеристическая функция v игры торга n лиц удовлетворяет следующим свойствам:*

(1) *каждое $v(C)$ замкнуто;*

(2) *каждое $v(C)$ исчерпывающее;*

(3) *если $u\in v(C)$ и $w\in R^n$ удовлетворяют $u_i = w_i$ для всех $i\in C$, то $w\in v(C)$; т.е. для любого $u\in v(C)$ значения u_j при $j\notin C$ могут быть произвольными;*

(4) *каждое $v(C)$ ограничено сверху в R^C; т.е. для любой коалиции C существует некоторая константа $M_C > 0$,* такая что $u_i \le M_C$ для всех $u\in v(C)$ *и всех $i\in C$.*

Тогда, если игра торга сбалансирована, то ее ядро не пусто.

Условие сбалансированности, обеспечивающее непустоту ядра, может показаться достаточно техническим. Один из способов понять это условие — заметить, что веса, приписываемые каждому игроку, принадлежащему различным коалициям сбалансированного семейства, должны давать в сумме единицу. Таким образом, если сбалансированное семейство состоит из двух коалиций, то вес, приписываемый игроку, принадлежащему к обеим коалициям, должен быть равен единице. По существу, веса в сбалансированном семействе отражают наличие игрока и его «значимость» в коалициях. Другими словами, условие сбалансированности указывает на то, что игрок

[1] Эта важная теорема была доказана Г. Скарфом [72]. См. также [40].

получает не меньший выигрыш, будучи членом большой коалиции, чем когда он принадлежит к сбалансированному семейству коалиций. Хотя условие сбалансированности выглядит несколько неудобным в использовании, оно оказывается наиболее полезным из всех условий, которые позволяют гарантировать непустоту ядра.

Следующий пример инспирирован одним из наиболее интересных результатов теории общего равновесия. Это результат о том, что аллокация, соответствующая конкурентному равновесию экономики, является аллокацией из ядра этой экономики. Как мы увидим, он основывается на том факте, что игра экономики без побочных платежей является сбалансированной.

Пример 6.24 (ядро экономики чистого обмена). Экономика чистого обмена состоит из некоторого числа потребителей, имеющих начальные запасы потребительских благ, которыми можно обмениваться по рыночной цене. Пусть n — число товаров в экономике, тогда вектор $(x_{i1},\ldots,x_{in})$ является элементом R^n_+. Заметим, что ни одна координата здесь не может быть отрицательной. Вектор начальных запасов потребителя i обозначим ω_i, он, как и потребительский набор, является элементом R^n_+. Вектор цен p представляет собой элемент единичного симплекса[1] Δ_n в R^n_+. Вектор цен определяет относительные цены товаров (относительно некоторого выбранного товара, используемого в качестве товара-измерителя). При заданном векторе цен $p \in \Delta_n$ каждый потребитель купит потребительский набор $x_i^*(p)$, который максимизирует функцию полезности $u_i(x)$ этого потребителя на множестве всех доступных ему потребительских наборов. Доступные потребительские наборы при данной цене p составляют множество

$$B_i(p) = \{x \in R^n_+ : \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} p_j \omega_{ij}\},$$

которое называется *бюджетным множеством потребителя при векторе цен p*. Оно состоит из всех потребительских наборов, которые может себе позволить потребитель i при данных ценах и начальных запасах ω_i.

В рассматриваемой экономике чистого обмена с m потребителями **равновесным вектором цен** является вектор, при котором рынок уравновешивается, когда все потребители получают оптимальные для себя наборы благ.

Определение 6.25. *Вектор цен $p^* \in \Delta_n$ является **равновесным вектором цен**, если*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^*(p^*) \le \sum_{i=1}^{m} \omega_i,$$

где $x_i^*(p^*)$ — потребительский набор потребителя i, максимизирующий его функцию полезности $u_i(x)$ на бюджетном множестве $B_i(p^*)$.

---

[1] Единичный симплекс определяется как $\Delta_n = \{y \in R^n_+ : \sum_j y_j = 1\}$ и является множеством всех элементов R^n, координаты которых неотрицательны и в сумме равны единице.

Распределение совокупных начальных запасов $\sum_{i=1}^{m}\omega_i$ среди m потребителей является аллокацией начальных запасов, и если $(x_i^*(p^*))_{i=1}^m$ обозначает набор векторов потребительских наборов m потребителей при равновесном векторе цен p^*, то $(x_i^*(p^*))_{i=1}^m$ является **равновесной аллокацией**. Используя концепцию ядра игры, определим ядро экономики.

Определение 6.26. *Аллокация* $(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n)$ *является распределением из ядра экономики чистого обмена с m потребителями, если*

(1) $\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_i \le \sum_{i=1}^{m}\omega_i$;

(2) *не существует коалиции* $C \neq \varnothing$ *и потребительских векторов* $(x_i)_{i\in C}$ *членов коалиции C, таких что:* (*i*) $\sum_{i\in C}\hat{x}_i\sum_{i\in C}\omega_i$ *и* (*ii*) $u_i(x_i) > u_i(\hat{x}_i)$ *для любых* $i \in C$.

Следующий результат показывает, что ядро экономики чистого обмена оказывается не пустым, если функции полезности потребителей квазивогнуты (см. определение 9.8).

Предложение 6.27. *Рассмотрим экономику чистого обмена с m потребителями и n благами, такую что функции полезности* $u_i : R_+^n \to R$ *каждого потребителя i квазивогнуты. Тогда ядро экономики не пусто.*

Доказательство. Доказательство состоит в том, чтобы показать, что игра торга экономики чистого обмена без побочных платежей сбалансирована и удовлетворяет условиям теоремы 6.23. Пусть $v : \mathcal{N} \to \mathcal{P}(R_+^m)$, определенная правилом

$$v(C) = \{z \in R_+^m : \text{ существует } (x_i)_{i\in C}\text{, такой что } \sum_{i\in C} x_i \le \sum_{i\in C}\omega_i$$

$$\text{и } \sum_{i\in C} z_i \le u_i(x_i) \text{ для всех } i \in C\},$$

характеристическая функция игры без побочных платежей; $v(C)$ — множество векторов полезностей, которые коалиция C может гарантировать своим членам при данных совокупных запасах $\sum_{i\in C}\omega_i$ членов коалиции. Покажем, что эта игра без побочных платежей является сбалансированной.

Пусть $\mathcal{C}$ — сбалансированное семейство коалиций с соответствующими весами $\{w_C : C \in \mathcal{C}\}$ и $z \in \bigcap_{C\in\mathcal{C}} v(C)$. Тогда для любой коалиции $C \in \mathcal{C}$ существует потребительский набор $(x_i^C)_{i\in C}$, такой что $\sum_{i\in C} x_i^C \le \sum_{i\in C}\omega_i$ и $z_i \le u_i(x_i^C)$ для любого $i \in C$. Положим $\bar{x}_i = \sum_{\{C\in\mathcal{C}: i\in C\}} w_C x_i^C$, где $i = 1,\ldots,n$. В силу квазивогнутости $u_i : R_+^n \to R$ имеем

$$z_i \le u_i(\bar{x}_i).$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\{C\in\mathcal{C}:i\in C\}} w_C x_i^C = \sum_{C\in\mathcal{C}} w_C \sum_{i\in C} x_i^C \le$$

$$\le \sum_{C\in\mathcal{C}} w_C \sum_{i\in C}\omega_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\{C\in\mathcal{C}:i\in C\}} w_C\omega_i = \sum_{i=1}^{m}\omega_i .$$

Это показывает, что $z\in v(N)$, т.е. эта игра без побочных платежей сбалансирована. Остается показать, что $v(C)$ замкнуто, исчерпывающе и ограничено сверху. Последнее свойство следует из того, что совокупный вектор запасов $\sum_{i\in C}\omega_i$ выступает как ограничение на $v(C)$ для любого $C\in\mathcal{C}$. Таким образом, по теореме 6.23 ядро игры не пусто. ■

Следующий результат показывает, что любая равновесная аллокация должна содержаться в ядре экономики чистого обмена.

Предложение 6.28. *Если* $(x_i^*)_{i=1}^m$ — равновесная аллокация, то она должна быть точкой из ядра.

Доказательство. Поскольку по определению равновесная аллокация удовлетворяет неравенству $\sum_{i=1}^{m}(x_i^*)\le\sum_{i=1}^{m}\omega_i$, нужно показать, что она не будет блокирована ни одной из коалиций. Предположим, что это не так. Тогда найдется коалиция C и потребительские наборы $(x_i^C)_{i\in C}$, такие что (i) $\sum_{i\in C}^{m}x_i\le\sum_{i\in C}^{m}\omega_i$ и (ii) $u_i(x_i^C)>u_i(x_i^*)$ для любого $i\in C$. Поскольку при любом i x_i^* максимизирует полезность i-го потребителя на бюджетном множестве $B_i(p^*)$ при равновесной цене p^*, должно быть выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{n}p_j^*x_{ij} > \sum_{j=1}^{n}p_j^*\omega_{ij}$$

для любого $i\in C$, следовательно,

$$\sum_{i\in C}\sum_{j=1}^{n}p_j^*x_{ij} > \sum_{i\in C}\sum_{j=1}^{n}p_j^*\omega_{ij} . \tag{6.1}$$

Однако, в силу того что $p^*\in\Delta^n$ и неотрицательно, а $\sum_{i\in C}x_i^C\le\sum_{i\in C}\omega_i$, имеем

$$\sum_{i\in C}\sum_{j=1}^{n}p_j^*x_{ij} \le \sum_{i\in C}\sum_{j=1}^{n}p_j^*\omega_{ij} ,$$

что противоречит (6.1). Это завершает доказательство. ■

Из последних двух результатов следует не только то, что ядро экономики чистого обмена не пусто, но также и то, что оно содержит все равновесные аллокации. Важное следствие этого результата состоит в том, что коалиция не может улучшить положение своих членов относительно того, что получают при оптимальных обменах по равновесным ценам. Другими словами, конкурентное равновесие на рынке относительно стабильно, так как поскольку аллокация содержится в ядре экономики, потребители вряд ли разделятся на независимые группы.

В большинстве игр торга выигрыш индивида — это просто количество получаемых им денег. В таких случаях можно суммировать выигрыши всех индивидов в коалиции и представлять сумму или совокупный выигрыш числом, а не набором векторов. В такой ситуации мы будем просто обозначать это число как $v(C)$ и интерпретировать его как характеристическую функцию игры торга. Число $v(C)$ также известно как **ценность** коалиции C. Поскольку $v(C)$ теперь число, представляющее сумму выигрышей всех членов C, $v(C)$ может быть поделено между членами любым способом, каким они решат, так что если индивид i получает u_i, то

$$\sum_{i \in C} u_i = v(C).$$

Причина, по которой $v(C)$ может быть интерпретирована в качестве характеристической функции коалиции, состоит в том, что $v(C)$ можно отождествлять со следующим замкнутым и исчерпывающим подмножеством R^n:

$$\{(u_1, \ldots, u_n) \in R^n : \sum_{i \in C} u_i \leq v(C)\}.$$

Мы будем использовать $v(C)$ и для того, чтобы обозначать суммарный выигрыш членов коалиции C, и чтобы обозначать множество, описанное ранее; значение $v(C)$ всегда будет ясно из контекста. На рис. 6.17 отражены число $v(C)$ и множество $v(C)$ для коалиции $C = \{1,2\}$.

Поскольку выигрыш члена коалиции можно увеличить или уменьшить, давая ему большее или меньшее количество денег, т.е. путем совершения

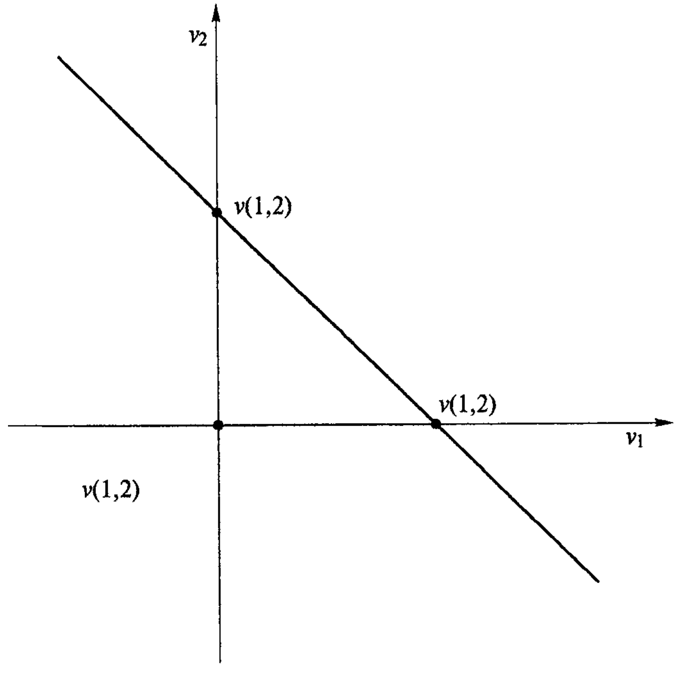


Рис. 6.17. Множество $v(1,2)$ и число $v(1,2)$

побочных платежей, такие игры торга часто называют **играми с побочными платежами**; они также известны как **игры с трансферабельной полезностью**. Игры торга, в которых не разрешены побочные платежи, известны в литературе как **игры без побочных платежей**. Рассмотренная в примере 6.19 игра торга является примером игры без побочных платежей, в то время как игра торга в примере 6.31 (которая будет рассмотрена далее) оказывается игрой с побочными платежами.

Ядро игры с побочными платежами имеет простую и изящную характеристику.

Теорема 6.29. *В игре торга n лиц с побочными платежами v вектор* $(u_1,\dots,u_n)\in v(N)$ *принадлежит ядру v тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i\in C} u_i \ge v(C)$$

для любой коалиции C.

Доказательство. Рассмотрим произвольную игру торга *n* лиц с побочными платежами *v*. Пусть $(u_1,\dots,u_n)$ принадлежит $v(N)$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} u_i \le v(N)$.

Предположим сначала, что $(u_1,\dots,u_n)$ принадлежит ядру, но существует коалиция C с числом членов k ($k=|C|\ge 1$) и такая, что $\sum_{i\in C} u_i < v(C)$. Положим $w=v(C)-\sum_{i\in C} u_i>0$ и определим $v_i=u_i$, если $i\notin C$, и $v_i=u_i+\frac{1}{k}w$, если $i\in C$. Тогда $(v_1,\dots,v_n)$ удовлетворяет $\sum_{i\in C} v_i=v(C)$ и $v_i=u_i+\frac{1}{k}w>u_i$ для всех $i\in C$. Следовательно, коалиция C блокирует $(u_1,\dots,u_n)$, что невозможно по определению ядра. Таким образом, неравенство $\sum_{i\in C} u_i\ge v(C)$ верно для любой коалиции C.

Покажем, что имеет место обратное включение. Пусть $\sum_{i\in C} u_i\ge v(C)$ для любой коалиции C. Если $(u_1,\dots,u_n)$ не принадлежит ядру, то найдется коалиция C и вектор $(v_1,\dots,v_n)$ из множества $v(C)$, такие что выполнено $v_i>u_i$ для любого $i\in C$. Но тогда $\sum_{i\in C} u_i<\sum_{i\in C} v_i(C)\le v(C)$, что противоречит предположению. Таким образом, $(u_1,\dots,u_n)$ лежит в ядре. ■

Существует также следующая характеризация непустоты ядра игры торга с побочными платежами.

Теорема 6.30 (Бондарева)[1]. *Игра торга n лиц с побочными платежами имеет не пустое ядро тогда и только тогда, когда для любого сбалансированного семейства коалиций* $\mathcal{C}$ *существуют балансирующие веса* $\{w_C : C\in\mathcal{C}\}$, *такие что*

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} w_C v(C)\le v(N).$$

[1] Для доказательства и обсуждения этой теоремы см. [40, Section 6.2].

В следующем примере мы рассмотрим игру торга с побочными платежами и исследуем ее ядро. В этой игре торга мы установим непосредственно, что ее ядро не пусто.

Пример 6.31 (рынки неделимых благ). На многих рынках продавцы и покупатели заключают сделки по неделимым благам. Примерами таких рынков служат рынок жилья, рынок подержанных автомобилей и даже рынок молодых врачей-стажеров. На каждом рынке есть множество $\{1,...,I\}$ покупателей и множество $\{1,...,J\}$ продавцов. Каждый продавец обладает единицей неделимого блага, которое ценится им как b_j. Покупатель i оценивает единицу блага продавца j как a_{ij}. Таким образом, если продавец j встречает покупателя i, то общая выгода от заключения между ними сделки составляет $\max\{a_{ij} - b_j, 0\}$. Мы можем предполагать, что покупатель и продавец образуют коалицию. Характеристическая функция коалиции имеет вид

$$v(i,j) = \max\{a_{ij} - b_j, 0\} = \begin{cases} a_{ij} - b_j, & \text{если } a_{ij} > b_j, \\ 0, & \text{если } a_{ij} \le b_j. \end{cases}$$

Можно определить характеристическую функцию и для произвольной коалиции. Например, если коалиция C состоит только из покупателей или только из продавцов, то не существует выгодной сделки для ее участников, поэтому $v(C) = 0$.

Для коалиции C, состоящей как из продавцов, так и из покупателей, предположим, без ограничения общности, что количество покупателей не превосходит количества продавцов. В этом случае пусть

$$k : \{1,\ldots,I\} \cap C \to \{1,\ldots,J\} \cap C$$

— **карта соответствий**, которая взаимнооднозначным способом распределяет покупателей среди продавцов в коалиции C, т.е. k — взаимнооднозначная функция. Для каждой карты соответствий k определяется совокупная выгода коалиции как сумма всех выгод, порождаемых каждой парой. Следовательно, для соответствия k совокупная выгода составит

$$\pi(k) = \sum_{i \in \{1,\ldots,I\} \cap C} v(i, k(i)).$$

Теперь, если $\mathcal{K}$ обозначает (конечное) множество всех карт соответствий, которые распределяют покупателей среди продавцов в коалиции C, то характеристическая функция коалиции C определяется как

$$v(C) = \max_{k \in \mathcal{K}} \pi(k).$$

Пусть $y_i \ge 0$ — выигрыш покупателя i, а $z_j \ge 0$ — выигрыш продавца j. Тогда мы решаем следующую оптимизационную задачу:

$$\text{минимум } \sum_{i=1}^{I} y_i + \sum_{j=1}^{J} z_j$$

при ограничении $y_i + z_j \ge v(i,j)$ для любых i и j.

Пусть $y^* = (y_1^*, \ldots, y_I^*)$ и $z^* = (z_1^*, \ldots, z_J^*)$ — решение этой задачи. Стандартные приемы линейного программирования (слишком технические, чтобы их здесь воспроизводить; см. [70, p. 153–155]) гарантируют, что

$$\sum_{i=1}^{I} y_i^* + \sum_{j=1}^{J} z_j^* = v(N),$$

где N — множество всех продавцов и покупателей на рассматриваемом рынке.

Мы утверждаем, что (y^*, z^*) — аллокация выгод покупателей и продавцов, которая лежит в ядре игры. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим некоторую коалицию C. Снова без ограничения общности будем полагать, что C содержит как минимум столько же покупателей, сколько и продавцов. Существует как минимум одна карта соответствий $k : \{1, \ldots, I\} \cap C \to \{1, \ldots, J\} \cap C$, такая что $\pi(k) = \sum\limits_{i \in \{1, \ldots, I\} \cap C} v(i, k(i)) = v(C)$. Тогда из сформулированной выше задачи минимизации следует, что

$$\pi(k) = \sum_{i \in \{1, \ldots, I\} \cap C} y_i^* + \sum_{i \in \{1, \ldots, J\} \cap C} z_j^* \geq \sum_{i \in \{1, \ldots, I\} \cap C} v(i, k(i)) = v(C).$$

Из теоремы 6.29 следует, что распределение выгод (y^*, z^*) лежит в ядре. ■

Упражнения

1. Рассмотрим игру торга трех лиц со следующей характеристической функцией v

$$v(\{1\}) = v(\{1,2\}) = \{(x, y, z) \in R^3 : x \leq 1\},$$

$$v(\{2\}) = v(\{2,3\}) = \{(x, y, z) \in R^3 : y \leq 1\},$$

$$v(\{3\}) = v(\{1,3\}) = \{(x, y, z) \in R^3 : z \leq 1\} \text{ и}$$

$$v(\{1,2,3\}) = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}.$$

Найдите Core(v). [Ответ: Core(v) = $\{(1,1,1)\}$.]

2. Рассмотрим игру торга двух лиц с характеристической функцией v вида

$$v(\{1\}) = \{(x, y) \in R^2 : x \leq 1\},$$

$$v(\{2\}) = \left\{(x, y) \in R^2 : y \leq \frac{1}{2}\right\} \text{ и}$$

$$v(\{1,2\}) = \left\{(x, y \in R^2 : x < 4 \text{ и } y \leq \frac{x-3}{x-4}\right\}.$$

(a) Покажите, что игра торга сбалансирована и удовлетворяет гипотезам теоремы Скарфа 6.23 (и, следовательно, ее ядро не пусто).

(b) Найдите Core(v). [Ответ: $\text{Core}(v) = \left\{\left(x, \frac{x-3}{x-4}\right) : 1 \leq x \leq 2\right\}$.]

3. Рассмотрим игру торга трех лиц, т.е. $N = \{1,2,3\}$. Покажите, что семейство коалиций $\mathcal{C} = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ не сбалансировано.
4. Покажите, что если $\mathcal{C}$ — сбалансированное семейство коалиций, то каждый участник должен входить в состав хотя бы одной коалиции из $\mathcal{C}$, т.е. $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C = N$.
5. Пусть игра торга n лиц с побочными платежами имеет не пустое ядро. Покажите, что $v(C) + v(N \setminus C) \le v(N)$ для любой коалиции C.
6. Предположим, что в игре торга с побочными платежами выполнено $v(C) \le v(N)$ для любой коалиции C. Если $\mathcal{C}$ — сбалансированное семейство коалиций с балансирующими весами $\{w_C : C \in \mathcal{C}\}$, то верно ли, что $\sum_{C\in\mathcal{C}} w_C v(C) \le v(N)$?
7. Опишите ядро исходов примера 6.18.
8. Рассмотрим игру торга с тремя благами и n игроками, описанную в примере 6.19. Покажите, что игра сбалансирована.
9. Рассмотрим рынок с двумя покупателями и тремя продавцами, где у каждого продавца для продажи имеется единица неделимого блага. Предположим, что

$$a_{11} = 4\,,\ a_{12} = 2\,,\ a_{13} = 7\,,$$

$$a_{21} = 3\,,\ a_{22} = 5\,,\ a_{23} = 7\,,\ \text{и}$$

$$b_1 = 3\,,\ b_2 = 4\,,\ b_3 = 5\,.$$

   Найдите карту соответствий, которая максимизирует суммарные выгоды на рынке. Является ли она единственной?
10. Пусть в игре торга n лиц множество $v(N)$ является замкнутым подмножеством в R^n. Покажите, что ядро также будет замкнутым подмножеством в R^n. Если ядро игры торга замкнуто, то обязано ли $v(N)$ быть замкнутым?

6.4. Правило аллокации: вектор (значений) Шепли

В предыдущем разделе рассматривалось ядро игры торга. Хотя распределение из ядра обладает предпочтительным свойством устойчивости к блокированию коалициями, во многих случаях оно не единственно, и точек в ядре достаточно много. В некоторых ситуациях, таких как голосование по правилу большинства (см. упражнение 5 в конце раздела), ядро может быть пустым. Если анализировать игру о банкротстве или игру торга, в которой сумма денег делится между n участниками, можно обнаружить, что (поскольку промежуточные коалиции не могут поделить все деньги самостоятельно) ядро совпадает с множеством всех эффективных по Парето распределений. В таких случаях не помешало бы отыскать другое правило, которое позволило бы получать единственный вектор выигрышей для участников. При этом вектор выигрышей, принимаемый в качестве решения, конечно, должен быть правдоподобным и разумным.

Вектор Шепли игры с побочными платежами, представленный Л.С. Шепли в [78], дает удобный метод принятия решения относительно доли (выгоды от сотрудничества) каждого участника в игре n лиц. Вектор (значений) Шепли используется в качестве правила аллокации в широком спектре приложений. Он применяется при анализе задач из области управления водными ресурсами, распределении налогов, назначении цен на коммунальные услуги (на продукцию предприятий общественного пользования), внутреннего ценообразования на звонки на дальние расстояния в крупной организации, сборов аэропорта на посадку и т.д.

В этом разделе мы изучим характер решения игр торга n лиц с побочными платежами по правилу Шепли. Пусть $v : \mathcal{N} \to R$ — игра торга с побочными платежами в характеристической форме. Будем говорить, что игрок i **фиктивный**[1], если $v(C \cup \{i\}) = v(C)$ для любой коалиции C. То есть игрок является фиктивным в том случае, если он не вносит вклада ни в одну из коалиций, членом которых является.

Напомним, что **перестановкой** игроков является взаимнооднозначное соответствие $\pi : N \to N$. То есть перестановка является переупорядочением игроков. Пусть C — некоторая коалиция и π — перестановка на N. Определим коалиции $\pi(C)$ и $\pi^{-1}(C)$ следующим образом:

$$\pi(C) = \{\pi(i) : i \in C\} \text{ и } \pi^{-1}(C) = \{i \in N : \pi(i) \in C\}.$$

Для каждой перестановки π рассмотрим новую игру $\pi v : \mathcal{N} \to R$, такую что

$$\pi v(C) = v(\pi^{-1}(C)) \text{ или } \pi v(\pi(C)) = v(C).$$

Другими словами, игра πv представляет собой ту же игру v, но в ней роли участников меняются согласно перестановке π. Стоит отметить, что выигрыш $\pi v(C)$ коалиции C в игре πv такой же, как и выигрыш коалиции $\pi^{-1}(C) = \{i \in N : \pi(i) \in C\}$ в игре v.

Мы готовы теперь определить концепцию вектора (значений) Шепли.

Определение 6.32. ***Вектор Шепли*** *— это правило ϕ, которое каждой игре торга n лиц с побочными платежами v ставит в соответствие n-мерный вектор $\phi(v) = (\phi_1(v), \ldots, \phi_n(v))$, удовлетворяющий следующим свойствам.*

1. ***Эффективность:*** $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(N)$, *т.е. $\phi(v)$ — это аллокация.*
2. ***Симметричность:*** *Для любой перестановки π игры v и любого игрока i выполнено* $\phi_{\pi(i)}(\pi v) = \phi_i(v)$[2].
3. ***Линейность:*** *Если u и v — произвольные игры торга n лиц с побочными платежами, α и β — некоторые скаляры, то*

$$\phi(\alpha u + \beta v) = \alpha\phi(u) + \beta\phi(v),$$

[1] Альтернативный термин в русскоязычной литературе: болван. — *Примеч. пер.*

[2] Это означает, что $\phi_i(v)$, i-я компонента вектора Шепли, зависит не от обозначения игрока, а, скорее, от его влияния в игре, определенного характеристической функцией v.

где $\alpha u+\beta v$ обозначает игру торга n лиц с побочными платежами, определенную как $(\alpha u+\beta v)(C)=\alpha u(C)+\beta v(C)$.

4. ***Независимость от фиктивных игроков***: *Если игрок i фиктивный, то $\phi_i(v)=0$.*

Напомним, что для любого натурального числа n факториал $n!$ определяется как

$$n!=1\times 2\times 3\cdots(n-1)\times n,$$

где $0!=1$ по соглашению. Число $n!$ совпадает с количеством всевозможных перестановок множества из n элементов. Как и ранее, пусть $|C|$ обозначает количество игроков в коалиции C. Также примем соглашение о том, что для любой игры торга v имеет место $v(\varnothing)=0$.

Л.С. Шепли установил в своей работе (1953) следующий выдающийся результат.

Теорема 6.33 (Шепли). *Класс всех игр торга с побочными платежами имеет единственный вектор Шепли. Кроме того, компоненты вектора Шепли в игре торга n лиц с побочными платежами*

$$\phi(v)=(\phi_1(v),\ldots,\phi_n(v))$$

вычисляются по формуле

$$\phi_i(v)=\sum_{C\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!}[v(C\cup\{i\})-v(C)]$$

для любого $i=1,2,\ldots,n$.

Величина $v(C\cup\{i\})-v(C)$ из формулы Шепли называется **предельным вкладом игрока** i, когда он присоединяется к коалиции C.

Заметим, что из формулы Шепли видно, что игрок i получает выигрыш, равный *его ожидаемому предельному вкладу.* Число коалиций, в которые может вступить игрок i, совпадает с числом коалиций, которые могут быть сформированы множеством игроков $N\setminus\{i\}$. Для любой коалиции C, не включающей игрока i, существует $|C|!(|N|-|C|-1)!$ способов упорядочения игроков так, что игроки в C расположены правее i, а игроки в $N\setminus(C\cup\{i\})$ расположены левее игрока i. Поскольку имеется всего $|N|!$ способов упорядочения $n=|N|$ игроков, то вероятность того, что при упорядочении игрок i окажется правее членов коалиции C и левее членов коалиции $N\setminus(C\cup\{i\})$, равна

$$\frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!}.$$

Следовательно, $\frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!}$ можно интерпретировать как вероятность того, что игроки из коалиции C будут правее, а игроки из $N\setminus(C\cup\{i\})$ — левее игрока i соответственно, а затем игрок i вступит в коалицию C. Можно показать, что $\sum_{C\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!}=1$; см. упражнение 3 в конце раздела. Таким образом, предельный вклад игрока i в игре торга составляет

$$\phi_i(v) = \sum_{C \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!}[v(C \cup \{i\}) - v(C)],$$

что в точности совпадает с выражением для соответствующей компоненты вектора Шепли (значения по Шепли).

Таким образом, вектор Шепли в игре торга предоставляет каждому участнику *средний* предельный вклад, который он вносит, вступая в коалицию, состоящую из игроков, расположенных левее его при некотором их упорядочении. Альтернативная трактовка вектора Шепли состоит в том, что он отражает «ожидаемую силу» индивида в игре торга. Таким образом, вектор Шепли имеет как минимум две различные интерпретации. Наиболее подходящее описание зависит от контекста, в котором он применяется. В играх торга под вектором Шепли понимается правило аллокации, согласно которому каждый участник имеет выигрыш, равный средней или ожидаемой величине предельного вклада.

Посмотрим, как работает правило Шепли в простейшей игре торга с двумя участниками, которые хотят поделить между собой некоторую сумму денег. Характеристическая функция этой игры может быть записана в виде

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0 \text{ и } v(\{1,2\}) = M .$$

Заметим, что игрок 1 может присоединиться только к коалиции $\{2\}$, и его предельная ценность в этом случае составит $v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = M$. Поскольку существует только одна перестановка, при которой коалиция $\{2\}$ находится впереди игрока 1, то

$$\phi_1(v) = \frac{0!1!}{2!}[v(\{1\}) - v(\{\varnothing\})] + \frac{1!0!}{2!}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] =$$

$$= \frac{0!1!}{2!} \times 0 + \frac{1!0!}{2!} M = \frac{M}{2}.$$

Аналогичным образом $\phi_2(v) = \frac{M}{2}$. В данном примере вектор Шепли дает вполне обоснованное решение игры. В следующем примере с помощью вектора Шепли найдем распределение издержек работы аэропорта.

Пример 6.34 (сборы аэропорта на посадку). Стоимость строительства и дальнейшей эксплуатации аэропорта складывается из двух типов расходов: постоянных капитальных издержек на строительство и переменных издержек, зависящих от типов самолетов, использующих данный аэропорт. Операционные, или переменные, издержки каждой посадки могут быть приписаны непосредственно к посадке. Капитальные издержки на строительство нужно разделить некоторым способом между всеми пользователями объекта. Обычно капитальные издержки на строительство аэропорта зависят напрямую от «типа» самолета, нуждающегося в наибольшей взлетно-посадочной полосе. В этом примере мы оставим в стороне вопрос о частоте посадок и необходимости в нескольких взлетно-посадочных полосах и рассмотрим задачу о строительстве аэропорта с одной полосой для T различных типов самолетов.

Пусть K_t — стоимость взлетно-посадочной полосы, подходящей для самолетов типа t, где $t=1,\dots,T$. Будем предполагать, что

$$0<K_1<K_2<\dots<K_T,$$

т.е. чем крупнее тип самолета, тем больше издержки эксплуатации. Теперь опишем игру торга с побочными платежами, которую используем для распределения затрат на взлетно-посадочную полосу между различными пользователями. Пусть n — ожидаемое число посадок в течение всего срока службы полосы.

Коалиция C в этой игре торга представляет собой подмножество множества $N=\{1,2,\dots,n\}$. Пусть N_t обозначает (ожидаемое) количество посадок самолетов типа t. Положим $N_0=\varnothing$. Ясно, что $N=\bigcup_{t=1}^{T}N_t$ и $N_t\cap N_s=\varnothing$ при $t\neq s$. Для каждой коалиции C определим

$$t(C)=\max\{t\in\{1,2,\dots,T\}:C\cap N_t\neq\varnothing\},$$

т.е. $t(C)$ — самый крупный тип самолета, который совершает посадки в коалиции C. Характеристическая функция игры определяется следующим образом:

$$v(C)=-K_{t(C)}.$$

Иначе говоря, значение характеристической функции для коалиции представляет собой капитальные издержки, необходимые для строительства взлетно-посадочной полосы для наиболее крупного самолета в составе этой коалиции. Заметим, что $v(N)=-K_T$, т.е. общая стоимость строительства аэропорта покрывается сборами со всех посадок. Договоримся, что $K_0=0$, для того чтобы «определить» значение $v(\varnothing)$. То есть $v(\varnothing)=-K_0=0$. Необходимо вычислить компоненту вектора Шепли $\Phi_i(v)$ для каждой посадки i, которая представляет сборы на посадку $i\in N$.

В этой игре торга, если $i\in N_1$, то

$$v(C\cup\{i\})-v(C)=\begin{cases}K_0-K_1, & \text{если } C=\varnothing,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Аналогично, если $i\in N_2$, то

$$v(C\cup\{i\})-v(C)=\begin{cases}K_0-K_2, & \text{если } C=\varnothing,\\ K_1-K_2, & \text{если } C\subseteq N_1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

В общем случае, если $i\in N_r$, то

$$v(C\cup\{i\})-v(C)=\begin{cases}K_{t(C)}-K_r, & \text{если } t(C)<r,\\ 0, & \text{если } t(C)\geq r.\end{cases}$$

Следовательно, при $i \in N_r$ значение компоненты вектора Шепли $\phi_i(v)$ удовлетворяет соотношению

$$\phi_i(v) = \sum_{C \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!}[v(C \cup \{i\}) - v(C)] =$$

$$= \sum_{C \subseteq N_0 \cup N_1 \cup \cdots \cup N_{r-1}} \frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!}[v(C \cup \{i\}) - v(C)].$$

Полученное выражение для вектора Шепли не очень удобно, так как требует громоздких вычислений. Будем использовать для расчета вектора Шепли иной подход. Определим множество

$$A_l = \bigcup_{r=l}^{T} N_r.$$

Рассмотрим T игр торга n лиц с побочными платежами с характеристическими функциями $v_1, \ldots, v_T$ вида

$$v_l(C) = \begin{cases} 0, & \text{если } C \cap A_l = \varnothing, \\ K_{l-1} - K_l, & \text{если } C \cap A_l \neq \varnothing. \end{cases}$$

Утверждается, что

$$v(C) = \sum_{l=1}^{T} v_l(C)$$

для любой коалиции C. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если $l \le t(C)$, то $C \cap A_l \neq \varnothing$, а если $l > t(C)$, то $C \cap A_l = \varnothing$. Таким образом,

$$\sum_{l=1}^{T} v_l(C) = \sum_{l=1}^{t(C)} (K_{l-1} - K_l) = K_0 - K_{t(C)} = v(C).$$

В силу линейности правила Шепли имеем

$$\phi(v) = \sum_{l=1}^{T} \phi(v_l). \tag{*}$$

Теперь вычислим $\phi_i(v_l)$ для каждого i. Заметим, что из определения v_l немедленно следует

$$v_l(C \cup \{i\}) - v_l(C) = \begin{cases} K_{l-1} - K_l, & \text{если } C \cap A_l = \varnothing \text{ и } i \in A_l, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что $v_l(N) = K_{l-1} - K_l$.

Теперь легко видеть, что для любого $i \in A_l$ компонента вектора Шепли

$$\phi_i(v_l) = \sum_{C \subseteq N \setminus A_l} \frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!}(K_{l-1} - K_l).$$

В частности, из этого следует, что $\phi_i(v_l) = \phi_j(v_l)$ для любых $i, j \in A_l$. Для $i \notin A_l$ имеем $\phi_i(v_l) = 0$. Следовательно,

$$\left[\sum_{t=l}^{T}|N_t|\right]\phi_i(v_l) = \sum_{i\in A_l}\phi_i(v_l) = \sum_{i\in N}\phi_i(v_l) = v_l(N) = K_{l-1} - K_l,$$

откуда

$$\phi_i(v_l) = \frac{K_{l-1} - K_l}{\sum_{t=l}^{T}|N_t|}.$$

Таким образом, вектор Шепли для игры v_l удовлетворяет условию

$$\phi_i(v_l) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \notin A_l, \\ \dfrac{K_{l-1} - K_l}{\sum_{t=l}^{T}|N_t|}, & \text{если } i \in A_l, \end{cases}$$

для любых i и l. Вспомнив, что из (*) $\phi(v) = \sum_{l=1}^{T}\phi(v_l)$ и что $i \in N_k$ влечет $i \in A_l$ при всех $l \le k$, получаем

$$\phi_i(v) = \sum_{l=1}^{k}\frac{K_{l-1} - K_l}{\sum_{t=l}^{T}|N_t|},\quad i \in N_k,\quad k = 1,2,\ldots,T. \tag{**}$$

Это и есть выражение для вектора Шепли в рассматриваемой игре. ■

Посмотрим, какие могут быть значения сборов на посадку согласно правилу Шепли в конкретном числовом примере. Предположим, что строительство взлетно-посадочной полосы, способной принять пять различных типов самолетов, обходится в 10 млн долл. Капитальные издержки на строительство должны окупиться за 10 лет. Ожидается, что в течение 10 лет состоится 10 тыс. посадок.

Издержки на строительство взлетно-посадочной полосы для пяти различных типов самолетов равны

$$K_1 = \$1\,000\,000,\quad K_2 = \$2\,000\,000,\quad K_3 = \$3\,500\,000,$$
$$K_4 = \$7\,500\,000,\quad K_5 = \$10\,000\,000.$$

Ожидается, что среди всех типов самолетов тип 1 совершит посадку 5000 раз, т.е. $|N_1| = 5000$. Аналогично $|N_2| = 2000$, $|N_3| = 1000$, $|N_4| = 1000$ и $|N_5| = 1000$. Если вычислить значения компонент вектора Шепли по формуле (**), получим

$$\phi_i(v) = \frac{K_0 - K_1}{|N_1| + |N_2| + |N_3| + |N_4| + |N_5|} = \frac{-1\,000\,000}{10\,000} = -100$$

для всех $i \in N_1$. Для $i \in N_2$ имеем

$$\phi_i(v) = \sum_{l=1}^{2}\frac{K_{l-1} - K_l}{\sum_{t=l}^{5}|N_t|} =$$

$$= \frac{K_0 - K_1}{|N_1| + |N_2| + |N_3| + |N_4| + |N_5|} + \frac{K_1 - K_2}{|N_2| + |N_3| + |N_4| + |N_5|} = -300.$$

Для $i \in N_3$ получим, что $\phi_i(v) = -800$, для $i \in N_4$ $\phi_i(v) = -2800$, и, наконец, для $i \in N_5$ $\phi_i(v) = -5300$. Таким образом, сборы за посадку для каждого типа самолетов составляют

$100 для типа 1, $300 для типа 2, $800 для типа 3,

$2800 для типа 4, $5300 для типа 5.

В сумме имеем

$$100 \times 5000 + 300 \times 2000 + 800 \times 1000 + 2800 \times 1000 + 5300 \times 1000 = 10\,000\,000.$$

Обратим внимание на то, что сборы за посадку учитывают возрастание издержек строительства взлетно-посадочной полосы для самолетов различных типов и частоту посадок. Например, сборы за посадку самолета типа 5 оказываются наибольшими, поскольку для обеспечения обслуживания самолетов этого типа требуется увеличить издержки строительства взлетно-посадочной полосы на величину

$$\$10\,000\,000 - \$7\,500\,000 = \$2\,500\,000,$$

в то время как ожидаемое число посадок составляет 1000. Структура сборов по правилу Шепли кажется интуитивно понятной и обоснованной.

Представим еще одно приложение вектора Шепли в несколько ином контексте. Рассмотрим задачу налогообложения домохозяйств с целью сбора суммы, необходимой для финансирования некоторого общественного проекта, например строительства моста. Сборы с каждого домохозяйства должны удовлетворять определенным минимальным требованиям. Они должны отражать ту выгоду, которую каждое домохозяйство получит от реализации проекта, и налоговый доход должен быть достаточным для финансирования проекта. Следующий пример демонстрирует, как можно использовать вектор Шепли для определения таких налогов.

Пример 6.35 (распределение налогового бремени). Рассмотрим задачу налогообложения с целью финансирования общественного блага, например моста. Предположим, что у моста n потенциальных пользователей, обозначаемых как игроки $1,...,n$. Возможны два варианта: мост будет построен (B) или не будет построен (NB). В случае (B) полезность игрока i составит $u_i(B) > 0$; в противном случае полезность окажется равной нулю. Полезность $u_i(B)$ можно интерпретировать как наибольшее количество денег, которое игрок i готов заплатить за мост. Чистое богатство участника i составляет W_i. Будем предполагать, издержки K строительства моста таковы, что выполняется $\sum_{i=1}^{n} W_i > K$. То есть если общество решится на постройку, то у него окажется достаточно ресурсов для осуществления этого строительства. Также предположим, что общество в целом получает чистую выгоду от строительства моста, т.е. $\sum_{i=1}^{n} u_i(B) > K$.

Строительство моста должно быть профинансировано с помощью подходящего налогообложения домохозяйств. Заметим, что излишек (чистая выгода) общества от постройки моста составляет $\sum_{i=1}^{n} u_i(B) - K$. А излишек каждого индивида равен

$$u_i(B) - t_i,$$

где t_i — налог, уплаченный индивидом i. Совокупный налоговый сбор должен покрыть издержки строительства, т.е. $\sum_{i=1}^{n} t_i = K$. Таким образом, мы пришли к следующему важному результату.

- *Совокупный излишек общества складывается из сумм излишков каждого индивида в обществе.*

В силу этого факта использование вектора Шепли для распределения излишка при выборе справедливой системы налогов кажется оправданным.

Опишем характеристическую функцию игры торга с побочными платежами, которая представляет эту задачу налогообложения. Для произвольной коалиции C положим

$$v(C) = \begin{cases} \max\{\sum_{i\in C} u_i(B) - K, 0\}, & \text{если } \sum_{i\in C} W_i > K, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

То есть выигрыш коалиции равен сумме излишков всех ее участников, если она имеет достаточно средств для постройки моста. В этом случае предельный вклад индивида i составит

$$v(C \cup \{i\}) - v(C) = \begin{cases} u_i(B), & \text{если } v(C) > 0, \\ \sum_{j\in C\cup\{i\}} u_j(B) - K, & \text{если } v(C) = 0 \text{ и } v(C\cup\{i\}) > 0, \\ 0, & \text{если } v(C) = v(C\cup\{i\}) = 0. \end{cases}$$

Интерпретация такой характеристической функции следующая. Предельный вклад игрока i равен его готовности платить (а именно $u_i(B)$), если коалиция C в состоянии построить мост самостоятельно (т.е. когда $v(C) > 0$). Если коалиция C не может построить мост самостоятельно, но после вхождения индивида i сможет, то предельный вклад индивида i равен совокупному излишку коалиции $C \cup \{i\}$. В противном случае предельный вклад индивида i равен нулю.

Компоненты вектора Шепли для данной игры имеют вид

$$\phi_i(v) = \sum_{\{C\subseteq N\setminus\{i\}:\, v(C)>0\}} \frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!} u_i(B) +$$

$$+ \sum_{\{C\subseteq N\setminus\{i\}:\, v(C\cup\{i\})>0,\, v(C)=0\}} \frac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!} \left[\sum_{j\in C\cup\{i\}} u_j(B) - K \right].$$

Налоги $(t_1^*, \ldots, t_n^*)$, при которых происходит справедливый дележ излишка среди игроков, должны удовлетворять соотношению

$$\phi_i(v) = u_i(B) - t_i^*, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Другими словами, согласно правилу Шепли, каждый игрок должен заплатить налог $t_i^* = u_i(B) - \phi_i(v)$. ■

Посмотрим, к каким налогам приводит такое правило налогообложения на числовом примере. Предположим, что имеются четыре домохозяйства, которые планируют построить общий плавательный бассейн. Стоимость строительства обойдется им в 10 тыс. долл. Домохозяйства располагают следующим богатством:

$$W_1 = \$50\ 000,\ W_2 = \$75\ 000,\ W_3 = \$100\ 000,\ W_4 = \$200\ 000.$$

Готовность платить у этих домохозяйств составляет

$$u_1 = \$5000,\ u_2 = \$4000,\ u_3 = \$6000,\ u_4 = \$8000.$$

Таким образом, ни одно из домохозяйств не готово потратить достаточную сумму денег на строительство бассейна самостоятельно. Единственным вариантом, при котором строительство состоится, остается совместное вложение средств. В этом случае необходимо решить, как разделить издержки. Ясно, что домохозяйства хотят построить бассейн, поскольку совокупный излишек составляет 13 тыс. долл. Можно использовать, как и в предыдущем примере, вектор Шепли для нахождения справедливой доли издержек для каждого домохозяйства. Предположим, что $u_i(B) = u_i$ для каждого i.

Характеристическая функция игры торга, которая представляет описанную ситуацию, имеет вид

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{3,2\}) = 0,\ v(\{1,3\}) = 1000,\ v(\{3,4\}) = 4000,$$

$$v(\{2,4\}) = 2000,\ v(\{1,4\}) = 3000,$$

и

$$v(\{1,2,3\}) = 5000,\ v(\{1,3,4\}) = 9000,\ v(\{2,3,4\}) = 8000,$$

$$v(\{1,2,4\}) = 7000,\ v(\{1,2,3,4\}) = 13\,000.$$

Следовательно,

$$\phi_1(v) = \frac{1!2!}{4!}\{[v(\{1,3\}) - v(\{3\})]\} + [v(\{1,4\}) - v(\{4\})]\} +$$

$$+\frac{2!1!}{4!}\{[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})]\} +$$

$$+\frac{2!1!}{4!}\{[v(\{1,3,4\}) - v(\{3,4\})] + [v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\})]\} +$$

$$+\frac{3!0!}{4!}[v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,3,4\})] =$$

$$= \frac{2}{24} \times 4000 + \frac{2}{24} \times [5000 + 5000 + 5000] + \frac{6}{24} \times 5000 = \frac{34\,000}{12} = 2833{,}33.$$

По заключению примера 6.35 получаем, что

$$t_1^* = u_1 - \phi_1(v) = 5000 - 2833{,}33 = 2166{,}67\,.$$

Аналогичным образом вычисляется

$$\phi_2(v) = \frac{1}{12} \times 2000 + \frac{1}{12} \times [4000 + 4000 + 4000] + \frac{1}{4} \times 4000 =$$

$$= \frac{26\,000}{12} = 2166{,}67\,,$$

откуда

$$t_2^* = 4000 - 2166{,}67 = 1833{,}33\,.$$

Для игрока 3 имеем

$$\phi_3(v) = \frac{1}{12} \times 5000 + \frac{1}{12} \times [5000 + 6000 + 6000] + \frac{1}{4} \times 6000 =$$

$$= \frac{40\,000}{12} = 3333{,}33\,.$$

Следовательно,

$$t_3^* = 6000 - 3333{,}33 = 2666{,}67\,.$$

Наконец,

$$\phi_4(v) = \frac{1}{12} \times (3000 + 2000 + 4000) + \frac{1}{12} \times (7000 + 8000 + 8000) + \frac{1}{4}(8000) =$$

$$= \frac{56\,000}{12} = 4666{,}67\,,$$

поэтому

$$t_4^* = 8000 - 4666{,}67 = 3333{,}33\,.$$

Таким образом, доля издержек (или налоги) домохозяйств составляет

$$t_1^* = 2166{,}67\,,\ t_2^* = 1833{,}33\,,\ t_3^* = 2666{,}67\,,\ \text{и}\ t_4^* = 3333{,}33\,.$$

Поскольку, как и ожидалось, $t_1^* + t_2^* + t_3^* + t_4^* = 10\,000$, мы нашли нормативный способ разделить издержки строительства плавательного бассейна между четырьмя домохозяйствами. Заметим, что разделение издержек зависит от готовности каждого из домохозяйств платить за бассейн. Богатство домохозяйств не играет роли; оно определяет способность домохозяйств найти достаточно средств для строительства.

Мы убедились, что вектор Шепли является удобным правилом аллокации, которое применимо для широкого класса ситуаций. Особо значимый способ размышлять об этом правиле аллокации — рассматривать его как правило, которое распределяет излишек, порожденный в игре торга, в соответствии с ожидаемым предельным вкладом участников. Если ожидается, что индивид добавит к партнерству или группе немного, то и доля суммарного излишка, которую он получит согласно вектору Шепли, будет небольшая. В то время как если вклад индивида в различные группы (партнерства) значителен, то вектор Шепли предписывает ему большую долю от излишка. Соответственно вектор Шепли можно рассматривать как справедливый способ дележа излишка среди участников, где понятие справедливости подразумевает не равномерное распределение, а такое, при котором каждый получает согласно своему вкладу.

Таким образом, вектор Шепли можно рассматривать как нормативное решение игры торга с побочными платежами. Во многих случаях подобные нормативные правила могут не работать и решение игры торга с побочными платежами определяется стратегическими выборами участников. Во многих играх торга метод дележа излишка принимает форму предложений и контрпредложений; обычно в этих случаях определена последовательность ходов игроков. В следующем разделе мы рассмотрим игры торга, решения которых определяются стратегическими взаимодействиями между участниками.

Упражнения

1. В примере 6.34 об установлении сборов аэропорта на посадку для каждого $i \in N_r$ мы использовали формулу

$$v(C \cup \{i\}) - v(C) = \begin{cases} K_{t(C)} - K_r, & \text{если } t(C) < r, \\ 0, & \text{если } t(C) \geq r. \end{cases}$$

Проверьте, что формула верна.

2. Покажите, что вектор Шепли удовлетворяет свойствам эффективности, симметричности, линейности и независимости от фиктивных игроков, как это сформулировано в определении 6.32.

3. Покажите, что для любого i выполнено $\sum\limits_{C \subseteq N \setminus \{i\}} \dfrac{|C|!(|N|-|C|-1)!}{|N|!} = 1$.

4. Следующая игра торга n лиц с побочными платежами в форме характеристической функции носит название «**Мажоритарное голосование**». Предположим, что в этой игре с побочными платежами число игроков $|N| = n$ нечетно. Характеристическая функция игры имеет вид

$$v(C) = \begin{cases} 1, & \text{если } \dfrac{|C|}{n} \geq \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

То есть значение для коалиции равно 1, если число ее участников составляет большинство, и 0 — если меньшинство. Найдите вектор Шепли данной игры. [Подсказка: заметим, что если $\frac{|C|}{n} \geq \frac{1}{2}$, то должно иметь место $\frac{|C|}{n} > \frac{1}{2}$.]

5. Покажите, что игра «Мажоритарное голосование» с нечетным числом игроков, описанная в предыдущем упражнении, имеет пустое ядро.

6. Предположим, что нам необходимо построить аэропорт, который сможет обслуживать десять различных типов самолетов. Издержки строительства составляют 1 млрд долл. Капитальные издержки необходимо покрыть за 20 лет. Ожидается, что в течение этого периода произойдет 100 тыс. посадок различных типов самолетов. Пусть N_i обозначает количество посадок самолетов типа i. Тогда ожидаемое число посадок различных типов самолетов следующее:

$$N_1 = 20\,000\,,\ N_2 = 10\,000\,,\ N_3 = 10\,000\,,\ N_4 = 15\,000\,,$$
$$N_5 = 5000\,,\ N_6 = 6000\,,\ N_7 = 7000\,,\ N_8 = 7000\,,$$
$$N_9 = 15\,000\,,\ N_{10} = 5000\,.$$

Затраты на строительство аэропорта, обслуживающего только первые пять типов, составляют

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = K_5 = \$500\,000\,000\,.$$

Затраты на строительство аэропорта, который сможет обслуживать еще и другие типы, равны

$$K_6 = K_7 = \$750\,000\,000\,,\ K_8 = K_9 = \$900\,000\,000$$

и

$$K_{10} = \$1\,000\,000\,000\,.$$

Используя вектор Шепли, найдите оптимальные сборы на посадку для различных типов самолетов.

7. Предположим, что издержки на постройку оросительного канала равны 100 млн долл. Канал сможет обслуживать пять различных типов сельскохозяйственных угодий. Различные типы сельскохозяйственных угодий имеют различную удаленность от источника канала, таким образом, издержки прокладки канала до разных участков будут различаться. Издержки возрастают и составляют

$$K_1 = \$10\,000\,000\,,\ K_2 = \$30\,000\,000\,,\ K_3 = \$50\,000\,000\,,$$
$$K_4 = \$70\,000\,000\,,\ K_5 = \$100\,000\,000\,.$$

Имеется по 1000 участков каждого типа.

(a) Опишите метод назначения взносов за пользование оросительным каналом. Объясните ваш выбор.

(b) Найдите взносы с каждого типа участков в соответствии с выбранным методом.

8. Предположим, что необходимо соорудить мост для сообщества, состоящего из 10 000 человек. Издержки строительства составят 1 млн долл.

(a) Если все индивиды готовы уплатить одну и ту же сумму за сооружение моста, то какими окажутся доли каждого индивида в этих издержках?

(b) Если половина этого сообщества ценит мост в 2 раза больше, чем вторая половина, как изменится разделение издержек? Используете ли вы одно и то же правило аллокации в обеих группах?

9. Игра торга v с n участниками с побочными платежами называется выпуклой, если для любых пар коалиций C и T выполняется следующее неравенство:

$$v(C \cup T) + v(C \cap T) \geq v(C) + v(T).$$

Пусть v — выпуклая игра торга с побочными платежами.

(a) Покажите, что если $C \subseteq T$, то для любого $i \notin T$ имеет место

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(C \cup \{i\}) - v(C).$$

(b) Для произвольной коалиции C определим новую игру торга с побочными платежами v_C с игроками из множества C, такую что $v_C(T) = v(T)$ для всех коалиций T из C (т.е. $T \subseteq C$). Покажите, что если $C \subseteq T$, то для любого игрока $i \in C$ выполнено соотношение

$$\Phi_i(v_C) \leq \Phi_i(v_T).$$

(c) Используя результаты пунктов (a) и (b), покажите, что вектор Шепли выпуклой игры торга v с побочными платежами лежит в ядре. На этом основании заключите, что любая выпуклая игра торга с побочными платежами имеет не пустое ядро.

10. Предположим, что у фирмы есть 100 тыс. акционеров. Среди них трое владеют значительными пакетами акций. У первого акционера 25% акций, у второго 30% акций и у третьего 35% акций. Остальные акции распределены между мелкими акционерами, причем никто из них не владеет более чем 1% акций. Любое решение фирмы принимается при одобрении акционерами, владеющими большинством акций.

(a) Опишите игру «Мажоритарное голосование» v для данной задачи. То есть опишите характеристическую функцию игры, которая ставит в соответствие значение 1 выигравшей коалиции и 0 — остальным.

(b) Найдите вектор Шепли этой игры торга.

(c) Поясните смысл вектора Шепли для этой игры.

11. Предположим, что три фирмы, 1, 2 и 3, изучают перспективы (образования) совместного предприятия, которое, как ожидается, увеличит их стоимость. Оценочные величины рыночной стоимости различных вариантов совместной деятельности составляют

$$v(1) = v(2) = v(3) = \$1\,000\,000,$$

$$v(1,2) = v(2,3) = v(1,3) = \$3\,000\,000,$$

$$v(1,2,3) = \$5\,000\,000,$$

где $v(i)$ обозначает рыночную стоимость фирмы i, если она не вступает в совместное предприятие, $v(i,j)$ обозначает рыночную цену совместного предприятия, если фирма i вступает в соглашение с фирмой j, $v(1,2,3)$ обозначает рыночную цену совместного предприятия трех фирм.

(a) Опишите метод нахождения ожидаемого роста стоимости каждой фирмы, когда она вступает в совместное предприятие.

(b) Используя этот метод, найдите ожидаемый рост стоимости каждой фирмы, если фирмы образуют совместное предприятие.

(c) Как вы думаете, выгодно ли фирмам образовать совместное предприятие? Ответ поясните.

6.5. Динамический торг двух лиц

В предыдущих разделах мы изучили некоторые детали игры торга. Преимущественно обсуждался вопрос о дележе излишка согласно правилу аллокации, который удовлетворял бы определенным нормативным свойствам. Решение игры торга по Нэшу, решение по Калаи — Смородинскому и вектор Шепли представляют собой решения игр торга с учетом таких условий. Даже ядро игры обладает некоторыми особенностями, благодаря которым оно может считаться разновидностью концепции нормативного решения.

Этот раздел будет посвящен изучению игр торга с позитивистской точки зрения. Вместо того чтобы заниматься поиском решения, которое обладало бы определенными характеристиками, будем стараться предсказать, что случится, если процесс торга окажется последовательным. В частности, рассмотрим, что будет происходить в играх торга, где процесс торгов фактически принимает форму серии предложений и контрпредложений. В этих случаях процесс торгов становится динамической игрой и важным оказывается стратегическое поведение игроков.

Типичный динамический торг двух лиц имеет место, когда потенциальный покупатель и продавец дома делают предложения и контрпредложения. Игра начинается с того, что продавец дома объявляется цену его продажи. Потенциальный покупатель обычно предлагает цену, которая ниже указанной продавцом, но выше той, что, по мнению покупателя, вероятно, устроит продавца. Продавец, конечно же, может отказаться. И он поступит так в том случае, если уверен, что найдется другой покупатель, который предложит более высокую цену. Процесс торга может быть описан динамической игрой двух лиц, в которой первым ходит продавец, затем покупатель, после чего снова продавец и т.д.

В главе 4 было показано, как решать динамические игры с совершенной и несовершенной информацией. Здесь мы воспользуемся выводами этой главы для понимания динамических торгов. В разделе основное внимание будет уделено модели игры торга, описанной в определении 6.1. Упростим эту модель, предположив симметричность и нормализовав объем совокупного излишка к 1. Всюду в разделе будем придерживаться следующего соглашения.

- *Игрок 1 является покупателем, а игрок 2 является продавцом.*

Полезности игроков задаются долей излишка, которую они получают. В случае разногласия полезности обоих игроков принимаются равными нулю. Таким образом, множество альтернатив торга этой игры торга S есть

$$S = \{(s_1, s_2) : s_1 \geq 0, s_2 \geq 0 \text{ и } s_1 + s_2 \leq 1\}.$$

Полезности игроков имеют вид

$$u_1(s_1,s_2)=s_1 \text{ и } u_2(s_1,s_2)=s_2 .$$

Следовательно, множество аллокаций полезностей игры торга имеет вид

$$\mathcal{U}=\{(s_1,s_2):(s_1,s_2)\in S\}.$$

Множество альтернатив торга S и множество аллокаций полезностей $\mathcal{U}$ в этом случае совпадают; они изображены на рис. 6.18.

Поскольку игра торга разыгрывается стратегически, получаемые игроками полезности зависят от равновесия игры, разыгрываемой двумя этими игроками. Так как процедура торга состоит в предложении альтернативных вариантов, то она оказывается динамической игрой и наиболее вероятное соглашение — это соглашение, определяемое «равновесием» этой игры.

Альтернативные предложения в игре делаются в периоды времени $t=1,2,\ldots$. Будем обозначать долю пирога, получаемую игроком i в период t, через $s_{t,i}$ и полезность игрока i через $u_i(s_{t,1},s_{t,2})=s_{t,i}$, где $s_{t,2}=1-s_{t,1}$. На протяжении всего обсуждения будем предполагать, что

- *все предложения и контрпредложения всегда формулируются в терминах доли пирога, которую получает игрок 1 (покупатель). То есть все предложения и контрпредложения представляются в форме $s_{t,1}$.*

Игра начинается с того, что игрок 1 (покупатель) делает предложение $s_{1,1}$ в период $t=1$, т.е. игрок 2 (продавец) получает $s_{1,2}=1-s_{1,1}$. Игрок 2 может либо принять предложение, либо отказаться от него. Если предложение принято, игра заканчивается. Если предложение отвергнуто, игра переходит в период $t=2$. Игрок 2 совершает предложение $s_{2,1}$ игроку 1, т.е. игрок 2 имеет при этом $s_{2,2}=1-s_{2,1}$. Игрок 1 может теперь либо согласиться, либо отказаться. Если согласится, то игра заканчивается; в противном случае игра переходит в период $t=3$, где игрок 1 делает контрпредложение. Игра (граф которой изображен на рис. 6.19) продолжается в таком духе и в принципе может длиться неопределенное время.

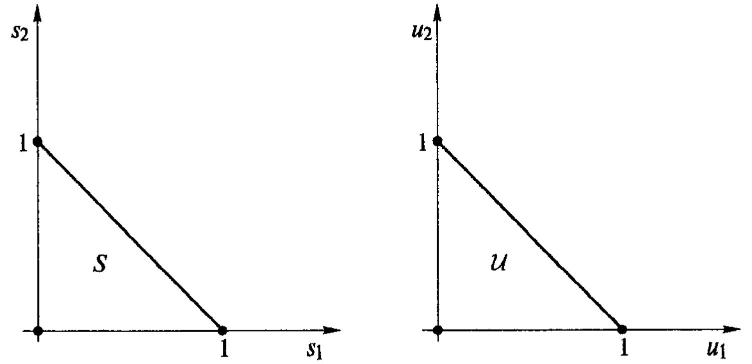


Рис. 6.18

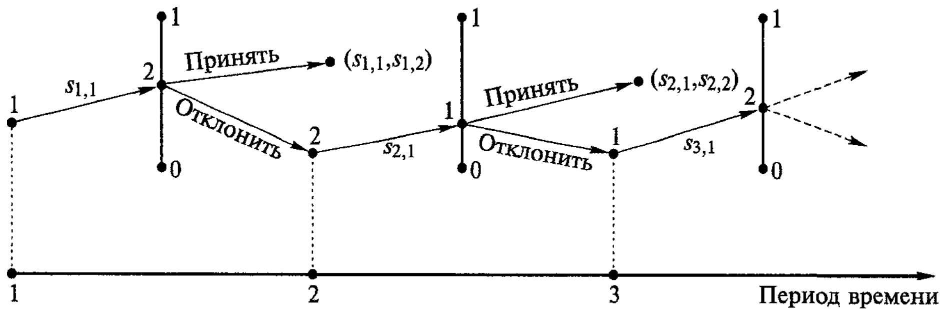


Рис. 6.19

Поскольку динамическая игра разыгрывается во времени, то если игрок предпочитает получить свою долю пирога как можно раньше, возникают издержки ожидания. Такое предпочтение потребления сегодня потреблению в будущем указывает на положительное временное предпочтение. **Коэффициент временных предпочтений** — это количество единиц потребления, от которых индивид готов отказаться, чтобы иметь возможность потреблять сегодня, а не в следующий период. Таким образом, если коэффициент временных предпочтений равен r, то индивиду безразлично, потребить ли c единиц сегодня или потребить $(1+r)c$ единиц завтра. Эквивалентным образом, c единиц завтра — это то же самое, что $\frac{c}{1+r}$ единиц сегодня. Положим $\delta = \frac{1}{1+r}$ и назовем ее **ставкой дисконтирования** (или **дисконтирующим множителем**). Ясно, что $0 < \delta < 1$. Таким образом, если процесс торга закончился соглашением после t периодов $(s_{t,1}, s_{t,2})$, где $s_{t,2} = 1 - s_{t,1}$, то полезности игроков со ставками дисконтирования δ_1 и δ_2 соответственно имеют вид

$$u_1(s_{t,1}, s_{t,2}) = \delta_1^{t-1} s_{t,1} \text{ и } u_2(s_{t,1}, s_{t,2}) = \delta_2^{t-1} s_{t,2}.$$

С помощью «дисконтированных» полезностей можно явно вычислить **издержки отсрочки при торге**, которые являются просто издержками ожидания до следующего периода. Для игрока 1 отсрочки в период t при доле s в следующий $t+1$ период составляют

$$\delta_1^{t-1} s - \delta_1^t s = \delta_1^{t-1}(1-\delta_1)s,$$

что является разницей между выигрышами, возникшей исключительно в связи с необходимостью ждать период начиная с периода t. Заметим, что издержки отсрочки в этом случае не являются константой и зависят от доли пирога, получаемой игроком.

Поскольку мы имеем дело с динамической игрой с совершенной информацией, естественно искать совершенное в подыграх равновесие. Начнем с анализа трехпериодной игры торга с конечным горизонтом, которая изображена на рис. 6.20.

Решим игру методом обратной индукции. Заметим, что на финальной стадии в период 3 игрок 2 согласится на предложение, если $0 \le s_{3,1} < 1$, и

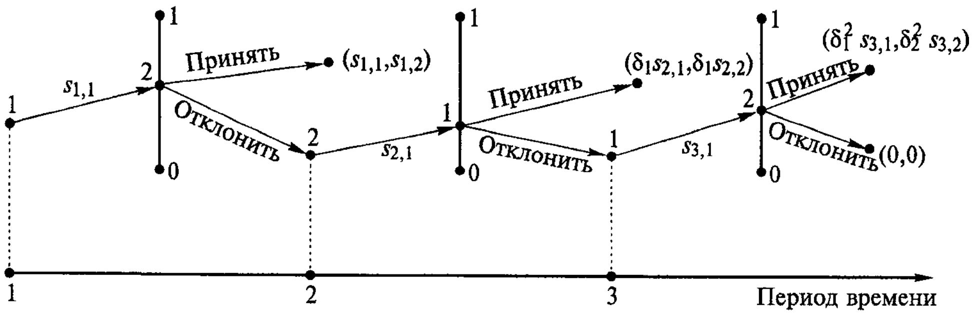


Рис. 6.20

будет безразличен (между опциями «соглашаться», не соглашаться») в случае $s_{3,1} = 1$. Таким образом, в начале периода 3 игрок 1, зная, что игрок 2 не откажется (поскольку отказ приводит к нулевому выигрышу), предложит величину $s_{3,1} < 1$, но очень близкую к 1 (т.е. $s_{3,1} \approx 1$), в результате чего игрок 2 получит нулевой (или близкий к нулю) выигрыш. Игрок 1 в этом случае получит δ_1^2 (или величину, очень близкую к δ_1^2).

Следовательно, в начале периода 2 игрок 2 должен сделать игроку 1 предложение $s_{2,1}$, такое что

$$\delta_1 s_{2,1} \geq \delta_1^2 \text{ или } s_{2,1} \geq \delta_1;$$

в противном случае игрок 1 отклонит предложение и игра перейдет в период 3, где игрок 2 имеет нулевой выигрыш. Поскольку при ограничении $s_{2,1} \geq \delta_1$ величина $s_{2,1}^* = \delta_1$ максимизирует выигрыш $\delta_2 s_{2,2} = \delta_2(1 - s_{2,1})$ игрока 2 в период 2, то игрок 2 захочет сделать предложение $s_{2,1}^* = \delta_1$ игроку 1 в начале периода 2. В частности, если игрок 2 сделает предложение $s_{2,1}^* = \delta_1$ в начале периода 2, то игрок 1 согласится и получит выигрыш δ_1^2, а игрок 2 получит выигрыш $\delta_2(1-\delta_1)$.

Теперь, в начале периода 1 игрок 1 предвидит, что игрок 2 сделает предложение $s_{2,1}^* = \delta_1$, если игра дойдет до периода 2. Это значит, что игрок 2 отклонит предложение в случае, если не будет выполнено $1 - s_{1,1} \geq \delta_2(1-\delta_1)$, или $s_{1,1} \leq 1 - \delta_2(1-\delta_1)$. Следовательно, игрок 1 будет максимизировать свой выигрыш, предлагая

$$s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1-\delta_1).$$

Когда игрок 1 делает подобное предложение, он сравнивает выигрыш $1 - \delta_2(1-\delta_1)$ с выигрышем, который ожидает получить в периоде 2, т.е. $s_{2,1}^* = \delta_1$. Поскольку $1 - \delta_2(1-\delta_1) \geq \delta_1$ (почему?), игрок 1 (если играет оптимально) должен предложить $s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1-\delta_1)$.

Таким образом, мы получили следующее совершенное в подыграх равновесие этой игры.

Теорема 6.36. *Предположим, что в трехпериодной игре торга стратегии участников имеют следующий вид.*

Стратегия игрока 1

- *Период 1: Предложить* $s_{1,1} = 1 - \delta_2(1-\delta_1)$.
- *Период 2: Согласиться, если* $s_{2,1} \geq \delta_1$, *иначе отвергнуть.*
- *Период 3: Предложить* $s_{3,1} = 1$ *или* $s_{3,1} < 1$, *но очень близкое к 1.*

Стратегия игрока 2

- *Период 1: Согласиться, если* $s_{1,1} \leq 1 - \delta_2(1-\delta_1)$, *в противном случае отвергнуть.*
- *Период 2: Предложить* $s_{2,1} = \delta_1$.
- *Период 3: Согласиться.*

Тогда итоговый профиль стратегий является совершенным в подыграх равновесием, которое приводит к соглашению при торге

$$s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1-\delta_1) \quad и \quad s_{1,2}^* = \delta_2(1-\delta_1). \qquad (*)$$

В общем случае соглашение при торге, определенное соотношением (*), будет отличаться от решения $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, которое получается с помощью нормативных концепций решения предыдущих разделов.

Хотя мы смогли найти решение трехпериодной задачи торга, возникают серьезные вопросы насчет того, насколько хорошо эта трехпериодная игра с конечным горизонтом отражает сущность динамического торга. В самом деле, вполне правдоподобно, что игроки могут делать предложения и контрпредложения в течение любого числа периодов. Ситуация, в которой игрок всегда может сделать контрпредложение, не может быть описана игрой «с конечным горизонтом». Следовательно, это приводит к необходимости исследовать, что же произойдет в версии этой игры торга «с бесконечным горизонтом». Хотя ни один процесс торга не будет длиться бесконечно, рассуждение, ведущее к соглашению, хорошо описывается при использовании бесконечных игр.

Для анализа бесконечных игр оказывается полезным изучение равновесия в конечной игре, при которой выигрыши в конечный период времени являются «продолжительными». **Выигрыш продолжения** — это такой выигрыш, который ожидает получить игрок, в случае если игра сможет быть продолжена, а не завершена. Таким образом, если в конце периода 3 игрок 2 отвергнет предложение игрока 1, то вместо выигрыша (0,0) будет получен выигрыш $(\delta_1^2 x, \delta_2^2(1-x))$, где x — *доля пирога, получаемая игроком 1 в случае, если игра будет продолжаться бесконечно долго.*

Иначе говоря, $(x,(1-x))$ является ожидаемым соглашением в случае бесконечного торга. Следовательно, в начале периода 3 игрок 1 знает, что игрок 2 согласится на предложение $s_{3,1}$ только в том случае, если

$$\delta_2^2(1-s_{3,1}) \geq \delta_2^2(1-x), \text{ или } s_{3,1} \leq x.$$

Поэтому игрок 1 сделает предложение $s_{3,1}^* = x$. В этом случае игрок 1 получает $\delta_1^2 x$. Следовательно, на начало периода 2 игрок 2 должен сделать предложение $s_{2,1}$, такое что

$$\delta_1 s_{2,1} \geq \delta_1^2 x \text{, или } s_{2,1} \geq \delta_1 x \text{;}$$

в противном случае игрок 1 откажется и игра перейдет в период 3. Таким образом, на начало периода 2 игрок 2 сделает предложение $s_{2,1}^* = \delta_1 x$, так как оно максимизирует его выигрыш $\delta_2^2(1 - s_{2,1})$. В этом случае выигрыш игрока 2 составляет $\delta_2(1 - \delta_1 x)$, что превышает $\delta_2^2(1 - x)$ (почему?).

Если игрок 1 ожидает этого в начале периода 1, то он сделает предложение $s_{1,1}$, такое что

$$1 - s_{1,1} \geq \delta_2(1 - \delta_1 x) \text{, или } s_{1,1} \leq 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x) \text{.}$$

Поэтому $s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x)$, а выигрыш игрока 2 равен $\delta_2(1 - \delta_1 x)$. Заметим, что выигрыш первого игрока больше, чем $\delta_1 x$.

Проведенное рассуждение можно подытожить следующим образом.

Теорема 6.37. *Предположим, что в игре торга трех лиц с выигрышами продолжения $(x, (1 - x))$ стратегии игроков имеют следующий вид.*

Стратегия игрока 1

- *Период 1: Предложить $s_{1,1} = 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x)$.*
- *Период 2: Согласиться, если $s_{2,1} \geq \delta_1 x$, иначе отвергнуть.*
- *Период 3: Предложить $s_{3,1} = x$.*

Стратегия игрока 2

- *Период 1: Согласиться, если $s_{1,1} \leq 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x)$, в противном случае отвергнуть.*
- *Период 2: Предложить $s_{2,1} = \delta_1 x$.*
- *Период 3: Согласиться.*

Тогда итоговый профиль стратегий является совершенным в подыграх равновесием, которое приводит к соглашению

$$s_{1,1}^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x) \text{ и } s_{1,2}^* = \delta_2(1 - \delta_1 x) \text{.}$$

Отметим, что равновесное соглашение зависит от выигрыша продолжения x. Возникает следующий важный вопрос:

- *Как найти подходящее значение x?*

Ясно, что x должно принимать значение, совместимое с разыгрыванием игры в соответствии с равновесными стратегиями. Если это так, то x также должно быть предложено в начале периода 1, поскольку процесс торга, который имеет место в периоде 3, является репликой процесса торга, начинающегося с периода 1. Следовательно, согласно теореме 6.37 равновесное значение x^* должно удовлетворять уравнению $x^* = 1 - \delta_2(1 - \delta_1 x^*)$, или

$$x^* = \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2} \text{.}$$

Таким образом, мы установили следующий важный результат.

Теорема 6.38. *Предположим, что в игре торга двух лиц ставки дисконтирования игроков составляют δ_1 и δ_2 соответственно. Если игроки могут делать* *неограниченное число предложений (так что игра торга может рассматриваться как игра с бесконечным горизонтом), то равновесное решение игры торга имеет вид*

$$(x^*, 1-x^*) = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2} \right). \qquad (**)$$

Обратим внимание на то, что равновесие в игре торга зависит от ставок дисконтирования δ_1 и δ_2. Если $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, то игрок 1 (покупатель) получит $\frac{1}{1+\delta}$, а игрок 2 (продавец) получит $\frac{\delta}{1+\delta}$. При $\delta < 1$ имеем: $\frac{\delta}{1+\delta} < \frac{1}{1+\delta}$. Следовательно, при одинаковых временных предпочтениях игрок 1 получает бóльшую долю пирога, чем игрок 2. Кроме того, чем меньше дисконтирующий множитель (т.е. чем менее терпеливы участники), тем меньше доля пирога, получаемая игроком 2.

Проиллюстрируем результат теоремы 6.38 на примере.

Пример 6.39 (покупка автомобиля). Индивид решил приобрести автомобиль «Форд Эксплорер» (Ford Explorer). Этот внедорожник обычно продается за 30 865 долл. и имеет фактурную цену в размере 27 786 долл. Покупатель знает, что продавец согласится на цену, которая будет меньше указанной, но больше фактурной, и, скорее всего, откажется, если предлагаемая цена окажется ниже фактурной. Покупатель довольно терпелив, и его дисконтирующий множитель составляет $\delta_1 = 0,95$ в течение семидневного периода. Продавец готов продать автомобиль по приемлемой цене и имеет дисконтирующий множитель $\delta_2 = 0,9$ в течение того же семидневного периода. Процесс торга начинается с покупателя, являющегося игроком 1, который совершает ценовое предложение. Продавец, являющийся игроком 2, имеет выбор — принять предложение или отказаться от него, сделав контрпредложение.

Описанный процесс торга может рассматриваться в качестве динамической игры, в которой покупатель делает первое предложение о цене, находящейся в рамках указанной и фактурной цен. Продавец отвечает либо согласием, либо отказом с последующим контрпредложением. Неразумно предполагать, что на формирование предложения или контрпредложения может уйти целая неделя. Здесь мы будем игнорировать необязывающие переговоры, которые могут иметь место в течение короткого промежутка времени и не имеют отношения к принятию решения. Поскольку, предположительно, может быть сделано неограниченное число предложений и контрпредложений, рассматриваемая динамическая игра торга является игрой с бесконечным горизонтом. Согласно теореме 6.38 решение такого торга задается формулой

$$(x^*, 1-x^*) = \left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2} \right) =$$

$$= \left(\frac{1-0,9}{1-0,95\times 0,9}, \frac{0,9(1-0,95)}{1-0,95\times 0,9} \right) = (0,6897, 0,3103),$$

где x^* — доля пирога, получаемая покупателем, а $1 - x^*$ — доля пирога, идущая продавцу. Размер пирога в данном случае составляет $30\,865 - 27\,786 = 3079$ долл. Так как $x^* = 0{,}6897$, покупатель получит

$$0{,}6897 \times 3079 = \$2123{,}59$$

от общего пирога, а продавец получит остаток. Цена, которую предложит покупатель, составит

$$p^* = \$30\,865 - \$2123{,}59 = \$28741{,}41\,.$$

Наиболее вероятно, что продавец согласится на такую цену, следовательно, торг окончится быстро и «Форд Эксплорер» будет продан приблизительно за 28 700 долл.

Упражнения

1. Предположим, что покупатель подумывает о покупке дома с объявленной ценой в 150 тыс. долл. Он может сделать предложение продавцу, который может его принять или отвергнуть, сделав контрпредложение. Затем покупатель имеет возможность принять контрпредложение или отвергнуть его, сделав финальное контрпредложение. На этой стадии торг заканчивается тем, что продавец примет финальное контрпредложение или откажется его принять.

(a) Изобразите динамическую игру торга при условии, что дисконтирующий множитель между предложениями и контрпредложениями равен $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}99$ и известно, что резервная цена продавца дома равна 135 тыс. долл. (Резервная цена — это такая цена, ниже которой продавец откажется продавать.) [Подсказка: размер пирога равен 15 тыс. долл.]

(b) Решите трехпериодную игру торга, описанную в пункте (a).

2. Предположим, что процесс торга предыдущего упражнения может продолжаться бесконечно. Каким будет решение задачи торга в этом случае?

3. В примере 6.39 (покупка автомобиля) происходит торг между продавцом и покупателем, которые делают предложения и контрпредложения. Теперь предположим, что у покупателя есть возможность обратиться к другому дилеру, который согласен продать ему «Форд Эксплорер» за 28 тыс. долл.

(a) Опишите игру торга между покупателем и продавцом, в случае, когда покупателю доступна «сторонняя опция», а переговоры проходят таким образом, что сперва покупатель делает предложение, ждет контрпредложения, затем принимает его или отказывается от него, выбирая стороннюю опцию.

(b) Найдите совершенное в подыграх равновесие игры из пункта (a). Осуществится ли продажа по-прежнему на уровне 28 700 долл.? Дайте полное объяснение.

4. Покажите, что в игре торга с совершенной информацией доля пирога, идущая игроку 1, увеличивается, когда его дисконтирующий множитель приближается к 1, а ставка игрока 2 остается неизменной. Как это повлияет на поведение участников в случае, когда дисконтирующие множители не являются полностью известными?
5. Что случится с решением игры торга с совершенной информацией, если временной интервал между предложениями и контрпредложениями становится близким к нулю? [Подсказка: начните с анализа того, что произойдет с дисконтирующими множителями, а затем переходите к пределам.]

Глава 7 ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИГРЫ

В гл. 4 обсуждались динамические игры, где игроку приходится принимать решения до и/или после того, как решения принимаются другими игроками. Подобные игры проходят поэтапно. Мы проанализировали равновесное поведение в таких играх и показали различие между равновесием по Нэшу и совершенным в подыграх равновесием. В этой главе мы продолжим анализ динамических игр, однако сосредоточимся на особом классе этих игр, а именно повторяющихся играх. Также будут рассмотрены некоторые примеры динамических игр, которые являются не совсем повторяющимися. Повторяющиеся игры важны, поскольку часто позволяют объяснить многие типы поведенческих стратегий, такие как сговор и кооперативное поведение, которые трудно объяснить в рамках стратегических игр.

Повторяющиеся игры получаются при разыгрывании стратегических игр в течение нескольких (зачастую бесконечного числа) периодов. В повторяющихся играх участники получают выигрыш в конце каждого сыгранного периода. Выигрыш участников, таким образом, является суммой выигрышей по истечении каждого периода. Если при сложении выигрыши дисконтируются, то имеем дело с повторяющейся игрой с дисконтированием; в противном случае имеем дело с повторяющейся игрой без дисконтирования.

Мы рассмотрим сначала игры, повторяющиеся конечное число периодов (игры с конечным горизонтом), и напомним идею совершенного в подыграх равновесия и метода обратной индукции. Мы обоснуем тот факт, что неравновесные исходы в однопериодной игре могут быть частью равновесия в повторяющейся игре. Далее рассмотрим игры, повторяющиеся бесконечное число периодов (бесконечно повторяющиеся игры, игры с бесконечным горизонтом) с дисконтированием и без дисконтирования, и изучим различные версии фольклорной теоремы для таких классов игр. Покажем также, что существуют значительные различия между равновесиями в повторяющейся игре с конечным и бесконечным горизонтами.

Анализ равновесия в повторяющихся играх с конечным и бесконечным горизонтами будет сопровождаться поиском равновесия в некоторых особых ситуациях, таких как повторяющиеся олигополистические игры, повторяющиеся игры агента-принципала и повторяющиеся партнерские игры. В дополнение к приложению повторяющихся игр рассмотрим классы игр, обладающих особенностями повторяющихся игр, но таковыми не являющихся. К ним относится, в частности, игра двух стран, участвующих в рыбной ловле, и игра нескольких стран, занимающихся добычей ресурсов, находящихся в их совместном владении. Будет рассмотрен также простой пример игры, представляющей работу банка.

7.1. Структура и равновесия повторяющихся игр

Напомним, что игра в стратегической форме G (см. определение 2.6) полностью описывается указанием для каждого игрока его множества стратегий и функции выигрыша. Мы обозначали ее

$$G = (S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n),$$

где S_i — множество стратегий, а $u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to R$ — функция выигрыша игрока i. Как обычно, набор всех профилей стратегий игры обозначается через S, т.е.

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n.$$

Элементы множества S будем называть **действиями** в игре G.

Повторяющаяся игра, как следует из названия, получается в результате повторения стратегической игры в течение нескольких периодов. Эта стратегическая игра называется **стадийной игрой** или **игрой одного периода** (или даже **однократной игрой**). Если стратегическая игра G повторяется в течение T периодов, мы говорим, что имеем дело с T — **периодной повторяющейся игрой** игры одного периода G или просто (если понятно, о какой сталийной игре G идет речь) T — периодной повторяющейся игрой. Число периодов T, которое отражает количество повторений игры, может быть как конечным, так и бесконечным. Если T конечно, то мы сталкиваемся с **повторяющейся игрой с конечным горизонтом**. Если же T бесконечно, то повторяющаяся игра является **игрой с бесконечным горизонтом**.

Результатом повторения стратегической игры G в течение T периодов будут наборы действий, получающихся из действий, выбираемых игроками в каждом периоде. Будем обозначать действия игроков в периоде $1 \le \tau \le T$ через $s_\tau = (s_{\tau,1}, s_{\tau,2}, \ldots, s_{\tau,n}) \in S$. Любой вектор $h^t = (s_1, \ldots, s_t)$ называется **историей** (повторяющейся) игры до периода t (включительно. — *Примеч. пер.*). Множество всех возможных историй повторяющейся игры до периода t будем обозначать через H^t, а конкретную историю до периода t включительно, через $h^t \in H^t$. То есть

$$H^0 = \{0\} \text{ и } H^t = \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{t\text{ раз}} \equiv S^t, \text{ если } 1 \le t \le T.$$

Распишем t-периодную историю h^t в матричном виде:

$$h^t = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,i} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,i} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{t,1} & s_{t,2} & \cdots & s_{t,i} & \cdots & s_{t,n} \end{bmatrix},$$

где i-й вектор-столбец матрицы h^t имеет вид

$$\begin{bmatrix} s_{1,i} \\ s_{2,i} \\ \vdots \\ s_{t,i} \end{bmatrix}$$

и отражает выборы игрока i в каждый период τ, $1 \le \tau \le t$, повторяющейся игры. Следовательно, строка матрицы отражает выборы игроков в конкретный период. Любая история игры вплоть до периода T называется **исходом** повторяющейся игры. Другими словами, исход повторяющейся игры представляет собой набор из n векторов размерности T (или матрицу $T \times n$) вида

$$h = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,i} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,i} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{T,1} & s_{T,2} & \cdots & s_{T,i} & \cdots & s_{T,n} \end{bmatrix}.$$

Определение 7.1. *Множество всех историй T-периодной повторяющейся игры — это множество*

$$\mathcal{H} = \bigcup_{t=0}^{T-1} \mathcal{H}^t .$$

Когда участники играют в повторяющуюся игру, то при принятии решения в любой период t они уже знают всю историю игры до этого периода. То есть игроки наблюдают историю игры до периода $t - 1$. Соответственно выбор каждого из участников в период t обусловливается историей игры h^{t-1} [1]. Условие рациональности состоит в следующем.

Определение 7.2. *В T-периодной повторяющейся игре*

(1) ***стратегия***[2] *игрока i является функцией* $\sigma_i : \mathcal{H} \to S_i$,

(2) ***профиль стратегий*** *— это набор из n элементов* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, *где каждое* σ_i *— стратегия игрока i.*

Набор всех стратегий игрока i в T-периодной повторяющейся игре будем обозначать B_i. Соответственно множество всех профилей стратегий T-периодной повторяющейся игры

$$B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n .$$

Рассмотрим стратегии игроков в T-периодной повторяющейся игре более подробно. Заметим, что если $0 \le t < t' \le T-1$, то $\mathcal{H}^t \cap \mathcal{H}^{t'} = \varnothing$. Из этого следует, что объединение, составляющее множество историй $\mathcal{H}$, является разбиением этого множества, т.е.

$$\mathcal{H} = \bigcup_{t=0}^{T-1} \mathcal{H}^t ,$$

[1] В период 1 игроку i наблюдать нечего, и его стратегия — просто выбор в его множестве стратегий S_i. Именно поэтому мы обозначаем $\mathcal{H}^0 = \{0\}$, или $\mathcal{H}^0 = \{h^0\}$. Мы можем также представлять $\mathcal{H}^0$ как историю игры в период $t = 0$, период, предшествующий началу повторяющейся игры.

[2] В главе 4 мы рассматривали поведенческие стратегии как спецификацию выбора (возможно, рандомизированного) в каждом информационном множестве. Сформулированное здесь определение поведенческой стратегии согласуется с вышеуказанным определением, поскольку каждое информационное множество динамической игры достигается в результате единственной последовательности выборов, или истории динамической игры (в предположении, что эта игра — игра с совершенной памятью. — *Примеч. ред.*).

где $\mathcal{H}^t \cap \mathcal{H}^{t'} = \varnothing$. Это свойство $\mathcal{H}$ гарантирует, что произвольная стратегия $\sigma_i : \mathcal{H} \to S_i$ может быть представлена в виде набора T функций

$$\sigma_i = (\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \ldots, \sigma_{T,i}),$$

где каждое $\sigma_{t,i}$ является функцией $\sigma_{t,i} : \mathcal{H}^{t-1} \to S_i$, так как все стратегии в повторяющихся играх оказываются поведенческими. Фактически можно определить поведенческую стратегию игрока i следующим альтернативным способом.

Определение 7.3. *Стратегия игрока i — это последовательность функций $\{\sigma_{it}\}_{t=0}^{T-1}$, где $\sigma_{it} : \mathcal{H}^t \to S_i$.*

Таким образом, стратегия игрока i в повторяющейся игре — это всеобъемлющий план действий. Он описывает, как будет действовать игрок в каждом периоде при заданной истории игры вплоть до этого периода.

Запишем профиль стратегий σ в матричной форме:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{2,1} & \cdots & \sigma_{t,1} & \cdots & \sigma_{T,1} \\ \sigma_{1,2} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{t,2} & \cdots & \sigma_{T,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1,n} & \sigma_{2,n} & \cdots & \sigma_{t,n} & \cdots & \sigma_{T,n} \end{bmatrix},$$

где t-й вектор-столбец σ^t матрицы σ имеет вид

$$\sigma^t = \begin{bmatrix} \sigma_{t,1} \\ \sigma_{t,2} \\ \vdots \\ \sigma_{t,n} \end{bmatrix}.$$

Он отражает выборы игроков в период t. Если $h^{t-1} \in \mathcal{H}^{t-1}$ — история до периода $t \geq 1$, то отсюда следует, что

$$\sigma(h^{t-1}) = (\sigma_1(h^{t-1}), \sigma_2(h^{t-1}), \ldots, \sigma_n(h^{t-1})) = \sigma^t(h^{t-1}) = \begin{bmatrix} \sigma_{t,1}(h^{t-1}) \\ \sigma_{t,2}(h^{t-1}) \\ \vdots \\ \sigma_{t,n}(h^{t-1}) \end{bmatrix}.$$

Это действия в стратегической игре, которые реализуются при выборе стратегии σ в период t и обусловлены историей h^{t-1}.

Каждый профиль стратегий $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ автоматически порождает исход $h_\sigma = (h_1^\sigma, h_2^\sigma, \ldots, h_T^\sigma)$ T-периодной повторяющейся игры, который может быть построен рекурсивно следующим образом. При $t = 0$ мы начинаем с $h_\sigma^0 = \{0\}$; т.е. при $t = 0$ игрокам нечего наблюдать. Далее положим

$$h_\sigma^1 = h_1^\sigma = (\sigma_1(h_\sigma^0), \sigma_2(h_\sigma^0), \ldots, \sigma_n(h_\sigma^0)) \in S = \mathcal{H}^1.$$

Следующий шаг рекурсии определяется так. Если для некоторого $1 \leq t < T$ игроки наблюдают историю $h_\sigma^t = (h_1^\sigma, h_2^\sigma, \ldots, h_t^\sigma) \in \mathcal{H}^t$, то рассмотрим

$$h_{t+1}^\sigma = \sigma(h_\sigma^t) \equiv (\sigma_1(h_\sigma^t), \sigma_2(h_\sigma^t), \ldots, \sigma_n(h_\sigma^t)) \in S$$

и

$$h_\sigma^{t+1} = (h_1^\sigma, h_2^\sigma, \ldots, h_t^\sigma, h_{t+1}^\sigma) = (h_\sigma^t, \sigma(h_\sigma^t)) \in \mathcal{H}^{t+1}.$$

Этот индуктивный процесс порождает последовательность t-периодных историй

$$h_\sigma^0, h_\sigma^1, h_\sigma^2, \ldots, h_\sigma^{T-1}.$$

Следовательно, исход в повторяющейся игре, порождаемый σ, имеет вид

$$h_\sigma = (h_1^\sigma, h_2^\sigma, \ldots, h_t^\sigma, h_T^\sigma) = (\sigma(h_\sigma^0), \sigma(h_\sigma^1), \ldots, \sigma(h_\sigma^{T-1})) \in S^T.$$

Следующая терминология касательно профилей стратегии оказывается очень удобной. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — профиль стратегий в T-периодной повторяющейся игре, где $\sigma_i = (\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \ldots, \sigma_{T,i})$ и каждое $\sigma_{t,i}$ является функцией $\sigma_{t,i} : \mathcal{H}^{t-1} \to S_i$. Будем говорить, что игрок i **всегда играет** $s \in S_i$ в периоде t, если $\sigma_i(h^{t-1}) \equiv \sigma_{t,i}(h^{t-1}) = s$ при любых $h^{t-1} \in \mathcal{H}^{t-1}$, т.е. если $\sigma_{t,i}$ — постоянная функция (принимающая значение) s или профиль стратегий σ_i — постоянная функция (принимающая значение) s на $\mathcal{H}^{t-1}$. Будем говорить также, что профиль стратегий σ является **постоянным по периодам**, если в каждом периоде каждый игрок i всегда играет стратегию $s_{t,i} \in S$ в этом периоде.

Кроме того, будем говорить, что исход $h = (s_1, s_2, \ldots, s_T)$ **порождается** профилем стратегий σ, если $h_\sigma = h$. Из наших рассуждений вытекает следующий результат.

Лемма 7.4. *Любой исход порождается некоторым профилем стратегий.*

При заданном исходе $h = (h_1, h_2, \ldots, h_T)$ в T-периодной повторяющейся игре **недисконтированный выигрыш** игрока i в случае реализации исхода h и одинаковой оценки текущего и будущих выигрышей равен

$$v_i(h) = \sum_{t=1}^{T} u_i(h_t)\ [1].$$

Если игрок i дисконтирует выигрыш с множителем дисконтирования δ, где $0 < \delta < 1$, то **дисконтированный выигрыш** игрока i в T-периодной повторяющейся игре при реализации исхода h равен

$$v_i(h) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(h_t)\ [2].$$

Дисконтирование выигрыша таким способом показывает, что игрок ценит будущие выигрыши меньше, чем текущие. Ясно, что если δ близко к 1, то

[1] В публикациях также широко используется термин «среднее» значение полезности (или функция «средней» полезности) $v_i(h) = \sum_{t=1}^{T} u_i(h_t)$ как эквивалент термина «недисконтированный выигрыш». Ясно, что преимущество такой функции полезности в том, что она предоставляет некоторую информацию о поведении повторяющейся игры «в пределе», когда $T \to \infty$. Следует заметить, однако, что такой предел может и не существовать.

[2] Чтобы избежать излишних обозначений, мы будем использовать один и тот же символ v_i для обозначения как недисконтированной, так и дисконтированной полезности (выигрыша). Что имеется в виду, должно быть ясно из контекста.

игроки дисконтируют будущие выигрыши меньше (или ценят их больше), чем в случае δ, близких к 0.

Поскольку любой профиль стратегий σ порождает некоторый исход h_σ, недисконтированный и дисконтированный выигрыши игрока i при профиле σ стратегий составляют

$$v_i(\sigma) \equiv v_i(h_\sigma) = \sum_{t=1}^{T} u_i(\sigma(h_\sigma^{t-1})) \text{ и } v_i(\sigma) \equiv v_i(h_\sigma) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(\sigma(h_\sigma^{t-1})).$$

Поскольку мы определили, что такое стратегия, а также выигрыш в контексте повторяющейся игры, можно рассматривать T-периодную повторяющуюся игру в качестве стратегической игры со следующими характеристиками.

(1) n игроков являются n игроками стадийной игры.

(2) Множество стратегий каждого игрока i составляет B_i — набор всех его стратегий.

(3) Функция выигрыша $v_i : B = B_1 \times \cdots \times B_n \to R$ каждого игрока i определяется профилем стратегий $\sigma \in B$ согласно

(a) $v_i(\sigma) = \sum_{t=1}^{T} u_i(\sigma(h_\sigma^{t-1}))$ (**недисконтированный выигрыш**),

(b) $v_i(\sigma) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(\sigma(h_\sigma^{t-1}))$ (**дисконтированный выигрыш**).

Напомним, что если $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — профиль стратегий, то, используя стандартные обозначения теории игр, можем записать

$$\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \text{ и } \sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Тогда равновесие по Нэшу в повторяющейся игре будет определяться следующим образом.

Определение 7.5 (равновесие по Нэшу в повторяющейся игре). *Профиль стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ в T-периодной повторяющейся игре называется* ***равновесием по Нэшу*** *или просто* ***равновесием****, если для любого игрока i и любой его стратегии σ_i выполняется соотношение*

$$v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*).$$

Здесь есть один тонкий момент. Дело в том, что набор равновесий по Нэшу в дисконтированных и недисконтированных повторяющихся играх различен! То есть всегда необходимо уточнять, имеем ли мы дело с **недисконтированным равновесием по Нэшу** или **дисконтированным равновесием по Нэшу** (в соответствии с тем, к какому типу относятся функции выигрыша участников).

Если мы хотим подчеркнуть, что в повторяющейся игре с конечным горизонтом профиль стратегий σ является дисконтированным равновесием по Нэшу при некотором $0 < \delta < 1$ (вообще говоря, для любого вещественного числа δ), то можно говорить, что σ является **δ-дисконтированным равновесием по Нэшу**.

Таблица 7.1

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(0,0)	(2,1)
	D	(0,0)	(2,2)

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие некоторые подобные различия в равновесиях.

Пример 7.6 (недисконтированное равновесие по Нэшу, которое не является дисконтированным равновесием по Нэшу). Рассмотрим двухпериодную повторяющуюся игру со стадийной игрой, представленной в табл. 7.1, и профиль стратегий (σ_1^*, σ_2^*), такой что

(1) σ_2^* является постоянным в периодах и требует от игрока 2 выбрать
   (a) L в период 1,
   (b) R в период 2;

(2) σ_1^* требует от игрока 1 выбрать
   (a) U в период 1,
   (b) в период 2 выбрать D, если $h_1 = (\bullet, L)$, и U, если $h_1 = (\bullet, R)$[1].

Утверждается, что профиль стратегий σ^* является недисконтированным равновесием по Нэшу. Для начала заметим, что профиль стратегий σ^* порождает исход

$$h_{\sigma^*} = \begin{bmatrix} U & L \\ D & R \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем недисконтированные выигрыши участников:

$$v_1(h_{\sigma^*}) = v_2(h_{\sigma^*}) = 2\,.$$

Предположим, что игрок 2 по-прежнему выбирает стратегию σ_2^*, а игрок 1 может сменить свою стратегию. Тогда возможные исходы в случае изменения стратегии игроком 1 имеют вид

$$\begin{bmatrix} U & L \\ U & R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D & L \\ U & R \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} D & L \\ D & R \end{bmatrix}.$$

Соответствующие выигрыши игрока 1 составляют 2, 2 и 2. Отсюда следует, что игрок 1 не может увеличить свой выигрыш при условии, что игрок 2 не меняет стратегию.

Теперь предположим, что игрок 1 по-прежнему выбирает стратегию σ_1^*, а игрок 2 может отклониться от выбранной стратегии σ_2^*. Тогда возможные исходы таковы:

$$\begin{bmatrix} U & L \\ D & L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U & R \\ U & R \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} U & R \\ U & L \end{bmatrix}.$$

[1] Мы будем использовать символ • для указания на то, что в рассматриваемой ситуации возможная стратегия допускает «все возможные выборы» (выбор изо всех возможных альтернатив).

Соответствующие выигрыши игрока 2 составляют 0, 2 и 1. Отсюда следует, что игроку 2 также невыгодно уклонятся от своей стратегии, при условии что игрок 1 не изменяет свою. Таким образом, σ^* — действительно недисконтированное равновесие по Нэшу.

Теперь покажем, что σ^* не являтся дисконтированным равновесием по Нэшу ни при каком $0<\delta<1$. Заметим сначала, что дисконтированный выигрыш игрока 2 равен $v_2(h_{\sigma^*}) = 0+\delta\times 2 = 2\delta$.

Пусть игрок 1 выбирает стратегию σ_1^*, а игрок 2 всегда уклоняется и выбирает R в обоих периодах. Это приводит к исходу

$$h' = \begin{bmatrix} U & R \\ U & R \end{bmatrix},$$

дисконтированный выигрыш игрока 2 при этом составит

$$v_2(h') = 1+\delta\times 1 = 1+\delta > 2\delta = v_2(h_{\sigma^*}).$$

Из этого следует, что σ^* не является дисконтированным равновесием по Нэшу в данной двухпериодной повторяющейся игре.

Следующий пример демонстрирует, что равновесие по Нэшу в дисконтированной повторяющейся игре может не совпадать с равновесием в недисконтированной версии этой повторяющейся игры.

Пример 7.7 (дисконтированное равновесие по Нэшу, которое не является недисконтированным равновесием по Нэшу). Рассмотрим двухпериодную повторяющуюся игру, стадийная игра которой — матричная игра двух лиц, изображена в табл. 7.2. Пусть $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ — профиль стратегий, определенный следующим образом.

(1) Стратегия $\sigma_1^* = (\sigma_{1,1}^*, \sigma_{2,1}^*)$ игрока 1:

$$\sigma_{1,1}^* = D \text{ и } \sigma_{2,1}^*(h_1) = \begin{cases} D, & \text{если } h_1 = (\bullet, R), \\ U, & \text{если } h_1 = (\bullet, L). \end{cases}$$

(2) Стратегия $\sigma_2^* = (\sigma_{2,1}^*, \sigma_{2,2}^*)$ игрока 2:

$$\sigma_{1,2}^* = R \text{ и } \sigma_{2,2}^*(h_1) = \begin{cases} R, & \text{если } h_1 = (D, \bullet), \\ L, & \text{если } h_1 = (U, \bullet). \end{cases}$$

Заметим, что σ^* порождает исход

$$h_{\sigma^*} = \begin{bmatrix} D & R \\ D & R \end{bmatrix}.$$

Таким образом, выигрыши игроков для профиля стратегий σ^* и фактора дисконтирования $0<\delta<1$ равны

$$v_1(\sigma^*) = v_2(\sigma^*) = 2+2\delta.$$

Таблица 7.2

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(5,5)	(0,6)
	D	(6,0)	(2,2)

Утверждается, что при $0 < \delta < \frac{1}{2}$ профиль стратегий σ^* является дисконтированным равновесием по Нэшу. Чтобы показать это, предположим, что игрок 2 не меняет стратегию σ_2^*. Тогда возможные исходы, получающиеся в результате изменения стратегии игрока 1, имеют вид

$$\begin{bmatrix} U & R \\ U & L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U & R \\ D & L \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} D & R \\ U & R \end{bmatrix}.$$

Соответствующие выигрыши игрока 1 составляют 5δ, 6δ и 2. Поскольку $0 < \delta \le \frac{1}{2}$, ни один из выигрышей не превышает $2 + 2\delta = v_1(\sigma^*)$. Следовательно, игрок 1 не может увеличить свой выигрыш, если игрок 2 не уклоняется от σ_2^*. Теперь предположим, что игрок 1 выбрал стратегию σ_1^*. Возможные исходы, которые получаются в результате выбора игроком 2 стратегий, отличных от σ_2^*, имеют вид

$$\begin{bmatrix} D & R \\ D & L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D & L \\ U & R \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} D & L \\ U & L \end{bmatrix}$$

с соответствующими выигрышами игрока 2, равными 2, 6δ и 5δ. Ясно, что при $0 < \delta \le \frac{1}{2}$ ни один из выигрышей не превосходит $2 + 2\delta = v_2(\sigma^*)$. Поэтому игрок 2 не может увеличить свой выигрыш, при том что игрок 1 не отклоняется от σ_1^*. Следовательно, при $0 < \delta \le \frac{1}{2}$ профиль стратегий σ^* является дисконтированным равновесием по Нэшу.

Теперь покажем, что σ^* не может быть недисконтированным равновесием по Нэшу. Для начала заметим, что недисконтированный выигрыш игрока 1 равен $v_1'(\sigma^*) = 2 + 2 = 4$. Если игрок 1 изменит свою стратегию σ_1^* на стратегию σ_1, где

$$\sigma_{1,1} = U \text{ и } \sigma_{2,1}(h_1) = \begin{cases} D, & \text{если } h_1 = (\bullet, R), \\ U, & \text{если } h_1 = (\bullet, L), \end{cases}$$

а игрок 2 по-прежнему выбирает стратегию σ_2^*, то реализуется исход

$$\begin{bmatrix} U & R \\ D & L \end{bmatrix},$$

при котором недисконтированный выигрыш игрока 1 составляет

$$v_1'(\sigma_1, \sigma_{-1}^*) = 0 + 6 = 6 > 4 = v_1'(\sigma^*).$$

Из этого следует, что σ^* не может быть недисконтированным равновесием по Нэшу.

Рассмотренные примеры показывают, что различные ставки дисконтирования могут влиять на точки равновесия игр главным образом потому, что различие в дисконтирующих множителях вынуждает игроков ценить будущие выигрыши по-разному. Однако, как будет видно из следующего результата, в некоторых случаях равновесный профиль стратегий может не зависеть от ставки дисконтирования.

Теорема 7.8. *Если $h=(s_1,s_2,\dots,s_T)$ — исход в T-периодной повторяющейся игре, такой что $s_t \in S$ — равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) в стадийной игре, то постоянный в периодах профиль стратегий h является равновесием по Нэшу в T-периодной повторяющейся игре.*

В частности, если в игре в стратегической форме G существует равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях), то в любой повторяющейся игре со стадийной игрой G всегда существует равновесие по Нэшу.

Доказательство. Представим исход h в матричной форме:

$$h=\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,i-1} & s_{1,i} & s_{1,i+1} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,i-1} & s_{2,i} & s_{2,i+1} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{T,1} & s_{T,2} & \cdots & s_{T,i-1} & s_{T,i} & s_{T,i+1} & \cdots & s_{T,n} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\sigma^*=(\sigma_1^*,\dots,\sigma_n^*)$ — постоянный в периодах профиль стратегий, приводящий к исходу h. То есть $\sigma_i^*=(\sigma_{1,i},\dots,\sigma_{t,i},\dots,\sigma_{T,i})$, где в любом периоде $1\le t\le T$ функция $\sigma_{t,i}:\mathcal{H}^{t-1}\to S_i$ удовлетворяет соотношению $\sigma_{t,i}(h^{t-1})=s_{t,i}$ для любого $h^{t-1}\in\mathcal{H}^{t-1}$.

Утверждается, что σ^* является равновесием по Нэшу. Покажем это. В случае дисконтированного выигрыша имеем

$$v_i(\sigma^*)\equiv v_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)=\sum_{t=1}^{T}\delta^{t-1}u_i(s_t).$$

Предположим, что игрок i изменит стратегию σ_i^* на стратегию σ_i. Тогда нетрудно понять, что новый исход при таком профиле стратегий имеет вид

$$h_{(\sigma_i,\sigma_{-i}^*)}=\begin{bmatrix} s_1' \\ s_2' \\ \vdots \\ s_T' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,i-1} & s_{1,i}' & s_{1,i+1} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,i-1} & s_{2,i}' & s_{2,i+1} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{T,1} & s_{T,2} & \cdots & s_{T,i-1} & s_{T,i}' & s_{T,i+1} & \cdots & s_{T,n} \end{bmatrix}.$$

Иначе говоря, в исходе, порождаемом профилем стратегий (σ_i,σ_{-i}^*), изменятся только выборы игрока i. Это произойдет в силу того, что функции $\sigma_{t,j}$ при $j\ne i$ являются постоянными и принимающими значения $s_{t,j}$ в периоде t.

Поскольку каждое $s_t\in S$ — равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры, то $u_i(s_t)\ge u_i(s_t')$ для любого игрока i в период t. Но тогда имеем

$$v_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)=\sum_{t=1}^{T}\delta^{t-1}u_i(s_t)\ge\sum_{t=1}^{T}\delta^{t-1}u_i(s_t')=v_i(\sigma_i,\sigma_{-i}^*).$$

Поэтому профиль стратегий σ^*, порождающий исход h, действительно является равновесием по Нэшу. ■

Таким образом, выбор равновесных по Нэшу (в чистых стратегиях) стратегий в стадийной игре в каждом периоде приводит к равновесию по Нэшу повторяющейся игры при любом дисконтирующем множителе, меньшем 1, как и в недисконтированной игре. Этот результат, конечно же, ставит вопрос о том, существуют ли равновесия по Нэшу в повторяющихся играх, которые не подразумевают выбор (чистых) равновесных по Нэшу стратегий стадийной игры в каждом из периодов. В общем случае такие равновесия, отличные от характеризуемых в теореме 7.8, существуют. То есть в повторяющейся игре могут быть равновесия по Нэшу, которые «не составлены» из равновесных по Нэшу (в чистых стратегиях) стратегий стадийной игры. Следующий пример демонстрирует такое равновесие.

Пример 7.9. Рассмотрим трехпериодную повторяющуюся игру со стадийной игрой, изображенной в табл. 7.3.

Ясно, что (U,R) — единственное равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) в стадийной игре. Рассмотрим следующий профиль стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$.

(1) Стратегия σ_1^*: игрок 1 выбирает U в первом периоде, затем играет U, если во всех предыдущих периодах игрок 2 выбирал L, в противном случае играет D.

(2) Стратегия σ_2^*: игрок 2 всегда играет L в первом и втором периодах и всегда играет R в третьем периоде.

Утверждается, что профиль стратегий σ^* является равновесием по Нэшу в трехпериодной повторяющейся игре.

Исход, порождаемый профилем стратегий σ^*, имеет вид

$$h = \begin{bmatrix} U & L \\ U & L \\ U & R \end{bmatrix}.$$

Следовательно, недисконтированные выигрыши игроков составляют

$$v_1(h) = 3 + 3 + 1 = 7 \quad \text{и} \quad v_2(h) = 3 + 3 + 4 = 10.$$

Заметим, что если игрок 1 хотя бы в одном периоде отклонится от выбора U, то результирующая история не приведет к большему для него выигрышу. Поэтому игрок 1 не может увеличить свой выигрыш при условии, что игрок 2 играет σ_2^*.

Теперь предположим, что игрок 1 выбрал σ_1^*. Если игрок 2 изменит стратегию таким образом, что в первом периоде будет играть R, то реализуются следующие исходы:

$$h' = \begin{bmatrix} U & R \\ D & \bullet \\ D & \bullet \end{bmatrix}.$$

Таблица 7.3

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(3,3)	(1,4)
	D	(1,0)	(0,1)

В этом случае максимальный возможный выигрыш $v_2(h') \le 4+1+1 = 6 < 10 = v_2(h)$. В случае если игрок 2 выберет L в первом периоде и R во втором, реализуются исходы

$$h'' = \begin{bmatrix} U & L \\ U & R \\ D & \bullet \end{bmatrix}.$$

Тогда максимальный возможный выигрыш $v_2(h'') \le 3+4+1 = 8 < 10 = v_2(h)$. У игрока 2 еще остается возможность выбрать стратегию так, чтобы реализовался исход

$$h''' = \begin{bmatrix} U & L \\ U & L \\ U & L \end{bmatrix}.$$

Но и в этом случае $v_2(h''') = 9 < 10 = v_2(h)$. Следовательно, игрок 2 не может увеличить свой выигрыш, если игрок 1 не меняет свою стратегию.

Мы показали, что профиль стратегий σ^* действительно является равновесием по Нэшу. Наконец, заметим, что (U,L) не является равновесием по Нэшу в стадийной игре.

Внимательный читатель обратил внимание на то обстоятельство, что профиль действий s_3 в исходе $h_\sigma = (s_1, s_2, s_3)$, порождаемом равновесием по Нэшу σ^*, является равновесием по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры. И это не случайно! Оказывается, что в любой повторяющейся игре с конечным горизонтом последний профиль стратегий, полученный на основе исхода, порожденного равновесием по Нэшу, всегда является равновесием по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры.

Теорема 7.10. *Если σ^* — равновесие по Нэшу в T-периодной повторяющейся игре и $h_{\sigma^*} = (s_1, s_2, \ldots, s_T)$ — порожденный σ^* исход, то $s_T \in S$ — равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры.*

Доказательство. Предположим, что

$$s_T = (s_{T,1}, \ldots, s_{T,i-1}, s_{T,i}, s_{T,i+1} \ldots, s_{T,n}).$$

Зафиксируем игрока i и рассмотрим $s_i \in S_i$. Пусть $\sigma_i = (\sigma^*_{1,i}, \sigma^*_{2,i} \ldots, \sigma^*_{T-1,i}, \sigma_{T,i})$ — поведенческая стратегия, где $\sigma_{T,i} : H^{t-1} \to S_i$ — постоянная функция со значением s_i, т.е. игрок i всегда играет s_i в периоде T. Заметим, что профиль стратегий $(\sigma_i, \sigma^*_{-i})$ порождает исход

$$s' = (s_1, s_2, \ldots, s_{T-1}, s'_T),$$

где $s'_T = (s_{T,1}, \ldots, s_{T,i-1}, s_i, s_{T,i+1} \ldots, s_{T,n})$.

Пользуясь тем, что σ^* — равновесие по Нэшу в повторяющейся игре, имеем (в недисконтированном случае)

$$\sum_{t=1}^{T-1} u_i(s_t) + u_i(s_T) = v_i(\sigma^*) = v_i(\sigma^*_i, \sigma^*_{-i}) \ge v_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i}) = \sum_{t=1}^{T-1} u_i(s_t) + u_i(s'_T).$$

Таким образом, для любой стратегии $s_i \in S_i$ игрока i в стадийной игре выполнено

$$u_i(s_{T,i},(s_T)_{-i}) = u_i(s_T) \geq u_i(s'_T) = u_i(s_i,(s_T)_{-i}),$$

откуда следует, что s_T является равновесием по Нэшу (в чистых стратегиях) в стадийной игре. (Заметим, что те же самые заключения верны и в дисконтированном случае.) ■

Следствие 7.11. *Если стадийная игра не имеет равновесий по Нэшу (в чистых стратегиях), то ни одна из ее повторяющихся игр с конечным горизонтом не имеет равновесия по Нэшу.*

Данный результат следует сравнить с равновесным профилем стратегий из примера 7.9, в котором при выборе игроком 2 действия R игрок 1 угрожает выбрать D. Следовательно, если игрок 2 выбирает R в периоде 2, то исход в периоде 3 окажется (D,R), что не является равновесием по Нэшу в стадийной игре. Это обстоятельство необходимо увязать с теоремой 7.10. Хотя теорема утверждает, что в последнем периоде игроки будут играть равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры, если выбирают равновесные стратегии, она ничего не говорит о том, что произойдет в случае отклонения игрока в любом из более ранних периодов.

Пример 7.9 показывает, что если отклонение произошло ранее последнего периода, то исход в последнем периоде может не быть равновесным по Нэшу в стадийной игре. Отсюда следующий вопрос: правдоподобно ли ожидать от игрока 1 выбора D в последнем периоде, если игрок 2 уклоняется (от своей стратегии) и выбирает R, скажем, во втором периоде? Ответ очевиден: игрок 1, вероятно, закончит игру, выбирая U в последнем периоде, если игрок 2 уклоняется и выбирает R в периоде 2. По этой причине равновесная стратегия в примере 7.9 кажется не столь убедительной, как равновесный исход в повторяющейся игре, поскольку единственная угроза отклонения игрока 2 — неправдоподобная или недостоверная угроза играть D. В следующем разделе мы рассмотрим равновесные стратегии, которые не зависят от подобных недостоверных угроз, имеющих целью сдерживание отклонений.

Упражнения

1. Рассмотрим исход h в T-периодной повторяющейся игре

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,i-1} & h_{1,i} & h_{1,i+1} & \cdots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,i-1} & h_{2,i} & h_{2,i+1} & \cdots & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{T,1} & h_{T,2} & \cdots & h_{T,i-1} & h_{T,i} & h_{T,i+1} & \cdots & h_{T,n} \end{bmatrix},$$

и обозначим i-й столбец h (т.е. вектор историй выбора игрока i) через

$$h^i = \begin{bmatrix} h_{1,i} \\ h_{2,i} \\ \vdots \\ h_{T,i} \end{bmatrix}.$$

Как обычно, представим h в виде $h=(h^i,h_{-i})$. Будем говорить, что исход h^* является **равновесием историй**, если для любого вектора выбора историй h^i игрока i

$$v_i(h^*)\equiv v_i((h^*)^i,h^*_{-i})\ge v_i(h^i,h^*_{-i}).$$

Покажите, что исход $h^*=(h_1^*,h_2^*,\dots,h_T^*)$ в T-периодной повторяющейся игре будет равновесием историй тогда только тогда, когда каждое h_t^* — равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) в стадийной игре.

2. Рассмотрим трехпериодную повторяющуюся игру из примера 7.9 и описанное там недисконтированное равновесие σ^*. Установите следующие дополнительные свойства.
   (a) Для любого множителя дисконтирования $\frac{1}{3}\le\delta\le 1$ профиль стратегий σ^* является дисконтированным равновесием по Нэшу.
   (b) Для любого множителя дисконтирования $0<\delta<\frac{1}{3}$ профиль стратегий σ^* не является дисконтированным равновесием по Нэшу.
3. Снова обратимся к трехпериодной повторяющейся игре из примера 7.9. Рассматривался профиль стратегий $\sigma'=(\sigma_1',\sigma_2')$, где
   (a) стратегия σ_2': игрок 2 всегда играет L в периоды 1 и 2 и всегда играет R в период 3;
   (b) стратегия σ_1': игрок 1 выбирает U в первом периоде, затем играет U, если во всех предыдущих периодах игрок 2 выбирал L, в противном случае играет D.

   Установите следующие свойства для данной трехпериодной повторяющейся игры.
   (i) Профиль стратегий σ' является дисконтированным равновесием по Нэшу при любом множителе дисконтирования $0<\delta\le\frac{1}{2}$.
   (ii) Профиль стратегий σ' не является дисконтированным равновесием по Нэшу при любом множителе дисконтирования $\frac{1}{2}<\delta\le 1$.
4. Рассмотрим трехпериодную повторяющуюся игру из предыдущего упражнения, где игрок 1 имеет дело с недисконтированной функцией полезности, а игрок 2 имеет дисконтированную функцию полезности. При каких условиях профиль стратегий σ^* из предыдущего упражнения является равновесным?
5. Пусть σ — профиль стратегий в T-периодной повторяющейся игре, который порождает исход $h_\sigma=(h_1,h_2,\dots,h_T)$. Покажите, что σ является 0-дисконтированным равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда h_1 — равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) в стадийной игре.
6. Докажите теорему 7.8 для недисконтированного случая и теорему 7.10 для дисконтированного случая.
7. Рассмотрим T-периодную повторяющуюся игру и предположим, что профиль стратегий σ не является недисконтированным равновесием по Нэшу. Покажите, что существует некоторое $0<\delta_0<1$, такое что

σ также не будет δ-дисконтированным равновесием по Нэшу при всех $\delta_0 < \delta < 1$. [Подсказка: если σ'— профиль стратегий, $v_i(\sigma')$ отражает недисконтированный выигрыш, а $v_i(\sigma',\delta)$ — дисконтированный выигрыш с множителем дисконтирования $0 < \delta < 1$, то $\lim_{\delta \to 1} v_i(\sigma',\delta) = v_i(\sigma')$.]

8. Рассмотрим стадийную игру G, такую что каждое S_i является компактным подмножеством некоторого Евклидова пространства, а все функции полезности $u_i : \prod_{j=1}^{n} S_j \to S_i$ непрерывны. Как обычно, положим $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$. Докажите следующие утверждения.

(a) Для любого игрока i его **минимаксный выигрыш**

$$\pi_i = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

вполне определен. То есть существуют действия $s^* \in S$, такие что

$$\pi_i = u_i(s_i^*, s_{-i}^*).$$

(b) Если σ — равновесие по Нэшу в бесконечной повторяющейся игре со стадийной игрой G, то для любого игрока i имеем $(1-\delta)v_i(\sigma) \geq \pi_i$. [Подсказка: в пункте (a) рассмотрите соответствие $\varphi : S_{-i} \to S_i$, определяемое правилом $\varphi(s_{-i}) \to S_i$. Заметим, что φ является непрерывным соответствием, к которому применима теорема Бержа о максимуме 9.13.]

7.2. Совершенные в подыграх равновесия в повторяющихся играх с конечным горизонтом

В предыдущем разделе мы рассматривали равновесие по Нэшу в повторяющихся играх с конечным горизонтом. Мы видели, что в некоторых случаях равновесные стратегии могут быть до известной степени неправдоподобными, поскольку основываются на недостоверных угрозах для сдерживания возможных отклонений игроков. В этом разделе мы обсудим концепцию совершенного в подыграх равновесия, которая усиливает концепцию равновесия по Нэшу за счет требования сохранения равновесности, разыгрываемой в последующие периоды. Таким образом, в совершенном в подыграх равновесии игроки продолжают играть стратегии, которые являются частью равновесия, и после того, как произошло отклонение. Следовательно, поскольку отклик на отклонение является частью оптимальной стратегии, в совершенном в подыграх равновесии отклики или угрозы отклонений оказываются достоверными.

Как отмечалось в прошлом разделе, повторяющаяся игра представляет собой динамическую игру, в которой игроки предпринимают действия после наблюдения истории игры. Таким образом, в T-периодной повторяющейся игре для произвольного периода $0 \leq t < T$ разыгрывается стадийная игра после периода t в периодах

$$t+1, t+2, \ldots, t+(T-t) = T;$$

т.е. игра разыгрывается в течение следующих $T-t$ периодов. Новая $T-t$-периодная игра называется **подыгрой** повторяющейся игры с началом в периоде $t+1$. Следовательно, T-периодная повторяющаяся игра содержит T подыгр, начинающихся в периодах $1,2,\ldots,T$ соответственно. Заметим, что t может принимать значение 0, в этом случае сама T-периодная повторяющаяся игра может рассматриваться как подыгра, начинающаяся в периоде 1.

Если $s=(s_{t+1},\ldots,s_T)$ — исход в подыгре повторяющейся игры с началом в периоде $t+1$, то недисконтированные и дисконтированные выигрыши участника i имеют вид

$$v_i^{t+1}(s)=\sum_{l=t+1}^{T}u_i(s_l) \text{ и } v_i^{t+1}(s)=\sum_{l=t+1}^{T}\delta^{l-t-1}u_i(s_l)$$

соответственно.

Пусть $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ — профиль стратегий в T-периодной повторяющейся игре, где σ_i — стратегия игрока i. Зафиксируем историю $h^\tau\in H^\tau$ для некоторого $0\le\tau<T$. Исходя из истории h^τ профиль стратегий σ порождает истории

$$h^\tau,h^{\tau+1},h^{\tau+2},\ldots,h^T,$$

определяемые рекурсивно по формуле

$$h^r=(h^{r-1},\sigma(h^{r-1}))\in H^r$$

для каждого $r=\tau+1,\tau+2,\ldots,T$.

В частности, профиль стратегий σ на основе истории h^τ порождает исход

$$\sigma(h^{t-1}),\sigma(h^t),\ldots,\sigma(h^{T-1})$$

в любой подыгре с началом в периоде t, $\tau<t\le T$, где $\sigma(h^l)=(\sigma_1(h^l),\sigma_2(h^l),\ldots,\sigma_n(h^l))\in S$. Следовательно, выигрыш игрока i в подыгре с началом в периоде t, где $\tau<t\le T$, и профиле стратегий σ, которая начинается с истории h^τ, составляет

$$v_i^t(h^\tau,\sigma)\equiv\sum_{l=t}^{T}u_i(\sigma_i(h^{l-1})),$$

или в случае дисконтированных выигрышей с произвольным множителем дисконтирования δ,

$$v_i^t(h^\tau,\sigma)\equiv\sum_{l=t}^{T}\delta^{l-1}u_i(\sigma_i(h^{l-1})).$$

- *Будем говорить, что профиль стратегий σ^* в T-периодной повторяющейся игре является **равновесием в подыгре с началом в периоде t после истории h^t**, если для каждого игрока i стратегия σ_i^* дает ему наибольший выигрыш в подыгре с началом в t после истории h^t, при условии, что все оставшиеся игроки придерживаются стратегии σ_{-i}^*.*

Другими словами, профиль стратегий σ^* — равновесие в подыгре с началом в периоде $t\ge1$ после истории h^t, если для каждого игрока выполняется неравенство

$$v_i^t(h^t,(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*))\ge v_i^t(h^t,(\sigma_i,\sigma_{-i}^*))$$

при любой стратегии σ_i игрока i.

Поскольку в динамической игре равновесный профиль стратегий должен оставаться осмысленным решением в процессе игры, будем требовать, чтобы равновесный профиль стратегий продолжал быть равновесием на протяжении игры, — мы уже имели дело с этой идеей в разделе 4.2. Иначе говоря, мы требуем, чтобы равновесный профиль стратегий в повторяющейся игре был также равновесием в любой подыгре после любой истории. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 7.12. *Профиль стратегий в T-периодной повторяющейся игре называется **совершенным равновесием в подыграх**, если при любой истории он остается равновесием в подыгре повторяющейся игры с началом после этой истории.*

Хотя в определении это явно не указано, совершенные в подыграх равновесия оказываются чувствительными к выбору множителя дисконтирования δ. Соответственно можно говорить о **недисконтированных совершенных в подыграх равновесиях** и **дисконтированных совершенных в подыграх равновесиях**.

Ясно, что любое совершенное в подыграх равновесие является равновесием по Нэшу в повторяющейся игре. Однако, как и ожидалось, равновесие по Нэшу необязательно будет совершенным в подыграх равновесием. Следующий пример иллюстрирует вышесказанное.

Пример 7.13. Рассмотрим трехпериодную повторяющуюся игру двух лиц со стадийной игрой (табл. 7.4). В примере 7.9 мы определили следующий профиль стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$.

(1) Стратегия σ_1^*: игрок 1 выбирает U в первом периоде, затем играет U, если во всех предыдущих периодах игрок 2 выбирал L, в противном случае играет D.

(2) Стратегия σ_2^*: игрок 2 всегда играет L в первом и втором периодах и всегда играет R в третьем периоде.

Мы установили, что σ^* оказывается недисконтированным равновесием по Нэшу. Теперь покажем, что σ^* не является недисконтированным совершенным в подыграх равновесием.

Рассмотрим историю $h^1 = (U, R)$. Нетрудно видеть, что при профиле σ^* начиная с истории h^1 (и включая ее) имеем следующий исход (в матричной форме):

$$\begin{bmatrix} U & R \\ D & L \\ D & R \end{bmatrix}.$$

Таблица 7.4

	Игрок 2		
	Стратегия	L	R
Игрок 1	U	(3,3)	(1,4)
	D	(1,0)	(0,1)

Этот исход в подыгре с началом в периоде 2 индуцирует исход

$$\begin{bmatrix} D & L \\ D & R \end{bmatrix}.$$

Ясно, что $v_1^2(h^1,\sigma^*) = 1 + 0 = 1$. Если игрок 1 изменит свою стратегию σ_1^* на стратегию σ_1, в соответствии с которой он всегда играет U в периодах 2 и 3, то при истории h^1 результирующий профиль стратегий $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2^*)$ приведет к следующему исходу в подыгре с началом в периоде 2:

$$\begin{bmatrix} U & L \\ U & R \end{bmatrix}.$$

Но при этом

$$v_1^2(h^1,\sigma) = 3 + 1 = 4 > 1 = v_1^2(h^1,\sigma^*).$$

Отсюда следует, что равновесие по Нэшу σ^* не является равновесием в подыгре с началом в периоде 2. Следовательно, равновесие по Нэшу не является совершенным в подыграх равновесием.

В теореме 7.8 был представлен класс равновесий по Нэшу для повторяющихся игр. Как выясняется, эти равновесия по Нэшу также являются совершенными в подыграх равновесиями. Доказательство этого результата проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 7.8, и опирается на тот факт, что поскольку профили стратегий постоянны в периодах, то каждая τ-периодная история h^τ порождает одинаковые исходы в подыграх, которые являются равновесными исходами в подыграх. Более детальное рассмотрение предлагается читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Теорема 7.14. *Если $s = (s_1, s_2, \dots, s_T)$ — исход в T-периодной повторяющейся игре, такой что $s_t \in S$ — равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) в стадийной игре, то постоянный в периодах профиль стратегий с исходом h является совершенным в подыграх равновесием.*

Следует заметить, что в повторяющейся игре существуют совершенные в подыграх равновесия, отличные от тех, что описаны в теореме 7.14. Приведем простейший пример совершенного в подыграх равновесия, исходы которого не состоят исключительно из равновесий по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры.

Пример 7.15. Рассмотрим двухпериодную повторяющуюся игру двух лиц со стадийной игрой (табл. 7.5). Заметим, что в стадийной игре есть два равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях): (U,R) и (D,R).

Таблица 7.5

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(0,0)	(2,1)
	D	(0,0)	(2,2)

Рассмотрим следующий профиль стратегий (σ_1^*, σ_2^*).

(1) Стратегия σ_2^* требует от игрока 2 выбрать L в периоде 1 и всегда выбирать R в периоде 2.

(2) Стратегия σ_1^* требует от игрока 1 играть U в периоде 1, а в периоде 2 играть D, если $h^1 = (\bullet, L)$, и в периоде 2 играть U, если $h^1 = (\bullet, R)$.

Покажем, что профиль стратегий σ^* является недисконтированным совершенным равновесием в подыграх.

Для начала заметим, что профиль σ^* порождает исход

$$\begin{bmatrix} U & L \\ D & R \end{bmatrix}.$$

В частности, заметим, что (U,L) не является равновесием по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры.

Далее, убедимся в том, что σ^* — равновесие по Нэшу в двухпериодной повторяющейся игре. Очевидно, что $v_1(s) = v_2(s) = 0 + 2 = 2$. Предположим, что игрок 2 не придерживается стратегии σ_2^*, а игрок 1 изменяет свою стратегию. Тогда возможные исходы таковы:

$$\begin{bmatrix} D & L \\ D & R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D & L \\ U & R \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} U & L \\ U & R \end{bmatrix}.$$

Соответствующие выигрыши игрока 1 при отсутствии множителя дисконтирования равны 2, 2 и 2. То есть игрок 1 не может увеличить выигрыш путем отклонения от σ_1^* при условии, что игрок 2 играет σ_2^*.

Теперь предположим, что игрок 1 придерживается свой стратегии σ_1^*, в то время как игрок 2 может выбрать другую стратегию. Возможные исходы при этом имеют вид

$$\begin{bmatrix} U & R \\ U & R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U & L \\ D & L \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} U & R \\ U & L \end{bmatrix}.$$

Соответствующие недисконтированные выигрыши игрока 2 равны 2, 0 и 1. Таким образом, игрок 2 не может улучшить свое положение, если игрок 1 не уклоняется от σ_1^*. Следовательно, профиль стратегий σ^* действительно является равновесием по Нэшу в двухпериодной повторяющейся игре.

Наконец, покажем, что σ^* — совершенное в подыграх равновесие. Для этого нам остается убедиться в том, что σ^* является равновесием в подыгре с началом в периоде 2. Возможные истории h^1 имеют вид (U,L), (U,R), (D,L) и (D,R). При данных историях σ^* порождает следующие исходы на подыгре с началом в периоде 2 соответственно:

$$(D,R),\ (U,R),\ (D,R) \text{ и } (U,R).$$

Недисконтированный выигрыш игроков при этих исходах составляет

игрок 1: 2, 2, 2 и 2,

игрок 2: 2, 1, 2 и 1.

Для игрока 1 выигрыш в размере 2 оказывается максимально возможным, поэтому даже если оба игрока изменят свои стратегии одновременно, его недисконтированный выигрыш не увеличится.

Теперь предположим, что игрок 1 придерживается своей стратегии. Понятно, что максимальный выигрыш игрока 2 в подыгре с началом в периоде 2 составляет 2. Так что при историях $h^1 = (U, L)$ или $h^1 = (D, L)$ выигрыш игрока 2 в подыгре с началом в периоде 2 увеличить невозможно. Если $h^1 = (U, R)$ или $h^1 = (D, R)$, то возможные исходы в подыгре с началом в периоде 2 в случае изменения стратегии игроком 2 имеют вид

$$(U,R) \text{ и } (U,L).$$

Соответствующие выигрыши равны 1 и 0. Эт показывает, что игрок 2 не может увеличить недисконтированный выигрыш в подыгре с началом в периоде 2 при любой предшествующей истории h^1 и условии, что игрок 1 придерживается стратегии σ_1^*.

Таким образом, σ^* — равновесие в любой подыгре с началом в периоде 2 при любой истории h^1. Следовательно, σ^* — совершенное в подыграх равновесие. ■

Рассмотрим T-периодную повторяющуюся игру со стадийной игрой G и исход

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,i} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,i} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{T,1} & s_{T,2} & \cdots & s_{T,i} & \cdots & s_{T,n} \end{bmatrix},$$

где каждое $s_t \in S$ — равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры G. Если $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ — постоянный в периодах профиль стратегий из S, то согласно теореме 7.14 σ^* представляет собой совершенное в подыграх равновесие в T-периодной повторяющейся игре, поддерживающее исход s, т.е. $h_{\sigma^*} = s$.

Оказывается, что если стадийная игра G имеет единственное равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях), то σ^* является единственным совершенным в подыграх равновесием в любой повторяющейся игре со стадийной игрой G. Имеет место следующий результат.

Теорема 7.16. *Если стратегическая игра G имеет единственное равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях), $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$, то любая T-периодная повторяющаяся игра со стадийной игрой G имеет единственное совершенное в подыграх равновесие.*

Более того, им является постоянный по периодам профиль стратегий s^*, т.е. профиль стратегий, при котором в каждом периоде t каждый игрок i всегда играет s_i^*.

Доказательство. Пусть $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$, где $\sigma_i^* = (\sigma_{1,i}^*, \sigma_{2i}^*, \ldots, \sigma_{T,i}^*)$ и $\sigma_{t,i}^* : \mathcal{H}^{t-1} \to S_i$, — совершенное в подыграх равновесие в T-периодной повторяющейся игре со стадийной игрой G. Предположим также, что σ^* порождает исход

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,i} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,i} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{T,1} & s_{T,2} & \cdots & s_{T,i} & \cdots & s_{T,n} \end{bmatrix}.$$

Необходимо показать, что

(1) для каждого периода t имеет место $s_t = s^*$, т.е. $s_{t,i} = s_i^*$ для всех игроков i и любого периода t,

(2) для любого периода t, каждого игрока i и любой истории $h^{t-1} \in \mathcal{H}^{t-1}$ выполнено $\sigma_{t,i}(h^{t-1}) = s_i^*$.

Для доказательства этих утверждений обратимся к методу обратной индукции.

Мы знаем из теоремы 7.10, что при $t = T$ s_T является равновесием по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры G. Поскольку s^* — это единственное равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) стадийной игры G, то $s_T = s^*$. Пусть $h^{T-1} \in \mathcal{H}^{T-1}$ – история игры и $a_i \in S_i$. Положим

$$\sigma_i' = (\sigma_{1,i}^*, \sigma_{2i}^*, \ldots, \sigma_{T-1,i}^*, \sigma_{T,i}'),$$

где $\sigma_{T,i}' : \mathcal{H}^{t-1} \to S_i$ — постоянная функция со значением a_i, т.е. игрок i всегда играет a_i в периоде T. Предположим теперь, что при заданной истории h^{T-1} профиль стратегий σ^* порождает исход

$$s_T' = (s_{T,1}', s_{T,2}', \ldots, s_{T,i-1}', s_{T,i}', s_{T,i+1}' \ldots, s_{T,n}') \in S$$

в подыгре с началом в периоде T, а профиль стратегий $\sigma' = (\sigma_i', \sigma_{-i}^*)$ порождает исход

$$((s_T')_{-i}, s_i) = (s_{T,1}', s_{T,2}', \ldots, s_{T,i-1}', s_i, s_{T,i+1}' \ldots, s_{T,n}') \in S.$$

Поскольку σ^* — совершенное в подыграх равновесие, то (при истории h^{T-1} в подыгре с началом в периоде T) имеет место

$$u_i(s_T') = u_i(s_{T,i}'(s_T')_{-i}) = v_i^T((\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)(h^{T-1})) \geq$$

$$\geq v_i^T((\sigma_i', \sigma_{-i}^*)(h^{T-1})) = u_i(a_i, (s_T')_{-i})$$

для любых $a_i \in S_i$. Отсюда следует, что s_T' является равновесием по Нэшу стадийной игры G. Но так как G имеет единственное равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях), то получаем, что $s_T' = s^*$. В силу того что $h^{T-1} \in H^{T-1}$ произвольна, каждый игрок i всегда играет s_i^* в периоде T.

Теперь перейдем к шагу обратной индукции. Пусть для некоторого периода $0 < t < T$ уже имеет место

(a) $s_{t+1} = s_{t+2} = \cdots = s_T = s^*$;

(b) в каждом периоде $t+1, t+2, \ldots, T$ каждый игрок i всегда играет s_i^*.

Для завершения доказательства необходимо показать, что $s_t = s^*$ и в периоде t каждый игрок i всегда играет s_i^*.

Рассмотрим некоторую историю $h^{t-1} \in \mathcal{H}^{t-1}$ и произвольного игрока i. Выберем $b_i \in S_i$ и рассмотрим профиль стратегий

$$\sigma^{\perp} = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^{\perp}, \sigma_{i+1}^* \ldots, \sigma_n^*),$$

где $\sigma_i^{\perp} = (\sigma_{1,i}^*, \sigma_{2,i}^*, \ldots, \sigma_{t-1,i}^*, \sigma_{t,i}^{\perp}, \sigma_{t+1}^*, i \ldots, \sigma_{t,i}^*)$ и $\sigma_{t,i}^{\perp} : \mathcal{H}^{t-1} \to S_i$ — постоянная функция со значением b_i, т.е. игрок i всегда играет b_i в периоде t. Заметим, что истории, индуцируемые профилями стратегий σ^* и $\sigma^{\perp}$ в подыгре с началом в периоде t, имеют вид

$$s'' = \begin{bmatrix} s_t'' \\ s_{t+1}'' \\ \vdots \\ s_T'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{t,1}'' & s_{t,2}'' & \cdots & s_{t,i}'' & \cdots & s_{t,n}'' \\ s_1^* & s_2^* & \cdots & s_i^* & \cdots & s_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^* & s_2^* & \cdots & s_i^* & \cdots & s_n^* \end{bmatrix}$$

и

$$s^{\perp} = \begin{bmatrix} s_t^{\perp} \\ s_{t+1}^{\perp} \\ \vdots \\ s_T^{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{t,1}'' & s_{t,2}'' & \cdots & b_i & \cdots & s_{t,n}'' \\ s_1^* & s_2^* & \cdots & s_i^* & \cdots & s_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1^* & s_2^* & \cdots & s_i^* & \cdots & s_n^* \end{bmatrix}.$$

Пользуясь тем, что σ^* — совершенное в подыграх равновесие, при истории h^{t-1} в подыгре с началом в периоде t для каждого игрока i имеем

$$u_i(s_t'') + (T-t)u_i(s^*) = v_i^t(s'') \ge v_i^t(s^{\perp}) =$$
$$= u_i(b_i, (s'')_{-i}) + (T-t)u_i(s^*).$$

Из этого следует, что $u_i(s_t'') \ge u_i(b_i, (s_t'')_{-i})$ для любого $b_i \in S_i$. В силу произвольности выбора игрока i можно заключить, что s_t'' является равновесием по Нэшу стадийной игры. Но поскольку в стадийной игре имеется лишь одно равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях), то непременно $s_t'' = s^*$. Так как $h^{t-1} \in \mathcal{H}^{t-1}$ — произвольная история, получается, что каждый игрок i всегда играет s_i^* в периоде t. На этом завершаются шаг метода индукции и доказательство теоремы. ■

Хотя в повторяющейся игре с конечным горизонтом дисконтированное равновесие по Нэшу не обязано быть недисконтированным равновесием по Нэшу, оказывается, что дисконтированное совершенное в подыграх равновесие всегда является недисконтированным совершенным равновесием. Этот факт отражен в следующем результате.

Теорема 7.17. *Предположим, что профиль стратегий* σ^* *является совершенным в подыграх равновесием при некотором множителе дисконтирования* $0 < \delta < 1$. *Тогда существует (и единственное)* $0 \le \delta^* < 1$, *такое что*

(1) *при всех* δ_1: $\delta^* \le \delta_1 \le 1$ *профиль стратегий* σ^* — *совершенное в подыграх равновесие*;

(2) *в случае* $0 < \delta^*$ *при любых* $0 < \delta_2 < \delta^*$ *профиль стратегий* σ^* *не является совершенным в подыграх равновесием.*

В частности, если профиль стратегий — совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с конечным горизонтом с дисконтированными выигрышами, то он также будет совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре с недисконтированными выигрышами.

Доказательство. Пусть σ^* — совершенное в подыграх равновесие в T-периодной повторяющейся игре с дисконтирующим множителем $0<\delta<1$. Рассмотрим число δ_1, такое что $\delta<\delta_1\le 1$. Утверждается, что σ^* — совершенное в подыграх равновесие для повторяющейся игры с множителем дисконтирования δ_1.

Чтобы доказать это, предположим, что h^τ — история игры, где $0\le\tau\le T-1$, и предположим, что профиль σ получен из профиля σ^*, когда ровно один из игроков i изменил свою стратегию. Профили стратегий σ^* и σ начиная с истории h^τ порождают, соответственно, истории

$$h^{\tau+1},h^{\tau+2},\dots,h^T \text{ и } g^{\tau+1},g^{\tau+2},\dots,g^T$$

с соответствующими действиями

$$s_{\tau+1},s_{\tau+2},\dots,s_T \text{ и } s'_{\tau+1},s'_{\tau+2},\dots,s'_T .$$

Покажем, что при любом $\tau\le t\le T-1$ имеет место

$$\sum_{l=t+1}^{T}\delta_1^{l-t-1}[u_i(s_l)-u_i(s'_l)]\ge\sum_{l=t+1}^{T}\delta^{l-t-1}[u_i(s_l)-u_i(s'_l)]\ge 0 . \tag{7.1}$$

Установим справедливость (7.1) с помощью метода обратной индукции по t. При $t=T-1$ соотношение (7.1) превращается в $u_i(s_T)-u_i(s'_T)\ge u_i(s_T)-u_i(s'_T)\ge 0$, что верно, поскольку начиная с истории h^{T-1} профиль стратегий σ^* порождает δ-дисконтированное равновесие в подыгре с началом в периоде T. Теперь предположим, что соотношение (7.1) верно для некоторого периода $\tau<t\le T-1$. Поскольку начиная с истории h^τ профиль стратегий σ^* порождает δ-дисконтированное равновесие в подыгре с началом в периоде t, имеем

$$\sum_{l=t}^{T}\delta^{l-t}[u_i(s_l)-u_i(s'_l)]\ge 0 .$$

Используя гипотезу индукции (7.1) и тот факт, что $\delta_1>\delta>0$, получаем

$$\sum_{l=t}^{T}\delta_1^{l-t}[u_i(s_l)-u_i(s'_l)]=u_i(s_t)-u_i(s'_t)+\delta_1\sum_{l=t+1}^{T}\delta_1^{l-t-1}[u_i(s_l)-u_i(s'_l)]\ge$$

$$\ge u_i(s_t)-u_i(s'_t)+\delta\sum_{l=t+1}^{T}\delta^{l-t-1}[u_i(s_l)-u_i(s'_l)]=\sum_{l=t}^{T}\delta^{l-t}[u_i(s_l)-u_i(s'_l)]\ge 0 .$$

На этом индукция (и доказательство) завершаются, и тем самым устанавливается справедливость (7.1).

Теперь покажем, что σ^* образует δ_1-дисконтированное совершенное в подыграх равновесие. Рассмотрим подыгру с началом в периоде $t+1$, где $\tau\le t\le T-1$. Из (7.1) следует

$$\sum_{l=t+1}^{T}\delta_1^{l-t-1}u_i(s_l)\ge\sum_{l=t+1}^{T}\delta_1^{l-t-1}u_i(s'_l),$$

откуда ясно, что игрок i не сможет улучшить свой δ_1-дисконтированный выигрыш в подыгре с началом в периоде $t+1$ при истории h^t. Следовательно, σ^* действительно является δ_1-дисконтированным совершенным в подыграх равновесием.

Что касается существования δ^*, положим

$$\delta^* = \inf\{0<\delta<1 : \sigma^* \text{ образует } \delta\text{-дисконтированное совершенное равновесие}\}.$$

Предоставим читателю самостоятельно убедиться в том, что вещественное число $0 \le \delta^* < 1$ удовлетворяет всем требуемым свойствам. ■

Одной из интересных особенностей повторяющихся игр является то, что неравновесные исходы стадийной игры могут быть частью равновесных исходов в повторяющейся игре. Например, если стадийная игра имеет два равновесия по Нэшу, одно из которых приносит меньший выигрыш обоим участникам, то исходы, отличные от равновесных исходов стадийной игры, могут составлять часть совершенного в подыграх равновесия в повторяющейся игре с конечным горизонтом. Следующий пример является иллюстрацией подобного феномена.

Пример 7.18. Рассмотрим рынок с двумя фирмами, участвующими в игре по назначению цены. Каждая из них может назначить высокую (*Hi*), среднюю (*Me*) или низкую (*Lo*) цену. Результирующая (симметричная) матричная игра представлена в табл. 7.6. Выигрыши фирм характеризуются их прибылью, выраженной в миллионах долларов.

Предположим, что игра проходит в два периода. В этой двухпериодной повторяющейся игре рассмотрим профиль стратегий σ, при котором каждая из фирм выбирает *Hi* в периоде 1, а затем обе фирмы играют *Me*, если ни одна из фирм не уклоняется от этой стратегии в первый период. Если хотя бы одна из фирм отклонится от *Hi* в периоде 1, то обе будут играть *Lo* в периоде 2. Можно формально описать эту стратегию следующим образом. Для $i = 1,2$ имеем, $\sigma_{1,i} = Hi$ и

$$\sigma_{2,i} = \begin{cases} Me, & \text{если } h^1 = (Hi, Hi), \\ Lo, & \text{если } h^1 \neq (Hi, Hi). \end{cases}$$

Покажем, что профиль стратегий σ — совершенное в подыграх равновесие в этой двухпериодной игре. Для начала заметим, что в периоде 2 обе фирмы будут играть либо (*Me*,*Me*), либо (*Lo*,*Lo*), т.е. выберут стратегии, профиль которых — равновесия по Нэшу стадийной игры. Таким образом, в периоде 2

Таблица 7.6

		Фирма 2		
	Стратегия	*Hi*	*Me*	*Lo*
Фирма 1	*Hi*	(8,8)	(4,10)	(0,4)
	Me	(10,4)	(6,6)	(1,3)
	Lo	(4,0)	(3,1)	(2,2)

не существует прибыльных отклонений при любой истории h^1 в периоде 1. Следовательно, профиль стратегий $\sigma^*(h^1)$ — равновесие в любой подыгре, начинающейся после любой истории h^1 периода 1.

Если фирма i отклонится от стратегии (Hi,Hi) в периоде 1, то в периоде 2 обе фирмы сыграют (Lo,Lo); в противном случае они будут играть (Me,Me). В случае отклонения фирмы i в периоде 1 ее выигрыш составит $10+2\delta$, значит, фирма i не станет отклоняться от выбранной стратегии в периоде 1, если

$$10+2\delta \le 8+6\delta,$$

т.е. при (любом) дисконтирующем множителе, удовлетворяющем соотношению $\delta \ge \frac{1}{2}$. Таким образом, мы установили, что при $\delta \ge \frac{1}{2}$ профиль стратегий σ^* — совершенное в подыграх равновесие.

Особенность примера в том, что равновесным в периоде 1 оказывается исход (Hi,Hi), который не является равновесием стадийной игры. Подобные совершенные в подыграх равновесия могут быть построены в любой повторяющейся игре с конечным горизонтом, имеющей как минимум две равновесные по Нэшу (в чистых стратегиях) точки, выигрыши в одной из которых доминируют выигрыши в другой. Обратим внимание также на то, что увеличение выигрыша в случае отклонения в первом периоде меньше разницы между выигрышами в двух равновесных точках. Именно поэтому на уклоняющуюся в первом периоде фирму может быть наложено реальное заслуживающее доверия «наказание» во втором периоде. Для заданной стадийной игры G определим

$$M_i(s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Теорема 7.19. *Рассмотрим T-периодную конечную повторяющуюся игру со стадийной игрой G, имеющей две равновесные точки,* s^{1*} *и* s^{2*}, *такие что выигрыши в* s^{1*} *доминируют выигрыши в* s^{2*}, *т.е.*

$$u_i(s^{1*}) > u_i(s^{2*}) \text{ для любых } i=1,\dots,n.$$

Пусть $s \in S$ *таково, что* $u_i(s) \ge u_i(s^{2*})$ *для любых* $i=1,\dots,n$

$$\text{и } M_i(s_{-i}) - u_i(s) \le \underline{\delta}[u_i(s^{1*}) - u_i(s^{2*})] \text{ для любых } i=1,\dots,n$$

при некотором $0<\underline{\delta}<1$. *Тогда при всех* $\delta \ge \underline{\delta}$ *существует совершенная в подыграх равновесная стратегия, в которой игроки играют* $s \in S$ *в течение* $T-1$ *периодов.*

Доказательство. Определим профиль стратегий σ^* следующим образом. При $t \le T-1$ положим

$$\sigma_{t,i}(h^{t-1}) = \begin{cases} s_i, & \text{если } h^{t-1} = (s,\dots,s), \\ s_i^{2*}, & \text{если } h^{t-1} \ne (s,\dots,s). \end{cases}$$

При $t=T$ рассмотрим

$$\sigma_{t,i}(h^{t-1}) = \begin{cases} s_i^{1*}, & \text{если } h^{t-1} = (s,\dots,s), \\ s_i^{2*}, & \text{если } h^{t-1} \ne (s,\dots,s). \end{cases}$$

Заметим, что в периоде T игроки разыгрывают одно из равновесий по Нэшу: либо s^{1*}, либо s^{2*}. Таким образом, ясно, что σ^* является равновесным профилем стратегий в любой подыгре, начинающейся после $T-1$-периодной истории h^{T-1}. Таким образом, для того чтобы показать, что σ^* — совершенное в подыграх равновесие этой повторяющейся игры с конечным горизонтом, достаточно установить, что ни один из игроков i не сможет увеличить свой выигрыш, отклонившись от стратегии σ_i^* в любой период $t \le T-2$ после любой t-периодной истории h^t. Необходимо рассмотреть два случая: $h^t = (s,\ldots,s)$ и $h^t \ne (s,\ldots,s)$.

Если $h^t \ne (s,\ldots,s)$, то σ^* предписывает игрокам играть s^{2*} в течение всех следующих периодов; следовательно, σ^* — равновесие в подыгре, начинающейся в периоде $t+1$, поскольку мы имеем дело с постоянной в периодах стратегией s^{2*} (см. теорему 7.16) в подыгре, начинающейся в периоде $t+1$. Если $h^t = (s,\ldots,s)$, то в случае выбора игроком i стратегии $\sigma_i(h^t) \ne \sigma_i^*(h^t) = s_i^{1*}$ в периоде $t+1$ дисконтированная сумма его будущих выигрышей в лучшем случае составит

$$M_i(s_{-i}) + \sum_{l=1}^{T-t-1} \delta^l u_i(s^{2*}).$$

А в случае выбора стратегии σ_i^* при условии, что остальные игроки выбрали σ_{-i}^*, в подыгре, начинающейся в периоде $t+1$, дисконтированная сумма будущих выигрышей равна

$$\sum_{l=1}^{T-t-1} \delta^{l-1} u_i(s) + \delta^{T-t-1} u_i(s^{1*}).$$

Поскольку

$$M_i(s_{-i}) - u_i(s) \le \underline{\delta}[u_i(s^{1*}) - u_i(s^{2*})],$$

то при любых $\delta \ge \underline{\delta}$ имеем

$$M_i(s_{-i}) + \delta u_i(s^{2*}) \le u_i(s) + \delta u_i(s^{1*}).$$

С учетом того факта, что $u_i(s) \ge u_i(s^{2*})$, из этого следует

$$M_i(s_{-i}) + \sum_{l=1}^{T-t-1} \delta^l u_i(s^{2*}) \le \sum_{l=1}^{T-t-1} \delta^{l-1} u_i(s) + \delta^{T-t-1} u_i(s^{1*}).$$

Отсюда вытекает, что σ^* действительно является равновесием (порождает равновесие) в подыгре с началом в периоде $t+1$ после истории $h^t = (s,\ldots,s)$, что и завершает доказательство. ■

Упражнения

1. Рассмотрим игру «Дилемма заключенного» из примера 2.2, представленную матрицей в табл. 7.7. Предположим, что игра повторяется T раз. Покажите следующее.
   (a) Исход ((*Молчать*, *Молчать*), ..., (*Молчать*, *Молчать*)) не является профилем историй равновесия по Нэшу.
   (b) Исход ((*Доносить*, *Доносить*), ..., (*Доносить*, *Доносить*)) является профилем историй совершенного в подыграх равновесия.

Таблица 7.7

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Молчать*	*Доносить*
	Молчать	(−1,−1)	(−10,0)
	Доносить	(0,−10)	(−5,−5)

2. Каков выигрыш игрока в повторяющейся игре «Дилемма заключенного», если число периодов равно 10, а игроки играют (*Молчать*, *Молчать*) в каждом периоде? Ставка дисконтирования равна $0 < \delta < 1$.
3. Рассмотрим двухпериодную повторяющуюся игру двух лиц со стадийной игрой, представленной в табл. 7.8. Покажите, что профиль стратегий (σ_1^*, σ_2^*), такой что
   (a) стратегия σ_2^* требует от игрока 2 выбрать L в периоде 1 и всегда R в периоде 2;
   (b) стратегия σ_1^* требует от игрока 1 играть D в периоде 1, U в периоде 2, если $h^1 = (-, L)$, D в периоде 2, если $h^1 = (-, R)$

   является совершенным в подыграх равновесием для этой двухпериодной повторяющейся игры.
4. Матричная игра из табл. 7.9 носит название **семейный спор**, и уже рассматривалась нами в конце раздела 2.3. Найдите совершенные в подыграх равновесия двухпериодной повторяющейся игры, для которой данная игра является стадийной.
5. Стратегическая игра из табл. 7.10 принадлежит к классу игр, называемых **координационными играми** (см. обсуждение в конце раздела 2.3). Рассмотрим повторяющуюся игру, которая возникает в результате разыгрывания этой игры в течение трех периодов. Найдите все недис-

Таблица 7.8

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(0,0)	(2,4)
	D	(0,0)	(2,2)

Таблица 7.9

	Женщина		
Мужчина	Стратегия	*Опера*	*Бой быков*
	Опера	(1,2)	(0,0)
	Бой быков	(0,0)	(2,1)

Таблица 7.10

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(2,2)	(0,0)
	D	(0,0)	(1,1)

контированные равновесия и совершенные в подыграх равновесия в этой трехпериодной повторяющейся игре.

6. Предположим, что стадийная игра из предыдущего упражнения повторяется в течение трех периодов. Но теперь участники учитывают выигрыш последующего периода с дисконтирующим множителем $0<\delta<1$.

(a) Будут ли равновесные профили стратегий отличаться от тех, что получены в предыдущем упражнении?

(b) Каков будет ответ в случае, если дисконтирующие множители игроков δ_1 и δ_2 будут различными?

7. Рассмотрим пятипериодную повторяющуюся игру со стадийной игрой из примера 7.18. Возьмем следующий профиль стратегий σ повторяющейся игры. Для фирмы 1 положим $\sigma_{t,1} = Lo$ при $1 \le t \le 4$ и

$$\sigma_{5,1}(h^4) = \begin{cases} Me, & \text{если } h^4 = ((Lo, Me),\dots,(Lo, Me)), \\ Lo, & \text{если } h^4 \ne ((Lo, Me),\dots,(Lo, Me)). \end{cases}$$

Для фирмы 2 положим

$$\sigma_{t,1}(h^{t-1}) = \begin{cases} Me, & \text{если } h^{t-1} = ((Lo,Me),\dots,(Lo,Me)), \\ Lo, & \text{если } h^{t-1} \ne ((Lo,Me),\dots,(Lo,Me)). \end{cases}$$

То есть фирмы играют (Lo,Me) в течение первых четырех периодов, затем играют (Me,Me) в пятом периоде, если ни одна из фирм не отклонилась. Если одна из фирм отклонится, то обе фирмы играют (Lo,Lo). Покажите, что данный профиль стратегий σ образует недисконтированное совершенное в подыграх равновесие для любого периода $T \ge 2$.

8. Рассмотрим пятипериодную повторяющуюся игру со стадийной игрой (табл. 7.11).

(a) Найдите недисконтированные совершенные в подыграх равновесия этой повторяющейся игры.

(b) Каковы будут недисконтированные совершенные в подыграх равновесия в случае, если стадийная игра повторяется в течение T периодов?

Таблица 7.11

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(2,2)	(3,1)
	D	(1,3)	(4,4)

Таблица 7.12

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(2,2)	(4,2)
	D	(1,3)	(4,4)

Таблица 7.13

	Фирма 2			
Фирма 1	Стратегия	L	C	R
	U	(5,5)	(4,8)	(0,4)
	M	(6,4)	(5,5)	(1,3)
	D	(5,1)	(4,2)	(2,2)

9. Предположим, что игра в стратегической форме из табл. 7.12 повторяется в течение пяти периодов.
   (a) Найдите недисконтированные совершенные в подыграх равновесия.
   (b) Каковы будут недисконтированные совершенные в подыграх равновесия в случае, если стадийная игра будет разыграна в течение семи периодов?

10. Предположим, что игра из табл. 7.13 разыгрывается двумя фирмами дважды. Существует ли недисконтированное равновесие, при котором фирмы всегда играют (U,L)? Если да, то опишите это равновесие. Является ли оно совершенным в подыграх?

11. Покажите, что T-периодная повторяющаяся игра стадийной игры из упражнения 10 имеет недисконтированное совершенное в подыграх равновесие, при котором исход (U,L) играется (возникает) в течение первых $T-1$ периодов. Опишите соответствующий профиль стратегий и покажите, что он является совершенным в подыграх.

12. Рассмотрим T-периодную повторяющуюся игру со стадийной игрой из упражнения 10. Является ли исход (M,L) частью недисконтированного равновесия? Если нет, объясните, почему. Если да, опишите равновесный профиль стратегий, при котором (M,L) действительно является частью этого равновесного профиля.

13. Рассмотрим стадийную игру из примера 7.18. Предположим, что обе фирмы имеют ставку дисконтирования δ, причем $0<\delta<1$, а стадийная игра повторяется в течение T периодов. Покажите, что существует дисконтированное совершенное в подыграх равновесие, при котором фирмы играют (Hi,Hi) в течение $T-1$ периодов.

14. Предположим, что стадийная игра из примера 7.18 повторяется в течение десяти периодов, и фирмы имеют одну и ту же ставку дисконтирования $0<\delta<1$. Является ли недисконтированное совершенное в подыграх равновесие из примера 7.18 дисконтированным совершенным в подыграх равновесием в данной повторяющейся игре? Если нет, найдите значения δ, при которых описанный в примере 7.18 профиль стратегий образует дисконтированное совершенное в подыграх равновесие.

15. Снова обратимся к стадийной игре из примера 7.18. Предположим, что она повторяется на протяжении десяти периодов. Обе фирмы имеют одну и ту же ставку дисконтирования $0<\delta<1$. Найдите совершенное в подыграх дисконтированное равновесие, при котором фирмы играют (Hi,Hi) в течение первых восьми периодов. Будет ли оно совершенным в подыграх дисконтированным равновесием при любых $0<\delta<1$? Если нет, то при каких значениях δ оно будет таковым?

16. В повторяющейся игре с дисконтированием из упражнения 15 найдите дисконтированное совершенное в подыграх равновесие, при котором фирмы играют (Hi,Hi) в течение первых шести периодов. При каких значениях δ между 0 и 1 оно будет дисконтированным совершенным в подыграх равновесием? Сравните ответ с вашим ответом на соответствующий вопрос упражнения 15.

17. Покажите, что для произвольного профиля стратегий σ повторяющейся игры с конечным горизонтом существует единственное вещественное число $0 \le \delta^* \le 1$, такое что

(a) если (в случае $0 \le \delta^* < 1$) $\delta^* \le \delta \le 1$, то профиль стратегий σ является δ-дисконтированным совершенным в подыграх равновесием;

(b) если (в случае $0 < \delta^* \le 1$) $0 < \delta < \delta^*$, то профиль стратегий σ не является δ-дисконтированным совершенным в подыграх равновесием.

18. Рассмотрим T-периодную повторяющуюся игру и предположим, что профиль стратегий σ не является недисконтированным совершенным в подыграх равновесием. Покажите, что существует некоторое δ_0, $0<\delta_0<1$, такое что σ также не будет дисконтированным совершенным в подыграх равновесием при всех $\delta_0<\delta<1$. [Подсказка: см. упражнение 7 в конце раздела 7.1.]

19. Для этого упражнения введем следующие обозначения: если $h^t \in \mathcal{H}^t$ и $h^\tau \in \mathcal{H}^\tau$, то $h^t h^\tau$ обозначает историю из $\mathcal{H}^{t+\tau}$, которая сформирована из h^t и следующей за ней h^τ. Будем считать, что $h^t h^0 = h^t$. Предположим теперь, что σ^* — равновесие по Нэшу в T-периодной повторяющейся игре, которое порождает исход $(h_1,h_2,\ldots,h_T)$. Рассмотрим период t, $1 \le t < T-1$, и положим $h^t=(h_1,h_2,\ldots,h_t)\in\mathcal{H}^t$. Рассмотрим подыгру с началом в периоде $t+1$ и заметим, что ее история имеет вид $\mathcal{H}=\bigcup_{\tau=0}^{T-t-1}\mathcal{H}^\tau$.

Покажите, что профиль стратегий $\sigma' : \mathcal{H} \to S$, определенный по правилу

$$\sigma'(h^\tau)=\sigma^*(h^t h^\tau)$$

для любых $h^\tau \in \mathcal{H}$, — равновесие по Нэшу в подыгре с началом в периоде $t+1$.

20. Докажите теорему 7.14.

7.3. Повторяющиеся игры с бесконечным горизонтом

До сих пор мы имели дело с совершенными в подыграх равновесиями в повторяющихся играх с конечным горизонтом. Как было обнаружено, совершенное в подыграх равновесие может включать такие выборы игроков в некоторых периодах игры, которые не являются равновесиями по Нэшу в стадийной игре. В данном разделе мы обсудим повторяющиеся игры с бесконечным горизонтом. Как мы увидим далее, в отличие от повторяющихся игр с конечным горизонтом, в играх с бесконечным горизонтом имеется достаточно широкое множество совершенных в подыграх равновесий, причем некоторые равновесия могут содержать довольно сложную структуру угроз и наказаний.

Повторяющаяся игра с бесконечным горизонтом ($T = \infty$) состоит из следующих элементов:

(1) стадийная игра G теперь разыгрывается бесконечное число раз — в периоды $t = 1, 2, 3, \ldots$;

(2) функция выигрыша каждого участника i в стадийной игре ограничена; т.е. для каждого участника i существует некоторое $M_i > 0$ такое, что $|u_i(s)| \le M_i$ при любом исходе $s \in S$;

(3) функция выигрыша игрока i в игре с бесконечным горизонтом представляет собой **дисконтированную функцию выигрышей**. То есть существует некоторое $0 < \delta < 1$, такое что для любой бесконечной последовательности действий $h = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ в стадийной игре, которая является **исходом** в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом, выигрыш игрока i имеет вид дисконтированной суммы бесконечного ряда $(u_i(s_1), u_i(s_2), u_i(s_3), \ldots)$:

$$v_i(h) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(s_t)\ ^{1};$$

(4) множество всех историй повторяющейся игры с бесконечным горизонтом — это множество

$$\mathcal{H} = \bigcup_{t=0}^{\infty} \mathcal{H}^t .$$

Как и в случае повторяющихся игр с конечным горизонтом, **стратегия** игрока i представляет собой функцию $\sigma_i : \mathcal{H} \to S_i$. Иначе говоря, стратегия σ_i игрока i — это последовательность функций

$$\sigma_i = (\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \ldots, \sigma_{t,i}, \ldots),$$

где каждое $\sigma_{t,i}$ является функцией $\sigma_{t,i} : \mathcal{H}^{t-1} \to S_i$. Кроме того, **профилем стратегий** является любой набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ из n элементов, где каждое σ_i — стратегия игрока i.

Если $h = (s_1, s_2, \ldots)$ — исход в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом, где $h_t = (s_{t,1}, s_{t,2}, \ldots, s_{t,n}) \in S$, то **постоянным по периодам** профилем стратегий из h называется профиль $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, такой что в каждом периоде t каждый игрок i всегда играет $s_{t,i}$; т.е. $\sigma_i(h^{t-1}) = s_{t,i}$ для любого периода t, любого игрока i и любой истории $h^{t-1} \in \mathcal{H}^{t-1}$.

[1] Как обычно, для **геометрической прогресии** $1, \delta, \delta^2, \ldots, \delta^t, \ldots$ справедливо равенство

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = \frac{1}{1-\delta} .$$

Поскольку функция полезности $u_i(\cdot)$ каждого игрока i ограничена, это гарантируст, что дисконтированная фукция выигрыша $v_i(\cdot)$ с бесконечным горизонтом каждого игрока i является вещественнозначной.

Как и в повторяющихся играх с конечным горизонтом, любой профиль стратегий σ порождает единственный (бесконечный) исход $h_\sigma = (s_1^\sigma, s_2^\sigma, \ldots)$. В частности, можно рассмотреть дисконтированные функции выигрышей с бесконечным горизонтом, определяемые профилем стратегий по формулам

$$v_i(\sigma) \equiv v_i(h_\sigma) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(s_t^\sigma).$$

Заметим также, что если σ является постоянным по периодам профилем стратегий с исходом h, то $h_\sigma = h$.

Понятие равновесия по Нэшу в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом определяется обычным способом.

- *В игре с бесконечным горизонтом профиль стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ называется **равновесием по Нэшу** (или просто **равновесием**), если для любого игрока i и любой его стратегии σ_i имеет место неравенство*

$$v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*).$$

Совершенные в подыграх равновесия определяются точно так же, как и для повторяющихся игр с конечным горизонтом. Заметим, что для любого $t = 0, 1, 2, \ldots$ и любой истории h^t существует **подыгра** с началом в периоде $t + 1$, которая разыгрывается в течение бесконечного числа периодов $t+1, t+2, t+3, \ldots$. Функция выигрыша игрока i в подыгре с началом в периоде $t + 1$, порожденной историей h^t, является дисконтированной суммой полезностей от исхода $h = (s_{t+1}, s_{t+2}, \ldots)$ в подыгре с началом в периоде $t + 1$, определенной историей h^t. Она задается в виде

$$v_i^{t+1}(h) = \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \delta^{\tau-t-1} u_i(s_\tau).$$

Аналогично случаю конечного горизонта, если $\sigma_i : \mathcal{H} \to S_i$ — произвольная стратегия игрока i, то при заданном периоде $t \geq 1$ и истории $h^t \in \mathcal{H}^t$ профиль стратегий $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ начиная с истории h^t порождает исход

$$h \equiv h^t, h^{t+1}, h^{t+2}, \ldots,$$

который определяется рекурсивно по формулам

$$h^{s+1} = (h^s, \sigma(h^s)) \in \mathcal{H}^{s+1} \text{ при } s = t, t+1, t+2, \ldots.$$

Таким образом, профиль стратегий σ начиная с истории h^t порождает следующие исходы в подыгре с началом в периоде $t + 1$:

$$h_{t+1}(h^t, \sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_1(h^t) & \sigma_2(h^t) & \cdots & \sigma_n(h^t) \\ \sigma_1(h^{t+1}) & \sigma_2(h^{t+1}) & \cdots & \sigma_n(h^{t+1}) \\ \sigma_1(h^{t+2}) & \sigma_2(h^{t+2}) & \cdots & \sigma_n(h^{t+2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Поскольку в повторяющейся игре стадийная игра одна и та же в каждом периоде, подыгра повторяющейся игры с бесконечным горизонтом с началом в периоде $t + 1$ оказывается идентичной исходной игре с одной лишь разницей: в то время как исходная игра с бесконечным горизонтом не имеет истории, предшествующей началу игры, каждая подыгра с началом в периоде $t+1$ имеет историю h^t, предшествующую началу этой подыгры. Поэтому стратегии в подыграх с началом в периоде $t+1$ определяются через стратегии исходной повторяющейся игры. Следовательно, если исходный профиль стратегий предписывает игрокам играть по-разному в подыграх с началом в периоде $t+1$ при истории h^t и истории g^t, то итоговые профили стратегий в подыграх будут различными. По этой причине подыгра с началом в периоде $t+1$ считается отличной от подыгры с началом в том же периоде $t+1$, если две истории, предшествующие этим подыграм, различны.

Профиль стратегий σ^* является **равновесием** в подыгре[1], порожденной историей h^t, если для любого игрока i и любой его стратегии σ_i выполнено неравенство

$$v_i^{t+1}(h_{t+1}(h^t,(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)))\geq v_i^{t+1}(h_{t+1}(h^t,(\sigma_i,\sigma_{-i}^*))).$$

То есть профиль стратегий σ^* является равновесием в повторяющейся игре, если ни один игрок i не получит выгоды от изменения своей стратегии при условии, что все остальные игроки продолжают играть в соответствии с их профилем стратегий σ_{-i}^*.

Совершенным в подыграх равновесием, таким образом, является равновесие, которое остается таковым во всех продолжениях повторяющейся игры. Итак, имеем следующее определение.

Определение 7.20. *Профиль стратегий в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом называется* ***совершенным в подыграх равновесием****, если он является равновесием в любой подыгре повторяющейся игры.*

Поскольку совершенное в подыграх равновесие является равновесием в каждой подыгре, необходимо выяснить, верно ли, что равновесие по Нэшу всегда оказывается совершенным в подыграх равновесием. Следующий пример показывает, что это не всегда верно. Кроме того, в отличие от повторяющихся игр с конечным горизонтом (см. следствие 7.11), игра с бесконечным горизонтом может иметь равновесия по Нэшу, даже если стадийная игра не имеет равновесий в чистых стратегиях. Следующий пример иллюстрирует вышесказанное.

Пример 7.21 (равновесие по Нэшу в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом, у которой стадийная игра не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях). Рассмотрим повторяющуюся игру двух лиц с бесконечным горизонтом со стадийной игрой из табл. 7.14. Ясно, что данная стадийная игра не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях.

Определим профиль стратегий $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$, где

$$\sigma_1=(\sigma_{1,1},\sigma_{2,1},\sigma_{3,1},\ldots)\text{ и }\sigma_2=(\sigma_{1,2},\sigma_{2,2},\sigma_{3,2},\ldots),$$

следующим образом.

[1] В дальнейшем будет подразумеваться, что подыгра — это подыгра, начинающаяся в период $t+1$, если она порождена историей h^t.

1. При $t = 1$ положим

$$\sigma_{1,1}(h^0) = U \text{ и } \sigma_{1,2}(h^0) = L.$$

2. При $t > 1$ и любом $h^{t-1} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ s_{t-1,1} & s_{t-1,2} \end{bmatrix} \in H^{t-1}$

определим

$$\sigma_{t,1}(h^{t-1}) = \begin{cases} U, & \text{если } s_{\tau,2} = L \text{ для всех } \tau = 1,\ldots,t-1, \\ D, & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$\sigma_{t,2}(h^{t-1}) = \begin{cases} L, & \text{если } s_{\tau,1} = U \text{ для всех } \tau = 1,\ldots,t-1, \\ R, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно понять, что исход, порождаемый этим профилем стратегий, имеет вид

$$((U,L),(U,L),(U,L),\ldots).$$

Выигрыши участников в таком случае составляют

$$v_1(\sigma) = v_2(\sigma) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} 3 = \frac{3}{1-\delta}.$$

Утверждается, что профиль стратегий σ образует равновесие по Нэшу. Чтобы показать это, предварительно заметим, что поскольку 3 — это максимальный выигрыш игрока 2 в каждом из периодов, то $v_2(\sigma)$ представляет наибольший из всех возможных дисконтированных выигрышей, вне зависимости от стратегий игроков. В частности, игрок 2 не может увеличить дисконтированный выигрыш путем изменения стратегии, если игрок 1 при этом не меняет свою стратегию.

Предположим, что игрок 1 отклонится от σ_1, выбрав стратегию σ_1', а игрок 2 продолжит играть σ_2. Пусть $k \geq 1$ — первый из периодов, в котором игрок 1 отклонится от U к D. Тогда начиная со следующего периода игрок 2 станет всегда играть R.

Таким образом,

(а) при $k > 1$ тогда мы получаем исход следующего вида

$$(\underbrace{(U,L),(U,L),\ldots,(U,L)}_{(k-1)\text{периодов}},(D,L),(\bullet,R),(\bullet,R),(\bullet,R),\ldots);$$

Таблица 7.14

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(3,3)	(1,2)
	D	(4,0)	(0,1)

(b) при $k = 1$ имеем исход следующего вида:

$$((D,L),(\bullet,R),(\bullet,R),(\bullet,R),\ldots).$$

В случае (a) дисконтированный выигрыш игрока 1 составляет

$$v_1(\sigma_1',\sigma_{-1}) = 3\sum_{t=1}^{k-1}\delta^{t-1} + 4\delta^{k-1} + \sum_{t=k+1}^{\infty}\delta^{t-1}u_1(\bullet,R) \le 3\sum_{t=1}^{k-1}\delta^{t-1} + 4\delta^{k-1} + \sum_{t=k+1}^{\infty}\delta^{t-1} =$$

$$= 3\frac{1-\delta^{k-1}}{1-\delta} + 4\delta^{k-1} + \frac{\delta^k}{1-\delta} = \frac{3}{1-\delta} + \frac{\delta^{k-1}}{1-\delta}(1-3\delta) = v_1(\sigma) + \frac{\delta^{k-1}}{1-\delta}(1-3\delta).$$

Аналогично в случае (b) выигрыш игрока 1 с дисконтом имеет вид

$$v_1(\sigma_1',\sigma_{-1}) = 4 + \sum_{t=2}^{\infty}\delta^{t-1}u_1(\bullet,R) \le 4 + \sum_{t=2}^{\infty}\delta^{t-1} = 4 + \frac{\delta}{1-\delta} =$$

$$= \frac{3}{1-\delta} + \frac{1-3\delta}{1-\delta} = v_1(\sigma) + \frac{1-3\delta}{1-\delta}.$$

Заметим, что в обоих случаях $v_1(\sigma_1',\sigma_{-1}) \le v_1(\sigma)$ при $\frac{1}{3} \le \delta < 1$. В этом случае игрок 1 не может увеличить свой выигрыш путем отклонения от стратегии σ_1' при условии, что игрок 2 продолжает играть σ_2. Следовательно, при $\frac{1}{3} \le \delta < 1$ профиль стратегий σ образует равновесие по Нэшу.

Теперь покажем, что профиль стратегий σ не является совершенным в подыграх равновесием. Рассмотрим историю $h_1 = (D,R)$. Эта история порождает исход

$$((D,R),(D,R),(D,R),\ldots)$$

в подыгре с началом в периоде 1 + 1 = 2. Ясно, что выигрыш игрока 1 в такой подыгре равен 0. Однако если игрок 2 не изменит своей стратегии, а игрок 1 всегда будет выбирать U, то исход в подыгре с началом в периоде 1 + 1 = 2 будет иметь вид

$$((U,R),(U,R),(U,R),\ldots).$$

Выигрыш игрока 1 при таком исходе равен $\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}u_1(U,R) = \frac{1}{1-\delta} > 0$. Отсюда следует, что σ не является равновесием в подыгре с началом в периоде 2, порожденной историей h_1 и, следовательно, равновесие по Нэшу σ не является совершенным в подыграх равновесием. ■

Заслуживает внимания также тот факт, что хотя стадийная игра может и не иметь равновесий по Нэшу в чистых стратегиях, у ее повторяющейся игры с бесконечным горизонтом может быть совершенное в подыграх равновесие. Следующий пример демонстрирует это.

Пример 7.22 (совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом, у которой стадийная игра не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях). Рассмотрим повторяющуюся игру двух лиц с

Таблица 7.15

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(3,3)	(1,2)
	D	(4,0)	(0,1)

бесконечным горизонтом из примера 7.21, стадийная игра которой изображена в табл. 7.15. Определим следующий профиль стратегий $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.

1. При $t = 1$ положим

$$\sigma_{1,1}(h^0) = U \text{ и } \sigma_{1,2}(h^0) = L .$$

2. При $t > 1$ и любом $h^{t-1} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ s_{t-1,1} & s_{t-1,2} \end{bmatrix} \in H^{t-1}$

определим

$$\sigma_{t,1}(h^{t-1}) = \begin{cases} U, & \text{если } (s_{t-1,1}, s_{t-1,2}) \text{ либо } (U, L), \text{ либо } (D, R), \\ D, & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$\sigma_{t,1}(h^{t-1}) = \begin{cases} L, & \text{если } (s_{t-1,1}, s_{t-1,2}) \text{ либо } (U, L), \text{ либо } (D, R), \\ R, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Утверждается, что σ — совершенное в подыграх равновесие. Обратимся к подыгре с началом в периоде $t + 1$. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай I. $(s_{t,1}, s_{t,2})$ равно либо (U,L), либо (D,R).

В этом случае имеем следующий исход начиная с периода $t + 1$ при профиле стратегий σ:

$$((U,L),(U,L),(U,L),\ldots).$$

Отсюда следует, что дисконтированный выигрыш обоих игроков в подыгре с началом в $t + 1$ составляет

$$v_1^{t+1}(\sigma) = v_2^{t+1}(\sigma) = \sum_{s=t+1}^{\infty} \delta^{s-t-1} 3 = \frac{3}{1-\delta}. \tag{7.2}$$

Заметим, что поскольку 3 — это наибольший выигрыш, который может получить игрок 2 в каждом периоде, то $v_2^{t+1}(\sigma)$ представляет наибольший дисконтированный выигрыш игрока 2 начиная с периода $t + 1$ независимо от выбора стратегий. В частности, игрок 2 не сможет увеличить свой выигрыш в подыгре с началом в периоде $t + 1$ при изменении стратегии, если игрок 1 продолжает играть σ_1.

Теперь предположим, что игрок 2 продолжает играть σ_2, а игрок 1 отклоняется. Необходимо проверить два случая.

(1) *Действия в периоде t составили* (U,L): Поскольку игрок 2 не изменил стратегию, в периоде $t + 1$ он играет L. Если игрок 1 отклонится в пе-

риоде $t+1$, вернется к σ_1 в периоде $t+2$ и далее не будет отклоняться, то состоится следующий исход:

$$((D,L),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots),$$

что дает игроку 1 дисконтированный выигрыш в размере

$$4+0\times\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots\le 3+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots=v_1^{t+1}(\sigma)$$

при $\delta\ge\frac{1}{3}$. Если игрок 1 отклонится в периодах $t+1$ и $t+2$, а затем вернется к σ_1, то его дисконтированный выигрыш составит

$$4+0\times\delta+0\times\delta^2+3\delta^3+\ldots<4+0\times\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots<v_1^{t+1}(\sigma)$$

при $\delta\ge\frac{1}{3}$. На самом деле можно проверить, что чем больше число периодов, в которых игрок 1 отклоняется от σ_1, тем меньше его дисконтированный выигрыш.

(2) *Действия в периоде t — это* (D,R): В этом случае при отклонении игрока 1 в периоде $t+1$ и дальнейшем следовании σ_1 имеет место исход

$$((D,L),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots),$$

при котором дисконтированный выигрыш игрока 1 равен

$$4+0\times\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots,$$

что, как и в случае (1), не превосходит $v_1^{t+1}(\sigma)$ при $\delta\ge\frac{1}{3}$. Если игрок 1 решит отклониться в периодах $t+1$ и $t+2$, а затем играть σ_1, то получим исход

$$((D,L),(U,R),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots),$$

при котором дисконтируемый выигрыш игрока 1 равен

$$4+\delta+0\times\delta^2+3\delta^3+\ldots\le 4+0\times\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots<v_1^{t+1}(\sigma)$$

при $\delta\ge\frac{1}{3}$.

Как и в (1), можно убедиться в том, что чем больше периодов игрок 1 отклоняется от σ_1, тем меньший имеет в итоге выигрыш.

Случай II. $(s_{t,1},s_{t,2})$ равно либо (D,L), либо (U,R).

(1) *Действия в периоде t составили* (D,L): если игроки будут следовать стратегии σ в периоде $t+1$ и всюду далее, то состоится следующий исход:

$$((D,R),(U,L),(U,L),(U,L),\ldots).$$

Дисконтированный выигрыш игрока 1 равен

$$0+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots=v_1^{t+1}(\sigma), \tag{7.3}$$

а дисконтированный выигрыш игрока 2 равен

$$1+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots=v_2^{t+1}(\sigma). \tag{7.4}$$

Если игрок 1 отклонится в периоде $t+1$, а затем будет играть σ_1, то получим исход

$$((U,R),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots)$$

с дисконтированным выигрышем игрока 1

$$1+0\times\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots.$$

При $\delta\geq\frac{1}{3}$ имеем

$$1+0\times\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots\leq 0+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots.$$

Таким образом, игроку 1 невыгодно отклоняться в периоде $t+1$ при $\delta\geq\frac{1}{3}$.

Если игрок 1 решит отклониться в периоды $t+1$ и $t+2$, а затем играть σ_1, то будет иметь место исход

$$((U,R),(U,R),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots).$$

Его выигрыш в этом случае составит

$$1+\delta+0\times\delta^2+3\delta^3+\ldots\leq 1+0\times\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots< v_1^{t+1}(\sigma)$$

при $\delta\geq\frac{1}{3}$. Следовательно, игроку 1 невыгодно отклоняться в периоды $t+1$ и $t+2$. Можно проверить, что чем большее число раз игрок 1 отклонится, тем меньше будет его дисконтированный выигрыш.

Теперь обратимся к игроку 2. Если он сменит стратегию в периоде $t+1$, а затем переключится на σ_2, в то время как игрок 1 продолжает играть σ_1, то получим исход

$$((D,L),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots),$$

при котором дисконтированный выигрыш игрока 2 составит

$$0+\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots<1+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots=v_2^{t+1}(\sigma).$$

Таким образом, игрок 2 не станет отклоняться в периоде $t+1$.

Если игрок 2 решит отклониться в периоды $t+1$ и $t+2$, а затем станет играть σ_2, то будет иметь место исход

$$((D,L),(D,L),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots).$$

В этом случае дисконтированный выигрыш равен

$$0+0\times\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots\leq 1+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots=v_2^{t+1}(\sigma).$$

То есть игроку 2 невыгодно отклоняться в периодах $t+1$ и $t+2$. Фактически можно показать, что, как и в случае игрока 1, чем больше периодов, в течение которых игрок 2 отклоняется, тем меньше его дисконтированный выигрыш.

(2) *Действия в периоде t составили* (U,R): если игроки станут играть σ в периоде $t+1$ и всюду далее, то состоится следующий исход:

$$((D,R),(U,L),(U,L),(U,L),\ldots).$$

При этом дисконтированный выигрыш игрока 1 равен

$$0+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots=v_1^{t+1}(\sigma). \tag{7.5}$$

Дисконтированный выигрыш игрока 2 равен

$$1+3\delta+3\delta^2+3\delta^3+\ldots=v_2^{t+1}(\sigma). \tag{7.6}$$

Если игрок 1 решит отклониться в периоде $t + 1$, а затем переключится на σ_1, то состоится исход

$$((U,R),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots),$$

где, как и в (1), он имеет не больший выигрыш при $\delta \geq \frac{1}{3}$.

Если игрок 1 отклонится и в периоде $t + 1$, и в периоде $t + 2$, а затем станет играть σ_1, то получим исход

$$((U,R),(U,R),(D,R),(U,L),(U,L),\ldots).$$

Рассуждая в точности так же, как и в (1), приходим к выводу, что игроку 1 невыгодно отклоняться при $\delta \geq \frac{1}{3}$.

Объяснение того, почему игрок 2 не будет отклоняться, аналогично случаю II (1).

Таким образом, было показано, что при $\delta \geq \frac{1}{3}$ ни один из игроков не станет отклоняться от стратегии $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ в подыгре с началом в периоде $t + 1$ при любом исходе в периоде t: (U,L), (D,R), (D,L) и (U,R). Поскольку профиль стратегий σ зависит только от исхода в периоде t, тем самым установлено, что σ образует равновесие в любой подыгре с началом в периоде $t + 1$ при любой истории h^t. В силу того что это верно для любого $t \geq 0$, можно заключить, что профиль стратегий σ является совершенным в подыграх равновесием.

Следующий аналог теоремы 7.14 для бесконечных игр представляет класс совершенных в подыграх равновесий в случае бесконечного горизонта. Доказательство мы оставляем читателю. (См. также доказательство теоремы 7.8.)

Теорема 7.23. *Если $h=(s_1,s_2,s_3,\ldots)$ — исход в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом, такой что $s_t \in S$ — равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) в стадийной игре, то постоянный в периодах профиль стратегий с исходом h является совершенным в подыграх равновесием в игре с бесконечным горизонтом.*

Повторяющиеся игры с бесконечным горизонтом зачастую содержат гораздо больше совершенных в подыграх равновесий, чем представлено в теореме 7.23. Следующие результаты показывают, каким образом можно получать совершенные в подыграх равновесия, отличные от описанных в теореме 7.23. Из них следует, что класс совершенных в подыграх равновесий в случае повторяющихся игр с бесконечным горизонтом оказывается достаточно широким. На самом деле исходы при совершенных в подыграх равновесиях зачастую сильно отличаются от равновесных исходов стадийной игры, как мы уже видели в рассмотренных ранее примерах. Приведенный ниже результат показывает, что в играх с бесконечным горизонтом могут быть получены совершенные в подыграх равновесия, при которых участники согласны выбирать стратегии, приводящие к более высоким выигрышам, чем при выборе равновесных стратегий стадийной игры. Подобные совершенные в подыграх равновесия делают отклонения игроков невыгодными, поскольку они приводят к тому, что в дальнейшем все игроки станут выбирать равновесие по Нэшу стадийной игры, и если игрок отклонился, то это неминуемо приводит его к более низким выигрышам в будущем. Так как девиация провоцирует наказание, которое длится неограниченно, такие наказания принято называть **беспощадными триггерными стратегиями**, а равновесные стратегии иногда именуют **триггерными стратегиями**.

Теорема 7.24. *Предположим, что* $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ *— равновесие по Нэшу в стадийной игре и существует исход* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in S$, *такой что для каждого игрока* i *выполнено*

$$u_i(a) > u_i(s^*).$$

Тогда существует некоторое $0 < \delta(a) < 1$, *такое что профиль стратегий* $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$, *определенный для каждого игрока* i *и произвольной истории* $h^t \in H^t$ *(где* $t \geq 1$*) правилом*

$$\sigma_i^*(h^t) = \begin{cases} a_i, & \text{если } h^t = (a, \ldots, a), \\ s_i^*, & \text{если } h^t \neq (a, \ldots, a), \end{cases}$$

и $\sigma_i^*(h^0) = s_i^*$, *образует совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом при любом факторе дисконтирования* δ, *таком что* $\delta(a) \leq \delta < 1$.

Доказательство. Для того чтобы показать, что $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ является совершенным в подыграх равновесием, необходимо рассмотреть два случая, в одном из которых история $h^t \neq (a, \ldots, a)$, а в другом — $h^t = (a, \ldots, a)$.

В случае $h^t \neq (a, \ldots, a)$ при любом $i = 1, \ldots, n$, $\sigma_{\tau+1,i}^*(h^\tau) = s_i^*$ для любых $\tau \geq t$. Таким образом, по теореме 7.23 σ^*— равновесная стратегия в подыгре с началом в периоде $t + 1$ и далее.

В случае $h^t = (a, \ldots, a)$, если игрок i выбрал $\sigma_i \neq \sigma_i^*$ в подыгре с началом в периоде $t + 1$, то в некотором периоде $\tau \geq t + 1$ имеем $\sigma_{\tau,i} \neq a_i$. Пусть $m_i = \max_{s_i \in S_i} [u_i(s_i, s_{-i}^*) - u_i(s^*)]$, тогда наибольший дисконтированный выигрыш игрока i после отклонения равен

$$m_i + \frac{u_i(s^*)}{1 - \delta}.$$

Дисконтированный выигрыш при выборе σ_i^* составил бы

$$\frac{u_i(a)}{1 - \delta}.$$

Следовательно, наибольший дисконтированный выигрыш в случае, когда игрок i выбирает $\sigma_i \neq \sigma_i^*$, окажется меньше, чем при выборе σ_i^*, если

$$m_i + \frac{u_i(s^*)}{1-\delta} < \frac{u_i(a)}{1-\delta},$$

т.е. если $m_i(1-\delta) < [u_i(a) - u_i(s^*)]$. Существует некоторое $\delta_i < 1$, такое что $m_i(1-\delta) < [u_i(a) - u_i(s^*)]$ при всех $\delta \geq \delta_i$. Для всех таких δ игрок i получит меньший выигрыш в подыгре с началом в периоде $t + 1$, если станет играть $\sigma_i \neq \sigma_i^*$. Это справедливо для любого игрока i. Пусть $\delta(a) = \max\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Тогда ни одному из игроков не выгодно отклоняться от σ^* в подыгре с началом в $t + 1$ при $\delta \geq \delta(a)$. Следовательно, σ^* будет равновесием в подыгре с началом в периоде $t + 1$.

Поскольку σ^* зависит только от двух рассмотренных типов историй, мы показали, что σ^* является равновесием в любой подыгре с началом в периоде $t + 1$ и после. Так как t выбиралось произвольным образом, отсюда следует, что σ^* — равновесие в любой подыгре. То есть оно действительно образует совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом. ■

Следующий пример демонстрирует совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом, в которой происходит повторение дилеммы заключенного.

Пример 7.25 (дилемма заключенного с бесконечным горизонтом). Стадийная игра данной бесконечной повторяющейся игры известна нам как «дилемма заключенного» и изображена в табл. 7.16. Дисконтированный выигрыш каждого игрока в повторяющейся игре составляет

$$v_i(h) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u_i(h_t)$$

для каждой истории $h = (h_1, h_2, \ldots)$, где, как и ранее, $0 < \delta < 1$ — дисконт. Таким образом, если участники всегда играют (*Молчать*, *Молчать*), то выигрыш каждого будет равен

$$\sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1}(-1) = \frac{-1}{1-\delta} = -\frac{1}{1-\delta}.$$

Теперь рассмотрим следующий профиль стратегий «око за око» σ^*:

- если игрок i выбрал *Молчать* в предыдущей периоде, то игрок j играет *Молчать* в текущем периоде;
- если игрок i выбрал *Доносить* в предыдущей периоде, то игрок j играет *Доносить* в текущем периоде.

Таблица 7.16

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Молчать*	*Доносить*
	Молчать	(–1,–1)	(–10,0)
	Доносить	(0,–10)	(–5,–5)

Мы уже видели, что в повторяющейся игре с конечным горизонтом данная стратегия «распутывается» в том смысле, что игроки станут всегда выбирать только (*Доносить*, *Доносить*) в каждом периоде — что и является единственным совершенным в подыграх равновесием в игре с конечным горизонтом. Причиной этому служит то обстоятельство, что в последнем повторении игры каждый участник захочет сыграть *Доносить* вне зависимости от истории игры, и, зная это, участники станут выбирать *Доносить* в предпоследнем периоде и т.д., т.е. нет никакого смысла в выборе *Молчать* в любом из периодов. Однако в случае игры с бесконечным горизонтом ситуация иная. Поскольку каждый из периодов всегда сопровождается следующим, то, следуя описанным выше стратегиям, выбор *Доносить* в некотором периоде $t > 1$ должен привести к дальнейшей последовательности выигрышей $-5,-5,...,-5,...$, т.е. будущий выигрыш при выборе *Доносить* в периоде t составит

$$\sum_{\tau=t+1}^{T}\delta^{\tau-1}(-5) = -5\frac{\delta^t}{1-\delta},$$

что меньше, чем будущий дисконтированный выигрыш

$$\sum_{\tau=t+1}^{T}\delta^{\tau-1}(-1) = -\frac{\delta^t}{1-\delta},$$

который порождается последовательностью однопериодных выигрышей $-1,-1,...,-1...$ при повторении стратегии *Молчать* в каждом из периодов. Таким образом, ни одному из игроков не выгодно выбирать *Доносить*. Это наблюдение позволяет предположить, что исход (*Молчать*, *Молчать*) окажется частью равновесного исхода в бесконечной версии игры. Фактически данная стратегия представляет собой совершенное в подыграх равновесие.

Если с начала игры будет реализован исход (*Молчать*, *Молчать*), то игроки продолжат выбирать (*Молчать*, *Молчать*) в каждом последующем периоде. Дисконтированная сумма выигрыша в данном случае составит

$$\sum_{t=1}^{T}\delta^{t-1}(-1) = \frac{-1}{1-\delta}. \tag{7.7}$$

Теперь предположим, что один из игроков в некотором периоде $k > 1$ отклонится от стратегии *Молчать*. Следовательно, в этом периоде он сыграет *Доносить*, а другой игрок выберет *Доносить* в периоде $k + 1$, поэтому начиная с периода $k + 2$ оба игрока станут выбирать (*Доносить*, *Доносить*). В результате отклонившийся участник имеет дисконтированную сумму выигрышей

$$\sum_{t=1}^{k-1}\delta^{t-1}(-1) + 0 + \delta^k\left(\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}(-5)\right) = \frac{(-1)(1-\delta^k)}{1-\delta} + \frac{(-5)\delta^{k+1}}{1-\delta} =$$

$$= \frac{-1+\delta^{k-1}-5\delta^k}{1-\delta}. \tag{7.8}$$

Сравнивая дисконтированные суммы выигрышей (7.7) и (7.8), заключаем, что при $\delta \geq \frac{1}{5}$ дисконтированная сумма выигрышей (7.8) не превосходит дисконтированной суммы (7.7). Отсюда следует, что игрок не сможет ожидать какой-либо выгоды при отклонении от стратегии «око за око», даже если игрок изменяет стратегию так, что получает наибольшую возможную выгоду. Кроме того, заметим, что после того как произошло отклонение, игроки вынуждены снова играть равновесие по Нэшу стадийной игры в каждом из последующих периодов, что по теореме 7.23 является совершенным в подыграх равновесием. Таким образом, любые последующие отклонения являются бесполезными.

Если прошлая история состоит только из исходов (*Молчать*, *Молчать*) для каждого периода, то можно утверждать, что в последующей подыгре любое отклонение окажется невыгодным. Следовательно, данная стратегия оказывается равновесной в каждой из таких подыгр. С другой стороны, если прошлая история содержит отклонение, то игроки станут выбирать (*Доносить*, *Доносить*) в любом из следующих периодов. Как мы уже знаем, это тоже равновесная стратегия. В результате мы получили, что стратегия «око за око» является равновесием в любой подыгре, а значит, действительно образует совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом. ■

В рассмотренном примере совершенное в подыграх равновесие подразумевает, что игроки сотрудничают друг с другом до тех пор, пока один из них не отклонится. В случае отклонения игроки начинают выбирать равновесие по Нэшу стадийной игры в каждом из последующих периодов. Профиль стратегий такого рода предотвращает потенциальные отклонения, поскольку, если отклонение произойдет, то после этого в каждом из последующих периодов будет сыграно равновесие по Нэшу, которое приводит к меньшему выигрышу для каждого из участников. Так как угроза состоит в выборе равновесия по Нэшу, ни один из игроков не сможет предотвратить ее реализацию, поскольку равновесная стратегия является наилучшим откликом на равновесную стратегию. Таким образом, угроза является вполне реальной и, скорее всего, будет реализована.

Пример 7.26 (повторяющаяся дуополия Курно с бесконечным горизонтом). Стадийной игрой данной бесконечной повторяющейся игры является игра дуополии Курно, рассмотренная нами в гл. 2. Две фирмы производят идентичный продукт, одна из них выбирает объем производства q_1, а вторая — q_2. Совокупный объем производства обозначим через q, где $q = q_1 + q_2$.

Предположим, что обратная функция спроса имеет вид $p(q) = A - q$. Она отражает зависимость стоимости единицы продукции на рынке от совокупного объема производства q. A — некоторое фиксированное положительное число. Пусть издержки фирмы i, $i = 1,2$, производства q_i единиц продукции составляют $c_i q_i$, где c_i — положительные константы.

Стадийная игра представляет собой стратегическую игру, где множество стратегий каждой фирмы имеет вид $(0,\infty)$, что отражает выбираемый объем производимого товара, а функции выигрыша составляют

$$\pi_i(q_1, q_2) = (A - q_1 - q_2)q_i - c_i q_i.$$

В гл. 2 мы показали, что данная игра имеет единственное равновесие по Нэшу, в котором объемы фирм задаются выражениями

$$q_1^* = \frac{A + c_2 - 2c_1}{3} \text{ и } q_2^* = \frac{A + c_1 - 2c_2}{3}.$$

Предположим, что игра повторяется в течение неограниченного числа периодов, причем будущие выигрыши дисконтируются с $\delta < 1$. Тогда по теореме 7.24 для любой пары выпусков (q_1,q_2), такой что

$$\pi_i(q_1,q_2) > \pi_i(q_1^*,q_2^*)$$

$i = 1,2$, существует $\bar{\delta} < 1$, такой что при всех $\delta \geq \bar{\delta}$ профиль стратегий, согласно которому фирмы производят (q_1,q_2) в каждом периоде до тех пор, пока в предыдущие периоды производится (q_1,q_2), и производят (q_1^*,q_2^*) в случае отклонения, является совершенным в подыграх равновесием повторяющейся игры с бесконечным горизонтом. Отсюда следует, что в бесконечной повторяющейся игре дуополии существует множество равновесных профилей стратегий; каждому из этих совершенных в подыграх равновесий отвечает своя производственная пара (q_1,q_2), которая является выбором фирм в каждом периоде, если в этом случае обе фирмы имеют бóльшую прибыль, чем при производстве (q_1^*,q_2^*). В действительности представляется возможным, что фирмы вступят в сговор и будут выбирать объемы производства исходя из максимизации суммарной прибыли.

Рассмотрим случай, когда предельные издержки обеих фирм одинаковы и равны $c > 0$. Тогда объем производства, при котором достигается максимум общей прибыли, является решением уравнения

$$\max_q \pi(q) = (A - q)q - cq,$$

где $q = q_1 + q_2$ — совокупный выпуск двух фирм. Из условий первого порядка имеем

$$(A - c) - 2q = 0,$$

а из условий второго порядка $\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2} = -2 < 0$. Следовательно, совокупный выпуск, при котором достигается максимум суммарной прибыли фирм, равен $\hat{q} = \frac{A - c}{2}$. Если каждая фирма произведет половину этого выпуска, то выпуск каждой фирмы будет $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \frac{A - c}{4}$. Цена в таком случае составит $\hat{p} = A - \frac{A - c}{2} = \frac{A + c}{2}$. Прибыль каждой фирмы *при сговоре* будет иметь вид

$$\pi_i = \frac{A + c}{2} \times \frac{A - c}{4} - c\frac{A - c}{4} = \frac{(A - c)^2}{8}, \tag{7.9}$$

$i = 1,2$. Сравним ее с прибылью в случае, если фирмы станут выбирать равновесные по Курно объемы выпуска $q_1^* = q_2^* = \frac{A - c}{3}$. В этом случае прибыли составят

$$\pi_1(q_1^*,q_2^*) = \pi_2(q_1^*,q_2^*) = \frac{A + 2c}{3} \times \frac{A - c}{3} - c\frac{A - c}{3} = \frac{(A - c)^2}{9}. \tag{7.10}$$

Ясно, что фирмы в состоянии получить бóльшую прибыль при сговоре, т.е. при производстве таких объемов, которые позволяют получить наибольшую суммарную прибыль. Однако стоит обратить внимание на то, что если фирма 2 станет производить $\hat{q}_2 = \frac{A-c}{4}$, то фирма 1 может выбрать q_1 так, чтобы извлечь наибольшую индивидуальную выгоду

$$\max_{q_1}(A - \frac{A-c}{4} - q_1)q_1 - cq_1 .$$

Из условий первого порядка получим, что $\left(\frac{3A+c}{4} - c\right) - 2q_1 = 0$, так что выпуск фирмы 1, максимизирующий ее прибыль, равен $q_1 = \frac{3(A-c)^2}{8}$, а итоговая цена продукции составит

$$p = A - \frac{A-c}{4} - \frac{3(A-c)^2}{8} = \frac{3A+5c}{8} .$$

Таким образом, прибыль фирмы 1 в случае ее *отклонения от совокупно-оптимального объема выпуска*, или *выпуска при сговоре*, равна

$$\pi_1 = \frac{3A+5c}{8} \times \frac{3A-3c}{8} - c\frac{3A-3c}{8} = \frac{9(A-c)^2}{64} . \qquad (7.11)$$

Прибыль в (7.11) для отклонившейся фирмы оказывается бóльшей, даже чем ее прибыль в случае сговора, т.е. в (7.9). Заметим, что (7.11) отражает наибольшую возможную выгоду фирмы в каком-либо периоде в случае отклонения от совокупно-оптимального выпуска. Отсюда также следует, что выпуск при сговоре не является равновесием по Нэшу стадийной игры, поскольку фирмы имеют достаточно стимула отступить от соглашения, основанного на сговоре. Однако в силу того что игра дуополии исполняется в течение бесконечного числа периодов, можно показать, что профиль стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$, определяемый ниже, образует совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре дуополии с бесконечным горизонтом:

$$\sigma_i^*(h^{t-1}) = \begin{cases} \hat{q}_i = \frac{A-c}{4}, & \text{если } h^{t-1} = \underbrace{((\hat{q}_1,\hat{q}_2),(\hat{q}_1,\hat{q}_2),\ldots,(\hat{q}_1,\hat{q}_2))}_{t-1}, \\ q_i^*, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Таким образом, профиль стратегий σ^* таков, что

- *каждая фирма i производит обусловленный сговором объем продукции $\frac{A-c}{4}$ до тех пор, пока другая фирма также продолжает производить $\frac{A-c}{4}$. Однако если одна из фирм отклонится от производства обусловленного сговором объема, то обе фирмы станут производить равновесное по Курно количество продукции $\frac{A-c}{3}$.*

Из теоремы 7.24 следует, что существует $\bar{\delta}<1$, такой что при всех $\delta \geq \bar{\delta}$ профиль стратегий σ^* является совершенным в подыграх равновесием повторяющейся игры с бесконечным горизонтом. Найдем, чему равно $\bar{\delta}$. Предположим, что какая-то из фирм отклонится в период $k > 1$. Тогда из (7.9), (7.10) и (7.11) следует, что результирующая сумма дисконтированных выигрышей фирмы в случае отклонения равна

$$\sum_{t=1}^{k-1} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{8} + \delta^{k-1} \frac{9(A-c)^2}{64} + \delta^k \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{9}.$$

Если ни одна из фирм никогда не отклонится от обусловленного сговором выпуска, то дисконтированная сумма выигрышей составит

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{8} = \frac{(A-c)^2}{8(1-\delta)}.$$

Фирме будет невыгодно отклониться, если дисконтированная сумма выигрышей при отклонении окажется меньше, чем при производстве обусловленного сговором выпуска в течение всех периодов игры. То есть при

$$\frac{(A-c)^2}{8(1-\delta)} \geq \sum_{t=1}^{k-1} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{8} + \delta^{k-1} \frac{9(A-c)^2}{64} + \delta^k \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{9} =$$

$$= \frac{(1-\delta^{k-1})(A-c)^2}{8(1-\delta)} + \delta^{k-1} \frac{9(A-c)^2}{64} + \delta^k \frac{(A-c)^2}{9(1-\delta)},$$

т.е., если

$$\frac{1}{8(1-\delta)} - \frac{\delta}{9(1-\delta)} \geq \frac{9}{64},$$

или

$$\delta \geq \frac{9}{17}.$$

Таким образом, при любом факторе дисконтирования $\delta \geq \frac{9}{17}$ ни одной из фирм не выгодно отклоняться от обусловленного сговором выпуска. Даже если фирма сможет получить бóльшую прибыль в каком-то одном из периодов при выборе иного выпуска, дисконтированная сумма ее выигрышей после отклонения оказывается меньшей, чем при отсутствии отклонения. ■

Следующий пример также представляет собой повторяющуюся игру рынка дуополии, однако исследует поведение фирм на рынке в случае, когда выбираются цены товаров, а не объемы их производства. То есть мы имеем дело с повторяющейся игрой дуполии по Бертрану. Как мы увидим, в ней существуют совершенные в подыграх равновесия, при которых фирмы станут сговариваться. Будет показано, что та же общая схема работает в этих двух случаях.

Пример 7.27 (повторяющаяся дуополия Бертрана с бесконечным горизонтом). Из гл. 2 нам известно, что если кривая обратного спроса задана в виде $q = A - p$, то выигрыш фирмы i в стадийной игре имеет вид

$$q_i = \begin{cases} A - p_i, & \text{если } p_i < p_j, \\ \frac{1}{2}(A - p_i), & \text{если } p_i = p_j, \\ 0, & \text{если } p_i > p_j. \end{cases}$$

Ранее мы установили, что равновесие по Нэшу в стадийной игре (p_1^*, p_2^*) таково, что $p_1^* = p_2^* = c$, где c — одинаковые предельные издержки фирм.

Совместно-оптимальная цена в игре $\hat{p}$ должна приносить максимум суммарной прибыли

$$(A - p)p - c(A - p).$$

Отсюда следует, что $\hat{p} = \frac{A + c}{2}$, и фирмы могут объявить сговор, назначив $p_1 = p_2 = \hat{p}$, тем самым производя $q_1 = q_2 = \frac{A - c}{4}$ единиц продукции. Прибыль каждой из фирм в таком случае будет равна $\hat{\pi} = \frac{(A - c)^2}{8}$.

Рассмотрим следующий профиль стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$:

$$\sigma_i^*(h^{t-1}) = \begin{cases} \hat{p} = \frac{A + c}{2}, & \text{если } h^{t-1} = \underbrace{((\hat{p}, \hat{p}), (\hat{p}, \hat{p}), \ldots, (\hat{p}, \hat{p}))}_{t-1}, \\ p_i^* = c, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Профиль стратегий σ^* таков, что

- *каждая фирма i устанавливает обусловленную сговором цену продукции $\frac{A + c}{2}$ до тех пор, пока другая фирма также продолжает устанавливать $\frac{A + c}{2}$. Однако если одна из фирм отклонится от обусловленной сговором цены, то обе фирмы станут в дальнейшем всегда устанавливать $p_1 = p_2 = c$.*

Из теоремы 7.24 следует, что существует $\bar{\delta} < 1$, такой что при всех $\delta \geq \bar{\delta}$ профиль стратегий σ^* является совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом. Предположим, что одна из фирм решила отклониться в периоде $k > 1$.

Заметим, что если фирма решит отклониться от обусловленной сговором цены, то ей необходимо снизить цену $\hat{p}$. Таким образом, если фирма 1 отклонится и назначит $p_1 \approx \hat{p}$ ($p_1 < p$), то ее прибыль составит

$$\pi_1' = \frac{(A - c)^2}{4}.$$

Однако подобное отклонение вызовет переключение в стратегиях фирм; нарушение соглашения одной из фирм приведет к тому, что теперь они станут играть равновесие по Нэшу стадийной игры в каждом из дальнейших периодов.

Таким образом, если фирма решит отклониться в период $k > 1$, после того как цена во все предшествующие периоды соответствовала сговору, ее сумма дисконтированных прибылей будет равна

$$\sum_{t=1}^{k-1} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{8} + \delta^{k-1} \frac{(A-c)^2}{4} + 0 .$$

Если ни одна из фирм никогда не отклоняется, то сумма дисконтированных прибылей составит

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{8} .$$

Следовательно, фирме будет *невыгодно отклониться* в случае, если

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{8} \geq \sum_{t=1}^{k-1} \delta^{t-1} \frac{(A-c)^2}{8} + \delta^{k-1} \frac{(A-c)^2}{4} ,$$

или при

$$\delta^{k-1} \frac{(A-c)^2}{8(1-\delta)} \geq \delta^{k-1} \frac{(A-c)^2}{4} ,$$

или если $\delta \geq \frac{1}{2}$. ■

Оба рассмотренных примера показывают, что оптимальный сговор является равновесной стратегией, если игра дуополии повторяется бесконечно. Как уже отмечалось, результат в игре с конечным горизонтом оказывается иным. Если игра дуополии представляет собой повторяющуюся игру с конечным горизонтом, то единственным совершенным в подыграх равновесием является такое, при котором фирмы всегда играют равновесие по Нэшу стадийной игры в каждом из периодов.

Существуют и другие совершенные в подыграх равновесия в повторяющихся играх, отличные от равновесных точек, которые поддерживаются угрозами использования *триггерных стратегий* в случае отклонения. Как мы увидим, все они полагаются на угрозу наказания в случае отклонения от предполагаемой стратегии. Но в то время как равновесия, использующие триггерные стратегии, полагаются на беспощадные триггерные стратегии как на наказание за отклонение, существуют и другие равновесия, полагающиеся на политику «кнута и пряника». Ниже мы рассмотрим некоторые из альтернативных совершенных в подыграх равновесий.

Упражнения

1. Рассмотрим повторяющуюся игру с бесконечным горизонтом, стадийная игра которой задана в матричной форме в табл. 7.17.
   (a) Опишите совершенное в подыграх равновесие, которое является таковым при любом дисконтирующем множителе.
   (b) Существует ли совершенное в подыграх равновесие, согласно которому игроки всегда выбирают исход (U, L) стадийной игры? Если да, опишите его и укажите, при каких дисконтирующих множителях оно существует.

Таблица 7.17

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(3,3)	(2,4)
	D	(4,0)	(2,2)

2. Рассмотрим повторяющуюся игру с бесконечным горизонтом, стадийная игра которой изображена в табл. 7.18.
   (a) Какие из исходов стадийной игры могут быть реализованы в качестве совершенного в подыграх равновесия игры с бесконечным горизонтом?
   (b) Для каждого из таких исходов укажите соответствующие значения дисконтирующего множителя, для которого существуют исходы в совершенном в подыграх равновесии этой игры с бесконечным горизонтом.
3. Предположим, что в дуополии Курно кривая обратного спроса задается уравнением $p(q) = 20 - q$, а предельные издержки фирм равны 3 долл.
   (a) Чему равны прибыли фирм, если фирмы максимизируют совокупную прибыль или состоят в оптимальном сговоре? Каковы прибыли в равновесии Курно — Нэша?
   (b) Предположим, что каждая фирма дисконтирует будущие прибыли с дисконтирующим множителем $0 < \delta < 1$. Опишите совершенное в подыграх равновесие, в котором фирмы состоят в оптимальном сговоре в бесконечно повторяющейся дуополии Курно.
   (c) При каких значениях δ такое совершенное в подыграх равновесие существует?
4. Кривая обратного спроса в бесконечно повторяющейся дуополии Курно задается уравнением $p(q) = 10 - \frac{1}{3}q$, где $q = q_1 + q_2$ — совокупный выпуск. Предельные издержки каждой из фирм равны 2 долл.
   (a) Опишите совершенное в подыграх равновесие в случае сговора фирм (т.е. когда фирмы производят такой объем продукции, который приносит наибольшую совокупную прибыль) и объясните, почему оно действительно таковым является.
   (b) Найдите пороговое значение дисконтирующего множителя δ, при котором такая стратегия — совершенное в подыграх равновесие.
5. Предположим, что кривая обратного спроса в дуополии задается уравнением $p(q) = 20 - q$, а предельные издержки каждой из фирм равны 3 долл.

Таблица 7.18

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	L	C	R
	U	(3,4)	(4,3)	(1,5)
	M	(3,3)	(5,2)	(1,1)
	D	(5,1)	(4,0)	(2,2)

(a) Если фирмы участвуют в игре дуополии Бертрана, то чему равны цена и выпуски каждой из фирм, позволяющие получить наибольшую совокупную прибыль?

(b) Предположим, что каждая фирма дисконтирует будущие прибыли с дисконтирующим множителем $0 < \delta < 1$. Опишите совершенное в подыграх равновесие в бесконечно повторяющейся игре, когда фирмы в каждый период разыгрывают игру дуополии Бертрана, вступая в оптимальный сговор (т.е. назначают цены, максимизирующие совокупную прибыль).

(c) При каких δ такое совершенное в подыграх равновесие существует?

6. Предположим, что кривая обратного спроса в дуополии задается уравнением $p(q) = 20 - \frac{1}{3}q$, а предельные издержки каждой из фирм равны 2 долл.

(a) Если фирмы участвуют в игре дуополии Бертрана, то каковы цена и выпуски каждой из фирм, при которых достигает максимума их совокупная прибыль?

(b) Опишите совершенное в подыграх равновесие в дисконтированной бесконечно повторяющейся игре, где фирмы в каждый период разыгрывают игру дуополии Бертрана, вступая в оптимальный сговор (т.е. назначают цены, максимизирующие совокупную прибыль дуополии по Бертрану).

(c) При каких значениях дисконта δ такое совершенное в подыграх равновесие существует?

7. Докажите теорему 7.23.

8. Рассмотрим повторяющуюся игру с бесконечным горизонтом, стадийная игра которой задана в матричной форме в табл. 7.19.

(a) Существует ли в такой повторяющейся игре совершенное в подыграх равновесие? Если да, опишите его.

(b) Укажите, при каких значениях дисконтирующего множителя δ найденная в (a) стратегия действительно образует совершенное в подыграх равновесие.

Таблица 7.19

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(1,2)	(3,3)
	D	(0,0)	(4,0)

Таблица 7.20

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(1,2)	(3,3)
	D	(0,0)	(4,0)

9. Существует ли совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом со стадийной игрой, изображенной в табл. 7.20? Если да, то опишите его детально и докажите, что оно таковым является. Если нет, объясните, почему такого равновесия не существует.

7.4. Народная теорема и совершенное в подыграх равновесие

Как мы уже видели, в повторяющихся играх с бесконечным горизонтом существуют совершенные в подыграх равновесия, в которых игроки выбирают действия, не являющиеся равновесными точками стадийной игры. Таким образом, игроки могут сотрудничать друг с другом, как, например, в повторяющейся игре «Дилемма заключенного», несмотря на то что есть возможность извлечения выгоды в одном из периодов при выборе других действий. В бесконечно повторяющихся играх дуополии обусловленный сговором выпуск, при котором фирмы имеют наибольшую суммарную прибыль, является частью совершенного в подыграх равновесия. Подобные совершенные равновесные стратегии удерживают игроков от отклонений при помощи угроз, т.е. если происходит отклонение, то в результате неизбежно будет выбран профиль стратегий, приносящий меньшие выигрыши обоим участникам в дальнейшем. Изученные до настоящего момента совершенные в подыграх равновесия относятся к широкому классу (беспощадных) триггерных стратегий, при которых отклонения игроков приводят к тому, что в дальнейшем всегда играется равновесие по Нэшу. Здесь мы рассмотрим иные типы совершенных равновесных профилей стратегий, отличающиеся от (беспощадных) триггерных. Многие из них используют метод «кнута и пряника» для удержания от отклонений. Подобные совершенные в подыграх равновесия подразумевают, что отклонившийся игрок в течение нескольких периодов будет нести наказание, состоящее в получении наименьшего из возможных выигрышей в стадийной игре. После нескольких периодов наказания игроки возвращаются к выбору тех исходов, при которых они оба имеют более высокий выигрыш, и вознаграждаются за сотрудничество в период наказания.

Данный класс совершенных в подыграх равновесий является демонстрацией того факта, что множество всех совершенных в подыграх равновесий достаточно широко. В самом деле, можно показать, что любой вектор выигрышей, который приносит каждому из игроков больший выигрыш, чем минимально возможный, является вектором выигрышей некоторого совершенного в подыграх равновесия. Данный результат в литературе носит название **народной теоремы**, поскольку различные ее версии были известны до того, как кто-то сформулировал данный результат более формально.

Пусть

$$G = \{S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n\}$$

— стадийная игра повторяющейся игры с бесконечным горизонтом. Положим

$$M_i(s_{-i}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

— наибольший выигрыш, который может получить игрок i при условии, что остальные игроки выбирают действия $s_{-i} \in S_{-i}$. Напомним, что

$$s_{-i} = \{s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\}.$$

Определим r_i как

$$r_i = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} M_i(s_{-i});$$

r_i представляет собой **минимаксный** выигрыш игрока i, и является наименьшим возможным выигрышем, который может быть ему навязан остальными игроками. Минимаксный вектор выигрышей существует практически в любой стадийной игре. Вектор выигрышей $v = (v_1, \ldots, v_n)$, такой что $v_i \geq r_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$, называется **индивидуально рациональным** вектором выигрышей.

Основной аргумент в пользу того, что любой индивидуально рациональный вектор выигрышей является вектором выигрышей некоторого равновесия по Нэшу в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом, достаточно прост. Пусть участники выбирают неизменный профиль стратегий, такой что вектор выигрышей в каждом периоде оказывается индивидуально рациональным вектором $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Тогда дисконтированный вектор выигрышей в бесконечно повторяющейся игре имеет вид $\left(\frac{v_1}{1-\delta}, \ldots, \frac{v_n}{1-\delta}\right)$. Тот факт, что данный вектор является равновесным выигрышем, незамедлительно следует из соображения, что если игрок i решит отклониться от выбора, согласно которому выигрыш составляет $v = (v_1, \ldots, v_n)$, то остальные игроки могут в дальнейшем выбирать $s_{-i}(r_i)$, таким образом, игрок i сможет получить не более чем r_i во все последующие периоды игры. В этом случае наибольший выигрыш игрока i при условии, что он совершил отклонение от исходного профиля стратегий, при котором имел место вектор выигрышей $v = (v_1, \ldots, v_n)$, представляет собой дисконтированный выигрыш

$$A_i + \frac{\delta r_i}{1-\delta}.$$

Если игрок i не станет отклоняться, то будет иметь следующий дисконтированный выигрыш:

$$v_i + \frac{\delta v_i}{1-\delta}.$$

Следовательно, игроку i невыгодно отклоняться в случае, если

$$v_i + \frac{\delta v_i}{1-\delta} \geq A_i + \frac{\delta r_i}{1-\delta},$$

т.е. если

$$v_i \geq (1-\delta)A_i + \delta r_i. \tag{7.12}$$

Поскольку $v_i \geq r_i$, отсюда следует, что существует $\underline{\delta}_i$, такое что при любых $\delta \geq \underline{\delta}_i$ выполняется (7.12). Поэтому при всех $\delta \geq \underline{\delta}_i$ игроку i невыгодно отклоняться. Ясно, что можно найти подходящее $\underline{\delta}_i$ для каждого игрока i. Пусть $\underline{\delta} = \max_i\{\underline{\delta}_i\}$. Тогда при всех $\delta \geq \underline{\delta}$ ни один из игроков не станет отклоняться от исходного профиля стратегий. Таким образом, профиль стратегий, который приводит к вектору выигрышей $v = (v_1, \ldots, v_n)$, действительно образует равновесие.

Данный результат является свидетельством того, что зачастую в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом имеется очень много равновесных векторов выигрышей. Заметим также, что чем ближе индивидуально рациональный вектор выигрышей к минимаксному вектору выигрышей, тем большим (т.е. более близким к 1) должно быть значение дисконтирующего множителя. Если же ставка дисконтирования достаточно мала, т.е. близка к нулю, то многие из индивидуально рациональных векторов выигрышей перестанут быть равновесными. Фактически имеем, что при крайне низких значениях дисконта единственными равновесными векторами выигрышей оказываются те, что получаются в случае выбора равновесия по Нэшу стадийной игры в каждом из периодов.

Вникая в суть последнего довода, можем столкнуться с некоторой неувязкой. Мы уже знаем, что стратегии в динамических играх обязаны быть совершенными в подыграх, чтобы оставаться значимыми по мере разворачивания процесса игры. Следующий пример показывает, что описанная только что стратегия хоть и является равновесной в начале игры, не обязательно остается таковой в случае отклонения. Другими словами, профиль стратегий может не быть совершенным в подыграх.

Пример 7.28 (равновесие, не являющееся совершенным в подыграх). В повторяющейся игре с бесконечными горизонтом со стадийной игрой в табл. 7.21 минимаксный выигрыш игрока 1 составляет 1, как и минимаксный выигрыш игрока 2. Следовательно, вектор выигрышей (2,2), соответствующий исходу (U,L), является индивидуально рациональным. Профиль стратегий $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, такой что

$$\sigma_{t,1}(h^{t-1}) = \begin{cases} U, & \text{если } h^{t-1} = (\underbrace{(U,L),(U,L),\ldots(U,L)}_{t-1}), \\ D, & \text{иначе} \end{cases}$$

и

$$\sigma_{t,2}(h^{t-1}) = \begin{cases} L, & \text{если } h^{t-1} = (\underbrace{(U,L),(U,L),\ldots(U,L)}_{t-1}), \\ R, & \text{иначе} \end{cases}$$

Таблица 7.21

	Игрок 2		
	Стратегия	L	R
Игрок 1	U	(2,2)	(1,1)
	D	(4,0)	(0,1)

является равновесием при всех $\delta \geq \frac{2}{3}$. Однако заметим, что если в некотором периоде t один из игроков, скажем игрок 1, отклоняется, то профиль стратегий в подыгре с началом в периоде $t+1$ задается в виде

$$\sigma_{t+\tau,1}(h^{t+\tau-1}) = D \text{ при любой истории } h^{t+\tau},\ \tau \geq 1,$$

$$\sigma_{t+\tau,2}(h^{t+\tau-1}) = R \text{ при любой истории } h^{t+\tau},\ \tau \geq 1.$$

Ясно, что данный профиль стратегий не является совершенным в подыграх, поскольку или игрок 1, или игрок 2 смогут улучшить свой выигрыш при выборе другой стратегии.

Пример наглядно показывает, что откровенная минимаксная стратегия вряд ли окажется равновесной, поскольку угроза прибегнуть к минимаксной стратегии по отношению к отклонившемуся участнику исходит из того, что она будет реализована в течение всех оставшихся периодов, даже если при этом все будущие выигрыши участников окажутся низкими. Как будет показано ниже, вариация подобной стратегии, при которой отклонившемуся участнику будет навязан минимакс (но в течение ограниченного числа периодов), уже является совершенной в подыграх, и любой индивидуально рациональный вектор выигрышей оказывается вектором выигрышей при некотором совершенном в подыграх равновесии и подходящей ставке дисконтирования. Довод в пользу результата основывается на наблюдении, что если игрок отклоняется от профиля стратегий, согласно которому имеется вектор выигрышей $\left(\frac{v_1}{1-\delta}, \ldots, \frac{v_n}{1-\delta}\right)$, то остальные игроки станут выбирать минимаксные по отношению к нему стратегии в течение некоторого числа периодов. После чего игроки станут действовать так, что игрок i получит $v_i - \varepsilon$ в каждом из периодов, а игрок $j \neq i$ получит $v_j + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Если кто-то другой теперь отклонится, то будет иметь место аналогичная фаза использования по отношению к нему минимаксной стратегии в течение некоторого количества периодов, после которой будет выбран такой профиль стратегий, который подходящим образом вознаграждает тех, кто не отклонился. Существует несколько версий данного результата. Рассмотрим одну из них[1].

Теорема 7.29 (народная теорема). *Предположим, что множество V доступных векторов выигрышей стадийной игры имеет размерность n, где n — число игроков. Тогда для любого индивидуально рационального вектора выигрышей v существует ставка дисконтирования $\bar{\delta} < 1$, зависящая от v, такая что $\left(\frac{v_1}{1-\delta}, \ldots, \frac{v_n}{1-\delta}\right)$ является вектором выигрышей при некотором совершенном в подыграх равновесии повторяющейся игры с бесконечным горизонтом при всех $\delta \geq \bar{\delta}$.*

[1] Представленная здесь версия достаточно близка к изложенной в следующей работе: *Fudenberg D., Maskin E.* The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information // Econometrica. 1986. Vol. 54. P. 533–554.

Доказательство. Для заданного индивидуально-рационального вектора выигрышей v выберем вектор $v' = (v_1', \dots, v_n')$, лежащий во внутренности множества V, такой что

$$r_i < v_i' < v_i \,,$$

и вектор $v(i,\varepsilon)$ вида

$$v(i,\varepsilon) = (v_1' + \varepsilon, \dots, v_{i-1}' + \varepsilon, v_i', v_{i+1}' + \varepsilon, \dots, v_n' + \varepsilon)\,.$$

Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ всегда можно подобрать вектор $v(i,\varepsilon)$, поскольку внутренность множества V не пуста. Заметим, что согласно вектору выигрышей $v(i,\varepsilon)$ игрок i получает v_i', в то время как игрок $j \neq i$ имеет $v_j' + \varepsilon$.

Предположим, что для каждого вектора выигрышей $v(i,\varepsilon)$ существует профиль стратегий $s^{v(i,\varepsilon)}$ стадийной игры, такой что

$$u_j(s^{v(i,\varepsilon)}) = v_j(i,\varepsilon)\,, \quad j = 1,\dots,n\,.$$

Покажем, что профиль стратегий σ^*, порождающий вектор выигрышей v, является совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом. Рассмотрим отдельно фазы игры.

Фаза I: Каждый игрок i выбрал s_i^v в периодах данной фазы, где $u_i(s_1^v, \dots, s_n^v) = u_i(s^v) = v_i$ при $i = 1,\dots,n$. История игры в данном случае имеет вид $h^{t-1} = \underbrace{s^v, \dots, s^v}_{t-1}$. Тогда стратегия игрока i в периоде t

$$\sigma_{t,i}^*(h^{t-1}) = s_i^v\,.$$

Фаза II: Игрок i отклонился в предыдущем периоде, перед которым игра еще находилась в фазе I. Стратегия каждого игрока $j \neq i$ в периоде t — играть $s_i^{r_i}$, минимаксную стратегию по отношению к игроку i, и продолжать действовать аналогичным образом в течение следующих T периодов. Тогда имеем

$$\sigma_{t+\tau,i}^*(h^{t+\tau-1}) = s_i^{r_i}\,, \quad 0 \le \tau \le T\,.$$

Фаза III: Если у игроков $j \neq i$ не было больше отклонений в течение фазы II, то

$$\sigma_{t+T+\tau,i}^*(h^{t+T+\tau-1}) = s_i^{v(i,\varepsilon)} \quad \text{при} \quad \tau \ge 1\,,$$

если не случилось отклонений от σ^* в периоде $(t + T + \tau - 1)$.

Фаза IV: Если игрок $j \neq i$ совершил отклонение в течение фазы II повторяющейся игры, то фаза II начинается сначала, но игроки i и j меняются ролями.

Фаза V: Если не было отклонений на протяжении фазы IV, в которой игроки выбирают минимаксную по отношению к игроку j стратегию в течение T_j периодов, то все игроки следуют профилю стратегий $s^{v(i,\varepsilon)}$ до тех пор, пока не произойдут дальнейшие отклонения от σ^*.

Фаза VI: Если игрок k, $k = 1,\dots,n$ отклонится на протяжении фазы III или фазы V повторяющейся игры, то игроки станут выбирать профиль стратегий фазы II в течение T_k периодов, при котором игрок k рассматривается в качестве отклонившегося.

Фаза VII: Если не произошло отклонений в течение фазы VI, игроки следуют стратегии из фазы III, которая предполагает выбор $s^{v(k,\varepsilon)}$ в каждом периоде игры.

Профиль стратегий σ^* переключается между различными фазами игры в зависимости от случающихся отклонений либо неизменно оседает в фазе III, либо в фазе V или фазе VII. Заметим, что фазы IV, V и VI, в сущности, совпадают с фазами I, II и III, в которых игроки меняются ролями.

Наконец, покажем, что σ^* образует совершенное в подыграх равновесие повторяющейся игры. Пусть $\bar{U}_i$ отражает наибольшую «выгоду» игрока i при отклонении от профиля стратегий, который порождает выигрыш $\frac{v_i}{1-\delta}$. Следовательно, при данном отклике остальных участников на отклонение дисконтированная сумма выигрышей игрока i составит

$$\bar{U}_i + r_i + \delta r_i + \ldots + \delta^{T-1} r_i + \delta^T v_i' + \delta^{T+1} v_i' + \ldots .$$

Таким образом, игроку i невыгодно отклоняться, если

$$\bar{U}_i + \frac{1-\delta^T}{1-\delta} r_i + \frac{\delta^T}{1-\delta} v_i' \le \frac{v_i}{1-\delta},$$

т.е. если

$$\bar{U}_i < \frac{1-\delta^T}{1-\delta}(v_i' - r_i) + \frac{1}{1-\delta}(v_i - v_i'). \tag{7.13}$$

Заметим, что если $\delta \to 1$, то $\frac{1-\delta^T}{1-\delta}$ сходится к T, а $\frac{1}{1-\delta}$ неограниченно возрастает. Поскольку $v_i > v_i' > r_i$, (7.13) будет выполнено при достаточно большом значении T и близком к 1 факторе дисконтирования δ. Для каждого из игроков $i = 1,\ldots,n$ можно подобрать подходящие значения T и δ так, что формула (7.13) останется верной. Следовательно, игрокам будет невыгодно отклоняться от σ^* на протяжении фазы I повторяющейся игры.

Теперь рассмотрим отклонение игрока j в течение фазы II повторяющейся игры в периоде k от начала фазы II. Выигрыш игрока j при отклонении составляет

$$\bar{U}_j + \frac{1-\delta^{T_j}}{1-\delta} r_j + \frac{\delta^{T_j}}{1-\delta} v_j'.$$

Если игрок j не станет отклоняться, то его выигрыш окажется равным

$$u_j(s^{r_i}) + \delta u_j(s^{r_i}) + \ldots + \delta^{T-k-1} u_j(s^{r_i}) + \frac{\delta^{T-k}}{1-\delta}(v_j' + \varepsilon).$$

Следовательно, игроку j невыгодно отклоняться на протяжении фазы II, если

$$\bar{U}_j + \frac{1-\delta^{T_j}}{1-\delta} r_j + \frac{\delta^{T_j}}{1-\delta} v_j' \le \frac{1-\delta^{T-k}}{1-\delta} u_j(s^{r_i}) + \frac{\delta^{T-k}}{1-\delta}(v_j' + \varepsilon),$$

или

$$\bar{U}_j + \frac{1-\delta^{T-k}}{1-\delta} r_j + \frac{\delta^{T-k} - \delta^{T_j}}{1-\delta} r_j + \frac{\delta^{T_j}}{1-\delta} v_j' \le \frac{1-\delta^{T-k}}{1-\delta} u_j(s^{r_i}) + \frac{\delta^{T-k}}{1-\delta}(v_j' + \varepsilon).$$

То есть игрок j не станет отклоняться, если

$$\bar{U}_j + \frac{1-\delta^{T-k}}{1-\delta}(r_j - u_j(s^{r_i})) \le \frac{\delta^{T-k} - \delta^{T_j}}{1-\delta}(v'_j - r_j) + \frac{\delta^{T-k}}{1-\delta}\varepsilon . \qquad (7.14)$$

Теперь заметим, что при заданном значении T (T определяется тем, что происходит при отклонении в фазе I), если $\delta \to 1$, то $\frac{1-\delta^{T-k}}{1-\delta} \to T-k$, т.е. к константе. Далее, $\frac{\delta^{T-k}(1-\delta^{T_j-T+k})}{1-\delta} \to T_j - T + k$ при $\delta \to 1$, а так как $v'_j \ge r_j$, величина $\frac{\delta^{T-k} - \delta^{T_j}}{1-\delta}(v'_j - r_j)$ из (7.14) неограниченно растет при увеличении T_j, когда $\delta \to 1$.

Наконец заметим, что $\frac{\delta^{T-k}}{1-\delta} \to \infty$ при $\delta \to 1$, следовательно, $\frac{\delta^{T-k}}{1-\delta}\varepsilon$ неограниченно возрастает при $\delta \to 1$.

Таким образом, для любых достаточно больших значений δ и T_j формула (7.14) верна и игроку j невыгодно отклоняться на протяжении фазы II повторяющейся игры. Подберем достаточно большие значения δ_1 и T^1 так, чтобы (7.14) была выполнена для любых игроков $j \ne i$ при условии, что игроки выбирают минимаксную стратегию по отношению к игроку i. Ясно, что игрок i не может отклониться в течение данной фазы. Отсюда следует, что ни один из игроков не станет отклоняться на протяжении всей фазы II.

Наконец, рассмотрим отклонение в течение фазы III. Если игрокам требуется выбирать $s^{v(i,\varepsilon)}$ в каждом из периодов фазы III, то при отклонении игрока i фаза II и фаза III для него будут повторены. Поэтому, как и ранее, можно показать, что игроку i будет невыгодно такое отклонение. Если игрок $j \ne i$ отклонится в фазе III, то согласно профилю стратегий σ^* его выигрыш составит

$$\bar{U}_j + \delta r_j + \ldots + \delta^{T-1} r_j + \frac{\delta^T}{1-\delta} v'_j .$$

Таким образом, игрок j не станет отклоняться от σ^* в фазе III, если

$$\bar{U}_j + \delta r_j + \ldots + \delta^{T-1} r_j + \frac{\delta^T}{1-\delta} v'_j \le \frac{v'_j + \varepsilon}{1-\delta},$$

т.е. если

$$\bar{U}_j < \frac{1-\delta^T}{1-\delta}(v'_j - r_j) + \frac{\varepsilon}{1-\delta} . \qquad (7.15)$$

Если $\delta \to 1$, то $\frac{1-\delta^T}{1-\delta}$ сходится к T, следовательно, при заданном значении T выражение $\frac{1-\delta^T}{1-\delta}(v'_j - r_i)$ стремится к положительной константе, поскольку $v'_j > r_j$. Однако если $\delta \to 1$, то $\frac{\varepsilon}{1-\delta}$ неограниченно растет. Поэтому при достаточно близких к 1 значениях δ неравенство (7.15) выполнено. Выберем δ_2 так, чтобы (7.15) оставалось верным для любых игроков $j \ne i$.

Таким образом, мы показали, что ни один из игроков не будет отклоняться от σ^* на протяжении фазы III повторяющейся игры.

Если теперь выбрать $\bar{\delta} = \max\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$, то при всех $\delta \ge \bar{\delta}$ игрокам невыгодно отклоняться от стратегии σ^* на протяжении фаз I, II и III. Отсюда ясно, что профиль стратегий σ^* зациклен между данными фазами, значит, любое отклонение обязательно попадет в одну из этих фаз. Поскольку игрокам невыгодно отклоняться ни в одной из данных фаз, тем самым установлено, что при $\delta \ge \bar{\delta}$ σ^* образует совершенное в подыграх равновесие. ■

Теорема характеризует множество совершенных в подыграх равновесий в повторяющейся игре с дисконтированием в случае, когда множество векторов выигрышей имеет ту же размерность, что и число игроков. В теореме сделано несколько предположений; в частности, стадийная игра содержит исход $s^{v(i,\varepsilon)}$ с вектором выигрышей $v(i,\varepsilon)$. Это довольно сильное ограничение. Тем не менее полезность этого результата оправдывает такие условия. Процедура построения совершенного в подыграх равновесия предоставляет общий метод нахождения всевозможных совершенных в подыграх профилей стратегий в повторяющихся играх. Например, при обращении к игре из примера 7.28 становится ясно, что условия теоремы не выполнены, поскольку множество векторов выигрышей не имеет размерности 2. Однако, пользуясь методом, примененным в доказательстве теоремы, можно успешно обнаружить совершенное в подыграх равновесие, при котором реализуется вектор выигрышей (2,2). В самом деле, в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом со стадийной игрой из примера 7.28 вектор выигрышей между (2,2) и (1,1) может быть порожден профилем стратегий следующего вида:

$$\sigma_{t,1}(h^{t-1}) = U \text{ при любых историях } h^{t-1}$$

и

$$\sigma^*_{2,1}(h^{t-1}) = \begin{cases} L, & \text{если } \frac{t}{4} \text{ не целое,} \\ R, & \text{если } \frac{t}{4} \text{ целое.} \end{cases}$$

Согласно такому профилю стратегий игрок 2 всегда играет *U*, кроме каждого четвертого периода, когда он играет *R*. Ясно, что вектор выигрышей, порождаемый данным профилем стратегий, лежит между $\left(\frac{2}{1-\delta}, \frac{2}{1-\delta}\right)$ и $\left(\frac{1}{1-\delta}, \frac{1}{1-\delta}\right)$. Действительно, если дисконт отсутствует, то средний выигрыш игроков будет сходиться к вектору выигрышей (1,75, 1,75). Также должно быть очевидным, что при использовании данного профиля стратегий можно подобрать стратегии для соответствующей фазы III, при которых не отклонявшиеся в процессе фазы II игроки имеют вознаграждение в виде «дополнительного» выигрыша, например $v'_j + \varepsilon$ вместо обычного v'_j.

Альтернативный способ трактовки результатов теоремы состоит в представлении, что игроки смешивают стратегии в каждом из периодов с помощью механизмов рандомизации, которые могут наблюдаться другими игроками. Таким образом, игрокам позволяется смешивать стратегии так, чтобы другие игроки могли это наблюдать. В таком случае обеспечить выполнение условий теоремы намного проще. При возможности использования смешанных стратегий множество векторов выигрышей в игре из примера 7.28 имеет размерность 2 и для каждого вектора выигрышей $v(i,\varepsilon)$, являющегося внутренностью множества всех векторов выигрышей, существует исход в стадийной игре (как результат выбора смешанных стратегий) $s^{v(i,\varepsilon)}$, такой что вектор выигрышей составляет $v(i,\varepsilon)$. В данном случае теорема фактически утверждает, что для любого индивидуально рационального вектора выигрышей существует ставка дисконтирования, достаточно близкая к 1, при которой данный вектор выигрышей является вектором выигрышей в совершенном в подыграх равновесии повторяющейся игры.

Рисунок 7.1 отражает как множество доступных векторов выигрышей в игре из примера 7.28, так и множество индивидуально рациональных векторов выигрышей. Ограниченный вершинами (0,1), (4,0), (2,2) и (1,1) полигон является множеством доступных векторов выигрышей в стадийной игре, если игрокам позволено смешивать стратегии. Темная область, отмеченная как (IR), представляет множество индивидуально рациональных векторов выигрышей в стадийной игре; каждый вектор, лежащий во внутренности данного множества, дает игроку больше, чем минимаксный выигрыш в размере 1. Заметим, что теперь все условия теоремы 7.29 выполнены.

Мы уже отмечали, что в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом можно осуществить координацию для выбора исхода, который станет реализовываться в каждом периоде. Например, в игре из примера 7.28 можно определить профиль стратегий, согласно которому у игроков будет альтернатива выбрать (U,L) или (D,R). В таком случае дисконтированный вектор выигрышей в повторяющейся игре составит

$$\left(\frac{2}{1-\delta^2},\frac{2+\delta}{1-\delta^2}\right)=\left(\frac{2}{1+\delta},\frac{2+\delta}{1+\delta}\right)\times\frac{1}{1-\delta}.$$

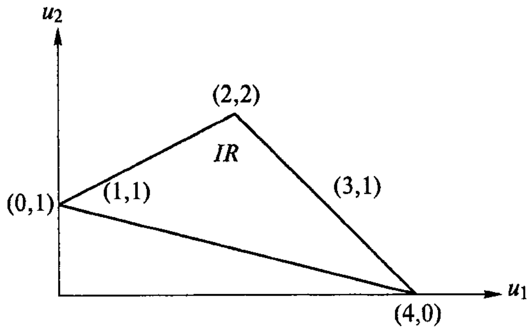


Рис. 7.1. Множество векторов выигрышей

Заметим, что фактор $1 - \delta$ является результатом дисконтирования. Если умножить дисконтированный вектор выигрышей на фактор $1 - \delta$, получим

$$\left(\frac{2}{1+\delta}, \frac{2+\delta}{1+\delta}\right),$$

что можно интерпретировать как «средний» вектор выигрышей для профиля стратегий, при котором у игроков есть выбор между исходами (U,L) и (D,R). Если $\delta = 0{,}5$, то вектор принимает вид $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$, что является результатом взвешивания (2,2), вектора выигрышей исхода (U,L) с коэффициентом 1/3 и (0,1), вектора выигрышей исхода (D,R) с коэффициентом 2/3. Отсюда следует, что все взвешенные средние векторов выигрышей стадийной игры являются доступными в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом. Таким образом, множество *доступных средних векторов выигрышей* повторяющейся игры с бесконечным горизонтом представляет собой взвешенные средние векторы выигрышей стадийной игры, или *выпуклые комбинации* векторов выигрышей стадийной игры.

На рис. 7.2 отражено множество доступных средних векторов выигрышей и множество индивидуально рациональных средних векторов выигрышей бесконечной игры из примера 7.28. Ограниченный вершинами (0,1), (4,0) и (2,2) полигон образует множество доступных средних векторов выигрышей в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом. Заметим, что оно является выпуклым. Темная область, отмеченная как (IR), представляет собой множество индивидуально рациональных средних векторов выигрышей в игре с бесконечным горизонтом; каждый вектор, лежащий во внутренности данного множества, дает игроку больше, чем средний минимаксный выигрыш в размере 1. Поскольку размерность пространства доступных средних векторов выигрышей равна 2, условия теоремы 7.29 выполнены, поэтому любой из средних векторов выигрышей множества (IR) на рис. 7.2 является средним вектором выигрышей совершенного в подыграх равновесия.

На данном этапе важно отметить, что хотя в игре из примера 7.28 множество доступных векторов выигрышей в случае, если игроки используют смешанные стратегии, совпадает с множеством доступных средних векторов

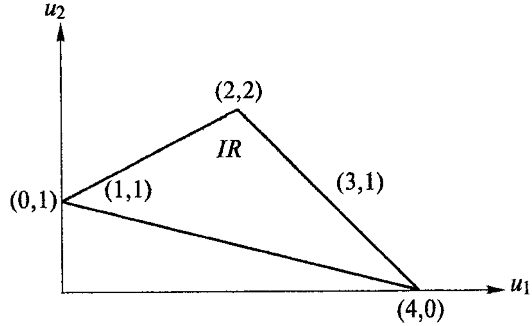


Рис. 7.2. Средние векторов выигрышей в игре с бесконечным горизонтом

Таблица 7.22

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(2,1)	(0,0)
	D	(0,0)	(1,2)

выигрышей в дисконтированной повторяющейся игре, на самом деле это просто совпадение. В общем случае данные множества могут кардинально различаться. Примером несовпадения множеств может служить игра из табл. 7.22. Множество доступных средних векторов выигрышей всегда оказывается выпуклым, в то время как множество доступных векторов выигрышей при использовании смешанных стратегий стадийной игры не обязательно выпукло, как например, в игре из табл. 7.22.

Все изученные ранее совершенные в подыграх равновесия подразумевали использование (беспощадных) триггерных стратегий в той или иной форме, при которых отклонение принуждает к игре равновесия по Нэшу в стадийной игре на протяжении всех дальнейших периодов или минимаксной стратегии по отношению к отклонившемуся игроку. В следующем примере будет показано, что совершенные в подыграх равновесия необязательно должны использовать подобные механизмы. Мы построим совершенное в подыграх равновесие, которое не использует минимаксных стратегий для наказания за отклонения, не является подобным (беспощадной) триггерной стратегии и не требует от игроков выбирать равновесие по Нэшу стадийной игры в каждом периоде.

Пример 7.30 (совершенное в подыграх равновесие, не использующее ни минимаксных, ни триггерных стратегий). Стадийная игра данной повторяющейся игры с бесконечным горизонтом задана в табл. 7.23. Заметим, что игра содержит единственное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях: (T,R). Кроме того, нетрудно проверить, что минимаксный выигрыш игрока 1, равный $m_1 = 2$, является наибольшим выигрышем при выборе игроком 2 стратегии R; минимаксный выигрыш игрока 2 также равен $m_2 = 2$ и образуется при выборе игроком 1 стратегии B.

Покажем, что следующий профиль стратегий $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ представляет собой совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом при достаточно большом значении δ. Стратегия игрока 1 σ_1^* задается в виде

$$\sigma_{1,1}^*(h^0) = T\ ,$$

Таблица 7.23

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(4,4)	(2,5)
	B	(5,1)	(1,2)

а при $t \geq 2$

$$\sigma^*_{t,1}(h^{t-1}) = \begin{cases} T, & \text{если в периоде } t-1 \text{ выбрано } (T,L) \text{ или } (B,R), \\ B, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Стратегия игрока 2 σ^*_2 имеет вид

$$\sigma^*_{1,2}(h^0) = L ,$$

а при $t \geq 2$

$$\sigma^*_{t,2}(h^{t-1}) = \begin{cases} L, & \text{если в периоде } t-1 \text{ выбрано } (T,L) \text{ или } (B,R), \\ R, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Отличительной чертой данной стратегии является то, что игроки считаются отклонившимися тогда и тогда тогда, когда их выбор не совпадает с (T,L) или (B,R). Кроме того, выбор игроком стратегии в текущем периоде зависит только от того, что произошло в предыдущем периоде. Следовательно, отклонение случается только тогда, когда прошлый исход не совпадает ни с (T,L), ни с (B,R). Таким образом, для того чтобы убедиться, что σ^* образует равновесие по Нэшу, необходимо проверить, что игрокам невыгодно действовать иначе, чем выбирать (T,L) либо (B,R).

Вначале рассмотрим игрока 1. Предположим, что он отклонился, хотя предполагалось, что будет сыграно (T,L); тогда в следующем периоде будет выбрано (B,R), а затем снова (T,L). Поэтому игроку 1 невыгодно совершать отклонение от (T,L), если

$$5 + \delta + \frac{4\delta^2}{1-\delta} \leq \frac{4}{1-\delta} ,$$

т.е. если

$$(1-3\delta)(1-\delta) \leq 0 . \tag{7.16}$$

Неравенство в формуле (7.16) выполнено при $\delta < 1$, если $\delta \geq \frac{1}{3}$. Тем самым показано, что игроку 1 невыгодно отклоняться от действия (T,L) при любом $\delta \geq \frac{1}{3}$.

Теперь рассмотрим отклонение игрока 1 в случае, когда обоим игрокам требуется выбрать (B,R). В данной ситуации игроку 1 невыгодно это делать, если

$$2 + \delta + \frac{4\delta^2}{1-\delta} \leq 1 + \frac{4}{1-\delta}$$

или если

$$1 + 3\delta^2 \leq 4\delta ,$$

т.е. при

$$(3\delta - 1)(\delta - 1) < 0 . \tag{7.17}$$

Ясно, что формула (7.17) справедлива при любых $\frac{1}{3} \leq \delta < 1$. Таким образом, мы показали, что игрок 1 не станет отклоняться от выбора (T,L) или (B,R) при $\delta \geq \frac{1}{3}$.

Теперь рассмотрим ситуацию, в которой игрок 1 отклоняется два периода подряд. Если он отклонился от (T,L), то дисконтированный выигрыш составит

$$5+2\delta+\delta^2+\frac{4\delta^3}{1-\delta}.$$

Если он отклонится от (T,L) всего на один период, то выигрыш окажется равным

$$5+\delta+4\delta^2+\frac{4\delta^3}{1-\delta}.$$

Сравнивая результаты, нетрудно увидеть, что дисконтированный выигрыш при отклонении в течение двух периодов подряд меньше или равен выигрышу при отклонении на один период, если

$$\delta\le 3\delta^2,$$

или если $\delta\ge\frac{1}{3}$. Пользуясь данным рассуждением, можно показать, что если игрок 1 продолжит отклоняться в течение более чем двух периодов, то при $\delta>\frac{1}{3}$ его дисконтированный выигрыш окажется меньше. Также легко проверяется, что если игрок 1 отклоняется от действия (B,R), то выводы будут аналогичные. Таким образом установлено, что игроку 1 невыгодно отклоняться от σ_1^* в любой подыгре при условии, что игрок 2 не отступает от σ_2^*, и $\delta\ge\frac{1}{3}$.

Теперь рассмотрим отклонение игрока 2 в тот момент, когда требуется выбрать (T,L). Игрок 2 не сможет увеличить свой выигрыш, если

$$5+2\delta+\frac{4\delta^2}{1-\delta}\le\frac{4}{1-\delta}$$

или если

$$1\le 2\delta,$$

т.е. при $\delta\ge\frac{1}{2}$.

Если игрокам требуется выбрать (B,R), то игрок 2 не станет отклоняться при любом $\delta<1$. В этом нетрудно убедиться, поскольку отклонение на L позволит получить лишь выигрыш в размере 1, что меньше выигрыша в размере 2 при следовании σ_2^*.

Наконец, если игрок 2 решит отклониться несколько периодов подряд, то его дисконтированный выигрыш при $\delta\ge\frac{1}{2}$ не увеличится аналогично рассуждению с игроком 1. Таким образом, игроку 2 невыгодно отклоняться от выбора σ_2^* в любой подыгре при $\delta\ge\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что σ^* — совершенное в подыграх равновесие при любых значениях фактора дисконтирования $\delta\ge\frac{1}{2}$. ■

Описанное совершенное в подыграх равновесие полагается на метод «кнута и пряника». Любое отклонение от требуемого выбора немедленно приводит к наказанию; но как только игроки приняли наказание, они получают вознаграждение за немедленное возвращение к выбору исхода с более высоким выигрышем. Если игроки не принимают наказания и не подчиняются ему, то фаза наказания продлевается. Очевидно, что подобная совершенная в подыграх стратегия сильно отличается от рассмотренных нами ранее. Заметим, что хотя можно построить различные версии таких стратегий, используя более длительную фазу наказания, например необходимость выбора (B,R) в течение двух или более периодов, становится более сложным сдерживание от отклонений на фазе наказания (доказательство оставляется читателю в качестве упражнения). В таком случае длительные фазы наказания могут не являться эффективными равновесными стратегиями.

Тот факт, что совершенные равновесные стратегии могут отличаться от минимаксных и триггерных стратегий, был установлен Д. Абрю[1]. Результат, из которого следует этот факт, имеет немного иную формулировку. Точное утверждение имеет следующий вид.

Теорема 7.31 (оптимальные уголовные кодексы). *В повторяющейся игре с бесконечным горизонтом любой исход при совершенном в подыграх равновесии может быть порожден профилем стратегий, который переключается на* ***наихудшее*** *совершенное в подыграх равновесие по отношению к отклонившемуся игроку.*

Зачастую довольно трудно обнаружить наихудшее совершенное в подыграх равновесие для конкретного игрока. Оно может подразумевать исполнение повторяющейся игры в сложном и запутанном виде. Однако утверждение подчеркивает то обстоятельство, что в повторяющихся играх с бесконечным горизонтом существует очень широкий класс равновесных профилей стратегий, и предлагает метод нахождения всего множества равновесных исходов.

Упражнения

1. Найдите минимаксный выигрыш игроков в игре, изображенной в табл. 7.24.
2. Если игроки могут использовать смешанные стратегии, то каким будет минимаксный выигрыш игроков в игре, изображенной в табл. 7.25?
3. Укажите множество допустимых векторов выигрышей и множество индивидуально рациональных векторов выигрышей в игре из упражнения 1, если игроки могут использовать смешанные стратегии.
4. Укажите множество допустимых векторов выигрышей и множество индивидуально рациональных векторов выигрышей в игре из упражнения 2, если игроки могут использовать смешанные стратегии.

---

[1] См. работу: *Abreu D.* On the theory of infinitely repeated games with discounting // Econometrica. 1988. Vol. 56. P. 383–396.

Таблица 7.24

	Игрок 2			
Игрок 1	Стратегия	*L*	*C*	*R*
	U	(5,5)	(4,8)	(0,4)
	M	(6,4)	(5,5)	(1,3)
	D	(5,1)	(4,2)	(2,2)

Таблица 7.25

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*L*	*R*
	U	(–2,2)	(0,1)
	M	(1,–1)	(1,1)
	D	(–2,2)	(2,2)

5. Каково множество допустимых средних векторов выигрышей и множество индивидуально рациональных средних векторов выигрышей в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом и со стадийной игрой из упражнения 1?
6. Каково множество допустимых средних векторов выигрышей и множество индивидуально рациональных средних векторов выигрышей в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом и со стадийной игрой из упражнения 2?
7. Укажите множество допустимых средних векторов выигрышей и множество индивидуально рациональных средних векторов выигрышей в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом и со стадийной игрой «Орлянка», которая изображена в табл. 7.26.
8. Покажите, что повторяющаяся игра с бесконечным горизонтом из упражнения 7 не удовлетворяет условиям теоремы 7.29. Есть ли в ней совершенное в подыграх равновесие (предположите, что игроки могут в каждом периоде использовать смешанные стратегии)? Если есть, опишите его.
9. Опишите совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом, стадийная игра которой изображена в табл. 7.27. (Предположите, что игроки могут в каждом периоде использовать смешанные стратегии.)
10. Рассмотрим повторяющуюся игру с бесконечным горизонтом и со стадийной игрой, заданной табл. 7.28.

Таблица 7.26

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*L*	*R*
	U	(1,–1)	(–1,1)
	D	(–1,1)	(1,–1)

Таблица 7.27

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(2,1)	(1,2)
	D	(1,2)	(2,1)

Таблица 7.28

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(2,1)	(1,2)
	D	(1,2)	(0,0)

(a) Можно ли пользоваться теоремой 7.29 для нахождения совершенных в подыграх равновесий в этой повторяющейся игре? Объясните подробно.

(b) Если ответ на пункт (a) отрицательный, то найдите совершенное в подыграх равновесие, которое не использует теорему 7.29.

11. Покажите, что повторяющаяся игра с бесконечным горизонтом и со стадийной игрой из табл. 7.29 имеет совершенное в подыграх равновесие, в котором участники играют (U,L) и используют однопериодные наказания.

12. В примере 7.26 совершенный в подыграх профиль стратегий, когда фирмы вступают в сговор, — это профиль беспощадных триггерных стратегий. Опишите совершенный в подыграх профиль стратегий, при котором фирмы вступают в сговор и при котором отклонение от обусловленного сговором объема выпуска заставляет фирмы выбирать уровень выпуска, при котором они получают нулевую прибыль в течение следующего после отклонения периода; затем они снова производят обусловленный сговором объем. [Подсказка: профиль стратегий будет выглядеть как профиль в примере 7.30.]

13. В примере 7.27 совершенный в подыграх профиль стратегий, когда фирмы вступают в сговор, — это профиль беспощадных триггерных стратегий возвращения к равновесию по Бертрану, если любая фирма отклоняется. Опишите совершенный в подыграх профиль стратегий, при котором фирмы вступают в сговор и при котором отклонение от обусловленного сговором объема выпуска приводит к тому, что фирмы играют равновесие по Бертрану только в течение ограниченного числа периодов.

Таблица 7.29

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	U	(2,3)	(1,4)
	D	(1,2)	(0,1)

14. Рассмотрим повторяющуюся игру с бесконечным горизонтом из примера 7.27. Выясните, является ли совершенным в подыграх следующий профиль стратегий $\hat{\sigma}$: $\hat{\sigma}_{1,i}(h^0) = \hat{p}$ и при $t \geq 2$

$$\hat{\sigma}_{t,i}(h^{t-1}) = \begin{cases} \hat{p}, & \text{если } h_{t-1} = (\hat{p},\hat{p}) \text{ или } h_{t-1} = (p_i, p_j),\ p_i > p_j, \\ p_i < p_j^{t-1}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где p_j^{t-1} — цена фирмы j в периоде $t-1$ и $p_j^{t-1} < \hat{p}$. Это профиль стратегий, при котором фирмы в сговоре до тех пор, пока одна из фирм не уклонится; в этом случае другая фирма назначает на один период цену ниже той, что назначила отклонившаяся фирма. Если уклонившаяся фирма не станет снова подрезать цену, то фирмы вернутся к выбору обусловленной сговором цены. Если уклонившаяся фирма снова подрежет цены, то другая фирма подрежет цены сильнее. [Подсказка: профиль стратегий выглядит аналогично профилю в примере 7.30.]

7.5. Приложения повторяющихся и динамических игр

На протяжении последних нескольких разделов мы имели возможность убедиться, что для повторяющегося взаимодействия между участниками характерно широкое многообразие путей, которые могут быть выбраны в игре. Таким образом, несмотря на то что при кооперации могут быть достигнуты взаимовыгодные исходы, необязательно являющиеся равновесием игры в стратегической форме, кооперация может быть частью равновесной стратегии в повторяющихся играх, поскольку участникам доступны доверительные стратегии наказания, которые делают отклонения от кооперации невыгодными. Мы также отмечали, что выбор равновесной по Нэшу стратегии в каждом периоде представляет собой равновесие в повторяющейся игре. В данном разделе мы будем использовать изученный ранее материал для понимания природы выигрышей в некоторых многостадийных играх, которые часто встречаются в приложениях. Собственно говоря, данные примеры не являются повторяющимися играми в чистом виде, поскольку стадийная игра в определенном периоде может зависеть от предыстории, однако все они достаточно много заимствуют[1] из структуры повторяющейся игры, для того чтобы все наблюдения о равновесных профилях стратегий можно было перенести и на этот класс игр.

Пример 7.32 (набеги на банки, или банковская паника). Рассмотрим двух участников, каждый из которых сделал денежный вклад в банк с обещанием выплаты процента x. Банк дает взаймы часть вклада инвестору под фиксированный процент $i > x$. Для простоты будем полагать, что каждый из двух индивидов вложил одну и ту же сумму денег, скажем P, в начале периода 1,

[1] Модель набега на банки с многими игроками (индивидами) можно найти в работе [30].

Таблица 7.30

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Забрать*	*Оставить*
	Забрать	$\frac{(r+s)}{2}P, \frac{(r+s)}{2}P$	$(2r+s)P, 0$
	Оставить	$0, (2r+s)P$	$\delta P(1+x), \delta P(1+x)$

а $2P(1-r)$ отдано взаймы инвестору; r представляет собой ставку резервирования, которая относится к любому вкладу. Инвестор должен погасить кредит в начале второго периода. Если задолженность будет погашена, то в начале второго периода у банка окажется $2iP(1-r)$ средств. Оба индивида вправе потребовать свои деньги в периоде 1 или в периоде 2. Их выигрыш в периоде 1 представлен в табл. 7.30. Если ни один из участников не потребует деньги в первом периоде, тогда игра переходит ко второму периоду, хотя их выигрыш в первом периоде составит (0,0). Если оба решат забрать деньги в периоде 1, то каждый из них сможет получить не более $\left(r+\frac{s}{2}\right)P$, где s — доля вклада, которая может быть получена с инвестора досрочно. Если один из участников потребует возврата, то он сможет получить $(2r+s)P$, полную сумму в банке на период 1 (будем предполагать, что $P > (2r+s)P$); а другой вкладчик получит 0. В любом случае, если деньги будут потребованы в период 1, банк обанкротится. Единственным вариантом, при котором банк продолжит свое существование, является случай, когда никто не потребует денег и игра перейдет к периоду 2.

В периоде 2 инвестор возвращает кредит, в результате чего в банке оказывается $2P(1+i)$. Если оба индивида решат забрать свои деньги, то они получат $P(1+x)$ каждый, а прибыль банка составит $2P(i-x)$. Матрица выигрышей в периоде 2 показана в табл. 7.31. Если ни один из участников не станет забирать деньги в периоде 2, то их вклады остаются в банке и продолжат приносить доход. Следовательно, если никто из участников не заберет деньги в периоде 2, то они будут получать все ту же отдачу x в течение третьего и четвертого периодов игры. Игра второго периода изображена в табл. 7.31, причем предполагается, что если игроки выбирают (*Оставить*, *Оставить*) во втором периоде игры, то они заберут деньги в четвертом периоде, получая при этом выигрыш $\delta^2 P(1+x)^2$, что является реальным выигрышем в случае, если игра перейдет в четвертый период и индивиды заберут свои деньги (после того как банк реинвестирует вклады в третьем периоде). Ясно, что

Таблица 7.31

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	*Забрать*	*Оставить*
	Забрать	$(P(1+x), P(1+x))$	$(P(1+x), 0)$
	Оставить	$(0, P(1+x))$	$(\delta^2 P(1+x)^2, \delta^2 P(1+x)^2)$

данный выигрыш будет изменяться в зависимости от того, каким образом игра развернется в будущем.

Каждая из стадийных игр имеет равновесные по Нэшу точки. Одним из равновесий по Нэшу стадийной игры первого периода оказывается (*Забрать*, *Забрать*). Равновесиями по Нэшу стадийной игры второго периода являются (*Забрать*, *Забрать*) и (*Оставить*, *Оставить*) при $(1+x) > \frac{1}{\delta}$. Отсюда следует, что следующий двухпериодный профиль стратегий $\hat{\sigma}$ является совершенным в подыграх равновесием:

$$\hat{\sigma}_{1,1} = \textit{Забрать}, \ \hat{\sigma}_{1,2} = \textit{Забрать},$$

$$\hat{\sigma}_{2,1}(h^1) = \textit{Забрать}, \ \hat{\sigma}_{2,2}(h^1) = \textit{Забрать}.$$

Для данного совершенного в подыграх равновесия характерен «набег на банк», поскольку вкладчики желают вернуть деньги назад. Однако существуют и другие совершенные в подыграх равновесия. Рассмотрим следующий профиль стратегий σ^*:

$$\sigma^*_{1,1} = \textit{Оставить}, \ \sigma^*_{1,2} = \textit{Оставить},$$

$$\sigma^*_{2,1}(h^1) = \textit{Забрать}, \ \sigma^*_{2,2}(h^1) = \textit{Забрать}.$$

Ясно, что в подыгре с началом в периоде 2 профиль σ^* является равновесием при любой предыстории h^1 в периоде 1, поскольку стратегия периода 2 (*Забрать*, *Забрать*) представляет собой равновесие по Нэшу в стадийной игре периода 2.

Выигрыш любого участника при выборе стратегии σ^* в двухпериодной игре составляет

$$\delta P(1+x).$$

Если один из участников отклонится от текущей стратегии, то наибольший возможный выигрыш будет равен $(2r+s)P$, поскольку игра не дойдет до периода 2. Если фактор дисконтирования δ достаточно велик, то $\delta(1+x) > 2r+s$ (так как $1 > 2r+s$), поэтому участникам невыгодно совершать отклонение от σ^*. Таким образом, σ^* образует совершенное в подыграх равновесие в двухпериодной игре. В рассматриваемом совершенном в подыграх равновесии игра заканчивается в периоде 2, после того как оба индивида забирают свои вклады.

Должно быть очевидно, что существуют и другие совершенные в подыграх равновесия, при которых индивиды решат реинвестировать деньги в банк и игра продолжится на дополнительные периоды. ■

Следующий пример представляет собой повторяющуюся игру, в которой происходит повторение игры торговли из примера 4.19 в течение неограниченного числа периодов.

Пример 7.33 (повторяющаяся игра торговли). Напомним, что в примере 4.19 две страны выбирают тарифные ставки с целью максимизации своего благосостояния. В каждой стране есть фирма, занимающаяся производством продукции, которая потребляется как в пределах данной страны, так и в соседней стране. Фирма может выставлять продукт на внутреннем рынке, а может экспортировать в другую страну. На первом этапе игры каждая страна устанавливает тарифы. На втором этапе игры, при известных тарифах, каждая из фирм решает, сколько стоит продавать на внутреннем рынке, а сколько отправить на экспорт. Совершенное в подыграх равновесие данной динамической игры анализировалось в примере 4.19.

Теперь рассмотрим дисконтированную повторяющуюся игру, в которой данная игра торговли повторяется неограниченное число раз. Вспомним из примера 4.19, что общее благосостояние для заданной пары тарифных ставок (r_1, r_2) составляет

$$W(r_1,r_2)=\frac{(2a-2c-r_1)^2}{9}+\frac{a+2c+r_1}{3}\times\frac{2(a-c)-r_1}{3}+$$
$$+\frac{a+2c+r_2}{3}\times\frac{2(a-c)-r_2}{3}-c\times\frac{4(a-c)-r_1-r_2}{3}. \qquad (7.18)$$

Ясно, что максимум данной функции достигается при $r_1=r_2=0$. В этом случае благосостояние, или выигрыш, каждой страны имеет вид

$$\hat{W}_i=\frac{4}{9}(a-c)^2. \qquad (7.19)$$

Выражение (7.19) получается путем подстановки $r_1=r_2=0$ в (7.18), если учесть, что благосостояние страны составляет половину от общего благосостояния.

Используя аналогичный подход, можно показать, что благосостояние страны при совершенном в подыграх равновесии в стадийной игре равно

$$W_i^*=\frac{32{,}5}{81}(a-c)^2. \qquad (7.20)$$

Таким образом, выигрыш каждой страны при совершенном в подыграх равновесии в стадийной игре меньше, чем выигрыш в случае нулевых тарифных ставок.

Основная проблема при исходе, когда каждая страна устанавливает тарифные ставки на нулевом уровне, состоит в том, что у обеих стран есть стимул отклониться в сторону положительной величины тарифа. В самом деле, пусть страна 2 назначит $r_2=0$. В этом случае выигрыш страны 1 составит

$$W(r_1,0)=\frac{(2a-2c-r_1)^2}{18}+\frac{a+2c+r_1}{3}\times\frac{a-c+r_1}{3}+$$
$$+\frac{a+2c}{3}\times\frac{a-c}{3}-c\left(\frac{a-c+r_1}{3}+\frac{a-c}{3}\right)+r_1\frac{a-c-2r_1}{3}.$$

Если страна 1 будет исходить из максимизации своего благосостояния, то установит

$$\hat{r}_1=\frac{a-c}{3}.$$

Ее выигрыш в таком случае будет составлять

$$W(\hat{r}_1,0)=\frac{(a-c)^2}{2}>\frac{4}{9}(a-c)^2. \tag{7.21}$$

Отсюда следует, что стране 1 выгодно установить положительный тариф в случае, если страна 2 назначит нулевой. То же самое верно и для страны 2.

Теперь убедимся, что в бесконечно повторяющейся игре существует совершенное в подыграх равновесие, при котором страны назначают нулевые ставки тарифов, т.е. свободно торгуют друг с другом. Как мы увидим, в одном из таких равновесий используется (беспощадно) *триггерная стратегия*, которая реагирует на отклонения страны, назначающей положительный тариф.

Рассмотрим профиль стратегий $\sigma^*=(\sigma_1^*,\sigma_2^*)$, где $\sigma_{1,i}^*=0$ при $i=1,2$ и для $t\geq 1$:

$$\sigma_{t+1,i}^*(h^t)=\begin{cases} a_i, & \text{если } h^t=((0,0),(0,0),\ldots,(0,0)),\\ r_i^*, & \text{если } h^t\neq((0,0),(0,0),\ldots,(0,0)).\end{cases}$$

Из теоремы 7.24 следует, что существует $\bar{\delta}<1$, такое что при всех $\delta\geq\bar{\delta}$ профиль стратегий σ^* образует совершенное в подыграх равновесие в игре с бесконечным горизонтом. Остается найти подходящее $\bar{\delta}$.

Из (7.19) нетрудно получить, что дисконтированный выигрыш i-й страны в случае отсутствия отклонений составляет

$$\frac{4}{9}(a-c)^2+\frac{4\delta}{9(1-\delta)}(a-c)^2.$$

Если страна решит отклониться и назначить положительный тариф, то из (7.20) следует, что наибольший дисконтированный выигрыш при этом окажется не более чем

$$\frac{(a-c)^2}{2}+\frac{32{,}5\delta}{81(1-\delta)}(a-c)^2.$$

Таким образом, стране невыгодно будет отклониться в случае, если

$$\frac{4}{9}(a-c)^2+\frac{4\delta}{9(1-\delta)}(a-c)^2\geq\frac{(a-c)^2}{2}+\frac{32{,}5\delta}{81(1-\delta)}(a-c)^2,$$

т.е. при $\delta\geq\frac{9}{17}$. Следовательно, требуемое $\bar{\delta}=\frac{9}{17}$. ■

Нетрудно видеть, что последовательно триггерный профиль стратегий оказывается не единственным совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом; как следует из теорем 7.29 и 7.31, определенно есть и другие. Довольно интересным равновесием является такой профиль стратегий, при котором обе страны устанавливают тарифные ставки на нулевой отметке до тех пор, пока кто-либо не отклонится. Другая страна отвечает непомерно высокой тарифной ставкой в следующем периоде, а после этого каждая страна снова назначает тарифы на нулевой отметке. Более детальное описание подобного профиля стратегий предоставляется читателю в качестве упражнения. В целом оно повторяет рассуждения примера 7.30.

Следующий пример имеет дело с оптимальными контрактами. Мы увидим, что контракты, основывающиеся на повторяющемся взаимодействии между нанимателем и работником, зачастую более эффективны (здесь бóльшая эффективность означает больший суммарный выигрыш работника и нанимателя), чем одноосновные контракты.

Пример 7.34 (повторяющаяся игра с оптимальными контрактами). Стадийной игрой данной повторяющейся игры является двухэтапная игра, где наниматель (P) предлагает либо высокую $\overline{w}$, либо низкую $\underline{w}$ зарплату работнику (A). В свою очередь, работник может прилагать высокие усилия (H) или лениться (S). Выигрыш нанимателя выражается объемом выпуска, который может быть на высоком уровне Y или на низком уровне 0. В случае когда работник прилагает высокий уровень усилий H, объем выпуска окажется высоким; но если работник уклоняется от работы, то с вероятностью p выпуск будет высоким, и с вероятностью $1 - p$ — низким на уровне 0. Выигрыш работника $u(w,e) = w - e$, где w — получаемый уровень зарплаты, а e — прилагаемый уровень усилий. В данном случае $e = H$, если работник трудится усердно, иначе $e = 0$. Будем предполагать, что $Y > H$, в противном случае наниматель не сможет выплачивать достаточно для того, чтобы обеспечить высокий уровень усилий работника.

Стадийная игра, изображенная на рис. 7.3, представляет собой двухэтапную динамическую игру с совершенной информацией. Совершенным в подыграх равновесием стадийной игры является профиль стратегий σ^*, такой что

$$\sigma^*_P(a) = \underline{w}\,,\ \ \sigma^*_A(b) = S\,,\ \ \sigma^*_A(c) = S\,.$$

Порождаемый совершенным равновесием исход стадийной игры $(\underline{w}, S)$ оказывается неэффективным, так как работник увиливает от работы вне зависимости от предлагаемой зарплаты, а предвидящий это наниматель предлагает низкую зарплату $\underline{w}$.

Теперь рассмотрим версию данной игры, повторяющуюся в течение неограниченного числа периодов, со следующим профилем стратегий:

$$\hat{\sigma}_{1,P} = \overline{w}\,,\ \ \hat{\sigma}_{1,A} = H\,,$$

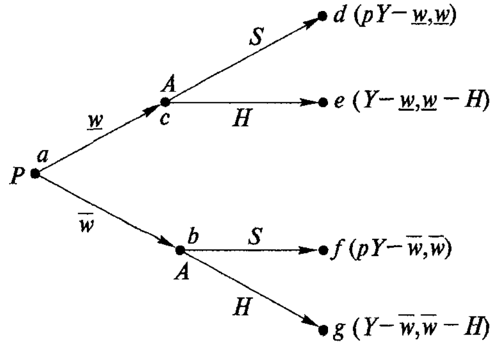


Рис. 7.3. Стадийная игра повторяющейся игры с оптимальными контрактами

и при $t \geq 1$

$$\hat{\sigma}_{t+1,P}(h^t) = \begin{cases} \bar{w}, & \text{если } h^t = \{(Y,\bar{w}),(Y,\bar{w}),\ldots,(Y,\bar{w})\}, \\ \underline{w}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}_{t+1,A}(h^t) = \begin{cases} H, & \text{если } h^t = \{(\bullet,\bar{w}),(\bullet,\bar{w}),\ldots,(\bullet,\bar{w})\}, \\ S, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, $\hat{\sigma}$ представляет собой такой профиль стратегий, при котором наниматель сначала выбирает высокий уровень зарплаты и продолжает выплачивать высокую зарплату, пока выпуск остается на уровне Y. Работник прилагает высокие усилия H до тех пор, пока получает высокую зарплату $\bar{w}$. Покажем, что $\hat{\sigma}$ является совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом.

Для доказательства нам потребуется рассмотреть две ситуации. В одной из них предыстория подыгры с началом в периоде $t+1$ имеет вид $h^t = \{(Y,\bar{w}),(Y,\bar{w}),\ldots,(Y,\bar{w})\}$, а в другой — $h^t \neq \{(Y,\bar{w}),(Y,\bar{w}),\ldots,(Y,\bar{w})\}$. В случае когда вплоть до периода t история $h^t \neq \{(Y,\bar{w}),(Y,\bar{w}),\ldots,(Y,\bar{w})\}$, в каждом периоде подыгры с началом в $t+1$ наниматель выбирает $\underline{w}$, а работник выбирает S. Мы уже видели, что это совершенное в подыграх равновесие стадийной игры. Таким образом, можно воспользоваться аргументами, аналогичными теореме 7.23, согласно которым σ окажется совершенным в подыграх равновесием в подыгре с началом в периоде $t+1$.

В случае когда история вплоть до периода t имеет вид $h^t = \{(Y,\bar{w}),(Y,\bar{w}),\ldots,(Y,\bar{w})\}$, то нанимателю невыгодно отклоняться, если

$$(Y - \underline{w}) + \frac{\delta}{1-\delta}(pY - \underline{w}) \leq (Y - \bar{w}) + \frac{\delta}{1-\delta}(Y - \bar{w}),$$

т.е. если

$$\frac{\bar{w} - \underline{w}}{Y} \leq \delta(1-p). \tag{7.22}$$

В свою очередь, работник не станет отклоняться в случае

$$\bar{w} + \frac{\delta}{1-\delta}(p\bar{w} + (1-p)\underline{w}) \leq (\bar{w} - H) + \frac{\delta}{1-\delta}(\bar{w} - H)$$

или

$$\frac{\bar{w} - \underline{w}}{H} \geq \frac{1}{\delta(1-p)}. \tag{7.23}$$

Если выполнены условия (7.22) и (7.23), то ни работнику, ни нанимателю не выгодно отклонение от σ. Следовательно, σ образует совершенное в подыграх равновесие при соблюдении условий (7.22) и (7.23). Заметим, что при $\delta > 0$ и $p < 1$ (7.22) и (7.23) будут выполнены тогда и только тогда, когда $\frac{H}{\delta(1-p)} \leq (\bar{w} - \underline{w}) \leq Y\delta(1-p)$. Таким образом, пару зарплат $(\bar{w}, \underline{w})$, удовлетворяющую (7.22) и (7.23), можно найти только в случае

$$\frac{H}{Y} < \delta^2(1-p)^2. \tag{7.24}$$

Фактически (7.23) позволяет найти оптимальную с точки зрения нанимателя зарплату, при которой $\hat{\sigma}$ образует совершенное в подыграх равновесие повторяющейся игры с бесконечным горизонтом. Она составляет

$$w^* = \frac{H}{\delta(1-p)} + \underline{w}. \qquad (7.25)$$

Стоит отметить, что оптимальный уровень заработной платы w^* возрастает по H и p. Это кажется разумным, поскольку необходимый уровень зарплаты для стимуляции высоких усилий должен быть больше, чем издержки H применения этих усилий. Аналогичным образом, если отклонение от работы труднонаблюдаемо (т.е. p достаточно далеко от нуля), то зарплата должна быть более высокой, для того чтобы у работника не было стимула отлынивать.

Заработная плата $\underline{w}$ может трактоваться как резервная заработная плата работника; т.е. то, что он может получить при трудоустройстве на другое место работы. Формула (7.25) показывает, что оптимальный уровень заработной платы выше, чем резервная зарплата работника и, кроме того, содержит *надбавку.* Из (7.25) также следует, что при любой зарплате $\overline{w} > w^*$ контракт, согласно которому производится высокий объем выпуска Y и выплачивается $\overline{w}$, образует совершенное в подыграх равновесие в игре с бесконечным горизонтом. ■

Заключительный пример главы не является повторяющейся игрой, поскольку стадийная игра зависит от доступного запаса ресурсов, однако она содержит много общего с повторяющимися играми и представляет собой игру с бесконечным горизонтом, в которой в каждый период два игрока участвуют в стадийной игре, в точности как в повторяющихся играх, хотя, в отличие от повторяющихся игр, стадийная игра каждого периода не является независимой от предыстории.

Пример 7.35 (игра «Добыча ресурсов»)[1]. Предположим, что два участника потребляют возобновляемый ресурс в течение неограниченного числа периодов. Запас ресурсов может достичь максимального показателя K, и в каждом периоде доступный объем ресурса $X \le K$. Пусть $x = \frac{X}{K}$ — доля от максимально возможного доступного объема запаса, так что $x \le 1$. Если запас ресурса (как доля от максимального) на конец периода составляет x, то количество доступного ресурса в начале следующего периода окажется равным x^a, где $0 < a < 1$. Заметим, что $x^a = x$ при $x = 1$, т.е. если запас ресурса максимален, то далее он не растет. Следовательно, ресурс возобновляется при $x < 1$ и будет расти до максимально возможного объема $x = 1$. Примерами таких ресурсов могут служить запасы рыбы в общественных водах, добываемые лесоматериалы, вода, используемая для орошения подземных слоев, и, собственно, окружающая среда. Пусть $c_{t,1}$ и $c_{t,2}$ — потребление ресурса участниками 1 и 2 соответственно в период времени t, и x_t — запас

[1] Этот пример основывается на результатах следующей работы: *Levhary D.*, *Mirman L.* The great fish war: An example // Rand Journal of Economics. 1980. Vol. 11. P. 322–334.

ресурса на начало периода t, тогда количество ресурса на конец периода t составит $x_t - c_{t,1} - c_{t,2}$. Следовательно, запас ресурса в начале следующего периода, $t + 1$, будет равен $(x_t - c_{t,1} - c_{t,2})^a$. Заметим, что ввиду потребления ресурса участниками его запас в следующем периоде зависит от их выбора в предыдущем периоде.

Вначале рассмотрим случай, когда $t = 2$. Если x — запас товара на конец периода 1, то количество доступного ресурса на начало периода 2 составляет x^a. Предположим, что в периоде 2 участники делят доступный ресурс поровну, таким образом, каждый потребляет половину. Получаем

$$c_{2,1}^* = c_{2,2}^* = \frac{x^a}{2}.$$

Следование данному правилу в периоде 2 приводит к тому, что участники втянуты в игру «Добыча ресурсов» в периоде 1. Равновесие в периоде 1 зависит от запаса ресурса в начале периода, но игроки понимают, что их выбор в данном периоде влияет на выигрыш в периоде 2 через запас ресурса на конец периода 1, скажем x_1. Поэтому выбор $c_{1,i}$ игрока i в периоде 1 должен максимизировать

$$\ln c_{1,i} + \delta \ln \frac{(x_1 - c_{1,1} - c_{1,2})^a}{2}$$

при заданном выборе $c_{1,j}$, $j \neq i$ игрока j в периоде 1. Из условий первого порядка имеем

$$\frac{1}{c_{1,i}} = \frac{a\delta}{x_1 - c_{1,1} - c_{1,2}}.$$

Можно проверить, что здесь имеет место условие второго порядка для максимума. Отсюда следует, что наилучший отклик игрока 1 в периоде 1 — это

$$c_{1,1}^*(x_1, c_{1,2}) = \frac{x_1 - c_{1,2}}{1 + a\delta}. \tag{7.26}$$

Отметим, что (7.26) представляет собой наилучший отклик игрока 1 при условии, что в периоде 2 весь доступный запас ресурсов распределяется поровну. Аналогичным образом, наилучший отклик игрока 2 в периоде 1 имеет вид

$$c_{1,2}^*(x_1, c_{1,1}) = \frac{x_1 - c_{1,1}}{1 + a\delta}. \tag{7.27}$$

Из (7.26) и (7.27) теперь следует, что равновесная стратегия в периоде 1 задается парой $(\sigma_{1,1}^*(x_1), \sigma_{1,2}^*(x_1))$, где

$$\sigma_{1,1}^*(x_1) = \sigma_{1,2}^*(x_1) = \frac{x_1}{2 + a\delta}, \quad i = 1, 2. \tag{7.28}$$

Таким образом, (7.28) дает симметричный равновесный профиль стратегий σ^*, который задается

$$\sigma_{1,i}^*(x_1) = \frac{x_1}{2 + a\delta}. \tag{7.29}$$

Теперь перейдем к поиску симметричного совершенного в подыграх равновесия в игре с тремя периодами. Ясно, что равновесная стратегия в периоде 2 окажется аналогичной тому, что мы имели в периоде 1 для случая двух периодов. То есть для $i = 1,2$

$$\sigma^*_{2,i}(x_2) = \frac{x_2}{2 + a\delta}. \tag{7.30}$$

Таким образом, игроки будут действовать в периоде 1, учитывая данные выборы в периодах 2 и 3. Задача игрока 1 состоит в выборе $c_{1,1}$ в периоде 1 при условии, что в периоде 2 будет сыграно равновесие (7.30). Заметим, что решения о потреблении в периоде 2 зависят от x_2, количества доступного ресурса на начало периода 2. Для любого x_2 выигрыш игрока 1 в периодах 2 и 3 при использовании равновесных двухпериодных стратегий равен

$$\ln c^*_{2,1} + \delta \ln \frac{(x_2 - c^*_{2,1} - c^*_{2,2})^a}{2} = \ln \frac{x_2}{2 + a\delta} + \delta \ln \frac{\left(x_2 - \dfrac{x_2}{2 + a\delta} - \dfrac{x_2}{2 + a\delta}\right)^a}{2} =$$

$$= \ln \frac{x_2}{2 + a\delta} + a\delta \ln \frac{a\delta}{2 + a\delta} x_2 = (1 + \delta) \ln x_2 + A, \tag{7.31}$$

где A — выражение, которое зависит от констант a и δ и не зависит от x_2. Выражение (7.31) — выигрыш игрока 1 в периодах 2 и 3 в случае, когда игроки применяют равновесные стратегии в периоде 2[1]. Таким образом, игроку 1 предстоит выбрать $c_{1,1}$ с целью максимизации

$$\ln c_{1,1} + \delta(1 + a\delta) \ln \frac{(x_1 - c_{1,1} - c_{1,2})^a}{2} + \delta A.$$

Из условия первого порядка для максимума функции выигрыша игрока 1 по переменной $c_{1,1}$ имеем

$$\frac{1}{c_{1,1}} = \frac{a\delta(1 + a\delta)}{x_1 - c_{1,1} - c_{1,2}}.$$

Из этого следует, что наилучший отклик игрока 1 в периоде 1 составляет

$$c^*_{1,1}(x_1, c_{1,2}) = \frac{x_1 - c_{1,2}}{1 + a\delta + a^2\delta^2}.$$

Снова заметим, что условие второго порядка на максимум выполнено. Совершенно аналогично получается, что наилучший отклик игрока 2 в периоде 1 равен

$$c^*_{1,2}(x_1, c_{1,1}) = \frac{x_1 - c_{1,1}}{1 + a\delta + a^2\delta^2}.$$

[1] В литературе эту функцию часто называют оценочной функцией (оценкой, функцией оценки). Она указывает на выигрыш, который получит игрок, если все игроки в будущем используют свои равновесные стратегии.

Следовательно, равновесная стратегия в периоде 1 задается как

$$\sigma_{1,1}^*(x_1) = \sigma_{1,2}^*(x_1) = \frac{x_1}{2 + a\delta + a^2\delta^2}. \tag{7.32}$$

Равновесная стратегия в периоде 1 в формуле (7.32) отличается от того, что было получено для равновесной стратегии в случае двух периодов. На самом деле можно показать, что если в игре n периодов, то равновесная стратегия периода 1 имеет симметричный вид:

$$\sigma_{1,1}^*(x_1) = \sigma_{1,2}^*(x_1) = \frac{x_1}{2 + a\delta + a^2\delta^2 + \cdots + a^{n-1}\delta^{n-1}}. \tag{7.33}$$

Интересно, что равновесные стратегии периода 1 явным образом получены из осознания того, что в следующем периоде, т.е. в периоде 2, игроки выберут равновесные стратегии при заданном количестве ресурса x_2 в начале этого периода. Таким образом, метод нахождения равновесных стратегий в каждом из периодов является *методом обратной индукции*. В силу этого очевидно, что получаемые равновесные профили стратегий оказываются совершенными в подыграх.

Используя выражение для равновесных стратегий в (7.33), можно вывести равновесные стратегии для игры с бесконечным числом периодов. Равновесная стратегия игрока i, $i = 1,2$, в периоде t при симметричном равновесии имеет вид

$$\sigma_{1,1}^*(x_t) = \sigma_{1,2}^*(x_1) = \frac{x_1}{2 + a\delta + a^2\delta^2 + \cdots + a^{n-1}\delta^{n-1} + \cdots} = \frac{x_t(1 - a\delta)}{2 - a\delta}. \tag{7.34}$$

Важно отметить, что стратегия в каждом периоде $t \geq 1$ представляет собой функцию от переменной запаса ресурса только на начало данного периода и не включает всю историю. Подобные стратегии, зависящие напрямую лишь от состояния игры на начало каждого периода, называются **марковскими** стратегиями, и, если они оказываются совершенным в подыграх, как в данном случае, то равновесные стратегии носят название **совершенных марковских** стратегий.

Совершенные в подыграх равновесия показывают нам, что произойдет, если игроки станут использовать ресурс с целью максимизации своего дисконтированного выигрыша при заданном потреблении ресурса другим игроком. Это порождает определенную скорость добычи. Важный вопрос, который естественно здесь возникает, состоит в том, является ли результирующая совокупная скорость потребления при равновесии эффективной. Вспомним, что потребление ресурса оказывается эффективным, если оно дает максимум суммы полезностей двух игроков или максимизирует совокупное благосостояние. Следовательно, в случае двух периодов, когда каждый из игроков потребляет c единиц ресурса в первом периоде, сумма полезностей на протяжении двух периодов составляет

$$2\left[\ln c + \delta \ln\frac{(x_1 - 2c)^a}{2}\right].$$

Условие первого порядка на максимум имеет вид

$$\frac{1}{c} = \frac{2a\delta}{x_1 - 2c},$$

что дает эффективный уровень потребления игрока в периоде 1

$$\hat{c}_1 = \frac{x_1}{2(1 + a\delta)}. \tag{7.35}$$

Если рассматривать игру с тремя периодами, то сумма полезностей составит

$$2\left[\ln c + \delta \ln \hat{c}_2 + \delta^2 \ln \frac{x_3}{2}\right] =$$

$$= 2\left[\ln c + \delta \ln \frac{x_2}{2(1 + a\delta)} + \delta^2 \ln \frac{(x_2 - \frac{x_2}{2(1 + a\delta)} - \frac{x_2}{2(1 + a\delta)})^a}{2}\right] =$$

$$= 2[\ln c + \delta(1 + a\delta)\ln x_2 + \delta A'].$$

Первое равенство здесь следует из того, что в случае трех периодов уровень потребления игрока в периоде 2 будет задаваться подобным формуле (7.35) выражением, а A' отражает некоторое выражение, включающее константы a и δ. Выражение $= 2[(1 + a\delta)\ln x_2 + A']$ представляет собой функцию оценки в периоде 2, когда потребление обоих участников в этом периоде установлено на эффективном уровне. При заданной функции оценки второго периода совокупное благосостояние в периоде 1 имеет вид

$$2\left[\ln c + \delta(1 + a\delta)\ln \frac{(x_1 - 2c)^a}{2} + \delta A'\right].$$

Условие первого порядка на максимум данной функции по c, т.е. потреблению в периоде 1, дает

$$\frac{1}{c} = \frac{2a\delta(1 + a\delta)}{x_1 - 2c},$$

следовательно,

$$\hat{c}_1 = \frac{x_1}{2(1 + a\delta + a^2\delta^2)}.$$

Можно показать, что в случае n периодов эффективный уровень потребления в периоде 1 при условии одинакового потребления игроками равен

$$\hat{c}_1(x_1) = \frac{x_1}{2(1 + a\delta + a^2\delta^2 + \cdots + a^{n-1}\delta^{n-1})}.$$

Если рассмотреть игру с бесконечным числом периодов, для любого $t \geq 1$ получим

$$\hat{c}_t(x_t) = \frac{x_t(1 - a\delta)}{2}. \tag{7.36}$$

Различие между равновесным и эффективным уровнем потребления лучше всего видно при сравнении потребления ресурса в каждом периоде в формулах (7.34) и (7.36). Легко видеть, что

$$\frac{x_t(1-a\delta)}{2-a\delta} > \frac{x_t(1-a\delta)}{2}.$$

Отсюда следует, что потребление ресурса в равновесии *больше, чем эффективный уровень* потребления для любого начального запаса $x_1 > 0$.

Упражнения

1. Пусть в примере 7.32 резервные требования составляют $r = 0{,}1$, процент, выплачиваемый банком, равен $x = 0{,}04$ и только 50% вклада может быть получено обратно, если потребовать его досрочно, т.е. $s = 0{,}5$. Найдите критическое значение δ, при котором решение не требовать вклад является равновесием.
2. Найдите критическое значение δ, при котором продолжать размещение вклада в банке после второго периода является частью равновесной стратегии вкладчика в условиях упражнения 1.
3. Рассмотрим пример 7.34. Пусть $Y = 100$ долл. в час, $p = 0{,}5$, H эквивалентно 20 долл. и резервный уровень заработной платы равен $\underline{w} = 10$ долл. в час. Найдите w^* как функцию от δ. Покажите, что w^* убывает по δ.
4. Рассмотрим пример 7.34. Пусть $Y = 100$ долл. в час, $p = 0{,}5$, H эквивалентно 30 долл. и $\delta = 0{,}9$. Можно ли найти оптимальный уровень заработной платы w^*? Поясните.
5. Как изменится пороговое значение δ в упражнении 1 при росте величины r резервных требований? А что произойдет, если s снизится, т.е. инвестиции банка станут более рисковыми?
6. Покажите, что если в примере 7.32 ставка дисконтирования δ достаточно высока, для того чтобы продолжение размещения вклада в периоде 2 являлось равновесной стратегией, то она будет достаточно высокой и для того, чтобы решение не требовать средства было равновесием в периоде 1.
7. В примере 7.33 утверждалось, что если страна назначит нулевую ставку тарифа, то другая страна установит ставку тарифа на уровне $\frac{a-c}{3}$. Докажите это.
8. Уравнение (7.20) задает уровень благосостояние страны в совершенном в подыграх равновесии стадийной игры примера 7.33. Убедитесь в том, что это действительно так.
9. Покажите, что в примере 7.34 оптимальный уровень заработной платы w^* возрастает по p, т.е. по вероятности незамеченного отлынивания от работы. Объясните, почему это оправданно.
10. В игре «Добыча ресурсов» из примера 7.35, в которой участники извлекают ресурс на протяжении двух периодов, равновесные выборы в периоде 1 получены в предположении, что в периоде 2 игроки поделят

остаток поровну. Покажите, что равновесные выборы участников в периоде 1 в точности совпадут с выборами в (7.30), если в периоде 2 один из участников получит $\frac{1}{k}$ единиц ресурса, а другой $\frac{k-1}{k}$ единиц ресурса.

11. Покажите, что уравнение (7.33) определяет одноопериодную равновесную стратегию для случая n периодов с помощью математической индукции. То есть предположите, что имеется результат для случая $(n-1)$-го периода, и покажите, что он справедлив и для случая n периодов.

12. Покажите, что выражение (7.35) определяет эффективный уровень потребления в периоде 1 в случае n периодов с помощью математической индукции. То есть предположите, что формула верна в случае $(n-1)$ периодов, и исходя из этого установите ее справедливость для n периодов.

13. Существует ли совершенное в подыграх равновесие в бесконечной повторяющейся игре «Добыча ресурсов», в которой игроки потребляют на эффективном уровне? Если да, то найдите соответствующее пороговое значение дисконтирующего множителя δ.

14. Существует ли совершенное в подыграх равновесие в повторяющейся игре с бесконечным горизонтом из примера 7.33, отличное от профиля *беспощадных триггерных стратегий*, в которых страны устанавливают в равновесии нулевые ставки тарифа? [Подсказка: воспользуйтесь методом из примера 7.30.]

15. В примере 7.34 профиль стратегий, образующих совершенное в подыграх равновесие (приводящих к контракту с высокой заработной платой и высоким выпуском), — это профиль *беспощадных триггерных стратегий.* Найдите профиль стратегий, образующих совершенное в подыграх равновесие, которые не являются беспощадно триггерными, но также приводят к контракту с высокой заработной платой и высоким выпуском. [Подсказка: воспользуйтесь методом из примера 7.30.]

Глава 8 СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ

Рассмотренная в гл. 4 концепция совершенного в подыграх равновесия проявляет себя исключительно в контексте динамических игр. Совершенные в подыграх равновесия можно трактовать как равновесия по Нэшу, удовлетворяющие критерию секвенциальной рациональности. То есть совершенство в подыграх гарантирует, что игроки действуют рационально в течение всей игры.

Однако совершенство в подыграх ничего не говорит о секвенциальной рациональности в случае, когда динамическая игра не содержит подыгр. Это достаточно серьезная проблема, поскольку многие классы динамических игр не имеют собственных подыгр. Например, в динамических играх, возникающих в ситуациях, где участники обладают различной информацией, может и не быть собственных подыгр.

Проблема является важной, потому что в отличие от равновесия по Нэшу в стратегической игре не любое равновесие по Нэшу динамической игры предоставляет убедительное решение игры. Мы уже видели это в случае динамических игр с подыграми. Те же проблемы возникают с равновесием по Нэшу в динамических играх без подыгр. Совершенное в подыграх равновесие по Нэшу представляется обоснованным решением, поскольку если в процессе игры достигается некоторый узел дерева, то оно остается решением и для оставшейся части игры. Таким образом, можно заявить, что совершенный в подыграх профиль стратегий удовлетворяет *секвенциальной рациональности*, так как в процессе игры (в любом текущем состоянии игры) рационально продолжать играть в соответствии с данным профилем стратегий. Но тогда напрашивается вопрос о том, что могло бы означать для равновесия по Нэшу требование быть секвенциально рациональным в динамической игре, не содержающей собственных подыгр. В данной главе мы ответим на этот вопрос, рассмотрев *секвенциальные равновесия*, и по ходу опишем один из принципов, в соответствии с которым равновесие по Нэшу может быть секвенциально рациональным.

Тематика совершенства в подыграх и секвенциального равновесия играет важную роль в современных публикациях по теории игр и является частью современных исследований. Впервые появившись в работах Р. Зельтена [75; 76], она получила развитие у Д.М. Крепса и Р. Уилсона [46]. В ряде случаев эти концепции были усовершенствованы, см., например, И.К. Хо (или Чо) и Д.М. Крепс [23].

Глава начинается с примера рынка «лимонов», который будет служить мотивом для остальной части главы, поскольку в нем рассматривается динамическая игра, не имеющая собственных подыгр. Далее обсудим стратегии и ожидания, согласованность ожиданий и ожидаемые выигрыши и, наконец, определим секвенциальное равновесие. В конце главы будут разобраны некоторые приложения секвенциальных равновесий.

8.1. Рынок «лимонов»

Это пример игры двух лиц, в которой один из участников обладает большей информацией, чем другой. Пример представляет собой стилизованную версию рынка «лимонов»[1]. На рынке продается два вида автомобилей: высококачественные и низкокачественные[2], причем оба вида встречаются одинаково часто[3]. На таком рынке продавец обычно имеет *резервную цену* p_h для автомобиля с высоким качеством (самая низкая среди цен, по которым он согласен продать высококачественный автомобиль) и *резервную цену* p_l для автомобиля с низким качеством (самая низкая среди цен, по которым он согласен продать низкокачественный автомобиль). В свою очередь покупатель имеет свои резервные цены: резервная цена h за автомобиль с высоким качеством (самая высокая среди цен, по которым он согласен купить высококачественный автомобиль) и резервная цена l за автомобиль с низким качеством (самая высокая среди цен, по которым он согласен купить низкокачественный автомобиль). Для того чтобы гарантировать эффективность рыночных сделок, будет считать, что $h > p_h$ и $l > p_l$. Также будем полагать, что резервные цены h, l, p_h и p_l известны всем игрокам. Предположим также, что $h > l$ и $p_h > p_l$. На таком рынке продавец подержанного автомобиля обычно имеет больше информации о его качестве, чем покупатель.

Посмотрим теперь на динамическую игру, описывающую ситуацию, когда продавец подержанного автомобиля выставляет его на рынок. Природа раскрывает продавцу (игрок 1) качество автомобиля (G – высокое, B — низкое), и далее он решает, назначить за автомобиль высокую p_h или низкую p_l цену. Покупатель (игрок 2) ничего не знает о качестве автомобиля, но видит анонсированную продавцом цену p. Затем игрок 2 должен решить, покупать ли ему этот автомобиль. Процесс последовательного разыгрывания описан игрой, представленной на рис. 8.1[4].

---

[1] Игра «Лимоны» — версия рынка «лимонов», который анализировал Джордж Акерлоф в своей эпохальной статье «The market for lemons: Quality uncertainty and the market mechanism» (Quarterly Journal of Economics. 1970. Vol. 89. P. 488–500).

Рус. пер.: *Акерлоф Д.* Рынок «лимонов»: неопределенность качества и рыночный механизм. Thesis. 1994. Вып. 5 <http://portal.ufrf.ru/Www/Kbhiab/data/store/01cdd4e7-5cf2-4962-b40a-9d2e353d1e07/Akerlof_Dzh._Rinok_limonov_neopredelennostj_kachestva_i_rinochnij_mehanizm.pdf?>.

[2] «Лимоны» на жаргоне дилеров рынка подержанных автомобилей — автомобили низкого качества. — *Примеч. пер.*

[3] В действительности предполагается, что они одинаково часто встречаются как потенциальные объекты купли-продажи. Фактически при определенных обстоятельствах продаваться будут только автомобили низкого качества, что мы и увидим в дальнейшем. То есть встречаться они будут не одинаково часто. — *Примеч. ред.*

[4] В действительности диаграмма не вполне точно отражает этот процесс: из дальнейшего его вербального описания будет ясно, что как владелец машины высокого качества, так и владелец «лимона» в принципе могут просить за него любую цену, а не только p_h или p_l, как это указано на диаграмме. Впрочем, скорректировать эту диаграмму соответствующим образом не составляет особого труда. — *Примеч. ред.*

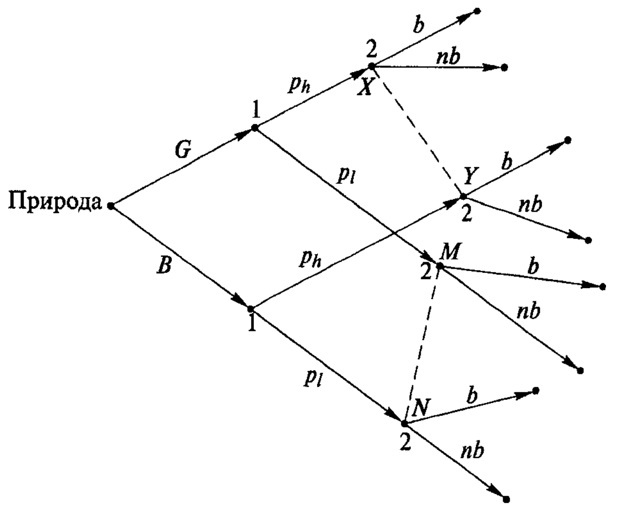


Рис. 8.1

Ясно, что эта динамическая игра с несовершенной информацией не содержит каких-либо подыгр, т.е. равновесие по Нэшу на первый взгляд может показаться секвенциально рациональным. Однако как только будет достигнуто информационное множество игрока 2, непонятно, как он станет действовать (или что является рациональным действием игрока 2), поскольку он не знает качество выставленного на продажу автомобиля. Если у игрока 2 сформировались ожидания относительно качества автомашины, он может принимать решение на основании этих ожиданий. Но тогда возникает вопрос: *Каковы должны быть ожидания рационального игрока на информационном множестве игрока 2?*

Каковы бы ни были ожидания игрока 2 в его информационном множестве, они должны быть «рациональными». Один из способов проверки рациональности ожиданий состоит в том, чтобы проверить их согласованность с предполагаемыми выборами игроков. В игре «Лимоны» может показаться разумным ожидание того, что

- *если игрок 2 (или покупатель) видит, что указанная цена p близка к p_h, то он должен ожидать, что автомобиль высокого качества;*
- *если он видит, что указанная цена p близка к p_l, то он должен ожидать, что автомобиль низкого качества («лимон»).*

Но если игрок 1 (продавец) знает это, должен ли он установить высокую цену за высококачественный автомобиль и низкую цену за низкокачественный автомобиль? Конечно же, нет: он установит высокую цену за любой автомобиль! Мы понимаем, что такие ожидания игрока 2 несовместимы с выборами, которые совершает игрок 1 при подобных ожиданиях игрока 2.

Более того, тщательный анализ позволяет понять, что высокая цена на выставленный на продажу автомобиль не должна заставить игрока 2 верить, что по высокой цене продавец предлагает высококачественный автомобиль.

Следовательно, игрок 2 должен ожидать, что продаваемый за высокую цену автомобиль *с равной вероятностью* может быть как высококачественным, так и низкокачественным. В таком случае покупатель (действующий рационально) приобретет автомобиль только тогда, когда ожидаемая ценность покупки превосходит ожидаемую ценность отказа от нее. То есть покупка совершится в случае, если $\frac{1}{2}(h-p)+\frac{1}{2}(l-p)\geq 0$, или

$$p\leq\frac{1}{2}(h+l).$$

Если продавец назначит цену p свыше этой, то (рациональный) покупатель, который ожидает, что качество автомобиля может быть высоким и низким с равной вероятностью, не купит машину. Таким образом, если в данной динамической игре цена $p\geq p_h$, то покупатель ожидает, что автомобиль стоит h с вероятностью 1/2 и l с вероятностью 1/2, поскольку по такой цене предлагаются оба типа автомобилей. То есть покупатель (игрок 2) ожидает, что находится в узле X с вероятностью 1/2 и в узле Y с вероятностью 1/2; см. рис. 8.1. В этом случае «осмысленные ожидания» игрока 2 на информационном множестве $\mathcal{I}_1=\{X,Y\}$ задаются соотношением

$$P(\{X\})=P(\{Y\})=\frac{1}{2}.$$

Если же $p_h>p\geq p_l$, то игрок 2 знает, что высококачественные автомобили не выставлены на продажу и на рынке только низкокачественные автомобили. Следовательно, если покупатель видит цену p ниже, чем p_h, то он должен быть уверен, что находится в узле N. В этом случае осмысленные ожидания игрока 2 на информационном множестве $\mathcal{I}_2=\{M,N\}$ имеют вид

$$P(\{M\})=0 \ \text{ и } \ P(\{N\})=1.$$

Итак, обратим внимание, что возможны два случая.

Случай I. $\frac{1}{2}(h+l)\geq p_h$.

В этом случае, поскольку цена $p=\frac{1}{2}(h+l)$ больше или равна резервной цене p_h продавца за высококачественный автомобиль, по этой цене он будет выставлять на продажу оба типа автомобилей. Покупатель ожидает, что на рынке предлагаются оба типа автомобилей, и оба типа будут предлагаться и продаваться по цене p, ожидаемой ценности для покупателя. Поскольку в данном случае ожидаемый выигрыш покупателя равен нулю, он купит автомобиль за такую цену.

Случай II. $p_h>\frac{1}{2}(h+l)$.

В этом случае если за автомобиль предлагается цена $p=\frac{1}{2}(h+l)$, то продавец высококачественных автомобилей не станет выставлять его на продажу. Таким образом, на продажу предлагаются только автомобили низкого качества. Покупатель будет знать, что достигнут узел N, и, следовательно, предложит заплатить максимум l долл. В этом случае продаются и покупаются только автомобили низкого качества, цена на которые устанавливается где-то между p_l и l [1].

В рассмотренной динамической игре мы видели, что ожидания игроков играют крайне важную роль. Важно также иметь в виду, что ожидания должны быть до известной степени осмысленными. Иначе говоря, при заданной цене p

(1) ожидания покупателя согласованы со стимулами продавца;

(2) стратегия покупателя является оптимальной при его ожиданиях относительно оптимальной стратегии продавца.

Таким образом, как представляется, мы получили в каждом случае «равновесие», основанное на некоторых согласованных ожиданиях — ожиданиях, которые согласованы с оптимальными стратегиями покупателя и продавца. На самом деле мы только что дали эвристическое описание понятия *секвенциального равновесия* для игры «Лимоны». В следующем разделе будет представлено полное описание данной концепции.

Теперь убедимся, что описанное ранее интуитивное равновесие в действительности образует равновесие по Нэшу в игре «Лимоны».

Пример 8.1 (игра «Лимоны»). Для проверки того, что описанный выше процесс ведет к равновесию по Нэшу, нужно изобразить дерево игры «Лимоны». Собственно говоря, поскольку цена $p \geq 0$ может принимать бесконечное множество неотрицательных значений $(0 \leq p < \infty)$, дерево этой игры в действительности имеет бесконечно много узлов. Чтобы понять это, заметим снова, что игра начинается с того, что природа раскрывает качество автомобиля продавцу (игроку 1): B (низкое) или G (высокое). После этого продавец назначает цену p за автомобиль. В случае если автомобиль высокого качества, игра переходит в узел X, а в противном случае — в узел Y. Дерево игры изображено на рис. 8.2. Таким образом, множество $\{X, Y\}$ является информационным множеством игрока 2. Ясно, что для узлов X и Y есть бесконечно много возможностей, представленных точками на лучах OX и $O'Y$.

Теперь обсудим стратегии каждого игрока. Стратегия продавца — это просто цена $p \geq 0$ (объявляемая цена за автомобиль). Стратегия s покупателя — функция, определенная на узлах X и Y и принимающая значения b (покупать) или nb (не покупать). Поскольку узлы X и Y однозначно определяются значением цены p, можно рассматривать стратегию s игрока 2 как функцию $s : [0, \infty) \to \{b, nb\}$. Как и ранее, будем различать два случая.

Случай I. $\frac{1}{2}(h + l) \geq p_h$.

[1] Если процесс торга, как это отображено на диаграмме (рис. 8.1), последовательный, то, воспользовавшись преимуществом первого хода, продавец предложит цену l, на которую покупатель согласится. Фактически автор предположил (и использовал) наличие у продавца такого преимущества при анализе случая I. — *Примеч. ред.*

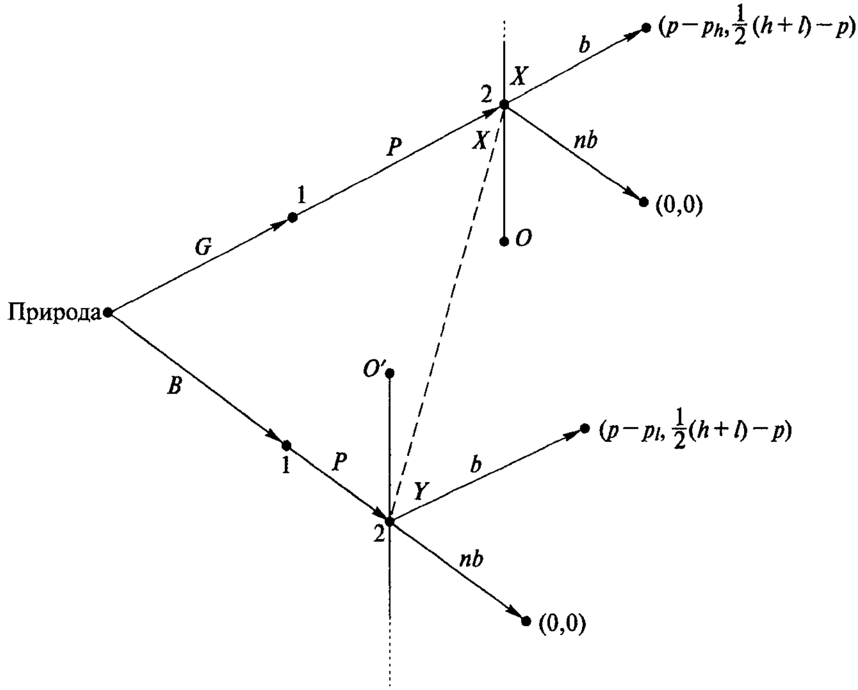


Рис. 8.2

Нетрудно понять, что функции выигрышей игроков имеют вид

$$u_1(p,s)=\begin{cases} p-\frac{1}{2}(p_l+p_h), & \text{если } s=b^1, \\ 0, & \text{если } s=nb, \end{cases}$$

$$u_2(p,s)=\begin{cases} \frac{1}{2}(h+l)-p, & \text{если } s=b, \\ 0, & \text{если } s=nb. \end{cases}$$

Тогда профиль стратегий (p^*,s^*), определенный соотношениями

$$p^*=\frac{1}{2}(h+l) \text{ и } s^*(p)=\begin{cases} b, & \text{если } \frac{1}{2}(h+l)\ge p, \\ nb, & \text{если } \frac{1}{2}(h+l)<p \end{cases}$$

является равновесием по Нэшу.

Случай II. $p_h>\frac{1}{2}(h+l)$.

В этом случае продавец понимает, что покупатель ни в коем случае не станет приобретать автомобиль дороже, чем за $\frac{1}{2}(h+l)$, и что на рынке

[1] На стадии, когда первый игрок не знает «своего типа», т.е. качества своего автомобиля до сообщения природы. — *Примеч. ред.*

будут только автомобили с низким качеством. Это значит, что функции выигрышей участников

$$u_1(p,s)=\begin{cases} p-p_l, & \text{если } s=b,\\ 0, & \text{если } s=nb,\end{cases}$$

$$u_2(p,s)=\begin{cases} \frac{1}{2}(h+l)-p, & \text{если } s=b^1,\\ 0, & \text{если } s=nb.\end{cases}$$

Тогда профиль стратегий (p^*,s^*), такой что

$$p^*=l \text{ и } s^*(p)=\begin{cases} b, & \text{если } l\ge p,\\ nb, & \text{если } l<p\end{cases}$$

является равновесием по Нэшу. Предоставим читателю самостоятельно проверить, что указанные профили стратегий — равновесия по Нэшу в игре «Лимоны». ■

Пример с «лимонами» является поучительным по крайней в двух аспектах. Во-первых, это динамическая игра, в которой нет собственных подыгр. Во-вторых, при определении равновесного решения решающую роль играли ожидания. Оба этих аспекта важны для игр с несовершенной информацией, и их необходимо явно учитывать при нахождении равновесий. Конечно, должно быть понятно, что не любые ожидания могут быть оправданными. Например, ожидания того, что продавец низкокачественного автомобиля объявит об этом покупателю, вряд ли обоснованны. Концепция секвенциального равновесия предназначена для того, чтобы иметь дело именно с этими аспектами.

Упражнения

1. Есть ли собственные подыгры в игре, изображенной на рис. 8.1?
2. Удостоверьтесь в том, что профили стратегий из примера 8.1 — действительно равновесия по Нэшу в игре «Лимоны».
3. Найдите равновесие по Нэшу в игре «Лимоны», если две трети от числа всех автомобилей имеют низкое качество.
4. Если в игре «Лимоны» игроки заставят продавцов сертифицировать качество продаваемых автомобилей, как бы вы модифицировали игру?

8.2. Ожидания[2] и стратегии

В предыдущем разделе мы показали, что ожидания играют важную роль при поиске решений. Отмечалось также, что обоснованные ожидания должны быть согласованы с тем способом, которым разыгрывается игра. В этом разделе способ описания ожиданий будет изложен строго.

[1] Но покупатель знает, что по такой цене он может приобрести только автомобиль низкого качества, поэтому его выигрыш несколько отличается от указанного. — *Примеч. ред.*

[2] Иногда в русскоязычной литературе используют альтернативный термин «вера». — *Примеч. пер.*

Позже станет ясно, что ожидания играют решающую роль при определении секвенциального равновесия. Начнем с двух важных понятий.

- Пусть $\mathcal{I}=\{N_1,\ldots,N_l\}$ — информационное множество игрока i в динамической игре. *Ожидания игрока i на его информационном множестве* $\mathcal{I}$ — это функция $\mu_{\mathcal{I}}:\mathcal{I}\to[0,1]$, которая ставит в соответствие множеству узлов информационного множества $\mathcal{I}$ распределение вероятностей (на этом множестве), т.е. $\mu_{\mathcal{I}}:\mathcal{I}\to[0,1]$ — функция, удовлетворяющая соотношению $\sum_{r=1}^{l}\mu_{\mathcal{I}}(N_r)=1$. Значение $\mu_{\mathcal{I}}(N_r)$ трактуется как **ожидание** игроком i, (т.е. вероятность) того, что достигнут узел N_r. На рис. 8.3, *а* изображены ожидания игрока, которому принадлежит информационное множество $\{N_1,N_2,N_3\}$.
- Далее предположим, что игроку i принадлежат информационные множества $\{\mathcal{I}_1^i,\mathcal{I}_2^i,\ldots,\mathcal{I}_{\lambda_i}^i\}$ (так что множество всех узлов, принадлежащих игроку i, составляет $\bigcup_{r=1}^{\lambda_i}\mathcal{I}_r^i$), и пусть $\mu_{\mathcal{I}_r^i}$ — ожидания игрока i на его информационном множестве $\mathcal{I}_r^i$. Тогда λ_i-мерный набор $\mu_i=(\mu_{\mathcal{I}_1^i},\mu_{\mathcal{I}_2^i},\ldots,\mu_{\mathcal{I}_{\lambda_i}^i})$ образует **систему ожиданий (мировоззрение)** игрока i.
- **Система ожиданий** в динамической игре с несовершенной информацией представляет собой n-мерный набор $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, где μ_i — ожидания каждого игрока i.

Следующее понятие — это поведенческая стратегия игрока, которая распространяет концепцию профиля стратегий на динамические игры, учитывая их структуру.

- *Поведенческая стратегия* π_i игрока i — это функция, которая определяет вероятностное распределение на ребрах каждого узла информационного множества, принадлежащего игроку i. Другими словами, если информационное множество $\mathcal{I}=\{N_1,\ldots,N_l\}$ принадлежит игроку i и множество ребер при каждом узле информационного множества $\mathcal{I}$ одинаково и составляет $\mathcal{E}=\{1,2,\ldots,m\}$, то π_i определяет вероятностное распределение $\pi_{\mathcal{I}}:\mathcal{E}\to[0,1]$, где $\sum_{r=1}^{m}\pi_{\mathcal{I}}(r)=1$. Число $\pi_{\mathcal{I}}(r)\equiv\pi_i(r)$ рассматривается как

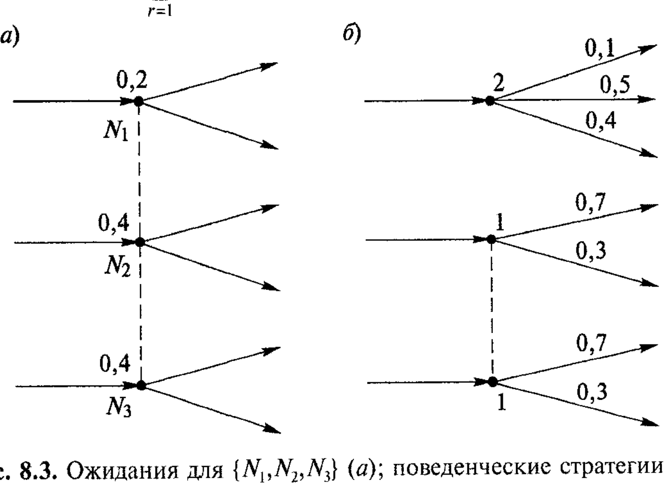


Рис. 8.3. Ожидания для $\{N_1,N_2,N_3\}$ (*а*); поведенческие стратегии (*б*)

вероятность выбора игроком i ребра $r \in \mathcal{E}$ при достижении информационного множества $\mathcal{I}$. На рис. 8.3, *б* представлены два примера поведенческих стратегий игроков 1 и 2.

Пусть, как и ранее, игроку i принадлежит информационное множество $\{\mathcal{I}_1^i, \mathcal{I}_2^i, \ldots, \mathcal{I}_{\lambda_i}^i\}$. Предположим, что ребра в каждом узле $\mathcal{I}_r^i$ можно идентифицировать с элементами множества $\mathcal{E}_r^i = \{1, 2, \ldots, m_r^i\}$. Предположим далее, что $\pi_{\mathcal{I}_r^i} : \mathcal{E}_r^i \to [0,1]$ — распределение вероятностей для игрока i, описанное выше. Тогда набор λ_i элементов $\pi_i = (\pi_{\mathcal{I}_1^i}, \pi_{\mathcal{I}_2^i}, \ldots, \pi_{\mathcal{I}_{\lambda_i}^i})$ в точности является **поведенческой стратегией** игрока i.

- **Профиль поведенческих стратегий** в динамической игре n лиц — это n-мерный набор $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$, где π_i — поведенческая стратегия игрока i.
- Говорят, что профиль поведенческих стратегий в динамической игре n лиц является **вполне смешанным**, если каждый выбор в каждом узле осуществляется с положительной вероятностью.

Предположим, что для заданной динамической игры n лиц определен профиль поведенческих стратегий $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$. Для упрощения обозначений примем следующие соглашения.

- Пусть $N_k N_l$ — некоторое ребро, принадлежащее игроку i. Вероятность перейти из N_k в N_l будем обозначать через $\pi(N_k N_l)$ вместо $\pi_i(N_k N_l)$.
- Аналогичным образом, вероятность перехода из узла N_1 в узел N_m будет записываться в виде

  $$\pi(N_1 N_m) = \pi(N_1 N_2)\pi(N_2 N_3) \cdots \pi(N_k N_m),$$

  где $N_1 \to N_2 \to N_3 \to \cdots \to N_k \to N_m$ — единственный путь, соединяющий N_1 с N_m. Если не существует пути, соединяющего N_1 и N_m, то

  $$\pi(N_1 N_m) = 0 .$$

- Если N — произвольный узел, отличный от корня дерева игры, будем записывать $\pi(RN)$ как $\pi(N)$, т.е. $\pi(N) = \pi(RN)$. Число $\pi(N)$ представляет *вероятность достижения узла* N начиная от корня R.

Внимательный читатель наверняка заметил, что с учетом принятых соглашений вполне смешанный профиль стратегий автоматически естественным образом порождает ожидания. Покажем это на следующем примере.

Пример 8.2. Рассмотрим динамическую игру, представленную на рис. 8.4. В этой игре вполне смешанный профиль стратегий π задается следующим образом:

(1) игрок 1 выбирает a с вероятностью 0,1 и b с вероятностью 0,9;

(2) игрок 2 делает следующий выбор в своем информационном множестве: T с вероятностью 0,1 и B с вероятностью 0,9; и, наконец,

(3) при достижении одного из своих информационных множеств игрок 1 выбирает L и L' с вероятностями 0,1 и R и R' с вероятностями 0,9.

Если это профиль поведенческих стратегий, то возникает вопрос:

- *Какие ожидания должны быть у игроков относительно того, какие узлы достигнуты в их информационных множествах?*

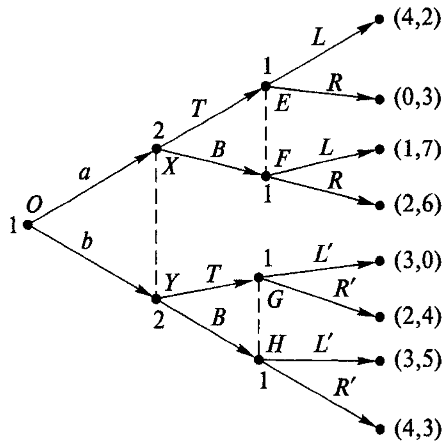


Рис. 8.4

Очевидно, игрок 2 должен ожидать, что находится в верхнем узле X с вероятностью 0,1. А что должен ожидать игрок 1 при достижении своих информационных множеств после хода игрока 2? Каковы должны быть, в частности, его ожидания на информационных множествах $\mathcal{I}_1 = \{E, F\}$ и $\mathcal{I}_2 = \{G, H\}$?

Если игрок 1 достиг информационного множества $\mathcal{I}_1$, то это означает, что он выбрал a в начальном узле. Информация о том, что он находится в информационном множестве $\mathcal{I}_1$, должна использоваться для формирования ожиданий о том, какой из узлов был достигнут. Один из способов сделать это состоит в применении знакомой нам формулы Байеса (см. теорему 3.13), которая уже использовалась при изучении последовательного принятия решений.

Таким образом, если $\pi(E)$ — вероятность того, что начиная с корня дерева достигнут узел E, а $\pi(E|\mathcal{I}_1)$ — условная вероятность того, что достигнут узел E, при условии, что достигнуто информационное множество $\mathcal{I}_1$, то согласно формуле Байеса эта вероятность равна

$$\pi(E|\mathcal{I}_1) = \frac{\pi(\mathcal{I}_1|E)\pi(E)}{\pi(\mathcal{I}_1|E)\pi(E) + \pi(\mathcal{I}_1|E)\pi(F)} = \frac{\pi(E)}{\pi(E) + \pi(F)}.$$

Следовательно, в этом случае имеем

$$\pi(E|\mathcal{I}_1) = \frac{0{,}1 \times 0{,}1}{0{,}1 \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}9} = \frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}09} = 0{,}1.$$

Другими словами, после корректировки своих ожиданий на основе информации о поведенческой стратегии π игрок 1 приходит к заключению, что вероятность оказаться в узле E составляет 0,1, хотя на начало игры вероятность достичь узла E информационного множества $\mathcal{I}_1$ была равна 0,01.

Таким образом, игрок 1 использует дополнительную информацию о том, что произошло в игре, для корректировки исходных вероятностей. Выражаясь иначе, игрок 1 скорректировал ожидания *секвенциально обоснованным* способом. Если игрок 1 проделает это в каждом узле своего информационного множества, то ожидания будут иметь вид

$$\pi(E|\mathcal{I}_1) = 0{,}1\,,\ \pi(F|\mathcal{I}_1) = 0{,}9\,,$$

$$\pi(E|\mathcal{I}_2) = 0{,}1\,,\ \pi(F|\mathcal{I}_2) = 0{,}9\,.$$

Ясно, что только такие ожидания являются согласованными с поведенческим профилем стратегий π, и поэтому только они представляются обоснованными при заданном профиле поведенческих стратегий. ■

Предположим теперь, что π — вполне смешанный профиль поведенческих стратегий в динамической игре n лиц и $\mathcal{I} = \{N_1, N_2, \dots, N_l\}$ — информационное множество. Тогда, как и в примере 8.2, легко видеть, что

$$P(N_r|\mathcal{I}) = \frac{\pi(N_r)}{\sum_{s=1}^{l} \pi(N_s)}$$

для любого $r = 1, \dots, l$. Это показывает, что каждый вполне смешанный профиль стратегий автоматически порождает «рациональные» ожидания. Сформулируем это важное наблюдение в форме определения.

Определение 8.3. *Пусть π — вполне смешанный профиль поведенческих стратегий в динамической игре n лиц. Тогда **ожидания** μ^π, **порождаемые** π, определяются в любом узле N_r произвольного информационного множества $\mathcal{I} = \{N_1, N_2, \dots, N_l\}$ по формуле*

$$\mu^\pi(N_r) = P(N_r|\mathcal{I}) = \frac{\pi(N_r)}{\sum_{s=1}^{l} \pi(N_s)}\,.$$

Заметим, что если профиль поведенческих стратегий не является вполне смешанным, то знаменатель в формуле может быть равным нулю и $\mu^\pi(N_r) = \frac{0}{0}$ не определено. Это показывает, что сформулированное выше определение неприменимо в случае, если профиль поведенческих стратегий не является вполне смешанным.

Упражнения

1. Проверьте, что если π — вполне смешанный профиль поведенческих стратегий в динамической игре n лиц и $\mathcal{I} = \{N_1, N_2, \dots, N_l\}$ — информационное множество, то
$$P(N_r|\mathcal{I}) = \frac{\pi(N_r)}{\sum_{s=1}^{l} \pi(N_s)}$$
для любого $r = 1, \dots, l$.
2. Рассмотрим игру, изображенную на рис. 8.5. Покажите, что ожидания на информационном множестве $\{E,F\}$ определяются только поведенческой стратегией игрока 2 в информационном множестве $\{X\}$. Что определяет ожидания на информационном множестве $\{G,H\}$?

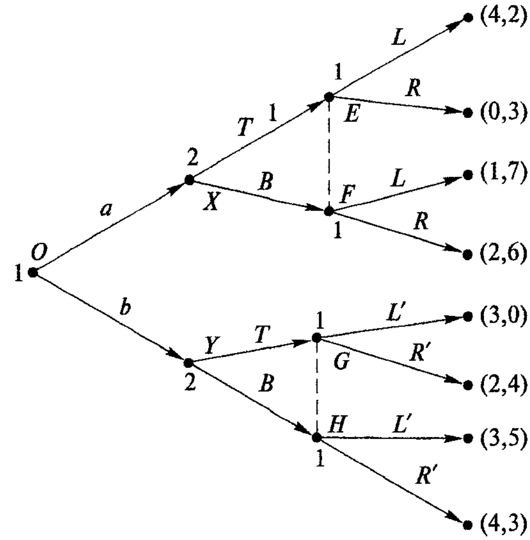


Рис. 8.5

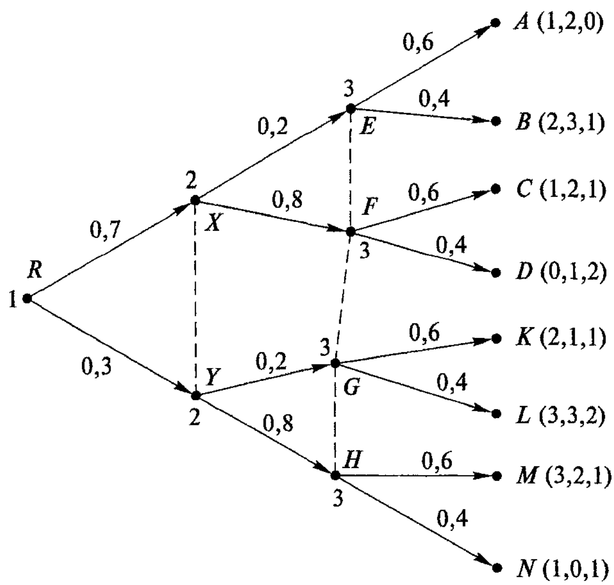


Рис. 8.6

3. Рассмотрим динамическую игру, изображенную на рис. 8.6.
(a) Вычислите вероятности $\pi(F)$, $\pi(D)$, $\pi(A)$ и $\pi(XB)$.
(b) Вычислите $P(X|\mathcal{I}_1)$, $P(E|\mathcal{I}_2)$ и $P(G|\mathcal{I}_2)$, если $\mathcal{I}_1 = \{X, Y\}$ и $\mathcal{I}_2 = \{E, F, G, H\}$.

4. Рассмотрим игру «Лимоны» на рис. 8.1. Предположим, что игрок 1 выбирает p_h с вероятностью 0,9, если природа выбрала G, и p_h с вероятностью 0,1, если природа выбрала B. Предположим, что G и B имеют одинаковые шансы быть выбранными природой. Опишите значения вероятностей системы ожиданий в узлах информационных множеств, порожденные этим вполне смешанным профилем поведенческих стратегий.

5. Проверьте, что любой профиль поведенческих стратегий при его ограничении на подыгру является профилем поведенческих стратегий в этой подыгре. Проверьте аналогичное утверждение для системы ожиданий.
6. Пусть π — профиль поведенческих стратегий в динамической игре n лиц. Покажите, что если $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ — терминальные узлы дерева игры, то
$$\pi(Z_1) + \pi(Z_2) + \cdots + \pi(Z_k) = 1 .$$
[Подсказка: используйте упражнение 9 раздела 3.1 и индукцию по числу узлов k.]

8.3. Согласованность ожиданий

В этом разделе мы приведем точное определение обоснованных ожиданий, которые будут играть ключевую роль в формализации понятия секвенциальной рациональности. Начнем со следующего определения.

Определение 8.4. *Ожидания μ называются* ***согласованными по Байесу*** *со вполне смешанным профилем поведенческих стратегий π, если μ порождается π, т.е.* $\mu = \mu^\pi$.

Предположим, что в примере 8.2 вполне смешанный профиль поведенческих стратегий последовательно изменяется, так что вероятность 0,1 становится все меньше и меньше и выборы, происходившие с вероятностями 0,9, теперь совершаются с вероятностями, все более близкими к единице. Ожидания, согласованные с вполне смешанным профилем поведенческих стратегий, также будут изменяться на каждом шаге последовательности. Вопрос: *а что произойдет в пределе*?

Нетрудно понять, что «предельная система ожиданий» μ каждого игрока выглядит следующим образом.

(1) Для информационных множеств игрока 1: $\mu(E|\mathcal{I}_1) = \mu(F|\mathcal{I}_1) = \mu(G|\mathcal{I}_2) = 0$ и $\mu(H|\mathcal{I}_2) = 1$.

(2) Для информационного множества игрока 2: $\mu(X) = 0$ и $\mu(Y) = 1$.

Эти ожидания, которые не могут быть напрямую получены из формулы Байеса, порождают следующий ход игры:
$$O \to Y \to H \to (4,3) ,$$
поддерживаемый профилем стратегий $(\{b, R, R'\}, B)$. Что делает ожидания и профиль стратегий согласованными, так это то, что они являются пределом последовательности согласованных по Байесу систем ожиданий и профилей

стратегий. Эта характеристика «согласованности» формально определяется следующим образом.

Определение 8.5. *Говорят, что профиль стратегий* π *и система ожиданий* μ ***согласованы**, если существует последовательность вполне смешанных профилей поведенческих стратегий* $\{\pi_k\}$, *таких что последовательность* $\{\pi_k, \mu^{\pi_k}\}$, *где* μ^{π_k} *— ожидания, согласованные по правилу Байеса с профилем* π_k, *сходится к паре* (π, μ) *в следующем смысле:*

(1) $\pi_k(N_l N_m) \underset{k\to\infty}{\to} \pi(N_l N_m)$ *для любого ребра* $N_l N_m$;

(2) $\mu^{\pi_k}(N) \underset{k\to\infty}{\to} \mu(N)$ *для любого узла* N.

Теперь должно быть ясно, что любое понятие равновесия в динамической игре с несовершенной информацией должно включать понятие согласованности ожиданий и профиля стратегий, поскольку данные понятия представляются существенными характеристиками любой осмысленной формулировки «секвенциальной рациональности». К сожалению, как показывает следующий пример, хотя понятие согласованности кажется важной составляющей любой концепции секвенциальной рациональности, ее недостаточно, чтобы охарактеризовать секвенциальную рациональность.

Пример 8.6. Рассмотрим динамическую игру, представленную на рис. 8.7. Анализируя эту игру, мы обнаружим, что у нее два равновесия по Нэшу: (b,R) и (m,L). Возникает вопрос — а какое из них является более обоснованным?

Понятно, что нельзя использовать критерий совершенства в подыграх для исключения того или иного равновесия, поскольку в игре нет собственных подыгр. Можно утверждать лишь, что имеет преимущество равновесие по Нэшу, в котором игрок 1 имеет больший выигрыш, поскольку у него первый ход и он может диктовать ход игры. Еще более убедительный аргумент для исключения равновесия по Нэшу (b,R) следует из следующего замечания: если информационное множество игрока 2 когда-либо достигается, то нет причин полагать, что игрок 2 выберет R, поскольку вне зависимости от оценки игроком 2 того, в каком узле этого информационного множества он находится, ему выгоднее выбрать L. Более того, можно проверить, что профиль стратегий (m,L) согласован со следующей системой ожиданий μ: $\mu(C)=0$ и $\mu(B)=1$.

Что касается другого равновесия, (b,R), можно проверить, что любая система ожиданий согласована с профилем стратегий (b,R); см. упражнение 2 в конце раздела. Однако независимо от ожиданий игрока 2 в его информационном множестве $\{B,C\}$, он не должен играть R, если игра достигнет когда-либо этого информационного множества. Это происходит, поскольку его выигрыш больше при выборе L в зависимости от его ожиданий относительно того, в каком узле информационного множества он находится. Данное равновесие по Нэшу довольно трудно считать «обоснованным» решением игры. Пред-

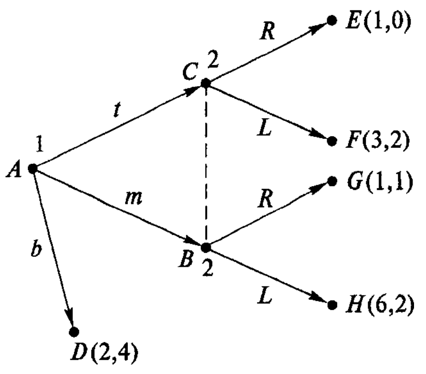


Рис. 8.7

ставляется, что единственное приемлемое равновесие в игре — это профиль стратегий (m,L)[1]. ■

Предшествующий пример преподносит нам несколько важных уроков. Во-первых, представляется, что согласованные ожидания — только первый шаг к обоснованному решению динамической игры. Во-вторых, равновесный по Нэшу профиль стратегий необязательно должен включать оптимальные действия в каждом информационном множестве. Выбор R в информационном множестве $\{B,C\}$ не является оптимальным. Следовало бы ожидать, что выбор оптимального действия при заданных ожиданиях — одно из требований к решению динамической игры. В следующих двух разделах мы как раз и будем заниматься поиском равновесия именно с этими свойствами.

Упражнения

1. Опишите ожидания μ, согласованные по Байесу с вполне смешанным профилем поведенческих стратегий, изображенным на дереве динамической игры на рис. 8.6.
2. Рассмотрим динамическую игру, представленную на рис. 8.7.
   (a) Покажите, что профили стратегий (m,L) и (b,R) — равновесия по Нэшу.
   (b) Равновесие по Нэшу (b,R) поддерживается профилем поведенческих стратегий $\pi=(\pi_1,\pi_2)$, заданным следующим образом:

$$\pi(t)=\pi(m)=\pi(L)=0 \text{ и } \pi(b)=\pi(R)=1 .$$

[1] Заметим, что приведенный пример типичен в том смысле, что любое равновесие по Нэшу можно реализовать как равновесие с согласованной системой ожиданий, определенной однозначно профилем равновесных стратегий на информационных множествах на равновесном пути (т.е. информационных множествах, которые достигаются с положительной вероятностью, если игра разыгрывается в соответствии с равновесным профилем стратегий). Поэтому «надстройка» над профилем равновесных по Нэшу стратегий в виде согласованной системы ожиданий всегда может быть найдена. То есть предположение о том, что игроки на каждом информационном множестве имеют ожидания, согласованные со стратегиями, не приводит само по себе к усилению концепции равновесия. — *Примеч. ред.*

Покажите, что любая система ожиданий μ согласована по Байесу с профилем поведенческих стратегий π. [Подсказка: пусть $\mu(C)=p$ и $\mu(B)=1-p$, где $0<p<1$. Рассмотрите последовательность $\{\pi_k\}$ вполне смешанных профилей поведенческих стратегий:

$$\pi_k(t)=\frac{p}{2k},\ \pi_k(m)=\frac{1-p}{2k},\ \pi_k(b)=1-\frac{1}{2k},$$

$$\pi_k(R)=1-\frac{1}{2k},\ \pi_k(L)=\frac{1}{2k}.$$

Если $\mu(C)=1$ и $\mu(B)=0$, то рассмотрите последовательность $\{\pi_k\}$ вполне смешанных профилей поведенческих стратегий в виде

$$\pi_k(t)=\frac{1}{2k},\ \pi_k(m)=\frac{1}{4k^2},\ \pi_k(b)=1-\frac{1}{2k}-\frac{1}{4k^2},$$

$$\pi_k(R)=1-\frac{1}{2k},\ \pi_k(L)=\frac{1}{2k}.$$

(c) Покажите, что профиль стратегий π, поддерживающий равновесие по Нэшу (m,L), заданный следующим образом:

$$\pi(b)=\pi(t)=\pi(R)=0 \text{ и } \pi(m)=\pi(L)=1,$$

согласован с системой ожиданий μ, такой что $\mu(B)=1$ и $\mu(C)=0$.

8.4. Ожидаемый выигрыш

В данном разделе мы покажем, как вычислять выигрыш игрока начиная с некоторого информационного множества. Мы сделаем это, обсудив сначала, как вычислять выигрыши, которые игроки получают в соответствии с профилем поведенческих стратегий. Такой профиль поведенческих стратегий может быть сочетанием либо чистых, либо смешанных стратегий. Напомним, что профиль стратегий, предписывающий выбор ребра с вероятностью 0 или 1, называется **профилем чистых стратегий**. Аналогично понятию смешанных стратегий из раздела 2.4, профиль стратегий, согласно которым выбор ребер осуществляется с вероятностями, отличными от 0 и 1, называется **профилем смешанных стратегий**. В дальнейшем под равновесным профилем стратегии будем понимать профиль смешанных стратегий. Если профиль поведенческих стратегий — сочетание чистых стратегий, то игра приходит к определенному терминальному узлу. В противном случае терминальные узлы достигаются с некоторой вероятностью, необязательно равной единице. Нужно описать результирующие выигрыши именно для этих случаев.

Рассмотрим динамическую игру n лиц с терминальными узлами $Z_1,\ldots,Z_l$ и n-мерными векторами выигрышей

$$u(Z_i)=(u_1(Z_i),\ldots,u_n(Z_i))$$

в этих терминальных узлах. Предположим также, что в игре определены профиль поведенческих стратегий π и система ожиданий μ. Для узла дерева игры N **ожидаемый выигрыш** (или **полезность**) в игре с началом в узле N — это n-мерный вектор

$$E(N,\pi) = (E_1(N,\pi), E_2(N,\pi), \ldots, E_n(N,\pi)) = \sum_{s=1}^{l} \pi(NZ_s)u(Z_s) =$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{l} \pi(NZ_s)u_1(Z_s), \sum_{s=1}^{l} \pi(NZ_s)u_2(Z_s), \ldots, \sum_{s=1}^{l} \pi(NZ_s)u_n(Z_s) \right).$$

В частности, ожидаемая полезность игрока i начиная с узла N является вещественным числом

$$E_i(N,\pi) = \sum_{s=1}^{l} \pi(NZ_s)u_i(Z_s).$$

Если $\mathcal{I} = \{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$ — информационное множество в динамической игре n лиц, то **ожидаемый выигрыш начиная с** $\mathcal{I}$ по отношению к паре (π,μ) определяется n-мерным вектором

$$E(\mathcal{I},\pi,\mu) = \sum_{r=1}^{m} \mu(N_r)E(N_r,\pi) = \sum_{r=1}^{m} \mu(N_r) \sum_{s=1}^{l} \pi(N_r Z_s)u(Z_s).$$

Это означает, что ожидаемый выигрыш игрока i при условии, что достигается информационное множество $\mathcal{I}$, является вещественным числом:

$$E_i(\mathcal{I},\pi,\mu) = \sum_{r=1}^{m} \mu(N_r)E_i(N_r,\pi) = \sum_{r=1}^{m} \mu(N_r) \sum_{s=1}^{l} \pi(N_r Z_s)u_i(Z_s).$$

Следующий пример иллюстрирует вычисление различных ожидаемых полезностей.

Пример 8.7. Рассмотрим игру с двумя участниками, изображенную на рис. 8.8, который также описывает профиль поведенческих стратегий π.

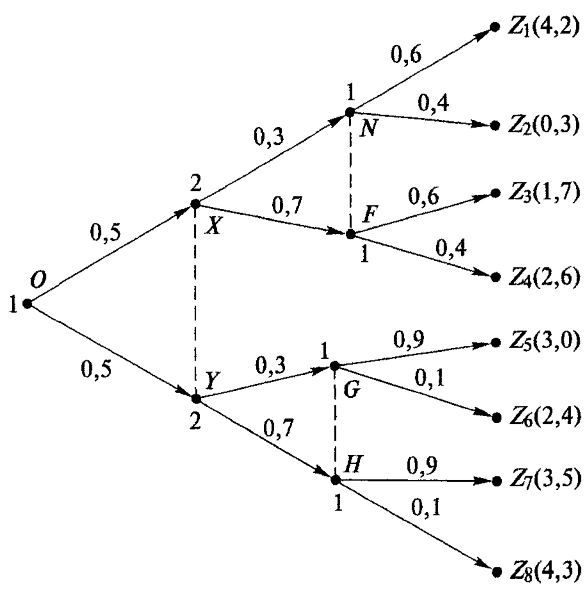


Рис. 8.8

Заметим, что

$$E(N,\pi) = 0,6(4,2)+0,4(0,3) = (2,4,\ 2,4),$$

$$E(F,\pi) = 0,6(1,7)+0,4(2,6) = (1,4,\ 6,6),$$

$$E(G,\pi) = 0,9(3,0)+0,1(2,4) = (2,9,\ 0,4),$$

$$E(H,\pi) = 0,9(3,5)+0,1(4,3) = (3,1,\ 4,8),$$

$$E(X,\pi) = 0,3E(N,\pi)+0,7E(F,\pi) = (1,7,\ 5,34),$$

$$E(Y,\pi) = 0,3E(G,\pi)+0,7E(H,\pi) = (3,04,\ 3,48),$$

$$E(O,\pi) = 0,5E(X,\pi)+0,5E(Y,\pi) = (2,37,\ 4,41).$$

Теперь предположим, что определена следующая система ожиданий: $\mu(X)=\mu(Y)=0,5$, $\mu(N)=0,2$, $\mu(F)=0,8$, $\mu(G)=0,15$ и $\mu(H)=0,85$. Если $\mathcal{I}_1=\{X,Y\}$, $\mathcal{I}_2=\{E,F\}$, $\mathcal{I}_3=\{G,H\}$, то

$$E(\mathcal{I}_1,\pi,\mu) = \mu(X)E(X,\pi)+\mu(Y)E(Y,\pi) =$$

$$= 0,5(1,7,\ 5,34)+0,5(3,04,\ 3,48) = (2,37,\ 4,41),$$

$$E(\mathcal{I}_2,\pi,\mu) = \mu(N)E(N,\pi)+\mu(F)E(F,\pi) =$$

$$= 0,2(2,4,\ 2,4)+0,8(1,4,\ 6,6) = (1,6,\ 5,76),$$

$$E(\mathcal{I}_3,\pi,\mu) = \mu(G)E(G,\pi)+\mu(H)E(H,\pi) =$$

$$= 0,15(2,9,\ 0,4)+0,85(3,1,\ 4,8) = (3,07,\ 4,14).$$

Этим исчерпывается вычисление ожидаемых полезностей. ■

Упражнения

1. Рассмотрите динамическую игру с несовершенной информацией, представленную на рис. 8.7, и следующий профиль поведенческих стратегий π и ожидания μ:

$$\pi(t)=\pi(m)=0,25,\ \pi(b)=0,5,\ \pi(R)=0,3,\ \pi(L)=0,7,$$

$$\mu(C)=0,8 \text{ и } \mu(B)=0,2.$$

(a) Покажите, что μ не согласована с π.

(b) Вычислите ожидаемый выигрыш в каждом информационном множестве игры.

2. Рассмотрите динамическую игру с несовершенной информацией, представленную на рис. 8.6. Игроку 2 принадлежит информационное множество $\mathcal{I}_1=\{X,Y\}$, а игроку 3 — информационное множество $\mathcal{I}_2=\{E,F,G,H\}$. Пусть π обозначает профиль поведенческих стратегий, показанный на дереве игры, и ожидания μ согласованы по правилу Байеса с профилем π. Найдите ожидаемые выигрыши $E(\mathcal{I}_1,\pi,\mu)$ и $E(\mathcal{I}_2,\pi,\mu)$.

3. Рассмотрите динамическую игру, представленную на рис. 8.7. Пусть $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ — следующий профиль стратегий:

$$\pi(b) = \pi(t) = 0\ ,\ \pi(m) = 1\ ,\ \pi(r) = q\ ,\ \pi(L) = 1 - q\ .$$

Кроме того, рассмотрим ожидания $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, заданные следующим образом:

$$\mu(C) = p \text{ и } \mu(B) = 1 - p\ .$$

(a) Вычислите ожидаемый вектор выигрышей $E(A, \pi)$.
(b) Пусть $\mathcal{I} = \{B, C\}$, вычислите ожидаемый вектор выигрышей $E(\mathcal{I}, \pi, \mu)$. [Ответ: $E(\mathcal{I}_1, \pi, \mu) = (6 - 3p - 5q + 3pq, 2 - q - pq)$.]
(c) Покажите, что если $0 < q \le 1$, то игрок 2 может увеличить свой выигрыш, изменив свой профиль поведенческих стратегий.
(d) Докажите, что максимум ожидаемого выигрыша игрока 2 достигается при $q = 0$, т.е. когда игрок 2 выбирает R с вероятностью 0 и L с вероятностью 1.

8.5. Секвенциальное равновесие

Предположим, что динамическая игра n лиц с терминальными узлами $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_l\}$ разыгрывается в соответствии с профилем поведенческих стратегий $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ и системой ожиданий $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Если игрок знает это, то единственно важной для игрока информацией об исходе игры оказывается его ожидаемый выигрыш. По сути дела, как мы только что видели в предыдущем разделе, в любом информационном множестве игры $\mathcal{I} = \{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$, как только оно достигнуто, каждый игрок i в точности знает свой ожидаемый выигрыш, а именно:

$$E_i(\mathcal{I}, \pi, \mu) = \sum_{r=1}^{m} \mu(N_r) E_i(N_r, \pi) = \sum_{r=1}^{m} \mu(N_r) \sum_{s=1}^{l} \pi(N_r Z_s) u_i(Z_s)\ .$$

Поскольку цель каждого участника — максимизация его ожидаемого выигрыша, ему оказывается выгодным изменить свою поведенческую стратегию в некоторых его информационных множествах, если это изменение (при условии, что остальные игроки не изменят свои) приведет к более высокому ожидаемому выигрышу. Будем говорить, что игрок может **извлечь выгоду** в процессе игры, если, изменив свою поведенческую стратегию в некоторых информационных множествах, он увеличит свой ожидаемый выигрыш при условии, что все остальные игроки придерживаются прежних поведенческих стратегий.

Теперь можно утверждать, что «рациональные» игроки будут разыгрывать профиль поведенческих стратегий π, такой что никто не сможет увеличить свой ожидаемый выигрыш в любом информационном множестве, изменив свою поведенческую стратегию в своих информационных множествах (при условии, что другие игроки продолжат играть в соответствии с π). Заметим, что это модификация классической концепции равновесия по Нэшу с целью приспособить ее к структуре динамической игры. И наконец, мы готовы ввести понятие секвенциального равновесия. (Обращаем внимание читателя, что, следуя общепринятому в теории игр обозначению, мы будем записывать $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) = (\pi_{-i}, \pi_i)$, где π_{-i} обозначает поведенческие стратегии всех игроков, за исключением игрока *i*.)

Определение 8.8. ***Секвенциальное равновесие*** *в динамической игре n лиц — это пара* (π^*, μ^*), *где* π^* *— профиль поведенческих стратегий, а* μ^* *— ожидания, такие что*

(1) *ожидания* μ^* *согласованы с* π^*;

(2) *ни один из игроков не может извлечь выгоду путем уклонения от* π^* *в каком-либо его информационном множестве, в то время как профили поведенческих стратегий остальные игроков и ожидания* μ^* *неизменны. То есть для любого игрока i и любого информационного множества* $\mathcal{I}$, *принадлежащего игроку i, имеет место*

$$E_i(\mathcal{I}, (\pi_{-i}^*, \pi_i^*), \mu^*) \geq E_i(\mathcal{I}, (\pi_{-i}^*, \pi_i), \mu^*)$$

для всех профилей поведенческих стратегий π *игрока i.*

Таким образом, профиль поведенческих стратегий и система ожиданий — секвенциальное равновесие динамической игры, если начиная с любого информационного множества этой игры профиль стратегий остается равновесным профилем стратегий при данной системе ожиданий. Следовательно, секвенциальное равновесие является решением, опирающимся на сильную концепцию секвенциальной рациональности. Теперь мы можем сказать, что участники динамической игры **секвенциально рациональны**, если они играют секвенциальное равновесие.

Поскольку в секвенциальном равновесии ожидания согласуются с профилями стратегий, они последовательно пересматриваются в процессе игры. С учетом этих пересмотренных ожиданий и профиля стратегий используемые игроком поведенческие стратегии максимизируют его ожидаемый выигрыш в каждом его информационном множестве. Таким образом, в процессе игры у игроков нет причин уклоняться от их стратегий в любом информационном множестве.

Это должно бы сразу же напомнить нам определение совершенного в подыграх равновесия, так как совершенное в подыграх равновесие можно понимать как обладающее подобным свойством, но только для одноэлементных информационных множеств, являющихся начальными узлами подыгр. Действительно, заметим, что понятие секвенциального равновесия обобщает понятие совершенного в подыграх равновесия на динамические игры вида, которые могут и не иметь собственных подыгр[1]. В действительности нетрудно

[1] Следует правильно понимать это утверждение: секвенциальная рациональность — более сильный тест, чем тест, лежащий в основе концепции совершенного в подыграх равновесия. Так, ему могут не удовлетворять совершенные в подыграх равновесия даже в играх с богатым множеством собственных подыгр. — *Примеч. ред.*

убедиться в том, что секвенциальные равновесия — всегда совершенные в подыграх равновесия. Доказательство этого факта идейно простое, не должно вызывать затруднений, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Теорема 8.9. *Любое секвенциальное равновесие является совершенным в подыграх равновесием и, следовательно, также равновесием по Нэшу.*

Всегда ли существуют секвенциальные равновесия? Ответ на вопрос положителен и был получен Д.М. Крепсом к З. Уилсоном в работе [46], где авторы ввели понятие секвенциального равновесия. Этот результат, однако, справедлив только для игр с совершенной памятью, так как в гл. 4 мы обнаружили, что в играх с несовершенной памятью равновесия в поведенческих стратегиях может не существовать.

Напомним, что в динамической игре с совершенной памятью игроки всегда помнят о ходах, сделанных на предыдущих стадиях игры. Дадим альтернативное, но эквивалентное определение игры с совершенной памятью. Говорят, что информационное множество $\mathcal{I}$ (принадлежащее игроку i) имеет **совершенную память**, если выполнено следующее свойство.

- *Если узел N' информационного множества $\mathcal{I}'$ игрока i является предшественником узла $N \in \mathcal{I}$, причем единственный путь из N' в N начинается со стратегии s, то каждый узел $M \in \mathcal{I}$ имеет предшественника $M' \in \mathcal{I}'$, такого что путь из M' в M также начинается со стратегии s.*

Теперь мы можем определить динамические игры с совершенной памятью.

Определение 8.10. *Динамическая игра является игрой с* ***совершенной памятью****, если каждое информационное множество имеет совершенную память.*

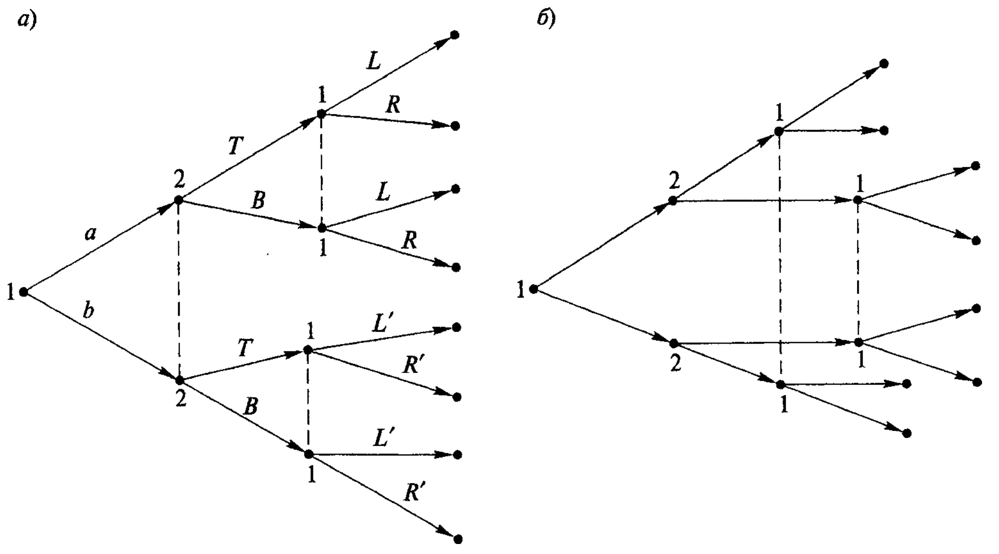


Рис. 8.9. Информационные множества игры с совершенной памятью (*а*); информационные множества игры с несовершенной памятью (*б*)

Различие между информационными множествами с совершенной памятью и информационными множествами общего вида предоставлено на рис. 8.9. Можно заметить, что этот рисунок в точности воспроизводит рис. 4.33. На рис. 8.9, *б* игрок 1 забывает свой выбор в начальном узле.

Теперь приведем результат, который показывает, что любая динамическая игра с совершенной памятью имеет секвенциальное равновесие. Поскольку любое секвенциальное равновесие также является совершенным в подыграх равновесием, данный результат справедлив для динамических игр как с совершенной, так и несовершенной информацией. Доказательство представлено в гл. 9, теорема 9.31.

Теорема 8.11 (существование секвенциального равновесия). *Любая динамическая игра n лиц с совершенной памятью имеет секвенциальное равновесие.*

В следующем примере будет найдено секвенциальное равновесие динамической игры, в которой нет собственных подыгр и отсутствуют равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

Пример 8.12. Рассмотрим динамическую игру с несовершенной информацией, изображенную на рис. 8.10. Проверьте самостоятельно, что в ней нет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях; см. упражнение 1 в конце раздела. Заметим, что это игра с совершенной памятью.

Рассмотрим профиль поведенческих стратегий $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ вида

$$\pi_1(b) = 1,\ \pi_1(a) = 0,\ \pi_1(L) = 1,\ \pi_1(R) = 0,\ \pi_1(L') = \frac{1}{6},\ \pi_1(R') = \frac{5}{6},$$

и

$$\pi_2(T) = \pi_2(B) = \frac{1}{2}.$$

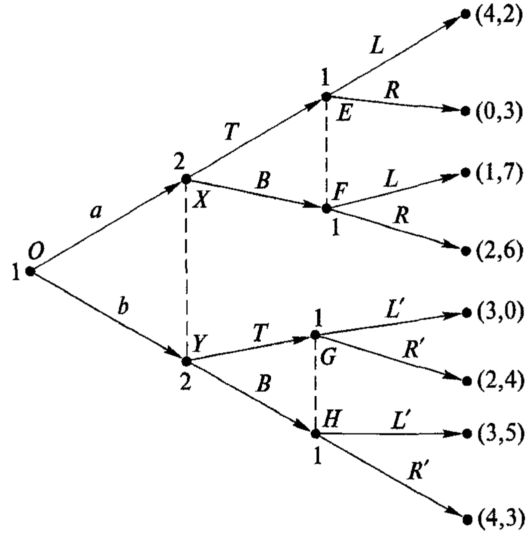


Рис. 8.10

Утверждается, что система ожиданий μ, согласованная с профилем π, имеет вид

$$\mu_2(X) = 0,\ \mu_2(Y) = 1 \text{ на информационном множестве } \{X, Y\},$$

$$\mu_1(G) = \frac{1}{2},\ \mu_1(H) = \frac{1}{2} \text{ на информационном множестве } \{G, H\},$$

$$\mu_1(E) = \frac{1}{2},\ \mu_1(F) = \frac{1}{2} \text{ на информационном множестве } \{E, F\}.$$

Можно проверить это, рассмотрев последовательность вполне смешанных профилей поведенческих стратегий $\{\pi_k\} = \{(\pi_1^k, \pi_2^k)\}$, заданную выражениями

$$\pi_1^k(b) = 1 - \frac{1}{2k},\ \pi_1^k(a) = \frac{1}{2k},$$

$$\pi_1^k(L') = \frac{1}{6},\ \pi_1^k(R') = \frac{5}{6},$$

$$\pi_1^k(L) = 1 - \frac{1}{2k}, \pi_1^k(R) = \frac{1}{2k},$$

$$\pi_2^k(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k},\ \pi_2^k(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}.$$

Эта последовательность сходится к профилю стратегий $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. Более того, прямые вычисления позволяют заключить, что следующие ожидания $\{\mu^{\pi_k}\}$ согласованы по правилу Байеса с π_k:

$$\mu_2^{\pi_k}(Y) = 1 - \frac{1}{2k},\ \mu_2^{\pi_k}(X) = \frac{1}{2k},$$

$$\mu_1^{\pi_k}(G) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k},\ \mu_1^{\pi_k}(H) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k},$$

$$\mu_1^{\pi_k}(E) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k},\ \mu_1^{\pi_k}(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}.$$

Поскольку данные последовательности сходятся к системе ожиданий μ, тем самым показано, что μ согласована с π.

Утверждается, что пара (π,μ) образует секвенциальное равновесие игры. Для этого необходимо показать, что в каждом информационном множестве поведенческая стратегия π максимизирует ожидаемый выигрыш игроков при системе ожиданий μ.

Шаг I. *Рассмотрим информационное множество* $\mathcal{I} = \{G, H\}$.

Ясно, что $\mathcal{I}$ принадлежит игроку 1, поэтому имеем: $\mu_1(G) = \mu_1(H) = \frac{1}{2}$.

Произвольное распределение вероятностей π' на ребрах этого информационного множества имеет вид $\pi'(L') = p$ и $\pi'(R') = 1 - p$, где $0 \le p \le 1$. Ожидаемый выигрыш игрока 1 при использовании этой поведенческой стратегии составляет

$$E(p,\mathcal{I}) = \frac{1}{2}[3p + 2(1-p)] + \frac{1}{2}[3p + 4(1-p)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(3p + 2 - 2p) + [3p + 4 - 4p)] = 3\,,$$

и не зависит от значения p. Отсюда следует, что игрок 1 не может получить выгоды путем выбора поведенческой стратегии, отличной от

$$\pi_1(L') = \frac{1}{6} \text{ и } \pi_1(R') = \frac{5}{6}\,.$$

Шаг II. *Рассмотрим информационное множество* $\mathcal{I}_1 = \{E, F\}$.

Для информационного множества $\mathcal{I}_1$ выполнено $\mu_1(E) = \mu_1(F) = \frac{1}{2}$. Ясно, что произвольное распределение вероятностей π' на множестве ребер $\mathcal{I}_1$ имеет вид $\pi'(L) = p$ и $\pi'(R) = 1 - p$, где $0 \le p \le 1$. Поэтому ожидаемый выигрыш игрока 1 при π' на множестве ребер $\mathcal{I}_1$ равен

$$E(p,\mathcal{I}_1) = \frac{1}{2}[4p + 0 \times (1-p)] + \frac{1}{2}[p + 2(1-p)] = 1 + \frac{3}{2}p \le 2{,}5\,.$$

Из этого вытекает, что максимизирующий ожидаемый выигрыш игрока 1 профиль стратегий предписывает выбирать L с вероятностью 1 и R с вероятностью 0, поскольку это дает наибольший ожидаемый выигрыш в размере 2,5.

Шаг III. *Рассмотрим информационное множество* $\mathcal{I}_2 = \{X, Y\}$.

Данное информационное множество принадлежит игроку 2. Так как $\mu_2(Y) = 1$, ожидаемый выигрыш игрока 2 зависит от того, как будет вести себя игра начиная с узла Y. Произвольное распределение вероятностей π' на множестве ребер $\mathcal{I}_2$ удовлетворяет условиям $\pi'(T) = p$ и $\pi'(B) = 1 - p$, где $0 \le p \le 1$. Вычисляя ожидаемый выигрыш игрока 2 в информационном множестве $\mathcal{I}_2$, получаем

$$E(p,\mathcal{I}_2) = \frac{1}{2}\left[p \times \frac{1}{6} \times 0 + p \times \frac{5}{6} \times 4 + (1-p)\frac{1}{6} \times 5 + (1-p)\frac{5}{6} \times 3\right] = \frac{5}{3}\,.$$

Снова значение ожидаемого выигрыша не зависит от p, поэтому игрок 2 не может получить выгоду при отклонении от $\pi_2(T) = \pi_2(B) = \frac{1}{2}$.

Шаг IV. *Рассмотрим информационное множество, состоящее из одного корня.*

В этом случае, если игрок 1 будет играть a с вероятностью p и b с вероятностью $1 - p$, то легко вычислить его ожидаемый выигрыш:

$$E(p,O) = \frac{5}{2} \times p + 3(1-p) = 3 - \frac{p}{2}\,.$$

Выражение достигает максимума при $p = 0$, откуда следует, что игроку 1 нужно играть a с вероятностью 0 и b с вероятностью 1. Таким образом, оптимальным для игрока 1 в начале игры является выбор b.

Итак, мы убедились в том, что ни одному из игроков не выгодно отклоняться от π ни в одном из информационных множеств. Поэтому пара (π,μ) действительно является секвенциальным равновесием, поскольку эта пара секвенциально рациональна. ■

В теореме 8.9 утверждается, что секвенциальное равновесие всегда совершенно в подыграх. Отсюда возникает вопрос, всегда ли совершенное в подыграх равновесие является секвенциальным равновесием? Следующий пример показывает, что это не так.

Пример 8.13. Рассмотрим динамическую игру с несовершенной информацией, изображенную на рис. 8.11. Заметим, что в игре есть только одна собственная подыгра, которая имеет начало в узле X. Легко проверить, что профили стратегий $(\{b\},\{T,L\})$ и $(\{a\},\{T,R\})$ — совершенные в подыграх равновесия. Утверждается, что

(1) совершенное в подыграх равновесие $(\{b\},\{T,L\})$ поддерживается профилем стратегий $\pi=(\pi_1,\pi_2)$ вида

$$\pi_1(b)=1\,,\ \ \pi_1(a)=\pi_1(c)=0\,,$$

и

$$\pi_2(T)=1\,,\ \ \pi_2(B)=0\,,\ \ \pi_2(R)=0\,,\ \ \pi_2(L)=1\,.$$

Система ожиданий $\mu=(\mu_1,\mu_2)$ на информационном множестве $\{Y,Z\}$, имеющая вид

$$\mu_2(Y)=0\,,\ \ \mu_2(Z)=1\,,$$

согласована с профилем стратегий π, и пара (π,μ) является секвенциальным равновесием;

(2) совершенное в подыграх равновесие $(\{a\},\{T,R\})$ не является секвенциальным равновесием.

Проверим каждое утверждение в отдельности. Покажем сначала, что пара (π,μ) — секвенциальное равновесие. Рассмотрим последовательность вполне смешанных профилей стратегий $\{\pi_k=(\pi_1^k,\pi_2^k)\}$, определенную следующим образом:

$$\pi_1^k(b)=1-\frac{1}{k}\ \ \text{и}\ \ \pi_1^k(a)=\pi_1^k(c)=\frac{1}{2k}$$

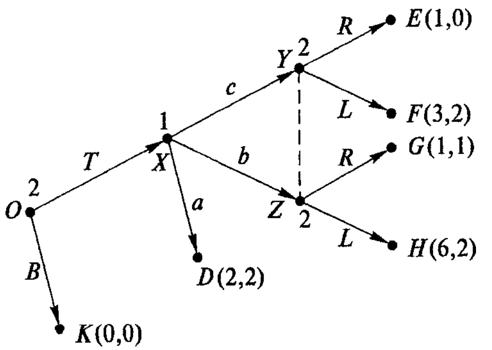


Рис. 8.11

и

$$\pi_2^k(T)=1-\frac{1}{k}\,,\ \pi_2^k(B)=\frac{1}{k}\,,\ \pi_2^k(R)=\frac{1}{k}\ \text{ и }\ \pi_2^k(L)=1-\frac{1}{k}\,.$$

Очевидно, что $\pi^k \to \pi$.

Непосредственные вычисления ожиданий $\mu^{\pi_k}=(\mu_1^{\pi_k},\mu_2^{\pi_k})$, согласованных по правилу Байеса с π^k, показывают, что для информационного множества $\{Y,Z\}$ имеет место:

$$\mu_2^{\pi_k}(Y)=\frac{\pi_1^k(c)}{\pi_1^k(c)+\pi_1^k(b)}=\frac{\frac{1}{2k}}{1-\frac{1}{2k}}\to 0=\mu_2(Y)$$

и

$$\mu_2^{\pi_k}(Z)=\frac{\pi_1^k(b)}{\pi_1^k(c)+\pi_1^k(b)}=\frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{2k}}\to 1=\mu_2(Z)\,.$$

Это показывает, что система ожиданий μ согласована с профилем стратегий π. Теперь убедимся, что пара (π,μ) удовлетворяет условию максимизации ожидаемого выигрыша.

Если игрок 2 выбирает R с вероятностью p и L с вероятностью $1-p$, то его ожидаемый выигрыш в информационном множестве $\{Y,Z\}$ составляет

$$E(Y,Z)=p\times 1+(1-p)\times 2=2-p\,.$$

Ясно, что максимум этого выражения достигается при $p = 0$. Это значит, что игрок 2 не может получить выгоды при отклонении от профиля стратегий π_2 в информационном множестве $\{Y,Z\}$.

Предположим, что игрок 1 в узле X выбирает c с вероятностью p_1, b с вероятностью p_2 и a с вероятностью $1-p_1-p_2$. Тогда его ожидаемый выигрыш начиная от узла X равен

$$E(X)=p_1\times 3+p_2\times 6+(1-p_1-p_2)\times 2=2+p_1+4p_2\,.$$

Принимая во внимание ограничения $p_1\ge 0$, $p_2\ge 0$ и $p_1+p_2\le 1$, получаем, что $E(X)$ достигает максимума при $p_1=0$ и $p_2=1$. Отсюда следует, что игрок 1 не может получить выгоды при отклонении от своей поведенческой стратегии в узле X.

Наконец, предположим, что в узле O игрок 2 выбирает T с вероятностью q и B с вероятностью $1-q$. Тогда его ожидаемый выигрыш в узле O имеет вид

$$E(O)=q\times 2+(1-q)\times O=2q\,.$$

Очевидно, максимум $E(O)$ достигается в точке $q = 1$, и поэтому игроку 2 невыгодно изменять свою стратегию в узле O.

Тем самым установлено, что $(\{b\},\{T,L\})$ является секвенциальным равновесием.

Теперь покажем, что совершенное в подыграх равновесие $(\{a\},\{T,R\})$ не может быть секвенциальным равновесием. Пусть π' — произвольное распределение вероятностей на информационном множестве $\{Y,Z\}$; предположим, что $\pi'(Y)=s$ и $\pi'(Z)=1-s$. Будем считать также, что выбор игроком 2 стратегии R с вероятностью p и стратегии L с вероятностью $1-p$ максимизирует его ожидаемый выигрыш в информационном множестве $\{Y,Z\}$. Он задается выражением

$$E(Y,Z)=s[p\times 0+(1-p)\times 2]+(1-s)[p\times 1+(1-p)\times 2]=$$
$$=2-(1+s)p.$$

Ясно, что максимум функции $E(Y,Z)$ соответствует значению $p=0$. Следовательно, игрок 2 может увеличить свой ожидаемый выигрыш при отклонении от своего профиля стратегий ($\pi_2(R)=1$ и $\pi_2(L)=0$). Поэтому совершенное в подыграх равновесие $(\{a\},\{T,R\})$ не может быть секвенциальным равновесием, так как игроку 2 выгодно сменить стратегию в информационном множестве $\{Y,Z\}$. ■

Упражнения

1. Убедитесь, что в динамической игре с несовершенной информацией, представленной на рис. 8.10, нет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях.
2. Рассмотрим динамическую игру с несовершенной информацией, представленную на рис. 8.11. Убедитесь, что профили стратегий $(\{b\},\{T,L\})$ и $(\{a\},\{T,R\})$ являются совершенными в подыграх равновесиями. Покажите, что других равновесий по Нэшу в чистых стратегиях нет.
3. Рассмотрим динамическую игру, представленную на рис. 8.7. Проверьте, что пара (π,μ), где

$$\pi(b)=\pi(t)=\pi(R)=0,\ \pi(m)=\pi(L)=1,$$

и

$$\mu(B)=1 \text{ и } \mu(C)=0,$$

— секвенциальное равновесие.

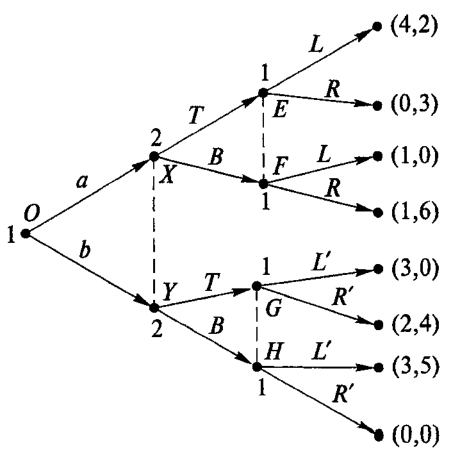


Рис. 8.12

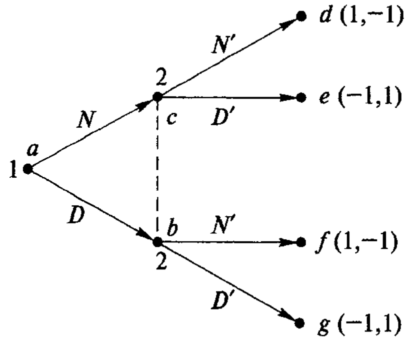


Рис. 8.13

4. Рассмотрим игру из рис. 8.12. Покажите, что пара (π,μ), где профиль поведенческих стратегий π имеет вид

$$\pi(a) = \pi(T) = \pi(R) = \pi(R') = 0\,,$$

$$\pi(b) = \pi(B) = \pi(L) = \pi(L') = 1\,,$$

а ожидания μ удовлетворяют соотношениям

$$\mu(X) = \mu(E) = \mu(G) = 0 \;\text{ и }\; \mu(Y) = \mu(F) = \mu(H) = 1\,,$$

— секвенциальное равновесие.

5. Рассмотрим динамическую версию игры «Орел или решка»[1], изображенную на рис. 8.13.
   (a) Покажите, что в игре существует только два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях (N, D') и (D, D').
   (b) Предположим, что игрок 1 выбирает N с вероятностью α, а игрок 2 выбирает N' с вероятностью β; т.е. профиль поведенческих стратегий данной игры — это пара (α,β). Кроме того, пусть ожидания μ на информационном множестве $\mathcal{I} = \{b,c\}$ порождаются профилем (α,β); т.е. $\mu(c) = \alpha$ и $\mu(b) = 1-\alpha$. Покажите, что пары $((\alpha,0),\mu)$ — все секвенциальные равновесия в игре.
6. Рассмотрим игру «Говорить правду» («Truth telling»), представленную на рис. 8.14. Покажите, что профиль стратегий $(G,T,\{b,d'\})$ является равновесием по Нэшу, которое можно реализовать как секвенциальное равновесие.
7. Вернемся к игре на рис. 8.14. Предположим, что игрок 2 при низких затратах может выяснить, правду ли говорит игрок 1. Изменит ли это характер равновесия? Поясните. [Подсказка: теперь это игра с совершенной информацией.]
8. Рассмотрите динамическую игру с совершенной памятью. Предположим, что узел N — одноэлементное информационное множество, т.е. $\{N\}$ — информационное множество. Покажите, что если N имеет

[1] Другие варианты названия игры «Орлянка», «Угадай монетку». — *Примеч. пер.*

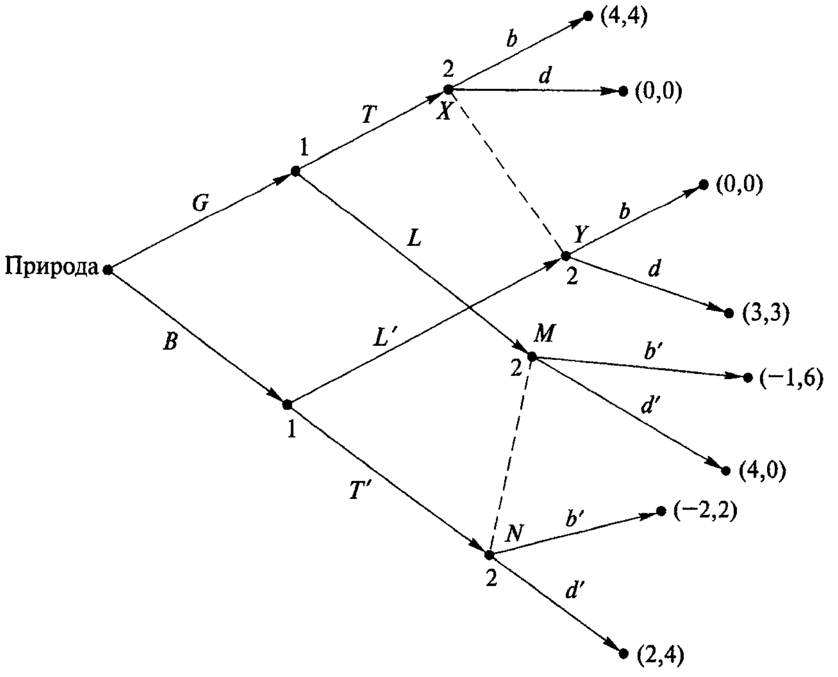


Рис. 8.14

наследника в информационном множестве $\mathcal{I}$, то все узлы множества $\mathcal{I}$ также должны быть наследниками N.

9. Докажите теорему 8.9. То есть покажите, что любое секвенциальное равновесие является совершенным в подыграх равновесием в том смысле, что ограничение равновесия на подыгру остается секвенциальным равновесием в этой подыгре.

8.6. Совершенное байесовское равновесие

После того как мы рассмотрели понятие секвенциального равновесия, переходим к обсуждению несколько более слабой концепции равновесия, а именно концепции совершенного байесовского равновесия для игр с несовершенной информацией. Как мы увидим, различие между концепциями секвенциального равновесия и совершенного байесовского равновесия состоит в том, что последнее не требует проверки согласованности ожиданий[1]. Но основная идея секвенциальной рациональности, согласно

[1] Точнее, не требует проверки согласованности ожиданий со стратегиями на информационном множестве вне равновесного пути. Но на информационных множествах на равновесном пути (т.е. информационных множествах, которые при данном равновесном профиле стратегий достигаются с положительной вероятностью) такая согласованность обеспечивается собственно статусом этого профиля стратегий (как равновесного по Нэшу) при любом равновесном по Нэшу профиле стратегий. Либо, что эквивалентно, тем фактом, что в своих информационных множествах игроки делают «наилучшие» для себя выборы (см. далее). — *Примеч. ред.*

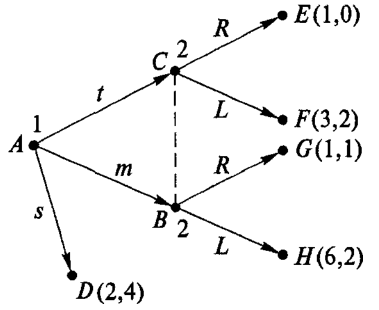


Рис. 8.15

которой ожидания на информационных множествах определяются правилом Байеса для условных вероятностей, при этом сохраняется. Исследуем различия между двумя понятиями на примере динамической игры из примера 8.6.

Уже отмечалось, что у этой динамической игры есть две равновесные точки, (s,R) и (m,L). Кроме того, мы обращали внимание на то, что равновесие по Нэшу (m,L) является намного более обоснованным, поскольку если мы используем идею секвенциальной рациональности, воплощенной в концепции секвенциального равновесия, то получим именно это равновесие. Другое равновесие (s,R) не было бы логичным. Теперь рассмотрим ситуацию, в которой структура ожиданий на информационных множествах по-прежнему порождается профилем поведенческих стратегий, однако *необязательно вполне смешанным профилем поведенческих стратегий*. Далее, для каждого такого профиля поведенческих стратегий π пусть μ^{π} обозначают ожидания на информационных множествах, порожденные профилем π. В игре на рис. 8.15 для профиля поведенческих стратегий (s,R), в силу того что информационное множество $\{B,C\}$ никогда не достигается, можно утверждать, что любые ожидания во множестве $\{B,C\}$ были бы согласованы с профилем стратегий (s,R), если это информационное множество когда-либо будет достигнуто (например, в результате ошибки). Но так как игрок 2 всегда выбирает L в случае достижения информационного множества $\{B,C\}$, игроку 1 следует выбирать m, а не s. Таким образом, в этой игре секвенциальная рациональность исключает равновесие (s,R), поскольку выбор s никогда не является рациональным. Суть примера состоит в том, чтобы исключить неправдоподобные равновесные точки.

Логично было бы утверждать, что данная игра — это игра, в которой L доминирует R вне зависимости от ожиданий игрока 2 на информационном множестве $\{B,C\}$. С другой стороны, рассмотрим вариант игры, изображенный на рис. 8.16. В этом случае, если ожидания на информационном множестве $\{B,C\}$ будут заданы неравенствами $\mu(C) > \frac{1}{3}$ и $\mu(B) < \frac{2}{3}$, то выбор игрока 2 будет рациональным, если он выберет R, а не L. В этом случае поведенческая стратегия (s,R) уже не является неправдоподобной и секвенциально рациональна. В самом деле, можно проверить, что (s,R) теперь также является

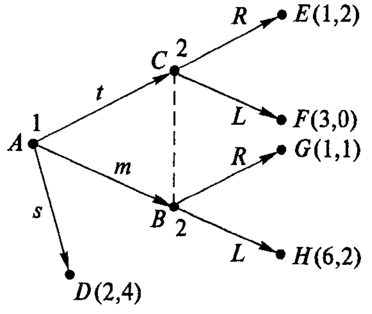


Рис. 8.16

секвенциальным равновесием[1]. Это указывает на то, что идея секвенциальной рациональности довольно сильна сама по себе и нет необходимости дополнительно требовать согласованности оценок, для того чтобы исключать неправдоподобные равновесия[2].

При определении понятия секвенциального равновесия мы показали, как профиль поведенческих стратегий $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n)$ для заданной динамической игры n лиц индуцирует вероятности достижения каждого узла на дереве игры. Следовательно, при заданном профиле поведенческих стратегий каждому узлу соответствует априорная вероятность его достижения начиная с корня дерева игры, и эта вероятность может быть нулевой. Для заданного профиля поведенческих стратегий π будет обозначать эту априорную вероятность достижения узла N_r через $\pi(N_r)$.

Рассмотрим информационное множество $\mathcal{I}=\{N_1,N_2,\ldots,N_l\}$. Если вероятность достижения некоторого узла в $\mathcal{I}$ положительна, то при достижении информационного множества $\mathcal{I}$ скорректированные ожидания игрока, которому принадлежит ход в этом информационном множестве, задаются теоремой Байеса. То есть

$$P(N_r|\mathcal{I})=\frac{\pi(N_r)}{\sum_{s=1}^{l}\pi(N_s)}$$

для каждого $r=1,\ldots,l$.

[1] Точнее, поведенческая стратегия (s,R) вместе соответствующими ожиданиями $\mu(C)\geq\frac{1}{3}, \mu(C)+\mu(B)=1$ — секвенциальные равновесия (поскольку секвенциальные равновесия — это пара: стратегии и ожидания). — *Примеч. ред.*

[2] В дополнение к замечанию в сноске 1 на с. 447 заметим также, что секвенциальная рациональность на равновесном пути фактически подразумевается концепцией равновесия по Нэшу. Точнее, справедливо утверждение: профиль (поведенческих) стратегий является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда найдется система ожиданий, согласованная с профилем стратегий на равновесном пути (так называемая слабая согласованность ожиданий и стратегий); профиль стратегий секвенциально рационален на информационных множествах на равновесном пути. Таким образом, концепция совершенного байесовского равновесия требует дополнительно, чтобы профиль стратегий был секвенциально рациональным и на информационных множествах вне равновесного пути, а концепция секвенциального равновесия — еще, кроме того, чтобы ожидания были согласованы с профилем стратегий на всех информационных множествах (согласованности ожиданий и стратегий). — *Примеч. ред.*

Если вероятность достижения $\mathcal{I}$ равна нулю, когда игроки используют профиль поведенческих стратегий π, то вероятность достижения какого-либо узла из $\mathcal{I}$ также равна нулю. В этом случае при достижении $\mathcal{I}$ игрок, делающий ход в этом информационном множестве, может иметь любые ожидания относительно узлов в $\mathcal{I}$.

Определение 8.14. *Пусть π — профиль поведенческих стратегий в динамической игре n лиц. Тогда π порождает* ***систему ожиданий*** *μ^{π} на информационном множестве $\mathcal{I} = \{N_1, N_2, \ldots, N_l\}$, если для любого N_r, содержащегося* ***в данном*** *информационном множестве, априорная вероятность достижения N_r, величина $\pi(N_r) > 0$, задается выражением*

$$\mu^{\pi}(N_r) = P(N_r|\mathcal{I}) = \frac{\pi(N_r)}{\sum_{s=1}^{l} \pi(N_s)}.$$

Если априорные вероятности $\pi(N_r) = 0$ для всех узлов $N_r \in \mathcal{I}$, то ожидания в $\mathcal{I}$ — произвольное вероятностное распределение.

Ясно, что это является обобщением понятия ожиданий, согласованных с профилем поведенческих стратегий, при рассмотрении не только вполне смешанных стратегий, а всех поведенческих стратегий. Теперь мы подошли к основной идее концепции равновесия, которую собирались обсудить в этом разделе.

Определение 8.15. ***Совершенное байесовское равновесие*** *динамической игры n лиц — это пара (π^*, μ^*), где π^* — профиль поведенческих стратегий, а μ^* — ожидания, такие что*

(1) *ожидания μ^* порождены π^*;*

(2) *ни один из игроков не может получить выгоды путем отклонения от π^* в каких-либо его информационных множествах, в то время как профили поведенческих стратегий остальные игроков и ожидания μ^* неизменны. То есть для любого игрока i и любого информационного множества $\mathcal{I}$, принадлежащего игроку i, выполнено*

$$E_i(\mathcal{I}, (\pi_{-i}^*, \pi_i^*), \mu^*) \geq E_i(\mathcal{I}, (\pi_{-i}^*, \pi_i), \mu^*)$$

для всех профилей поведенческих стратегий π игрока i.

Понятие совершенного байесовского равновесия, таким образом, содержит все те элементы, которые хотелось бы видеть в концепции равновесия, включающей все основные элементы секвенциальной рациональности. Таким образом, по ходу динамической игры участники корректируют свои ожидания в каждом информационном множестве, которого они достигают, и в каждом из информационных множеств они действуют оптимально.

Вернемся к игре примера из 8.13. Мы уже показали, что совершенное в подыграх равновесие необязательно является секвенциальным равновесием, но секвенциальное равновесие всегда совершенно в подыграх. Теперь проиллюстрируем эти факты для совершенного байесовского равновесия.

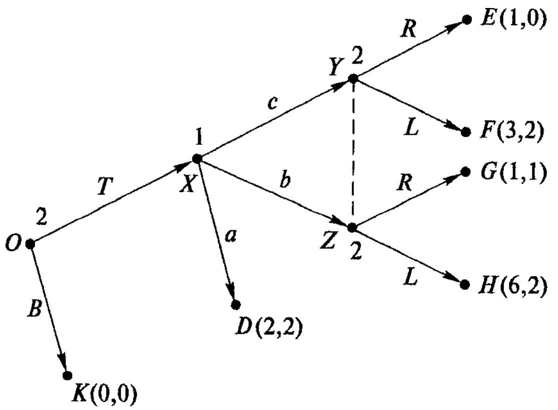


Рис. 8.17

Пример 8.16. Рассмотрим динамическую игру с несовершенной информацией, изображенную на рис. 8.17. Напомним, что у этой игры есть единственная собственная подыгра, которая начинается в узле X, и профили стратегий $(\{b\},\{T,L\})$ и $(\{a\},\{T,R\})$ — совершенные в подыграх равновесия. Мы утверждаем, что профиль стратегий $(\{b\},\{T,L\})$ — единственное совершенное байесовское равновесие в этой игре.

(1) Для начала заметим, что при любых ожиданиях на информационном множестве $\{Y,Z\}$ оптимальным выбором игрока 2 является стратегия L, поскольку она доминирует R в обоих узлах, Y и Z.

(2) Тогда, если очевидно, что игрок 2 в информационном множестве $\{Y,Z\}$ выберет L, игроку 1 следует выбирать b в узле X.

(3) Но это означает, что игрок 2 должен выбирать T в узле O, корне дерева игры.

(4) Эта последовательность оптимальных выборов в каждом из информационных множеств игры показывает, что профиль стратегий $(\{b\},\{T,L\})$ совместно с системой ожиданий $\mu=\{(\mu(X)=1),(\mu(Y)=0,\mu(Z)=1)\}$ образуют совершенное байесовское равновесие рассматриваемой динамической игры.

Заметим теперь, что профиль стратегий $(\{a\},\{T,R\})$, который является совершенным в подыграх равновесием, совершенным байесовским равновесием не будет, так как в информационном множестве $\{Y,Z\}$ игрок 2 увеличил бы свой выигрыш, выбрав L, при любых ожиданиях относительно узлов Y и Z. ■

Некоторые важные свойства совершенного байесовского равновесия могут быть резюмированы в следующем утверждении.

Теорема 8.17. *Любая динамическая игра n лиц с несовершенной информацией и совершенной памятью имеет совершенное байесовское равновесие. Если динамическая игра содержит собственные подыгры, то совершенное байесовское равновесие является совершенным в подыграх равновесием.*

Этот результат следует из существования тесной связи между секвенциальной точкой равновесия и точкой совершенного байесовского равновесия. На самом деле должно быть понятно, что любое секвенциальное равновесие также является совершенным байесовским равновесием. Детальное доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.

Упражнения

1. Рассмотрим динамическую игру, изображенную на рис. 8.7. Проверьте, что пара (π,μ), где
$$\pi(b)=\pi(t)=\pi(R)=0\,,\;\; \pi(m)=\pi(L)=1$$
и
$$\mu(B)=1 \text{ и } \mu(C)=0\,,$$
— совершенное байесовское равновесие.

2. Рассмотрим игру, представленную на рис. 8.18. Покажите, что пара (π,μ), где профиль поведенческих стратегий π задан как
$$\pi(a)=\pi(T)=\pi(R)=\pi(R')=0\,,$$
$$\pi(b)=\pi(B)=\pi(L)=\pi(L')=1\,,$$
а ожидания μ удовлетворяют соотношениям
$$\mu(X)=\mu(E)=\mu(G)=0 \text{ и } \mu(Y)=\mu(F)=\mu(H)=1\,,$$
— совершенное байесовское равновесие.

3. Рассмотрим динамическую игру «Орлянка», изображенную на рис. 8.19.
   (a) Покажите, что в игре нет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях.
   (b) Покажите, что единственным совершенным байесовским равновесием в этой игре является единственное равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

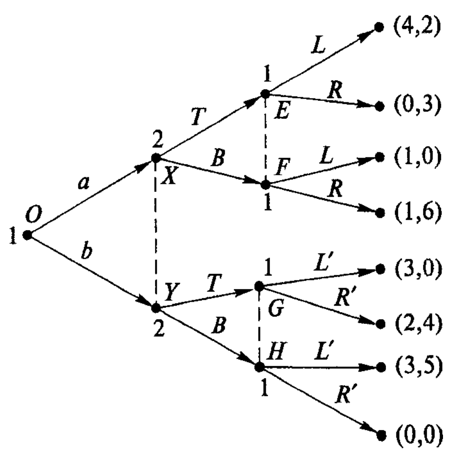


Рис. 8.18

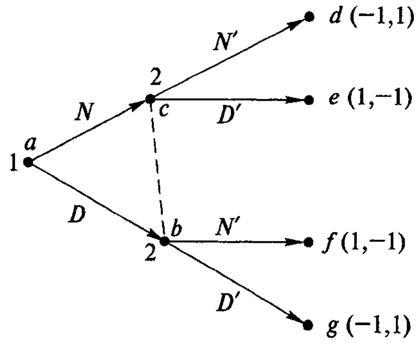


Рис. 8.19

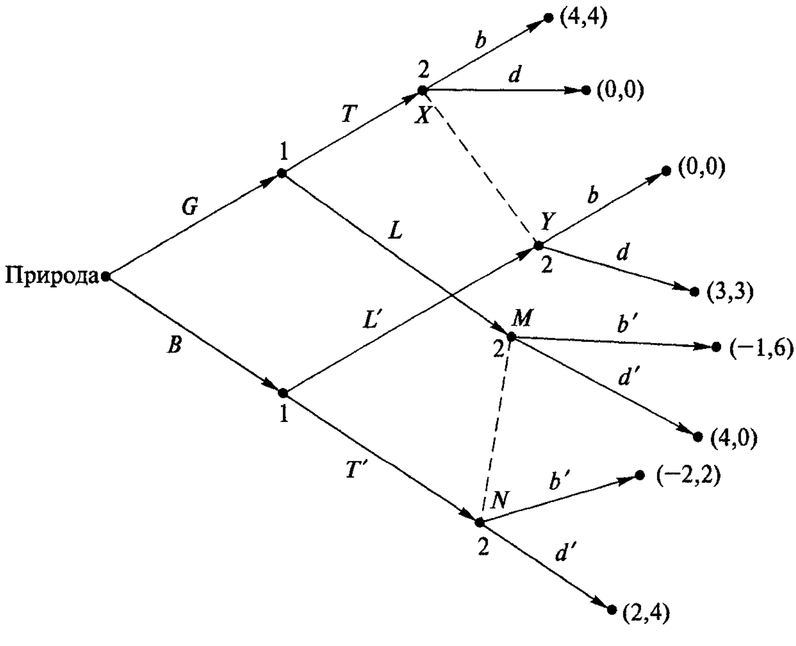


Рис. 8.20

4. Рассмотрим игру «Говори правду» («Truth telling»), изображенную на рис. 8.20. Покажите, что профиль стратегий $(G, T, \{b, d'\})$ — равновесие по Нэшу, и его можно реализовать как совершенное байесовское равновесие. Найдите систему ожиданий, порождаемую данным профилем стратегий.
5. Вернемся к игре на рис. 8.20. Предположим, что игрок 2 при низких затратах может выяснить, правду ли говорит игрок 1. Изменит ли это структуру равновесия? Поясните. [Подсказка: теперь игра оказывается игрой с совершенной информацией.]
6. Предположим, что динамическая игра обладает свойством совершенной памяти, и пусть узел N образует одноэлементное информационное

множество, т.е. $\{N\}$ — информационное множество. Покажите, что если N имеет потомка в информационном множестве $\mathcal{I}$, то все узлы множества $\mathcal{I}$ являются потомками N.

7. Покажите, что любое секвенциальное равновесие является совершенным байесовским равновесием. [Подсказка: покажите, что если $\{\pi^{\nu}\}$ — последовательность вполне смешанных профилей стратегий, таких что $\pi^{\nu} \to \pi$ в каждой узле динамической игры, то система ожиданий $\mu^{\pi^{\nu}} \to \mu^{\pi}$ на каждом информационном множестве. Далее воспользуйтесь тем фактом, что в динамической игре выбор в каждом из информационных множеств должен быть оптимальным.]
8. Докажите теорему 8.17. [Подсказка: воспользуйтесь упражнением 7.]

8.7. Сигналинговые игры

Важный класс динамических игр, называемых **сигналинговыми играми**, не имеет собственных подыгр. Обычно сигналинговая игра включает двух участников, мы будем называть их игрок 1 и игрок 2. В начале игры тип игрока 1 становится известен игроку 1, но неизвестен игроку 2. После того как игрок 1 получает информацию о своем типе, он посылает сигнал игроку 2 о той информации, которую он получил. Затем игроку 2 предстоит принять решение на основании этого сигнала. Решение игрока 2 приводит к окончанию игры, и оба игрока получают свои выигрыши.

Сигналинговые игры представляются важными, потому что позволяют описать многие ситуации из реальной жизни. Например, когда вы заходите на аукцион подержанных автомобилей, то оказываетесь вовлеченными в сигналинговую игру с продавцом. Дилер обладает частной информацией о реальной стоимости машины и посылает сигнал покупателю через объявляемую им цену. Покупатель (игрок 2) затем решает, купить или не покупать автомобиль, руководствуясь объявленной ценой. Рисунок 8.21 отражает сигналинговую игру, в которой игрок 1 имеет возможность выбора из двух сообщений, а игрок 2 выбирает одно из двух возможных действий.

В начале игры оба участника знают, что вероятность игрока 1 быть типом t_1 равна p и типом t_2 соответственно $1 - p$. Однако игрок 1 узнает свой тип, а игрок 2 не получает подобной информации. Затем игрок 1 выбирает одно из двух сообщений $\{m_1, m_2\}$. После получения сообщения игрок 2 выбирает одно из двух возможных действий $\{a_1, a_2\}$. Выигрыши игроков зависят от типа игрока 1, выбранного игроком 1 сигнала и выбранных игроком 2 действий. Таким образом, выигрыш игрока i, $i = 1,2$, задается функцией $u_i(t_k, m_s, a_l)$, где m_s — выбор игрока 1, t_k — его тип и a_l — выбор игрока 2.

На этапе, когда ход принадлежит игроку 2, он делает выбор, находясь либо в информационном множестве $\{V, W\}$, либо в информационном множестве $\{X, Y\}$. Очевидно, что выбор будет зависеть от ожиданий, сформированных игроком 2 в этих информационных множествах. Как уже отмечалось, ожи-

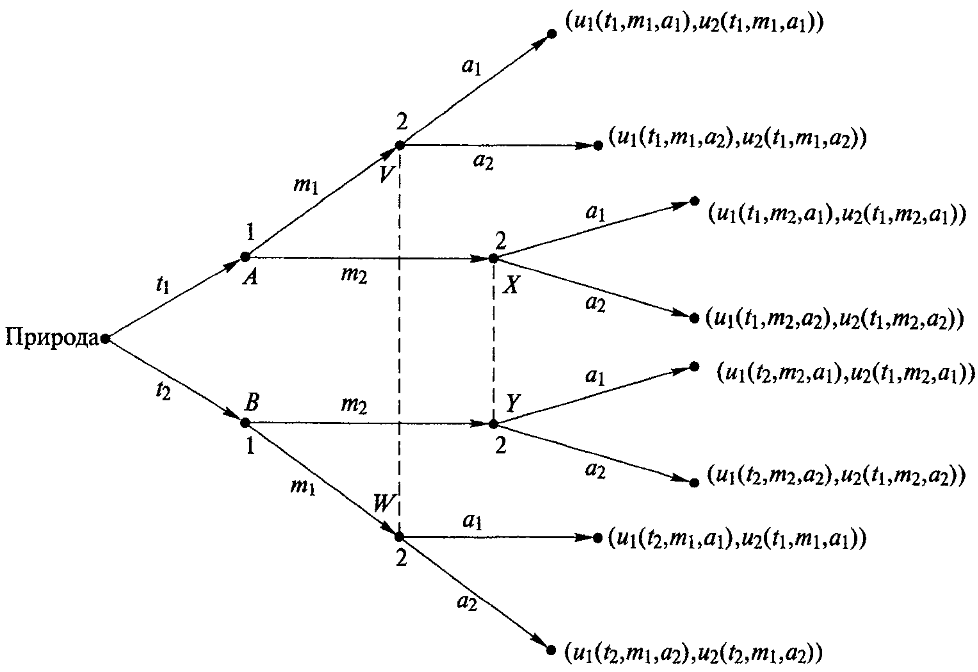


Рис. 8.21

дания игрока на информационных множествах зависят от рассматриваемого профиля поведенческих стратегий. Так, рассмотрим профиль поведенческих стратегий $\pi = \{(m_1 \text{ в } A, m_2 \text{ в } B), (\bullet \text{ в } \{V,W\}, \bullet \text{ в } \{X,Y\})\}$. Согласно такому профилю стратегий, игрок 1 выбирает m_1, когда узнает, что его тип t_1, и выбирает m_2, если его тип t_2. Стратегией игрока 2 может быть что угодно. Этот профиль стратегий, как и любой другой, порождает ожидания на информационных множествах игрока 2. Сначала отметим, что вероятности достижения узлов V,W,X,Y при данном профиле поведенческих стратегий π равны

$$\pi(V) = p \times 1 = p\,,\ \ \pi(W) = (1-p) \times 0 = 0$$

и

$$\pi(X) = p \times 0 = 0\,,\ \ \pi(Y) = (1-p) \times 1 = 1-p\,.$$

Следовательно, если будет достигнуто информационное множество $\mathcal{I}_1 = \{V,W\}$, то условные вероятности достижения узлов V и W составят

$$P(V|\mathcal{I}_1) = \frac{p}{p+0} = 1 \ \text{ и } \ P(W|\mathcal{I}_1) = \frac{0}{p+0} = 0\,.$$

Аналогично, если достигнуто информационное множество $\mathcal{I}_2 = \{X,Y\}$, то условные вероятность достижения узлов X и Y составят

$$P(X|\mathcal{I}_2) = \frac{0}{0+(1-p)} = 0 \ \text{ и } \ P(Y|\mathcal{I}_2) = \frac{1-p}{0+(1-p)} = 1\,.$$

Таким образом, профиль π порождает следующие ожидания на информационных множествах $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$:

$$\mu^{\pi}(V)=1\,,\ \mu^{\pi}(W)=0\,,\ \mu^{\pi}(X)=0\,,\ \mu^{\pi}(Y)=1\,.$$

Альтернативный способ вычисления ожиданий — использование формулы Байеса. Поведенческая стратегия игрока 1 задает условные вероятности $\mu(m_s|t_k)$ того, какое сообщение выберет игрок 1, если реализуется его тип t_k. Учитывая условные вероятностей $\mu(m_s|t_k)$, игрок 2 корректирует свои априорные ожидания p и $1-p$ на информационных множествах $\{V,W\}$ и $\{X,Y\}$ согласно формуле Байеса. Таким образом, с учетом профиля поведенческих стратегий π, если игрок 2 замечает, что достигнуто информационное множество $\{V,W\}$, то он по формуле Байеса корректирует ожидания того, что игрок имеет тип t_1, следующим образом:

$$\mu(t_1|\{V,W\})=\frac{p\times\mu(m_1|t_1\}}{p\times\mu(m_1|t_1)+(1-p)\times\mu(m_1|t_2)}=1\,.$$

Аналогично, скорректированное ожидание относительно типа t_2 задается как

$$\mu(t_2|\{V,W\})=\frac{(1-p)\times\mu(m_1|t_2\}}{(1-p)\times\mu(m_1|t_1)+p\times\mu(m_1|t_2)}=0\,.$$

Тогда скорректированные ожидания игрока 2 на информационном множестве $\{V,W\}$ можно записать в виде

$$\mu_2^{\pi}(V)=\mu(t_1|\{V,W\})\times b_1(A)=1\,,\ \mu_2^{\pi}(W)=\mu(t_2|\{V,W\})\times b_1(B)=0\,.$$

Поскольку ожидания на информационных множествах можно находить, используя формулу Байеса, процесс корректирования ожиданий по мере достижения информационных множеств называют *байесовской корректировкой* (*изменением ожиданий в соответствии с новыми данными*) или *корректировкой ожиданий по формуле Байеса*. Отсюда ясно, почему такое равновесие называется *совершенным байесовским равновесием*.

Описанная ранее сигналинговая игра может быть обобщена на случай любого конечного числа типов игрока 1, конечного числа возможных сообщений, которые может послать игрок 1, и конечного числа действий, которые может предпринять игрок 2. Таким образом, сигналинговая игра включает конечное множество T_1 возможных типов игрока 1, конечное множество M сообщений, из которых может выбрать игрок 1, и конечное множество A действий, из которых может выбрать игрок 2. Динамическая игра разыгрывается так же, как и изображенная на рис. 8.21 сигналинговая игра. Игрок 1 узнает свой тип, например t_k. Затем он выбирает сообщение m_s из множества M, после чего игрок 2 выбирает действие a_l из множества A. Результирующие выигрыши участников имеют вид $u_1(t_k,m_s,a_l)$ и $u_2(t_k,m_s,a_l)$. Заметим, что игрок 1 может выбрать *смешанный сигнал* путем рандомизации на множестве M, подобным же образом игрок 2 может использовать *смешанный профиль поведенческих стратегий* путем рандомизации на множестве A.

Пример 8.18. Рассмотрим сигналинговую игру, изображенную на рис. 8.22. Априорная вероятность того, что игрок 1 является игроком типа t_1, равна 0,5.

Начнем поиск совершенного байесовского равновесия с изучения оптимальных выборов игрока 2. Если на информационном множестве $\mathcal{I}_1\{V,W\}$ ожидания задаются соотношениями $\text{Prob.}(V) = p$ и $\text{Prob.}(W) = 1 - p$, то ожидаемый выигрыш игрока 2 при выборе действия a_1 равен

$$Eu_2(a_1 | p) = 3p + 1 - p = 1 + 2p,$$

а при выборе действия a_2 равен

$$Eu_2(a_2 | p) = 0 + 2(1 - p) = 2 - 2p.$$

Следовательно, игрок 2 выберет действие a_1, если $1 + 2p > 2 - 2p$ или $p > \frac{1}{4}$, ему будет безразлично, что выбрать, при $p = \frac{1}{4}$, и он выберет действие a_2, если $p < \frac{1}{4}$. Таким образом, выбор игрока 2 как функция его ожиданий на информационном множестве $\mathcal{I}_1$ имеет вид

$$b_2^*(\mathcal{I}_1 | p) = \begin{cases} a_1, & \text{если } p > \frac{1}{4}, \\ s \in [0,1], & \text{если } p = \frac{1}{4}, \\ a_2, & \text{если } p < \frac{1}{4}, \end{cases}$$

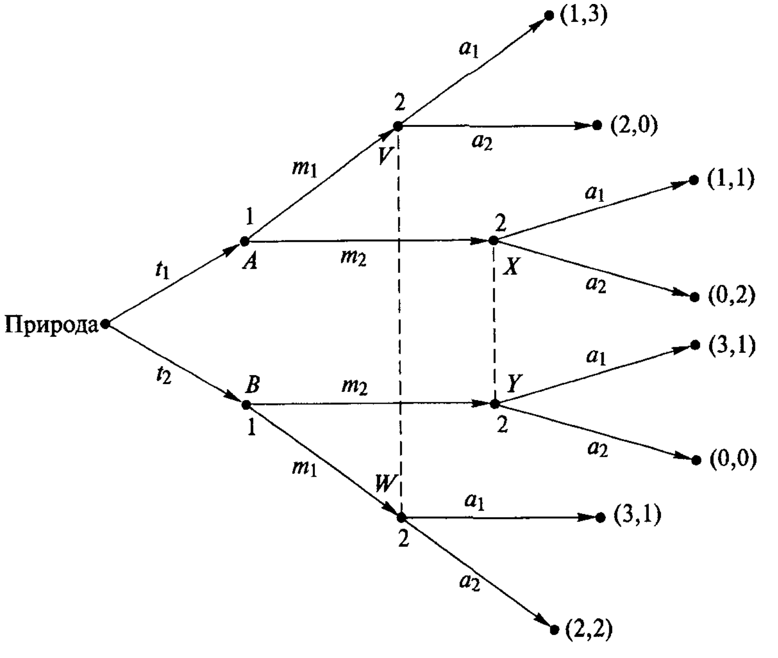


Рис. 8.22

где s — вероятность выбора a_1. Аналогично оптимальный выбор игрока 2 как функция его ожиданий в информационном множестве $\mathcal{I}_2 = \{X, Y\}$ задается как

$$b_2^*(\mathcal{I}_2 | q) = \begin{cases} a_1, & \text{если } q < \frac{1}{2}, \\ r \in [0,1], & \text{если } q = \frac{1}{2}, \\ a_2, & \text{если } q > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $\text{Prob.}(X) = q$ и r — вероятность выбора a_1.

Заметим, что игрок 1 имеет следующие *чистые стратегии*:

выбрать m_1 в обоих узлах, A и B,

выбрать m_2 в обоих узлах, A и B,

выбрать m_1 в узле A и m_2 в узле B,

выбрать m_2 в узле A и m_1 в узле B.

Смешанная стратегия игрока 1 имеет вид пары вероятностей (v_A, v_B), где v_A — вероятность выбора m_1 в узле A и v_B — вероятность выбора m_1 в узле B.

Рассмотрим каждую из этих стратегий игрока 1. Если стратегия игрока предписывает выбор m_1 в обоих узлах, то это порождает ожидания на информационных множествах игрока 2. В этом случае скорректированные ожидания игрока 2 на информационном множестве $\mathcal{I}_1$ имеют вид

$$P(V | \mathcal{I}_1) = \frac{0,5}{0,5 + 0,5} = 0,5 .$$

Ожидания на информационном множестве $\mathcal{I}_2 = \{X, Y\}$ не определены, поскольку вероятность достижения любого из узлов в $\mathcal{I}_2$ равна нулю. В этом случае игрок 2 выберет $b_2^*(\mathcal{I}_1 | p = 0,5) = a_1$. Тогда выигрыш игрока 1

$$u_1(t_1, m_1, a_1) = 1 \text{, если его тип } t_1, \text{ и } u_1(t_2, m_1, a_1) = 3 \text{, если его тип } t_2.$$

Следовательно, ожидаемый выигрыш игрока 1 при использовании данной стратегии

$$Eu_1(v_A = 1, v_B = 1) = 0, \times 1 + 0,5 \times 3 = 2 . \tag{8.1}$$

Что касается стратегии, при которой игрок 1 выбирает m_2 в обоих узлах, скорректированные ожидания игрока 2 на информационном множестве $\mathcal{I}_2$,

$$P(X | \mathcal{I}_2) = \frac{0,5}{0,5 + 0,5} = 0,5 .$$

В этом случае $b_2^*(\mathcal{I}_2 | q = 0,5) = a_2$ [1], так что ожидаемый выигрыш игрока 1 равен

$$Eu_1(v_A = 0, v_B = 0) = 0 . \tag{8.2}$$

Теперь рассмотрим следующую стратегию: выбор m_1 в узле A и m_2 — в узле B, или стратегию, при которой $(v_A = 1, v_B = 0)$. В этом случае обновленные ожидания на информационных множествах игрока 2 составляют

[1] При таких ожиданиях в своем информационном множестве $\mathcal{I}_2$ игрок 2 может выбрать и a_2, и a_1, и любую их смесь (a_1 с вероятностью r и a_2 с вероятностью $(1 - r)$). — *Примеч. ред.*

$$P(V|\mathcal{I}_1)=1 \text{ и } P(X|\mathcal{I}_2)=0 .$$

В результате $b_2^*(\mathcal{I}_1|p=1)=a_1$ и $b_2^*(\mathcal{I}_2|q=0)=a_2$. Таким образом, ожидаемый выигрыш игрока 1[1] при использовании данной стратегии равен

$$Eu_1(v_A=1,v_B=0)=0,5\times1+0,5\times2=1,5 . \tag{8.3}$$

Наконец, нетрудно проверить, что ожидаемый выигрыш при использовании стратегии $(v_A=0,v_B=1)$ окажется равным

$$Eu_1(v_A=0,v_B=1)=0,5\times2=1 . \tag{8.4}$$

Теперь вычислим ожидаемый выигрыш игрока 1 в случае применения смешанных стратегий, таких что $0<v_A<1$. В этом случае скорректированные ожидания игрока 2 на информационных множествах $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ имеют вид

$$P(V|\mathcal{I}_1)=\frac{v_A}{v_A+v_B} \text{ и } P(X|\mathcal{I}_2)=\frac{1-v_A}{2-v_A-v_B} .$$

Рассмотрим пять возможных случаев.

Случай I. $v_A>v_B\geq0$.

Тогда, поскольку $v_A>\frac{1}{3}v_B$, то

$$P(V|\mathcal{I}_1)=p>\frac{1}{4},\ P(X|\mathcal{I}_2)=q<\frac{1}{2} .$$

Таким образом, ожидания игрока 2 в информационных множествах $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, заданные p и q, таковы, что игрок 2 выберет a_1 в обоих информационных множествах.

Следовательно, при реализации t_1 ожидаемый выигрыш игрока 1 составит

$$v_A\times1+(1-v_A)\times1=1 ,$$

а при реализации t_2

$$3\times v_B+3\times(1-v_B)=3 .$$

Ожидаемый выигрыш игрока 1 в этом случае равен

$$Eu_1(v_A,v_B)=0,5\times1+0,5\times3=2 . \tag{8.5}$$

Случай II. $\frac{1}{3}v_B<v_A<v_B$.

В этом случае выполняется

$$P(V|\mathcal{I}_1)=p>\frac{1}{4},\ P(X|\mathcal{I}_2)=q>\frac{1}{2} .$$

Тогда ожидания игрока 2 на информационных множествах $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, заданные p и q, таковы, что игрок 2 выберет a_1 в $\mathcal{I}_1$ и a_2 в $\mathcal{I}_2$.

[1] Заметим, что подход авторов к анализу сигналинговой модели основан на предположении, что первый игрок выбирает свою стратегию до того момента, когда узнает свой тип. Отсюда его ориентация на ожидаемый выигрыш вместо выигрыша для каждого типа этого игрока, как при традиционных вариантах анализа. — *Примеч. ред.*

Следовательно, при реализации t_1 ожидаемый выигрыш игрока 1 составит

$$v_A \times 1 + (1 - v_A) \times 0 = v_A,$$

а при реализации t_2

$$3 \times v_B + (1 - v_B) \times 0 = 3v_B.$$

Ожидаемый выигрыш игрока 1 в этом случае равен

$$Eu_1(v_A, v_B) = 0,5 \times v_A + 0,5 \times 3v_B < 2. \tag{8.6}$$

Случай III. $v_A < \frac{1}{3} v_B$.

Тогда

$$P(V|\mathcal{I}_1) = p < \frac{1}{4}, \; P(X|\mathcal{I}_2) = q > \frac{1}{2}.$$

Ожидания игрока 2 на информационных множествах $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, заданные p и q, таковы, что игрок 2 выберет a_2 в $\mathcal{I}_1$ и a_2 в $\mathcal{I}_2$.

Следовательно, при реализации t_1 ожидаемый выигрыш игрока 1 составит

$$v_A \times 2 + (1 - v_A) \times 0 = 2v_A,$$

а при реализации t_2

$$2 \times v_B + (1 - v_B) \times 0 = 2v_B.$$

Ожидаемый выигрыш игрока 1 в этом случае равен

$$Eu_1(v_A, v_B) = 0,5 \times 2v_A + 0,5 \times 2v_B = v_A + v_B < 1[1]. \tag{8.7}$$

Случай IV. $v_A = \frac{1}{3} v_B, v_A > 0$.

В этом случае выполнено

$$P(V|\mathcal{I}_1) = p = \frac{1}{4}, \; P(X|\mathcal{I}_2) = q = \frac{3 - v_B}{6 - 4v_B}.$$

Тогда $q > \frac{1}{2}$. Таким образом, ожидания игрока 2 на информационных множествах $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ таковы, что игрок 2 выберет a_1 с вероятностью $s \in [0,1]$ в $\mathcal{I}_1$ и a_2 в $\mathcal{I}_2$.

Следовательно, при реализации t_1 ожидаемый выигрыш игрока 1 составит

$$v_A \times [s + 2(1 - s)] + (1 - v_A) \times 0 = v_A(2 - s) = \frac{1}{3} v_B (2 - s),$$

а при реализации t_2

$$v_B[3s + 2(1 - s)] + (1 - v_B) \times 0 = v_B(2 + s).$$

[1] Это, вообще говоря, неверно. Например, $v_A = 0,2$, $v_B = 0,9$. Тогда $v_A = 0,2 < 0,3 = \frac{1}{3} v_B$. Но $v_A + v_B = 1,1 > 1$. — *Примеч. ред.*

Ожидаемый выигрыш игрока 1 в этом случае равен

$$Eu_1(v_A, v_B) = 0{,}5 \times \frac{1}{3} v_B (2 - s) + 0{,}5 \times v_B (2 + s) = \frac{1}{3}(4 + s) v_B < 2\,. \qquad (8.8)$$

Наконец, рассмотрим последний случай.

Случай V. $0 < v_A = v_B < 1$.

Здесь имеем

$$P(V|\mathcal{I}_1) = p = \frac{1}{2}\,,\ P(X|\mathcal{I}_2) = q = \frac{1}{2}\,.$$

Ожидания игрока 2 на информационных множествах $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ таковы, что игрок 2 выберет a_1 в $\mathcal{I}_1$ и a_1 в $\mathcal{I}_2$ с вероятностью $r \in [0,1]$.

Следовательно, при реализации t_1 ожидаемый выигрыш игрока 1 составит

$$v_A \times 1 + (1 - v_A) \times r = r + (1 - r) \times v_A\,,$$

а при реализации t_2

$$v_B \times 3 + (1 - v_B) \times 3 \times r = 3 \times r + 3(1 - r) \times v_B\,.$$

Ожидаемый выигрыш игрока 1 в этом случае равен

$$Eu_1(v_A, v_B) = 2(r + (1 - r) v_A) < 2\,. \qquad (8.9)$$

Если сравнить ожидаемый выигрыш игрока 1 при использовании различных стратегий, как чистых, так и смешанных, то из формул (8.1)–(8.9) видно, что наибольший ожидаемый выигрыш составляет 2. Данный ожидаемый выигрыш соответствует стратегиям

(1) $v_A = v_B = 1$.

(2) $v_A > v_B \geq 0$.

Для подтверждения того, что эти стратегии являются частью совершенного байесовского равновесия, необходимо удостовериться, что игрок 1 не сможет получить выгоды при отклонении от любой из них в своих информационных множествах, т.е. в узле A или узле B.

Заметим, что при использовании поведенческой стратегии $v_A = v_B = 1$, если реализуется тип t_1, то выбор $v_A = 1$, т.е. выбор m_1 в узле A, приносит ожидаемый выигрыш в размере 1. Это наилучшее из того, что может ожидать игрок 1 при данных скорректированных ожиданиях и порождаемой ими при этом оптимальной стратегии игрока 2. Аналогично при реализации типа t_2 и достижении узла B ожидаемый выигрыш игрока 2 составляет 3, что является наибольшим из возможных выигрышей. Таким образом, игроку 1 невыгодно отклоняться ни в одном из узлов A или B.

При использовании игроком 1 поведенческой стратегии $v_A > v_B \geq 0$ в случае реализации типа t_1 выбор m_1 в узле A с вероятностью v_A приносит ожидаемый выигрыш в размере 1. Это наилучшее из того, что может ожидать игрок 1 при данных скорректированных ожиданиях и порождаемой ими оптимальной стратегии игрока 2. Аналогично при реализации типа t_2 и достижении узла B ожидаемый выигрыш игрока 2 составляет 3, что является наибольшим из всего, что он может получить. Таким образом, игроку 1 невыгодно отклоняться ни в одном из узлов A или B.

Следовательно, совершенные байесовские равновесия сигналинговой игры (рис. 8.22) имеют вид

(1) (b^*, μ^*), где $b_1^*(A)(m_1) = 1$, $b_1^*(B)(m_2) = 1$, $\mu_2^*(V|\mathcal{I}_1) = 1$, $\mu_2^*(X|\mathcal{I}_2) = 0$, $b_2^*(\mathcal{I}_1) = a_1$, $b_2^*(\mathcal{I}_2) = a_1$;

(2) $(\hat{b}, \hat{\mu})$, где $\hat{b}_1(A)(m_1) > \hat{b}_1(B)(m_2) \geq 0$, $\hat{\mu}_2(V|\mathcal{I}_1) > \frac{1}{4}$, $\hat{\mu}_2(X|\mathcal{I}_2) < \frac{1}{2}$, $\hat{b}_2(\mathcal{I}_1) = a_1$, $\hat{b}_2(\mathcal{I}_2) = a_1$. ■

Интересное свойство совершенного байесовского равновесия, которое выявляется при определении равновесных точек в предыдущем примере, — это то, что ожидания на информационных множествах игрока 2 определяются стратегиями игрока 1. Причина в том, что выборы игрока 1 определяет вероятности, с которыми достигаются те или иные узлы в информационных множествах игрока 2. В результате изменения стратегии игрока 1 вели бы к соответствующим изменениям в ожиданиях игрока 2.

8.8. Приложения

Мы увидели, что как концепция секвенциального равновесия, так и концепция совершенного байесовского равновесия являются подходящими для нахождения равновесия в динамических играх даже в том случае, если они не имеют подыгр. В данном разделе мы будем использовать обе концепции секвенциального и совершенного байесовского равновесия при решении некоторых интересных динамических игр, которые возникают в приложениях.

Пример 8.19 (финансирование проекта). Предприниматель E (игрок 1), заинтересованный в финансировании некоего рискованного проекта, не может финансировать его за счет собственных средств. Известно, что проект рентабелен, однако только предприниматель точно знает его ценность (стоимость). Предприниматель знает, что после вложения I долл. проект может иметь высокую (h) или низкую (l) стоимость. Поскольку он не имеет собственных средств для финансирования, ему для этого нужно найти **венчурного капиталиста (инвестора)**. В обмен на инвестирование проекта предприниматель может предложить капиталисту доля в стоимости будущего предприятия — пакет акций e, где $0 \leq e \leq 1$.

Будем предполагать, что действие проходит в течение двух периодов. В периоде 1 осуществляется инвестирование, а в периоде 2 реализуется отдача от инвестиций. Норму прибыли на инвестированный капитал i можно считать равной текущей ставки процента или альтернативной стоимости капитала.

Венчурный капиталист C, или игрок 2, может либо принять предложение о пакете акций e, либо отклонить его. На момент сделки игрок 2 знает лишь то, что стоимость проекта может оказаться высокой, h долл., с вероятностью p и низкой, l долл., с вероятностью $1 - p$. Число p — выбор природы и рассматривается игроками как параметр. Таким образом, венчурный капиталист

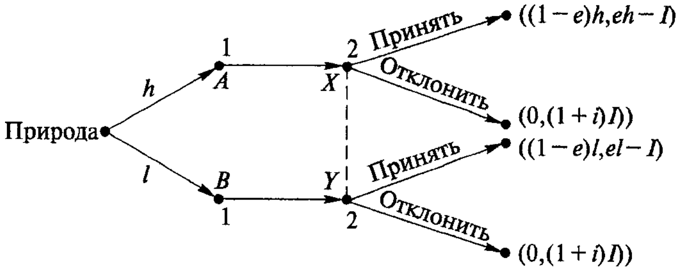


Рис. 8.23

принимает решение о том, принять предложение или отказаться от него, основываясь на величине e и знаниях о шансах успеха данного проекта. Следовательно, игра включает двух участников, вовлеченных в сигналинговую игру, в которой предприниматель (отправитель сигнала) посылает сигнал e, а инвестор (получатель сигнала) реагирует на получаемый сигнал.

Это (сигналинговая) игра с несовершенной информацией и без (собственных) подыгр. Она изображена на рис. 8.23. Если

$$h - I > l - I > (1+i)I \ ,$$

то венчурный капиталист (игрок 2), который знает, что проект будет иметь высокую стоимость h с вероятностью p и низкую стоимость l с вероятностью $1 - p$, примет предложение e только в том в случае, если

$$p(eh - I) + (1-p)(el - I) \geq (1+i)I \ . \qquad (*)$$

То есть, когда игрок 2 должен сделать выбор в своем информационном множестве, он осознает, что находится в узле X с вероятностью p и в узле Y с вероятностью $1 - p$. При данных ожиданиях принятие предложения будет рациональным только в том случае, если e удовлетворяет соотношению (*). Более того, при данной информации у игрока 2 его ожидания секвенциально рациональны. Зная это, предприниматель (игрок 1) предложит игроку 2 величину e, удовлетворяющую соотношению (*). Это приводит к секвенциальному равновесию, в котором

(1) ожидания венчурного капиталиста C (игрок 2), в узлах информационного множества — это p и $1 - p$ соответственно;

(2) предприниматель E (игрок 1) предлагает долю (в стоимости) компании e чуть большую, чем минимальный пакет $e^* < 1$ такой, что (*) обращается в равенство ($e^* = \dfrac{(2+i)I}{ph + (1-p)l}$);

(3) венчурный капиталист C (игрок 2) принимает предложение e, поскольку это является секвенциально рациональным; см. упражнение 1 в конце раздела.

Таким образом, при $e^* = \dfrac{(2+i)I}{ph + (1-p)l} < 1$ проект будет финансироваться, и инвестор получит пакет акций e чуть больший, чем e^*. ■

В полученном решении сигнал e не дает никакой информации о ценности проекта (том, будет ли он стоить (h) или (l)). Предлагаемый предпринимателем пакет акций e, следовательно, должен быть больше, чем тот пакет, который венчурный капиталист согласился бы принять, зная, что проект стоит h. Это так потому, что если инвестор знал, что проект стоит h, то он согласился бы на долю в (капитале) компании e_h, удовлетворяющую

$$e_h h - I \geq (1+i)I \ ;$$

если бы он знал, что проект стоит l, то согласился бы на долю в компании e_l, удовлетворяющую

$$e_l l - I \geq (1+i)I \ .$$

Поскольку предприниматель заинтересован предложить венчурному капиталисту минимально возможный пакет акций, то он всегда бы хотел сообщать капиталисту, что проект стоит h. Венчурный капиталист понимает это и не поверит сигналу от предпринимателя о стоимости проекта[1].

Пример 8.20. В примере 8.19 мы видели, что финансирование проекта происходит при условии, что параметры удовлетворяют определенным соотношениям. Однако если

$$h - I > (1+i)I > l - I$$

и

$$p(eh - I) + (1-p)(el - I) < (1+i)I \ , \tag{**}$$

то решение из примера 8.19 не будет работать, поскольку игроку 2 выгоднее отклонить любые предложения. Жаль, ведь проект не будет финансироваться, хотя должен бы быть профинансирован, если стоит h. Получается, что в этом случае (и это можно проверить см. упражнение 3 в конце раздела) секвенциальное равновесие в этой сигналинговой игре следующее.

(1) Венчурный капиталист C (игрок 2) ожидает, что проект стоит h с вероятностью p.

(2) Игрок 2 отвергает любое предложение о пакете акций e, удовлетворяющем (**).

(3) Предприниматель E (игрок 1) предложит e, удовлетворяющее

   (a) $e(h - I) \geq (1+i)I$, если проект стоит h долл., и

   (b) $e = 0$, если проект стоит l долл.

Единственный способ профинансировать проект в этом случае — это когда предприниматель предложить капиталисту дать ему взаймы I долл. в случае, если он знает, что проект стоит h, и обязуется вернуть капиталисту $\alpha(h - I)$ долл., где $\alpha(h - I)$ удовлетворяет:

$$\alpha(h - I) \geq (1+i)I \ .$$

Поскольку капиталист в этом случае будет уверен, что предприниматель сделает такое предложение только тогда, когда знает, что проект стоит h, он согласится на такое предложение. ■

[1] Точнее, поверил бы только сигналу о низкой стоимости проекта, но такой сигнал он не получит. — *Примеч. ред.*

Следующий пример — версия моделей, изученных в работе Крепса и Уилсона [47] и Милгрома и Робертса [59]. Он анализирует динамическую игру, которая может быть представлена как сигналинговая игра, где укоренившаяся (в отрасли) фирма принимает решение о том, «усложнить ли жизнь» новичку-конкуренту (начать пиратствовать, мародерствовать после его входа в отрасль) или смириться со входом и приспособиться.

Пример 8.21 (игра «Сдерживание входа»)[1]. Имеются две фирмы. Фирма 1 уже присутствует на рынке в течение некоторого периода времени, а фирма 2 только входит на этот рынок. На первой стадии игры фирма 1 выбирает между *Мародерствовать* и *Приспособиться*. В случае выбора *Мародерствовать*, выигрыш фирмы 2 составит $u_2^p < 0$. При выборе *Приспособиться* выигрыш составит u_2^a, причем

$$u_2^a > 0 > u_2^p .$$

Фирма 1 может быть одной из двух возможных типов: *нормальной* или *агрессивной*. Эта информация доступна лишь самой фирме 1, т.е. тип фирмы 1 представляет собой частную информацию этой фирмы. Фирме 2 лишь известно, что фирма 1 с вероятностью *p нормальная* и с вероятностью $1 - p$ *агрессивная*. Если фирма 1 нормальная, то при ее выборе *Приспособиться* выигрыш фирмы 2 на первой стадии игры равен u_2^a, а выигрыш фирмы 1 равен u_1^a, где

$$u_1^a > u_1^p .$$

Если фирма 1 агрессивная, то при выборе *Мародерствовать* она получает высокий выигрыш v и всегда предпочитает стратегию *Мародерствовать*.

На второй стадии игры фирма 2 принимает решение *Остаться* или *Уйти*. В случае выбора *Уйти* фирма 1 остается единственной фирмой на рынке и пользуется привилегиями монополии. Тогда ее выигрыш на второй стадии игры равен u_1^m, где

$$u_1^m > u_1^a .$$

Выигрыш фирмы 2 на второй стадии игры, в случае если фирма 1 выбрала *Приспособиться* на первой стадии и фирма 2 играет *Остаться*, составит u_2^a. Следовательно, фирма 2 получает выигрыш в размере u_2^a на обеих стадиях игры. Тогда при дисконтировании выигрыша на второй стадии по ставке дисконтирования δ выигрыш фирмы 2 в случае, когда *фирма 1 является обычной, и выбирает Приспособиться на первой стадии игры, а фирма 2 выбирает Остаться на второй стадии*, равен

$$u_2^a + \delta u_2^a .$$

Выигрыш фирмы 1 в этом случае имеет вид

$$u_1^a + \delta u_1^a .$$

[1] Альтернативные названия игры: игра входа, игра «Предоставление входа».

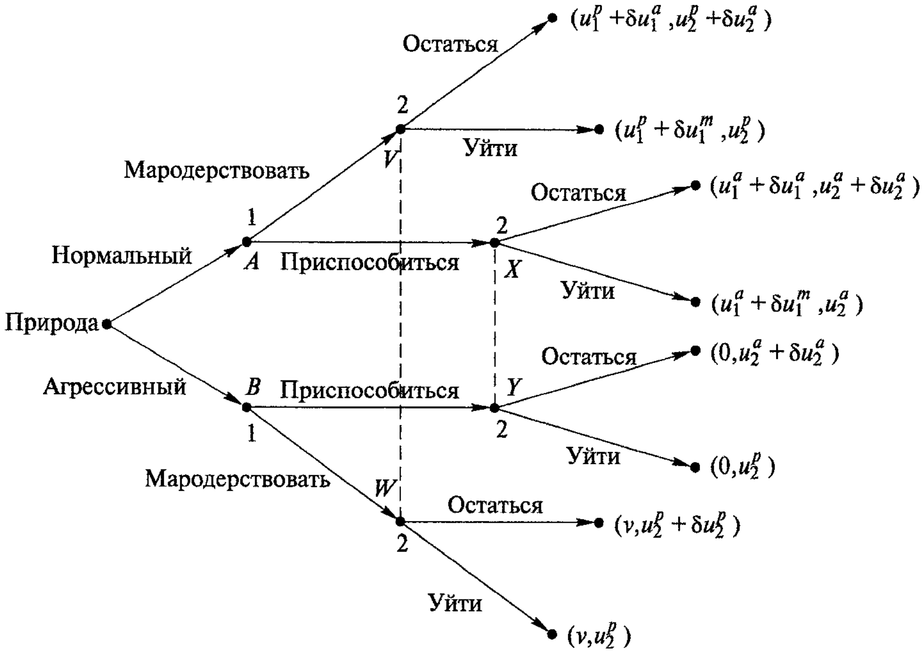


Рис. 8.24. Игра «Сдерживание входа»

Выигрыш фирмы 1 в том случае, если она является *нормальной*, выбирает *Мародерствовать* на первой стадии игры, а фирма 2 выбирает *Уйти* на второй стадии, составляет

$$u_1^p+\delta u_1^m,$$

при этом выигрыш фирмы 2 оказывается равным

$$u_2^p+0\times\delta=u_2^p.$$

Рисунок 8.24 иллюстрирует *сигналинговую игру* между двумя фирмами. На нем указаны выигрыши фирм для всевозможных исходов игры. Сигнал о типе фирмы 1 подают действия фирмы 1 на первой стадии игры. Наблюдая ее действия на первой стадии, фирма 2 корректирует свои ожидания о типе фирмы 1 и затем соответствующим образом выбирает свои действия. Начнем анализ игры с поиска оптимальных выборов фирмы 2 в ее информационных множествах $\mathcal{I}_1=\{V,W\}$ и $\mathcal{I}_2=\{X,Y\}$. В информационном множестве $\mathcal{I}_2$ единственные приемлемые ожидания фирмы 2 задаются как

$$\mu(X)=1,\ \mu(Y)=0.$$

Это так в силу того, что фирма 1 всегда выбирает *Мародерствовать*, если является агрессивной, поэтому узел Y никогда не достигается. Таким образом, оптимальный выбор фирмы 2 в информационном множестве $\mathcal{I}_2$ — это

$$b_2^*(\mathcal{I}_2)=\textit{Остаться}.$$

В информационном множестве $\mathcal{I}_1$ фирма 2 выберет *Остаться*, если

$$\mu(V)(u_2^p + \delta u_2^a) + \mu(W)(u_2^p + \delta u_2^p) \geq u_2^p,$$

т.е. если

$$\frac{\mu(V)}{\mu(W)} \geq \frac{-u_2^p}{u_2^a}.$$

И она выберет *Уйти*, если

$$\frac{\mu(V)}{\mu(W)} < \frac{-u_2^p}{u_2^a}\text{ [1]}.$$

Таким образом, оптимальный выбор фирмы 2 как функция от ожиданий $\mu(X) = q$ и $\mu(Y) = 1 - q$ составляет

$$b_2^*(\mathcal{I}_2|q) = \begin{cases} \textit{Остаться}, & \text{если } \dfrac{q}{1-q} > \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}, \\ r \in [0,1], & \text{если } \dfrac{q}{1-q} = \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}, \\ \textit{Уйти}, & \text{если } \dfrac{q}{1-q} < \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}, \end{cases}$$

где r — вероятность выбора *Остаться.*

Для фирмы 1 необходимо рассмотреть следующие поведенческие стратегии.

(1) *Мародерствовать, если нормальная.*

(2) *Приспособиться, если нормальная.*

(3) *Рандомизировать на множестве {Мародерствовать, Приспособиться}, если нормальная.*

Исследуем каждую из этих поведенческих стратегий, чтобы понять, какая из них приносит наибольший ожидаемый выигрыш фирме 1.

(1) *Мародерствовать, если нормальная.* В этом случае ожидания, порождаемые на информационном множестве $\mathcal{I}_1 = \{V, W\}$, имеют вид $\mu(V) = p$ и $\mu(W) = 1 - p$. Учитывая оптимальный отклик $b_2^*(\mathcal{I}_1|p)$ фирмы 2, имеем следующий ожидаемый выигрыш фирмы 1

$$Eu_1 = \begin{cases} u_1^p + \delta u_1^a, & \text{если } \dfrac{p}{1-p} > \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}, \\ r(u_1^p + \delta u_1^a) + (1-r)(u_1^p + \delta u_1^m), & \text{если } \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}, \\ u_1^p + \delta u_1^m, & \text{если } \dfrac{p}{1-p} < \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}. \end{cases} \tag{8.10}$$

[1] При $\dfrac{\mu(V)}{\mu(W)} = \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}$ оба выбора для нее одинаково (не)привлекательны, как и любая лотерея на этих выборах. Поэтому наилучшие выборы при таких ожиданиях — все множество лотерей $(r, 1-r)$; $r \in [0,1]$, где r — вероятность выбрать действие *Остаться*. — *Примеч. ред.*

(2) *Приспособиться, если нормальная.* В этом случае ожидания, порождаемые на информационном множестве $\mathcal{I}_2 = \{X, Y\}$, — это $\mu(X) = 1$. Учитывая оптимальный отклик $b_2^*(\mathcal{I}_2)$ фирмы 2, получаем следующий ожидаемый выигрыш фирмы 1

$$Eu_1 = u_1^p + \delta u_1^a. \tag{8.11}$$

(3) *Рандомизировать на множестве {Мародерствовать, Приспособиться}, если нормальная.* Пусть z = Prob.(*Приспособиться*), тогда скорректированные ожидания на информационном множестве $\mathcal{I}_1$ задаются выражениями

$$P(V|\mathcal{I}_1) = \frac{zp}{1-p+zp}, \quad P(W|\mathcal{I}_1) = \frac{1-p}{1-p+zp}.$$

Ожидаемый выигрыш фирмы 1 при скорректированных ожиданиях составляет

$$Eu_1 = \begin{cases} z[u_1^p + \delta u_1^a] + (1-z)[u_1^a + \delta u_1^a], & \text{если } \dfrac{zp}{1-p} > \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}, \\ z[r(u_1^p + \delta u_1^a) + (1-r)(u_1^p + \delta u_1^m)] + \\ + (1-z)[u_1^a + \delta u_1^a], & \text{если } \dfrac{zp}{1-p} = \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}, \\ z[u_1^p + \delta u_1^m] + (1-z)[u_1^a + \delta u_1^a], & \text{если } \dfrac{zp}{1-p} < \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}. \end{cases} \tag{8.12}$$

Рассмотрим два случая.

Случай I. $u_1^p + \delta u_1^m < u_1^a + \delta u_1^a$.

В этом случае из (8.10), (8.11) и (8.12) следует, что фирма 1 выберет *Приспособиться, если нормальная.* Тогда фирма 2 выберет *Остаться*, после того как будут скорректированы ожидания от типа фирмы 1. Единственное совершенное байесовское равновесие задается парой (π^*, μ^*), где

$$b_1^*(A) = \textit{Приспособиться}, \quad b_1^*(B) = \textit{Мародерствовать},$$

$$\mu_2^*(W|\mathcal{I}_1) = 1, \quad \mu_2^*(X|\mathcal{I}_2) = 1,$$

$$b_2^*(\mathcal{I}_1) = \textit{Уйти}, \quad b_2^*(\mathcal{I}_2) = \textit{Остаться}.$$

Случай II. $u_1^p + \delta u_1^m > u_1^a + \delta u_1^a$.

Тогда:

(1) Если $\dfrac{p}{1-p} < \dfrac{-u_2^p}{u_2^a}$, то из (8.10) и (8.11) следует, что фирма 1 выберет *Мародерствовать, если нормальная.* Следовательно, фирма 2 выберет *Уйти.* В этом случае единственное совершенное байесовское равновесие имеет вид

$$b_1^*(A) = \textit{Мародерствовать}, \quad b_1^*(B) = \textit{Мародерствовать},$$

$$\mu_2^*(W|\mathcal{I}_1) = 1-p, \quad \mu_2^*(V|\mathcal{I}_1) = p,$$

$$b_2^*(\mathcal{I}_1) = \textit{Уйти}, \quad b_2^*(\mathcal{I}_2) = \textit{Остаться}.$$

Ожидания на информационном множестве $\mathcal{I}_2$ не определены[1], поскольку оно не достигается, если фирмы придерживаются равновесных стратегий.

(2) Если $\frac{p}{1-p} = \frac{-u_2^p}{u_2^a}$, то из (8.10) следует, что фирма 1 получает больший выигрыш при выборе *Мародерствовать*, если

$$r(u_1^p + \delta u_1^a) + (1-r)(u_1^p + \delta u_1^m) > u_1^a + \delta u_1^a .$$

Поскольку $u_1^p + \delta u_1^m > u_1^a + \delta u_1^a$, то существует $\bar{r} > 0$, такое что

$$\bar{r}(u_1^p + \delta u_1^a) + (1-\bar{r})(u_1^p + \delta u_1^m) = u_1^a + \delta u_1^a ,$$

так что для всех $r < \bar{r}$ имеем

$$r(u_1^p + \delta u_1^a) + (1-r)(u_1^p + \delta u_1^m) > u_1^a + \delta u_1^a .$$

В этом случае существуют совершенные байесовские равновесия, при которых фирма 2 рандомизирует на стратегиях *Остаться* и *Уйти*. Эти равновесия задаются выражениями

$$b_1^*(A) = \textit{Мародерствовать},\ \ b_1^*(B) = \textit{Мародерствовать},$$

$$\mu_2^*(W|\mathcal{I}_1) = 1-p\ ,\ \ \mu_2^*(V|\mathcal{I}_1) = p\ ,$$

$$b_2^*(\mathcal{I}_1)\ (\textit{Остаться}) = r^*,\ \ b_2^*(\mathcal{I}_1)\ (\textit{Уйти}) = 1 - r^*, \text{ и }\ b_2^*(\mathcal{I}_2) = \textit{Остаться},$$

где $0 \le r^* \le \bar{r}$.

(3) Если $\frac{p}{1-p} > \frac{-u_2^p}{u_2^a}$, то из (8.10), (8.11) и (8.12) следует, что фирма 1 будет рандомизировать на *Мародерствовать* и *Приспособиться*, *когда является нормальной* с вероятностью $\hat{z}$ = Prob.(*Мародерствовать*) < 1, так что выполняется

$$\frac{\hat{z}\,p}{1-p} = \frac{-u_2^p}{u_2^a} ,$$

тогда ожидаемый выигрыш фирмы 1 составит

$$\hat{z}[r(u_1^p + \delta u_1^a) + (1-r)(u_1^p + \delta u_1^m)] + (1-\hat{z})[u_1^a + \delta u_1^a] .$$

Как и в (2), из этого далее следует, что существует $\hat{r} > 0$, такое что

$$\hat{z}[\hat{r}(u_1^p + \delta u_1^a) + (1-\hat{r})(u_1^p + \delta u_1^m)] + (1-\hat{z})[u_1^a + \delta u_1^a] = u_1^a + \delta u_1^a ,$$

так что для всех $r < \hat{r}$ имеем

$$\hat{z}[r(u_1^p + \delta u_1^a) + (1-r)(u_1^p + \delta u_1^m)] + (1-\hat{z})[u_1^a + \delta u_1^a] > u_1^a + \delta u_1^a .$$

[1] Не определены равновесным профилем стратегий, но тем не менее должны быть определены в соответствии с концепцией равновесия. Проделанный ранее анализ показывает, что с таким равновесием совместимы любые ожидания на этом множестве (т.е. в соответствии с выигрышами, которые получают игроки, при любых ожиданиях фирмы 2 она выбирает *Остаться*; проделанный анализ при этом показывает, что и выбор фирмы 1 тогда секвенциально рационален). — *Примеч. ред.*

Таким образом, мы получили множество совершенных байесовских равновесий, при которых фирма 1 рандомизирует на *Мародерствовать* и *Приспособиться*, а фирма 2 рандомизирует на стратегиях *Остаться* и *Уйти*. Эти равновесия имеют вид

$$b_1^*(A)\,(\textit{Мародерствовать}) = \hat{z}\,,\ \ b_1^*(B) = \textit{Мародерствовать},$$

$$\mu_2^*(V|\mathcal{I}_1) = \frac{\hat{z}\,p}{1-p}\,,\ \ \mu_2^*(X|\mathcal{I}_2) = 1\,,$$

$$b_2^*(\mathcal{I}_1)\,(\textit{Остаться}) = r^*,\ \text{и}\ \ b_2^*(\mathcal{I}_2) = \textit{Остаться},$$

где $0 \le r^* \le \hat{r}$.

Единственное совершенное байесовское равновесие, полученное в случае I, таково, что нормальный тип фирмы всегда адаптируется, а агрессивный тип всегда мародерствует. То есть в этом равновесии два различных типа действуют по-разному, и фирма 1 играет так, чтобы раскрыть свой тип полностью. Такое совершенное байесовское равновесие называется **разделяющим равновесием**. В случае II(2) в единственном совершенном байесовском равновесии фирма 1 вне зависимости от своего типа всегда мародерствует. Таким образом, действия фирмы 1 не выявляют ее тип, и поэтому такое равновесие носит название **объединяющего равновесия**. Совершенные байесовские равновесия в случае II(3) не являются ни разделяющими, ни объединяющими, и их часто называют **гибридными равновесиями**. Заметим, что в случае отсутствия какой-либо неопределенности относительно типа фирмы 1 в динамической игре, если фирма нормальная, то единственным равновесием было бы равновесие, в котором фирма 1 всегда адаптируется. Таким образом, именно неопределенность, которая есть у фирмы 2 относительно того, какого типа фирма 1, приводит к тому, что фирма 1 действует по-разному, и в некоторых случаях мародерствует, даже когда она нормальная. ■

Теперь обратим внимание на еще один пример сигналинговой (сигнальной) игры.

Пример 8.22 (сигналинг на рынке труда). Представленная здесь игра мотивирована работой Спенса[1]. В этой динамической игре природа раскрывает тип индивида (только) этому индивиду, который, следовательно, знает, является ли он высоко одаренным (индивидом с высоким способностями, высокопроизводительным, индивидом типа h) или нет (индивид с более низкими способностями, низкопроизводительный индивид, индивид типа l). Фирма F (игрок 1) должна решить, какую зарплату предложить индивиду, но при этом не знает его типа и наблюдает лишь уровень его образования e. Таким образом, фирма должна предложить зарплату $w(e)$, основываясь на уровне образования e. Индивид (игрок 2) выбирает уровень образования e и выходит на рынок труда. Общеизвестно, что половина всех индивидов — индивиды типа h и оставшаяся половина — индивиды типа l.

[1] *Spence A.M.* Job market Signaling // Quarterly Journal of Economics. 1973. Vol. 87. P. 355–374.

В анализе будем рассматривать только линейные контракты относительно заработной платы (договоры о заработной плате). В частности, предположим, что зависимость зарплаты от уровня образования имеет вид $w(e) = me + 0{,}1$, где m — неотрицательное вещественное число. Величину 0,1 можно трактовать как зарплату индивида с нулевым уровнем образования.

Предположим, что при любом заданном уровне образования индивид типа h более продуктивен, чем индивид типа l. Более того, предположим, что высокопроизводительный индивид (индивид типа h) ценится фирмой в $2e$, если имеет уровень образования e, а низкопроизводительный индивид (индивид типа l) ценится всего лишь в e, если имеет уровень образования e. Тогда прибыль фирмы задается как $2e - w(e)$, если индивид типа h, и как $e - w(e)$, если индивид типа l.

Полезность (или выигрыш) индивида зависит как от заработной платы, которую он получает, так и от издержек получаемого образования. Полезность индивида типа h в случае, когда он получает уровень образования e, составляет

$$u_h(e) = w(e) - \frac{1}{2}e^2,$$

а полезность индивида типа l —

$$u_l(e) = w(e) - \frac{3}{4}e^2.$$

Это означает, что для низкопроизводительного индивида получение образования сопряжено с более высокими издержками, чем для высокопроизводительного индивида. Таким образом, это динамическая игра с несовершенной информацией, которая разыгрывается следующим образом.

- Фирма, игрок 1, делает предложение относительно заработной платы $w(\cdot)$. Это предложение определяет заработную плату как функцию от уровня образования e. Как уже отмечалось ранее, мы предполагаем, что такая функция имеет вид $w(e) = me + 0{,}1$, где m — неотрицательное вещественное число.
- Природа раскрывает индивиду его тип.
- Индивид, игрок 2, посылает сигнал e о своем типе, который является выбранным уровнем образования. Сигнал e может как выявлять фирме тип индивида, так и не выявлять его.
- Фирма предлагает индивиду уровень заработной платы $w(e)$.
- В свою очередь, индивид либо принимает, либо отвергает предложение, и оба участника игры получают выигрыши, указанные на рис. 8.25.

На рисунке изображено дерево данной сигналинговой игры между фирмой и индивидом. Поскольку существует бесконечно много значений m ($m \geq 0$), то фактически существует и бесконечно много возможностей для (положения) узла N (природа). Возможные узлы N — точки на луче (полупрямой) OP. После достижения узла N из U природа раскрывает индивиду его тип; таким

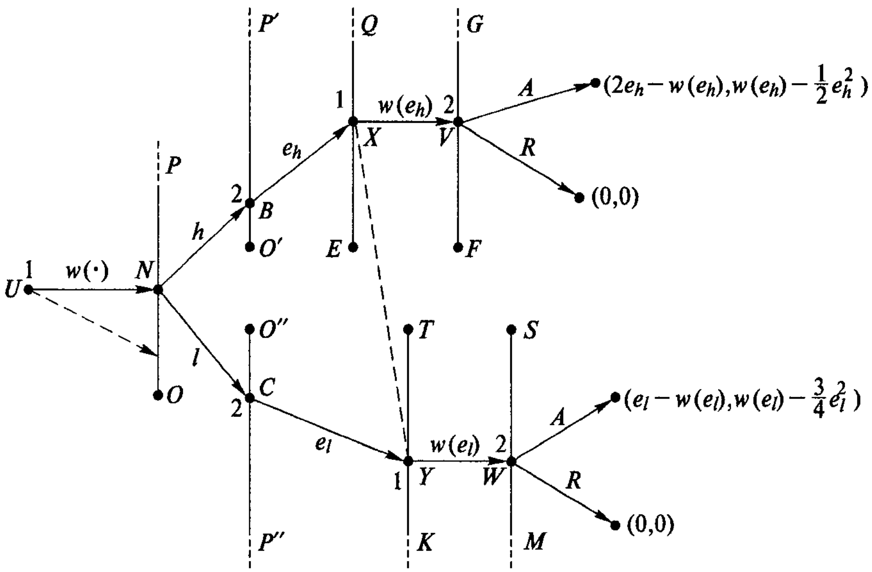


Рис. 8.25

образом, достигается либо узел B либо узел C. Ясно, что существует бесконечно много возможностей для узлов B и C; на рис. 8.25 они представлены точками на лучах (полупрямых) $O'P'$ и $O''P''$ соответственно. В узле B или C индивид посылает сигнал e, выбирая уровень образования, и достигается либо узел X, либо узел Y. И снова, поскольку e может принимать любые неотрицательные значения, то имеем бесконечно много возможностей для узлов X и Y. На рис. 8.25 эти возможные положения узлов — точки на полупрямых EQ и TK соответственно. Очевидно, что $\{X, Y\}$ является информационным множеством игрока 1. В своем информационном множестве $\{X, Y\}$ игрок 1 делает предложение $w(e)$, что приводит игру либо в узел V, либо в узел W. Здесь последний выбор игрока 2 завершает игру.

В этой сигналинговой игре игрок 2 (индивид) посылает сигнал, а именно свой уровень образования e. Игрок 1 (фирма) является получателем сигнала e и отвечает на него, предлагая заработную плат $w(e)$. В такого рода сигналинговых играх решение зависит от функции зарплаты $w(\cdot)$. Перейдем к решению игры.

Вначале точно опишем функции выигрышей и стратегии игроков. Будем использовать сокращения A для «принятия» и R для «отказа». Ясно, что стратегией игрока 1 является функция $w(\cdot)$, которая в данном случае полностью определяется числом m; т.е. стратегия игрока 1 (фирмы) — просто вещественное число $m \geq 0$. Стратегия игрока 2 (индивида) состоит из пары $(\{e_l, e_h\}, s)$, такой что

(1) s — функция, определенная на узлах V и W на полупрямых FG и SM соответственно, которая «выбирает» A или R;

(2) e_h — функция, которая отображает узлы B на полупрямой $O'P'$ на узлы X на полупрямой EQ. Поскольку узел B на полупрямой $O'P'$ полностью определяется узлом N (т.е. числом m), то e_h является вещественнозначной функцией, т.е. $e_h = e_h(m)$ или $e_h : [0,\infty) \to [0,\infty)$;

(3) аналогичным образом e_l отображает узлы C на полупрямой $O''P''$ на узлы Y на полупрямой TK. Поэтому имеем $e_l = e_l(m)$ или $e_l : [0,\infty) \to [0,\infty)$.

В терминах этих определений выигрыши игроков имеют вид

$$u_1(m,(\{e_h,e_l\},s)) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}[2e_h(m) - me_h(m) - 0{,}1] + \frac{1}{2}[e_l(m) - me_l(m) - 0{,}1], & \text{если } s(V) = s(W) = A, \\ \frac{1}{2}[2e_h(m) - me_h(m) - 0{,}1], & \text{если } s(V) = A, s(W) = R, \\ \frac{1}{2}[e_l(m) - me_l(m) - 0{,}1], & \text{если } s(V) = R, s(W) = A, \\ 0, & \text{если } s(V) = s(W) = R, \end{cases}$$

$$u_2^l(m,(\{e_h,e_l\},s)) = \begin{cases} me_l(m) - \frac{3}{4}e_l(m)^2 + 0{,}1, & \text{если } s(W) = A, \\ 0, & \text{если } s(W) = R \end{cases}$$

и

$$u_2^h(m,(\{e_h,e_l\},s)) = \begin{cases} me_h(m) - \frac{1}{2}e_h(m)^2 + 0{,}1, & \text{если } s(V) = A, \\ 0, & \text{если } s(V) = R. \end{cases}$$

Две формулы для выигрышей игрока 2 отражают два типа индивидов. Выигрыш фирмы, конечно же, ее ожидаемый выигрыш.

Как уже упоминалось, игра начинается с того, что игрок 1 предлагает зарплатный контракт (функцию зарплаты) $w(\cdot)$, имеющий вид $w(e) = me + 0{,}1$. Игрок 2 отвечает на это предложение выбором уровня образования, который максимизирует его полезность. Если у индивида (игрока 2) высокие способности, то он выберет уровень образования, максимизирующий функцию

$$u_h(e) = w(e) - \frac{1}{2}e^2 = me - \frac{e^2}{2} + 0{,}1 .$$

Нетрудно проверить, что максимум данной функции достигается при $u_h'(e) = m - e = 0$. Это условие определяет *оптимальную* стратегию игрока 2 типа h, которая имеет вид $e_h^*(m) = m$.

Максимальное значение $u_h(e)$ тогда равно $u_h(m) = \frac{m^2}{2} + 0{,}1 > 0$, откуда следует, что стратегия s^* игрока 2 в узле V должна быть A, т.е. $s^*(V) = A$.

Если у индивида более низкий уровень способностей, он максимизирует

$$u_l(e) = w(e) - \frac{3}{4}e^2 = me - \frac{3}{4}e^2 + 0{,}1 .$$

Снова легко проверить, что максимум функция выигрыша достигает, когда $u_l'(e) = m - \frac{3}{2}e = 0$ (выполняется условие первого порядка). Следовательно, в этом случае *оптимальная* стратегия игрока 2 типа l, имеет вид

$$e_l^*(m) = \frac{2}{3}m.$$

Максимальное значение $u_l(e)$ теперь равно $u_l\left(\frac{2}{3}m\right) = \frac{m^2}{3} + 0{,}1 > 0$, откуда следует, что стратегия s^* игрока 2 в узле W должна также быть A, т.е. $s^*(W) = A$.

Фирма (игрок 1) предвидит выборы уровней образования игрока 2. Однако в силу того, что она не обладает информацией о типе игрока 2, ей следует выбирать m исходя из максимума ожидаемого выигрыша. Так как половина всех индивидов имеют тип h, а другая половина — тип l, игрок 1 ожидает, что он находится в узле X (см. рис. 8.25) с вероятностью 1/2 и в узле Y с вероятностью 1/2. Таким образом, ожидаемый выигрыш фирмы в информационном множестве $\{X, Y\}$ равен

$$E(m) = \frac{1}{2}[2e_h^*(m) - me_h^* - 0{,}1] + \frac{1}{2}[e_l^*(m) - me_l^*(m) - 0{,}1].$$

Поскольку фирма знает, что $e_h^*(m) = m$ и $e_l^*(m) = \frac{2}{3}m$, ожидаемый выигрыш может быть переписан в виде

$$E(m) = \frac{1}{2}(2m - m^2 - 0{,}1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m^2 - 0{,}1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}m - \frac{5}{3}m^2 - 0{,}2\right).$$

Очевидно, что данная функция достигает максимума, когда $E'(m) = \frac{8}{3} - \frac{10}{3}m = 0$, или $m^* = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

Следовательно, решением игры является профиль $(m^*, (\{e_h^*, e_l^*\}, s^*))$, такой что

$$m^* = 0{,}8,\ e_l^*(m) = \frac{2}{3}m,\ e_h^*(m) = m,\ \text{и}$$

$$s^*(V) = \begin{cases} A, & \text{если } w(e) - \frac{1}{2}e^2 \geq 0, \\ R, & \text{если } w(e) - \frac{1}{2}e^2 < 0 \end{cases} \quad \text{и } s^*(W) = \begin{cases} A, & \text{если } w(e) - \frac{3}{4}e^2 \geq 0, \\ R, & \text{если } w(e) - \frac{3}{4}e^2 < 0. \end{cases}$$

Другими словами, это означает следующее. Игрок 1 предлагает функцию заработной платы $w(e) = 0{,}8e + 0{,}1$, а игрок 2 соглашается и получает уровень образования $e_h = 0{,}8$, если имеет тип h, и $e_l = \frac{2}{3} \times 0{,}8 = \frac{1{,}6}{3} = 0{,}533$, если имеет тип l. Кроме того,

(1) ожидаемый выигрыш игрока 1 составляет $E(0{,}8) = 0{,}433$;

(2) выигрыш игрока 2 равен $u_h(0{,}8) = 0{,}42$, если он имеет тип h, и $u_l\left(\frac{1{,}6}{3}\right) = 0{,}313$, если его тип l.

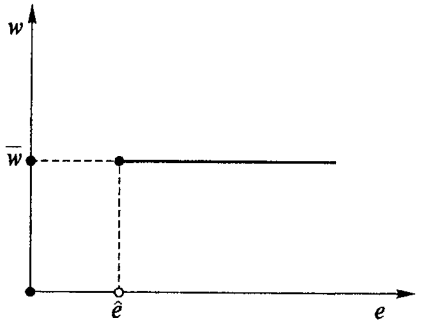


Рис. 8.26. Функция заработной платы

По построению понятно, что $(m^*,(\{e_l^*(m),e_h^*(m)\},s^*))$ образует равновесие по Нэшу. Оставим в качестве упражнения проверку того, что данный профиль стратегий также является секвенциальным равновесием[1]. ■

В рассмотренном примере полученное решение разделяет два типа индивидов в том смысле, что

$$e_l = \frac{2}{3} \times 0{,}8 = 0{,}533 < e_h = 0{,}8\,.$$

Таким образом, ориентируясь на выбранный уровень образования, фирма в состоянии различить эти два типа индивидов. По этой причине данный тип секвенциального равновесия в сигналинговых играх называют **разделяющим равновесием**.

В следующем примере мы получим равновесие, при котором оба типа индивидов выбирают один и тот же уровень образования. В таком случае равновесие называют **объединяющим**.

Пример 8.23 (еще раз о сигналинге на рынке труда). Вернемся к сигналинговой игре на рынке труда, изображенной на рис. 8.25. Отличие от предыдущего примера состоит в том, что зарплатный контракт теперь не является линейной функцией вида $w(e) = me + 0{,}1$. Вместо этого будем рассматривать в качестве зарплатных контрактов следующие кусочно-постоянные «двухступенчатые» предложения

$$w(e) = \begin{cases} 0, & \text{если}\, e < \hat{e}, \\ \overline{w}, & \text{если}\, e \geq \hat{e}\,. \end{cases}$$

Таким образом, контракт имеет «переключение» на уровне образования $\hat{e} > 0$, как иллюстрирует рис. 8.26. Фирме необходимо определить запускающее значение e и уровень зарплаты $\overline{w}$.

Предположим, что в этой игре прибыль фирмы составит $1{,}5e - w(e)$, если индивид высокопроизводительный, и $e - w(e)$, если он низкопроизводительный. Также общеизвестно, что одна четверть всех индивидов имеют тип h и

[1] Заметим снова, что это профиль стратегий и соответствующие ожидания. — *Примеч. ред.*

три четверти имеют тип l. Функции полезностей высокопроизводительных и низкопроизводительных индивидов имеют вид

$$u_h(e) = w(e) - \frac{3}{4}e^2 \text{ и } u_l(e) = w(e) - e^2 .$$

Как и в предыдущем примере, игра начинается с предложения заработной платы (функции зарплаты) $w(\cdot)$. Игрок 2, индивид, после того как обнаружит свой тип, отвечает на предложение выбором уровня образования e. Затем фирма предлагает индивиду заработную плату $w(e)$, а тот решает, принять или отвергнуть это предложение. Если индивид оказывается высокопроизводительным, он выберет e так, чтобы максимизировать свою функцию полезности

$$u_h(e) = w(e) - \frac{3}{4}e^2 .$$

Он выберет $e = \hat{e}$, если $\bar{w} - \frac{3}{4}\hat{e}^2 > 0$, и примет предложение, в противном случае он выберет $e = 0$.

Если игрок 2 обнаружит, что является низкопроизводительным индивидом, то выберет значение e, максимизирующее его функцию полезности

$$u_l(e) = w(e) - e^2 .$$

Он выберет $e = \hat{e}$, если $\bar{w} - \hat{e}^2 > 0$, и примет предложение, в противном случае он выберет $e = 0$ и отклонит предложение.

Зная все это, фирма предложит функцию зарплаты, максимизирующую ее ожидаемый выигрыш. Ее ожидаемый выигрыш в информационном множестве $\{X, Y\}$ имеет вид

$$E(\bar{w}) = \frac{1}{4}[1,5e - w(e)] + \frac{3}{4}[e - w(e)] .$$

Поскольку функция зарплаты устроена так, что принимает значение 0 или некоторое фиксированное $\bar{w}$, то фирма назначит $\bar{w} \simeq \frac{3}{4}e^2$ (т.е. установит зарплату на уровне чуть выше, чем $\frac{3}{4}e^2$) или $\bar{w} \simeq e^2$. Рассмотрим два случая.

Случай I. $\bar{w} \simeq \frac{3}{4}e^2$.

Отсюда следует, что $e = \frac{2}{3}\sqrt{3\bar{w}}$. Поскольку $e^2 > \frac{3}{4}e^2 \simeq w(e)$, то $u_l(e) = w(e) - e < 0$, следовательно, индивид типа l отклонит такое предложение. В этом случае ожидаемый выигрыш фирмы составит

$$E(\bar{w}) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{3\bar{w}} - \bar{w}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{3\bar{w}} - \bar{w}) .$$

Дифференцируя, получим $E'(\bar{w}) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3\bar{w}}} - 1\right)$. Решая уравнение $E'(\bar{w}) = 0$, находим точку максимума ожидаемой полезности: $\bar{w} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Отсюда следует, что $e = 1$. Ожидаемая прибыль фирмы при такой зарплате имеет вид

$$E(\bar{w}) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} \times 1 - \frac{3}{4}\right) = 0{,}1875. \qquad (*)$$

Случай II. $\bar{w} \simeq e^2$.

В этом случае $e \simeq \sqrt{\bar{w}}$ и, поскольку $e^2 > \frac{3}{4}e^2$, индивид любого типа примет предложение.

Следовательно, ожидаемая прибыль фирмы составит

$$E(\bar{w}) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} \times \sqrt{\bar{w}} - \bar{w}\right) + \frac{3}{4}\left(\sqrt{\bar{w}} - \bar{w}\right) = \frac{9}{8}\sqrt{\bar{w}} - \bar{w}.$$

Дифференцируя, получаем $E'(\bar{w}) = \frac{9}{16\sqrt{w}} - 1$. Решая уравнение $E'(\bar{w}) = 0$, находим точку максимума функции ожидаемой полезности: $\sqrt{\bar{w}} = \frac{9}{16}$, откуда $\bar{w} = \frac{81}{256} = 0{,}3164$. Отсюда следует, что $e \geq \hat{e} = \frac{9}{16}$, и ожидаемая прибыль фирмы равна

$$E(\bar{w}) = \frac{9}{8} \times \frac{9}{16} - \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{81}{256} = 0{,}3164.$$

Поскольку прибыль в этом случае превосходит прибыль в (*), то фирма будет предлагать контракт $\bar{w} = \frac{81}{256} = 0{,}3164$. Отсюда следует, что $\hat{e} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$, и кроме этого, выбор индивида $e = 0{,}5625$ приносит индивиду максимум полезности независимо от его типа.

Таким образом, получено следующее равновесие.

- Игрок 1, фирма, предлагает зарплатный контракт

$$w(e) \simeq \begin{cases} 0, & \text{если } e < 0{,}5625, \\ 0{,}3164, & \text{если } e \geq 0{,}5625. \end{cases}$$

- Индивид принимает предложение вне зависимости от своего типа и выбирает уровень образования $e = 0{,}5625$.
- В информационном множестве $\{X, Y\}$ фирма предлагает заработную плату $\bar{w} \simeq 0{,}3164$.
- Индивид принимает предложение независимо от того, к какому типу он принадлежит.

Можно проверить, что это дает секвенциальное данное равновесие с системой ожиданий $\mu(X) = \frac{1}{4}$ и $\mu(Y) = \frac{3}{4}$.

В рассмотренном примере оба типа индивидов выбирают один и тот же уровень образования. Следовательно, мы имеем дело с **объединяющим равновесием,** поскольку сигнал (т.е. уровень образования) не позволяет выявить тип индивида. Стоит также отметить, что фирме выгодно трудоустроить оба типа индивидов за одинаковую заработную плату. Отсюда возникает интригующий вопрос: может ли что-то выиграть индивид с высокими способностями? ■

Далее рассмотрим игру торга, в которой дисконтирующий множитель игрока 2 может принимать одно из двух значений: δ_h с вероятностью p_h и δ_l с вероятностью $1-p_h$. Предполагается, что

$$0<\delta_l<\delta_h<1.$$

Это **игра торга с несовершенной информацией**. Это игра торга, в которой предложения и контрпредложения делаются в течение трех периодов; если стороны не сумели достичь соглашения, то после третьего периода игра заканчивается, и участники получают выигрыши (0,0). Дерево игры изображено на рис. 8.27.

Пример 8.24 (трехпериодная игра торга). Найдем совершенное байесовское равновесие игры. В периоде 3 игрок 2 любого из двух типов (*h* или *l*), примет предложение $s_{3,1}<1$, но близкое к 1 (т.е. $s_{3,1}\approx 1$), поскольку отказ приведет к нулевому выигрышу. Следовательно, в периоде 3 игрок 1 предложит $s_{3,1}=1$ (на самом деле сделает предложение $s_{3,1}$ меньшее, но очень близкое к 1, и оба типа согласятся на это предложение). В этом случае выигрыш игрока 1 равен δ_1^2, а игрок 2 получит 0 (или несколько больше, чем 0). Таким образом, оптимальная стратегия в начале периода 3 имеет вид

$$s_{3,1}^*\approx 1 \text{ и } b_2^*(3|h)=b_2^*(3|l)=\textit{Принять}.$$

Предвидя такое предложение в периоде 3, во втором периоде игрок 2 (типа *h* или *l*) предложит (как и в случае совершенной информации) $s_{2,1}=\delta_1$, и игрок 1 согласится на это предложение. Следовательно, оптимальная стратегия в начале периода 2 составляет

$$s_{2,1}^*=\delta_1 \text{ и } b_1^*(2)=\textit{Принять}.$$

В этом случае игрок 2 получает выигрыш

$$\delta_h(1-\delta_1)\text{, если относится к типу } h\text{, и}$$

$$\delta_l(1-\delta_1)\text{, если относится к типу } l.$$

В периоде 1 игрок 1 должен предложить как минимум $s_{1,1}=1-\delta_l(1-\delta_1)$, тогда игрок 2 получит как минимум

$$s_{1,2}=\delta_l(1-\delta_1);$$

в противном случае игрок 2 отклонит предложение независимо от своего типа. Если игрок 2 отклонит предложение игрока 1 в периоде 1, то игра перейдет ко второму периоду.

Если игрок 1 предлагает $1-\delta_l(1-\delta_1)$ в периоде 1, то игрок 2 согласится, если его тип *l*, и откажется, если его тип *h*. Если игрок 2 имеет тип *h* и отклонит предложение $1-\delta_l(1-\delta_1)$, то игра перейдет в период 2, где игрок 2

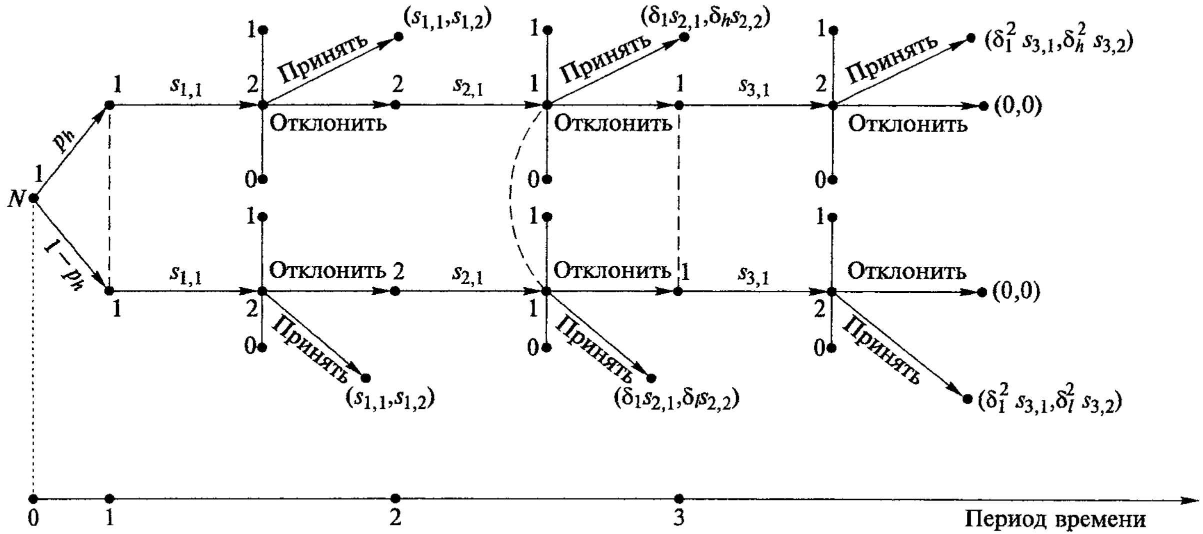

N
p_h
$1-p_h$
$s_{1,1}$
$s_{2,1}$
$s_{3,1}$
Принять
Отклонить
$(s_{1,1}, s_{1,2})$
$(\delta_1 s_{2,1}, \delta_h s_{2,2})$
$(\delta_1 s_{2,1}, \delta_l s_{2,2})$
$(\delta_1^2 s_{3,1}, \delta_h^2 s_{3,2})$
$(\delta_1^2 s_{3,1}, \delta_l^2 s_{3,2})$
(0,0)
Период времени

Рис. 8.27

предложит $s_{2,1}^* = \delta_1$ игроку 1. Таким образом, игрок 1 получит $\delta_1 \times \delta_1 = \delta_1^2$. Следовательно, если игрок 1 предлагает $1 - \delta_l(1 - \delta_1)$ игроку 2 в первый период, ожидаемый выигрыш игрока 1 равен

$$p_h\delta_1^2 + (1 - p_h)[1 - \delta_l(1 - \delta_1)].$$

Если игрок 1 предложит $1 - \delta_h(1 - \delta_1)$ игроку 2 в первый период, то игрок примет предложение независимо от его типа. Поэтому игрок 1 максимизирует ожидаемый выигрыш в первом периоде, когда он:

- *предлагает* $s_{1,1} = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$, *если*

$$p_h\delta_1^2 + (1 - p_h)[1 - \delta_l(1 - \delta_1)] > 1 - \delta_h(1 - \delta_1)\text{, и}$$

- *предлагает* $s_{1,1} = 1 - \delta_h(1 - \delta_1)$ *в противном случае.*

Таким образом, делаемое в равновесии предложение может быть таким, при котором игрок 2 (типа *h*) отклонит предложение и игра перейдет в период 2, или таким, при котором оно достаточно привлекательно для того, чтобы оба типа игрока 2 на него согласились. Предложение игрока 1 в первом периоде обеспечивает максимум его ожидаемого выигрыша.

Из наших рассуждений вытекает следующий результат.

Предложение 8.25. *В трехпериодной игре торга с несовершенной информацией, в которой выигрыш при несогласии составляет* (0,0), *существует совершенное байесовское равновесие со следующими стратегиями.*

Стратегия игрока 1

- *Период 1*: *Предложить* $s_{1,1}^* = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$, *если*

$$p_h\delta_1^2 + (1 - p_h)[1 - \delta_l(1 - \delta_1)] > 1 - \delta_h(1 - \delta_1);$$

  иначе предложить $s_{1,1}^* = 1 - \delta_h(1 - \delta_1)$.
- *Период 2*: *Принять, если* $s_{2,1}^* = \delta_1$.
- *Период 3*: *Предложить* $s_{3,1}^* \approx 1$. *Скорректированные ожидания игрока 1 имеют вид*:

  Игрок 1 ожидает, что игрок 2 имеет тип h, если его предложение в периоде 1 было $s_{1,1}^* = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$, *и игрок 2 его отверг. Игрок 1 ожидает, что игрок 2 имеет тип h с вероятностью* p_h, *если в периоде 1 он предложил* $s_{1,1}^* = 1 - \delta_h(1 - \delta_1)$, *и игрок 2 согласился.*

Стратегия игрока 2

- *Период 1*: *Отклонить* $s_{1,1}^* = 1 - \delta_l(1 - \delta_1)$, *если он имеет тип h, в противном случае принять.*
- *Период 2*: *Предложить* $s_{2,1}^* = \delta_1$ *независимо от типа.*
- *Период 3*: *Принять, если* $s_{3,1}^* \approx 1$.

Совершенное байесовское равновесие, возникающее, когда

$$p_h\delta_1^2 + (1 - p_h)[1 - \delta_l(1 - \delta_1)] > 1 - \delta_h(1 - \delta_1),$$

является *разделяющим равновесием*, поскольку тип l игрока 2 сразу же соглашается на предложение $s^*_{1,1} = 1 - \delta_l(1-\delta_1)$, но тип h игрока 2 отказывается от него. Другое совершенное байесовское равновесие является *объединяющим равновесием*, при котором игрок 1 предлагает $s^*_{1,1} = 1 - \delta_h(1-\delta_1)$, и оба типа соглашаются, при этом игрок 1 не изменяет своих ожиданий относительно типа игрока 2.

Рассмотрим далее игру торга, в которой тип одного из участников известен только ему, а число периодов предложений и контрпредложений не ограничено. Это **динамическая игра с бесконечным горизонтом и несовершенной информацией**.

Пример 8.26 (игра торга с бесконечным горизонтом и несовершенной информацией). Как и ранее, игра с бесконечным горизонтом может трактоваться в качестве игры с конечным горизонтом, в которой выигрыши в заключительном периоде являются выигрышами продолжения (дополнительными выигрышами, сверх полученных в игре).

В игре на рис. 8.28 выигрыш продолжения имеет вид $(x_h, 1-x_h)$, если игрок 2 имеет тип h, и $(x_l, 1-x_l)$, если его тип l. Если игрок 1 не смог узнать что-либо о типе игрока 2 до третьего периода, у него нет возможности выяснить, будет ли его выигрыш продолжения равен x_h или x_l. Однако если игрок 1 пришел к достоверному заключению о типе игрока 2, то у него будут и уверенные ожидания о выигрышах продолжения.

Если игрок 1 знает, что игрок 2 имеет тип h, то (в соответствии с теоремой 6.38) его равновесный выигрыш продолжения составит

$$x_h = \frac{1-\delta_h}{1-\delta_1\delta_h}.$$

Аналогично, если игрок 1 знает, что игрок 2 имеет тип l, то его равновесный выигрыш продолжения будет равен

$$x_l = \frac{1-\delta_l}{1-\delta_1\delta_l}.$$

Из неравенств $0 < \delta_l < \delta_h < 1$ следует, что $0 < x_h < x_l < 1$ (почему?). Отсюда получаем неравенство

$$\delta_l(1-\delta_1 x_l) < \delta_h(1-\delta_1 x_h).$$

Следующий результат показывает, что существует совершенное байесовское равновесие, при котором игрок 1 в начале торгов предлагает либо $x_h = \dfrac{1-\delta_h}{1-\delta_1\delta_h}$, либо $1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)$.

Предложение 8.27. *Рассмотрим игру торга с бесконечным горизонтом и несовершенной информацией, такую что*:

(1) игрок 1 имеет дисконтирующий множитель δ_1;

(2) игрок 2 имеет дисконтирующий множитель δ_h с вероятностью p_h и δ_l с вероятностью $1-p_h$, где $0 < \delta_l < \delta_h < 1$.

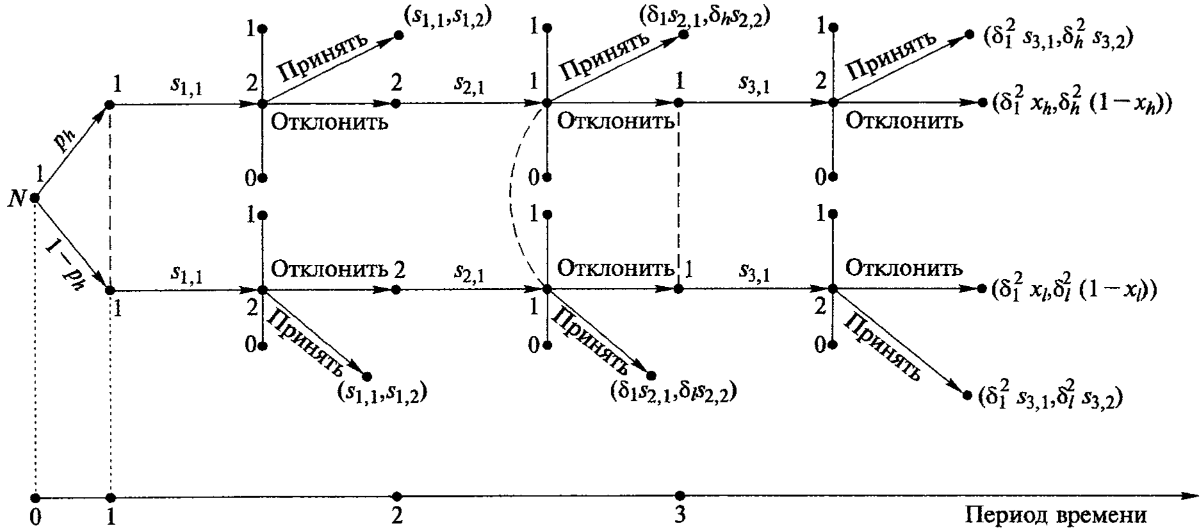

N
p_h
$1-p_h$
$s_{1,1}$
$s_{2,1}$
$s_{3,1}$
Принять
Отклонить
$(s_{1,1}, s_{1,2})$
$(\delta_1 s_{2,1}, \delta_h s_{2,2})$
$(\delta_1^2 s_{3,1}, \delta_h^2 s_{3,2})$
$(\delta_1^2 x_h, \delta_h^2 (1-x_h))$
$(\delta_1^2 x_l, \delta_l^2 (1-x_l))$
$(\delta_1 s_{2,1}, \delta_l s_{2,2})$
$(\delta_1^2 s_{3,1}, \delta_l^2 s_{3,2})$
Период времени

Рис. 8.28

Тогда в игре существует совершенное байесовское равновесие, при котором игрок 1 предлагает

$$s_{1,1}^* = \begin{cases} 1-\delta_l(1-\delta_1 x_h), & \text{если } p_h\delta_1 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)] > x_h, \\ x_h, & \text{если } p_h\delta_1 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)] \le x_h. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что

$$1-\delta_l(1-\delta_1 x_h) > x_h\,.$$

Игрок 1 предлагает $1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)$: Если игрок 1 предложит $s_{1,1} = 1-$ $-\delta_l(1-\delta_1 x_h)$, то игрок 2 типа h отвергнет предложение в периоде 1 и сделает контрпредложение $s_{2,1} = \delta_1 x_h$ в периоде 2. Игрок 1 примет контрпредложение, поскольку теперь ожидает, что игрок 2 имеет тип h. В этом случае игрок 2 получает выигрыш $\delta_h(1-\delta_1 x_h) > \delta_l(1-\delta_1 x_h)$, если отвергнет предложение в периоде 1, и получает $\delta_l(1-\delta_1 x_h)$, если согласится в периоде 1. Таким образом, если игрок 2 имеет тип h, то отклонит это предложение, и игра перейдет ко второму периоду.

Если игрок 2 имеет тип l, но, притворившись типом h, отклонит предложение в периоде 1, то в периоде 2 он предложит $s_{2,1} = \delta_1 x_h$, и игрок 1 примет это предложение, если он ожидает, что имеет дело с типом h игрока 2. Тогда выигрыш игрока 2 составит $\delta_l(1-\delta_1 x_h)$. Однако игрок 2 получил бы такой же выигрыш, приняв предложение в первом периоде. Таким образом, игрок 2 типа l должен принять предложение $s_{1,1} = 1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)$ игрока 1 в первом периоде. *В этом случае ожидаемый выигрыш игрока 1 составляет* $p_h\delta_1 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)]$.

Игрок 1 предлагает x, такой что $1-\delta_l(1-\delta_1 x_h) > x > x_h$: Игрок 2 типа h должен отказаться от такого предложения в периоде 1. Во втором периоде он сделает контрпредложение $\delta_1 x_h$. Игрок 2 типа l будет подражать игроку 2 типа h, так как в этом случае он получит $\delta_l(1-\delta_1 x_h) > 1-x$. Ожидания игрока 1 относительно типа игрока при этом не изменятся (т.е. он будет ожидать, что тип игрока 2 либо h, либо l), но он согласится на контрпредложение. Его выигрыш составит $\delta_1 x_h < x_h$.

Игрок 1 предлагает x_h: Оба типа игрока 2 согласятся. Ожидания игрока 1 относительно типа игрока 2 остаются такими же. Выигрыш игрока 1 равен x_h.

Игрок 1 предлагает $s_{1,1} = x > 1-\delta_l(1-\delta_1 x_h) > x_h$: Оба типа игрока 2 отвергнут предложение и сделают контрпредложение $\delta_1 x_h$ в периоде 2. Игрок 1 согласится на контрпредложение, если $x_h \ge p_h\delta_1 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)]$. Если же $p_h\delta_1 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)] > x_h$, то игрок 1 отклонит предложение игрока 2 и сделает контрпредложение $\delta_1(1-\delta_l(1-\delta_1 x_h))$. Игрок 2 согласится в случае, если его тип l; в противном случае он откажется и сделает контрпредложение $\delta_1^2 x_h$ в периоде 3. Игрок 1 согласится. Выигрыш игрока 1 составит $\max\{\delta_1(p_h\delta_1 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)]), \delta_1 x_h\}$.

Из сделанных наблюдений вытекает, что для максимизации ожидаемого выигрыша в первом периоде игрок 1 предложит

$$s_{1,1}^* = \begin{cases} 1-\delta_l(1-\delta_1 x_h), & \text{если } p_h\delta_1^2 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)] \geq x_h, \\ x_h, & \text{если } p_h\delta_1^2 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)] \leq x_h. \end{cases} \blacksquare$$

Возникает очевидный вопрос, существует ли равновесие, в котором игроку 1 разумно сделать предложение $x_l = \dfrac{1-\delta_l}{1-\delta_1\delta_l}$. Заметим, что поскольку $p_h > 0$, то если подобное предложение будет отвергнуто, игрок 1 не сможет скорректировать свои ожидания относительно типа игрока 2, так как игроку 2 типа l выгодно притвориться игроком типа h. Игрок 1 понимает, что ему необходимо предоставить более выгодное предложение игроку 2, если он является типом h, и тип l, таким образом, получит выгоду, играя в этих ситуациях как тип h. Минимальное предложение игроку 2, которое приводим к различному поведению его типов, — это $s_{1,1} = 1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)$. Что мы и видели в совершенном байесовском равновесии, описанном в предложении 8.27. По мере того, как p_h приближается к нулю, игрок 1 может увеличить свой выигрыш, сделав в первом периоде предложение, которое, подобно $s_{1,1} = 1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)$, ведет к различным откликам разных типов игрока 2, но такое предложение всегда будет больше, чем x_l. В этом случае возможны отсрочки в достижении соглашения. Совершенное байесовское равновесие, которое имеет место в этом случае, является *разделяющим равновесием.*

В этом предложении были описаны лишь исходы совершенного байесовского равновесия; стратегии и ожидания игроков детально не описывались, хотя и были использованы при обосновании того, почему те или иные исходы представляют собой совершенное байесовское равновесие. Приведенная в доказательстве предложения 8.27 аргументация опирается на тот факт, что выигрыши продолжения после трех периодов игры выглядят так же, как и выигрыши в начале динамической игры торга. Таким образом, если игрок 1 уверует, что игрок 2 имеет тип h, то выигрыш продолжения в игре торга составит x_h. Кроме того, необходимо отметить, что в совершенном байесовском равновесии игрок 2 типа l заключит более выгодную сделку в случае частной информации по сравнению со случаем совершенной информации, в то время как игрок 2 типа h выгод не получит; более того, возникнут некоторые (незначительные) потери, поскольку присутствует отсрочка в достижении соглашения. ■

Рассмотрим пример, описывающий простую версию переговоров по заключению контракта о рукописи, в котором дисконтирующий множитель автора рукописи не известен издателю и может принимать одно из двух значений.

Пример 8.28 (контракт на рукопись). Издатель (игрок 1) ведет переговоры с автором (игрок 2). Издатель начинает процесс торга с некоторого предложения автору. В подобных случаях контракт зачастую имеет форму процента от объема продаж, выплачиваемого автору. Предложение может находиться в пределах 0% и 30%, причем предложение в 30% от объема продаж означает, что издатель остается без прибыли. В этом случае доля пирога (прибыли), получаемая издателем, равна нулю, и вся прибыль уходит автору. С другой стороны, контракт с 15% от объема продаж предполагает, что пирог они делят поровну.

Как только издатель сделал предложение, автор может принять его или отклонить, вернувшись с контрпредложением. Такой процесс предложений и контрпредложений может в принципе длиться любое число периодов с типичным временем для ответа в одну неделю между предложениями. То есть процесс торга (о контракте на рукопись) описывается динамической игрой торга с возможностью для многих предложений и контрпредложений. Динамическая игра торга начинается с того, что издатель, которого мы считаем игроком 1 (покупатель), делает предложение $s_{1,1}$, которое, напомним, представляет собой часть (долю) пирога, получаемую игроком 1. Известно, что дисконтирующий множитель издателя в течение семи дней (время между предложениями) составляет $\delta = 0{,}9$. У издателя, однако, нет уверенности относительно дисконтирующего множителя автора, но он знает, что тот может быть относительно терпеливым с дисконтирующим множителем $\delta = 0{,}85$ или ненавидеть всякий торг, имея при этом низкий дисконтирующий множитель $\delta = 0{,}75$. Вероятность того, что автор окажется одним из двух перечисленных типов, равна 0,5. Следовательно, динамическая игра торга является игрой с несовершенной информацией, где $\delta_h = 0{,}85$ и $\delta_l = 0{,}75$.

Решение для последовательного процесса торга, таким образом, находим, анализируя равновесие игры торга. Такое равновесие описано в теореме 8.27. Для данного примера имеем

$$x_h = \frac{1-0{,}85}{1-0{,}9\times 0{,}85} \approx 0{,}63829\,.$$

Далее,

$$p_h\delta_1^2 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_h x_h)] =$$

$$= \frac{1}{2}\times(0{,}9)^2\times 0{,}63829 + \frac{1}{2}[1-0{,}75(1-0{,}85\times 0{,}63829)] \approx$$

$$\approx 0{,}58696\,.$$

Поскольку эта величина меньше, чем $x_h = 0{,}63829$, предложение издателя (согласно теореме 8.27) в первом периоде — это

$$s_{1,1} = x_h = 0{,}63829$$

доли от 30% его валовой выручки, которую он оставляет за собой (нужно иметь в виду, что торг идет о 30% от валовой выручки, т.е. предполагаемой после продаж сумме прибыли). В этом случае автор примет предложение, и торг завершится в первом периоде. Доля от валовых продаж, предлагаемая автору, равна

$$0{,}3(1-0{,}63829) = 0{,}3\times 0{,}36171 = 0{,}108513\,.$$

Таким образом, вероятно, что в этом случае торг завершится (уже) в первом периоде, причем издатель предложит автору приблизительно 11% от валовой выручки, или 36,17% от ожидаемой после продаж прибыли. ■

Заключительный пример этой главы представляет собой приложение концепции совершенного байесовского равновесия к анализу сговора двух фирм в случае, когда они имеют частную информацию о предельных издержках производства. В рассматриваемой модели две фирмы разыгрывают бесконечно повторяющуюся дуополию Курно, не зная предельные издержки другой фирмы. Это превращает повторяющуюся дуополию Курно в игру с несовершенной информацией, в которой тип (в данном случае предельные издержки) фирмы является частной информацией этой фирмы. Обсуждается вопрос о том, как наличие частной информации изменяет равновесные исходы игры, а также возможен ли сговор и в такой ситуации. Модель и способ анализа основаны на работе [20].

Пример 8.29 (повторяющаяся дуополия по Курно с частной информацией об издержках). Рассмотрим игру дуополии по Курно, в которой две фирмы производят один и тот же товар; функция обратного спроса на него задается в виде

$$p(q) = A - p\,.$$

Обе фирмы знают, что совместное распределение вероятностей предельных издержек фирм имеет вид как в табл. 8.1. Однако фирма 1 в точности знает, равны ли ее предельные издержки $c_L = 1$ или $c_H = 2$. Аналогично фирме 2 известно значение c_2.

Фирмы разыгрывают эту игру (дуополию Курно) с несовершенной информацией в течение бесконечного числа периодов. Будем обозначать дисконтирующий множитель фирм через δ, где $0 < \delta < 1$.

Покажем, что вектор объемов производства $(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$, максимизирующий совокупную прибыль фирм, — совершенное байесовское равновесие этой игры с бесконечным горизонтом. Такое совершенное байесовское равновесие является объединяющим: (точные) значения предельных издержек фирм не выявляются, и ожидания о предельных издержках фирм с течением времени не меняются.

Ожидаемая совокупная прибыль фирм имеет вид

$$E\pi = (A - q_1 - q_2)(q_1 + q_2) - 0{,}25c_L(q_1 + q_2) - 0{,}25c_H(q_1 + q_2) -$$
$$- 0{,}25(c_L q_1 + c_H q_2) - 0{,}25(c_H q_1 + c_L q_2)\,.$$

Таким образом, совокупный выпуск $q = q_1 + q_2$ должен максимизировать совокупную ожидаемую прибыль, которая может быть записана как

$$E\pi = (A - q)q - 0{,}5c_L q - 0{,}5c_H q\,.$$

Из условий первого порядка получаем

$$A - 2q - 0{,}5(c_L + c_H) = 0\,,$$

Таблица 8.1

	C_L	C_H
C_L	0,25	0,25
C_H	0,25	0,25

откуда

$$\hat{q} = \frac{A - 0,5(c_L + c_H)}{2} = \frac{2A - c_H - c_L}{4}.$$

Следовательно, если фирмы делят рынок поровну, то их выпуски должны быть равными

$$\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \frac{2A - c_H - c_L}{8}. \qquad (8.13)$$

Цена на рынке в каждом из периодов тогда будет равна

$$\hat{p} = A - \frac{2A - c_H - c_L}{4} = \frac{2A + c_H + c_L}{4}.$$

При этом прибыли фирм в каждом периоде равны

$$\hat{\pi}_1 = \left(\frac{2A + c_H + c_L}{4} - c_1\right)\left(\frac{2A - c_H - c_L}{8}\right) \text{ и } \hat{\pi}_2 = \left(\frac{2A + c_H + c_L}{4} - c_2\right)\left(\frac{2A - c_H - c_L}{4}\right).$$

Сделаем следующее предположение:

$$A > c_H + \frac{c_H - c_L}{2}.$$

При таком предположении прибыль каждой фирмы при производстве q_i, $i = 1,2$, оказывается положительной, даже если предельные издержки фирм максимальны: $c_i = c_H$.

Теперь заметим, что если фирма 1 производит q_1, то прибыль фирмы 2 (при выборе ему объема производства q_2) составляет

$$\left(A - \frac{2A - c_H - c_L}{8} - q_2\right)q_2 - c_2 q_2.$$

Максимум прибыли достигается при значении $\tilde{q}_2$, равном

$$\tilde{q}_2 = \begin{cases} \dfrac{6A + c_H - 7c_L}{16}, & \text{если } c_2 = c_L, \\ \dfrac{6A + c_L - 7c_H}{16}, & \text{если } c_2 = c_H. \end{cases}$$

В этом случае цена равна

$$\tilde{p} = \begin{cases} \dfrac{6A + c_H + 9c_L}{16}, & \text{если } c_2 = c_L, \\ \dfrac{6A + c_L + 9c_H}{16}, & \text{если } c_2 = c_H. \end{cases}$$

Прибыль фирмы 2 определяется как

$$\tilde{\pi}_2 = \begin{cases} \dfrac{(6A + c_H - 7c_L)^2}{256}, & \text{если } c_2 = c_L, \\ \dfrac{(6A + c_L - 7c_H)^2}{256}, & \text{если } c_2 = c_H. \end{cases}$$

Так как $\tilde{q}_2 \neq \hat{q}_2$ при $c_2 = c_H$ и $c_2 = c_L$, фирма 2 может захотеть производить $\tilde{q}_2$, а не $\hat{q}_2$ в том случае, когда фирма 1 производит $\hat{q}_1$. Отсюда возникает вопрос, почему фирмы станут производить объемы $(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$ даже если это эти количества максимизируют совокупную прибыль. Следующий результат дает ответ на этот вопрос, и мы покажем, что ситуация, когда каждая фирма производит $\hat{q}_i$, $i = 1, 2$, в каждом периоде является совершенным байесовским равновесием в игре с бесконечным горизонтом.

Предложение 8.30. *Существует $\underline{\delta} > 0$, такое что исход, при котором выпуск фирм составляет $(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$ в каждом периоде, является исходом совершенного байесовского равновесия игры с бесконечным горизонтом при всех дисконтирующих множителях $\delta \geq \underline{\delta}$.*

Доказательство. Докажем это утверждение, указав профиль стратегий, при котором ни одной из фирм невыгодно отклоняться от производства в объемах $(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$ в любом из периодов в случае, когда другая фирма придерживается «своей» стратегии, соответствующей этому профилю. Опишем только стратегию фирмы 1, поскольку стратегия фирмы 2 аналогична.

(1) Если фирма 2 в прошлом производила $\hat{q}_2$, то фирма 1 производит $\hat{q}_1$.

(2) Если фирма 2 отклоняется от производства q_2, тогда фирма 1 производит $q_1 = A - c_L$ в течение следующих T периодов. После этого она производит $q_1 = \hat{q}_1 + \frac{1}{n}$. Тогда фирма 2 будет производить $q_2 = \hat{q}_2 - \frac{1}{n}$, где n достаточно велико для того, чтобы $(A - \hat{q}_1 - \hat{q}_2) - q_2 > 0$. Это стратегия наказания, при которой прибыль фирмы 2 положительна, но меньше, чем та прибыль, которую фирма получила бы, если бы не уклонилась. Продолжительность стадии наказания (T периодов) должна быть достаточно большой, чтобы исключить возможность получения выгоды от уклонения.

(3) Если фирма 1 уклоняется от стратегии наказания в течение T периодов, когда ей требуется производить $q_1 = A - c_L$, то фирма 2 прибегает к стратегии наказания против фирмы 1, производя $q_2 = A - c_L$ в течение T_1 периодов, после чего фирмы производят $q_1 = \hat{q}_1 - \frac{1}{n}$ и $q_2 = \hat{q}_2 + \frac{1}{n}$. Продолжительность стадии наказания (T_1 периодов) должна быть достаточно большой, чтобы исключить возможность получения выгоды от уклонения.

(4) Если фирма 2 отклоняется от производства либо $q_2 = \hat{q}_2 - \frac{1}{n}$, либо $q_2 = \hat{q}_2 + \frac{1}{n}$, то фирма 1 повторяет стратегию наказания из (2).

Покажем, что фирма 2 не может получить выгоды при отклонении ни в одном из периодов.

Случай I. *Фирма 2 уклоняется от* $(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$.

В этом случае наибольшая возможная величина дисконтированной (суммы) прибыли фирмы 2 равна

$$\tilde{\pi}_2(c_L) + \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_2 - \frac{2A + c_H + c_L}{4n}\right)^1.$$

Если фирма 2 не будет отклоняться, ее то дисконтированная прибыль равна

$$\frac{\hat{\pi}_2}{1-\delta}.$$

Таким образом, фирма 2 не сможет получить выгоды при отклонении, если

$$\tilde{\pi}_2(c_L) + \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_2 - \frac{2A + c_H + c_L}{4n}\right) \le \frac{\hat{\pi}_2}{1-\delta},$$

т.е. если

$$\tilde{\pi}_2(c_L) - \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta}\left(\frac{2A + c_H + c_L}{4n}\right) \le \frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta}\hat{\pi}_2. \qquad (8.14)$$

В формуле (8.14) величина $\frac{\delta^{T+1}}{1-\delta}$ неограниченно растет при $\delta \to 1$, а $\frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta} \to T+1$ при $\delta \to 1$. Из этого следует, что существует δ_1, такое что неравенство (8.14) верно при всех $\delta \ge \delta_1 > 0$.

Случай II. *Фирма 1 уклоняется от стратегии наказания фирмы 2.*

В этом случае фирма 2 производит

$$q_2 = \begin{cases} A - c_L & T_1 \text{ периодов}, \\ \dfrac{2A - c_H - c_L}{8} + \dfrac{1}{n} & \text{после этого}, \end{cases}$$

а фирма 1

$$q_1 = \begin{cases} 0 & T_1 \text{ периодов}, \\ \dfrac{2A - c_H - c_L}{8} - \dfrac{1}{n} & \text{после этого}. \end{cases}$$

[1] Здесь и далее в расчете изменений прибыли есть неточность. При изменении объема выпуска двух фирм на величину $1/n$ так, чтобы совокупный выпуск не изменялся (а следовательно, не изменялись и цены), прибыль фирмы i изменяется на величину $p(q_1+q_2) - c_i$. В рассматриваемой ситуации, когда $q_1 = q_2 = \frac{2A - c_H - c_L}{4}$, цена производимого товара $p(q_1+q_2) = \frac{2A - c_H - c_L}{4}$, а изменение прибыли равно $\frac{2A - c_H - c_L}{4} - c_i$. Поэтому как данную формулу, так и соответствующие соотношения ниже следует несколько изменить. Так, вместо соотношения $\tilde{\pi}_2(c_L) + \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_2 - \frac{2A + c_H + c_L}{4n}\right)$ следует записать соотношение $\tilde{\pi}_2(c_L) + \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_2 - \frac{2A + c_H + c_L - 4c_2}{4n}\right)$. Заметим, однако, что подобные корректировки соответствующих соотношений не влияют на справедливость сделанных авторами выводов, поскольку сделанное ими предположение о том, что $A > c_H + \frac{c_H - c_L}{2}$, гарантирует, что величина изменения $\frac{2A + c_H + c_L - 4c_2}{4n}$ (как и величина $\frac{2A + c_H + c_L}{4n}$) положительна. — *Примеч. ред.*

Фирме 1 невыгодно отклоняться в периоде $t(t<T)$, если

$$\pi_1^M(c_L)+\frac{1-\delta^{T-t+T_1+1}}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_1-\frac{2A+c_H+c_L}{4n}\right)\le\frac{1-\delta^{T-t}}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_1+\frac{2A+c_H+c_L}{4n}\right),$$

где правая часть неравенства — дисконтированная сумма прибылей фирмы 1 в том случае, если она не станет отклоняться. $\pi_1^M(c_L)$ — монопольная прибыль фирмы 1, когда ее издержки равны c_L. Это максимум, что может получить фирма в любом каком-нибудь периоде. Неравенство преобразуется к виду

$$\pi_1^M(c_L)+\frac{\delta^{T-t+T_1+1}}{1-\delta}\left(\frac{2A+c_H+c_L}{4n}\right)\le$$

$$\le\frac{\delta^{T-t}(1-\delta^{T_1+1})}{1-\delta}\hat{\pi}_1+\frac{\delta^{T-t}}{1-\delta}\left(\frac{2A+c_H+c_L}{4n}\right). \tag{8.15}$$

В (8.15) $\frac{\delta^{T-t+T_1+1}}{1-\delta}$ неограниченно растет, по мере того как $\delta\to1$, и

$$\frac{\delta^{T-t}(1-\delta^{T_1+1})}{1-\delta}=\delta^{T-t}\times\frac{1-\delta^{T_1+1}}{1-\delta}\to1\times(T_1+1)$$

при $\delta\to1$. Из этого следует, что существует δ_2, такое что неравенство (8.15) верно при всех $\delta\ge\delta_2>0$.

Случай III. *Фирма 2 отклоняется от* $\left(\hat{q}_1+\frac{1}{n},\hat{q}_2-\frac{1}{n}\right)$.

В этом случае фирма 1 производит

$$q_1=\begin{cases}A-c_L & T\text{ периодов},\\ \hat{q}_1+\frac{1}{n} & \text{после этого}.\end{cases}$$

Фирме 2 невыгодно отклоняться, если

$$\tilde{\pi}_2(c_L)+\frac{\delta^{T+1}}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_2-\frac{2A+c_H+c_L}{4n}\right)\le\frac{1}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_2-\frac{2A+c_H+c_L}{4n}\right)$$

или

$$\tilde{\pi}_2(c_L)\le\frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta}\left(\hat{\pi}_2-\frac{2A+c_H+c_L}{4n}\right). \tag{8.16}$$

Выражение $\frac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta}\to T+1$ при $\delta\to1$, поэтому из (8.16) следует, что существует δ_3, такое что неравенство (8.16) верно при всех $\delta\ge\delta_3>0$ для достаточно больших значений T.

Случай IV. *Фирма 1 отклоняется от* $\left(\hat{q}_1+\frac{1}{n},\hat{q}_2-\frac{1}{n}\right)$.

В этом случае фирма 2 играет роль, которую исполняла фирма 1 в случае III, поэтому справедливы те же аргументы, что и в случае III. Отсюда следует, что для достаточно больших T при всех $\delta\ge\delta_3$ фирма 1 не сможет получить выгоды при отклонении.

Пусть $\underline{\delta} = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тогда неравенства (8.14)–(8.16) справедливы при всех $\delta \geq \underline{\delta}$. Это в конечном счете показывает, что фирма 2 не может получить выгоды при отклонении от выпуска $\hat{q}_2$, если используется стратегия, описанная в (1)–(4). Поскольку фирма 1 также не станет отклоняться в случае, когда фирма 2 использует аналогичную стратегию, этот профиль стратегий — равновесие (с указанными равновесными объемами производства). Это совершенное байесовское равновесие, так как случаи I–IV показали, что отклонение невыгодно на любом этапе игры с бесконечным горизонтом, включая отклонение в стадии наказания, независимо от ожиданий фирмы относительно предельных издержек другой фирмы. Это так, в силу того что при отклонении одной из фирм другая фирма начинает производить $q = A - c_L$, следовательно, прибыли равны нулю независимо от того, каковы предельные издержки фирм. В результате уклонившаяся фирма наказывается независимо от того, какие у нее при этом предельные издержки. ■

Полученное совершенное байесовское равновесие является объединяющим, поскольку фирма производит один и тот же объем выпуска при высоких предельных издержках c_H и при низких предельных издержках c_L. ■

Упражнения

1. Рассмотрим игру примера 8.19, изображенную на рис. 8.23. Предположим, что пакет акций e удовлетворяет неравенству

$$p(eh - I) + (1 - p)(el - I) \geq (1 + i)I\ .$$

   Покажите, что стратегия *Принять* в информационном множестве $\{X, Y\}$ является секвенциально рациональной. [Подсказка: если C выбирает *Принять* с вероятностью q и *Отказаться* с вероятностью $1 - q$, то $q = 1$ максимизирует ожидаемый выигрыш игрока C.]

2. Рассмотрим игру из примера 8.19, изображенную на рис. 8.23. Какой наименьший пакет акций e должен предложить предприниматель инвестору, чтобы тот принял предложение? [Ответ: $e = \dfrac{(2+i)I}{ph + (1-p)l}$.]

3. Покажите, что если параметры игры примера 8.19, изображенной на рис. 8.23, удовлетворяют неравенству

$$(2 + i)I > e[ph + (1 - p)l]\,,$$

   то проект не будет финансироваться.

4. Рассмотрим сигналинговую игру примера 8.22, дерево которой изображено на рис. 8.25. Покажите, что полученное там равновесие по Нэшу $(m^*, (\{e_l^*(m), e_h^*(m)\}, s^*))$ является секвенциальным равновесием со следующими ожиданиями μ на информационном множестве $\{X, Y\}$:

$$\mu(X) = 1\,,\ \mu(Y) = 0\,,\ \text{если}\ e = m\,,\ \text{и}$$

$$\mu(X) = 0\,,\ \mu(Y) = 1\,,\ \text{если}\ e = \frac{2}{3}m\,.$$

5. Рассмотрим сигналинговую игру рынка труда из примера 8.22 со следующими характеристиками:

$$w(e) = \frac{1}{4}e^2 + me + 0{,}1;$$

$$u_h(e) = w(e) - \frac{1}{2}e^2;$$

$$u_l(e) = w(e) - \frac{3}{4}e^2.$$

Предположим, что прибыль фирмы задается выражением $3e - w(e)$, если индивид обладает высокими способностями, и $e - w(e)$, если низкими способностями. Найдите разделяющее равновесие игры. Чему равна ожидаемая прибыль фирмы? [Ответ: $m = \frac{14}{17}$, $e_h = 2m$, $e_l = m$; ожидаемая прибыль равна 1,34.]

6. Снова рассмотрим сигналинговую игру из примера 8.22 с теми же функциями полезностей и прибыли, но с кусочно-постоянной (двухступенчатой) функцией заработной платы, как в примере 8.23. Есть ли в этой сигналинговой игре объединяющее равновесие?

7. Можно утверждать, что при линейном контракте в сигналинговой игре рынка труда существует разделяющее равновесие, так как индивид с высокими способностями более производительный. Предположим, что при заданном уровне образования оба типа индивидов одинаково производительны, но индивид с высокими способностями может получить образование при более низких издержках. Какой была бы природа секвенциального равновесия? [Подсказка: измените выигрыши в игре на рис. 8.25 в случае, когда индивид с высокими способностями принимает контракт, на $(e - w(e), w(e) - \frac{1}{2}e^2)$.]

8. Каким будет предложение заработной платы, если в сигналинговой игре рынка труда фирма использует двухступенчатое предложение из игры предыдущего упражнения? [Подсказка: заметьте, что $E(w) = e - w$.]

9. В сигналинговых играх двух предыдущих упражнений какой из двух контрактов будет использовать фирма: двухступенчатый или линейный?

10. Получает ли в объединяющем равновесии индивид какие-то выгоды от того, что имеет высокие способности? Ответ поясните.

11. Рассмотрим формулировку предложения 8.27. Докажите следующие свойства.

(a) Если $\frac{\delta_1(1-\delta_l)}{1-\delta_1\delta_l} + \frac{\delta_1\delta_h(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_h} > \delta_h$, то $\delta_h(1-\delta_1 x_h) \le 1 - x_l$.

(b) Если $\frac{\delta_1(1-\delta_l)}{1-\delta_1\delta_l} + \frac{\delta_1\delta_h(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_h} > \delta_h$ выполнено, то существует секвенциальное равновесие, при котором игрок 1 предложит $s_{1,1}^* = x_l$, если

$$p_h\delta_1 x_h + (1-p_h)[1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)] \le \frac{1-\delta_l}{1-\delta_1\delta_l} = x_l;$$

в противном случае игрок 1 предложит $s_{1,1}^* = 1-\delta_l(1-\delta_1 x_h)$.

12. Проведите подробное доказательство случая IV в предложении 8.30.

13. Предположим, что кривая обратного спроса в примере 8.29 имеет вид $p(q) = 10 - q$, а $c_L = 1$ и $c_h = 2$. Найдите $\hat{q}_2$ и $\hat{q}_1$.

14. Пусть кривая обратного спроса в примере 8.29 имеет вид $p(q) = 10 - q$, а $c_L = 1$ и $c_h = 2$. Найдите δ_1 и T, при которых справедливо неравенство (8.14).

15. Пусть кривая обратного спроса в примере 8.29 имеет вид $p(q) = 10 - q$, а $c_L = 1$ и $c_h = 2$. Найдите δ_2 и T_1, при которых справедливо неравенство (8.15).

16. Рассмотрим игру торга из примера 8.28. Что произойдет в этой игре, если вероятность того, что автор терпелив, равна 15%, т.е. δ_h имеет вероятность 15%. К чему приведут переговоры?

17. Предположим, что в игре о контракте на рукопись из примера 8.28 автор имеет альтернативное предложение в 16% от объема продаж. Издатель знает об этом и делает предложение в периоде 1, которое автор может отвергнуть и сделать контрпредложение в периоде 2. В периоде 2 переговоры завершаются, и издатель либо принимает предложение от автора, либо отклоняет его. В этом случае автор принимает альтернативный вариант.

(a) Изобразите динамическую игру между автором и издателем.

(b) Найдите секвенциальное равновесие в игре. Каковы условия соглашения?

Глава 9

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЙ

В предыдущих главах мы обсуждали различные типы игр и на примерах демонстрировали их приложения. Для предсказания наиболее вероятных исходов в ситуациях, описываемых играми, мы искали равновесные точки и затем анализировали эти равновесные решения. Однако, как мы видели, концепции равновесий, которые мы имели в виду, во многих ситуациях не могли быть использованы, поскольку такие равновесия могли и не существовать для соответствующих игр. Так, например, многие матричные игры из раздела 2.4 не имеют равновесия в чистых стратегиях, но имели равновесия в смешанных стратегиях, когда игроки рандомизируют свой выбор. Напротив, матричная игра «Дилемма заключенного» имеет решение в чистых стратегиях.

В этой главе мы исследуем типичные условия, гарантирующие существование тех или иных решений или равновесий. Мы увидим, что, в то время как многие из игр раздела 2.4 не удовлетворяют типичным условиям существования равновесия в чистых стратегиях, условия существования равновесия в смешанных стратегиях для них выполняются. Такие результаты относительно типичных условий существования равновесий формируют представления о том, какие же концепции равновесия следует использовать при анализе той или иной игры. При изучении условий существования мы не только получаем представление о том, какая из концепций равновесия оказывается наиболее подходящей для данной игры; во многих случаях эти результаты также подсказывают методы нахождения таких равновесий. Следовательно, изучение таких типичных условий крайне важно при нахождении равновесий и решении игр. Более того, эти результаты также играют важную роль в улучшении нашего понимания равновесных решений. Тот факт, что существование равновесия по Нэшу связано с неподвижной точкой отображения наилучших ответов, много чего говорит нам о природе концепции, подобной равновесию по Нэшу.

Глава построена следующим образом. Вначале излагаются предварительные сведения из математики, необходимые для понимания результатов о существовании. Второй раздел обсуждает игры с нулевой суммой. Далее рассматривается существование равновесий как в чистых, так и в смешанных стратегиях игр в стратегической форме. В заключительных разделах главы обсуждается существование совершенного в подыграх равновесия и секвенциального равновесия в конечных динамических играх с совершенной памятью.

9.1. Предварительные математические сведения

Здесь мы рассмотрим некоторые относительно продвинутые математические понятия, которые будут использованы при обсуждении результатов о существовании равновесий. Обсуждение будет ограничено конечномерным Евклидовым пространством, хотя многие результаты остаются верными и в более общих случаях. Главная причина такого ограничения — лучшее восприятие на интуитивном уровне, которого можно достичь при таких конечномерных постановках. Так, основное понятие компактного множества легче осмыслить в контексте конечномерного пространства. Кроме того, большая часть более продвинутого анализа опирается на технику и идеи, которые разработаны для случая конечномерных пространств. Мы начнем наше рассмотрение с определения замкнутого и открытого множеств. **Окрестность** точки a в Евклидовом пространстве R^n — множество (из некоторого класса множеств) N, содержащее точку a. Чаще всего под окрестностью понимается множество («шар») небольшого диаметра, который может быть как угодно мал, но положителен. То есть круг диаметра 0,0001 является окрестностью точки (0,0) в R^2. Шар радиуса 0,0001 с центром в точке (1,1,1) является окрестностью точки (1,1,1) в R^3.

Определение 9.1. *Подмножество A Евклидова пространства R^n называется* ***открытым****, если любая точка $a \in A$ имеет окрестность, являющуюся подмножеством A.*

Примером открытого множества на вещественной прямой R служит открытый интервал $A = (0,1)$. Можно проверить, что любая точка из (0,1) имеет окрестность, которая лежит в (0,1). Примером открытого множества в R^2 является множество $\{(x_1,x_2): 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$. Нетрудно видеть, что открытые множества могут порождаться путем конечного объединения открытых множеств.

Несколько иной способ представления открытого множества состоит в определении его как множества, содержащего все свои внутренние точки. Точка a множества A называется **внутренней**, если некоторая окрестность a является подмножеством A. Точка является **граничной** точкой множества, если она не является внутренней, но любая ее окрестность содержит точку из этого множества. Таким образом, граничные точки множества (0,1) в R — это 0 и 1.

Очень важное свойство граничной точки множества A состоит в следующем. Если a — граничная точка множества A, то существует последовательность точек $\{a_k\}_k$, которая сходится к a.

Еще один тип множеств, играющий важную роль в анализе равновесий, — это замкнутые множества.

Определение 9.2. *Подмножество A Евклидова пространства R^n называется* ***замкнутым****, если оно содержит все свои граничные точки.*

Нетрудно проверить, что подмножество $A = \{(x_1,x_2): 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$ в R^2 замкнуто, поскольку является единичным квадратом, содержащим все свои граничные точки.

Дополнение A^c открытого множества A является замкнутым множеством, а дополнение замкнутого множества B^c является открытым множеством. Это не значит, что множества могут быть только открытыми или замкнутыми.

Существуют множества, которые не являются ни открытыми, ни замкнутыми. Множество $a = [0,1)$ не открыто и не замкнуто. Оно не открыто, поскольку точка 0, лежащая в множестве, не является внутренней точкой этого множества. И не замкнуто, так как не содержит все свои граничные точки (не содержит граничную точку 1).

Подобно открытым и замкнутым множествам, которые важны при анализе существования равновесий, понятие компактного множества также является центральным.

Определение 9.3. *Говорят, что множество A* ***компактно****, если из того, что оно содержится в наборе открытых множеств $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_a$ следует, что оно содержится в конечном поднаборе множеств из $\mathcal{U}$.*

Таким образом, конечное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ всегда компактно. Однако не так очевидно, что множество $I = [0,1)$ компактно и что множество $U = [0,1)$ не компактно. Теорема Гейне — Бореля дает ясную и очень полезную характеристику компактных множеств в Евклидовом пространстве.

Теорема 9.4 (теорема Гейне — Бореля). *Подмножество A Евклидова пространства R^n является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Множество ограничено, если расстояние[1] между любыми двумя его точками никогда не превышает некоторого конечного положительного числа $k > 0$. Следовательно, замкнутое множество $A = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}$ в R^2 компактно, но множество $[0,\infty)$ не компактно в R, так как хотя оно и замкнуто, но не ограничено.

Подмножество C Евклидова пространства R^n называется **выпуклым**, если для любых двух точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из C множество $\{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}, 0 \le \alpha \le 1\}$ содержится в C.

Множество $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$, которое известно как круг единичного радиуса в R^2, является выпуклым. Множество $A = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_2 \le x_1^2, 0 \le x_1 \le 1\}$ не является выпуклым, хотя и компактно.

С помощью этих базовых понятий мы готовы представить основные математические результаты, касающиеся существования равновесий.

Доказательства и некоторые детали можно найти в [4].

9.1.1. Функции

В этом подразделе мы представим некоторые понятия и результаты, касающиеся функций. Рассмотрим множества $A \subset R^n$ и $B \subset R^k$. Функция $f : A \to B$ называется **непрерывной**, если для любой последователь-

[1] Напомним, что расстояние между двумя точками $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ в Евклидовом пространстве R^n обозначается через $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ и рассчитывается по формуле $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

ности $\{a_l\}_{l=1}^{\infty}$, сходящейся к $a \in A$, последовательность $\{f(a_l)\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к $f(a) \in B$[1]. То есть

$$\lim_{l \to \infty} f(a_l) = f(a).$$

Говорят, что функция **вещественнозначна**, если область ее значений является подмножеством вещественных чисел R. Для непрерывных вещественнозначных функций справедливо следующее утверждение.

Теорема 9.5. *Любая непрерывная вещественнозначная функция на компактном множестве достигает своего максимума и минимума.*

Из теоремы немедленно следует, что функция $f(x_1, x_2) = \sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}}$, определенная на $A = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 2, 1 \le x_2 \le 2\}$, достигает (на этом множестве) своего максимума и минимума. Теорема также говорит о том, что если множества стратегий игроков являются компактными подмножествами Евклидовых пространств и функции выигрышей непрерывны, то всегда существует оптимальная стратегия, максимизирующая выигрыш игрока.

Предположим, что заданная вещественнозначная функция f определена на подмножестве Евклидова пространства и ограничена в окрестности V точки a из области определения функции f. Тогда для $k > 0$ определим

$$M(k) = \sup\{f(x) : \|x - a\| < k, x \in V\},$$

где $\sup\{x : x \in A\}$ обозначает наименьшую верхнюю границу всех элементов $x \in A$. Тогда *верхний предел*, или $\limsup_{x \to a} f$, определяется выражением

$$\limsup_{x \to a} f = \inf\{M(k) : k > 0\},$$

где $\inf\{x : x \in A\}$ обозначает нижнюю границу всех элементов $x \in A$.

Определение 9.6. *Функция $f : A \to R$ полунепрерывна сверху в точке a из области определения, если*

$$\limsup_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Функция $f(x)$, определенная на множестве вещественных чисел R, вида

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad -1 < x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{при} \quad |x| \ge 1 \end{cases}$$

не является непрерывной в точках $x = -1$ и $x = 1$; однако в этих точках она полунепрерывна сверху. Предел $f(x)$ при $x \to 1$ и $x \to -1$ не существует, но существует lim sup. При этом $\limsup_{x \to 1} = 2$ и $\limsup_{x \to -1} = 2$.

Теорема 9.7. *Любая вещественнозначная полунепрерывная сверху функция на компактном множестве достигает своего максимума.*

Функция $f(x)$, определенная на множестве вещественных чисел R, вида

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \ -1 < x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{при} \ |x| \ge 1 \end{cases}$$

[1] Отсюда также следует, что график непрерывной функции не имеет «разрывов» или «скачков».

полунепрерывна сверху и не достигает своего минимального значения, но достигает своего максимального значения[1].

Функции с некоторыми специальными свойствами играют важную роль при обсуждении существования равновесий. Функция $f : C \to R$, где C — непустое выпуклое подмножество Евклидова пространства, называется **вогнутой** (соответственно **выпуклой**), если для любых $x, y \in C$ и произвольного $0 \le \alpha \le 1$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

(соответственно $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$). Вогнутая функция $f : C \to R$ называется **строго вогнутой** (соответственно **строго выпуклой**), если при $x, y \in C$, где $x \ne y$, и $0 < \alpha < 1$

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

(соответственно $f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$).

Функция $f(x)$ одной переменной, имеющая вторую производную, является вогнутой, если $f''(x) < 0$ для всех x из области ее определения. Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$, определенная на множестве положительных чисел R_{++}, вогнута.

Другой тесно связанный с этим класс функций, который также играет важную роль при исследовании существования равновесий, носит название (класса) квазивогнутых функций.

Определение 9.8. *Функция $u : C \to R$, где C — непустое выпуклое подмножество Евклидова пространства, называется **квазивогнутой** (соответственно **строго квазивогнутой**), если $x, y \in C$, где $x \ne y$, и $0 < \alpha < 1$ влечет*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \min\{u(x), u(y)\}$$

(*соответственно* $u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \min\{u(x), u(y)\}$).

Вогнутая функция является квазивогнутой, но обратное неверно. В самом деле, если $u : C \to R$ вогнута и $x, y \in C$ удовлетворяют $x \ne y$, и $0 < \alpha < 1$, то, положив $m = \min\{u(x), u(y)\}$, мы получим

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y) \ge \alpha m + (1-\alpha)m = m .$$

Классические функции полезности Кобба — Дугласа, определенные на R_+^l выражениями вида

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_l) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_l^{\alpha_l} ,$$

где $\alpha_j \ge 0$ при всех $1 \le j \le l$ и $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j = 1$ являются вогнутыми и, следовательно, квазивогнутыми. Функция $f(x) = x^3$, определенная на R, квазивогнута, но не вогнута.

Следующие свойства квазивогнутых функций весьма полезны и используются в дальнейшем.

[1] Но не на всей области определения, а на компактных ее подмножествах, например при $-1 \le x \le 1$. — *Примеч. пер.*

Теорема 9.9. *Если $u : C \to R$ — квазивогнутая функция, то*

(1) *множество (возможно, пустое) точек максимума u является выпуклым;*

(2) *в случае если u также строго вогнута, множество (возможно, пустое) точек максимума u содержит не более одного элемента.*

Доказательство. Положим $m = \sup\{u(c) : c \in C\} \leq \infty$. Если $a, b \in C$ таковы, что $u(a) = u(b) = m$ и $0 \leq \alpha \leq 1$, то из

$$m \geq u(\alpha a + (1-\alpha)b) \geq \min\{u(a), u(b)\} = m$$

следует, что $u(\alpha a + (1-\alpha)b) = m$. Это показывает, что множество (возможно, пустое) точек максимума функции u является выпуклым.

Если u строго вогнутая функция, и два вектора $a, b \in C$ таковы, что $u(a) = u(b) = m$, но $a \neq b$, то вектор $c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \in C$ удовлетворяет неравенству $u(c) > \min\{u(a), u(b)\} = m$, что невозможно. Отсюда следует, что в этом случае множество точек максимума функции u содержит не более одного элемента. ■

9.1.2. Отображения

В этом подразделе мы рассмотрим основные свойства отображений. Отображения можно представлять как многозначные функции. Функция элементу из области определения всегда ставит в соответствие единственный элемент из области значений. Отображение является обобщением понятия функции, поскольку отображение может элементу из области определения ставить в соответствие множество элементов области значений. Более подробно об отображениях см. в [4], главы 17 и 18, и [44]. Начнем с формального определения отображения и связанных с ним терминов.

Определение 9.10. ***Отображение*** *ϕ из множества X во множество Y ставит в соответствие каждой точке x из X подмножество $\phi(x)$ в Y. Будем использовать запись $\phi : X \twoheadrightarrow Y$ для того, чтобы отличать отображение от функции из X в Y.*

Пусть $\phi : X \twoheadrightarrow Y$ — отображение. Как и в случае функций, будем называть X **областью определения** ϕ, а Y — **областью значений**. **Образ** подмножества A из X при отображении ϕ —

$$\phi(A) = \bigcup_{x \in A} \phi(x).$$

Область значений отображения ϕ является образом области определения X. Можно отождествлять ϕ с его **графиком** G_ϕ, подмножеством $X \times Y$, заданным в виде

$$G_\phi = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \phi(x)\}.$$

Напомним, что **окрестностью множества** A называется произвольное множество B, для которого существует открытое множество V, удовлетворяющее условию $A \subseteq V \subseteq B$. Любое открытое множество V, удовлетворяющее условию $A \subseteq V$, называется **открытой окрестностью** A.

Определение 9.11. *Отображение* $\phi: X \twoheadrightarrow Y$, *где* X, Y *— подмножества Евклидовых пространств, является*

- ***полунепрерывным сверху*** *в точке x, если для любой окрестности U множества* $\phi(x)$ *существует окрестность V точки x, такая что если* $z \in V$, *то* $\phi(z) \subseteq U$. *Как и в случае функций, мы говорим, что отображение* ϕ *полунепрерывно сверху в X, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке X;*
- ***полунепрерывным снизу*** *в точке x, если для любого открытого множества U, пересекающегося с* $\phi(x)$ (*т.е. такого что* $\phi(x) \cap U \neq \varnothing$), *существует окрестность V точки x, такая что если* $z \in V$, *то* $\phi(z) \cap U \neq \varnothing$. *Как и ранее,* ϕ *полунепрерывно снизу на X, если оно полунепрерывно снизу в каждой точке X;*
- ***непрерывным*** *в точке x, если оно одновременно полунепрерывно сверху и полунепрерывно снизу в x. Отображение непрерывно, если оно непрерывно во всех точках.*

Следующий результат имеет место для полунепрерывных сверху отображений.

Теорема 9.12. *Отображение* $\phi: X \twoheadrightarrow Y$, *где X и Y — подпространства Евклидовых пространств, полунепрерывно сверху, если график отображения* G_ϕ *является замкнутым подмножеством в* $X \times Y$[1].

Этот результат оказывается чрезвычайно полезным при доказательстве полунепрерывности сверху для отображений, так как зачастую проще проверить, что некоторое множество замкнуто, чем напрямую проверять выполнение свойств из определения полунепрерывности сверху.

Теперь сформулируем теорему, принадлежащую С. Бержу ([13, p. 115–116]). Доказательство см. [4, p. 570], теорема 17.31.

Теорема 9.13 (теорема Бержа о максимальном значении). *Пусть* $\phi: X \twoheadrightarrow Y$ *— непрерывное компактнозначное отображение подмножества X Евклидова пространства в подмножество Y Евклидова пространства, причем* $\phi(x) \neq \varnothing, x \in X$. *Предположим, что* $f: G_\phi \to R$ *— непрерывная функция. Рассмотрим «функцию максимальных значений» (или просто «функцию максимума»)* $m: X \to R$ *вида*

$$m(x) = \max_{y \in \phi(x)} f(x, y)$$

и «отображение аргмаксимума» $M: X \twoheadrightarrow Y$, *которое каждому* $x \in X$ *ставит в соответствие точки максимума функции* $f(x, \cdot)$ *на множестве* $\phi(x)$, *т.е. отображение вида*

$$M(x) = \{y \in \phi(x): f(x, y) = m(x)\}.$$

[1] В таком виде, без некоторых дополнительных предположений относительно множества Y, утверждение неверно. Контрпример: $X = [0, \infty)$; $Y = [0, \infty)$; $\phi(x) = \frac{1}{x}$, если $x > 0$; $\phi(x) = 0$, если $x = 0$. Но утверждение справедливо, если Y компактно. Всюду в дальнейшем авторы, устанавливая (или предлагая читателю установить это самостоятельно), что отображение имеет замкнутый график, делают из этого вывод, что оно полунепрерывно, имеют дело как раз с ситуациями, когда Y компактное множество. — *Примеч. ред.*

Тогда

(1) *функция максимума m непрерывна*;

(2) *отображение «аргмаксимума» M определено для всех $x \in X$ (т.е. $M(x) \neq \varnothing$, $x \in X$) и компактнозначно (т.е. $M(x), x \in X$ — компактное множество)*;

(3) *отображение «аргмаксимума» M полунепрерывно сверху, но необязательно непрерывно.*

Теорема 9.13 имеет важное следствие, касающееся полунепрерывных функций.

Следствие 9.14. *Если в теореме 9.13 $f: G_\phi \to R$ — полунепрерывная сверху функция, то*

(1) *отображение «аргмаксимума» M определено для всех $x \in XM$ и компактнозначно*;

(2) *отображение «аргмаксимума» M полунепрерывно сверху, но необязательно непрерывно.*

Пусть $X = R_+$ и $Y = R_+$. Тогда отображение $\phi: X \twoheadrightarrow Y$, определенное по правилу

$$\phi(x) = [0, x],$$

является непрерывным и компактнозначным. Пусть $f: G_\phi \to R$ задано в виде

$$f(x, y) = -y^2 + xy.$$

Тогда можно проверить, что

$$m(x) = \frac{x^2}{4} \text{ и } M(x) = \left\{ y \in [0, x] : y = \frac{x}{2} \right\}.$$

Очевидно, что функция $m(x)$ непрерывна, а отображение $M(x)$ в этом случае однозначно и, следовательно, является функцией, которая непрерывна[1].

Отображение наилучших ответов игрока 1 в игре «Орлянка» является примером приложения теоремы 9.13. Игра «Орлянка» показана в табл. 9.1. Если p — вероятность, с которой игрок 1 выбирает T, а q — вероятность, с которой игрок 2 выбирает L, то ожидаемый выигрыш игрока 1 равен

$$E_1(p, q) = 4pq - 2p - 2q + 1 = 2(2q - 1)p - 2q + 1.$$

Таблица 9.1. Игра «Орлянка»

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(1,–1)	(–1,1)
	B	(–1,1)	(1,–1)

В этом примере $X = [0,1]$ и $Y = [0,1]$, а отображение $\phi: X \twoheadrightarrow Y$ определяется как

$$\phi(q) = \{p : p \in [0,1]\}.$$

[1] Заметим, что любое полунепрерывное сверху (или полунепрерывное снизу) однозначное отображение (функция) непрерывно. — *Примеч. ред.*

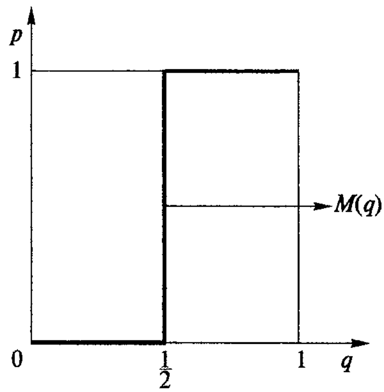


Рис. 9.1. Оптимальный отклик игрока 1

Отображение M имеет вид

$$M(q)=\begin{cases}\{1\}, & \text{если } q>\frac{1}{2},\\ [0,1], & \text{если } q=\frac{1}{2},\\ \{0\}, & \text{если } q<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Оно является отображением *наилучших ответов* игрока 1 и определяет оптимальные выборы игрока 1 при любом выборе смешанной стратегии q игроком 2. График отображения изображен на рис. 9.1.

Нетрудно проверить, что график отображения замкнут, и, следовательно, отображение M полунепрерывно сверху. Функция $m(q)$ задается в виде

$$m(q)=\begin{cases}2q-1, & \text{если } q>\frac{1}{2},\\ 0, & \text{если } q=\frac{1}{2},\\ 1-2q, & \text{если } q<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Эта функция непрерывна, как и должно быть по теореме 9.13.

Центральное понятие в анализе равновесий — это понятие неподвижной точки функции или отображения. Пусть $\phi: X \twoheadrightarrow Y$ — отображение; говорят, что $x \in X$ является **неподвижной точкой** ϕ, если $x \in \phi(x)$. Неподвижные точки отображений наилучших ответов связаны с равновесиями в играх. Сформулируем следующий важнейший результат о существовании неподвижных точек отображений. Знаменитая теорема о неподвижной точке принадлежит С. Какутани [43].

Теорема 9.15 (теорема Какутани о неподвижной точке). *Пусть K — непустое компактное и выпуклое подмножество Евклидова пространства*; *отобра-*

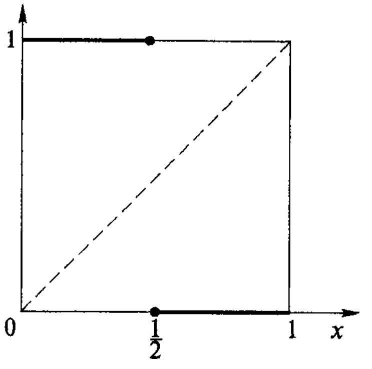


Рис. 9.2. График ϕ

жение $\phi : K \twoheadrightarrow K$ *таково, что* $\phi(k), k \in K$ *— непустое выпуклое множество и имеет замкнутый график. Тогда множество неподвижных точек* ϕ *не пусто и компактно.*

Как будет видно на следующем примере, выпуклозначность отображения действительно необходима. Рассмотрим отображение $\phi : X \twoheadrightarrow X$, где $X = [0,1]$, в виде

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < \frac{1}{2}, \\ \{0,1\}, & \text{если } x = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

График отображения представлен на рис. 9.2.

Нетрудно понять, что график отображения замкнут, следовательно, отображение полунепрерывно сверху, но не выпуклозначно. В точке $x = \frac{1}{2}$, $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \{0,1\}$, т.е. принимает два значения 0 и 1. В результате отображение не пересекает линию под углом 45°, изображенную на рисунке пунктиром. Следовательно, ϕ не имеет неподвижных точек, хотя и является полунепрерывным сверху и компактнозначным.

Упражнения

1. Покажите, что множество $\{\mathbf{x} \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le K\}$ — компактное подмножество Евклидова пространства R^n.
2. Покажите, что если множества S_1 и S_2 замкнуты, то их объединение $S_1 \cup S_2$ тоже замкнуто.
3. Покажите, что функция $f : R^n \to R$, определенная правилом $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ (т.е. ее значение в точке x — расстояние от этой точки до заданной точки $\mathbf{a}$), непрерывна. Достигает ли она максимума или минимума на R^n?

Таблица 9.2

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(2,–2)	(–1,1)
	B	(1,–1)	(2,–2)

4. Покажите, что функция $f: R \to R$, заданная в виде $f(x) = |x|$, непрерывна. Достигает ли она максимума или минимума на отрезке $[-1,1]$? Достигает ли она максимума или минимума на R?
5. Покажите, что множество $(0,1]$ не компактно, указав набор открытых множеств $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_a)$, такой что никакой конечный поднабор $\mathcal{U}$ не содержит $(0,1]$.
6. Игра в табл. 9.2 представляет собой более общую версию игры «Орлянка».
   (a) Найдите отображения наилучших ответов игрока 1 и игрока 2 для всех смешанных и чистых стратегий другого игрока.
   (b) Убедитесь, что эти отображения полунепрерывны сверху, показав, что графики этих отображений замкнуты.
   (c) Покажите, что эти отображения выпуклозначны.
7. Игра в табл. 9.3 является примером координационной игры.
   (a) Найдите отображения наилучших ответов игрока 1 и игрока 2 для всех смешанных и чистых стратегий другого игрока.
   (b) Убедитесь, что эти отображения полунепрерывны сверху, проверив замкнутость их графиков.
   (c) Покажите, что эти отображения выпуклозначны.
8. Пусть в игре «Орлянка» B_1 и B_2 — отображения наилучших ответов игроков 1 и 2 соответственно. Мы убедились в том, что эти отображения полунепрерывны сверху, поскольку их графики замкнуты. Определим отображение $B: [0,1] \times [0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \times [0,1]$ следующим образом:
$$B(p,q) = (B_1(q), B_2(p)).$$
   (a) Покажите, что отображение B полунепрерывно сверху, проверив замкнутость его графика.
   (b) Покажите, что B выпуклозначно.
9. Почему отображение B из предыдущего упражнения имеет неподвижную точку? Найдите все неподвижные точки B, изобразив его схематически.
10. Пусть в игре «координация» B_1 и B_2 — отображения наилучших откликов игроков 1 и 2 соответственно. Мы убедились в том, что отображения

Таблица 9.3

	Игрок 2		
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(1,1)	(0,0)
	B	(0,0)	(1,1)

полунепрерывны сверху, поскольку их графики замкнуты. Определим отображение $B:[0,1]\times[0,1]\twoheadrightarrow[0,1]\times[0,1]$ следующим образом:

$$B(p,q)=(B_1(q),B_2(p)).$$

(a) Покажите, что отображение B полунепрерывно сверху, проверив замкнутость его графика.

(b) Покажите, что B выпуклозначно.

11. Почему отображение B из предыдущего упражнения имеет неподвижную точку? Найдите все неподвижные точки B, изобразив его схематически.

12. Постройте отображение, график которого не замкнут, и которое не имеет неподвижной точки.

13. Постройте отображение с замкнутым графиком, но не выпуклозначное, которое не имеет неподвижной точки.

14. Постройте отображение, являющееся полунепрерывным сверху и выпуклозначным, которое определено на выпуклом, но не компактном подмножестве Евклидова пространства, не имеющее неподвижной точки.

9.2. Игры с нулевой суммой

Игра с нулевой суммой $G=(S_1,\dots,S_n,u_1,\dots,u_n)$ — это игра, которая удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{n}u_i(s_1,s_2,\dots,s_n)=0$$

для любых профилей стратегий $(s_1,s_2,\dots,s_n)$. Таким образом, в игре с нулевой суммой сумма всех выигрышей всегда равна нулю, т.е. увеличение выигрыша игрока приводит к уменьшению выигрыша остальных игроков в точности на ту же величину. Мы уже кратко обсуждали игры с нулевой суммой в упражнении 7 раздела 2.1.

Игры с нулевой суммой полезны при освещении некоторых особенностей игр, и эти характеристики наиболее явственно прослеживаются на примере игр двух лиц с нулевой суммой. Наше обсуждение будет сконцентрировано именно на играх с двумя участниками. Будем обозначать множество стратегий игрока 1 через X (а конкретную стратегию через x) и множество стратегий игрока 2 через Y (а конкретную стратегию через y). В дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что X и Y — конечные множества. Если в игре с нулевой суммой $u_1(x,y)$ обозначает функцию полезности игрока 1, то $u_2(x,y)=-u_1(x,y)$ – функция полезности игрока 2.

Очевидно, что игра двух лиц с нулевой суммой с конечным множеством стратегий может быть представлена одной матрицей. Собственно говоря, любая матрица $m\times n$ с вещественными элементами

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

является платежной матрицей (матрицей выигрышей) игрока 1 некоторой игры с нулевой суммой, где, конечно же, платежная матрица игрока 2 имеет вид $-A$.

Поскольку максимизация $u_2 = -u_1$ эквивалентна минимизации u_1, в играх двух лиц с нулевой суммой имеем следующую характеризацию равновесия по Нэшу.

Теорема 9.16. *В игре двух лиц с нулевой суммой профиль стратегий* (x^*,y^*) — *равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда*

$$u_1(x^*, y^*) = \max_{x \in X} u_1(x, y^*) = \min_{y \in Y} u_1(x^*, y).$$

В частности, если игра двух лиц с нулевой суммой представлена матрицей $A = [a_{ij}]$ *размерности* $m \times n$, *то профиль* (i^*,j^*) *является равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда элемент* $a_{i^*j^*}$ *оказывается наибольшим в столбце* j^* *и наименьшим в строке* i^*, *т.е.*

$$a_{i^*j^*} = \max_{1 \le i \le m} a_{ij^*} = \min_{1 \le j \le n} a_{i^*j}.$$

Существует другой способ записи условия равновесия по Нэшу в теореме 9.16. Он появился в математической литературе под названием *седловой точки*. Говорят, что вещественная функция $f : X \times Y \to R$ имеет **седло** в точке (x^*,y^*) (или что (x^*,y^*) — **седловая точка** функции f), если

$$f(x, y^*) \le f(x^*, y^*) \le f(x^*, y)$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Беглый взгляд на теорему 9.16 позволяет убедиться в том, что равновесия по Нэшу в играх с нулевой суммой в точности являются седловыми точками функции u_1. Другими словами, имеем следующее утверждение.

Теорема 9.17. *В игре двух лиц с нулевой суммой профиль стратегий* (x^*,y^*) *образует равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда он является седловой точкой функции полезности* u_1, *т.е. тогда и только тогда, когда*

$$u_1(x, y^*) \le u_1(x^*, y^*) \le u_1(x^*, y)$$

выполнено для всех $x \in X$ и $y \in Y$.

Стратегия x^* называется **максиминной** стратегией игрока 1, если

$$\min_{y \in Y} u_1(x^*, y) \ge \min_{y \in Y} u_1(x, y)$$

для любых $x \in X$. Можно записать это условие в эквивалентном виде:

$$\min_{y \in Y} u_1(x^*, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} u_1(x, y).$$

Определение максиминной стратегии игрока 2 выглядит аналогично.

Теперь мы готовы сформулировать основную характеризацию равновесий в играх двух лиц с нулевой суммой.

Теорема 9.18. *В игре двух лиц с нулевой суммой профиль стратегий* (x^*,y^*) *образует равновесие по Нэшу тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия.*

(1) x^* *— максиминная стратегия игрока 1;*

(2) y^* *— максиминная стратегия игрока 2;*

(3) $\max_{x\in X} \min_{y\in Y} u_1(x,y) = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} u_1(x,y)$.

Кроме того, если (x^*,y^*) *— равновесие по Нэшу, то*

$$u_1(x^*,y^*) = \max_x \min_y u_1(x,y).$$

Также все равновесия по Нэшу приносят игрокам одну и ту же полезность.

Доказательство. Пусть (x^*,y^*) — профиль стратегий. Сначала предположим, что (x^*,y^*) — равновесие по Нэшу, следовательно, (x^*,y^*) — седловая точка функции u_1, т.е.

$$u_1(x,y^*) \le u_1(x^*,y^*) \le u_1(x^*,y) \tag{9.1}$$

для всех $x\in X$ и $y\in Y$.

Из (9.1) следует, что для любого фиксированного $x\in X$

$$\min_y u_1(x,y) \le u_1(x,y^*) \le u_1(x^*,y^*).$$

Поэтому

$$\max_x \min_y u_1(x,y) \le u_1(x^*,y^*). \tag{9.2}$$

Теперь из второго неравенства (9.1) получим, что

$$u_1(x^*,y^*) = \min_y u_1(x^*,y) \le \max_x \min_y u_1(x,y). \tag{9.3}$$

Из (9.2) и (9.3) заключаем, что

$$u_1(x^*,y^*) = \max_x \min_y u_1(x,y). \tag{9.4}$$

В силу симметрии аналогичный (9.4) результат для игрока 2 дает

$$u_2(x^*,y^*) = \max_y \min_x u_2(x,y).$$

Заменив u_2 на $-u_1$, получим

$$-u_1(x^*,y^*) = \max_x \min_y[-u_1(x,y)] = -\min_y \max_x u_1(x,y),$$

или $u_1(x^*,y^*) = \min_y \max_x u_1(x,y)$, что совместно с (9.4) дает

$$u_1(x^*,y^*) = \max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y). \tag{9.5}$$

Выражение (9.5) показывает справедливость свойства (3) и последнего заключения теоремы.

Чтобы понять, почему x^* является максиминной стратегией игрока 1, заметим, что

$$\min_y u_1(x^*,y) = u_1(x^*,y^*) = \max_x \min_y u_1(x,y).$$

Симметричным образом устанавливается, что y^* — максиминная стратегия игрока 2.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что профиль (x^*,y^*) удовлетворяет свойствам (1), (2) и (3). Необходимо показать, что (x^*,y^*) — седловая точка, т.е. установить справедливость формулы (9.1).

Так как y^* — максиминная стратегия игрока 2, имеем

$$\min_x u_2(x,y^*) = \max_y \min_x u_2(x,y).$$

Заменив u_2 на $-u_1$, получим, что $\min_x[-u_1(x,y^*)] = \max_y \min_x[-u_1(x,y)]$. Пользуясь тем фактом, что $\min_x[-u_1(x,y^*)] = -\max_x u_1(x,y^*)$, получаем, что $-\max_x u_1(x,y^*) = -\min_y \max_x u_1(x,y)$, следовательно,

$$\max_x u_1(x,y^*) = \min_y \max_x u_1(x,y).$$

Из этого равенства, а также (3) следует, что для любого $y \in Y$

$$u_1(x^*,y) \geq \min_y u_1(x^*,y) = \max_x \min_y u_1(x,y) =$$
$$= \min_y \max_x u_1(x,y) = \max_x u_1(x,y^*) \geq u_1(x^*,y^*).$$

Аналогичным образом, $u_2(x,y^*) \geq u_2(x^*,y^*)$. Замена функции полезности u_2 на $-u_1$ дает неравенство $u_1(x,y^*) \leq u_1(x^*,y^*)$ для всех $x \in X$. Отсюда следует, что (x^*,y^*) — седловая точка, и таким образом доказательство завершено. ■

Хорошо известно, что «$\max\min \leq \min\max$»! То есть для любой функции $f: X \times Y \to R$ имеем

$$\max_x \min_y f(x,y) \leq \min_y \max_x f(x,y).$$

Доказывается это следующим образом. Для любых фиксированных $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено

$$\min_\omega f(x,\omega) \leq f(x,y) \leq \max_z f(z,y).$$

Это влечет $\min_\omega f(x,\omega) \leq \min_y \max_z f(z,y)$ для всех $x \in X$, откуда следует, что $\max_x \min_\omega f(x,\omega) \leq \min_y \max_z f(z,y)$.

Следующее утверждение является следствием предыдущего результата.

Следствие 9.19. *Если в игре с нулевой суммой*

$$\max_x \min_y u_1(x,y) < \min_y \max_x u_1(x,y),$$

то она не имеет равновесий по Нэшу.

Упражнения

1. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой и матрицей выигрышей игрока 1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найдите равновесия в чистых и смешанных стратегиях.

2. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, заданную матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если игрок 2 (выбирающий столбец) играет смешанную стратегию $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{3},\frac{4}{15}\right)$, то каков наилучший ответ в смешанных стратегиях игрока 1 (выбирающего строку)?

3. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой. Покажите, что если (x^*,y^*) и $(\hat{x},\hat{y})$ — равновесия по Нэшу, то $(x^*,\hat{y})$ и $(\hat{x},y^*)$ — также равновесия по Нэшу.

4. Приведите пример матричной игры и профиля стратегий (x^*,y^*), такого что x^* — точка максимина игрока 1, y^* — точка максимина игрока 2, но (x^*,y^*) не является равновесием по Нэшу. В чем противоречие с теоремой 9.18?

5. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, такую что матрица выигрышей игрока 1 имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & ab & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a^2 & 1 \end{bmatrix},$$

где a и b — вещественные числа.

(a) Докажите, что

$$\max_l \min_j u_1(l,j) = \min_j \max_l u_1(l,j) = 1$$

и не зависит от значений параметров a и b.

(b) При каких значениях a и b игра с нулевой суммой имеет более одного равновесия по Нэшу?

6. При каких значениях параметра α игра двух лиц с нулевой суммой, заданная матрицей

$$\begin{bmatrix} -2 & 2\alpha^2 - 3\alpha \\ 6 & 4 \end{bmatrix},$$

имеет равновесие по Нэшу в чистых стратегиях? [Ответ: $-1 \le \alpha \le 4$.]

7. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, заданную матрицей выигрышей

$$\begin{bmatrix} 0 & x^2 - 2x + 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & x \end{bmatrix}.$$

При каких значениях x в игре есть равновесие по Нэшу в чистых стратегиях?

Найдите все равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. [Ответ: $1 \le x \le 2$.]

8. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, описываемую матрицей

$$\begin{bmatrix} 4 & y^2 - zy - 1 & 5 & z^2 - 2 \\ 2 & 1 & -1 & -20 \\ 3 & 2 & 4 & x^3 - yz \\ -16 & 0 & 16 & 1 \end{bmatrix},$$

где x, y и z — положительные вещественные числа. Найдите значения x, y и z, если известно, что профили действий (3,2) и (1,4) образуют равновесия по Нэшу.

9. Рассмотрим произвольную матрицу 3×3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Пусть $\Delta = \Delta(\{1,2,3\})$ и $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3) \in \Delta$. Установите следующее.

(a) Если $V = \max\limits_{p \in \Delta} \min\limits_{q \in \Delta} \sum\limits_{l=1}^{3} \sum\limits_{j=1}^{3} p_l q_j a_{lj}$, то

$$V = \max_{p \in \Delta} \min_{q \in \Delta} \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_l q_j a_{lj} = \min_{q \in \Delta} \max_{p \in \Delta} \sum_{l=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_l q_j a_{lj}.$$

(b) Если игра двух лиц с нулевой суммой с матрицей выигрышей A имеет равновесие в чистых стратегиях и $V' = \max\limits_{k} \min\limits_{r} a_{kr}$, то

$$V' = \max_{1 \le k \le 3} \min_{1 \le r \le 3} a_{kr} = \min_{1 \le r \le 3} \max_{1 \le k \le 3} a_{kr}.$$

(c) Если игра двух лиц с нулевой суммой с матрицей выигрышей A имеет равновесие в чистых стратегиях, то $V = V'$.

(d) Обобщите предыдущие заключения на игру двух лиц с нулевой суммой с произвольной матрицей $m \times n$ с вещественными коэффициентами.

10. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой G. Пусть $X' \subseteq X$ — непустое подмножество (множества X). Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой G' с множествами стратегий X' и Y и функциями полезности, которые являются сужениями u_1 и u_2 на множество $X' \times Y$.

(a) Покажите, что если (x^*, y^*) и (x', y') — равновесия по Нэшу в G и G' соответственно, то $u_1(x', y') \le u_1(x^*, y^*)$.

(b) Верно ли свойство (a) для произвольной стратегической игры двух лиц?

[Подсказка: если $f, g : Z \to R$ — функции, удовлетворяющие условию $g(z) \le f(z)$ для всех $z \in Z$, то $\min\limits_{z} g(z) \le \min\limits_{z} f(z)$ и $\max\limits_{z} g(z) \le \max\limits_{z} f(z)$.]

9.3. Существование равновесия в играх в стратегической форме

В этом разделе мы обсуждаем основные результаты о существовании равновесия для игр в стратегической форме. Существует два вида результатов, один из которых касается равновесий в чистых стратегиях, а второй — в смешанных стратегиях. Их важность обусловливается тем, что они указывают на свойства, которым должна удовлетворять игра, для того чтобы у нее существовали равновесные точки. На основании этих результатов во многих случаях также можно понять, что нужно делать, чтобы найти эти равновесия. Стоит иметь в виду, что в большинстве случаев приводимые условия являются достаточными, поэтому игры, которые не удовлетворяют всем условиям, вполне могут иметь равновесные точки.

Напомним, что если $s=(s_1,s_2,\dots,s_n)$ — профиль стратегий в стратегической игре n лиц, то мы обозначаем через

$$s_{-i}=(s_1,s_2,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_n)$$

профиль стратегий всех игроков, за исключением игрока i, и записываем s как $s=(s_i,s_{-i})$.

Теорема 9.20. *Пусть $G=(S_1,\dots,S_n,u_1,\dots,u_n)$ — игра n лиц в стратегической форме, которая удовлетворяет следующим свойствам.*

(1) *Каждое множество стратегий S_i непустое, выпуклое и компактное множество Евклидова пространства.*

(2) *Каждая функция полезности $u_i:\prod_{j=1}^{n}S_j\to R$ непрерывна (по совокупности переменных).*

(3) *Каждая функция полезности u_i квазивогнута по переменной s_i; т.е. для любого профиля стратегий s_{-i} всех игроков, кроме i, функция $u_i(s_{-i},\cdot):S_i\to R$ квазивогнута*[1].

Тогда множество равновесий по Нэшу игры G не пусто и компактно.

Доказательство. Пусть $S=\prod_{j=1}^{n}S_j$ — множество профилей стратегий игры G. Ясно, что S не пусто, выпукло и компактно в некотором Евклидовом пространстве. Определим отображение наилучших ответов игрока i как отображение $B_i:S_{-i}\twoheadrightarrow S_i$ вида

$$B_i(s_{-i})=\{s_i^*\in S_i:u_i(s_{-i},s_i^*)=\max_{s_i\in S_i}u_i(s_{-i},s_i)\}. \tag{9.6}$$

Рассмотрим отображение наилучшего отклика $B:S\twoheadrightarrow S$, определенное для каждого $s=(s_1,s_2,\dots,s_n)\in S$ по правилу

$$B(s)=B_1(s_{-1})\times B_2(s_{-2})\times\cdots\times B_n(s_{-n}).$$

Мы уже знаем (см. теорему 2.19), что множество равновесий по Нэшу совпадает с множеством неподвижных точек отображения наилучших ответов B.

[1] Другими словами, для любого профиля стратегий s_{-i}, любых стратегий $s_i,s_i'\in S_i$ и вероятности $0\le\lambda\le1$ имеем $u_i(s_{-i},\lambda s_i+(1-\lambda)s_i')\ge\min\{u_i(s_{-i},s_i),u_i(s_{-i},s_i')\}$.

Поэтому для того чтобы установить справедливость теоремы, необходимо убедиться, что B удовлетворяет требованиям теоремы 9.15. Разобьем проверку этого на несколько этапов.

Этап I. *Множества значений B ($B(s), s \in S$) не пусты.*

Достаточно показать, что для любого игрока i и любого набора s_{-i} множество $B_i(s_{-i})$ не пусто. Это следует из непрерывности функции полезности u_i по всем переменным, следовательно, ее непрерывности по каждой переменной. Тогда множество точек максимума $B_i(s_{-i})$ непрерывной функции $u_i(s_{-i},\cdot): S_i \to R$ на компакте S_i не пусто.

Этап II. *Множества значений B ($B(s), s \in S$) выпуклы.*

Достаточно показать, что каждое множество $B_i(s_{-i})$ выпукло. По предположению, функция $u_i(s_{-i},\cdot): S_i \to R$ квазивогнута по s_i. Из теоремы 9.9 следует, что множество точек максимума $B_i(s_{-i})$ квазивогнутой функции, определенной на выпуклом множестве, также выпукло.

Этап III. *График отображения B замкнут.*

Предположим, что последовательность $\{(s^\alpha, t^\alpha)\}$ точек графика отображения B, т.е. $t^\alpha \in B(s^\alpha)$ для любого α, удовлетворяет условию $(s^\alpha, t^\alpha) \to (s,t)$ в $S \times S$, или $s^\alpha \to s$ и $t^\alpha \to t$ в S при $\alpha \to \infty$. Замкнутость графика B означает, что (s,t) принадлежит графику B, или что $t \in B(s)$. Если положить

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \text{ и } t = (t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

то достаточно установить справедливость эквивалентного утверждения: для любого игрока i и любой стратегии $a_i \in S_i$ выполнено неравенство

$$u_i(s_{-i}, s_i) \geq u_i(s_{-i}, a_i). \tag{9.7}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости (9.7), положим

$$s^\alpha = (s_1^\alpha, s_2^\alpha, \ldots, s_n^\alpha) \text{ и } t^\alpha = (t_1^\alpha, t_2^\alpha, \ldots, t_n^\alpha).$$

Заметим, что $s^\alpha \to s$ и $t^\alpha \to t$ в S эквивалентно тому, что $s_i^\alpha \to s_i$ и $t_i^\alpha \to t_i$ в S_i для любого i.

Как и в (9.7), $t^\alpha \in B(s^\alpha)$ эквивалентно

$$u_i(s_{-i}^\alpha, s_i^\alpha) \geq u_i(s_{-i}^\alpha, a_i) \tag{9.8}$$

для любых α и $a_i \in S_i$. Зафиксируем $a_i \in S_i$ и заметим, что $(s_{-i}^\alpha, t_i^\alpha) \to (s_{-i}, t_i)$ и $(s_{-i}^\alpha, a_i) \to (s_{-i}, a_i)$ в S. Из непрерывности u_i по всем переменным следует, что

$$u_i(s_{-i}^\alpha, s_i^\alpha) \to u_i(s_{-i}, s_i) = t_i \text{ и } u_i(s_{-i}^\alpha, a_i) \to u_i(s_{-i}, a_i).$$

Поскольку переход к пределу сохраняет нестрогие неравенства, справедливость (9.7) немедленно следует из справедливости (9.8), если перейти к пределу при $\alpha \to \infty$.

Этап IV. *B имеет неподвижную точку.*

Поскольку B полунепрерывно сверху, а значения B ($B(s), s \in S$) не пустые и выпуклые, то по теореме Какутани о неподвижной точке (см. теорему 9.15) множество неподвижных точек B не пусто и компактно. Следовательно, множество равновесий по Нэшу не пусто и компактно. ■

Следующий результат обобщает теорему 9.20 на случай полунепрерывных сверху[1] функций выигрыша. Доказательство практически идентично приведенному выше доказательству теоремы 9.20, за исключением этапа III, поэтому для завершения доказательства достаточно установить справедливость этапа III.

Теорема 9.21 (случай полунепрерывных сверху функций выигрыша). *Пусть $G = (S_1,\dots,S_n,u_1,\dots,u_n)$ — игра n лиц в стратегической форме, которая удовлетворяет следующим свойствам.*

(1) *Каждое множество стратегий S_i не пусто, выпукло и компактно в некотором Евклидовом пространстве.*

(2) *Каждая функция полезности $u_i : \prod_{j=1}^{n} S_j \to R$ (по совокупности переменных) полунепрерывна сверху.*

(3) *Каждая функция полезности u_i квазивогнута по переменной s_i, т.е. для любого профиля стратегий s_{-i} всех игроков, кроме i, функция $u_i(s_{-i},\cdot) : S_i \to R$ квазивогнута.*

Тогда множество равновесий по Нэшу игры G не пусто и компактно.

Доказательство. *Отображение B имеет замкнутый график.*

Предположим, что последовательность $\{(s^\alpha,t^\alpha)\}$ точек графика B, т.е. таких что $t^\alpha \in B(s^\alpha)$ для любого α, удовлетворяет условию $(s^\alpha,t^\alpha) \to (s,t)$ в $S \times S$, или $s^\alpha \to s$ и $t^\alpha \to t$ в S при $\alpha \to \infty$. Замкнутость графика B означает, что (s,t) принадлежит графику B, или, что $t \in B(s)$. Если положить

$$s = (s_1,s_2,\dots,s_n) \text{ и } t = (t_1,t_2,\dots,t_n),$$

то достаточно установить эквивалентное утверждение, состоящее в том, что для любого игрока i и любой стратегии $a_i \in S_i$ выполнено

$$u_i(s_{-i},t_i) \geq u_i(s_{-i},a_i). \tag{9.9}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости (9.9), положим

$$s^\alpha = (s_1^\alpha,s_2^\alpha,\dots,s_n^\alpha) \text{ и } t^\alpha = (t_1^\alpha,t_2^\alpha,\dots,t_n^\alpha).$$

Заметим, что $s^\alpha \to s$ и $t^\alpha \to t$ в S эквивалентно тому, что $s_i^\alpha \to s_i$ и $t_i^\alpha \to t_i$ в S_i для любого i.

Как и в (9.9), $t^\alpha \in B(s^\alpha)$ эквивалентно

$$u_i(s_{-i}^\alpha,t_i^\alpha) \geq u_i(s_{-i}^\alpha,a_i) \tag{9.10}$$

для любых α и $a_i \in S_i$. Зафиксируем $a_i \in S_i$ и заметим, что $(s_{-i}^\alpha,t_i^\alpha) \to (s_{-i},t_i)$ и $(s_{-i}^\alpha,a_i) \to (s_{-i},a_i)$ в S. Из полунепрерывности сверху u_i по всем переменным следует, что

$$\limsup u_i(s_{-i}^\alpha,t_i^\alpha) = u_i(s_{-i},t_i).$$

[1] Версию данного результата можно найти в: *Dasgupta P., Maskin E.* Existence of equiliblium in discontinuous economic games. I. Theory // Review of Economic Studies. 1986. Vol. 1. P. 1–26.

Таблица 9.4. Игра без равновесия по Нэшу

		Игрок 2	
Игрок 1	Стратегия	L	R
	T	(0,1)	(1,0)
	B	(1,0)	(0,1)

Отсюда и из (9.10) имеем

$$u_i(s_{-i},t_i) = \limsup u_i(s_{-i}^{\alpha},t_i^{\alpha}) \geq \limsup u_i(s_{-i}^{\alpha},a_i) = u_i(s_{-i},a_i),$$

что доказывает справедливость (9.9) и тем самым завершает доказательство. ■

Хотя теорема 9.20 и имеет обширную область приложений, теорема 9.21 более универсальна и применима в ситуациях, которые выходят за рамки теоремы 9.20. В общем случае, если удается показать, что графики отображений наилучших ответов замкнуты, то в игре обязательно существует равновесие в смешанных стратегиях, даже если функции выигрышей не обладают хорошими свойствами регулярности. Непрерывность функции выигрыша просто-напросто гарантирует, что отображения наилучших ответов будут иметь замкнутый график.

Из этих теорем следует, что в игре есть равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в том случае, если функции выигрышей квазивогнуты по стратегиям игрока. Однако функции выигрышей игры могут и не быть квазивогнутыми; что, конечно же, справедливо для игр с конечными множествами стратегий. Для конечных игр хорошие общие условия существования равновесия в чистых стратегиях получить довольно трудно. На самом деле, как мы убедились ранее, нетрудно построить игру в стратегической форме, которая не имела бы равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Например, простая матричная игра, изображенная на рис. 9.4, не имеет равновесия по Нэшу.

Одно из объяснений отсутствия равновесия по Нэшу в чистых стратегиях — у игроков слишком мало стратегий. В разделе 2.4 мы обсуждали, как можно расширить множества стратегий игроков, для того чтобы гарантировать существование равновесия по Нэшу, — однако это будет равновесие в смешанных стратегиях. Итак, покажем, почему расширение до множества смешанных стратегий гарантирует существование равновесия по Нэшу в конечных играх.

Пусть $G=(S_1,\ldots,S_n,u_1,\ldots,u_n)$ — конечная игра n лиц. Как и ранее, полагаем в качестве $\Delta(S_i)$ непустое, выпуклое и компактное подмножество Евклидова пространства R^{k_i}, состоящее из всевозможных распределений вероятностей на S_i. Другими словами, элементами $\Delta(S_i)$ выступают векторы $p_i=(p_1^i,p_2^i,\ldots,p_{k_i}^i)$, где $p_j^i \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{k_i} p_j^i = 1$. Здесь p_j^i обозначает вероятность, с которой играется стратегия s_j^i. Также необходимо иметь в виду, что любая (чистая) стратегия s_j^i отождествляется с k_i-мерным вектором $p_{s_j^i}=(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,0)$, где j-я координата равна 1, а остальные — нулю. Из этого отождествления следует, что $S_i \subseteq \Delta(S_i)$.

Теперь положим $\Delta = \prod_{i=1}^{n} \Delta(S_i)$ и заметим, что Δ не пусто, выпукло и компактно в Евклидовом пространстве. Элементы Δ представляют собой **профили смешанных стратегий** игры G. Если $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Delta$, где $p_i = (p_1^i, p_2^i, \dots, p_{k_i}^i)$, то ожидаемая полезность игрока i равна

$$\hat{u}_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} p_{j_1}^1 p_{j_2}^2 \cdots p_{j_n}^n u_i(s_{j_1}^1, s_{j_2}^2, \dots, s_{j_n}^n).$$

Заметим, что если каждое p_i является чистой стратегией игрока i, скажем $s_{j_i}^i$, то ясно, что $\hat{u}_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = u_i(s_{j_1}^1, s_{j_2}^2, \dots, s_{j_n}^n)$. Иначе говоря, $\hat{u}_i$ является расширением u_i с множества всех профилей чистых стратегий $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ игры G на множество всех смешанных профилей стратегий Δ. Таким образом, имеем следующую игру n лиц в стратегической форме:

$$G' = (\Delta(S_1), \Delta(S_2), \dots, \Delta(S_n), \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n),$$

которая образует расширение конечной игры n лиц $G = (S_1, \dots, S_n, u_1, \dots, u_n)$ на множество **смешанных стратегий**.

Из формулы определения $\hat{u}_i$ следует, что $\hat{u}_i : \Delta \to R$ — непрерывная (по совокупности переменных) функция. Далее обратим внимание на то, что каждая $\hat{u}_i$ квазивогнута по переменной p_i. В действительности, для любых профилей смешанных стратегий p_{-i} всех игроков, за исключением i, стратегий p_i, $p_i' \in \Delta(S_i)$ и $0 \le \lambda \le 1$ выполнено

$$\hat{u}_i(p_{-i}, \lambda p_i + (1-\lambda)p_i') = \lambda \hat{u}_i(p_{-i}, p_i) + (1-\lambda)\hat{u}_i(p_{-i}, p').$$

То есть каждая $\hat{u}_i$ линейна и, следовательно, квазивогнута по переменной p_i. В частности, игра G' удовлетворяет требованиям теоремы 9.20. Таким образом, имеем следующий результат.

Теорема 9.22 (существование равновесия в смешанных стратегиях). *Пусть $G = (S_1, \dots, S_n, u_1, \dots, u_n)$ — игра n лиц в стратегической форме с конечными множествами стратегий. Тогда расширение G до игры G' в смешанных стратегиях имеет непустое и компактное множество равновесий по Нэшу.*

Теорема говорит о том, что даже если в конечной игре n лиц G нет равновесия в чистых стратегиях, то *в смешанных стратегиях* оно обязательно найдется.

Чтобы проиллюстрировать этот результат, рассмотрим игру «Орлянка», не имеющую равновесий по Нэшу в чистых стратегиях. Пусть p — вероятность выбора игроком 1 стратегии T, а q — вероятность выбора игроком 2 стратегии L. Исследуем отображения наилучших откликов игроков при использовании смешанных стратегий. Для игрока 1 имеем

$$B_1(q) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } q > \frac{1}{2}, \\ [0,1], & \text{если } q = \frac{1}{2}, \\ \{1\}, & \text{если } q < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

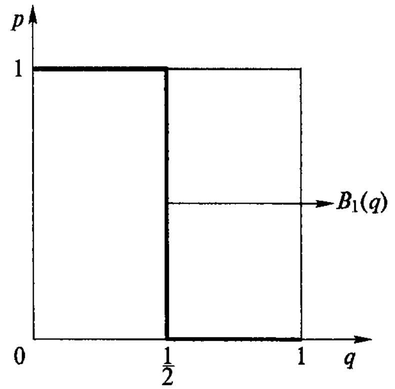


Рис. 9.3. Оптимальный отклик игрока 1

График этого отображения — на рис. 9.3.

Аналогично отображение наилучшего отклика игрока 2 имеет вид

$$B_2(p) = \begin{cases} \{1\}, & \text{если } p > \frac{1}{2}, \\ [0,1], & \text{если } p = \frac{1}{2}, \\ \{0\}, & \text{если } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

На рис. 9.4, где представлены отображения наилучших откликов обоих игроков, видно, что отображения пересекаются в точке $\left(p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, равновесие игры в смешанных стратегиях задается точкой $\left(p^* = \frac{1}{2}, q^* = \frac{1}{2}\right)$. Игра имеет равновесие в смешанных стратегиях, хотя и не имеет равновесия в чистых стратегиях.

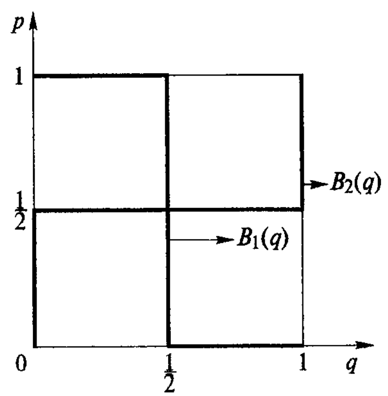


Рис. 9.4. Равновесие в смешанных стратегиях

Техника, которая применялась для доказательства существования равновесия в смешанных стратегиях, может быть также использована для того, чтобы показать существование равновесия в смешанных стратегиях для игр в стратегической форме с неполной информацией (см. раздел 2.7). Напомним, что если в игре с неполной информацией множество типов игрока i задано конечным множеством T_i, то стратегия игрока i задается функцией $s_i : T_i \to S_i$; и если позволить игрокам использовать смешанные стратегии, то стратегия игрока i имеет вид функции $s_i : T_i \to \Delta(S_i)$. Поскольку T_i конечно, стратегия игрока i является элементом $\Delta(S_i)^{|T_i|}$, где $|T_i|$ — размерность множества T_i; следовательно, множество стратегий игрока i в игре с неполной информацией можно обозначать в виде $\Delta(S_i)^{|T_i|}$. Так как $\Delta(S_i)$ — выпуклое и компактное подмножество Евклидова пространства, то $\Delta(S_i)^{|T_i|}$ — тоже выпуклое и компактное подмножество Евклидова пространства.

Для заданного профиля стратегий $p_{-i}(\cdot) \in \prod_{j\neq i} \Delta(S_j)^{|T_j|}$ всех игроков $j \neq i$ определим отображение наилучшего отклика игрока i типа t_i, обозначаемого в виде

$$B_i(t_i) : \prod_{j\neq i} \Delta(S_j)^{|T_j|} \twoheadrightarrow \Delta(S_i),$$

как

$$B_i(t_i)(p_{-i}(\cdot)) = \{p_i^*(t_i) \in \Delta(S_i) : Eu_i(p_i^*(t_i),(p_{-i}(\cdot)) = \\ = \max_{p_i \in \Delta(S_i)} Eu_i(p_i, p_{-i}(\cdot))\}. \tag{9.11}$$

В разделе 2.7 упоминалось о том, что ожидаемая полезность игрока i типа t_i' в случае, когда все игроки используют чистые стратегии, составляет

$$Eu_i(s_i,(s_j(\cdot)),t_i') = \sum_{t\in T} \mu(t|t') u_i(s_i,(s_j(t_i))_{j\neq i},t_i').$$

Таким образом, если игроки используют смешанные стратегии $(p_i(t_i), p_{-i}(\cdot))$, то ожидаемая полезность $Eu_i(p_i^*(t_i),(p_{-i}(\cdot))$ является математическим ожиданием $Eu_i(s_i,(s_j(\cdot)),t_i)$, которое рассчитывается по вероятностному распределению $(p_i(t_i), p_{-i}(\cdot))$ на $\Delta(S_i) \times \prod_{j\neq i} \Delta(S_j)^{|T_j|}$.

Теперь докажем теорему 2.23, которая заново сформулирована ниже.

Теорема 9.23. *Игра в стратегической форме с неполной информацией с конечным множеством стратегий S_i, конечным множеством типов T_i и функциями выигрыша $u_i : S_1 \times S_2 \times \cdots S_n \times T_i \to R$ игроков $i = 1,\ldots,n$, имеет равновесие в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Доказательство схоже с тем, что было представлено в теореме 9.20. Для начала заметим, что по теореме Бержа о максимуме отображение $B_i(t_i)$ из (9.11) не пустозначно и имеет замкнутый график. Оно также выпуклозначно, так как включает смешанные стратегии. Таким образом, отображение B: $\prod_{i=1}^n \Delta^{|T_i|} \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^n \Delta^{|T_i|}$, определенное как

$$B(p_1(\cdot),\ldots,p_n(\cdot)) = \prod_{t_1\in T_1} B_1(t_1)(p_{-1}(\cdot)) \times \prod_{t_2\in T_2} B_2(t_2)(p_{-2}(\cdot)) \times \\ \times \cdots \times \prod_{t_n \in T_n} B_n(t_n)(p_{-n}(\cdot)),$$

не пустозначно, выпуклозначно, определено на компактном и выпуклом подмножестве Евклидова пространства и имеет замкнутый график. Следовательно, по теореме Какутани о неподвижной точке оно имеет неподвижную точку $(p_1^*(\cdot),\dots,p_n^*(\cdot))$. Эта точка является требуемым равновесием игры с неполной информацией, так как неподвижная точка удовлетворяет условию

$$p_i^*(t_i)\in B_i(t_i)(p_{-i}^*(\cdot))$$

для любого игрока i и типа t_i этого игрока. ■

Упражнения

1. Рассмотрим игру в стратегической форме с двумя участниками. Множества стратегий имеют вид $S_1=S_2=[0,2]$, а функции выигрышей — $u_1(s_1,s_2)=\sqrt{s_1}-\sqrt{s_2}$ и $u_2(s_1,s_2)=\sqrt{s_2}-\sqrt{s_1}$.
   (a) Докажите, что игра имеет равновесие в чистых стратегиях.
   (b) Найдите равновесие.
2. Рассмотрим игру в стратегической форме с двумя участниками. Множества стратегий имеют вид $S_1=S_2=[0,2]$, а функции выигрышей — $u_1(s_1,s_2)=\sqrt{s_1s_2}$ и $u_2(s_1,s_2)=\sqrt{s_1s_2}$.
   (a) Докажите, что игра имеет равновесие в чистых стратегиях.
   (b) Найдите равновесие.
3. Докажите, что игра в стратегической форме, в которой множества стратегий двух игроков имеют вид $S_1=S_2=[0,2]$, а функции выигрышей равны $u_1(s_1,s_2)=s_1^2-2s_1s_2$ и $u_2(s_1,s_2)=s_2^2-2s_1s_2-s_1^2$, содержит как минимум одно равновесие в чистых стратегиях. Найдите равновесную точку.
4. Докажите, что игра двух лиц в стратегической форме с множествами стратегий $S_1=S_2=[0,2]$ и функциями выигрышей

$$u_1(s_1,s_2)=\begin{cases}1+s_1^2-2s_1s_2, & \text{если } s_1\ge s_2,\\ s_1^2-2s_1s_2, & \text{если } s_1<s_2\end{cases}$$

   и $u_2(s_1,s_2)=2s_2^2-2s_1s_2-s_1^2$ должна иметь как минимум одно равновесие в чистых стратегиях. Найдите равновесную точку.
5. Пользуясь выкладками теоремы 9.20, найдите *все* равновесия, в чистых и смешанных стратегиях, в игре «Координация».
6. Пользуясь выкладками теоремы 9.20, найдите *все* равновесия, в чистых и смешанных стратегиях, в игре «Охота на оленя» из гл. 2.
7. Докажите, что в модели олигополии Курно с n фирмами всегда существует равновесие, если кривая обратного спроса $p(q)$ вогнута, т.е. $p''<0$.
8. Докажите теорему 2.23 гл. 2.

9.4. Существование равновесия в динамических играх

Мы уже обсудили существование равновесия в играх в стратегической форме. Теперь перейдем к обсуждению существования равновесия в конечных динамических играх, которые являются динамическими играми с конечным числом узлов. Мы уже отмечали, что динамические игры достаточно сильно отличаются от игр в стратегической форме, поскольку имеют различные стадии, в которых происходит принятие решений. Мы сосредоточим внимание на наиболее широко используемых динамических играх, а именно динамических играх с совершенной памятью. Концепция совершенной памяти обсуждалась в разделе 4.4; определение 4.28 — формальное определение игры с совершенной памятью.

Мы покажем, что такие конечные динамические игры с совершенной памятью всегда имеют совершенное в подыграх равновесие в поведенческих стратегиях. Для доказательства этого результата нам потребуется показать, что для любой смешанной стратегии найдется эквивалентная поведенческая стратегия, и наоборот. При этом стратегии эквивалентны, если они порождают одно и то же вероятностное распределение на терминальных узлах или исходах игры. Пусть T — множество терминальных узлов динамической игры, $b=(b_1,\ldots,b_n)$ — профиль поведенческих стратегий, а $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ — профиль смешанных стратегий. Пусть $\mu(t\in T|\sigma)$ — вероятность достижения терминального узла $t\in T$ при использовании профиля смешанных стратегий σ, а $\mu(t\in T|b)$ — вероятность достижения терминального узла $t\in T$ при использовании профиля поведенческих стратегий b.

Определение 9.24. *Профиль смешанных стратегий $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ и профиль поведенческих стратегий $b=(b_1,\ldots,b_n)$ называются **эквивалентными**, если*

$$\mu(t\in T|\sigma)=\mu(t\in T|b)$$

для любого $t\in T$.

Мы теперь переходим к доказательству того, что любая смешанная стратегия σ_i порождает поведенческую стратегию b_i игрока i, и наоборот, такую что результирующие профили смешанных и поведенческих стратегий σ и b эквивалентны. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения при определении различных понятий, относящихся к динамическим играм.

(1) $\mathcal{I}_i^k$: k-е информационное множество игрока i.

(2) $\nu(\mathcal{I}_i^k)$: множество выборов игрока i в каждом узле информационного множества $\mathcal{I}_i^k$.

(3) $\Delta(\nu(\mathcal{I}_i^k))$: множество вероятностных распределений на множестве выборов $\nu(\mathcal{I}_i^k)$ игрока i в информационном множестве $\mathcal{I}_i^k$.

(4) e_i^k: общий элемент множества выборов $\nu(\mathcal{I}_i^k)$ игрока i в информационном множестве $\mathcal{I}_i^k$.

Лемма 9.25 (Кун [48]). *В конечной динамической игре с совершенной памятью любая смешанная стратегия игрока порождает эквивалентную ей поведенческую стратегию, и наоборот.*

Доказательство. Пусть $b_i\in\Delta(\nu(\mathcal{I}_i^k))\times\cdots\times\Delta(\nu(\mathcal{I}_i^{K_i}))$ — профиль поведенческих стратегий игрока i в динамической игре с совершенной памятью. Для каждой стратегии $s_i \in S_i$ игрока i, такой что $s_i = (e_i^1, e_i^2, \ldots, e_i^{K_i})$, $e_i^k \in \nu(\mathcal{I}_i^k)$, $k = 1, \ldots, K_i$, положим

$$\sigma_i(s_i) = b_i(e_i^1) \times b_i(e_i^2) \times \cdots \times b_i(e_i^{K_i}), \tag{9.12}$$

где $b_i(e_i^k)$ — вероятность выбора e_i^k в информационном множестве $\mathcal{I}_i^k$. Тогда

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = \sum_{k=1}^{K_i} \sum_{e_i^k \in \mathcal{I}_i^k} b_i(e_i^1) \times b_i(e_i^2) \times \cdots \times b_i(e_i^{K_i}) =$$

$$= \sum_{e_i^1 \in \mathcal{I}_i^1} b_i(e_i^1) \times \sum_{e_i^2 \in \mathcal{I}_i^2} b_i(e_i^2) \times \cdots \times \sum_{e_i^{K_i} \in \mathcal{I}_i^{K_i}} b_i(e_i^{K_i}) = 1 \times 1 \times 1 \cdots \times 1 = 1.$$

Таким образом, (9.12) определяет смешанную стратегию на S_i.

Пусть теперь $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ — смешанная стратегия игрока i в динамической игре, и пусть $(\hat{e}_i^1, \hat{e}_i^2, \ldots, \hat{e}_i^{l-1})$ — последовательность выборов в информационных множествах $\mathcal{I}_i^1, \ldots, \mathcal{I}_i^{l-1}$, предшествующих информационному множеству $\mathcal{I}_i^l$. В динамической игре с совершенной памятью такая последовательность единственна[1]. Определим

$$S_i(\hat{e}_i^1, \hat{e}_i^2, \ldots, \hat{e}_i^{l-1}) = \{s_i \in S_i \mid s_i(\mathcal{I}_i^k) = \hat{e}_i^k, k = 1, \ldots, l-1\}.$$

Это множество стратегий игрока i, состоящее из тех стратегий, которые предполагают выбор $\hat{e}_i^k$ в информационных множествах $\mathcal{I}_i^k$, $k = 1, \ldots, l-1$, предшествующих информационному множеству $\mathcal{I}_i^l$.

Теперь построим поведенческую стратегию b_i, порожденную σ_i. При $l = 1$ возьмем

$$b_i(e_{iz}^1) = \sum_{s_i \in S_i(e_{iz}^1)} \sigma_i(s_i).$$

Тогда, если $1, \ldots, Z^1$ — выборы в информационном множестве $\mathcal{I}_i^1$, то

$$\sum_{z=1}^{Z^1} b_i(e_{iz}^1) = \sum_{z=1}^{Z^1} \sum_{s_i \in S_i(e_{iz}^1)} \sigma_i(s_i) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1.$$

В общем случае при $l = k$ положим

$$b_i(e_{iz}^k) \times b_i(\hat{e}_i^1) \times b_i(\hat{e}_i^2) \times \cdots \times b_i(\hat{e}_i^{k-1}) = \sum_{s_i \in S_i(\hat{e}_i^1, \hat{e}_i^2, \ldots, \hat{e}_i^{k-1}, e_{iz}^k)} \sigma_i(s_i), \tag{9.13}$$

если все $b_i(\hat{e}_i^1), \ldots, b_i(\hat{e}_i^{k-1})$ положительны. Если хотя бы одна из вероятностей $b_i(\hat{e}_i^1), \ldots, b_i(\hat{e}_i^{k-1})$ равна 0, то выберем $b_i(e_{iz}^k)$, $z = 1, \ldots, Z^k$, так что[2]

---

[1] В этом месте нам нужно предположение о том, что динамическая игра имеет совершенную память.

[2] Поведенческая стратегия в информационных множествах, которые достигаются с вероятностью 0 при данном профиле смешанных стратегий, может представлять собой любое распределение; следовательно, профиль поведенческих стратегий, порождаемый профилем смешанных стратегий, не единствен.

$$\sum_{z=1}^{Z^k} b_i(e_{iz}^k) = 1 . \qquad (9.14)$$

В случае когда все $b_i(\hat{e}_i^1),\ldots,b_i(\hat{e}_i^{k-1})$ положительны, из (9.13) вытекает

$$b_i(e_{iz}^k) = \frac{\sum_{s_i \in S_i(\hat{e}_i^1,\hat{e}_i^2,\ldots,\hat{e}_i^{k-1},e_{iz}^k)} \sigma_i(s_i)}{b_i(\hat{e}_i^1)\times b_i(\hat{e}_i^2)\times\cdots\times b_i(\hat{e}_i^{k-1})} . \qquad (9.15)$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{z=1}^{Z^k} b_i(e_{iz}^k) = \frac{\sum_{z=1}^{Z^k}\sum_{s_i \in S_i(\hat{e}_i^1,\hat{e}_i^2,\ldots,\hat{e}_i^{k-1},e_{iz}^k)} \sigma_i(s_i)}{b_i(\hat{e}_i^1)\times b_i(\hat{e}_i^2)\times\cdots\times b_i(\hat{e}_i^{k-1})} =$$

$$= \frac{\sum_{s_i \in S_i(\hat{e}_i^1,\hat{e}_i^2,\ldots,\hat{e}_i^{k-1})} \sigma_i(s_i)}{b_i(\hat{e}_i^1)\times b_i(\hat{e}_i^2)\times\cdots\times b_i(\hat{e}_i^{k-1})} = \frac{b_i(\hat{e}_i^1)\times b_i(\hat{e}_i^1)\times\cdots\times b_i(\hat{e}_i^{k-1})}{b_i(\hat{e}_i^1)\times b_i(\hat{e}_i^2)\times\cdots\times b_i(\hat{e}_i^{k-1})} = 1 .$$

Отсюда следует, что (9.15) определяет поведенческую стратегию в $\mathcal{I}_i^k$. Наконец, заметим, что $b_i(\hat{e}_i^{K_i})$ находится по формуле

$$b_i(\hat{e}_i^{K_i}) = \frac{\sum_{s_i \in S_i(\hat{e}_i^1,\hat{e}_i^2,\ldots,\hat{e}_i^{K_i})} \sigma_i(s_i)}{b_i(\hat{e}_i^1)\times b_i(\hat{e}_i^2)\times\cdots\times b_i(\hat{e}_i^{K_i-1})} ,$$

следовательно,

$$b_i(\hat{e}_i^1)\times\cdots\times b_i(\hat{e}_i^{K_i}) = \sum_{s_i \in S_i(\hat{e}_i^1,\hat{e}_i^2,\ldots,\hat{e}_i^{K_i})} \sigma_i(s_i) . \qquad (9.16)$$

Теперь покажем, что определенные нами ассоциированные профили смешанных и поведенческих стратегий эквивалентны. Достаточно показать, что для любого терминального узла $t \in T$ выполнено

$$\mu(t \in T|\sigma) = \mu(t \in T|b) .$$

Пусть

$$\hat{e} = (\hat{e}^1, \hat{e}^2, \ldots, \hat{e}^J)$$

— единственная последовательность выборов игроков, которая приводит к терминальному узлу t. Эту последовательность можно сгруппировать в соответствии с игроками, принимающими в ней решения, следующим образом:

$$\hat{e} = ((\hat{e}_1^j)_{j=1}^{J_1}, (\hat{e}_2^j)_{j=1}^{J_2}, \ldots, (\hat{e}_n^j)_{j=1}^{J_n}) .$$

Далее определим отображение

$$\alpha : (\hat{e}^1, \hat{e}^2, \ldots, \hat{e}^J) \to \{1, \ldots, n\} ,$$

которое устанавливает соответствие между выборами и совершившими их игроками. Как и ранее, $S_i(\hat{e})$ отражает множество чистых стратегий игрока i, участвующих в выборе e. Тогда

$$\mu(t \in T|\sigma) = \left[\sum_{s_1 \in S_1(\hat{e})} \sigma_1(s_1)\right] \times \left[\sum_{s_2 \in S_2(\hat{e})} \sigma_2(s_2)\right] \times \cdots \times \left[\sum_{s_n \in S_n(\hat{e})} \sigma_n(s_n)\right] =$$

$$= [b_1(\hat{e}_1^j) \times \cdots \times b_1(\hat{e}_1^{J_1})] \times [b_2(\hat{e}_2^1) \times \cdots \times b_2(\hat{e}_2^{J_2})] \times \cdots \times$$

$$\times [b_n(\hat{e}_n^1) \times \cdots \times b_n(\hat{e}_n^{J_n})] =$$

$$= b_{\alpha(\hat{e}^1)}(\hat{e}^1) \times b_{\alpha(\hat{e}^2)}(\hat{e}^2) \times \cdots \times b_{\alpha(\hat{e}^J)}(\hat{e}^J) = \mu(t \in T|b) \text{ (см. (9.16)).}$$

На этом доказательство завершено. ■

Пусть $U_i(\sigma)$ — ожидаемый выигрыш игрока i при использовании профиля смешанных стратегий σ, а $U_i(b)$ — его ожидаемый выигрыш при использовании профиля поведенческих стратегий b. Результат леммы показывает, что для любого профиля смешанных стратегий $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ожидаемый выигрыш игрока i, $U_i(\sigma) = U_i(b)$, где $U_i(b)$ — ожидаемый выигрыш игрока i при использовании профиля поведенческих стратегий b, порожденного профилем смешанных стратегий σ. Лемма позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 9.26. *Любая конечная динамическая игра с совершенной памятью имеет равновесие в поведенческих стратегиях.*

Доказательство. Пусть $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ — равновесие в смешанных стратегиях динамической игры в стратегической форме. По теореме Нэша такое равновесие всегда существует. Пусть $b^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ — профиль поведенческих стратегий, порожденный профилем смешанных стратегий σ^*.

Утверждается, что b^* — равновесный профиль поведенческих стратегий. Предположим, что это не так. Тогда существует игрок i и поведенческая стратегия b_i игрока i, такая что

$$U_i(b_i, b_{-i}^*) > U_i(b^*). \tag{9.17}$$

По лемме 9.25 существует профиль смешанных стратегий $(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$, который эквивалентен профилю поведенческих стратегий (b_i, b_{-i}^*). Следовательно, из (9.17) вытекает

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(b_i, b_{-i}^*) > U_i(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_n^*) =$$

$$= U_i(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*).$$

Получили противоречие. Поэтому результат справедлив. ■

Теорема 9.27. *Любая конечная динамическая игра с совершенной памятью имеет равновесие в поведенческих стратегиях, совершенное в подыграх.*

Доказательство. Рассмотрим конечную динамическую игру с K этапами. Воспользуемся методом обратной индукции.

Этап $K - 1$. Рассмотрим все собственные подыгры, имеющие начальный узел (или корень) на этапе $K - 1$. Если таких подыгр нет, переходим к этапу

$K - 2$. По теореме 9.26 каждая из найденных подыгр имеет равновесие в поведенческих стратегиях. Его и определим в качестве профиля поведенческих стратегий всех подыгр этапа $K - 1$.

Этап K – 2. Рассмотрим все собственные подыгры с начальными узлами на этапе $K - 2$. Возможны два случая.

Случай I. *Подыгра этапа $K - 2$ не имеет подыгры на этапе $K - 1$.* Определим на них профиль поведенческих стратегий как их равновесный профиль. Его существование гарантируется теоремой 9.26.

Случай II. *Подыгра этапа $K - 2$ имеет подыгры на этапе $K - 1$.* Редуцируем подыгру этапа $K - 2$ так, что все узлы принятия решений на этапе $K - 1$, являющиеся корнями подыгр этапа $K - 1$, теперь стали терминальными. Определим вектор выигрышей в каждом из этих терминальных узлов как вектор ожидаемых выигрышей при использовании профиля поведенческих стратегий, который является равновесным в подыгре этапа $K - 1$, стартующей в этом узле. По теореме 9.26 редуцированная динамическая игра имеет равновесие в поведенческих стратегиях.

Определим профиль поведенческих стратегий в подыграх этапа $K - 2$ следующим образом.

(1) В каждом узле подыгры, стартующей на этапе $K - 2$, в качестве поведенческой стратегии (которая представляет собой вероятностное распределение на множестве выборов в узле) возьмем равновесный профиль поведенческих стратегий редуцированной динамической игры.

(2) В каждом узле подыгры, стартующей на этапе $K - 1$, в качестве поведенческой стратегии (которая представляет собой вероятностное распределение на множестве выборов в узле) возьмем равновесный профиль поведенческих стратегий подыгры, стартующей на этапе $K - 1$.

Этот профиль поведенческих стратегий будет равновесным профилем поведенческих стратегий в подыгре с началом на этапе $K - 2$. Он является совершенным в подыграх по построению.

Действуя по рекурсии, мы доберемся до этапа 1 динамической игры. Редуцированная игра будет содержать терминальные узлы, которые являются начальными узлами собственных подыгр, стартующих на этапе 2. Если на этапе 2 нет собственных подыгр, то конечные узлы редуцированной игры будут начальными узлами подыгр, которые начинаются на этапе 3. Если нет подыгр, стартующих на этапе 2 или 3, то редуцированная игра может содержать терминальные узлы, являющиеся узлами подыгр, которые начинаются на этапе 4, и т.д. Редуцированная игра этапа 1 также может содержать терминальные узлы, которые достигаются после того, как сделан выбор на этапе 1 или в корне исходной игры.

Редуцированная игра этапа 1 имеет равновесие в поведенческих стратегиях, опять же в силу теоремы 9.26. Отсюда имеем распределение выборов игроков во всех информационных множествах, предшествующих первым собственным подыграм. Для первой собственной подыгры рассмотрим поведенческие стратегии, которые входили в состав совершенных в подыграх профилей, построенных рекурсивно для этой подыгры. Продолжим делать это в каждой из последующих подыгр. Найденный профиль поведенческих стратегий является совершенным в подыграх по построению.

Наконец, если динамическая игра не имеет собственных подыгр, то любая равновесная поведенческая стратегия по определению является совершенной в подыграх стратегией игры.

На этом доказательство завершено. ■

9.5. Существование секвенциального равновесия

В гл. 8 была представлена идея секвенциального равновесия в качестве подходящей концепции решения для динамических игр с несовершенной информацией. Здесь мы переходим к доказательству того, что любая конечная динамическая игра с совершенной памятью имеет секвенциальное равновесие. Начнем с определения.

Определение 9.28. *Профиль смешанных стратегий $\pi^\varepsilon = (\pi_1^\varepsilon, \ldots, \pi_n^\varepsilon)$ называется **ε-ограниченным**, если для $\varepsilon > 0$ поведенческая стратегия π_i^ε каждого игрока i удовлетворяет условию*

$$\pi_i^\varepsilon(e) \geq \varepsilon$$

для любого выбора (ребра) e в каждом информационном множестве игрока i.

Следует отметить, что ε-ограниченный профиль поведенческих стратегий является вполне смешанным профилем поведенческих стратегий, поскольку подразумевает выбор любого ребра с положительной вероятностью. В силу этого любое информационное множество игры достигается с положительной вероятностью. Следовательно, в каждом информационном множестве ε-ограниченным профилем поведенческих стратегий порождается единственная система ожиданий, согласованная с профилем поведенческих стратегий. Перейдем к рассмотрению следующего результата, который касается существования секвенциального равновесия. Для доказательства теоремы нам потребуется вспомнить некоторые понятия и ввести несколько новых. Напомним (глава 8), что

$$E_i(\mathcal{I}_i, \pi, \mu)$$

ожидаемый выигрыш игрока i в информационном множестве $\mathcal{I}_i$ в случае, когда используется профиль стратегий π, и μ — ожидания в $\mathcal{I}_i$, порождаемые этим профилем стратегий π. Далее вспомним, что $\Delta(\nu(\mathcal{I}_j))$ — множество вероятностных распределений на выборах $\nu(\mathcal{I}_j)$ игрока j в информационном множестве $\mathcal{I}_j$. Если профиль поведенческих стратегий π^ε является ε-ограниченным, то распределение вероятностей на любом множестве выборов $\nu(\mathcal{I}_j)$

ограничено снизу величиной $\varepsilon > 0$, т.е. выборы задаются вероятностными распределениями на замкнутом подмножестве $\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_j))$ множества $\Delta(\nu(\mathcal{I}_j))$.

Рассмотрим профиль стратегий π^{ε}_{-i} игроков, отличных от i. Нетрудно проверить, что он является элементом

$$\prod_{j\neq i}\left(\prod_{k=1}^{K_j}\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_j^k))\right).$$

Аналогично стратегия π^{ε}_i игрока i представляет элемент

$$\prod_{k=1}^{K_i}\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_i^k)).$$

Таким образом,

$$U_i(\pi^{\varepsilon}_{-i},\pi^{\varepsilon}_i) = E_i(p^{\varepsilon}_{-i},p^{\varepsilon}_i),$$

где $E_i(p^{\varepsilon}_{-i},p^{\varepsilon}_i)$ — ожидаемый выигрыш игрока i в случае, когда все игроки совершают выборы в информационных множествах в соответствии с вероятностными распределениями $(p^{\varepsilon}_{-i},p^{\varepsilon}_i)$, которые порождаются профилем стратегий $(\pi^{\varepsilon}_{-i},\pi^{\varepsilon}_i)$.

В динамической игре с несовершенной информацией игрок может иметь несколько информационных множеств, некоторые из которых включают информационные множества, предшествующие другим информационным множествам. Следовательно, некоторые информационные множества игрока будут достигаться на более ранних стадиях игры. Пусть $L_i \geq 1$ — число стадий игры, в которых имеются информационные множества игрока i. Тогда для произвольно заданного π^{ε}_i, а значит, и для распределения вероятностей p^{ε}_i можно разбить p^{ε}_i на компоненты

$$p^{\varepsilon}_i = (p^{\varepsilon}_{i,s<l}, p^{\varepsilon}_{i,s\geq l}),$$

где $p^{\varepsilon}_{i,s<l}$ — распределения вероятностей в информационных множествах на стадиях, предшествующих l, где $1 \leq l \leq L_i$. В гл. 8 также отмечалось, что любой ε-ограниченный профиль стратегий порождает единственную систему ожиданий в каждом информационном множестве. Для каждого профиля стратегий π^{ε} будем указывать его единственную систему ожиданий в виде $\mu(\pi^{\varepsilon})$. Поскольку эта система ожиданий порождается распределением вероятностей p^{ε}, зачастую мы будем писать $\mu(p^{\varepsilon})$. Запишем через

$$E_i(\mathcal{I}_i,(p^{\varepsilon}_{-i},p^{\varepsilon}_i),\mu(p^{\varepsilon}_{-i},p^{\varepsilon}_i))$$

ожидаемый выигрыш игрока i в информационном множестве $\mathcal{I}_i$ в случае, когда распределения вероятностей порождены профилем стратегий, заданным с помощью $(p^{\varepsilon}_{-i},p^{\varepsilon}_i)$, и результирующая единственная система ожиданий имеет вид $\mu(p^{\varepsilon}_{-i},p^{\varepsilon}_i)$.

При заданном p^{ε}_{-i} распределении вероятностей игроков, отличных от i, на множестве выборов в их информационных множествах, оптимальный отклик игрока i подразумевает выбор вероятностных распределений p^{ε}_i в его информационных множествах, максимизирующий

$$E_i(p^{\varepsilon}_{-i},p^{\varepsilon}_i).$$

В общем случае этого невозможно достичь путем выбора вероятностного распределения $p_i^\varepsilon(\mathcal{I}_i^{k_i})$ независимо в каждом информационном множестве $\mathcal{I}_i^{k_i}$ игрока i так, чтобы получить максимум

$$E_i(\mathcal{I}_i^{k_i},(p_{-i}^\varepsilon,p_i^\varepsilon),\mu(p_{-i}^\varepsilon,p_i^\varepsilon))$$

при заданных распределениях $p_i^\varepsilon(\mathcal{I}_i)$ в $\mathcal{I}_i \neq \mathcal{I}_i^{k_i}$. Это происходит в силу того, что распределение вероятностей $p_i^\varepsilon(\mathcal{I}_i^{k_i})$ в информационном множестве $\mathcal{I}_i^{k_i}$ определяет ожидания во всех информационных множествах, которые следуют за $\mathcal{I}_i^{k_i}$, и распределение на множестве выборов, являющееся оптимальным при одном множестве ожиданий, в общем случае не будет оптимальным для другого множества ожиданий. В свою очередь, игрок сможет увеличить свой ожидаемый выигрыш в динамической игре при изменении распределений одновременно в двух или более информационных множествах.

Таким образом, оптимальная поведенческая стратегия игрока i при данном p_{-i}^ε лучше всего определяется с помощью алгоритма обратной индукции, при котором оптимальные распределения вероятностей в информационных множествах вычисляются в первую очередь в последней стадии L_i, образуя функцию от распределений, выбранных на стадиях от 1 до $L_i - 1$. Затем определяются оптимальные распределения на стадиях $L_i - 1$ и L_i, образуя функцию от распределений на стадиях от 1 до $L_i - 2$, и т.д.[1] Ниже данный подход будет использован для нахождения оптимальной поведенческой стратегии игрока i при известных поведенческих стратегиях всех остальных игроков.

Следующий результат показывает, что существует ε-ограниченный профиль стратегий, такой что если все игроки могут выбирать только ε-ограниченные стратегии, то каждый игрок имеет максимум ожидаемого выигрыша при данном ε-ограниченном профиле стратегий других игроков. Иначе говоря, результат показывает, что существует равновесие в ε-ограниченных стратегиях.

Лемма 9.29. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-ограниченный профиль поведенческих стратегий $\pi^{\varepsilon,*}$ и ожидания $\mu^{\varepsilon,*}$, согласованные с $\pi^{\varepsilon,*}$, такие что для любого игрока i*

$$E_i(\mathcal{I},(\pi_{-i}^{\varepsilon,*},\pi_i^{\varepsilon,*}),\mu^{\varepsilon,*}) \geq E_i(\mathcal{I},(\pi_{-i}^{\varepsilon,*},\pi_i^\varepsilon),\mu^\varepsilon))$$

в каждом из информационных множеств $\mathcal{I}$, для любой ε-ограниченной поведенческой стратегии π_i^ε игрока i и системы ожиданий μ^ε, порожденной профилем стратегий $(\pi_{-i}^{\varepsilon,*},\pi_i^\varepsilon)$.

Доказательство. Зафиксируем игрока i и воспользуемся алгоритмом обратной индукции по информационным множествам игрока i начиная с информационных множеств стадии L_i. При заданных π_{-i}^ε, а следовательно, и распределениях p_{-i}^ε на множествах выборов $\nu(\mathcal{I})$ в информационных

[1] Как можно справедливо заметить, для нахождения оптимальной поведенческой стратегии игроку i предстоит решать задачу динамического программирования с конечным горизонтом.

множествах $\mathcal{I}$ игроков, отличных от i, и распределениях $(p^{\varepsilon}_{i.s})_{s<L_i}$ во всех информационных множествах стадий с 1 по $L_i - 1$, существует единственная система ожиданий, порождаемая в каждом информационном множестве стадии L_i игрока i. Так как ожидаемые выигрыши $E_i(\mathcal{I}, p^{\varepsilon}, \mu^{\varepsilon}(p^{\varepsilon}))$ непрерывны на компактных множествах $\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}))$, то существует $\hat{p}^{\varepsilon}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i)$, которое дает максимум

$$E_i(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i, (p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i.s})_{s\le L_i}), \mu^{\varepsilon}(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s\le L_i}))$$

в каждом информационном множестве $I^{k_{L_i}}_i$ стадии L_i игрока i.

Определим отображение

$$B^{k_{L_i}}_i : \prod_{j\ne i}\prod_{k_j=1}^{K_j} \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_j}_j)) \times \prod_{l<L_i} \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_l}_i) \twoheadrightarrow \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i)$$

как

$$B^{k_{L_i}}_i(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i}) = \{(\hat{p}^{\varepsilon}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i))_{k_{L_i}}\}.$$

Отображение приводит к оптимальным распределениям вероятностей на множестве выборов в информационных множествах стадии L_i игрока i при известных распределениях в других информационных множествах игрока i и информационных множествах других игроков. Нетрудно понять, что график отображения, обозначенный как $G_{B^{k_{L_i}}_i}$, замкнут в силу теоремы Бержа о максимуме (см. теорему 9.13), и, следовательно,

$$G_{B^{L_i}_i} = \bigcup_{k_{L_i}} G_{B^{k_{L_i}}_i}$$

тоже замкнут, где $B^{L_i}_i(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i}) = \bigcup_{k_{L_i}} B^{k_{L_i}}_i(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i})$ определяет отображение $B^{L_i}_i$.

Далее, функция ожидаемого выигрыша в каждом информационном множестве $\mathcal{I}^{k_{L_i-1}}_i$ стадии $L_i - 1$ игрока i

$$E^{\max L_i-1}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i-1}}_i, (p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i}), \mu^{\varepsilon}(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i.s})_{s<L_i})) =$$
$$= E_i(\mathcal{I}^{k_{L_i-1}}_i, p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i}, (\hat{p}^{\varepsilon}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i))_{k_{L_i}}, \mu^{\varepsilon}(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i})),$$

определенная на $\prod_{j\ne i}\prod_{k_j=1}^{K_j} \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_j}_j)) \times \prod_{l<L_i} \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_l}_i)$, непрерывна. Это наблюдение также следует из теоремы Бержа о максимуме.

Теперь рассмотрим выборы в информационных множествах $(\mathcal{I}^{k_{L_i-1}}_i)_{k_{L_i-1}}$ стадии $L_i - 1$ игрока i. Определим отображение

$$B^{k_{L_i-1}}_i : \prod_{j\ne i}\prod_{k_j=1}^{K_j} \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_j}_j)) \times \prod_{l<L_i-1} \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_l}_i) \twoheadrightarrow \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_{L_i-1}}_i) \times \Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i)$$

как

$$B^{k_{L_i}}_i(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i-1}) = \{(\hat{p}^{\varepsilon}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i-1}}_i))_{k_{L_i-1}}, (\hat{p}^{\varepsilon}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i))_{k_{L_i}}\},$$

где $\hat{p}^{\varepsilon}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i-1}}_i)$ максимизирует

$$E^{\max L_i-1}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i-1}}_i, (p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i}), \mu^{\varepsilon}(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i}))$$

и каждый $\hat{p}^{\varepsilon}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i)$ — в

$$B^{k_{L_i}}_i(p^{\varepsilon}_{-i}, (p_{i,s})_{s<L_i-1}, \hat{p}^{\varepsilon}_i(\mathcal{I}^{k_{L_i}}_i))$$

для любого информационного множества $\mathcal{I}_i^{k_{L_i}}$ стадии L_i игрока i. Из теоремы 9.13 следует, что график $G_{B_i^{k_{L_i-1}}}$ замкнут и функция

$$E_i^{\max L_i-1}(\mathcal{I}_i^{k_{L_i-2}},(p_{-i}^{\varepsilon},(p_{i,s})_{s<L_i-1}),\mu^{\varepsilon}(p_{-i}^{\varepsilon},(p_{i,s})_{s<L_i-1}))=$$
$$=E_i(\mathcal{I}_i^{k_{L_i-2}},p_{-i}^{\varepsilon},(p_{i,s})_{s<L_i-2},(\hat{p}_i^{\varepsilon}(\mathcal{I}_i^{k_{L_i-1}}))_{k_{L_i-1}},\mu^{\varepsilon}(p_{-i}^{\varepsilon},(p_{i,s})_{s<L_i-2})),$$

определенная на $\prod_{j\neq i}\prod_{k_j=1}^{K_j}\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_j^{k_j}))\times\prod_{l<L_i-1}\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_i^{k_l})$, непрерывна. Таким образом, график отображения,

$$G_{B_i^{L_i-1}}=\bigcup_{k_{L_i-1}}G_{B_i^{k_{L_i-1}}},$$

замкнут, где отображение $B_i^{L_i-1}$ определяется как $B_i^{L_i-1}(p_{-i}^{\varepsilon},(p_{i,s})_{s<L_i-1})=$ $=\bigcup_{k_{L_i-1}}B_i^{k_{L_i-1}}(p_{-i}^{\varepsilon},(p_{i,s})_{s<L_i-1})$. Из построения отображений должно быть ясно, что

$$G_{B_i^{L_i-1}}\subset G_{B_i^{L_i}}.$$

Продолжая рекурсивно в той же манере, на стадии 1 будем иметь отображение

$$B_i:\prod_{j\neq i}\prod_{k_j=1}^{K_j}\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_j^{k_j}))\twoheadrightarrow\prod_{k_i=1}^{K_i}\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_i^{k_i}),$$

определенное как

$$B_i^{\varepsilon}(p_{-i}^{\varepsilon})=\{(\hat{p}_i^{\varepsilon}(\mathcal{I}_i^{k_i}))_{k_i=1}^{K_i}\},$$

где $(\hat{p}_i^{\varepsilon}(\mathcal{I}_i^{k_i}))_{k_i=1}^{K_i}$ максимизирует ожидаемый выигрыш

$$E_i(p_{-i}^{\varepsilon},(p_i^{\varepsilon}(\mathcal{I}_i^{k_i}))_{k_i=1}^{K_i})$$

игрока i при заданном профиле поведенческих стратегий π_{-i}^{ε} всех игроков, отличных от i, и, следовательно, при соответствующих распределениях вероятностей p_{-i}^{ε} в информационных множествах игроков, отличных от i. Это отображение не пустозначно и имеет замкнутый график. Тогда отображение

$$B^{\varepsilon}:\prod_{j=1}^{n}\prod_{k_j=1}^{K_j}\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_j^{k_j}))\twoheadrightarrow\prod_{j=1}^{n}\prod_{k_j=1}^{K_j}\Delta^{\varepsilon}(\nu(\mathcal{I}_j^{k_j}))$$

на компактном подмножестве $\prod_{j=1}^{n}\prod_{k_j=1}^{K_j}\Delta^{\varepsilon}(\nu(I_j^{k_j}))$ Евклидова пространства, задаваемое правилом

$$B^{\varepsilon}(p^{\varepsilon})=\{B_1^{\varepsilon}(p_{-1}^{\varepsilon}),\ldots,B_n^{\varepsilon}(p_{-n}^{\varepsilon})\},$$

не пустозначно и имеет замкнутый график. Также можно проверить, что отображение выпуклозначно, поскольку таковы все отображения $B_i^{k_l}$ при $1\leq l\leq L_i$ каждого игрока $i=1,\ldots,n$.

Следовательно, по теореме Какутани о неподвижной точке (теорема 9.15) существует $p^{\varepsilon,*}\in B(p^{\varepsilon,*})$. Теперь заметим, что поскольку $\pi^{\varepsilon,*}$ вполне смешанный профиль поведенческих стратегий, он порождает единственные ожидания $\mu^{\varepsilon,*}$, которые согласованы с $\pi^{\varepsilon,*}$. Поэтому согласованный набор $(\pi^{\varepsilon,*},\mu^{\varepsilon,*})$ удовлетворяет требуемым условиям. ■

Следующий результат показывает, что если ε достаточно малы, то равновесие в ε-ограниченных стратегиях является приближенным равновесием. Он необходим для доказательства итогового результата этого раздела.

Лемма 9.30. *Для заданной конечной динамической игры и равновесия в $1/s$-ограниченных стратегиях существует число $K > 0$, зависящее от игры, такое что*

$$0 \le \max_{\pi_i}[E_i(\pi^s, \mu^s, \mathcal{I}_i^{k_i}) - E_i((\pi_{-i}^s, \pi_i), \mu^s(\pi_{-i}^s, \pi_i), \mathcal{I}_i^{k_i})] \le \frac{K}{s}$$

для любой поведенческой стратегии π_i игрока i.

Опустим доказательство, поскольку оно очевидным образом следует из наблюдения, что если поведенческая стратегия игрока максимизирует ожидаемый выигрыш на множестве $1/s$-ограниченных поведенческих стратегий, то поведенческая стратегия, которая максимизирует ожидаемый выигрыш, ставит в соответствие нулевую вероятность не более чем конечному числу выборов; следовательно, ожидаемый выигрыш может быть увеличен путем увеличения вероятностей, отвечающих выборам с наибольшими выигрышами, на множитель $\left(1 + \frac{M}{s}\right)$ для некоторого $M > 0$. Поскольку игра конечна, M будет ограничено сверху. Детали доказательства остаются в качестве упражнения.

Теорема 9.31. *Любая конечная динамическая игра с совершенной памятью имеет секвенциальное равновесие.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon = \frac{1}{n}$, где n велико, и рассмотрим последовательность поведенческих стратегий и согласованных ожиданий $\{\pi^n, \mu^n\}_n$, такую что для каждой (π^n, μ^n) для любого игрока i и любого информационного множества $\mathcal{I}_i^{k_i}$ игрока i

$$E_i(\pi^n, \mu^n, \mathcal{I}_i^{k_i}) \ge E_i((\pi_{-i}^n, \pi_i), \mu^n(\pi_{-i}^n, \pi_i), \mathcal{I}_i^{k_i}) \tag{9.18}$$

для любой поведенческой стратегии π_i и порожденных распределений вероятностей на $\prod_{k_i=1}^{K_i} \Delta^{\frac{1}{n}}(\nu(\mathcal{I}_i^{k_i}))$. Такая пара $\{\pi^n, \mu^n\}_n$ существует для каждого n по лемме 9.30.

Рассмотрим пару поведенческих стратегий и ожиданий $(\hat{\pi}, \hat{\mu})$, заданную как

$$(\hat{\pi}, \hat{\mu}) = \lim_{n \to \infty}(\pi^n, \mu^n).$$

Такой предел существует в силу того, что $\prod_{j=1}^{n} \prod_{k_j=1}^{K_j} \Delta^{\frac{1}{n}}(\nu(\mathcal{I}_j^{k_j}))$ является компактом в Евклидовом пространстве, следовательно, любая последовательность $\{\pi^n, \mu^n\}_n$ имеет предельную точку.

Утверждается, что для любого игрока i и информационного множества $\mathcal{I}_i^{k_i}$ игрока i

$$E_i(\hat{\pi}, \hat{\mu}, \mathcal{I}_i^{k_i}) \ge E_i((\hat{\pi}_{-i}, \pi_i), \mu(\hat{\pi}_{-i}, \pi_i), \mathcal{I}_i^{k_i})$$

для любой поведенческой стратегии π_i игрока i.

Предположим, что это не так. Тогда для некоторого игрока i и некоторой поведенческой стратегии π_i игрока i имеем

$$E_i(\hat{\pi},\hat{\mu},\mathcal{I}_i^{k_i}) < E_i((\hat{\pi}_{-i},\pi_i),\mu(\hat{\pi}_{-i},\pi_i),\mathcal{I}_i^{k_i}) .$$

Положим

$$E_i((\hat{\pi}_{-i},\pi_i),\mu(\hat{\pi}_{-i},\pi_i),\mathcal{I}_i^{k_i}) - E_i(\hat{\pi},\hat{\mu},\mathcal{I}_i^{k_i}) = a > 0 . \tag{9.19}$$

Так как ожидаемые выигрыши непрерывны по распределениям вероятностей выборов в информационных множествах и ожиданиям, то существует достаточно большое n_0, такое что при всех $n \geq n_0$

$$\left|E_i(\pi^n,\mu^n,\mathcal{I}_i^{k_i}) - E_i(\hat{\pi},\hat{\mu},\mathcal{I}_i^{k_i})\right| \leq \frac{a}{2}$$

$$\left|E_i((\pi_{-i}^n,\pi_i),\mu(\pi_{-i}^n,\pi_i),\mathcal{I}_i^{k_i}) - E_i((\hat{\pi}_{-i},\pi_i),\mu(\hat{\pi}_{-i},\pi_i),\mathcal{I}_i^{k_i})\right| \leq \frac{a}{2} . \tag{9.20}$$

Из (9.19) и (9.20) для всех $n \geq n_0$

$$E_i((\pi_{-i}^n,\pi_i),\mu(\pi_{-i}^n,\pi_i),\mathcal{I}_i^{k_i}) + \frac{a}{2} \geq E_i(\pi^n,\mu^n,\mathcal{I}_i^{k_i}) - \frac{a}{2} + a ,$$

следовательно,

$$E_i((\pi_{-i}^n,\pi_i),\mu(\pi_{-i}^n,\pi_i),\mathcal{I}_i^{k_i}) \geq E_i(\pi^n,\mu^n,\mathcal{I}_i^{k_i}) . \tag{9.21}$$

Заметим, теперь, что по лемме 9.30 существует $K > 0$ (которое зависит от динамической игры), такое что

$$\left|E_i((\pi_{-i}^s,\pi_i),\mu(\pi_{-i}^s,\pi_i),\mathcal{I}_i^{k_i}) - E_i(\pi^s,\mu^s,\mathcal{I}_i^{k_i})\right| \leq \frac{K}{s} ,$$

где $\pi_i = \lim_{s\to\infty} \pi_i^s$ последовательности $\{\pi_i^s\}$ $1/s$-ограниченных поведенческих стратегий игрока i. Выберем в последовательности $\{\pi^n,\mu^n\}$ достаточно большое n_1, так чтобы $\frac{K}{n_1} < \frac{a}{4}$.Тогда отсюда и из (9.21) следует, что для любой поведенческой стратегии π_i игрока i

$$E_i((\pi_{-i}^n,\pi_i^n),\mu(\pi_{-i}^n,\pi_i^n),\mathcal{I}_i^{k_i}) \geq E_i(\pi_{-i}^n,\pi_i),\mu(\pi_{-i}^n,\pi_i),\mathcal{I}_i^{k_i}) - \frac{K}{n} =$$

$$= E_i(\pi^n,\mu^n,\mathcal{I}_i^{k_i}) + \frac{a}{4} .$$

Но это противоречит (9.18). Поэтому утверждение доказано. ■

При доказательстве существования секвенциального равновесия мы определяем стратегию поведения (наилучшего ответа) игрока, используя рассуждение по индукции и рекурсивное построение оптимальной поведенческой стратегии. Альтернативным подходом может служить поиск наилучшего отклика игрока в каждом его информационном множестве, когда выборы остальных игроков заданы. Мы приведем пример, демонстрирующий, что дан-

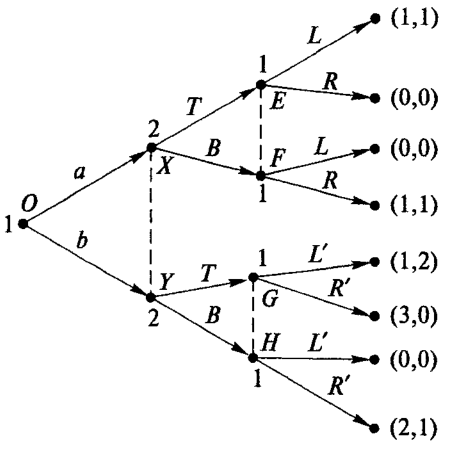


Рис. 9.5. Динамическая игра

ный подход не всегда дает правильный наилучший ответ, так как игрок с несколькими информационными множествами может получить более высокий выигрыш при одновременном изменении выборов во всех информационных множествах. Рассуждение по индукции в текущем доказательстве, принимая во внимание выборы во всех информационных множествах, приводит к оптимальной поведенческой стратегии игрока, даже когда рассматриваются все информационные множества игрока, и он может одновременно изменять свои выборы во всех своих информационных множествах.

Убедимся в этом на следующем примере. В динамической игре на рис. 9.5 игроку 1 принадлежат три информационных множества, а именно $\mathcal{I}_1^1 = \{O\}$, $\mathcal{I}_1^2 = \{E, F\}$ и $\mathcal{I}_1^3 = \{G, H\}$, а игроку 2 одно, $\mathcal{I}_2^1 = \{X, Y\}$. Если игрок 1 представлен *агентом* в каждом из трех информационных множеств, где каждый агент имеет тот же самый выигрыш, что и игрок 1, то динамическая игра редуцируется к игре в стратегической форме с четырьмя игроками: агенты 1, 2 и 3 игрока 1 и игрок 2. Множество стратегий агента 1 — это $\{a,b\}$, множество стратегий агента 2 — $\{L,R\}$, и множество стратегий агента 3 — $\{L',R'\}$. Заметим, что профиль стратегий (a, L, L', T) является равновесием по Нэшу игры четырех лиц в стратегической форме с вектором выигрышей $(1,1,1,1)$. Это можно проверить, заметив, что если агент 1 отклонится, выбрав b (вместо a), то его выигрыш по-прежнему будет равен 1. Если агент 2 отклонится, выбрав R, то его выигрыш уменьшится с 1 до 0. Если агент 3 отклонится, выбрав R', то выигрыш останется по-прежнему равным 1. А если игрок 2 отклонится, выбрав B, то его выигрыш уменьшится до 0.

Заметим, однако, что если игрок 2 планирует играть свою поведенческую стратегию (T в $\mathcal{I}_2^1$), то наилучшим ответом игрока 1 будет выбор поведенческой стратегии (b в $\mathcal{I}_1^1$, L в $\mathcal{I}_1^2$, R' в $\mathcal{I}_1^3$). Таким образом, профиль стратегий $(\{a, L, L'\}, T)$ — не равновесие в динамической игре. В игре в стратегической форме с агентами как независимыми игроками это потребует одновременного отклонения от равновесного профиля стратегий $(\{a, L, L'\}, T)$ агентов 1 и 3. При рассуждении по индукции, однако, будет выбран корректный наилучший ответ. Если поведенческая стратегия игрока 2 в $\mathcal{I}_2^1$ — это T, то игрок 1 рассматривает выборы в информационных множествах $\mathcal{I}_1^2$ и $\mathcal{I}_1^3$ на третьей стадии динамической игры. В информационном множестве $\mathcal{I}_1^2$ оптимален выбор L, а в информационном множестве $\mathcal{I}_1^3$ — выбор R'. Следовательно, в информационном множестве $\mathcal{I}_1^1$, в корне игры, оптимальным выбором игрока 1 будет b. Таким образом, мы получим корректный наилучший ответ игрока 1 на стратегию игрока 2.

Библиография

[1] *Abreu D.* On the theory of infinitely repeated games with discounting // Econometrica. 1988. Vol. 56. P. 383–396.

[2] *Akerlof* G. The market for lemons: Qualitative uncertainty and the market mechanism // Quarterly Journal of Economics. 1970. Vol. 84. P. 488–500.

[3] *Aliprantis* C.D. On the backward induction method // Economics Letters. 1999. Vol. 64. P. 125–131.

[4] *Aliprantis C.D., Border K.C.* Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhikers Guide. 3rd ed. N.Y.; Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[5] *Aliprantis C.D., Burkinshaw O.* Principles of Real Analysis. 3rd ed. N.Y.: Elsevier North Holland, 1998.

[6] *Allais M., Hagen O.* (eds). Expected Utility hypothesis and the Allais Paradox. Boston: Reidel, 1979.

[7] *Aumann R.J.* An axiomatization of nontransferable utility value // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 599–612.

[8] *Aumann R.J.* Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality // Econometrica. 1987. Vol. 55. P. 1–18.

[9] *Aumann R.J.* Game theory // The New Palgrave Dictionary of Economics / J. Eatwell, M. Milgate, R. Newman (eds). L.: Macmillan, 1987. P. 460–482.

[10] *Aumann R.J., Shapley L.S.* Long-term competition — A game-theoretic analysis // Essays in Game Theory / N. Megiddo (ed.). N.Y.: Springer-Verlag, 1994. P. 1–15.

[11] *Ausubel L.M., Deneckere R.J.* A direct mechanism characterization of sequential bargaining with one-sided incomplete information // Journal of Economic Theory. 1989. Vol. 48. P. 18–46.

[12] *Benoit J.R., Krishna V.* Finitely repeated games // Econometrica. 1985. Vol. 53. P. 905–922.

[13] *Berge C.* Topological Spaces. N.Y.: Macmillan, 1963.

[14] *Becker R.A., Chakrabarti S.K.* The recursive core // Econometrica. 1995. Vol. 63. P. 401–423.

[15] *Becker R.A., Chakrabarti S.K.* Satisfying behavior, Brouwer's fixed point theorem and Nash equilibrium points // Economic Theory. 2005. Vol. 26. P. 63–83.

[16] *Binmore K.A., Rubinstein A., Wolinsky A.* The Nash bargaining solution in economic modeling // Rand Journal of Economics. 1986. Vol. 17. P. 176–188.

[17] *Blackwell D.* Discounted dynamic programming // Annals of Mathematical Statistics. 1965. Vol. 36. P. 226–235.

[18] *Bondareva O.N.* Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games // Problemy Kibernetiki. 1963. Vol. 10. P. 119–139.

[19] *Chakrabarti S.K.* Finite complexity and the folk theorem in repeated games // Economics Letters. 1991. Vol. 4. P. 25–55.

[20] *Chakrabarti S.K.* Collusion in Cournot oligopolies with unknown costs // International Economic Review. 2010. Forthcoming.

[21] *Chakrabarti S.K., Topolyan I.* A direct proof of the existence of sequential equilibrium and a backward induction characterization. Department of Economics, IUPUI, 2010. Mimeo.

[22] *Chiang A.C.* Fundamental Methods of Mathematical Economics. 3rd ed. N.Y.; L.: McGraw-Hill, 1984.

[23] *Cho I.-K., Kreps D.M.* Signaling games and stable equilibria // Quarterly Journal of Economics. 1987. Vol. CII. P. 179–221.

[24] *Coase R.H.* The problem of social cost // Journal of Law and Economics. 1960. Vol. 3. P. 1–44.

[25] *Cournot A.* Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses. Paris: Hachette, 1838. (English ed.: Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth / N. Bacon (ed.). N.Y.: Macmillan, 1897.)

[26] *Dasgupta P.*, *Maskin E.* The existence of equilibrium in discontinuous economic games // Review of Economic Studies. 1986. Vol. 53. P. 1–41.
[27] *D'Aspremont C.*, *Gerard-Varet L.A.* Incentives and incomplete information // Journal of Public Economics. 1979. Vol. 11. P. 25–45.
[28] *Debreu G.* The Theory of Value. N.Y.: Wiley, 1959.
[29] *Debreu G.* A social equilibrium existence theorem // Proceedings of the National Academy of Sciences USA. 1952. Vol. 38. P. 886–893.
[30] *Diamond D.*, *Dybvig P.* Bank runs, deposit insurance and liquidity // Journal of Political Economy. 1983. Vol. 91. P. 401–419.
[31] *Espinosa M.*, *Rhee C.* Efficient wage bargaining as a repeated game // Quarterly Journal of Economics. 1989. Vol. 104. P. 565–588.
[32] *Friedman J.* A noncooperative equilibrium for supergames // Review of Economic Studies. 1971. Vol. 28. P. 1–12.
[33] *Fudenberg D.*, *Maskin E.* The folk theorem in repeated games with discounting and incomplete information // Econometrica. 1986. Vol. 54. P. 533–554.
[34] *Fudenberg D.*, *Tirole J.* Game Theory. Cambridge, MA: MIT Press, 1991.
[35] *Fudenberg D.*, *Tirole J.* Perfect Bayesian and sequential equilibrium // Journal of Economic Theory. 1991. Vol. 53. P. 236–260.
[36] *Gibbons R.* Game Theory for Applied Economists. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1992.
[37] *Harsanyi J.C.* Games with incomplete information played by Bayesian players // Management Science. Vol. 4. P. 167–68, 159–162, 320–334, 486–502.
[38] *Hardin G.* The tragedy of the commons // Science. 1968. Vol. 162. P. 1243–1248.
[39] *Hogg R.B.*, *Craig A.T.* Introduction to Mathematical Statistics. 5th ed. Upper Soddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
[40] *Ichiishi T.* Game Theory for Economic Analysis. N.Y.; L.: Academic Press, 1983.
[41] *Issac R.* The Pleasures of Probability. Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics, 1995.
[42] *Kalai E.*, *Smorodinsky M.* Other solutions to Nash's bargaining problem // Econometrica. 1975. Vol. 45. P. 513–518.
[43] *Kakutani S.* A generalization of Brouwer's fixed-point theorem // Duke Mathematical Journal. 1941. Vol. 8. P. 457–459.
[44] *Klein E.*, *Thompson A.C.* Theory of Correspondences. N.Y.: Wiley, 1984.
[45] *Kreps D.M.* A Course in Microeconomic Theory. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1990.
[46] *Kreps D.M.*, *Wilson R.* Sequential equilibrium // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 863–894.
[47] *Kreps D.M.*, *Wilson* R. Reputation and imperfect information // Journal of Economic Theory. 1982. Vol. 27. P. 253–279.
[48] *Kuhn H.W.* Extensive games and the problem of information // Contributions to the Theory of Games I / H.W. Kuhn, A.W. Tucker (eds). Princeton, NJ: Princeton University Press, 1953. P. 193–216.
[49] *Kuhn H.W.*, *Harsanyi J.C.*, *Selten R.* et al. The work of John Nash in game theory: Nobel Seminar, December 8, 1994 // Journal of Economic Theory. 1996. Vol. 69. P. 153–185.
[50] *Kuhn H.W.* (ed.) Classics in Game Theory. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.
[51] *Lazear E.*, *Rosen S.* Rank-order tournaments as optimum labor contracts // Journal of Political Economy. 1981. Vol. 89. P. 841–864.
[52] *Luce R.D.*, *Raiffa H.* Games and Decisions. N.Y.; Toronto: Wiley, 1957.
[53] *Mas-Colell A.*, *Whinston M.D.*, *Green J.R.* Microeconomic Theory. N.Y.; Oxford: Oxford University Press, 1995.
[54] *McAfee P.*, *McMillan J.* Auctions and bidding // Journal of Economic Literature. 1987. Vol. 25. P. 699–738.
[55] *McMillan J.* Games, Strategies and Managers. N.Y.; Oxford: Oxford University Press, 1992.

[56] *Milgrom P.* Auction theory // Advances in Economic Theory: Fifth World Congress / T. Bewley (ed.). Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1987. P. 1–32.

[57] *Milgrom P., Weber R.J.* A theory of auctions and competitive bidding // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 1089–1122.

[58] *Milgrom P., Roberts J.* Limit pricing and enry under incomplete information: An equilibrium analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 443–460.

[59] *Milgrom P., Roberts J.* Predation, reputation and entry deterrence // Journal of Economic Theory. 1982. Vol. 27. P. 280–312.

[60] *Morris P.* Introduction to Game Theory. N.Y.; Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.

[61] *Myerson R.B.* Incentive-compatibility and the bargaining problem // Econometrica. 1979. Vol. 47. P. 61–73.

[62] *Myerson R.B.* Optimal auction design // Mathematics of Operations Research. 1981. Vol. 6. P. 58–73.

[63] *Myerson R.B.* Game Theory: Analysis of Conflict. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1991.

[64] *Nash J.F.* The bargaining problem // Econometrica. 1950. Vol. 18. P. 155–162.

[65] *Nash J.F.* Non-cooperative games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. P. 286–295.

[66] *Nash J.F.* Two-person cooperative games // Econometrica. 1953. Vol. 21. P. 128–295.

[67] *Hotelling H.* Stability in competition // Economic Journal. 1929. Vol. 39. P. 41–57.

[68] *Osborne M., Rubinstein A.* Bargaining and Markets. San Diego, CA: Academic Press, 1990.

[69] *Ordeshook P.C.* Game Theory and Political Theory. N.Y.; L.: Cambridge University Press, 1986.

[70] *Owen G.* Game Theory. 2nd ed. N.Y.; L.: Academic Press, 1982.

[71] *Rubinstein A.* Perfect equilibrium in a bargaining model // Econometrica. 1982. Vol. 50. P. 97–109.

[72] *Scarf H.E.* The core of an N-person game // Econometrica. 1967. Vol. 35. P. 50–69.

[73] *Schelling T.C.* The Strategy of Conflict. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1960.

[74] *Schelling T.C.* Micromotives and Microbehavior. N.Y.; L.: Norton, 1978.

[75] *Selten R.* Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit // Zeitschrift fur die gesamte Staatswissenschaft. 1965. Bd. 121. S. 301–324.

[76] *Selten R.* Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games // International Journal of Game Theory. 1975. Vol. 4. P. 25–55.

[77] *Selten R.* The chain store paradox // Theory and Decision. 1978. Vol. 9. P. 127–159.

[78] *Shapley L.* A value for n-person games, in Contributions to the Theory of Games II / H.W. Kuhn, A.W. Tucker (eds). Princeton, NJ: Princeton University Press, 1953. P. 307–317.

[79] *Spence M.* Job market signaling // Quarterly Journal of Economics. 1975. Vol. 87. P. 355–374.

[80] *Sydsaeter K., Hammond P.J.* Mathematics for Economic Analysis. N.Y.: Prentice Hall, 1995.

[81] *Tirole J.* The Theory of Industrial Organization. Cambridge, MA: MIT Press, 1988.

[82] *Van Damme E.* Stability and Perfection of Nash Equilibria. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[83] *Varian H.L.* Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton, 1992.

[84] *Vickrey W.* Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders // Journal of Finance. 1961. Vol. 16. P. 3–37.

[85] *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1944.

Указатель

Н

О

П

Р

С

Т

Учебное издание

Серия «Переводные учебники ВШЭ»

Каралaмбос Дионисиос Алипрантис
Субир Кумар Чакрабарти

ИГРЫ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *О.А. Пелипенко*
Корректор *Е.Е. Андреева*

Подписано в печать 15.12.2015. Формат 70×100 1/16.
Гарнитура Newton. Усл. печ. л. 44,2. Уч.-изд. л. 34,3.
Тираж 1000 экз. Изд. № 1703. Заказ № 7396.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20
Тел./факс: (499) 611-15-52

Отпечатано способом ролевой струйной печати
в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpd.ru
тел.: 8 (499) 270-73-59

9 785759 810971

Игры
и принятие решений

Представляем читателям известный учебник К.Д. Алипрантиса и С.К. Чакрабарти по теории игр, подготовленный в рамках проекта Высшей школы экономики по изданию переводов учебной литературы.

Каралcraмбос Дионисиос Алипрантис (1946–2009) — американский математик и экономист греческого происхождения. Был заслуженным профессором Высшей школы менеджмента им. Краннерта Университета Пердью. Один из основателей Society for the Advancement of Economic Theory и журнала *Economic Theory*. За свою сорокалетнюю карьеру К. Алипрантис написал шесть книг по экономической теории и математике и опубликовал более сотни статей в ведущих журналах.

Субир Кумар Чакрабарти — уроженец Индии, американский математик и экономист. Профессор факультета экономики Университета Индианы и Университета Пердью (Индианополис). Его авторству принадлежит более 20 статей в таких журналах, как *Econometrica, Journal of Economic Theory, Journal of Mathematical Economics, International Economic Rewiew и Journal of Public Economics.*

Инициаторами издания учебника на русском языке выступили ординарные профессора НИУ ВШЭ, профессора департамента теоретической экономики факультета экономических наук НИУ ВШЭ **В.П. Бусыгин**, который стал научным редактором перевода, и **М.И. Левин**.