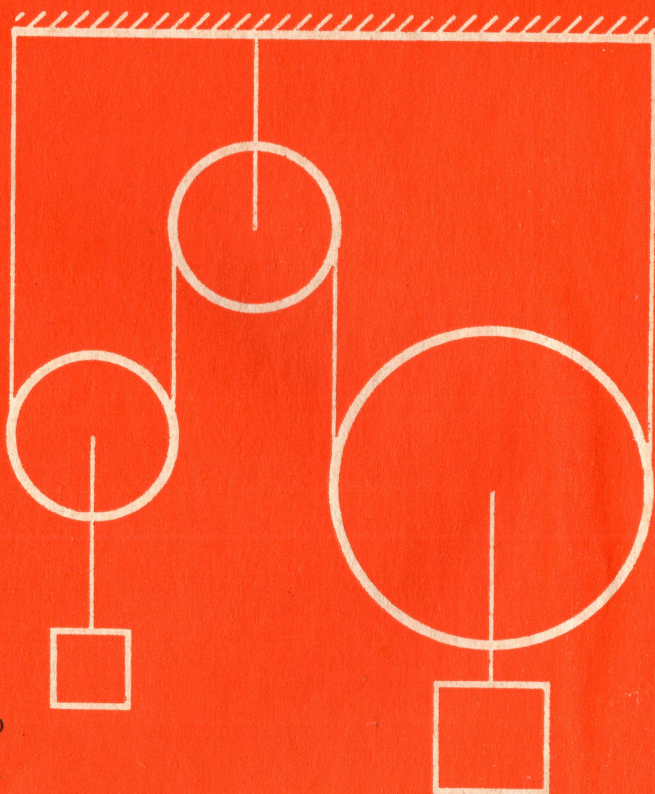




*А. С. Жукарев  
А. Н. Матвеев  
В. К. Петерсон*

**ЗАДАЧИ  
ПОВЫШЕННОЙ  
СЛОЖНОСТИ  
В КУРСЕ  
ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

А. С. Жукарев,  
А. Н. Матвеев,  
В. К. Петерсон

ЗАДАЧИ  
ПОВЫШЕННОЙ  
СЛОЖНОСТИ  
В КУРСЕ  
ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Под общей редакцией  
*А. Н. МАТВЕЕВА*

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1985

**Жукарев А. С. и др.** Задачи повышенной сложности в курсе общей физики / А. С. Жукарев, А. Н. Матвеев, В. К. Петерсон; Под общ. ред. А. Н. Матвеева.— М.: Изд-во МГУ, 1985.— 200 с.

В книге разбирается решение задач, использовавшихся на семинарах повышенной трудности для студентов младших курсов физического факультета МГУ. Задачи охватывают механику, молекулярную физику, электричество, магнетизм и оптику. Наряду с оригинальными задачами включены также наиболее характерные из известных трудных задач курса.

Для студентов вузов и преподавателей общей физики.

Ил. 34.

Рецензенты:

проф. И. К. ВЕРЕЩАГИН,

проф. Б. А. СТРУКОВ

Печатается по постановлению

Редакционно-издательского совета

Московского университета

**Анатолий Сергеевич Жукарев, Алексей Николаевич Матвеев,  
Владимир Карлович Петерсон**

#### **ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

Зав. редакцией *С. И. Зеленский*. Редактор *Г. Е. Горелик*. Художественный редактор *М. Ф. Евстафиева*. Технический редактор *Г. Д. Колоскова*. Корректоры *И. А. Мушникова, Л. С. Ключкова, Т. С. Милякова*  
ИБ № 1948

Сдано в набор 31.10.84. Подписано к печати 25.04.85. Л-102984. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 9,91. Тираж 12750 экз. Заказ 524. Цена 35 коп. Изд. № 3477

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7. Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. 119899, Москва, Ленинские горы

**Ж** 1704000000—099 109—85  
077(02)—85

© Издательство Московского университета, 1985 г.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	4
ГЛАВА 1. МЕХАНИКА . . . . .	5
§ 1. Кинематика материальной точки и твердых тел . . . . .	5
§ 2. Следствия преобразований Лоренца . . . . .	16
§ 3. Динамика материальной точки . . . . .	19
§ 4. Движение при наличии сухого трения . . . . .	28
§ 5. Движение системы материальных точек и твердых тел . . . . .	34
§ 6. Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии . . . . .	48
§ 7. Неинерциальные системы координат . . . . .	53
§ 8. Движение тел переменной массы . . . . .	56
§ 9. Собственные колебания . . . . .	60
§ 10. Затухающие и вынужденные колебания . . . . .	69
<i>Ответы к главе 1 . . . . .</i>	75
ГЛАВА 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА . . . . .	76
§ 11. Статистический метод . . . . .	76
§ 12. Термодинамический метод . . . . .	85
§ 13. Электронный и фотонный газы . . . . .	91
§ 14. Фазовые переходы . . . . .	93
<i>Ответы к главе 2 . . . . .</i>	96
ГЛАВА 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ . . . . .	97
§ 15. Введение к задачам по электростатике . . . . .	97
§ 16. Распределение заряда по поверхности уединенного проводника . . . . .	99
§ 17. Проводники во внешнем электростатическом поле . . . . .	108
§ 18. Электростатическое поле в присутствии диэлектриков . . . . .	119
§ 19. Энергия электростатического поля . . . . .	122
§ 20. Магнитное поле постоянных токов и магнетиков . . . . .	136
§ 21. Энергия магнитного поля . . . . .	143
§ 22. Переменные электромагнитные поля . . . . .	151
ГЛАВА 4. ОПТИКА . . . . .	160
§ 23. Излучение осцилляторов . . . . .	160
§ 24. Интерференция света . . . . .	175
§ 25. Дифракция света . . . . .	182



## ***ПРЕДИСЛОВИЕ***

На физическом факультете МГУ в течение многих лет наряду с обычными семинарами по общей физике работают семинары повышенной трудности. Запись в эти семинары добровольная. В среднем изъявляют желание в них работать около 10% всех студентов, из которых обычно формируются две группы по 25 человек на каждом курсе. Тематика этих семинаров и уровень рассматриваемых задач не выходят за рамки обычной программы, но требуют более глубокого изучения программного материала. Это углубленное изучение программного материала целесообразно осуществлять не за счет расширения рекомендуемой литературы, а за счет более глубокого подхода к изучению материала лекций и учебных пособий, принятых в качестве основных для всех студентов. Объективная необходимость более углубленного изучения программного материала возникает у студентов, работающих в семинарах повышенной трудности, как естественная реакция на характер и уровень задач, рассматриваемых на семинарах.

Поскольку необходимость дополнительной работы с хорошо успевающими студентами возникает и в других вузах и имеется большое число студентов, желающих самостоятельно поработать над более сложными задачами курса общей физики, представляется целесообразным опубликовать часть материала, который используется на физическом факультете МГУ в работе семинаров повышенной трудности. Отобранные задачи доступны для хорошо успевающих студентов. Однако необходимо понимать, что для решения задачи одинаково важны как общая правильная идея решения, так и кропотливый вычислительный труд по реализации этой идеи. Многие задачи оригинальны либо по содержанию, либо по методу решения в рамках курса общей физики.

# ГЛАВА 1

## МЕХАНИКА

### § 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В кинематике изучается движение тел без привлечения сведений об их массах и действующих на них силах. Основные понятия, используемые в кинематике, — это закон движения, скорость, ускорение, траектория.

Положение материальной точки относительно выбранной системы отсчета описывается ее радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  или ее координатами. Законом движения материальной точки называется зависимость ее радиуса-вектора от времени:  $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ . Если закон движения известен, то легко найти скорость и ускорение движущейся материальной точки, вычисляя первую и вторую производные по времени от  $\mathbf{r}(t)$ . Конец радиуса-вектора описывает в пространстве кривую, называемую траекторией движения точки. Задание закона движения в координатах определяет параметрическое задание траектории движения. В явном виде уравнение траектории можно получить, исключая из закона движения параметр (время), что дает связь между координатами движущейся точки, т. е. уравнение траектории.

Ясно, что, зная закон движения точки, легко полностью описать ее движение, в том числе получить все сведения о скорости, ускорении и траектории. Поэтому во многих задачах поиск решения связан с вопросом о законе движения, который может быть либо конечной целью задачи, либо промежуточным этапом. Часто удается использовать геометрические связи между координатами, из которых можно получить закон движения или другие интересные

нас сведения. Однако не всегда сделать это просто, в чем убеждает следующая задача.

**Задача 1.1.** Узкий луч света от фонаря, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  относительно вертикальной оси, попадает на вертикальную стену. Световое пятно бежит по стене по горизонтальной прямой. Расстояние от фонаря до стены равно  $h$ . Найти скорость бегущего светового

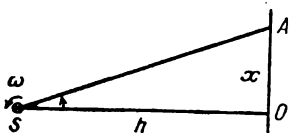


Рис. 1.1

пятна в произвольной точке A (рис. 1.1), считая скорость света а) бесконечной, б) конечной и равной  $c$ .

**Решение.** Легко найти геометрическое соотношение, содержащее координату  $x$  интересующей нас точки A:

$$x = h \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.1)$$

где углом  $\alpha$  определено направление из точки S на точку A (см. рис. 1.1). Дифференцируя это соотношение по времени и учитывая, что  $\dot{\alpha} = \omega$ , находим искомую скорость светового пятна в точке A:

$$v = h\omega / \cos^2 \alpha. \quad (1.2)$$

Если выразить  $\alpha$  в виде явной функции от  $t$ , то (1.1) есть закон движения светового пятна по стене. При равномерном вращении  $\alpha = \alpha_0 + \omega t$ ; если угол  $\alpha$  отсчитывать от прямой SO, то  $\alpha_0 = 0$  и  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ .

Труднее найти решение во втором варианте. При учете конечной скорости движения фотонов не просто записать закон движения светового пятна из геометрических соображений. Поэтому следует поискать другой подход к решению задачи. Следует вернуться к определению скорости как пределу отношения перемещения точки за малый промежуток времени  $\Delta t$  к величине  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Выберем на прямой OA точку B, находящуюся на расстоянии  $\Delta x$  от точки A (направление на точку B задается углом  $\alpha + \Delta \alpha$ ), и подсчитаем промежуток времени  $\Delta t$ , через который световое пятно перейдет из точки A в точку B. По направлению к точке B фотоны полетят через  $\Delta t_1 = \Delta \alpha / \omega$ . Кроме того, до точки B фотонам предстоит более длинный

путь, чем до точки  $A$ . Если расстояние  $SA$  обозначить через  $l$ , то расстояние  $SB = l + \Delta l$ , где  $\Delta l = \frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \Delta \alpha$ . Следовательно, летящий в точку  $B$  фотон затратит времени на  $\Delta t_2 = \Delta l/c$  больше, чем фотон, летящий в точку  $A$ . В итоге получаем, что световое пятно окажется в точке  $B$  на  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$  позже, чем в точке  $A$ . Учитывая, что  $\Delta x = \frac{h}{\cos^2 \alpha} \Delta \alpha$ , находим ответ:

$$v = \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{h \omega}{\cos^2 \alpha + \frac{h \omega}{c} \sin \alpha}. \quad (1.3)$$

**Анализ решения.** Угол  $\alpha$  изменяется в промежутке  $(-\pi/2, \pi/2)$ , поэтому график функции  $v(\alpha)$  имеет вид, показанный на рис. 1.2. Вертикальная асимптота соответствует обращению в нуль знаменателя в (1.3) при

$$\sin \alpha_0 = \frac{h \omega}{2c} - \sqrt{\left( \frac{h \omega}{2c} \right)^2 + 1}. \quad (1.4)$$

Кривой 1 на рис. 1.2 при  $\alpha > \alpha_0$  соответствует  $h\omega < 2c$ ; при  $h\omega > 2c$  имеем кривую 2.

Построенный график позволяет наглядно представить себе движение светового пятна по стене. Впервые на плоскость стены фотон попадет в точку, направление на которую определяется углом  $\alpha_0$ . Затем по плоскости стены побегут два световых пятна (одно вправо, другое влево) соответственно двум ветвям кривой на рис. 1.2. Движение светового пятна со скоростями, превышающими скорость света  $c$ , не противоречит теории относительности, так как с помощью этого пятна нельзя передать сигнал или информацию из одной точки плоскости в другую.

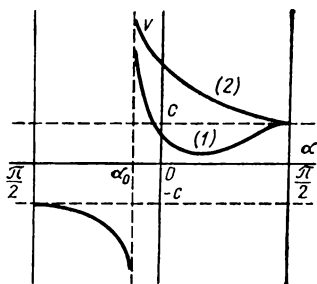


Рис. 1.2

Эффект раздвоения светового пятна мог бы наблюдаться при лазерном зондировании удаленных

объектов, например перистых облаков ( $h \sim 10$  км), серебристых облаков ( $h \sim 100$  км) или Луны ( $h \sim 400\,000$  км). Для оценки предположим, что источник света вращается с угловой скоростью, соответствующей одному обороту в секунду. Тогда из (1.4) находим, что раздвоение светового пятна происходит в точке с угловым направлением от нормали к плоскости объекта  $\sim 89^\circ$  в первом случае,  $\sim 87,5^\circ$  во втором и  $\sim 7^\circ$  в третьем. Следовательно, для наблюдения раздвоения светового пятна угловая скорость вращения источника должна быть существенно больше. Например, чтобы было при зондировании Луны  $|\alpha_0| \sim 10'$ , источник света должен делать около 45 об/с. При этом слагаемые в знаменателе в (1.3) равны друг другу, а скорость движения светового пятна можно рассчитывать только по полной формуле (1.3).

Более трудными для решения оказываются задачи, в которых из геометрических соображений можно выразить скорость движения точки в виде какой-либо функции, а требуется найти закон движения. В этих случаях приходится применять интегрирование, т. е. решать дифференциальное уравнение. Теория решения дифференциальных уравнений изучается в курсе математики позже. Поэтому для задач этого типа мы будем применять лишь простейшие методы, которые будут поясняться в тексте. Один из таких методов, который мы будем широко использовать, есть метод разделения переменных.

Если уравнение содержит только две переменные, то иногда удается с помощью алгебраических действий преобразовать его так, чтобы в правой части уравнения находились только величины, зависящие от одной переменной, а в левой части — только величины, зависящие от другой переменной. Если такое разделение переменных удалось выполнить, то задачу можно считать решенной, так как для получения окончательного ответа остается только вычислить интегралы от левой и правой частей, т. е. задача сводится к квадратурам.

Если же исходное уравнение содержит более двух переменных, то нужно найти дополнительные соотношения, с помощью которых можно свести число переменных к двум и затем попробовать разделить переменные.

Иногда для применения метода разделения переменных нужно выполнить замены переменных, после чего, возможно, удастся разделить новые переменные. Отметим, что практическое применение этих приемов осваивается студентом только в процессе непрерывной работы, поиска новых возможностей. Стандартных приемов, приводящих в любом случае к успеху, не существует. В этом состоит одна из сложностей обращения с дифференциальными уравнениями.

Тем не менее в некоторых особенно простых случаях можно указать рецепт, следуя которому всегда приходим к решению. Мы обсудим несколько таких простых ситуаций. Начнем с прямолинейного движения точки.

Пусть координата  $x$  выбрана вдоль направления движения точки. Скорость движения в общем случае может зависеть от двух переменных ( $x$  и  $t$ ). Связь между кинематическими переменными следует из определения скорости:

$$v = dx/dt. \quad (1.5)$$

Сразу видно, что легко выполнить разделение переменных в двух частных случаях, когда скорость выражена как функция только одной переменной. Если  $v = v(t)$ , то левую и правую части уравнения (1.5) умножаем на  $dt$  и получаем уравнение в разделенных переменных  $dx = v(t)dt$ , в котором левая часть зависит только от координаты  $x$ , а правая часть зависит только от времени  $t$ . Вычисляя интегралы от левой и правой частей полученного уравнения, находим

$$x = \int v(t) dt + \text{const}. \quad (1.6)$$

Возникающую при интегрировании произвольную постоянную определяют из начальных условий. Поэтому для получения однозначного ответа в условии задачи должна быть указана координата движущейся точки (или определенная функция от нее) в некоторый момент времени  $t_0$  (часто этот момент принимается за начало отсчета времени). Решение (1.6) представляет собой выраженный в квадратурах ответ к задаче о нахождении закона движения при  $v = v(t)$ .



Если  $v=v(x)$ , то левую и правую части уравнения (1.5) умножаем на  $dt/v(x)$  и получаем уравнение в разделенных переменных  $dt=dx/v(x)$ . В этом случае при интегрировании получаем закон движения в неявном виде:

$$t = \int \frac{dx}{v(x)} + \text{const}, \quad (1.7)$$

причем, как и прежде, произвольная постоянная интегрирования определяется из начальных условий. Если можно найти обратную функцию, то из (1.7) можно получить закон движения в явном виде.

Аналогичные приемы можно использовать в некоторых случаях плоского или трехмерного движения точки.

**Задача 1.2.** На неподвижный цилиндр радиуса  $R$  намотана нить так, что в начальный момент времени

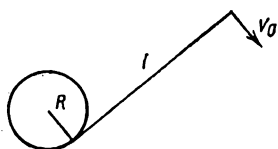


Рис. 1.3

остаётся ненамотанным лишь конец нити длиной  $l_0$ . На конце нити укреплена тяжелая точка, которой в начальный момент сообщается скорость  $v_0$ , направленная перпендикулярно нити так, что нить начинает разматываться (рис. 1.3). Как будет меняться длина

на размотанной части нити со временем, если силы тяжести нет?

**Решение.** Пусть в произвольный момент времени длина размотанной части нити равна  $l$ . При поиске решения в первую очередь следует поискать какое-либо геометрическое соотношение, которое включало бы  $l$ . Если такое соотношение найти не удастся, то надо записать какое-либо геометрическое соотношение, включающее бесконечно малое изменение искомой величины  $dl$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ , а затем решить полученное дифференциальное уравнение.

Если на рисунке изобразить два положения системы, разделенные бесконечно малым промежутком времени  $dt$ , то сразу усматривается искомое геометрическое соотношение:  $dl=Rd\alpha$ , где  $d\alpha$  — бесконечно малый угол, на который повернется нить за время  $dt$ . Теперь задача свелась к определению

$da$ . Эта задача решается сразу:  $da = \omega dt$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения нити. Получаем уравнение  $dl = \omega R dt$ , в которое входят три переменные величины. Нужно найти еще одно соотношение, связывающее эти переменные. Если использовать связь угловой скорости с линейной:  $\omega = v/l$ , то остается вопрос о линейной скорости. Здесь мы должны заметить, что сила натяжения нити в начальный момент направлена перпендикулярно скорости. Следовательно, модуль линейной скорости движения точки будет оставаться постоянным и равным  $v_0$ . Мы получаем уравнение, в которое входят всего две переменные:  $dl = (v_0/l) R dt$ . Видим, что для решения этого уравнения можно применить метод разделения переменных: переменные разделяются, если обе части уравнения умножить на  $l$ . Теперь можно проинтегрировать обе части уравнения и получить семейство решений, отличающихся на аддитивную константу:

$$l^2 = 2v_0 R t + \text{const.} \quad (1.8)$$

Произвольная постоянная интегрирования определяется из начального условия, если положить в (1.8)  $l = l_0$  и  $t = 0$ . В итоге получаем ответ:  $l = \sqrt{l_0^2 + 2v_0 R t}$ .

В следующей задаче рассматривается плоское движение точки.

**Задача 1.3.** Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью  $v$ , направленной под углом  $\alpha$  к берегам. Скорость течения воды в реке меняется по линейному закону, достигая на середине реки величины  $u$ . Ширина реки равна  $d$ . При каком значении угла  $\alpha$  лодка достигнет противоположного берега в точке, расположенной напротив начальной?

**Решение.** Расположим начало координат в начальной точке, ось  $x$  направим вдоль течения воды в реке, ось  $y$  — по перпендикуляру

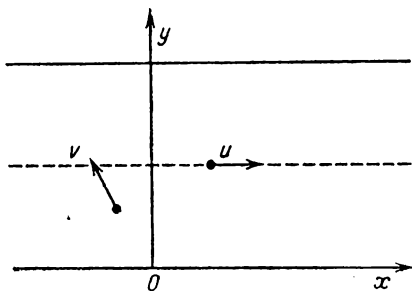


Рис. 1.4

к линии берега (рис. 1.4). Рассмотрим движение на начальном участке (при  $y \leq d/2$ ). Чтобы определить снос лодки вдоль реки по мере ее движения, полезно получить уравнение траектории. Поэтому начнем с определения закона движения лодки, исходя из заданных условий на скорости.

Проекции скорости лодки на выбранные направления координатных осей равны:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\tau} - v \cos \alpha, \\ v_y &= v \sin \alpha, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $v_{\tau}$  — скорость течения в точке нахождения лодки. Из условия линейного распределения скоростей течения легко найти, что  $v_{\tau} = ky$ , где  $k = u/(d/2)$ .

Если учесть, что  $v_x = dx/dt$ , то мы видим, что в первое уравнение (1.9) входят три переменные величины. Поэтому такое уравнение решить сразу нельзя и должна быть найдена дополнительная связь между ними. Во второе уравнение (1.9) входят только две переменные, и можно эти переменные разделить, записав его в виде  $dy = v \sin \alpha dt$ . Вычисляя интегралы от левой и правой частей и используя начальное условие ( $y=0$  при  $t=0$ ), находим  $y = v \sin \alpha \cdot t$ . Теперь найдено дополнительное соотношение для исключения лишней переменной в первом уравнении (1.9), причем проекция скорости на ось  $x$  найдена как функция от времени. Выше было показано, как решить такое уравнение, и мы получаем

$$x = \frac{uv \sin \alpha t^2}{d} - v \cos \alpha t = \frac{uy^2}{d v \sin \alpha} - y \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1.10)$$

Полагая  $y = d/2$ , определяем снос лодки при достижении ею середины реки:

$$x_1 = \frac{u d}{4 v \sin \alpha} - \frac{d}{2} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1.11)$$

Снос лодки равен нулю, если

$$\cos \alpha = u/2v. \quad (1.12)$$

Заметим, что из соображений симметрии следует, что при дальнейшем движении при достижении лодкой противоположного берега полный снос лодки будет равен нулю, так что в (1.12) мы получили ответ к задаче,

Иногда разделение переменных требует большой находчивости и настойчивости в поисках. Рассмотрим более сложную задачу.

**Задача 1.4.** На лужайке в точке  $A$  (рис. 1.5) в пределах видимости своего домика  $C$  пасется Заяц.

Из лесу в точке  $B$ , расположенной на перпендикуляре к прямой, проходящей через Зайца и его домик, появляется Волк. Волк начинает бежать по направлению к Зайцу с постоянной по абсолютной величине скоростью  $v$ , направленной все время точно на Зайца.

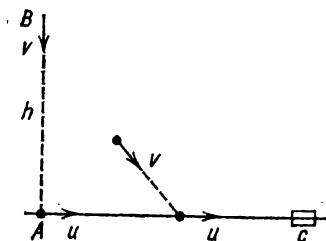


Рис. 1.5

Вначале расстояние от Волка до Зайца равно  $h$ . Заяц бежит к домику с постоянной (максимальной для себя) скоростью  $u$ . По какой траектории бежит Волк, где он настигнет Зайца и в чем состоит условие успешной охоты?

**Решение.** Выберем начало координат в точке  $A$  (см. рис. 1.5), ось  $x$  в направлении  $AC$ , ось  $y$  в направлении  $AB$ . Требуется найти закон движения Волка и из него уравнение траектории. Если траектория движения Волка пересечется с осью  $x$  в пределах отрезка  $AC$ , то охота будет успешной.

Из условия задачи о движении Волка известно только то, что он бежит с постоянной по модулю скоростью, направленной точно на Зайца. Какие следствия можно получить из этих сведений?

На рис. 1.6 изображена предполагаемая траектория  $y=y(x)$  Волка. Если от начала движения прошел промежуток времени  $t$ , то Заяц находится в точке  $Q$  с координатами  $(ut, 0)$ , а Волк в некоторой точке  $P$  с координатами  $(x(t), y(t))$ , причем скорость Волка

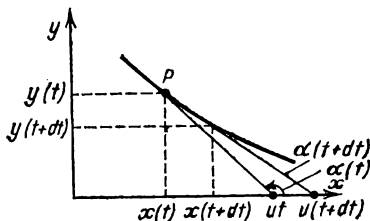


Рис. 1.6

направлена по касательной к траектории, т. е. по прямой  $PQ$ . Вспоминая геометрический смысл произ-

водной  $dy/dx$  как тангенса угла  $\alpha$  наклона касательной к оси  $x$ , получаем соотношение

$$\operatorname{tg} \alpha = dy/dx = -y/(ut - x), \quad (1.13)$$

т. е. дифференциальное уравнение для определения закона движения или траектории Волка. Вся трудность дальнейшего решения состоит в том, что в уравнение (1.13) входят три переменные величины, а поэтому сначала надо избавиться от одной из них.

Какое условие еще не было использовано? Условие постоянства модуля скорости Волка, которое можно непосредственно записать в виде

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = v, \quad (1.14)$$

или

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = v dt. \quad (1.15)$$

Итак, из (1.13) и (1.15) надо получить уравнение, в которое входили бы только две переменные. Наиболее простым образом входит в эти соотношения переменная  $t$ . Поэтому возникает мысль в первую очередь попытаться исключить именно переменную  $t$ . Очевидно, что для такого исключения надо уравнение (1.13) преобразовать так, чтобы в него время входило только в виде  $dt$ . Очевидно, что для этого (1.13) надо записать в виде

$$ut - x = -y \frac{dx}{dy} \quad (1.16)$$

и от (1.16) вычислить дифференциал:

$$u dt - dx = -dy \frac{dx}{dy} - y d\left(\frac{dx}{dy}\right), \quad (1.17)$$

или

$$u dt = -y d\left(\frac{dx}{dy}\right). \quad (1.18)$$

Нам удалось (1.13) преобразовать к виду, содержащему время только в виде  $dt$ , но при этом появился дифференциал от неудобной пока для работы функции  $dx/dy$ . В такой ситуации надо попробовать эту функцию принять за новую переменную и исключить одну из прежних переменных. Поэтому пола-

гаем  $z=dx/dy$  и записываем (1.15) и (1.18) с использованием переменной  $z$ :

$$-dy\sqrt{1+z^2}=vdt, \quad (1.19)$$

$$-ydz=udt$$

(координата  $y$  убывает, поэтому  $\sqrt{dy^2}=-dy$ ).

Видим, что наша попытка оказалась удачной: в (1.19) легко исключить  $dt$  и разделить оставшиеся переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{v}{u} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}. \quad (1.20)$$

Выполняя интегрирование, находим

$$\ln y = \frac{v}{u} \ln(z + \sqrt{1+z^2}) + C. \quad (1.21)$$

Из начальных условий  $C = \ln h$ . Поэтому

$$\left(\frac{y}{h}\right)^{u/v} = z + \sqrt{1+z^2} \quad (1.22)$$

или

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h}\right)^{u/v} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h}\right)^{-u/v}. \quad (1.23)$$

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $y$ , еще раз разделяем переменные и выполняем интегрирование. В итоге получаем уравнение траектории Волка:

$$x = \frac{1}{2} \frac{h}{1+u/v} \left(\frac{y}{h}\right)^{u/v+1} - \frac{1}{2} \frac{h}{1-u/v} \left(\frac{y}{h}\right)^{1-u/v} - \\ - \frac{1}{2} \frac{h}{1+u/v} + \frac{1}{2} \frac{h}{1-u/v}. \quad (1.24)$$

Траектория пересекает ось  $x$  в точке

$$x_0 = h \frac{u}{v} \left[1 - \left(\frac{u}{v}\right)^2\right]^{-1}. \quad (1.25)$$

При этом должно быть  $u < v$ . Охота будет успешной, если  $x_0$  меньше координаты точки  $C$ , в которой расположен домик Зайца. Если  $L$  — координата точки  $C$ , то для успешной охоты Волк должен появиться в точке, удаленной от Зайца меньше, чем на расстояние  $(v^2 - u^2)L/uv$ .



## § 2. СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Изучение кинематики специальной теории относительности требует от студентов большой работы и преодоления значительных трудностей в понимании материала. Поэтому рекомендуется очень внимательно отнестись к соответствующим разделам учебника и хорошо освоиться с решением простых задач и задач среднего уровня.

Мы начнем с важной задачи о показаниях связанных друг с другом часов в разных системах отсчета.

**Задача 2.1.** Стержень  $A'B'$  («поезд») движется с постоянной скоростью  $V$  относительно параллельного ему стержня  $AB$  («платформы») (рис. 2.1).

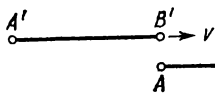


Рис. 2.1

Оба стержня имеют одинаковую собственную длину  $l_0$  и на концах каждого из них установлены синхронизированные между собой часы:  $A$  с  $B$  и  $A'$  с  $B'$ . Пусть в тот момент, когда

часы  $B'$  поравнялись с часами  $A$ , совпадающие часы показывают одинаковое время  $t_0$ . Определить показания всех часов в этот момент с точки зрения наблюдателя на «платформе» (система  $K$ ) и с точки зрения наблюдателя в «поезде» (система  $K'$ ). Определить в системах  $K$  и  $K'$  показания всех часов в моменты совпадения часов 1)  $A$  и  $A'$ , 2)  $B$  и  $B'$ , 3)  $B$  и  $A'$ .

**Решение.** Начало координат в системах  $K$  и  $K'$  выберем в точке совпадения часов  $A$  и  $B'$ . Обратим внимание на тот факт, что при выводе преобразований Лоренца считают, что при совпадении часов, расположенных в начале координат в системах  $K$  и  $K'$ , они показывают нуль. Поэтому, применяя преобразования Лоренца в обычной записи, мы будем находить добавки к первоначальному показанию часов  $t_0$ .

Рассмотрим сначала показания всех часов с точки зрения наблюдателя на «платформе». В начальный момент часы  $A$  и  $B'$  показывают  $t_0$  по условию, часы  $B$  показывают  $t_0$  согласно условию синхронизации. В системе  $K$  стержень  $A'B'$  имеет длину

$l_0 \sqrt{1-\beta^2}$ , т. е. часы  $A'$  находятся в точке с координатой  $\Delta x = -l_0 \sqrt{1-\beta^2}$ . Применяя преобразование Лоренца, находим добавок к отсчету часов  $A'$ :

$$\Delta t' = -\frac{V \Delta x}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{V l_0}{c^2}. \quad (2.1)$$

Итак, в начальный момент часы  $A'$  показывают  $t_0 + V l_0 / c^2$ .

Рассмотрим момент совпадения часов  $A$  и  $A'$ . По часам системы  $K$  прошло время  $l_0 \sqrt{1-\beta^2} / V$ . Поэтому синхронизированные между собой часы  $A$  и  $B$  показывают  $t_0 + l_0 \sqrt{1-\beta^2} / V$ . По часам, движущимся в точках  $A'$  и  $B'$ , прошло время  $l_0(1-\beta^2)/V$ , поэтому часы  $B'$  будут показывать  $t_0 + l_0(1-\beta^2)/V$ , а часы  $A'$   $t_0 + l_0/V$ .

В момент совпадения часов  $B$  и  $B'$  в системе  $K$  прошло  $l_0/V$ , а в системе  $K'$   $l_0 \sqrt{1-\beta^2} / V$ . Поэтому показания часов  $A$  и  $B$  будут  $t_0 + l_0/V$ , часов  $B'$  —  $t_0 + l_0 \sqrt{1-\beta^2} / V$ , часов  $A'$  —  $t_0 + \frac{l_0}{V} (\beta^2 + \sqrt{1-\beta^2})$ .

Аналогично, при совпадении часов  $B$  и  $A'$  часы  $A$  и  $B$  показывают  $t_0 + \frac{l_0}{V} (1 + \sqrt{1-\beta^2})$ , часы  $B'$  —  $t_0 + l_0 \sqrt{1-\beta^2} (1 + \sqrt{1-\beta^2}) / V$ , а часы  $A'$  —  $t_0 + l_0 (1 + \sqrt{1-\beta^2} - \beta^2 / \sqrt{1-\beta^2}) / V$ .

С точки зрения наблюдателя в «поезде», в начальный момент часы  $A'$ ,  $B'$  и  $A$  показывают  $t_0$ . Часы  $B$  движутся со скоростью  $-V$  и находятся в точке с координатой  $\Delta x' = -l_0 \sqrt{1-\beta^2}$ . Из преобразований Лоренца находим

$$\Delta t = \frac{V \Delta x'}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{|V| l_0}{c^2}. \quad (2.2)$$

Поэтому часы  $B$  показывают  $t_0 + |V| l_0 / c^2$ .

Поступая аналогично предыдущему, находим, что при совпадении часов  $A$  и  $A'$  показания будут:  $t_{A'} = t_{B'} = t_0 + l_0/V$ ;  $t_A = t_0 + l_0 \sqrt{1-\beta^2} / V$ ;  $t_B = t_0 + l_0 (\beta^2 + \sqrt{1-\beta^2}) / V$ . При совпадении часов  $B$  и  $B'$  имеем  $t_{A'} = t_{B'} = t_0 + l_0 \sqrt{1-\beta^2} / V$ ,  $t_A = t_0 + l_0 (1 - \beta^2) / V$ ,  $t_B = t_0 + l_0 / V$ . Читатель без труда найдет показания всех часов в системе  $K'$  при совпадении часов  $B$  и  $A'$ .

Рекомендуем рассмотреть аналогичную задачу в случае, когда собственная длина «платформы» и «поезда» разная.

**Задача 2.2.** Системы координат  $K'$  и  $K''$  движутся относительно системы  $K$  со скоростями  $V_1$  и  $V_2$  вдоль оси  $x$ . С точки зрения системы  $K$  стрелка часов в системе  $K'$  делает один оборот за время  $t$ . Какой промежуток времени проходит при этом в системе  $K''$ ?

**Решение.** Записывая преобразования Лоренца, выражаем искомый промежуток времени через координату и время в системе  $K$ :

$$t'' = \frac{t - x V_2 / c^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}. \quad (2.3)$$

В свою очередь, учитывая связь систем  $K$  и  $K'$ , находим

$$t = t' / \sqrt{1 - \beta_1^2}, \quad x = V_1 t' / \sqrt{1 - \beta_1^2}. \quad \text{Отсюда}$$

$$t'' = \left( 1 - \frac{V_1 V_2}{c^2} \right) t / \sqrt{1 - \beta_2^2}. \quad (2.4)$$

**Задача 2.3.** Космическая ракета движется с ускорением  $W'$ , одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Сколько времени по часам, находящимся в ракете, требуется для преодоления расстояния  $S$  от места старта?

**Решение.** Установим связь ускорений в  $K$ - и  $K'$ -системах. Для этого из преобразования Лоренца  $x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  выразим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \quad (2.5)$$

и

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\frac{d^2 x'}{dt'^2} (1 - \beta^2)^{3/2}}{\left( 1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'} \right)^3}. \quad (2.6)$$

При  $\frac{dx'}{dt'} = 0$  имеем отсюда  $W = W'(1 - \beta^2)^{3/2}$  и  $dt' = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ . Полное время, прошедшее по часам в ракете, равно

$$\begin{aligned} T' = \int dt' &= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \int \frac{dV}{W \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{W'} \int \frac{dV}{1 - \beta^2} = \\ &= \frac{c}{2W'} \ln \frac{1 + \frac{V_f}{c}}{1 - \frac{V_f}{c}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $V_f$  — конечная скорость ракеты в  $K$ -системе. Пройденное от места старта расстояние равно

$$\begin{aligned} S = \int V dt &= \int \frac{V dV}{W} = \frac{1}{W'} \int \frac{V dV}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{c^2}{W'} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - V_f^2/c^2}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) находим ответ, подставляя в (2.7):

$$\frac{V_f}{c} = \frac{\sqrt{(2 + W' S/c^2)(W' S/c^2)}}{1 + W' S/c^2}. \quad (2.9)$$

### § 3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если действующие на точку силы не остаются в процессе движения постоянными, то для описания движения приходится решать дифференциальное уравнение (уравнение движения), следующее из второго закона Ньютона. Мы рассмотрим несколько примеров, в которых решение можно получить методом разделения переменных, обсуждавшимся в § 1. В случае прямолинейного движения точки разделение переменных всегда можно выполнить, если сила зависит только от одной кинематической переменной:  $t$ ,  $v$  или  $x$ . При первом интегрировании определяется скорость движения, при втором — закон движения. Для определения произвольных постоянных интегрирования в условии задачи должны быть заданы два начальных условия. Чаще всего задается скорость и координата движущейся точки в начальный момент времени, хотя возможны и иные условия.

Если сила зависит только от времени, то в уравнении движения

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (3.1)$$

разделение переменных выполняется умножением обеих частей уравнения на  $dt$ . Интегрируя почленно полученное уравнение, находим скорость как функцию времени:

$$v = \frac{1}{m} \int F(t) dt + C,$$

и после определения постоянной интегрирования  $C$  можно найти закон движения, как в § 1.

Если сила зависит только от скорости, то после разделения переменных в уравнении (3.1) находим скорость как неявную функцию от времени:

$$m \int \frac{dv}{F(v)} = t + C, \quad (3.2)$$

и для нахождения закона движения сначала требуется перейти к явной зависимости скорости от времени.

Если сила зависит только от координаты, то в уравнение (3.1) входят три переменные величины и необходимо от одной из них избавиться. Проще всего с помощью кинематического соотношения  $dx = v dt$  исключить из (3.1) переменную  $dt = dx/v$ , а затем разделить переменные:

$$m v dv = F(x) dx. \quad (3.3)$$

Интегрирование этого уравнения дает закон изменения кинетической энергии: изменение кинетической энергии точки равно работе действующих на нее сил:

$$mv^2/2 = \int F(x) dx + C. \quad (3.4)$$

Дальнейшее интегрирование выполняется как в § 1, если из (3.4) выразить скорость как функцию от координаты  $x$ .

**Задача 3.1.** Лодку разгоняют в спокойной воде до скорости  $v_0$ , после чего выключают двигатель. Сопротивление воды пропорционально скорости. Описать дальнейшее движение лодки. Найти время

движения до остановки и пройденный путь. Оценить по порядку величины коэффициент сопротивления  $k$  для обычной моторной лодки.

**Решение.** Введем ось  $x$  вдоль направления движения лодки. В уравнении движения  $m dv/dt = -kv$  легко разделить переменные по образцу (3.2). Находим

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + C_1. \quad (3.5)$$

Считая при  $t=0$  скорость  $v=v_0$ , определяем постоянную интегрирования:  $C_1 = \ln v_0$ . Следовательно,

$$v = v_0 e^{-kt/m}. \quad (3.6)$$

Скорость движения убывает по экспоненциальному закону. Из (3.6) видно, что до полной остановки должно пройти бесконечное время. Такой вывод связан с учетом только одной силы сопротивления, хотя при уменьшении скорости движения эта сила может стать сколь угодно малой и в какой-то момент перестанет быть основной силой, определяющей движение.

Мы нашли скорость как функцию от времени и теперь, разделяя еще раз переменные, как в § 1, и считая  $x=0$  при  $t=0$ , находим закон движения лодки:

$$x = (mv_0/k)(1 - e^{-kt/m}). \quad (3.7)$$

Полагая  $t \rightarrow \infty$ , находим пройденный путь  $S = mv_0/k$ .

Из повседневных наблюдений известно, что если выключить двигатель у лодки при скорости порядка 10 км/ч (около 3 м/с), то, как правило, лодка останавливается, пройдя  $\sim 10$ —20 м. Если для оценки принять массу лодки  $\sim 200$  кг, то приходим к выводу, что коэффициент сопротивления  $k = mv_0/S$  составляет несколько десятков кг/с. Для более легких лодок (типа байдарок) этот коэффициент может быть на порядок меньше.

Важнейшим средством для выполнения численных расчетов является представление функций в виде рядов. Начнем изучение этой техники с применения разложения функций в ряд Тейлора. Поскольку в курсе математики этот материал будет рассматриваться несколько позже, мы здесь приведем



без доказательств основные математические сведения.

Функцию  $y=f(x)$ , непрерывную и имеющую все производные при  $x=a$ , можно представить в виде суммы бесконечного степенного ряда (ряда Тейлора):

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots \quad (3.8)$$

Это представление справедливо для тех значений  $x$ , при которых остаточный член

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (3.9)$$

( $\xi$  находится между  $a$  и  $x$ ) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . В этом случае говорят, что ряд (3.8) сходится к своей сумме  $f(x)$ . Оценить область применимости разложения (3.8) можно также, вычисляя радиус сходимости ряда  $\rho$  по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(a)|}{(n+1) |f^{(n+1)}(a)|}. \quad (3.10)$$

Ряд сходится при  $|x-a| < \rho$ .

Использовать представление функций в виде ряда (3.8) целесообразно в тех случаях, когда последовательные члены ряда быстро убывают и для вычисления суммы достаточно ограничиться учетом лишь нескольких первых слагаемых ряда.

**Задача 3.2.** Стальной шарик радиуса  $r$  падает с высоты  $h$  без начальной скорости на горизонтальную стальную плиту. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. На какое расстояние  $\Delta h$  не долетит шарик до первоначального положения при первом подскоке?

**Решение.** Выберем начало координат в первоначальном положении шарика и ось  $x$  направим вертикально вниз. При движении шарика сила тяжести всегда направлена вниз, а сила сопротивления воздуха направлена противоположно вектору скорости. Поэтому необходимо рассмотреть по отдельности движение шарика вверх и вниз.

При движении вниз уравнение движения имеет

вид

$$m dv/dt = mg - kv^2, \quad (3.11)$$

где  $k$  — коэффициент сопротивления. Видим, что правая часть зависит только от скорости; поэтому можно разделить переменные. В данной задаче нас интересует вопрос об изменении скорости шарика в зависимости от его координаты. Поэтому от переменной  $dt$  в (3.11) надо перейти к переменной  $dx/v$ . Получаем уравнение в разделенных переменных:

$$\frac{mvdv}{mg - kv^2} = dx. \quad (3.12)$$

Интегрируя его с учетом начальных условий  $v=0$  при  $x=0$ , получаем (считая  $mg > kv^2$ )

$$v = \left[ \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{2k}{m}x} \right) \right]^{1/2}. \quad (3.13)$$

Скорость шарика в нижней точке  $v_{\max}$  находим из (3.13), полагая  $x=h$ .

Если удар абсолютно упругий, а масса плиты очень велика, то шарик отскочит от плиты вверх со скоростью  $v_{\max}$ . Уравнение движения имеет теперь вид

$$mdv/dt = mg + kv^2, \quad (3.14)$$

причем при  $x=h$  имеем  $v=v_{\max}$ , а при  $x=\Delta h$  скорость шарика становится равной нулю. Разделяя переменные в (3.14) и интегрируя по  $x$  в пределах от  $h$  до  $\Delta h$ , а по  $v$  в пределах от  $v_{\max}$  до нуля, находим

$$\Delta h = h - (m/2k) \ln(2 - e^{-2kh/m}). \quad (3.15)$$

Как сделать численную оценку найденной величины  $\Delta h$ ? Можно считать, что коэффициент сопротивления воздуха  $k$  пропорционален площади поперечного сечения  $S$  движущегося тела. Из (3.11) видно, что при движении вниз суммарная сила уменьшается и в некоторый момент должна обратиться в нуль, после чего тело будет двигаться равномерно (скорость такого движения называется установившейся скоростью). Известно, что при свободном падении человека с большой высоты установившаяся скорость  $v_0$  составляет около 60 м/с. Отношение

установившихся скоростей падения двух тел равно  $[(m_1/S_1)/(m_2/S_2)]^{1/2}$ . Если принять для человека  $M \approx 80$  кг,  $S_1 \approx 1$  м<sup>2</sup>, а для стального шарика радиуса 1 см  $m \approx 25$  г и  $S_2 \approx 3$  см<sup>2</sup>, то найдем, что установившиеся скорости их падения будут приблизительно одинаковыми. Запишем (3.15) в виде

$$\frac{\Delta h}{h} = 1 - \frac{v_0^2}{2gh} \ln(2 - e^{-2gh/v_0^2}). \quad (3.16)$$

Тогда легко сделать численные оценки. Пусть шарик падает с высоты 1 м. Поскольку отношение  $2gh/v_0^2$  — очень малая величина, воспользуемся представлением функции  $\ln(2 - e^{-x})$  при малых  $x$  в виде ряда Тейлора (3.8):  $\ln(2 - e^{-x}) = x - x^2 + \dots$ , откуда получаем окончательно

$$\Delta h/h = 2gh/v_0^2 \approx 6 \cdot 10^{-3}. \quad (3.17)$$

Итак, за счет сопротивления воздуха шарик, падая с высоты 1 м, не долетит до первоначального положения около 6 мм.

Иногда оказывается полезным и даже целесообразным представлять в виде разложения в ряд Тейлора не всю изучаемую функцию, а только ее какую-то часть. В следующей задаче мы имеем именно такую ситуацию.

**Задача 3.3.** Материальная точка падает без начальной скорости на землю с высоты  $H = 1000$  км. Найти время, за которое она окажется на высоте  $h = 100$  км.

**Решение.** При движении на таких высотах сопротивлением воздуха можно пренебречь. Если бы можно было пренебречь также изменением силы тяготения с высотой, то время было бы равно  $t = \sqrt{2(H-h)/g}$ . Как изменяется этот результат при правильном учете силы тяготения?

Запишем уравнение движения точки в системе координат, начало которой поместим в центр Земли, а ось  $x$  направим на начальное положение материальной точки. Пусть  $m$  — масса точки,  $R$ ,  $M$  — радиус и масса Земли,  $\gamma$  — гравитационная постоянная. Имеем

$$m\ddot{x} = -\gamma mM/x^2. \quad (3.18)$$

Разделяя переменные как в (3.3) и интегрируя обе части уравнения, находим

$$v^2/2 = \gamma M/x + C. \quad (3.19)$$

Постоянную интегрирования  $C$  определяем из начального условия: при  $x=R+H$  было  $v=0$ . Заметим еще, что  $\gamma M = gR^2$ , где  $g$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Поэтому (3.19) можно переписать в виде

$$v^2 = 2g R^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R+H} \right). \quad (3.20)$$

Извлекая квадратный корень, разделяя переменные и интегрируя, находим искомый промежуток времени:

$$T = - \frac{1}{\sqrt{2g} R} \int_{R+H}^{R+h} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{R+H}}}. \quad (3.21)$$

Знак минус появился при извлечении квадратного корня, так как при нашем выборе системы координат  $v < 0$ .

Удобнее использовать в качестве переменной расстояние, отсчитываемое от поверхности Земли:  $z = x - R$ . В нашей задаче  $z \ll R$ . Обозначая  $\epsilon = 1/R$ , находим

$$T = \sqrt{\frac{1+\epsilon H}{2g}} \int_h^H \frac{\sqrt{1+\epsilon z} dz}{\sqrt{H-z}}. \quad (3.22)$$

Если в (3.22) перейти к пределу  $\epsilon \rightarrow 0$ , то получим результат, соответствующий постоянной силе тяготения. Для оценки поправки к этому результату найдем линейный по  $\epsilon$  член разложения функции в правой части (3.22) в ряд, используя представление  $\sqrt{(1+\epsilon H)(1+\epsilon z)} = 1 + \epsilon(z+H)/2 + \dots$ . Поскольку  $h \leq z \leq H$ , величина поправки меньше  $\epsilon H \approx 0,16$  и больше  $\epsilon(H+h)/2 \approx 0,09$ . Следовательно, время падения будет приблизительно на 10% больше, чем вычисленное без учета изменения силы тяготения с высотой.

Отметим, что полученной таким образом оценки чаще всего бывает достаточно. Если же требуется получить ответ с определенной точностью, то прихо-

дится вычислять полученные интегралы. Не всегда результат можно выразить через элементарные (и вообще затабулированные) функции, но всегда можно использовать численные методы интегрирования, чтобы получить ответ с любой степенью точности. В данной задаче интеграл в (3.22) выражается через элементарные функции и ответ можно записать в явном виде:

$$T = \sqrt{\frac{1+\varepsilon H}{2g}} \left[ \sqrt{(1+\varepsilon h)(H-h)} + \frac{1+\varepsilon H}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\varepsilon(H-h)}{1+\varepsilon h}} \right]. \quad (3.23)$$

Для быстрой численной оценки такая запись неудобна. Однако при выводе (3.23) нигде не использовалось предположение о малости  $\varepsilon$ , поэтому результат имеет общий характер, т. е. справедлив при любых  $h$  и  $H$ . При малых  $\varepsilon$  функцию (3.23) можно представить в виде ряда Тейлора по степеням  $\varepsilon$ . В этом случае делать численные оценки становится удобнее.

**Задача 3.4.** Определить период колебаний математического маятника длины  $l$ , считая амплитуду колебаний  $\alpha_0$  произвольной.

**Решение.** Положение маятника будем описывать углом  $\alpha$  отклонения его нити от вертикали. Из уравнения движения

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \sin \alpha \quad (3.24)$$

находим аналогично (3.4)

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} = \frac{g}{l} \cos \alpha + C, \quad (3.25)$$

где  $C = -\frac{g}{l} \cos \alpha_0$ . Далее выражаем угловую скорость движения:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \alpha - \cos \alpha_0)} \quad (3.26)$$

и получаем ответ, разделяя переменные и интегрируя по  $\alpha$  в пределах  $(0, \alpha_0)$  и по времени в преде-

лах  $(0, T/4)$ , где  $T$  — искомый период колебаний:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}}. \quad (3.27)$$

Если углы  $\alpha$  и  $\alpha_0$  малы, то отсюда легко получить известный из школьного курса период малых колебаний маятника:  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ . Нас интересует, на сколько изменяется этот результат при различных значениях  $\alpha_0$ . Можно, конечно, при любом заданном  $\alpha_0$  вычислить интеграл в (3.27) численными методами. Но на этом пути легко решить любую конкретную задачу и трудно представить общую картину. Именно в таких ситуациях уместно использовать представление в виде ряда.

Непосредственно перейти к ряду Тейлора в правой части (3.27) неудобно по двум причинам. Во-первых,  $\alpha_0$  может быть больше единицы и тогда представление в виде ряда становится сомнительным. Во-вторых, желательно иметь такое представление, в котором первый член давал бы период малых колебаний, а следующие за ним составляли бы ряд достаточно быстро убывающих слагаемых. Кроме того, если маятник представляет собой материальную точку на жестком невесомом стержне, то  $\alpha_0$  может превышать  $\pi/2$  (вплоть до  $\pi$ ), и поэтому в качестве аргумента привлекательнее выглядит половинный угол. Поэтому обычно переходят к половинным углам  $\alpha/2$  и  $\alpha_0/2$ :

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha_0}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}, \quad (3.28)$$

а затем подбирают такую замену переменной, чтобы освободиться от  $\alpha_0$  в пределах интегрирования. Если ввести угол  $\theta$ , определенный соотношением  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha_0}{2} \sin \theta$ , то приходим к обычно используемой записи ответа:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \sin^2 \theta}}. \quad (3.29)$$



Раскладывая подынтегральную функцию в ряд Тейлора и почленно интегрируя, находим

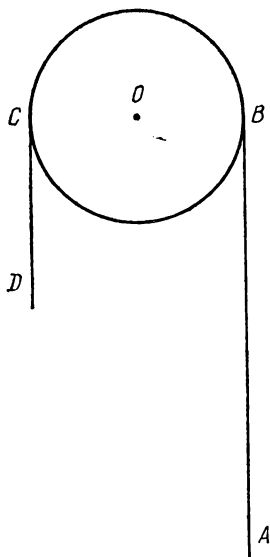
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right). \quad (3.30)$$

Видим, что при амплитуде  $\alpha_0 = 60^\circ$  поправка к периоду малых колебаний составляет около 8%. Читатель без труда покажет, что первый отброшенный член в (3.30) равен  $\frac{9}{64} \sin^4 \frac{\alpha_0}{2}$ . Это и последующие слагаемые играют заметную роль только при весьма больших амплитудах колебания.

Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 3.5.** Тело массы  $M$  падает без начальной скорости с высоты  $H$  на пружинку жесткости  $k$ .

Найти время сжатия пружины, пренебрегая массой пружины и трением.



**Задача 3.6.** Через неподвижный гладкий цилиндр с радиусом основания  $R$  перекинута цепочка длины  $L > \pi R$  (рис. 3.1). В начальный момент длина большего из свисающих концов  $AB$  равна  $l$ , при этом цепочка неподвижна. Найти закон движения конца цепочки  $A$ , если ее отпустить.

**Задача 3.7.** Насколько изменится дальность полета небольшого тела массы  $m$ , брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v$ , за счет сопротивления воздуха, если сопротивление пропорционально скорости (коэффициент пропорциональности равен  $k$ )?

Рис. 3.1

#### § 4. ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

В этом параграфе мы применим методы, изученные в § 3, к случаю движения материальной точки по шероховатой поверхности.

**Задача 4.1.** На столе лежит цепочка длины  $L$ . Коэффициент трения скольжения равен  $k$ . Один конец цепочки медленно поднимают по вертикали на высоту  $h < L$ . Найти форму цепочки в конечном статическом положении (рис. 4.1).

**Решение.** В силу условия  $h < L$  часть цепочки останется лежать на столе, а оставшаяся часть примет вид некоторой кривой. Если в плоскости цепочки ввести систему координат  $(x, y)$ , то задача состоит в том, чтобы найти кривую  $y = y(x)$ . Из мате-

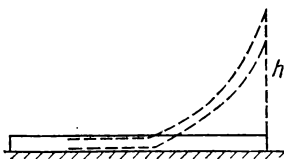


Рис. 4.1

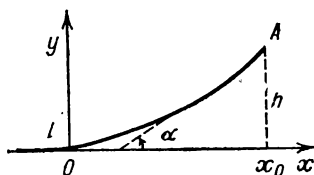


Рис. 4.2

риала предыдущих параграфов мы знаем, что уравнение кривой можно получить, используя геометрический смысл производной как тангенса угла наклона касательной к кривой. Эти рассуждения позволяют приступить к решению задачи.

Пусть на столе лежит часть цепочки длиной  $l$ . Выберем систему координат как показано на рис. 4.2 (начало координат поместим в точку перехода кривой в прямую). Рассмотрим условия равновесия малого участка  $ds$  на изогнутой части цепочки (рис. 4.3). Пусть  $\rho$  — линейная плотность цепочки,  $T$  — абсолютная величина силы натяжения.

Тогда

$$\begin{aligned} (T \sin \alpha)_{x+dx} - (T \sin \alpha)_x &= \rho g ds, \\ (T \cos \alpha)_{x+dx} - (T \cos \alpha)_x &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где индексами отмечают точки, в которых берется значение функций. Из второго уравнения (4.1) следует, что  $T \cos \alpha = \text{const}$ . Поскольку известно, что движение происходило медленно, можно считать, что  $\text{const} = k \rho g l$ . Из первого уравнения теперь легко получить

$$d(\tan \alpha) = ds / kl. \quad (4.2)$$

Введем новую переменную  $z = \operatorname{tg} \alpha = dy/dx$ . Длину дуги  $ds$  вычислим по теореме Пифагора:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + z^2}$ . Теперь легко разделить переменные в (4.2):

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{kl}, \quad (4.3)$$

откуда при  $x > 0$  находим  $z = \operatorname{sh}(x/kl)$  и

$$y = kl [\operatorname{ch}(x/kl) - 1]. \quad (4.4)$$

Осталось только определить  $l$ . Для этого рассмотрим условия равновесия конца цепочки  $A$ . Находим

$$(T \sin \alpha)_A = \rho g (L - l), \quad (4.5)$$

откуда  $(\operatorname{tg} \alpha)_A = (L - l)/(\rho g)$ . С другой стороны, с помощью (4.4) находим

$$(\operatorname{tg} \alpha)_A = \operatorname{sh}(x_0/kl) = \sqrt{(h/kl + 1)^2 - 1}. \quad (4.6)$$

Получаем

$$l = L + hk - \sqrt{(L + hk)^2 - (L^2 - h^2)}. \quad (4.7)$$

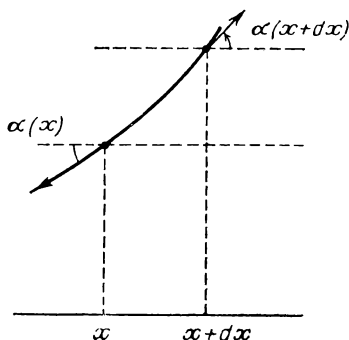


Рис. 4.3

**Задача 4.2.** На наклонной плоскости лежит тело (рис. 4.4), которому в начальный момент времени сообщают направленные

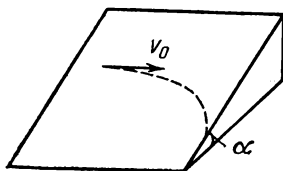


Рис. 4.4

новую по горизонтали скорость  $v_0$ . Угол наклона плоскости равен  $\alpha$ , коэффициент трения скольжения  $k$ . Найти годограф скоростей тела.

**Решение.** Ясно, что траекторией движения будет некоторая кривая на наклонной плоскости. В случае криволинейного движения по плоскости очень часто оказывается удобным использование поляр-

ных координат  $(r, \varphi)$ . Пусть начало координат помещено в точку первоначального расположения тела. Угол  $\varphi$  будем отсчитывать от горизонтали вниз (т. е. по часовой стрелке). Тогда уравнения движения в проекциях на касательную к траектории и на нормаль будут иметь вид (если сократить в них массу движущейся точки)

$$\begin{aligned} dv/dt &= -kg \cos \alpha + g \sin \alpha \sin \varphi, \\ v d\varphi/dt &= g \sin \alpha \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В этих уравнениях  $v$  — абсолютное значение скорости. Если разделить первое уравнение (4.8) на второе, то легко разделить переменные:

$$\frac{dv}{v} = \left( -\frac{k \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \right) d\varphi. \quad (4.9)$$

Вычисляя интегралы с учетом начального условия, находим годограф скоростей в полярных координатах:

$$v = \frac{v_0}{\cos \varphi} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \right)^{-k \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (4.10)$$

Отметим, что и при использовании декартовых координат на наклонной плоскости удастся разделить переменные в уравнении движения. Рекомендуем читателю попытаться получить (4.10), используя декартовы координаты. Читатель увидит, насколько возрастают трудности решения при нерациональном выборе системы координат.

К числу простейших дифференциальных уравнений первого порядка относятся также линейные уравнения, в которых неизвестная функция и ее производная входят линейно. Уравнение общего вида

$$dy/dx + a(x)y = f(x) \quad (4.11)$$

имеет общее решение:

$$y = (1/\mu(x)) [\int f(x)\mu(x)dx + C], \quad (4.12)$$

где

$$\mu(x) = \exp(\int a(x)dx). \quad (4.13)$$

Постоянная интегрирования  $C$  в (4.12) определяется начальным условием. Легко проверить непосред-

ственной подстановкой (4.12) и (4.13) в (4.11), что это действительно решение.

Вот пример задачи, в которой приходим к линейному дифференциальному уравнению.

**Задача 4.3.** На дне замкнутой неподвижной сферы радиуса  $R$  покоится тело малых размеров. Какую скорость  $v_0$  надо сообщить телу, чтобы оно, пройдя по окружности вертикального большого круга, оторвалось от сферы в ее верхней точке? Коэффициент трения скольжения равен  $k$ .

**Решение.** Конечная скорость  $v_k$  определяется из условия отрыва  $mv_k^2/R = mg$  ( $m$  — масса тела), откуда

$$v_k^2 = gR. \quad (4.14)$$

Начальная кинетическая энергия идет на увеличение потенциальной энергии на  $mg2R$ , работу силы трения  $A_{\text{тр}}$  и остаток кинетической энергии в момент отрыва:

$$\frac{m}{2} (v_0^2 - v_k^2) = A_{\text{тр}} + 2mgR. \quad (4.15)$$

Задача сводится к вычислению работы силы трения. Из общего определения работы

$$A_{\text{тр}} = \int F_{\text{тр}} ds, \quad (4.16)$$

где  $ds = R d\varphi$  — бесконечно малый элемент дуги большого круга. Если  $\omega$  — угловая скорость движения тела,  $\varphi$  — угловая координата (рис. 4.5), то

$$F_{\text{тр}} = k(m\omega^2 R + mg \cos \varphi), \quad (4.17)$$

$$A_{\text{тр}} = kmR^2 \int_0^\pi \omega^2 d\varphi. \quad (4.18)$$

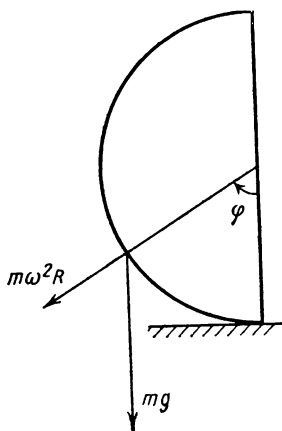


Рис. 4.5

Теперь надо найти угловую скорость как функцию угла  $\varphi$ . Для этого используем уравнение вращательного движения. Сокращая его обе части на  $mR^2$ , имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega^2 - \frac{g}{R}(\sin\varphi + \cos\varphi). \quad (4.19)$$

Записывая  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi}(\omega^2)$ , получаем линейное уравнение вида (4.11) относительно  $\omega^2$ :

$$\frac{d(\omega^2)}{d\varphi} + 2k\omega^2 = -\frac{2g}{R}(\sin\varphi + \cos\varphi). \quad (4.20)$$

Согласно (4.11) — (4.13), находим

$$\omega^2 = e^{-2k\varphi} \left\{ -\frac{2g}{R} \left[ \frac{e^{2k\varphi}}{4k^2 + 1} ((2k+1)\sin\varphi + (2k-1)\cos\varphi) \right] + C \right\}. \quad (4.21)$$

Определяя значение константы  $C$  из начального условия ( $v = v_0$  при  $\varphi = 0$ ), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \omega^2 d\varphi &= \frac{4g(2k+1)}{R(4k^2+1)} + \\ &+ \frac{1}{2k} (1 - e^{-2k\pi}) \left[ \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g(2k-1)}{R(4k^2+1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Из (4.15) и (4.18) находим ответ:

$$v_0^2 = gR e^{2k\pi} \left\{ 5 + \frac{2}{4k^2+1} [4k(2k+1) + (1 - e^{-2k\pi})(2k-1)] \right\}. \quad (4.23)$$

Задача для самостоятельного решения.

**Задача 4.4.** На проволочной окружности радиуса  $R$ , расположенной горизонтально, насажен небольшой шарик, который может двигаться по проволоке. С какой начальной скоростью надо толкнуть шарик вдоль проволоки, чтобы он сделал точно один оборот? Коэффициент трения скольжения равен  $k$ .

## § 5. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В курсе общей физики обычный способ изучения движения системы материальных точек и твердых тел состоит в записи уравнений движения для всех точек и тел вместе с уравнениями, следующими из третьего закона Ньютона для всех взаимодействий внутри системы. При этом вводятся в рассмотрение внутренние силы (натяжения нитей, упругие напряжения в стержнях, непосредственные взаимодействия тел друг с другом и т. д.). Если система состоит из малого количества взаимодействующих тел, то такой подход оправдан и быстро приводит к решению задачи. Однако с ростом числа тел, составляющих систему, такой подход становится громоздким и неэффективным. Поэтому в теоретической механике при изучении динамики системы чаще исходят из того или иного вариационного принципа.

Основное внимание в курсе теоретической механики для физиков обычно уделяется применениям лагранжева формализма и уравнений Гамильтона, а общее уравнение механики (уравнение Даламбера—Лагранжа), как правило, к решению задач почти не привлекается. Вместе с тем для студентов, интересующихся задачами повышенной трудности в курсе общей физики, несомненный интерес представит знакомство с одним из эффективных подходов к решению задач динамики системы — с использованием общего уравнения механики.

Для того чтобы освоиться с этим методом решения задач, необходимо уяснить некоторые дополнительные понятия и определения.

Классификацию различных систем будем проводить по их числу степеней свободы. Число степеней свободы системы — это количество независимых параметров, которые требуются для описания движения системы. Так, например, свободная материальная точка имеет три степени свободы; если точка может перемещаться только по заданной поверхности (или кривой), то она имеет две (или соответственно одну) степени свободы. Две свободные точки имеют 6 степеней свободы; если они соединены нерастяжимым стержнем, то число степеней свобо-

ды равно 5. Свободное твердое тело имеет 6 степеней свободы. Условия движения тел по заданным поверхностям, соединяющие тела нити и стержни — основные виды связей, наложенных на систему, — уменьшают число степеней свободы системы. Чтобы практически определить число степеней свободы системы, надо последовательно запрещать возможные (т. е. допустимые связями) перемещения точек системы, пока движение станет невозможным. Число таких запретов и будет равно числу степеней свободы системы.

Кроме возможных перемещений в механике рассматриваются виртуальные перемещения — воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент времени связями. Если связи от времени не зависят, то возможные и виртуальные перемещения не различаются. В дальнейшем у нас не встретится зависящих от времени связей, но для общности мы будем говорить о виртуальных перемещениях (для них обычно используется обозначение  $\delta \mathbf{r}$  или  $\delta \mathbf{s}$ ). Кроме внешних заданных сил на систему действуют реакции связей, т. е. силы со стороны поверхностей, стержней, нитей и т. п. Мы выделим связи особого типа, для которых сумма работ всех реакций связей на произвольном виртуальном перемещении точек системы (виртуальная работа реакций связей) равна нулю:

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{R}_i$  — радиус-вектор  $i$ -той точки системы и суммирование ведется по всем точкам. Такие связи называются идеальными. К ним относятся гладкие поверхности и кривые, невесомые нерастяжимые стержни и нити, а также абсолютно шероховатые поверхности, по которым происходит качение тел без проскальзывания.

Если записать уравнение движения произвольной точки системы:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{F}_i$  — внешние силы,  $\mathbf{R}_i$  — реакции связей, то, умножая обе части этого уравнения на произволь-



ное виртуальное перемещение этой точки  $\delta s_i$  и суммируя по всем точкам, получаем с учетом (5.1)

$$\sum_i (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{s}_i = 0. \quad (5.3)$$

Это и есть основное уравнение механики, которое может служить базой для изучения динамики системы с идеальными связями. Преимущество полученного уравнения состоит в том, что в него не входят не известные заранее реакции связей.

Общее уравнение механики в виде (5.3) неудобно для непосредственного применения к системам твердых тел, так как включает в себя суммирование по точкам тел, составляющих систему. Его можно преобразовать к виду, более удобному для применений. Для этого заметим, что при поступательном движении твердого тела виртуальные перемещения  $\delta s_i$  всех его точек одинаковы, так же как одинаковы и ускорения всех его точек  $\ddot{\mathbf{r}}_i$ . Поэтому суммирование по точкам дает следующее

$$(m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}) \delta \mathbf{s}, \quad (5.4)$$

где  $m$  — масса тела,  $\ddot{\mathbf{r}}$  — ускорение его центра масс,  $\mathbf{F}$  — результирующая внешних сил, действующих на тело,  $\delta \mathbf{s}$  — произвольное виртуальное перемещение. При вращении твердого тела относительно фиксированной оси, проходящей через центр масс, виртуальные перемещения всех точек тела выражаются через один угол поворота  $\delta \varphi$ , а именно  $\delta s_i = [\delta \varphi \times \rho_i]$ , где  $\rho_i$  — компонента радиуса-вектора точки  $\mathbf{r}_i$ , лежащая в плоскости, содержащей рассматриваемую точку и перпендикулярной к оси вращения. Подставляя это выражение в (5.3) и переставляя циклически сомножители в смешанных произведениях, приходим к следующему

$$(J\ddot{\varphi} - \mathbf{M}) \delta \varphi, \quad (5.5)$$

где  $J = \sum_i m_i \rho_i^2$  — момент инерции тела относительно данной оси,  $\mathbf{M} = \sum_i [\rho_i \times \mathbf{F}_i]$  — момент внешних сил относительно этой же оси,  $\ddot{\varphi}$  — угловое ускорение тела,  $\delta \varphi$  — виртуальный угол поворота.

Вспомним теперь, что произвольное перемещение твердого тела всегда можно представить как сумму двух: поступательного перемещения до нового положения центра масс и последующего вращения относительно некоторой оси, проходящей через центр масс. Поэтому в общем случае для каждого тела движущейся системы можно ожидать не более двух слагаемых в сумме (5.3), а суммирование по точкам в (5.3) заменить суммированием по поступательным и вращательным (относительно оси, проходящей через центр масс) перемещениям всех тел, входящих в систему.

Для удобства перепишем теперь формулу (5.3) в виде

$$\sum_k (m_k \ddot{s}_k - F_k) \delta s_k = 0, \quad (5.6)$$

вкладывая в суммирование по  $k$  смысл суммирования по телам системы и их поступательным и вращательным движениям. В (5.6) под  $m_k$ ,  $\ddot{s}_k$ ,  $F_k$  и  $\delta s_k$  понимаем либо массу, ускорение, внешнюю силу и поступательное виртуальное перемещение, либо момент инерции, угловое ускорение, момент внешних сил и угол виртуального поворота относительно оси, проходящей через центр масс.

Теперь можно приступить к решению задач. Если рассматривается система с одной степенью свободы, то, по определению, достаточно ввести один параметр для описания движения всех тел; при этом перемещение и ускорение всех тел в системе могут быть выражены через этот параметр. Если обозначить через  $\delta X$  перемещение (линейное или угловое) какого-либо из тел системы, то все остальные перемещения будут выражаться через это выбранное:

$$\delta s_k = A_k \delta X, \quad (5.7)$$

где  $A_k$  — некоторые коэффициенты, которые определяются конфигурацией системы. Если эти коэффициенты все постоянны, то связь соответствующих ускорений имеет вид

$$\ddot{s}_k = A_k \ddot{X}. \quad (5.8)$$

В этом случае, подставляя (5.7) и (5.8) в (5.6), на-

ходим решение задачи с одной степенью свободы:

$$\ddot{X} = \frac{\sum_k F_k A_k}{\sum_k m_k A_k^2}. \quad (5.9)$$

Таким образом, решение динамической задачи сводится к геометрическому определению связи перемещений тел в системе. Естественно, в качестве основной переменной  $\delta X$  надо выбрать смещение того тела, чье ускорение интересует нас в первую очередь. Для иллюстрации метода рассмотрим пример несложной задачи с одной степенью свободы.

**Задача 5.1.** На сплошной цилиндр, который может кататься по горизонтальной плоскости без проскальзывания, намотана нить. Нить перекинута через блок и к концу ее привязан груз (рис. 5.1). Считая массы всех тел и моменты инерции круглых тел известными, найти ускорение подвешенного груза. Массой нити и трением в блоке пренебречь, нить нерастяжима и по блоку не проскальзывает.

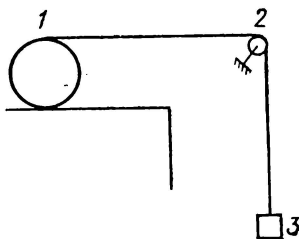


Рис. 5.1

**Решение.** В качестве основного перемещения  $\delta X$  выберем виртуальное смещение висящего груза вниз. Пронумеруем тела системы, как на рис. 5.1, и будем эти номера использовать как индексы при обозначении масс, радиусов и т. д. Тогда блок повернется на угол  $\delta\varphi_2 = \delta X/R_2$ , центр цилиндра сместится на  $\delta x_1 = 1/2 \delta X$ , и цилиндр повернется на угол  $\delta\varphi_1 = \delta X/(2R_1)$  относительно оси, проходящей через центр масс цилиндра. Эти результаты для удобства запишем в виде таблицы.

Аналогичную таблицу будем далее записывать и в других задачах. В данной задаче первое тело (цилиндр) движется поступательно и вращается, поэтому в формуле (5.6) ему соответствуют два слагаемых, а в таблице — две строчки. Второе тело (блок) только вращается, поэтому в (5.6) ему соответствует одно слагаемое, а в таблице — одна строчка, причем под  $m_k$  понимается момент инерции,  $\delta s_k$  —

$m_k$	$\delta s_k$	$A_k$	$F_k$
$m_1$	$\delta x_1 = \frac{1}{2} \delta X$	$1/2$	$0$
$J_1$	$\delta \varphi_1 = \frac{1}{2R_1} \delta X$	$1/(2R_1)$	$0$
$J_2$	$\delta \varphi_2 = \delta X/R_2$	$1/R_2$	$0$
$m_3$	$\delta y_3 = \delta X$	$1$	$m_3 g$

угол поворота,  $F_k$  — момент внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс (оси блока). В последней колонке записаны проекции сил (а для вращательных движений — проекции моментов сил) на направления соответствующих перемещений.

Видим, что все коэффициенты  $A_k$  — постоянные. Поэтому найденные  $m_k$ ,  $A_k$ ,  $F_k$  подставляем в общую формулу (5.9) и получаем ответ:

$$\ddot{X} = \frac{m_3 g}{m_1/4 + J_1/(4R_1^2) + J_2/R_2^2 + m_3}. \quad (5.10)$$

**Задача 5.2.** Найти ускорение груза 1 в системе блоков и грузов на рис. 5.2. Известны массы всех тел и моменты инерции блоков. Нити невесомы и по блокам не проскальзывают.

**Решение.** Пусть  $\delta X$  — виртуальное перемещение первого груза вниз. Тогда блок 2 на столько же опустится вниз и повернется на угол  $\delta \varphi_2 = \delta X/R_2$ , блок 3 повернется на угол  $2\delta X/R_3$ , блок 4 повернется на угол  $\delta X/R_4$  и вместе с грузом 5 поднимется на  $\delta X$ . В результате имеем следующую таблицу.

$m_k$	$\delta s_k$	$A_k$	$F_k$
$m_1 + m_2$	$\delta x_1 = \delta X$	$1$	$(m_1 + m_2) g$
$J_2$	$\delta \varphi_2 = \delta X/R_2$	$1/R_2$	$0$
$J_3$	$\delta \varphi_3 = 2\delta X/R_3$	$2/R_3$	$0$
$J_4$	$\delta \varphi_4 = \delta X/R_4$	$1/R_4$	$0$
$m_4 + m_5$	$\delta x_5 = \delta X$	$1$	$-(m_4 + m_5) g$

Поскольку все  $A_k$  постоянны, применяем формулу (5.9) и получаем ответ:

$$\ddot{X}_1 = \frac{(m_1 + m_2) - (m_4 + m_5)}{(m_1 + m_2) + J_2/R_2^2 + 4J_3/R_3^2 + J_4/R_4^2 + (m_4 + m_5)} g. \quad (5.11)$$

Что изменится, если не все коэффициенты  $A_k$  будут постоянными? Тогда при выражении связи между ускорениями могут появиться слагаемые, зависящие только от скоростей и не зависящие от ускорений, т. е. вместо (5.8) может появиться зависимость

$$\ddot{x}_k = A_k \dot{x} + a_k. \quad (5.12)$$

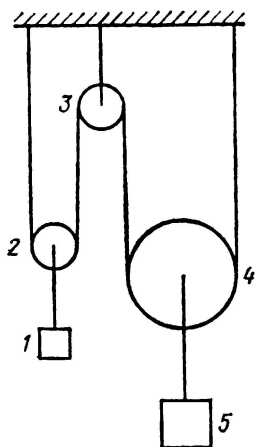


Рис. 5.2

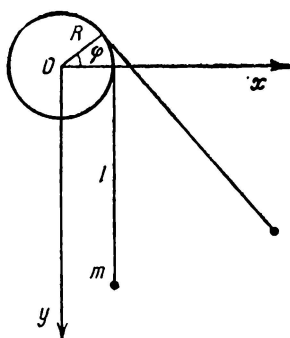


Рис. 5.3

Подставляя (5.7) и (5.12) в (5.6), находим решение для задачи с одной степенью свободы в общем случае:

$$\ddot{X} = \frac{\sum_k F_k A_k - \sum_k m_k A_k a_k}{\sum_k m_k A_k^2}. \quad (5.13)$$

**Задача 5.3.** Составить уравнение движения математического маятника, нить которого наматывается на неподвижный цилиндр (рис. 5.3). Радиус цилиндра  $R$ , длина нити до точки касания с цилиндром равна  $l$  в положении равновесия.

**Решение.** Выберем оси координат, как показано на рис. 5.3. Если нить маятника составляет угол  $\varphi$  с вертикалью, то длина нити при этом равна  $(l + R\varphi)$ . Скалярное произведение в формуле (5.6) запишем в координатах  $(x, y)$ . Поэтому в сумме (5.6) будет два слагаемых.

В качестве основного виртуального перемещения выберем  $\delta\varphi$  — приращение угла отклонения нити маятника. Тогда

$$\delta x = (l + R\varphi) \cos \varphi \delta\varphi, \quad (5.14)$$

$$\delta y = -(l + R\varphi) \sin \varphi \delta\varphi$$

— виртуальные перемещения точки  $m$  по осям  $x$  и  $y$ . Записывая координаты движущейся точки:

$$x = R \cos \varphi + (l + R\varphi) \sin \varphi, \quad (5.15)$$

$$y = -R \sin \varphi + (l + R\varphi) \cos \varphi$$

и дифференцируя их дважды по времени, находим связь проекций ускорения на оси  $x$  и  $y$  с угловым ускорением:

$$\ddot{x} = (l + R\varphi) \cos \varphi \ddot{\varphi} + [R \cos \varphi - (l + R\varphi) \sin \varphi] \dot{\varphi}^2, \quad (5.16)$$

$$\ddot{y} = -(l + R\varphi) \sin \varphi \ddot{\varphi} + [-R \sin \varphi - (l + R\varphi) \cos \varphi] \dot{\varphi}^2.$$

Видим, что проекции ускорения действительно выражаются в форме (5.12). Составляем таблицу для данной задачи.

$m_k$	$\delta s_k$	$A_k$	$a_k$	$F_k$
$m$	$\delta x = (l + R\varphi) \cos \varphi \delta\varphi$	$(l + R\varphi) \cos \varphi$	$[R \cos \varphi - (l + R\varphi) \sin \varphi] \dot{\varphi}^2$	0
$m$	$\delta y = -(l + R\varphi) \sin \varphi \delta\varphi$	$-(l + R\varphi) \sin \varphi$	$[-R \sin \varphi - (l + R\varphi) \cos \varphi] \dot{\varphi}^2$	$mg$

Подставляя данные этой таблицы в общую формулу (5.13), находим ответ:

$$\ddot{\varphi} = -(g \sin \varphi + R\dot{\varphi}^2) / (l + R\varphi). \quad (5.17)$$

При малых углах  $\varphi$  и угловых скоростях  $\dot{\varphi}$  отсюда

получаем уравнение движения простого математического маятника.

**Задача 5.4.** На горизонтальном столе может кататься без проскальзывания однородное тело в виде половинки круглого цилиндра радиуса  $R$  (рис. 5.4)

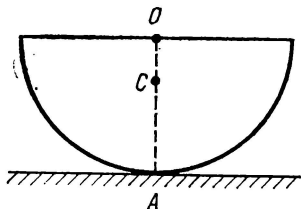


Рис. 5.4

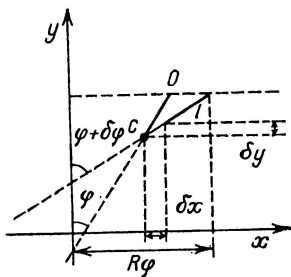


Рис. 5.5

Записать уравнение его движения при колебаниях. Найти отсюда частоту малых колебаний.

**Решение.** Пусть точка  $C$  на рис. 5.4 — центр масс полуцилиндра. Расстояние  $OC$  обозначим пока через  $l$ . Начало системы координат поместим в точку  $A$ , оси  $x$  и  $y$  направим в плоскости рис. 5.4 вправо и вертикально вверх. Пусть наш полуцилиндр переместился так, что его радиус  $OA$  отклонился от вертикали на угол  $\varphi$ . Тогда координаты центра масс будут:

$$\begin{aligned} x &= R\varphi - l \sin \varphi, \\ y &= R - l \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Дифференцируя их дважды по времени, найдем проекции ускорения центра масс на оси координат:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (R - l \cos \varphi) \ddot{\varphi} + l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2, \\ \ddot{y} &= l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Рассчитаем в этом произвольном положении полуцилиндра виртуальные перемещения  $\delta x$  и  $\delta y$  его центра масс, если угол  $\varphi$  изменить виртуально на  $\delta\varphi$ . Заметим, что след оси цилиндра  $O$  движется при качении горизонтально. Поэтому из рис. 5.5

находим:

$$\begin{aligned}\delta x &= (R - l \cos \varphi) \delta \varphi, \\ \delta y &= l \sin \varphi \delta \varphi.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Заметим, что мы могли бы получить (5.20), вычисляя вариации координат (5.18) по правилам дифференцирования. Так можно поступить лишь в тех случаях, когда функции  $x$ ,  $y$  зависят лишь от аргумента  $\varphi$  и не зависят от производной  $\dot{\varphi}$  по времени.

Итак, мы подготовили все данные для записи таблицы.

$m_k$	$\delta x_k$	$A_k$	$a_k$	$F_k$
$m$	$\delta x = (R - l \cos \varphi) \delta \varphi$	$R - l \cos \varphi$	$l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2$	0
$m$	$\delta y = l \sin \varphi \delta \varphi$	$l \sin \varphi$	$l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2$	$-mg$
$J$	$\delta \varphi = \delta \varphi$	1	0	0

Подставляя эти данные в общую формулу (5.13), находим ответ:

$$\ddot{\varphi} = - \frac{l \sin \varphi (g + R \dot{\varphi}^2)}{J/m + R^2 + l^2 - 2Rl \cos \varphi}. \quad (5.21)$$

Для полноты осталось вычислить лишь положение центра масс и момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Положение центра масс можно найти прямым интегрированием. Пусть изображенный на рис. 5.4 полукруг находится в горизонтальной плоскости. Тогда момент силы тяжести относительно точки  $O$  равен  $mgl$ , где  $m$  — масса полукруга. С другой стороны, этот момент можно вычислить, суммируя моменты сил тяжести от бесконечно узких полосок шириной  $dx$  (рис. 5.6):

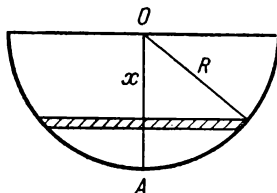


Рис. 5.6

$$mgl = \int_0^R 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx, \quad (5.22)$$



где  $\rho = 2m/(\pi R^2)$  — поверхностная плотность. Отсюда находим  $l = 4R/(3\pi)$ . Для вычисления момента инерции применим теорему Штейнера:  $J = J_0 - ml^2$ , где  $J_0 = mR^2/2$  — момент инерции полуцилиндра относительно оси, проходящей через точку  $O$ . В итоге находим  $J = mR^2(1/2 - 16/(9\pi^2))$ . Для малых колебаний из (5.21) получаем

$$\ddot{\varphi} = -mgl\varphi/[J + m(R - l)^2], \quad (5.23)$$

откуда частота малых колебаний

$$\omega = [8g/R(9\pi - 16)]^{1/2}. \quad (5.24)$$

Рассмотрим теперь движение систем с двумя степенями свободы. В этом случае, по определению, все перемещения в системе можно выразить через два, принятых за основные. Основные перемещения выбираются либо из соображений удобства, либо так, чтобы они относились к движению, наиболее нас интересующему. Если основные перемещения обозначить через  $\delta X$  и  $\delta Y$ , то все другие могут быть выражены в виде их линейной комбинации:

$$\delta s_k = A_k \delta X + B_k \delta Y. \quad (5.25)$$

Если все коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  постоянны, то и соответствующие ускорения выражаются в виде таких же линейных комбинаций:

$$\ddot{s}_k = A_k \ddot{X} + B_k \ddot{Y}. \quad (5.26)$$

Подставляя (5.25) и (5.26) в общее уравнение механики в форме (5.6) и воспользовавшись независимостью друг от друга перемещений  $\delta X$  и  $\delta Y$ , получаем систему линейных уравнений для определения ускорений:

$$\begin{aligned} \sum_k m_k A_k^2 \ddot{X} + \sum_k m_k A_k B_k \ddot{Y} &= \sum_k F_k A_k, \\ \sum_k m_k A_k B_k \ddot{X} - \sum_k m_k B_k^2 \ddot{Y} &= \sum_k F_k B_k. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Отсюда можно записать решение задачи о системе с двумя степенями свободы в общем виде. Если обозначить

$$D = \begin{vmatrix} \sum_k m_k A_k^2 & \sum_k m_k A_k B_k \\ \sum_k m_k A_k B_k & \sum_k m_k B_k^2 \end{vmatrix}, \quad (5.28)$$

то находим:

$$\ddot{X} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_k F_k A_k & \sum_k m_k A_k B_k \\ \sum_k F_k B_k & \sum_k m_k B_k^2 \end{vmatrix}, \quad (5.29)$$

$$\ddot{Y} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_k m_k A_k^2 & \sum_k F_k A_k \\ \sum_k m_k A_k B_k & \sum_k F_k B_k \end{vmatrix}. \quad (5.30)$$

Читатель без труда получит обобщение этих результатов на случай непостоянных  $A_k$ ,  $B_k$ , а также на системы с тремя и более степенями свободы.

**Задача 5.5.** На гладкой горизонтальной плоскости лежит клин массы  $M$ , на который кладут гладкий брусок массы  $m$  (рис. 5.7).

Найти ускорение клина, а также ускорение бруска относительно клина. Угол наклона плоскости клина к горизонту равен  $\alpha$ .

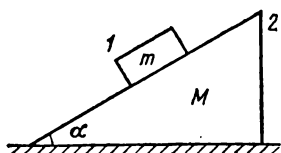


Рис. 5.7

**Решение.** В соответствии с вопросами в задаче примем в качестве основных перемещение клина  $\delta X$  по горизонтали вправо и перемещение  $\delta Y$  бруска вдоль клина. Поступательное движение бруска будем рассматривать в проекциях на оси координат  $x$ ,  $y$  (ось  $x$  направим вправо, ось  $y$  — вертикально вниз). Тогда в формуле (5.6) должны быть три слагаемых, так как клин движется только вдоль оси  $x$ . При нашем выборе основных виртуальных перемещений  $\delta X$  и  $\delta Y$  перемещение клина совпадает с  $\delta X$ , перемещение бруска по горизонтали равно  $\delta X - \cos \alpha \delta Y$ , а перемещение бруска по вертикали равно  $\sin \alpha \delta Y$ . Для удобства запишем таблицу данных, аналогичную предыдущим.

$m_k$	$\delta s_k$	$A_k$	$B_k$	$F_k$
$m$	$\delta x_1 = \delta X - \cos \alpha \delta Y$	1	$-\cos \alpha$	0
$m$	$\delta y_1 = \sin \alpha \delta Y$	0	$\sin \alpha$	$mg$
$M$	$\delta x_2 = \delta X$	1	0	0

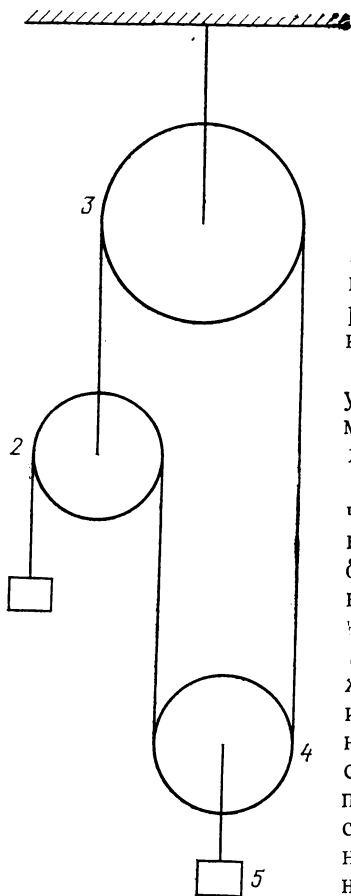


Рис. 5.8

По формулам (5.29), (5.30) получаем ответ:

$$\ddot{X} = \frac{mg \sin 2\alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)},$$

$$\ddot{Y} = \frac{(M + m) g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha},$$

где  $\ddot{X}$  — ускорение клина вдоль плоскости,  $\ddot{Y}$  — ускорение бруса относительно клина.

**Задача 5.6.** Определить ускорение груза 1 в системе грузов и блоков, изображенной на рис. 5.8.

**Решение.** Выберем в качестве одного из основных виртуальных перемещений  $\delta X$  — перемещение груза 1 вниз, а в качестве второго, например, смещение  $\delta Y$  центра блока 2 вниз. При движении общего вида тела 1 и 5 движутся поступательно, блок 3 только вращается, блоки 2 и 4 движутся поступательно и вращаются. Поэтому в таблице данных для этой задачи должно быть семь строк (но поскольку поступательные движения тел 4 и 5 одинаковы, то можно использовать для них одну строку, и всего в таблице будет шесть строк). Связь всех перемещений в системе с  $\delta X$  и  $\delta Y$  показана в таблице данных.

$m_k$	$\delta s_k$	$A_k$	$B_k$	$F_k$
$m_1$	$\delta x_1 = \delta X$	1	0	$m_1 g$
$m_2$	$\delta x_2 = \delta Y$	0	1	$m_2 g$
$J_2$	$\delta \varphi_2 = \delta X/R_2 - \delta Y/R_2$	$1/R_2$	$-1/R_2$	0
$J_3$	$\delta \varphi_3 = \delta Y/R_3$	0	$1/R_3$	0
$m_4 + m_5$	$\delta x_4 = -\delta X/2 - \delta Y/2$	$-1/2$	$1/2$	$(m_4 + m_5) g$
$J_4$	$\delta \varphi_4 = -\delta X/(2R_4) + 3\delta Y/(2R_4)$	$-1/(2R_4)$	$3/(2R_4)$	0

Подставляя полученные данные в (5.28)—(5.30), получим ответ:

$$\ddot{x}_1 = \frac{g}{D} \left| \begin{array}{c} m_1 - 2m - \frac{J_2}{R_2^2} - m - \frac{3J_4}{4R_4^2} \\ m_2 + 2m m_2 + \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{J_3}{R_3^2} + m + \frac{9}{4} \frac{J_4}{R_4^2} \end{array} \right|,$$

где  $m = (m_4 + m_5)/4$ ,

$$D = \left| \begin{array}{c} m_1 + \frac{J_2}{R_2^2} + m + \frac{J_4}{4R_4^2} - \frac{J_2}{R_2^2} - m - \frac{3J_4}{4R_4^2} \\ - \frac{J_2}{R_2^2} - m - \frac{3J_4}{4R_4^2} m_2 + \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{J_3}{R_3^2} + m + \frac{9J_4}{4R_4^2} \end{array} \right|$$

Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 5.7.** Однородный шарик радиуса  $r$  катается без проскальзывания в неподвижной сферической чашке радиуса  $R$ , проходя в своем движении через ее нижнюю точку. Найти угловое ускорение движения центра масс шарика и период его малых колебаний.

**Задача 5.8.** Круглый однородный цилиндр массы  $m$  скатывается без проскальзывания с клина массы  $M$ , лежащего на гладкой горизонтальной плоскости. Найти ускорение клина, если его плоскость наклонена под углом  $\alpha$  к горизонтальной плоскости.

## § 6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА, МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

Использование законов сохранения существенно облегчает изучение движения различных систем, так как в этом случае исходными являются не ускорения, а скорости. Поэтому при решении любой задачи сначала надо посмотреть, не выполняются ли какие-нибудь законы сохранения в данной системе. Если вопросы задачи поставлены о координатах или смещениях, то после записи соотношения, выражающего

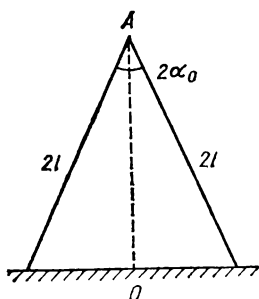


Рис. 6.1

закон сохранения, надо решить записанное дифференциальное уравнение, применяя изученные методы. Рассмотрим несколько примеров такого рода.

**Задача 6.1.** Две одинаковые доски длиной 2 м каждая, шарнирно скрепленные в верхней точке  $A$  (рис. 6.1), нижними концами опираются на гладкую горизонтальную плоскость. В начальный момент доски неподвижны и угол между ними равен  $2\alpha_0 = 60^\circ$ . За

какое время доски упадут на плоскость, если системе предоставить самой себе? Трением в шарнире пренебречь.

**Решение.** В данной системе трение отсутствует, а внешние силы (силы тяготения и реакции опоры) направлены по вертикали и потенциальны. Поэтому в системе сохраняется проекция импульса на горизонтальное направление и сохраняется механическая энергия. Из сохранения горизонтальной проекции импульса следует, что точка  $A$  будет двигаться по вертикали  $AO$ , а движение досок будет симметричным. Закон сохранения энергии дает соотношение

$$mV^2 + J\omega^2 + 2mgl \cos \alpha = 2mgl \cos \alpha_0, \quad (6.1)$$

где  $m$  — масса доски,  $J = ml^2/3$  — ее момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс,  $\alpha$  — половина угла между досками. Связь скорости движения центра масс доски  $v$  с угловой скоростью ее вращения  $\omega = \alpha$  следует из факта движения точки  $A$  по

вертикали. Пусть начало координат находится в точке  $O$ , а ось  $y$  направлена по  $OA$ . Тогда координаты центра масс доски, находящейся справа, равны:

$$x = l \sin \alpha, \quad y = l \cos \alpha. \quad (6.2)$$

Дифференцируя по времени эти соотношения и выражая скорость движения центра масс  $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ , находим

$$v = \omega l. \quad (6.3)$$

Из уравнения (6.1)

$$\omega^2 = \frac{3g}{2l} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \quad (6.4)$$

Извлекая квадратный корень и разделяя переменные  $\alpha$  и  $t$ , получаем уравнение в разделенных переменных:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}} dt, \quad (6.5)$$

интегрируя которое по  $\alpha$  в пределах  $(\alpha_0, \pi/2)$  и по  $t$  в пределах  $(0, \tau)$ , находим искомый промежуток времени  $\tau$ :

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{3g}} \int_{\alpha_0}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}}. \quad (6.6)$$

Для численной оценки сделаем замену переменной:

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 \sin^2 \theta \quad (6.7)$$

и подынтегральное выражение разложим в ряд по степеням  $\sin \theta$ :

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{2l}{3g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sqrt{\cos \alpha_0} \sin \theta d\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha_0 \sin^4 \theta}} = \\ &= \sqrt{\frac{8l \cos \alpha_0}{3g}} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \left( 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha_0 \sin^4 \theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \cos^4 \alpha_0 \sin^8 \theta + \dots \right) d\theta. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Вычисляя полученные интегралы с помощью общей формулы

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2^n n!}{(2n+1)!!}. \quad (6.9)$$

находим

$$\tau = \sqrt{\frac{8 l \cos \alpha_0}{3g}} (1 + 0,20 + 0,09 + \dots) \approx 0,6 \text{ с.} \quad (6.10)$$

За счет отброшенных членов точный результат может быть больше на несколько процентов.

**Задача 6.2.** Горизонтальный диск массы  $M$  и радиуса  $R$  может свободно вращаться относительно вертикальной оси, проходящей через его центр  $O$ . На диске нарисована окружность вдвое меньшего радиуса, проходящая через центр диска (рис. 6.2). Человек массы  $m$  проходит по нарисованной окружности, выходя из точки  $O$  и возвращаясь в эту же точку. На какой угол повернется диск к моменту завершения обхода?

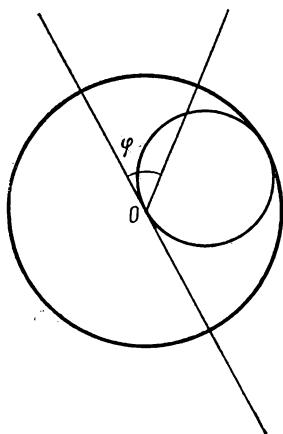


Рис. 6.2

**Решение.** В данной системе сохраняется проекция момента импульса на ось вращения (остается все время равной нулю). Если человек проходит контур, двигаясь, например, по часовой стрелке, то диск должен вращаться в противоположном направлении. Обозначим

угол поворота диска через  $\theta$ . Угловая скорость движения человека будет складываться из угловой скорости вращения диска  $d\theta/dt$  и угловой скорости движения человека относительно диска  $d\varphi/dt$  (см. рис. 6.2). Записываем условие равенства нулю проекции момента импульса на ось вращения, считая обе угловые скорости положительными:

$$\frac{MR^2}{2} \frac{d\theta}{dt} + m(R \sin \varphi)^2 \left( \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0. \quad (6.11)$$

Отсюда находим связь между углами  $d\theta$  и  $d\varphi$ . Разделяя переменные, получаем

$$d\theta = - \frac{2m \sin^2 \varphi}{M + 2m \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (6.12)$$

Мы видим, что в случае, когда мы заранее не учиты-

ваем направления вращения, знак минус появляется автоматически, говоря о том, что вращение происходит в противоположные стороны. Если бы в (6.11) мы учли истинные направления вращения, то знака минус в (6.12) мы бы не получили.

При полном обходе контура угол  $\varphi$  меняется от 0 до  $\pi$ , а угол  $\theta$  — от 0 до искомого конечного значения. Интегрируя левую и правую части (6.12) в указанных пределах, находим ответ:

$$\theta = -\pi \left( 1 - \sqrt{\frac{M}{M+2m}} \right). \quad (6.13)$$

**Задача 6.3.** Внутри неподвижной сферической чашки радиуса  $R$  может двигаться тонкий однородный стержень длины  $l < 2R$  так, что он остается в вертикальной плоскости, проходящей через центр сферы (рис. 6.3). Если пренебречь трением, то стержень совершает незатухающие колебания. Определить их частоту.

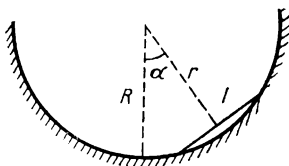


Рис. 6.3

**Решение.** Здесь мы имеем пример задачи, в которой из закона сохранения дифференцированием можно получить уравнение движения. Этот прием часто используют при изучении колебательного движения, так как, записав уравнение свободных колебаний в канонической форме  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , мы сразу определяем квадрат циклической частоты колебаний, выписывая коэффициент при неизвестной функции  $x(t)$ . В данном случае выполняется закон сохранения механической энергии. Кинетическую энергию стержня запишем по формуле Кенига:

$$E_k = mv^2/2 + J\omega^2/2, \quad (6.14)$$

где  $v$  — скорость центра масс,  $J$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Учитывая, что  $v = r\dot{\alpha}$ , где  $r = \sqrt{R^2 - l^2/4}$  (см. рис. 6.3),  $\omega = \dot{\alpha}$  и  $J = ml^2/12$  ( $m$  — масса стержня), находим

$$E_k = \frac{m\dot{\alpha}^2}{2} \left( R^2 - \frac{1}{6} l^2 \right). \quad (6.15)$$

Потенциальную энергию определим по высоте центра



тяжести стержня над положением равновесия:

$$E_{\pi} = mgr(1 - \cos \alpha). \quad (6.16)$$

Если рассматриваются малые колебания, то  $1 - \cos \alpha \approx \alpha^2/2$ , и закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m\dot{\alpha}^2}{2} \left( R^2 - \frac{1}{6} l^2 \right) + \frac{mg\alpha^2}{2} \sqrt{R^2 - l^2/4} = \text{const.} \quad (6.17)$$

Дифференцируя это соотношение по времени и записывая полученный результат в форме канонического уравнения колебаний, находим

$$\ddot{\alpha} + \frac{g \sqrt{R^2 - l^2/4}}{R^2 - \frac{1}{6} l^2} \alpha = 0, \quad (6.18)$$

откуда определяем циклическую частоту колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sqrt{R^2 - l^2/4}}{R^2 - l^2/6}}. \quad (6.19)$$

**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 6.4.** Стержень длиной 2 м касается одним концом гладкого горизонтального пола. В начальный момент стержень неподвижен и составляет с горизонтом угол  $80^\circ$ . Через какое время он упадет на пол, если его отпустить?

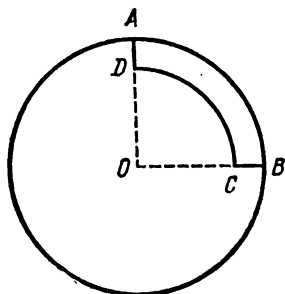


Рис. 6.4

**Задача 6.5.** Горизонтальный диск массы  $M$  и радиуса  $R$  может свободно вращаться относительно вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске нарисован контур  $ABCD$  (рис. 6.4), состоящий из двух  $90^\circ$ -дуг окружностей (радиусов  $r$  и  $R$ ) и

двух отрезков радиусов. Человек массы  $m$  выходит из точки  $A$ , проходит по контуру и возвращается в точку  $A$ . На какой угол повернется при этом диск?

## § 7. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Использование неинерциальных систем координат иногда позволяет существенно упростить решение задачи. В курсе общей физики детально изучаются два типа неинерциальных систем координат. Это, во-первых, система, движущаяся поступательно с постоянным ускорением  $a_0$ , в которой на каждое тело действует сила инерции:

$$\mathbf{F}_и = -m\mathbf{a}_0 \quad (7.1)$$

( $m$  — масса тела). Эту систему целесообразно использовать в том случае, когда одно из движущихся тел имеет постоянное фиксированное ускорение  $a_0$ . Во-вторых, часто используется равномерно вращающаяся (с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно фиксированной оси) система координат, в которой на все точки тела действуют силы инерции:

$$\mathbf{F}_и = -2m[\omega \times \mathbf{v}_{отн}] - m[\omega \times [\omega \times \mathbf{r}]], \quad (7.2)$$

где  $m$  — масса точки,  $\mathbf{v}_{отн}$  — скорость движения точки относительно неинерциальной системы,  $\omega$  — угловая скорость вращения системы координат,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки (начало координат на оси вращения). Первое слагаемое в (7.2) называется кориолисовой силой инерции, второе — центробежной силой инерции. Такую систему координат целесообразно использовать тогда, когда выбранное тело отсчета равномерно вращается относительно фиксированной оси.

Характерно использование системы координат, связанной с вращающейся Землей, при изучении изменений в движении тел за счет вращения Земли. Если масса тела не меняется, то центробежная сила остается практически постоянной, и ее можно рассматривать как малую поправку к силе тяжести. Сила Кориолиса при движении меняется, но остается малой по сравнению с силой тяжести. В задачах такого типа, когда движение определяется суммой сил, одна из которых намного превышает другую, часто бывает полезно применить для решения задачи метод последовательных приближений — один из основных методов теоретических расчетов. Он состоит в следующем,

Сначала пренебрегаем малой силой и решаем задачу с учетом только главной силы. Полученное так решение называется нулевым приближением. Далее исходим из уравнения с учетом малой силы, в которое подставляются результаты нулевого приближения. Новое решение ищется в виде суммы нулевого приближения и малой добавки. Уравнение для определения малой добавки получается из исходного, если в исходном уравнении оставить только члены, линейные по малым величинам. Таким образом определяется решение в первом приближении. Повторяя эту процедуру, находим решение во втором, третьем и следующих приближениях, постепенно увеличивая точность полученного решения. В качестве примера применения такой техники рассмотрим задачу о свободном падении тела на вращающуюся Землю.

**Задача 7.1.** Получить закон свободного падения тела на широте  $\theta$  в поле тяжести Земли с учетом ее вращения.

**Решение.** Пусть в начальный момент тело неподвижно и находится на расстоянии  $h$  над поверхностью Земли. Направление отвеса (вертикаль) определяется действием силы тяжести и центробежной силы инерции. Прямым расчетом легко убедиться в том, что абсолютные величины векторов центробежной силы и силы Кориолиса очень малы по сравнению с абсолютной величиной вектора силы тяжести. Поэтому обычно под ускорением свободного падения  $\mathbf{g}$  понимают ускорение вдоль линии отвеса, определяемое совместным действием сил тяжести и центробежной; при этом абсолютная величина  $\mathbf{g}$  практически не изменяется.

Пусть начало координат находится на поверхности Земли в точке, где проходит вертикаль, проведенная через начальное положение тела. Ось  $z$  направим вертикально вверх, ось  $x$  — на юг и ось  $y$  — на восток. В уравнении движения

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}], \quad (7.3)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость вращения Земли, сначала пренебрегаем малым вторым слагаемым в правой части. Решение полученного уравнения  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0$  (в данной задаче начальная скорость  $\mathbf{v}_0 = 0$ ) соответствует нулевому приближению в методе последова-

тельных приближений. Далее полагаем  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , где  $\mathbf{v}_2$  — малый вектор по сравнению с  $\mathbf{v}_1$ . Оставляя в векторном произведении  $[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}]$  только большое слагаемое  $[\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\Omega}]$ , находим из (7.3)

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = 2[\mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\Omega}] = 2t[\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}], \quad (7.4)$$

откуда

$$\mathbf{v}_2 = t^2[\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}]. \quad (7.5)$$

Так мы нашли решение в первом приближении. Полагаем теперь  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ , где вектор  $\mathbf{v}_3$  мал по сравнению с  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ . В векторном произведении  $[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}]$  в (7.3) оставляем только большое слагаемое  $[(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \boldsymbol{\Omega}]$ . Из (7.3) получаем

$$\dot{\mathbf{v}}_3 = 2[\mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\Omega}]. \quad (7.6)$$

Используя (7.5), находим

$$\mathbf{v}_3 = 2/3 t^3 [[\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}] \times \boldsymbol{\Omega}]. \quad (7.7)$$

Ясно, как можно получить поправки все более высоких порядков к скорости.

Сравним полученные векторы  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_3$  по абсолютной величине. Пусть тело падает с высоты, например,  $h = 1000$  м на широте Ленинграда ( $\theta = 60^\circ$  с. ш.). Тогда время падения будет приблизительно равно  $t \approx \sqrt{2h/g} \approx 14$  с. Угловая скорость вращения Земли равна  $2\pi/86400$  с  $\approx 7,3 \cdot 10^{-5}$  с $^{-1}$ . Найдём, что через 1 с после начала движения  $|\mathbf{v}_1| = 10$  м/с,  $|\mathbf{v}_2| = g\Omega \cos \theta = 3,6 \cdot 10^{-4}$  м/с,  $|\mathbf{v}_3| = 2/3 g\Omega^2 \cos \theta = 1,75 \cdot 10^{-8}$  м/с. К концу движения  $|\mathbf{v}_1| = 140$  м/с,  $|\mathbf{v}_2| = 0,07$  м/с,  $|\mathbf{v}_3| = 5 \cdot 10^{-5}$  м/с. Мы видим, что применение метода последовательных приближений вполне оправдано.

Мы нашли скорость тела как функцию от времени. Легко записать теперь закон движения тела:

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} + \frac{g t^2}{2} + \frac{t^3}{3} [\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}] + \frac{t^4}{6} [[\mathbf{g} \times \boldsymbol{\Omega}] \times \boldsymbol{\Omega}]. \quad (7.8)$$

В проекциях на оси координат имеем:  $\mathbf{h} = (0, 0, h)$ ,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega \cos \theta, 0, \Omega \sin \theta)$ , поэтому во втором приближении

$$\begin{aligned} x &= \frac{t^4}{6} g \Omega^2 \sin \theta \cos \theta, \\ y &= \frac{1}{3} t^3 g \Omega \cos \theta, \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$z = h - \frac{gt^2}{2} + \frac{1}{6} t^4 g \Omega^2 \cos^2 \theta.$$

За счет вращения Земли свободно падающее тело смещается к востоку и югу. При падении с высоты  $h=1000$  м на широте Ленинграда смещение от вертикали к востоку составляет около 35 см, а к югу — около 0,15 мм.

## § 8. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

**Задача 8.1.** Рассмотреть падение капли в атмосфере насыщенного пара. Сопротивлением воздуха при падении пренебречь.

**Решение.** Пусть при  $t=0$  образовалась капля радиуса  $r_0$ , имеющая проекцию скорости на вертикаль  $v_0$ . Капля будет увеличивать свои размеры, если скорость конденсации будет больше, чем скорость испарения.

Поскольку скорости молекул существенно превышают скорость движения капли, можно считать, что скорости конденсации и испарения (следовательно, и скорость изменения массы капли) пропорциональны площади поверхности капли:

$$\frac{dm}{dt} = \alpha S. \quad (8.1)$$

Если считать каплю шаром, то  $m=4/3\pi r^3\rho$ ,  $S=4\pi r^2$ , и из (8.1) находим:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{\rho} \quad (8.2)$$

и

$$r = \frac{\alpha}{\rho} t + r_0. \quad (8.3)$$

Радиус капли линейно растет со временем.

Уравнение движения в проекции на ось  $z$ , направленную вертикально вниз, имеет вид

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg. \quad (8.4)$$

Здесь три переменных величины, поэтому необходимо

сначала выполнить преобразования, ведущие к соотношению между двумя переменными. Можно, например, использовать (8.2) для исключения  $dt$ , а массу выразить через  $r$ :

$$\frac{\alpha}{\rho} \frac{d}{dr} (r^3 v) = r^3 g. \quad (8.5)$$

Если не поддаваться соблазну раскрыть скобки в (8.5), то переменные разделяются сразу:

$$d(r^3 v) = \frac{g \rho}{\alpha} r^3 dr, \quad (8.6)$$

откуда

$$r^3 v = \frac{g \rho}{4\alpha} r^4 + C, \quad (8.7)$$

$C$  — произвольная постоянная, определяемая из начальных условий:

$$C = r_0^3 v_0 - \frac{g \rho}{4\alpha} r_0^4. \quad (8.8)$$

Итак, получаем ответ:

$$v = v_0 \frac{r_0^3}{r^3} + \frac{g \rho}{4\alpha} \left( r - \frac{r_0^4}{r^3} \right), \quad (8.9)$$

выражающий скорость капли в зависимости от ее радиуса. С помощью (8.3) легко получить явное выражение скорости капли как функции от времени. График полученной зависимости представлен на рис. 8.1, где кривая (1) соответствует условию  $v_0 < \frac{g \rho}{4\alpha} r_0$ , а кривая (2) — противоположному неравенству.

Легко проверить, что при уменьшении скорости конденсации до нуля из (8.9) получаем (в пределе  $\alpha \rightarrow 0$ ) обычный закон свободного падения:  $v = v_0 + gt$ .

Почему нарастание скорости капли происходит с ускорением меньшим, чем  $g$ ? Дело в том, что при росте капли захватываются молекулы, суммарный импульс которых равен нулю. Этим

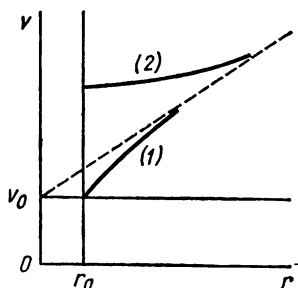


Рис. 8.1

молекулам при их разгоне передается часть накопленного каплей импульса.

**Задача 8.2.** Ракета перед стартом имеет массу  $m_0=120$  кг. На какой высоте окажется ракета через  $t=15$  с после начала работы ее двигателей? Считать расход топлива  $\mu=4$  кг/с и скорость истечения газов относительно ракеты  $u=1000$  м/с постоянными. Задачу решить, а) считая поле тяготения Земли однородным, б) учитывая неоднородность поля тяготения Земли.

**Решение.** Направим ось  $z$  вертикально вверх.

а) В однородном поле тяготения уравнение Мещерского записывается в виде

$$m \frac{dv_0}{dt} = \mu u - mg, \quad (8.10)$$

где  $m=m_0-\mu t$ . Разделяя переменные, находим уравнение

$$dv_0 = \left( \frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g \right) dt, \quad (8.11)$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию  $v_0=0$  при  $t=0$ , имеет вид

$$v_0 = u \ln \frac{m_0}{(m_0 - \mu t)} - gt. \quad (8.12)$$

Разделяя еще раз переменные и учитывая начальное условие  $z_0=0$  при  $t=0$ , находим

$$z_0 = u t - \frac{gt^2}{2} + \frac{um_0}{\mu} \left( 1 - \frac{\mu t}{m_0} \right) \ln \left( 1 - \frac{\mu t}{m_0} \right). \quad (8.13)$$

Подставляя заданные численные значения, получаем, что через 15 с после старта ракета будет на высоте около 3500 м, имея при этом скорость около 540 м/с.

б) Учтем то обстоятельство, что неоднородность гравитационного поля Земли на рассматриваемых высотах мала. Поэтому для расчета движения в данном случае удобно применить метод последовательных приближений, рассмотренный в гл. 7. Пусть  $R$  — радиус Земли (примем его равным 6400 км). Силу тяготения представим в виде

$$F = \gamma \frac{mM}{(R+z)^2} = \gamma \frac{mM}{R^2} \frac{1}{(1+\lambda)^2} \approx mg(1-2\lambda), \quad (8.14)$$

где  $M$  — масса Земли,  $\lambda=z/R \ll 1$ . При движении ра-

кеты в неоднородном поле при заданном законе изменения ее массы скорость движения ракеты можно представить в виде суммы:  $v = v_0 + v'$ , где  $v' \ll v_0$ . Аналогично записываем  $z = z_0 + z'$ , где  $z' \ll z_0$ . Подставляя эти выражения для  $v$ ,  $z$  и  $F$  в уравнение Мещерского, находим

$$m \frac{dv_0}{dt} + m \frac{dv'}{dt} = \mu u - mg + \frac{2mgz_0}{R} + \frac{2mgz'}{R}. \quad (8.15)$$

В полученном уравнении оставляем только члены первого порядка малости, отбрасывая последнее слагаемое в правой части (не малые слагаемые дают в сумме нуль). Приходим к уравнению

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{2gz_0}{R}, \quad (8.16)$$

где  $z_0$  определено формулой (8.13). Теперь легко разделить переменные и найти

$$v' = \frac{g}{R} \left[ ut^2 - \frac{gt^3}{3} - \frac{um_0^2}{\mu^2} \left( 1 - \frac{\mu t}{m_0} \right)^2 \ln \left( 1 - \frac{\mu t}{m_0} \right) - \right. \\ \left. - \frac{um_0 t}{2\mu} \left( 2 - \frac{\mu t}{m_0} \right) \right]; \quad (8.17)$$

$$z' = \frac{g}{R} \left\{ \frac{ut^3}{3} - \frac{gt^4}{12} + \frac{um_0^3}{3\mu^3} \left( 1 - \frac{\mu t}{m_0} \right)^3 \left[ \ln \left( 1 - \frac{\mu t}{m_0} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \right] + \frac{um_0^3}{9\mu^3} - \frac{um_0 t^2}{2\mu} \left( 1 - \frac{\mu t}{3m_0} \right) \right\}. \quad (8.18)$$

Подставляя заданные численные значения, получаем  $v' = -0,4$  м/с,  $z' = 0,18$  м. Видим, что применение метода последовательных приближений в этой ситуации вполне оправдано.

Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 8.3.** Найти высоту подъема ракеты в однородном поле тяжести, если масса ракеты изменяется по экспоненциальному закону  $m = m_0 e^{-kt}$ . Скорость истечения газов  $u$  считать постоянной. Известно время  $\tau$  работы двигателя ракеты.



**Задача 8.4.** Определить скорость ракеты на активном участке траектории на высоте  $h$  в неоднородном поле тяготения Земли, если масса ракеты изменяется по экспоненциальному закону  $m = m_0 e^{-kt}$ .

## § 9. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Мы уже рассмотрели несколько задач, связанных с изучением колебательного движения (см. задачи 3.4; 5.3; 5.4; 5.7; 6.3).

В случае изучения свободных колебаний можно искать решение разными способами. Наиболее часто используются следующие два. В первом мы рассматриваем силы, действующие в системе, и записываем уравнение движения. Если рассматривать малые колебания в системе с одной степенью свободы, то уравнение движения приводится к каноническому виду:  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , а решение этого уравнения записывается в виде закона гармонических колебаний:  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Произвольные постоянные интегрирования  $A$  и  $\varphi$  определяются из начальных условий, которые должны быть известны из условия задачи. Для определения циклической частоты колебаний достаточно записать уравнение колебаний в каноническом виде, а затем выписать коэффициент при  $x$  и извлечь квадратный корень.

Отметим, что для успешной работы этим методом нужно ясно представлять себе положение равновесия системы, а малые отклонения от известного положения равновесия принять в качестве искомой функции.

Иногда положение равновесия системы заранее не известно, и тогда необходимо его сначала определить. Мы знаем, что в устойчивом положении равновесия потенциальная энергия системы минимальна. Поэтому всегда можно определить положение равновесия системы, исследуя ее потенциальную энергию на минимум.

Второй широко используемый подход к решению задач о собственных колебаниях состоит в записи закона сохранения механической энергии при таких колебаниях. Если записать при малых колебаниях сохраняющуюся механическую энергию в системе с одной степенью свободы в виде  $ax^2 + bx^2 + E_0$ , то квад-

рат частоты колебаний равен  $b/a$ , в чем легко убедиться, получая дифференцированием уравнение движения из закона сохранения энергии.

**Задача 9.1.** Точечное тело массы  $m$  может перемещаться по горизонтальной прямой без трения под действием прикрепленной к нему пружины, второй конец которой закреплен в неподвижной точке  $O$  на расстоянии  $l$  от прямой (рис. 9.1). Пружина имеет жесткость  $k$  и длину в нерастянутом состоянии  $l_0$ . Найти частоту малых колебаний тела: 1) при  $l > l_0$ , 2) при  $l < l_0$ , 3) при  $l = l_0$ . При каких смещениях колебания можно считать малыми?

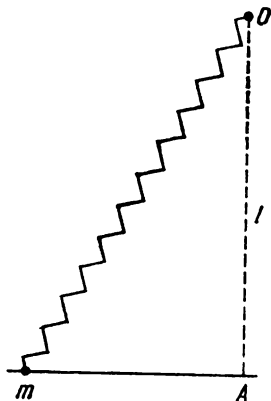


Рис. 9.1

**Решение.** При  $l > l_0$  положению равновесия соответствует растянутое состояние пружины, расположенной вертикально. Если точка  $m$  при колебаниях сместилась из положения равновесия  $A$  на малое расстояние  $x$ , то ее кинетическая энергия в этот момент равна  $m\dot{x}^2/2$ , а потенциальная энергия системы состоит из энергии растянутой пружины:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} k (\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)^2. \quad (9.1)$$

(Если бы мы не знали, какому  $x$  соответствует положение равновесия, то могли бы его определить, решая уравнение  $dE_{\text{п}}/dx = 0$ . Единственное решение этого уравнения имеет вид  $x = 0$ .) Эту энергию надо представить в виде разложения в ряд Тейлора при малых  $x$ :

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} k \left( l^2 + x^2 - \frac{l_0^2 x^2}{l} - 2l_0 l + \frac{l_0^4 x^4}{4l^3} + \dots + l_0^2 \right). \quad (9.2)$$

С точностью до членов более высокого порядка, чем  $x^2$ , энергия системы равна

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \left( 1 - \frac{l_0^2}{l} \right) x^2 + \text{const.} \quad (9.3)$$

Следовательно, частота колебаний в этом случае  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)}$ . Обратим внимание на то, что при  $l \rightarrow l_0$  получаем  $\omega \rightarrow 0$ , а в пределе колебания как бы отсутствуют. Как объяснить этот результат?

Выясним еще, при каких смещениях  $x$  колебания можно считать малыми. Для этого отброшенные члены ряда Тейлора (9.2) должны быть много меньше, чем учтенные. Сравнивая члены второго и четвертого порядков по малым  $x$ , находим, что должно быть

$$l_0 x^4 / 4l^3 \ll (1 - l_0/l) x^2, \quad (9.4)$$

т. е. колебания можно считать малыми при  $x^2 \ll 4l^2(l/l_0 - 1)$ .

Рассмотрим теперь случай  $l < l_0$ , когда в вертикальном положении пружина сжата. Вертикальное положение пружины соответствует неустойчивому равновесию, движение вблизи которого не может быть колебательным. Устойчивому положению равновесия соответствует такое положение точки  $m$ , при котором пружина становится нерастянутой. Легко видеть, что при смещении точки  $m$  в любую сторону возникает сила со стороны пружины, возвращающая точку  $m$  в исходное положение. Координата точки устойчивого равновесия равна  $x_0 = \sqrt{l_0^2 - l^2}$ . Отметим, что ввиду очевидной симметрии системы существуют два совершенно равноправных положения равновесия, расположенные симметрично относительно начала отсчета  $A$  (см. рис. 9.1). (И здесь положение равновесия можно найти, решая уравнение  $dE_{\text{п}}/dx = 0$ .)

Потенциальную энергию системы (9.1) теперь надо представить в виде разложения в ряд Тейлора по малым смещениям  $y = |x - x_0|$  из положения равновесия, т. е. разложение в ряд теперь следует выполнить в точке  $x_0$ . Находим, учитывая лишь квадратичные члены,

$$E_{\text{п}} = -\frac{k}{2} \left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right) y^2. \quad (9.5)$$

Следовательно, частота колебаний равна в этом случае  $\omega = \sqrt{(k/m) \left(1 - l^2/l_0^2\right)}$ . И здесь при  $l \rightarrow l_0$  колебания «пропадают».

Рассмотрим теперь ситуацию при  $l=l_0$ , когда в вертикальном положении пружина не растянута и не сжата. Очевидно, что если отклонить точку  $m$  в любую сторону, то за счет растяжения пружины появится возвращающая сила. Следовательно, точка  $A$  в данном случае есть положение устойчивого равновесия. Представим теперь потенциальную энергию системы в виде разложения в ряд Тейлора в точке  $x=0$ . Видим, что член, пропорциональный  $x^2$  в (9.2), обращается в нуль, а первый отличный от нуля член ряда пропорционален  $x^4$ . Мы приходим к выводу, что в данном случае колебания перестают быть гармоническими. Сразу становится ясно, почему не было предельного перехода к этому случаю из предыдущих двух: здесь нет непрерывного перехода без изменения качественной стороны движения. Поэтому при  $l \rightarrow l_0$  нельзя пользоваться приближением гармонических колебаний, а надо обязательно учитывать вклад нелинейности.

Полная энергия системы при малых колебаниях представляется в виде

$$m\dot{x}^2/2 + kx^4/8l^2 = E. \quad (9.6)$$

Максимальное смещение из положения равновесия при фиксированной энергии колебаний  $E$  равно

$$x_{\max} = (8El^2/k)^{1/4}. \quad (9.7)$$

Для определения частоты колебаний надо вычислить время движения точки от положения равновесия до  $x_{\max}$ . Это время равно четверти периода колебаний.

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$T = 4 \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4/x_{\max}^4}}. \quad (9.8)$$

Вводя переменную  $z = x/x_{\max}$ , получаем

$$T = 4 \sqrt{\frac{2m^2 l^2}{kE}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}. \quad (9.9)$$

Интеграл справа есть просто число  $I$  (его значение равно приблизительно 1,4). Период (и частота) колебаний зависит от амплитуды и других параметров системы:

$$T = 16 \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{l}{x_{\max}} I. \quad (9.10)$$

**Задача 9.2.** Четыре стержня длины  $l$  и пренебрежимо малой массы шарнирно соединены с массами  $m$ , как показано на рис. 9.2 (центробежный регулятор). Система вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Массы  $m$  слегка выводят из положения равновесия и отпускают. Найти частоту малых колебаний системы.

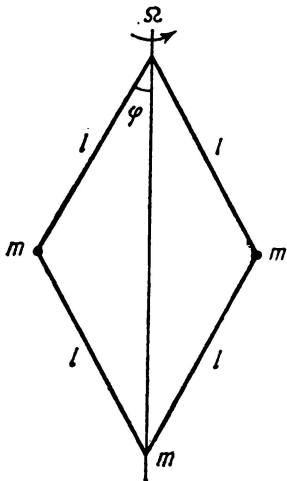


Рис. 9.2

**Решение.** По условию вращение происходит с постоянной угловой скоростью. Поэтому выберем неинерциальную систему координат, равномерно вращающуюся с той же угловой скоростью  $\Omega$ . В этой системе масса  $m$ , находящаяся на оси вращения, движется вверх и вниз, а две другие массы колеблются в одной фиксированной плоскости. Пусть  $\varphi$  —

угол между стержнем и осью вращения. Тогда кинетическую энергию системы можно записать в виде

$$E_k = ml^2 (1 + 2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2. \quad (9.11)$$

Потенциальная энергия складывается из энергии в поле тяжести и энергии, запасенной за счет работы сил инерции:

$$E_{\pi} = -ml^2 \left( \frac{4g}{l} \cos \varphi + \Omega^2 \sin^2 \varphi \right). \quad (9.12)$$

Положения равновесия системы определим из условия  $dE_{\pi}/d\varphi = 0$ , из которого находим два решения: а)  $\sin \varphi_0 = 0$  и б)  $\cos \varphi_0 = \Omega_0^2/\Omega^2$ , где  $\Omega_0^2 = 2g/l$ . Исследуя знак второй производной, легко установить, что при  $\Omega_0 < \Omega$  первое решение соответствует неустойчивому равновесию, а второе — устойчивому. Поэтому разложение энергии в ряд Тейлора следует выполнить вблизи точки  $\varphi_0$ , соответствующей решению б). Пусть  $\theta = |\varphi - \varphi_0|$ . Тогда в приближении линейных колебаний

$$E_k = ml^2 \dot{\theta}^2 (3 - 2\Omega_0^4/\Omega^4), \quad (9.13)$$

$$E_{\pi} = 2ml^2 (\Omega^2 - \Omega_0^4 / \Omega^2) \theta^2, \quad (9.14)$$

откуда частота малых колебаний

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}}. \quad (9.15)$$

Если  $\Omega_0 > \Omega$ , то положение равновесия  $\varphi_0 = 0$  оказывается устойчивым и колебания возможны только с соударениями масс  $m$ . Если, например, эти массы представляют собой маленькие упругие шарики, то вблизи  $\varphi = 0$   $E_{\kappa} = ml^2 \dot{\varphi}^2$ ,  $E_{\pi} = ml^2 (\Omega_0^2 - \Omega^2) \varphi^2$  и

$$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (9.16)$$

**Задача 9.3.** Стержень маятника соединен с пружиной, как показано на рис. 9.3. В ненапряженном состоянии пружина занимает положение (1); к пружине нужно приложить силу  $F_0$ , направленную по вертикали, чтобы привести ее в положение (2), соответствующее равновесию маятника ( $\varphi = 0$ ). Жесткость пружины —  $k$ , массой стержня можно пренебречь. Это устройство регулируется так, что в уравнении движения  $\ddot{\varphi} = f(\varphi) = -\beta\varphi + \dots$  первый из отброшенных членов имеет порядок  $\varphi^5$ . При каком соотношении между параметрами  $m$ ,  $l$ ,  $a$ ,  $F_0$  и  $k$  это условие выполняется? Чему равен при этом период колебаний? Найти период колебаний с учетом поправочного члена  $\sim \varphi^5$ . Насколько улучшается изохронность такого маятника по сравнению с обычным математическим маятником?

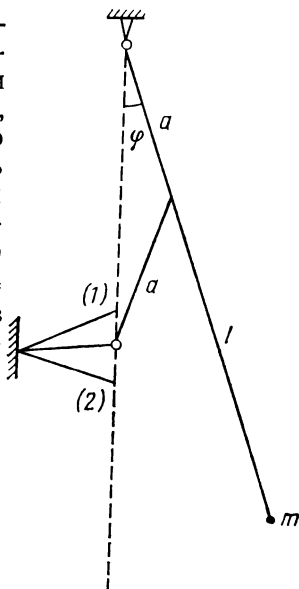


Рис. 9.3

**Решение.** Ответы на поставленные вопросы можно получить из анализа кинетической и потенциальной энергий системы:

$$E_{\kappa} = ml^2 \dot{\varphi}^2 / 2, \quad (9.17)$$

$$E_n = mgl(1 - \cos \varphi) + 1/2k(\Delta l)^2, \quad (9.18)$$

где удлинение  $\Delta l$  пружины из ненапряженного состояния равно

$$\Delta l = 2a \cos \varphi - (2a - F_0/k). \quad (9.19)$$

Потенциальную энергию представим в виде разложения в ряд Тейлора:

$$E_n = \frac{E_0^2}{2k} + \frac{1}{2}(mgl - 2aF_0)\varphi^2 + \frac{1}{4!}(-mgl + 2aF_0 + 12a^2k)\varphi^4 + (mgl - 2aF_0 - 60a^2k)\varphi^6/6! + \dots \quad (9.20)$$

Из (9.20) ясно, что функция  $f(\varphi)$ , о которой говорится в условии задачи, равна

$$f(\varphi) = -\frac{1}{ml^2} \left[ (mgl - 2aF_0)\varphi + \frac{1}{6}(-mgl + 2aF_0 + 12a^2k)\varphi^3 + \frac{1}{120}(mgl - 2aF_0 - 60a^2k)\varphi^5 + \dots \right]. \quad (9.21)$$

Первый из отброшенных в линейном приближении членов будет иметь порядок  $\varphi^5$ , если коэффициент при  $\varphi^3$  равен нулю:

$$2aF_0 + 12a^2k - mgl = 0. \quad (9.22)$$

При этом период колебаний

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{1}{\sqrt{1 - 2aF_0/mgl}}}. \quad (9.23)$$

С учетом условия (9.22) и поправочного члена  $\varphi^5$  уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \frac{2}{5} \frac{a^2 k}{ml^2} \varphi^5 = 0, \quad (9.24)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ . Вычислим период колебаний как учетверенное время движения от положения равновесия  $\varphi = 0$  до достижения максимального отклонения  $\varphi_0$ . Для этого уравнение (9.24) умножим на  $\dot{\varphi}$  и запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_0^2 \varphi^2}{2} - \frac{1}{15} \frac{a^2 k}{ml^2} \varphi^6 \right) = 0, \quad (9.25)$$

откуда с учетом условия  $\dot{\varphi} = 0$  при  $\varphi = \varphi_0$  находим

$$\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 (\varphi_0^2 - \varphi^2) - \frac{2}{15} \frac{a^2 k}{ml^2} (\varphi_0^6 - \varphi^6). \quad (9.26)$$

Извлекая квадратный корень и разделяя переменные, проинтегрируем это уравнение в пределах  $(0, T/4)$  по времени и  $(0, \varphi_0)$  по углу  $\varphi$ . Вычисляя полученные интегралы, находим ответ:

$$T = T_0(1 + \varphi_0^4/96). \quad (9.27)$$

При отклонениях маятника от положения равновесия на угол  $30^\circ$  увеличение периода за счет нелинейности составляет всего  $0,08\%$ , тогда как для простого маятника (см. задачу 3.4) период увеличивается на  $1,7\%$ . При отклонениях на угол  $60^\circ$  увеличение периода равно  $1,3\%$ , а для простого маятника —  $6,2\%$ .

**Задача 9.4.** Математический маятник в виде шарика небольших размеров на конце длинной невесомой нити колеблется в жидкости. Найти частоту малых колебаний. Трением пренебречь.

**Решение.** Рассматривая движение в данной системе, необходимо обратить внимание на встречное движение жидкости, которая перетекает на освобождаемое движущимся шариком место. Конечно, движение жидкости имеет сложный характер, описать его без использования сложной математической техники невозможно. Поэтому для простоты можно моделировать движение жидкости как встречного движения шарика из жидкости. Такой подход позволяет найти простое решение, которое, понятно, будет приближенным, но не очень далеким от истинного.

Записывая кинетическую и потенциальную энергию системы из двух указанных шариков, используем закон сохранения механической энергии:

$$ml^2\dot{\varphi}^2 + m_1l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\varphi^2 - m_1gl\varphi^2 = \text{const}, \quad (9.28)$$

где  $m$ ,  $m_1$  — массы маятника и шарика из жидкости. Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m - m_1}{m + m_1}}. \quad (9.29)$$

Отношение масс можно заменить отношением плотностей. Видим, что учет потенциальной энергии шарика из жидкости эквивалентен учету силы Архимеда при использовании уравнения движения. Кинетическая энергия шарика из жидкости проявляется в виде кажущегося увеличения массы маятника.



**Задача 9.5.** Рассмотреть колебания груза массы  $m$  на пружине жесткости  $k$ , когда пружина в начальный момент оттягивается за середину. Сравнить с колебаниями груза в обычном случае, когда в начальный момент растягивается вся пружина.

**Решение.** Если масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с  $m$ , то вначале возникают быстрые колебания пружины, после затухания которых пружина окажется растянутой равномерно, а груз почти не стронется с места. (Если бы масса пружины точно равнялась нулю, то переход к равномерному растяжению произошел бы безынерционно.) Поэтому колебания будут происходить практически так же, как и в обычном случае.

Остается еще вопрос о превращениях энергии в системе. Легко видеть, что при равномерном растяжении пружины начальный запас энергии в ней существенно меньше, чем при неравномерном растяжении. При быстрых колебаниях пружины «лишняя» энергия уходит из системы через точку подвеса пружины.

При изучении свободных колебаний в более сложных системах иногда удается использовать и другие законы сохранения.

**Задача 9.6.** На гладких рельсах расположен брусок массы  $M$ , с которым соединен математический маятник, состоящий из легкого стержня длины  $l$  и точечной массы  $m$  на его конце (рис. 9.4). Маятник может вращаться вокруг оси, проходящей через центр бруска. Найти частоту малых колебаний такой системы.

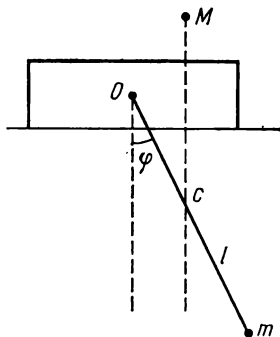


Рис. 9.4

**Решение.** В рассматриваемой системе кроме закона сохранения механической энергии выполняется еще закон сохранения проекции суммарного импульса на горизонтальное направление. Поэтому центр масс системы по горизонтали не движется. В линейном приближении центр масс системы не смещается и по вертикали,

поэтому можно определить частоту малых колебаний системы, рассматривая часть математического маятника, расположенную ниже центра масс (точка  $C$  на рис. 9.4). Поскольку длина такого маятника равна  $lM/(M+m)$ , находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{M+m}{M}}. \quad (9.30)$$

Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 9.7.** Определить форму кривой, при качании вдоль которой в поле тяжести частота колебаний не зависит от амплитуды. Колебания считать малыми.

**Задача 9.8.** На проволочную окружность радиуса  $R$ , плоскость которой горизонтальна, надеты два одинаковых колечка, соединенные пружиной жесткости  $k$ , имеющей в ненапряженном состоянии длину  $l_0$ . Найти закон движения каждого колечка, приняв их за материальные точки массы  $m$ . В начальный момент колечки неподвижны, а расстояние между ними равно  $l > l_0$ .

## § 10. ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Уравнение затухающих колебаний обычно приводится к каноническому виду:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (10.1)$$

где  $\delta > 0$  — коэффициент затухания,  $\omega_0$  — собственная частота. Решение уравнения (10.1):

$$x = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (10.2)$$

существует при  $\delta < \omega_0$ . В (10.2) произвольные постоянные интегрирования  $A$  и  $\varphi_0$  определяются начальными условиями, а частота колебаний равна  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

**Задача 10.1.** Физический маятник жестко скреплен со втулкой, насаженной на равномерно вращающийся вал (рис. 10.1). Найти закон движения маятника при малых колебаниях. При каких условиях размах колебаний начинает нарастать?

**Решение.** Вращающийся вал оказывает влияние на движение физического маятника за счет момента

сил сухого трения  $M$ , зависящего от относительной скорости вала и маятника (рис. 10.2). Пусть угловая скорость вращения вала равна  $\Omega$ , а угловая скорость движения маятника равна  $\dot{\varphi}$ . При малых колебаниях функцию  $M(\Omega - \dot{\varphi})$  можно разложить в ряд по степеням  $\dot{\varphi}$ :

$$M(\Omega - \dot{\varphi}) = M(\Omega) - M'(\Omega)\dot{\varphi} + \dots \quad (10.3)$$

В линейном приближении уравнение движения маятника имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = [-2\delta - M'(\Omega)]\dot{\varphi} - \omega_0^2\varphi + M(\Omega), \quad (10.4)$$

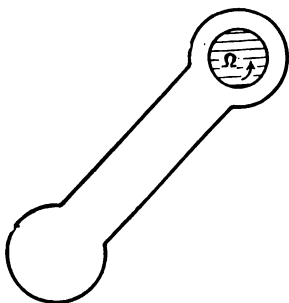


Рис. 10.1

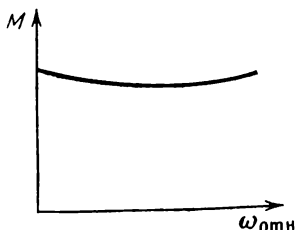


Рис. 10.2

где  $J$  — момент инерции маятника,  $\delta$  — обычный коэффициент затухания. Характер колебаний определяется знаком выражения, стоящего в квадратных скобках: если оно отрицательное, то колебания затухающие, если положительное — то нарастающие.

Итак, нарастающие колебания возможны лишь при сравнительно небольших относительных скоростях, когда момент сил трения убывает с ростом относительной скорости (см. рис. 10.2). При этом убывание должно быть достаточно быстрым, чтобы выполнялось неравенство  $M'(\Omega) < -2\delta$ .

В других случаях маятник совершает затухающие колебания около положения равновесия, смещенного на угол  $M(\Omega)/\omega_0^2$  от вертикали в сторону вращения вала. Закон движения имеет вид

$$\varphi = \frac{M(\Omega)}{\omega_0^2} + A e^{-(\delta + M'(\Omega)/2)t} \cos(\omega t + \psi), \quad (10.5)$$

где постоянные  $A$  и  $\psi$  определяются граничными условиями, а  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - [\delta + M'(\Omega)/2]^2}$ .

**Задача 10.2.** Рассчитать скорость диссипации энергии затухающего гармонического осциллятора для случая слабого затухания.

**Решение.** Энергию можно записать в виде  $E = kA^2/2$ , где при затухающих колебаниях  $A = A_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$ . Скорость изменения энергии равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\delta t} (\omega \sin 2\omega t + \delta \cos^2 \omega t). \quad (10.6)$$

Среднее значение ее за период и есть искомая величина:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dE}{dt} dt. \quad (10.7)$$

При слабом затухании множитель  $e^{-2\delta t}$  меняется медленно и его можно вынести за знак интеграла. Находим

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{4} k \delta A_0^2 e^{-2\delta t}. \quad (10.8)$$

При изучении вынужденных колебаний под действием гармонической силы  $F = F_0 \cos pt$  уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos pt, \quad (10.9)$$

где  $f = F_0/m$ . Установившиеся колебания происходят по закону

$$x = B \cos(pt + \varphi), \quad (10.10)$$

где

$$B = f / \sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4p^2 \delta^2}, \quad (10.11)$$

$$\varphi = \arctg \frac{2p\delta}{\omega_0^2 - p^2}. \quad (10.12)$$

Если на осциллятор действует внешняя сила иного вида, то подход к решению задачи зависит от характера действующей силы.

Уравнение типа (10.1), в котором правая часть, не зависящая от искомой функции и ее производных, равна нулю, называется однородным уравнением. Уравнение типа (10.9) с отличной от нуля правой частью называется неоднородным уравнением. Любое

конкретное полностью определенное решение уравнения называется частным решением. Решение, зависящее от произвольных постоянных интегрирования, называется общим решением уравнения, если число входящих в него произвольных постоянных равно порядку старшей производной в уравнении. При поиске решения уравнения типа (10.9) следует использовать следующую математическую теорему: общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

В задачах на изучение линейных колебаний общее решение однородного уравнения записывается сразу: это есть решение (10.2). Поэтому трудность может представлять лишь нахождение частного решения неоднородного уравнения. Существуют, однако, случаи, когда и частное решение неоднородного уравнения находится легко. К ним относятся уравнения типа (10.9), в правой части которых стоит либо линейная функция от времени, либо гармоническая (как в (10.9)), либо экспоненциальная. В этих случаях частное решение находится в виде функции того же вида: если

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = at + b, \quad (10.13)$$

то

$$x = At + B \quad (10.14)$$

есть частное решение при  $A = a/\omega_0^2$ ,  $B = (b - 2a\delta/\omega_0^2)/\omega_0^2$ ; если

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = ae^{bt}, \quad (10.15)$$

то

$$x = Ae^{bt} \quad (10.16)$$

есть частное решение, причем  $A = a/(b^2 + 2b\delta + \omega_0^2)$ . В случае гармонической правой части уравнение (10.9) имеет частное решение (10.10).

Из сказанного вытекает неудобство представления правой части уравнения в виде ряда Тейлора. Действительно, если в правой части стоит сумма сил, то из-за линейности уравнения можно и решение получить в виде суммы слагаемых, каждое из которых соответствует одному из слагаемых в правой части. Ясно, что найти частные решения для членов ряда Тейлора, начиная с квадратичного, не удастся. Поэто-

му нет смысла представлять правую часть в виде разложения в ряд Тейлора и следует разработать иной подход к решению.

Если на осциллятор воздействует периодическая негармоническая сила, то наиболее часто используется ее представление в виде ряда Фурье — ряда по гармоническим функциям. Использование ряда Фурье является одним из фундаментальных методов теоретического анализа и практических расчетов. Основу подхода составляет математическое утверждение, что любую периодическую кусочно-непрерывную функцию  $f(x)$  можно представить в виде бесконечной суммы:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \omega t, \quad (10.17)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ ,  $T$  — период функции, а коэффициенты  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (10.18)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n \omega t dt, \quad (10.19)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \omega t dt. \quad (10.20)$$

В точках разрыва функции ряд Фурье дает среднее арифметическое из ее значений справа и слева.

Широкое использование ряда Фурье связано с тем обстоятельством, что сразу находится частное решение линейных неоднородных уравнений, если правую часть уравнения представить в виде ряда и использовать формулы типа (10.10) — (10.12) для последовательных слагаемых. Особенно легко выполнить расчеты, если коэффициенты ряда Фурье быстро убывают с ростом их номера. Тогда можно учесть лишь несколько первых членов ряда и получить решение с хорошей точностью. Впрочем, при использовании современных вычислительных средств нередки случаи, когда для достаточно точного расчета какой-либо конкретной задачи суммируют несколько сотен, а иногда и тысяч членов ряда Фурье. Важно, что решение можно получить с любой наперед заданной степенью точности.

Обратимся теперь к задачам, которые помогут лучше уяснить все сказанное выше.

**Задача 10.3.** Найти вынужденные колебания осциллятора, на который действует периодическая сила  $F$  (рис. 10.3), равная нулю в течение полупериода и

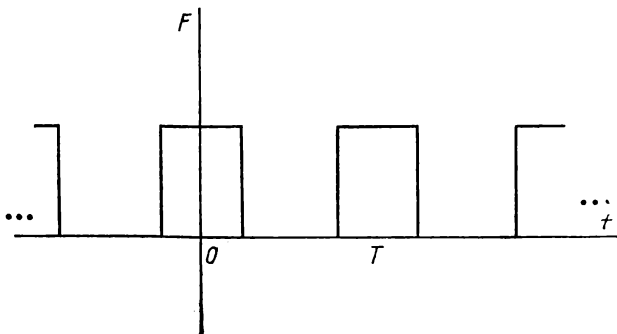


Рис. 10.3

$F_0$  в течение второй половины периода. Пусть осциллятор представляет собой железный шарик массы  $m=50$  г, подвешенный на пружинке жесткости  $k=5$  кг/с<sup>2</sup>. Внешняя сила действует с частотой 50 Гц, при этом  $F_0=0,1$  Н. Логарифмический декремент затухания равен  $\theta=0,01$ .

**Решение.** Начало отсчета времени выберем в момент, соответствующий четверти периода от наступления фазы  $F=F_0$ . Тогда действующая периодическая сила будет четной функцией от времени, и в разложении в ряд Фурье все коэффициенты  $b_n$  будут равны нулю. По формулам (10.18) и (10.19) находим коэффициенты  $a_0$  и  $a_n$ , что позволяет записать заданную функцию в виде ряда Фурье:

$$F = \frac{F_0}{2} + \frac{2F_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)\omega t], \quad (10.21)$$

где положено  $n=2k+1$ , так как отличны от нуля только коэффициенты  $a_n$  с нечетными номерами.

Решение задачи также получаем в виде ряда Фурье:

$$x = \frac{F_0}{2\omega_0^2 m} + \frac{2F_0}{\pi m} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (10.22)$$

где  $\omega_k = (2k + 1)\omega$ ,

$$B_k = \frac{(-1)^k}{(2k + 1) \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\omega_k^2 \delta^2}}, \quad (10.23)$$

$$\varphi_k = \arctg \frac{2\omega_k \delta}{\omega_0^2 - \omega_k^2}, \quad (10.24)$$

а коэффициент затухания  $\delta$  равен  $\theta/T$ .

### Ответы к главе 1

3.5.  $T = \frac{h}{\sqrt{2g(H+h)}} \left[ \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}} \right],$

где  $h = Mg/k$ .

3.6. При  $x < L - \pi R$ :

$$x = \left[ l - \frac{1}{2}(L - \pi R) \right] \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2g}{L}} t + \frac{1}{2}(L - \pi R).$$

3.7.  $\Delta S = (2kv^3 \sin \alpha \sin 2\alpha) / mg^2.$

4.4.  $V = [gR \operatorname{sh}(4\pi k)]^{1/2}.$

5.7.  $\ddot{\alpha} = -(5 \sin \alpha) / 7(R - r).$

5.8.  $\ddot{x} = (mg \sin 2\alpha) / [3(m + M) - 2m \cos^2 \alpha].$

6.4.  $t \approx 0,53 \text{ с}$

6.5. 
$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{R^2 - r^2}{\left(1 + \frac{2m}{M}\right) \left(r^2 + \frac{2m}{M} R^2\right)}.$$

8.3.  $h = \tau^2(ku - g)^2 / 2g.$

8.4.  $V = [2h(ku - g)]^{1/2}.$

9.6. Кривая  $x = R(t + \sin t)$ ,  $y = R(1 - \cos t)$ . Это циклоида с радиусом образующей окружности  $R$ . Колебания происходят с частотой  $\omega = (g/4R)^{1/2}$ .

9.7. Каждое колечко движется по гармоническому закону с частотой  $\omega = (k/2m)^{1/2}$ .



## ГЛАВА 2

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

### § 11. СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД

При рассмотрении систем из большого числа частиц основной задачей является нахождение плотности вероятности состояний системы. Если эта задача решена, то с помощью плотности вероятности устанавливаются средние значения всех макроскопических характеристик системы. Согласно эргодической гипотезе, средние значения по ансамблю совпадают со средними по времени. Поэтому в каждом конкретном случае можно выбрать способ нахождения средних значений.

Проиллюстрируем эти общие утверждения примером. Пусть имеется математический маятник длины  $l$  и массы  $m$ , совершающий малые колебания. Какова вероятность того, что при случайном его наблюдении будет обнаружено, что нить маятника отклонена от вертикали в интервале углов  $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ ? Так поставленный вопрос эквивалентен вопросу об отыскании плотности вероятностей для смещений простого гармонического осциллятора. Какова вероятность того, что при случайном наблюдении будет обнаружено значение угловой скорости в интервале  $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ ?

Для определения плотности вероятности используются главным образом два подхода. Первый состоит в том, что на основании физических соображений и определения вероятности ищется вероятность реализации данного состояния. В нашем примере можно догадаться, что вероятность наблюдать математический маятник в состоянии отклонения от вертикали в интервале углов  $(\alpha, \alpha + d\alpha)$  пропорциональна времени

его движения в этом интервале углов, причем коэффициент пропорциональности есть обратная величина всего времени движения от положения равновесия до амплитудного отклонения  $\alpha_0$ , т. е. четверти периода колебаний:

$$dw = \frac{1}{T/4} dt. \quad (11.1)$$

Если из закона колебаний:  $\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$ , где  $\omega = \sqrt{g/l}$ , перейти в (11.1) от  $dt$  к  $d\alpha$ , то найдем

$$dw = \frac{2}{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}. \quad (11.2)$$

Функция

$$f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \quad (11.3)$$

есть искомая плотность вероятности, с помощью которой можно находить средние по ансамблю значения величин, зависящих от угла отклонения маятника (например, его потенциальной энергии:

$$\langle E_n \rangle = \int_0^{\alpha_0} mgl \frac{\alpha^2}{2} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} d\alpha = \frac{mgl \alpha_0^2}{4} \quad (11.4)$$

Переходя от (11.1) к (11.2), мы уже воспользовались вторым способом нахождения плотности вероятности. Он состоит в следующем. Если плотность вероятности состояний известна как функция некоторых переменных, то получить интересующую нас плотность вероятности по другим переменным, связанным с известными, можно простой заменой переменных. Вторым примером применения этого метода может служить определение плотности вероятности для распределения по угловым скоростям. В случае гармонического осциллятора угловая скорость его движения связана с его координатой соотношением  $= \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2/\omega^2}$ , подставляя которое в (11.2), находим

$$dw = -\frac{2}{\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 \omega^2 - \alpha^2}}, \quad (11.5)$$

откуда искомая плотность вероятности

$$f(\dot{\alpha}) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 \omega^2 - \dot{\alpha}^2}}. \quad (11.6)$$

Знак минус в (11.5) связан с тем, что при увеличении угла отклонения  $\alpha$  скорость движения убывает и  $d\dot{\alpha} < 0$ .

Функцию  $f(\dot{\alpha})$  можно было получить и из (11.1), используя связь угловой скорости и времени:  $\dot{\alpha} = \omega \alpha_0 \cos \omega t$ .

Найденную плотность вероятности можно использовать для расчета среднего по ансамблю значения всех величин, зависящих от скорости (например, кинетической энергии:

$$\langle E_k \rangle = \int_0^{\dot{\alpha}_{\max}} \frac{m l^2 \dot{\alpha}^2}{2} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 \omega^2 - \dot{\alpha}^2}} d\dot{\alpha} = \frac{m l^2 \alpha_0^2}{4}. \quad (11.7)$$

Сравнивая (11.4) с (11.7), видим, что средние значения кинетической и потенциальной энергий осциллятора одинаковы (что и следовало ожидать на основании физических соображений). Легко убедиться прямым расчетом также и в том, что эти средние по ансамблю равны соответствующим средним значениям по времени, например:

$$\langle E_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T m g l \frac{\alpha^2}{2} dt = \frac{m g l \alpha_0^2}{4}. \quad (11.8)$$

Изучая свойства идеального газа как статистической системы, мы используем максвелловское распределение по скоростям. Наиболее полная информация содержится в распределении по проекциям скорости:

$$\frac{dn}{n} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_x dv_y dv_z. \quad (11.9)$$

То же распределение, записанное в сферической системе координат  $(v, \theta, \varphi)$  в пространстве скоростей, имеет вид

$$\frac{dn}{n} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 \sin \theta dv d\theta d\varphi. \quad (11.10)$$

В зависимости от задачи бывает удобнее применять либо (11.9), либо (11.10). В (11.9) определяется доля молекул газа, проекции скорости которых находятся в интервалах  $(v_x, v_x + dv_x)$ ,  $(v_y, v_y + dv_y)$ ,  $(v_z, v_z + dv_z)$ . В (11.10) определяется доля молекул газа, модуль скорости которых имеет значение в интервале  $(v, v + dv)$  и которые летят в направлениях, соответствующих сферическим углам в интервалах  $(\theta, \theta + d\theta)$  и  $(\varphi, \varphi + d\varphi)$ .

Если распределение по каким-либо переменным нас не интересует, то по этим переменным выполняется интегрирование в пределах  $(-\infty, \infty)$  для проекций скорости  $v_x, v_y, v_z$ ; в пределах  $(0, \infty)$  для модуля скорости  $v$  и в пределах  $(0, \pi)$ , и  $(0, 2\pi)$  для сферических углов  $\theta$  и  $\varphi$ . В результате получается распределение по оставшимся переменным. Так, например, если в (11.10) выполнить интегрирование по сферическим углам  $\theta$  и  $\varphi$ , то получим распределение Максвелла для модуля скорости:

$$\frac{dn}{n} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv. \quad (11.11)$$

Решение статистической задачи, как правило, выполняется в два этапа. Сначала считаем, что никакого распределения нет (например, при изучении движения молекул газа считаем, что все они летят с одинаковыми по модулю и по направлению скоростями). Решаем динамическую задачу, соответствующую поставленным вопросам. Тем самым мы находим искомую величину для группы молекул, имеющих с точностью до бесконечно малых добавок произвольную фиксированную скорость. Второй этап — усреднение найденной величины с помощью известной плотности вероятности.

При вычислении средних значений различных физических величин приходится вычислять интегралы вида  $I_n = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^n dx$ . Среди множества способов их вычисления один из самых удобных — это метод дифференцирования по параметру. Зная, что

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (11.12)$$

находим

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial I_0}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}, \quad (11.13)$$

$$I_4 = -\frac{\partial I_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}, \quad (11.14)$$

$$\dots \dots \dots I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}. \quad (11.15)$$

Вычислив

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}, \quad (11.16)$$

находим

$$I_3 = -\partial I_1 / \partial \alpha = 1/2\alpha^2, \quad (11.17)$$

$$I_5 = 1/\alpha^3, \quad (11.18)$$

$$\dots \dots \dots I_{2n+1} = n! / 2\alpha^{n+1}. \quad (11.19)$$

**Задача 11.1.** Имеется сосуд с равновесным газом, подчиняющимся распределению Максвелла. Найти распределение по углам и по модулю скорости молекул, ударяющихся об участок стенки единичной площади за секунду.

**Решение.** В соответствии с общими замечаниями о решении статистических задач сначала считаем, что все молекулы летят с одинаковыми скоростями. Пусть эта скорость направлена под углом  $\theta$  к нормали к выделенной площади стенки, а модуль ее равен  $v$ . Если концентрацию молекул обозначить через  $n$ , то за одну секунду на единицу площади стенки попадут  $nv \cos \theta$  молекул. Таким образом, первый шаг сделан — динамическая задача решена.

Теперь найденную величину нужно усреднить с помощью распределения Максвелла. Если нас интересует распределение ударяющихся частиц по углам  $\theta$ , то при усреднении надо проинтегрировать по «лишним» переменным  $v$  и  $\varphi$  по всей области их изменения:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{n} &= \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\infty} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \left( \frac{2kT}{\pi m} \right)^{1/2} \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Мы определили долю молекул из числа попадающих на единицу площади стенки в единицу времени, которые подлетают к стенке так, что угол между их скоростью и нормалью к стенке лежит в интервале  $(\theta, \theta + d\theta)$ . Из полученного результата ясно, что больше всего подлетает к стенке молекул с направлением скорости вблизи  $45^\circ$ .

Распределение по углу  $\varphi$  остается изотропным, как и исходное максвелловское распределение.

Найдем теперь распределение ударяющихся частиц по модулю скорости  $v$ . Для этого при усреднении найденного динамического решения надо проинтегрировать по переменным  $\theta$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{dn}{n} &= \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-mv^2/2kT} dv. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Если проинтегрировать (11.20) по  $\theta$  в пределах  $(0, \pi/2)$  или (11.21) по  $v$  в пределах  $(0, \infty)$ , то получим полное число молекул, ударяющихся за секунду о единичную площадку:

$$N = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{1}{4} n \langle v \rangle. \quad (11.22)$$

**Задача 11.2.** Имеется сосуд с равновесным максвелловским газом. Определить давление газа на стенку, считая удары молекул о стенку абсолютно упругими.

**Решение.** Пусть все молекулы летят с одинаковыми скоростями  $v$  под углом  $\theta$  к нормали. Тогда за одну секунду на единицу площади стенки попадает  $nv \cos \theta$  молекул, каждая из которых передает стенке импульс  $2mv \cos \theta$ . Следовательно, суммарный передаваемый импульс равен  $2mnv^2 \cos^2 \theta$ . Среднее его значение и есть давление:

$$\begin{aligned} p &= 2mn \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2kT} dv \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= nkT. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Получается, конечно, известный газокинетический результат.

**Задача 11.3.** В сосуде с равновесным максвелловским газом имеется очень маленькое отверстие, через которое молекулы вылетают в вакуум. Найти среднее значение скорости вылетевших молекул и среднее значение их кинетической энергии. Сначала качественно сравнить эти величины с данными для молекул в сосуде.

**Решение.** В задаче 11.1 было получено распределение по скоростям для молекул, подлетающих к стенке сосуда. При этом динамическое решение  $n_0 v \cos \theta$  ( $n_0$  — плотность максвелловского газа) умножалось на распределение Максвелла. При фиксированном угле  $\theta$  за любой промежуток времени стенку достигают молекулы из цилиндра с образующей  $v \cos \theta$ . Чем больше  $v$ , тем больше объем соответствующего цилиндра. Поэтому в ударяющихся о стенку (и пролетающих через отверстие) молекулах доля более энергичных молекул оказывается выше, чем в исходном максвелловском газе. Поэтому мы можем ожидать, что в пучке вылетающих молекул средние значения скорости и энергии молекул будут больше, чем у молекул в сосуде.

Распределение:

$$\frac{dn}{n_0} = v \cos \theta \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 \sin \theta dv d\theta d\varphi \quad (11.24)$$

отличается от плотности вероятности только нормировкой. Для правильной нормировки необходимо найти плотность частиц в пучке:

$$n = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT} dv \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ = \frac{1}{4} n_0 \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (11.25)$$

Теперь легко записать плотность вероятности, т. е. распределение по скоростям в молекулярном пучке:

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{m}{2kT} \right)^2 v^3 e^{-mv^2/2kT} dv \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi. \quad (11.26)$$

Средняя скорость молекул в пучке равна

$$\langle v \rangle = \frac{2}{\pi} \left( \frac{m}{2kT} \right)^2 \int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2kT} dv \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \sqrt{\frac{9kT}{8m}}, \quad (11.27)$$

а среднее значение кинетической энергии молекулы в пучке

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = m \left( \frac{m}{2kT} \right)^2 \int_0^\infty v^5 e^{-mv^2/2kT} dv = 2kT. \quad (11.28)$$

Мы видим, что точный расчет полностью оправдывает предварительные качественные выводы.

**Задача 11.4.** Газ состоит из атомов, которые в неподвижном состоянии излучают свет с длиной волны  $\lambda_0$ . Распределение атомов по скоростям можно считать максвелловским. Найти закон распределения интенсивности излучения, регистрируемой приемником. Температура газа  $T$ , масса одного атома  $m$ .

**Решение.** Направим ось  $z$  вдоль линии, соединяющей приемник с излучателем. При движении атома от приемника со скоростью,  $z$ -компонента которой равна  $v_z$ , вследствие эффекта Доплера приемник регистрирует свет с длиной волны

$$\lambda = \lambda_0 (1 + v_z/c). \quad (11.29)$$

Пусть объем сосуда с газом равен  $V$ , концентрация атомов —  $n$ , а вероятность излучения —  $\kappa$ . Тогда число излучающих в единицу времени атомов, проекции скорости которых на ось  $z$  находятся в интервале  $(v_z, v_z + dv_z)$ , равно

$$dn = \kappa n V \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z. \quad (11.30)$$

Выражая  $dv_z$  через  $d\lambda$  из (11.29) и обозначая через  $\alpha$  интенсивность излучения одного атома, находим распределение регистрируемой интенсивности:

$$dI = I_0 e^{-(\lambda - \lambda_0)^2/\delta^2} d\lambda, \quad (11.31)$$

где  $I_0 = \alpha \kappa n V \sqrt{m/2\pi kT}$  — интенсивность в центре линии, а  $\delta = \frac{\lambda_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$  называется доплеровской шириной линии. Интенсивность уменьшается в  $e$  раз при регистрации длины волны, отличающейся от  $\lambda_0$  на  $\pm \delta$ .

**Задача 11.5.** В стенке прямоугольного сосуда, содержащего пары ртути при температуре  $T$ , имеется небольшое отверстие площади  $S$ . На расстоянии  $h$



над отверстием параллельно стенке сосуда расположена металлическая собирающая пластина (рис. 11.1), охлаждаемая до такой температуры, что попадающие на нее атомы ртути конденсируются. Как меняется плотность ртути на собирающей пластине в зависи-

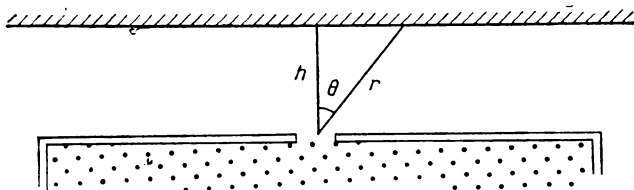


Рис. 11.1

мости от времени? Газ в сосуде можно считать равновесным, подчиняющимся распределению Максвелла; концентрация атомов ртути в сосуде равна  $n$ .

**Решение.** В соответствии с общими замечаниями в начале параграфа считаем, что все атомы имеют одинаковую скорость. Пусть модуль скорости равен  $v$ , а ее направление составляет угол  $\theta$  с нормалью к плоскости отверстия. Тогда за время  $t$  на собирающую пластину попадут все атомы, находящиеся в объеме цилиндра с площадью основания  $S$  и с образующей  $vt - r$ , где  $r = h / \cos \theta$  — расстояние от отверстия до точки попадания атома на собирающую пластину, т. е.  $nS(vt - r) \cos \theta$  атомов.

Таким образом, решена динамическая задача, соответствующая данной статистической задаче. Теперь необходимо усреднить полученный результат, используя распределение Максвелла. Находим

$$dn(t) = n S \cos \theta d\Omega \int_{r/t}^{\infty} (vt - r) \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^3 dv, \quad (11.32)$$

где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  — элемент телесного угла, в котором рассматривается поток частиц. Нижний предел в интеграле соответствует минимальной скорости, при которой атомы долетают до собирающей пластины к моменту времени  $t$ . Если не рассматривать слишком маленькие времена  $t$ , то не будет большой ошибки при замене нижнего предела в интеграле на нуль.

В этом случае

$$dn(t) = n S \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} (\langle v \rangle t - r), \quad (11.33)$$

где  $\langle v \rangle = (8kT/\pi m)^{1/2}$  — среднее значение скорости. Учитывая, что телесный угол  $d\Omega$  вырезает на собирающей пластине площадку  $d\sigma = r^2 d\Omega / \cos \theta$ , находим плотность осевших атомов к моменту времени  $t$ :

$$\frac{dM}{d\sigma} = \frac{mn S \cos^4 \theta}{h^2} \left( \langle v \rangle t - \frac{h}{\cos \theta} \right). \quad (11.34)$$

Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 11.6.** В тонкостенном сосуде, помещенном в вакууме, имеется очень малое отверстие, на которое извне направляется параллельный пучок одноатомных молекул, летящих с одинаковой скоростью  $v_0$  перпендикулярно к площади отверстия. Концентрация молекул в пучке равна  $n_0$ . Найти концентрацию молекул и температуру газа  $T$  в сосуде в установившемся равновесном состоянии.

**Задача 11.7.** В тонкостенном сосуде объема  $V_0$ , стенки которого поддерживаются при постоянной температуре, находится идеальный газ, подчиняющийся распределению Максвелла. Сосуд помещен в вакуум. За какое время давление в сосуде уменьшится вдвое, если в его стенке сделать малое отверстие площади  $S$ ?

## § 12. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД

При использовании термодинамических методов расчета очень важную роль играет знакомство с основными термодинамическими функциями, т. е. с основными термодинамическими потенциалами. Поэтому, прежде чем приступить к решению задач данного раздела, рекомендуем внимательно изучить по учебнику определения термодинамических потенциалов и их соответствие выбору независимых переменных для описания системы. Некоторые наиболее важные определения и соотношения мы здесь напомним.

Для характеристики термодинамической системы прежде всего используются давление  $p$ , объем  $V$ , температура  $T$  и энтропия  $S$ . Если нет необходимо-

сти еще и в других переменных, то из названных четырех выбирают две в качестве независимых, причем одну из набора  $(p, V)$ , другую из набора  $(S, T)$ . Остальные две переменные становятся при этом функциями состояния от двух выбранных переменных.

Если в качестве независимых переменных взять  $S$  и  $V$ , то удобным для расчетов термодинамическим потенциалом является внутренняя энергия системы, изменение которой, согласно первому началу термодинамики, равно  $dU = TdS - pdV$ . Из этого соотношения видно, что

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T; \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V. \quad (12.1)$$

При  $V = \text{const}$  все подводимое к системе тепло идет на увеличение внутренней энергии, а теплоемкость при этом равна  $c_V = dU/dT$ .

Если в качестве независимых переменных взять  $S$  и  $p$ , то для расчетов удобно использовать энтальпию  $H = U + pV$ , изменение которой, согласно первому началу термодинамики, равно  $dH = TdS + Vdp$ . Отсюда находим

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p. \quad (12.2)$$

При  $p = \text{const}$  имеем  $dQ = dH$ , т. е. все подводимое тепло идет на увеличение энтальпии: при этом теплоемкость

$$c_p = dH/dT.$$

Если за независимые переменные принять  $T$  и  $V$ , то удобным для расчетов термодинамическим потенциалом будет свободная энергия системы  $F = U - TS$ , изменение которой по первому началу термодинамики равно  $dF = -SdT - pdV$ . Из этого соотношения находим

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \quad (12.3)$$

При  $T = \text{const}$  вся работа, производимая над системой, идет на увеличение ее свободной энергии.

При выборе в качестве независимых переменных  $T$  и  $p$  удобно использовать термодинамический потенциал Гиббса  $\Phi = U - TS + pV$ , изменение которого

имеет вид  $d\Phi = -SdT + Vdp$ . При этом

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p = -S; \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T = V; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \quad (12.4)$$

Обычно из условий задачи ясно, какие переменные следует взять в качестве независимых. Тогда остальные переменные становятся функциями, которые находятся согласно (12.1) — (12.4).

**Задача 12.1.** Термически изолированный цилиндрический сосуд разделен легким подвижным поршнем на две части  $A$  и  $B$ , в которых находится по одному молю идеального одноатомного газа. В начальный момент температура газа в объеме  $A$  равна  $T_A = T$ , а в объеме  $B$  —  $T_B = nT$ . Какую полезную работу могла бы совершить система при условии, что передача тепла от одного объема к другому полностью обратима?

**Решение.** Максимальную полезную работу можно рассчитать по разности внутренней энергии в начальном и конечном состояниях:

$$A = U_i - U_f = c_V(T + nT) - 2c_V T_f = c_V[(1+n)T - 2T_f], \quad (12.5)$$

где  $T_f$  — конечная температура системы. Если передача тепла происходит обратимо, а вся система находится в адиабатической оболочке, то ее энтропия остается постоянной. Из этого условия можно определить конечную температуру системы  $T_f$ . Для каждого объема

$$dS = c_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}. \quad (12.6)$$

Откуда находим

$$c_V \ln \frac{T_f^2}{T_A T_B} + R \ln \frac{V_f^2}{V_A V_B} = 0, \quad (12.7)$$

где  $V_f$  — объем, занимаемый каждой частью газа после выполнения всей работы, т. е.  $(V_A + V_B)/2$ ,  $V_A = 2V_f/(1+n)$ ,  $V_B = nV_A$ . Следовательно,

$$T_f^2 = T_A T_B [(1+n)^2/4n]^{-R/c_V}. \quad (12.8)$$

Учитывая, что для одноатомного газа  $c_V = 3R/2$ , на-

ходим

$$T_f^2 = nT^2[(1+n)^2/4n]^{-2/3}, \quad (12.9)$$

откуда, используя (2.5), получаем окончательный ответ:

$$A = \frac{3}{2} RT \left[ 1 + n - \frac{2\sqrt[3]{4} n^{5/6}}{(1+n)^{2/3}} \right]. \quad (12.10)$$

**Задача 12.2.** Один грамм воды при температуре  $20^\circ$  выдавливается давлением  $10^4$  атм через пористую пробку в сосуд, в котором поддерживается атмосферное давление. Сколько воды превратится при этом в пар?

**Решение.** Данный процесс представляет собой дросселирование, при котором сохраняется энтальпия системы. Вначале

$$H_i = U_i + p_i V, \quad (12.11)$$

где  $V$  — объем воды,  $p_i$  — выдавливающее давление. Если в пар превращается масса  $m$  воды, то энтальпия в конечном состоянии равна

$$H_f = U_i + c(T_f - T_i) + p_f V + m\lambda, \quad (12.12)$$

где  $c$  — удельная теплоемкость воды,  $T_f = 100^\circ \text{C}$  — точка кипения воды,  $\lambda$  — удельная теплота парообразования воды. Отсюда

$$m = \frac{1}{\lambda} [(p_f - p_i)V - c(T_f - T_i)]. \quad (12.13)$$

Подставляя численные значения, находим  $m \approx 0,3$  г.

**Задача 12.3.** Цикл Карно выполняется с водой в качестве рабочего вещества, причем температура нагревателя равна  $6^\circ \text{C}$ , температура холодильника  $2^\circ \text{C}$ . Показать, что при таком условии тепловая машина забирает теплоту и от нагревателя, и от холодильника, целиком превращая ее в работу, что невозможно. Объяснить противоречие со вторым началом термодинамики.

**Решение.** Коэффициент теплового расширения  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$  обычно положителен, т. е. при нагревании при постоянном давлении все тела обычно расширяются. В исключительных случаях коэффициент

теплового расширения может быть отрицательным. В частности, такая ситуация наблюдается у воды при температурах ниже  $4^{\circ}\text{C}$ .

Чтобы установить направление передачи тепла при изотермическом процессе, воспользуемся (2.4) и определением  $dS = dQ/T$ . Находим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_T. \quad (12.14)$$

В обычной ситуации при  $\alpha > 0$  теплота изотермического сжатия отрицательна, т. е. при изотермическом сжатии необходимо отводить тепло от системы, а иначе система будет нагреваться. Поэтому в цикле Карно на изотерме с температурой  $6^{\circ}\text{C}$  при расширении рабочее тело (вода) поглощает тепло.

На изотерме при температуре  $2^{\circ}\text{C}$  происходит сжатие, а так как в этом случае  $\alpha < 0$ , этот процесс сопровождается поглощением тепла.

Итак, приходим к выводу, что при выполнении указанного цикла Карно происходит только поглощение теплоты и превращение ее в работу, что противоречит второму началу термодинамики.

Для выяснения полученного противоречия рассмотрим детальнее адиабатические участки цикла Карно. Попробуем изобразить весь цикл на диаграмме ( $VT$ ).

Изотермические участки цикла будут иметь вид вертикальных отрезков. Как будет выглядеть кривая, их соединяющая? Установим направление касательной к этой кривой, т. е. найдем  $(\partial V/\partial T)_S$ . Для этого используем переменные  $V$ ,  $T$  и запишем первое начало термодинамики:

$$dS = \frac{1}{T_S} (dU + p dV), \quad (12.15)$$

где

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV. \quad (12.16)$$

Отметим, что  $(dU/dT)_V = c_V$ . Следовательно,

$$dS = \frac{1}{T} \left[ c_V dT + \left( p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right) dV \right]. \quad (12.17)$$

Из соотношения  $dU = TdS - pdV$  заключаем, что

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p. \quad (12.18)$$

Используя теперь (12.3), находим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \quad (12.19)$$

Из (12.17) при  $dS=0$  с помощью (12.19) получаем

$$c_V dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = 0, \quad (12.20)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = - \frac{c_V}{T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}. \quad (12.21)$$

Используя тождество

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1, \quad (12.22)$$

окончательно находим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = \frac{c_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p} = - \frac{c_V \kappa}{T \alpha}, \quad (12.23)$$

где  $\kappa = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$  — изотермическая сжимаемость.

При движении к температуре  $4^\circ\text{C}$  адиабата на плоскости  $(V, T)$  асимптотически приближается к соответствующей вертикали, причем в области выше  $4^\circ\text{C}$   $\alpha > 0$  и кривая движется вниз, а при температурах меньше  $4^\circ\text{C}$   $\alpha < 0$  и кривая движется вверх. Отсюда видно, что цикл Карно не может быть осуществим как замкнутый цикл.

Задача для самостоятельного решения.

**Задача 12.4.** Теплоизолированный сосуд наполнен газообразным гелием при температуре  $T_0 = 10\text{ K}$  (выше критической точки). Газ медленно вытекает через капиллярную трубку до тех пор, пока давление не станет равным  $p_1 = 1\text{ атм}$ , а температура  $T_1 = 4,2\text{ K}$  (точка кипения гелия при нормальном давлении). Найти начальное давление газа в сосуде  $P$ , если в конце процесса сосуд полностью дополнен жидким гелием. Молярная теплота испарения гелия при  $4,2\text{ K}$  равна  $q = 20\text{ кал/моль}$ . Газообразный гелий считать идеальным газом.

### § 13. ЭЛЕКТРОННЫЙ И ФОТОННЫЙ ГАЗЫ

При изучении электронного и фотонного газов применяются все методы, разобранные в двух предыдущих параграфах, но используются распределения Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна. Электронный газ называют вырожденным, если в тепловом движении участвуют только электроны, находящиеся вблизи уровня Ферми. Для вырожденного электронного газа (при  $T \ll T_F$ )  $\exp[(\epsilon - \mu)/(kT)] \ll 1$ . В невырожденном газе справедливо обратное неравенство.

**Задача 13.1.** Найти число ударов за секунду от  $1 \text{ см}^2$  стенки сосуда, содержащего вырожденный электронный газ.

**Решение.** Поступаем аналогично случаю сосуда с максвелловским газом, только применяем другое распределение. Если бы скорости всех электронов были одинаковы, то на  $1 \text{ см}^2$  стенки за  $1 \text{ с}$  попадало бы  $nv \cos \theta$  частиц, где  $n$  — концентрация. Распределение по скоростям имеет вид

$$\frac{dn}{n} = \frac{m^3}{4\pi^3 \hbar^3} \frac{v^2 dv \sin \theta d\theta d\varphi}{\exp[(\epsilon - \mu)/(kT)] + 1}. \quad (13.1)$$

Пренебрегая в знаменателе экспонентой, находим для вырожденного газа

$$\langle n \rangle = \frac{m^3}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{v_{\max}} v^3 dv = \frac{m^3 V_{\max}^4}{16\pi^2 \hbar^3}. \quad (13.2)$$

Максимальное значение скорости находим из энергии Ферми:  $v_{\max}^2 = 2\mu_0/m$ , где

$$\mu_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}. \quad (13.3)$$

Так как рассматривается объем  $V = 1 \text{ см}^3$ , в итоге получаем

$$\langle n \rangle = 3^{4/3} \pi^{2/3} n^{4/3} \hbar / 16m. \quad (13.4)$$

**Задача 13.2.** Найти количество электронов, выходящих в результате термоэлектронной эмиссии из металла, нагретого до температуры  $T$ .

**Решение.** В данном случае имеется невырожденный электронный газ, и в распределении Ферми —



Дирака можно пренебречь единицей по сравнению с экспонентой:

$$\frac{dn}{n} = \frac{m^3}{4\pi^3 \hbar^3} e^{-\frac{e-\mu}{kT}} dv_x dv_y dv_z. \quad (13.5)$$

Вылетают все частицы, у которых  $z$ -компонента скорости (по нормали к поверхности) такова, что соответствующая ей кинетическая энергия превышает работу выхода электронов из металла  $W$ . Поэтому, интегрируя по всем значениям  $v_x$  и  $v_y$ , находим

$$\frac{dn}{n} = \frac{2\pi m^3}{(2\pi \hbar)^3} \frac{2kT}{m} v_z \exp \left[ -\frac{1}{kT} \left( \frac{m v_z^2}{2} - \mu \right) \right] dv_z, \quad (13.6)$$

и далее получаем ответ:

$$\langle n \rangle = \frac{m^2 k T}{2\pi^2 \hbar^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \int_0^\infty v_z e^{-\frac{m v_z^2}{2kT}} dv_z = \frac{mk^2 T^2}{2\pi^2 \hbar^3} e^{-\frac{W-\mu}{kT}}. \quad (13.7)$$

**Задача 13.3.** Записать уравнение адиабаты для фотонного газа.

**Решение.** Уравнение адиабаты находится из условия постоянства энтропии. Поскольку

$$S = \int \frac{c_V dT}{T}, \quad (13.8)$$

надо найти  $c_V$ . Из первого начала термодинамики, учитывая, что для фотонного газа  $U = aT^4 V$ , находим

$$cV = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 4aT^3 V. \quad (13.9)$$

Следовательно,

$$S = \frac{4}{3} a T^3 V, \quad (13.10)$$

и уравнение адиабаты имеет вид

$$VT^3 = \text{const}. \quad (13.11)$$

Уравнение адиабаты можно записать и в переменных  $(p, V)$ . Для этого воспользуемся соотношением (11.3)  $p = -(\partial F / \partial V)_T$ . По определению  $F = U - TS = -aT^4 V / 3$ . Поэтому  $p = aT^4 / 3$ , и уравнение адиабаты можно представить в виде

$$pV^{4/3} = \text{const}. \quad (13.12)$$

**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 13.4.** Получить уравнение состояния газа Ферми.

**Задача 13.5.** Вычислить давление 1) в слабове-  
рожденном газе Ферми, 2) в ультрарелятивистском  
вырожденном электронном газе.

## § 14. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

**Задача 14.1.** Капли жидкости находятся в равновесии со своим паром при температуре  $T$ . Найти зависимость давления насыщенного пара над каплей от радиуса капли  $r$ , если давление насыщенного пара над плоской поверхностью при данной температуре равно  $p$ . Каплю считать сферической, объем одного моля жидкости равен  $V_0$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ .

**Решение.** В условиях равновесия должны быть равными друг другу химические потенциалы пара и жидкости:

$$\mu_1(p_1, T) = \mu_2(p_2, T), \quad (14.1)$$

где  $p_1$  — давление насыщенного пара,  $p_2$  — давление внутри капли. Поскольку сжимаемость жидкости весьма мала, давление  $p_2$  не сильно отличается от  $p$ , и поэтому правую часть (14.1) можно представить в виде ряда:

$$\mu_2(p_2, T) = \mu_2(p, T) + \left. \frac{\partial \mu_2(p_2, T)}{\partial p_2} \right|_{p_2=p} (p_2 - p) \quad (14.2)$$

Разность давлений обусловлена поверхностным натяжением:

$$p_2 - p = 2\sigma/r. \quad (14.3)$$

Используя определение химического потенциала, легко убедиться в том, что производная  $\partial \mu_2 / \partial p_2$  равна объему одной молекулы жидкости  $V_0/N_A$ , где  $N_A$  — число Авогадро. Кроме того, по условию задачи  $\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T)$  (условие равновесия на плоской поверхности раздела фаз). Находим

$$\mu_1(p_1, T) - \mu_1(p, T) = 2\sigma V_0/r N_A. \quad (14.4)$$

Будем рассматривать пар как идеальный газ. Тогда

$$\mu_1(p_1, T) - \mu_1(p, T) = kT \ln(p_1/p). \quad (14.5)$$

Окончательно находим

$$p_1 = p \exp\{2\sigma V_0 / rkTN_A\}. \quad (14.6)$$

С уменьшением размеров капли давление насыщенного пара над ней возрастает, но заметное возрастание наблюдается только для капель очень малого размера. Например, для капель воды с  $r=10^{-5}$  см давление  $p_1$  всего на 1% больше, чем  $p$ . Для капель размером  $r=10^{-6}$  см разница давлений уже около 10%.

**Задача 14.2.** На сколько изменяется температура фазового перехода за счет искривления поверхности раздела фаз? Изменением давления насыщенного пара над искривленной поверхностью пренебречь.

**Решение.** Искомое изменение температуры  $\Delta T = T' - T$  можно считать малым по сравнению с самой температурой фазового перехода. Используем условия равновесия при искривленной фазовой поверхности:

$$\mu_1(p_1, T') = \mu_2(p_2, T') \quad (14.7)$$

и при плоской фазовой поверхности:

$$\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T). \quad (14.8)$$

При не слишком большой искривленности поверхности находим отсюда, считая  $p_1 \cong p$ :

$$\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T} - \frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_p \Delta T = \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial p}\right)_T \Delta p_2. \quad (14.9)$$

Поскольку  $(\partial \mu / \partial T)_p = -s$ , где  $s$  — энтропия, отнесенная к одной молекуле, получаем

$$\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T} - \frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_p = s_2 - s_1 = \frac{l}{T}, \quad (14.10)$$

где  $l$  — теплота перехода в расчете на одну молекулу. Поэтому

$$\Delta T = \frac{T}{l} \frac{V_0}{N_A} \frac{2\sigma}{r}. \quad (14.11)$$

**Задача 14.3.** Определить кривую равновесия фаз при возгонке, если температура кристалла  $T$  много меньше его дебаевской температуры  $\Theta$ .

**Решение.** В уравнении Клапейрона — Клаузиуса

можно пренебречь объемом конденсированной фазы:

$$dp/dT = L/TV, \quad (14.12)$$

где  $V$  — объем газовой фазы. В условиях задачи пар можно считать идеальным газом. Используя уравнение состояния идеального газа, находим

$$\frac{dp}{p} = \frac{L}{NkT^2} dT. \quad (14.13)$$

Учтем теперь зависимость теплоты перехода  $L$  от температуры. Вычисляя

$$\frac{dL}{dT} = T \left( \frac{\partial \Delta S}{\partial T} \right)_p + T \left( \frac{\partial \Delta S}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dT} + \Delta S = \Delta C_p, \quad (14.14)$$

где  $\Delta C_p = (C_p)_{\text{газ}} - (C_p)_{\text{крист}}$ , находим

$$L = L_0 + \int_0^T (\Delta C_p) dT. \quad (14.15)$$

Здесь  $L_0$  — теплота перехода при абсолютном нуле температуры, т. е. работа, необходимая для разрыва связей между молекулами в кристалле при  $T=0$ . Второе слагаемое справа в (14.15) есть энергия, соответствующая разнице энергий теплового движения в газе и кристалле.

Подставляя (14.15) в (14.13) и вычисляя интегралы, получаем уравнение состояния при возгонке:

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{L_0}{NkT} + \int \frac{dT}{NkT^2} \int_0^T (\Delta C_p) dT \right\}, \quad (14.16)$$

где  $p_0$  — постоянная интегрирования. Если использовать известные выражения для теплоемкости идеального газа  $(C_p)_{\text{газ}} = \frac{5}{2}Nk$  и кристалла  $(C_p)_{\text{крист}} = \frac{12}{5}\pi^4 Nk (T/\Theta)^3$ , то

$$p = p_0 \left( \frac{T}{\Theta} \right)^{5/2} \exp \left[ -\frac{L_0}{NkT} - \frac{\pi^4}{5} \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \right]. \quad (14.17)$$

Задачи для самостоятельного решения.

**Задача 14.4.** Три фазы 1, 2, 3 находятся в равновесии друг с другом в тройной точке. Их удельные объемы в этой точке равны соответственно  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ . Пусть  $p_{12} = p_{12}(T)$ ,  $p_{23} = p_{23}(T)$ ,  $p_{31} = p_{31}(T)$  — уравнения кривых равновесия между фазами 1 и 2,

2 и 3, 3 и 1. Показать, что в тройной точке имеет место соотношение

$$(V_1 - V_2) \frac{dp_{12}}{dT} + (V_2 - V_3) \frac{dp_{23}}{dT} + (V_3 - V_1) \frac{dp_{31}}{dT} = 0.$$

**Задача 14.5.** Показать, что при фазовом переходе второго рода скачки различных величин удовлетворяют соотношениям Эренфеста, т. е.

$$\Delta \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + \frac{dp}{dT} \Delta \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = 0, \quad \frac{\Delta C_p}{T} - \frac{dp}{dT} \Delta \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = 0,$$

$$\Delta \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V + \frac{dV}{dT} \Delta \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = 0, \quad \frac{\Delta C_V}{T} + \frac{dV}{dT} \Delta \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = 0.$$

где производные  $dp/dT$  и  $dV/dT$  берутся вдоль линии перехода, на которой переменные  $p$ ,  $V$  и  $T$  помимо уравнения состояния связаны между собой еще одним соотношением.

## Ответы к главе 2

11.6.  $n = n_0 \sqrt{8\pi}; \quad T = m V_0^2 / 4k.$

11.7.  $t = \frac{4 V_0}{S \langle V \rangle} \ln 2.$

12.4.  $p \approx 100$  атм.

13.4.  $p = \frac{2}{5} \frac{N \mu_0}{V} \left[ 1 + 5 \pi^2 \left( \frac{k T}{\mu} \right) \right].$

13.5. 1)  $p = \frac{N k}{V} \left( 1 + \frac{1}{2^{7/2}} \frac{h^3}{(2 \pi m k T)^{3/2}} \frac{N}{V} \right);$

2)  $n = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{8 \pi} \right)^{1/3} h c \left( \frac{N}{V} \right)^{4/3}.$

## ГЛАВА 3

# ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

### § 15. ВВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Определение электростатического поля очень редко сводится к простому суммированию вкладов соответствующих элементов зарядов, поскольку распределение зарядов в большинстве случаев неизвестно. Поэтому при определении электростатического поля приходится одновременно решать задачу о распределении заряда. Эта задача может решаться разными способами, но в основе общего подхода лежит решение уравнения Лапласа или Пуассона с соответствующими граничными условиями (т. е. постоянство потенциала на поверхности проводника, условия на границе двух диэлектриков и т. д.). При этом существенную роль играет однозначность решения поставленной задачи.

Часто бывает полезным при рассмотрении конкретных задач использовать интегральные соотношения, например теорему Гаусса или соотношения Грина.

В качестве примера рассмотрим соотношение Грина, которое получается применением операции дивергенции к произведению  $\varphi \mathbf{D}_0$ . При этом  $\varphi$  и  $\mathbf{D}_0$  могут относиться к разным полям или, в частности, к одному и тому же полю (тогда  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}$ ):

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}_0) = (\operatorname{grad} \varphi) \mathbf{D}_0 + \varphi \operatorname{div} \mathbf{D}_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 + \varphi \rho_0. \quad (15.1)$$

После интегрирования по объемам  $V_1, V_2, \dots$ , ограниченными поверхностями  $S_1, S_2, \dots$ , получим

$$\iiint_{V_1+V_2+\dots} \mathbf{E} \mathbf{D}_0 \, dV = \iiint_{V_1+V_2+\dots} \varphi \rho_0 \, dV - \iint_{S_1+S_2+\dots} \varphi D_{0n} \, dS, \quad (15.2)$$

где  $D_{0n}$  обозначает проекцию вектора  $D_0$  на внешнюю нормаль соответствующей поверхности, ограничивающей  $V_1, V_2, \dots$ .

Если области  $V_1$  и  $V_2$  имеют частично общую ограничивающую поверхность  $S_1' = S_2' = S_{12}$ , то

$$\iint_{S_1'} \varphi D_{0n} dS + \iint_{S_2'} \varphi D_{0n} dS = - \iint_{S_{12}} \varphi (D_{0n}^{(2)} - D_{0n}^{(1)}) dS, \quad (15.3)$$

где  $D_{0n}^{(2)}$  и  $D_{0n}^{(1)}$  — проекции соответствующих предельных значений на внешнюю по отношению к области  $V_1$  нормаль к границе.

Учитывая граничное условие  $D_{0n}^{(2)} - D_{0n}^{(1)} = \sigma_0$ , получим

$$\iiint_{V_1+V_2+\dots} \mathbf{E} D_0 dV = \iiint_{V_1+V_2+\dots} \varphi \rho_0 dV + \iint_{S_{12}} \varphi \sigma_0 dS + \dots, \quad (15.4)$$

где точками обозначены интегралы по другим границам областей.

Соотношение (15.4) обычно используют для доказательства однозначности решения уравнения Пуассона или Лапласа. Пусть некоторая задача, связанная с нахождением полей при некотором распределении объемных зарядов и в присутствии заряженных и незаряженных проводников, предположительно допускает два решения. Пусть к первому решению относятся величины  $\varphi, D, \rho, \sigma$  и т. д., а ко второму — соответствующие величины  $\varphi', D', \rho' \equiv \rho, \sigma'$  и т. д. Рассмотрим соотношение по отношению к разностям  $\mathbf{E} - \mathbf{E}'$  и  $\mathbf{D} - \mathbf{D}'$ . При этом получим, учитывая, что  $\rho - \rho' \equiv 0$ ,

$$\iiint_{V_1+V_2+\dots} \varepsilon (\mathbf{E} - \mathbf{E}')^2 dV = \sum_i (\varphi_i - \varphi'_i) (\sigma_i - \sigma'_i), \quad (15.5)$$

где суммирование происходит по всем проводникам. (Поверхностные заряды могут существовать и на некоторых непроводящих поверхностях. В таком случае будем считать, что эти заряды имеют заданное распределение, т. е.  $\sigma = \sigma'$ .)

Учитывая, что на поверхности проводника  $\varphi = \text{const}$ ,  $\varphi' = \text{const}$ , получим из (15.5)

$$\iiint_{V_1+V_2+\dots} \varepsilon (\mathbf{E} - \mathbf{E}')^2 dV = \sum_i (\varphi_i - \varphi'_i) (Q_i - Q'_i), \quad (15.6)$$

где  $Q_i$  и  $Q'_i$  — суммарные заряды проводников в случае первого и второго решений. Если на всех проводниках задан либо потенциал, т. е.  $\varphi_i - \varphi'_i = 0$ , либо суммарный заряд, т. е.  $Q_i - Q'_i = 0$ , то оба решения тождественно совпадают. Таким образом, соотношение (15.6) выражает в конкретной форме условия, при которых поставленная задача имеет однозначное решение.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть следующую задачу.

**Задача 15.1.** Показать, что если на некоторой замкнутой поверхности потенциал постоянен и в объеме, ограниченном этой поверхностью, нет зарядов, то в этом объеме также нет и поля.

**Решение.** Такая ситуация возникает для проводников. Положим потенциал внутри поверхности всюду равным потенциалу на поверхности. При этом будет выполнено уравнение Лапласа и граничное условие. Снаружи рассматриваемой поверхности потенциал нельзя положить равным потенциалу на поверхности, так как этот потенциал, вообще говоря, не равен потенциалу на бесконечности. Кроме того, снаружи могут находиться другие проводники с другими значениями потенциала, а также объемные заряды, при наличии которых потенциал должен удовлетворять уравнению Пуассона.

## § 16. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ УЕДИНЕННОГО ПРОВОДНИКА

Рассмотрим несколько задач, связанных с нахождением распределения заряда на удаленном от других зарядов проводнике.

Характер распределения заряда на уединенном проводнике зависит только от формы проводника. Простейшая форма проводника, для которой возникает вопрос о распределении заряда, — это сфероид (эллипсоид вращения). Сжатый сфероид в пределе можно рассматривать как диск, а вытянутый — как отрезок нити.

**Задача 16.1.** Найти распределение заряда на уединенном проводнике в форме сжатого сфероида.



**Решение.** Указанную задачу для сфероида удобно решать в соответствующей сфероидальной системе координат. Для того чтобы ввести эту систему координат, рассмотрим эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) и расстоянием между фокусами  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Поверхность, получающаяся в результате вращения этого эллипса вокруг малой оси, является сжатым вдоль оси симметрии сфероидом.

Введем безразмерную величину  $\xi = a/c$  ( $\xi \geq 1$ ). При этом уравнение сжатого сфероида запишется в виде

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2} + \frac{z^2}{1 - \xi^2} = c^2. \quad (16.1)$$

Наряду со сфероидом рассмотрим софокусный однополостный гиперboloид вращения, описываемый уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{1 - \eta^2} = c^2. \quad (16.2)$$

Расстояние между вершинами гиперболы, которая при вращении вокруг оси  $z$  образует этот гиперboloид, равно  $2c\eta$ , а расстояние между фокусами гиперболы равно  $2c$ .

Если положить  $y = 0$ , то из уравнений (16.1) и (16.2) получим систему эллипсов и гипербол, которую можно рассматривать как криволинейную ортогональную систему координат в плоскости  $y = 0$ . Эллипсу, задаваемому параметром  $\xi$ , и гиперболу, задаваемой параметром  $\eta$ , соответствуют четыре точки пересечения, отличающиеся лишь знаками координат  $x$  и  $z$ . Если указать эти знаки, то определится одна точка плоскости  $y = 0$ . Различным точкам этой плоскости будут соответствовать различные значения параметров  $\xi$ ,  $\eta$  и различный выбор знаков  $x$ ,  $z$ .

В пространстве пересечение сфероида и гиперboloида происходит по двум окружностям в верхней ( $z > 0$ ) и нижней ( $z < 0$ ) частях сфероида. Для выбора одной из этих двух окружностей следует указать знак  $z$  ( $\text{sign } z$ ).

Чтобы на указанной окружности определить точку, нужно задать азимутальный угол  $\psi$ :

$$\psi = \arctg(y/x). \quad (16.3)$$

Таким образом, три величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\psi$  и  $\text{sign } z$  однозначно определяют точку в пространстве. Эта система координат называется сжатой сфероидальной системой координат.

Из уравнений (16.1) — (16.3) найдем соотношения, выражающие декартовы координаты через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\psi$ ,  $\text{sign } z$ :

$$x = c \xi \eta \cos \psi, \quad y = c \xi \eta \sin \psi, \quad z = \pm c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}. \quad (16.4)$$

Если ввести расстояния от фокусов эллипса (находящегося в плоскости, проходящей через ось  $Oz$  и точку с координатами  $x, y, z$ ), равные  $r_{\pm} = \sqrt{(Vx^2 + y^2 \mp c)^2 + z^2}$ , то обратное по отношению к (16.4) преобразование можно будет записать в виде

$$\xi = \frac{r_+ + r_-}{2c}, \quad \eta = \frac{r_- - r_+}{2c}, \quad \psi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (16.5)$$

В нашем случае коэффициенты Ламе удобнее всего определить исходя из (16.4). При этом получим:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad (16.6)$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad (16.7)$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2} = c \xi \eta. \quad (16.8)$$

В рассматриваемой системе координат уравнение Лапласа запишется в виде

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) \right\} = 0. \quad (16.9)$$

Множитель, стоящий перед фигурной скобкой, можно сократить.

Очень важным обстоятельством является то, что уравнение (16.9) допускает, в частности, решения в виде функции от одной переменной, например в виде

$\varphi = \varphi(\xi)$ . Это связано с тем, что в сфероидальной системе координат уравнение Лапласа допускает разделение переменных, что подробно будет рассмотрено в следующем параграфе.

Предположив решение (16.9) в виде  $\varphi = \varphi(\xi)$  и учитывая (16.6) — (16.8), получим из (16.9)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (16.10)$$

Решение в виде функции от одной переменной означает, что эквипотенциальные поверхности вне проводящего сфероида также являются сфероидами.

Интегрируя (16.10), получим

$$\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi} = - \frac{A}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (16.11)$$

где  $A$  — константа интегрирования. Производя второе интегрирование, получим

$$\varphi(\xi) = A \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + B, \quad (\xi > \xi_0) \quad (16.12)$$

где  $B$  — вторая константа интегрирования.

Определение аддитивной константы  $B$  связано с нормировкой потенциала на бесконечности ( $\xi \rightarrow \infty$ ), поэтому положим  $B = 0$ . Константа  $A$  связана с зарядом проводника, который по условию задачи равен  $Q$ . Связь между константой  $A$  и зарядом проще всего найти из асимптотической ( $\xi \rightarrow \infty$ ) формы (16.12). Согласно (16.5), имеем  $c\xi = (r_+ + r_-)/2 \approx r$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ), поэтому

$$\varphi_{ac} = A/\xi \approx cA/r = Q/4\pi\epsilon_0 r, \quad (16.13)$$

откуда

$$A = Q/4\pi\epsilon_0 c. \quad (16.14)$$

Таким образом, потенциал в случае заряженного проводящего сжатого сфероида равен

$$\varphi(\xi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b}. \quad (16.15)$$

Если вместо заряда  $Q$  задан потенциал проводника  $\varphi_0$ , то потенциал в остальных точках вне проводника равен

$$\varphi(\xi) = \varphi_0 \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}}. \quad (16.16)$$

Из формулы (16.15) можно получить выражение для емкости сжатого сфероида:

$$C = 4 \pi \epsilon_0 c \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{c}{b_0}}. \quad (16.17)$$

В пределе  $\xi_0 \rightarrow 1$  сфероид переходит в диск. При этом для емкости диска получим

$$C_{\text{диск}} = 4 \pi \epsilon_0 c \frac{2}{\pi}. \quad (16.18)$$

Для определения напряженности поля нужно вычислить градиент, отличная от нуля компонента которого равна

$$(\operatorname{grad} \varphi(\xi))_{\xi} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = - \frac{1}{c} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 c} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (16.19)$$

Следовательно, напряженность поля равна

$$E(\xi, \eta) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 c^2} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 - \eta^2}}. \quad (16.20)$$

Из (16.20) видно, что, в отличие от потенциала, поле в различных точках одного и того же сфероида различно. Наибольшая напряженность в случае сжатого сфероида «на экваторе», где  $\eta = 1$ , наименьшая — «на полюсах», где  $\eta = 0$ .

Плотность заряда равна

$$\sigma = \epsilon_0 E(\xi_0, \eta) = \frac{Q}{4 \pi c^2} \frac{1}{\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}}. \quad (16.21)$$

В целях проверки можно убедиться в том, что интегрирование по поверхности проводящего сфероида выражения (16.21) дает заряд проводника  $Q$ . Учитывая, что  $dS = h_2 h_3 d\eta d\psi$ , получим

$$\begin{aligned} \iint_S \sigma dS &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{Q}{4 \pi c^2} \frac{1}{\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}} c^2 \frac{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \xi_0 \eta d\eta d\psi = \\ &= Q. \end{aligned} \quad (16.22)$$

Выражение (16.21) для плотности заряда можно преобразовать к более удобному для анализа виду.

Учитывая, что

$$\xi_0^2 - \eta^2 = \frac{a_0^2 b_0^2}{c^2} \left( \frac{x^2 + y^2}{a_0^4} + \frac{z^2}{b_0^4} \right). \quad (16.23)$$

получим

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a_0^2 b_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a_0^4} + \frac{z^2}{b_0^4}}}. \quad (16.24)$$

В пределе  $b_0 \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow a = R$  из (16.24) получим распределение заряда на проводящем диске. При этом следует учесть, что  $(x^2 + y^2)/a_0^4 \ll z^2/b_0^4$ , и воспользоваться уравнением эллипсоида  $z^2/b_0^2 = 1 - (x^2 + y^2)/a_0^2$ . В результате получим для диска

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}}}, \quad (16.25)$$

где  $R$  — радиус диска.

В центре диска плотность заряда в два раза меньше средней плотности, равной  $Q/2\pi R^2$ . На краях диска плотность обращается в бесконечность, что связано с предположением о бесконечно малой толщине диска.

Таким образом, распределение заряда на поверхности диска существенно неравномерное. Это связано с тем, что при равномерном распределении заряда по поверхности диска возникает тангенциальная составляющая поля вблизи поверхности диска, которая обращается в нуль лишь для центральной точки диска. Однако если рассмотреть плоский конденсатор, составленный из двух дисков, то (в случае одинаковых по абсолютной величине и противоположных по знаку зарядов на обкладках) распределение зарядов на внутренней поверхности обкладок будет почти равномерным (если не учитывать краевой эффект), а снаружи зарядов практически не будет. В этом случае тангенциальные составляющие, возникающие от зарядов разных знаков, взаимно компенсируются. Если на одну обкладку добавить заряд  $2Q$ , то половина этого заряда распределится равномерно по внутренней стороне обкладки, а другая половина распределится неравномерно по внешней стороне по за-

кону (16.25). На второй обкладке при этом на внешней стороне появится такое же распределение заряда  $Q$ , а на внутренней стороне появится дополнительное равномерное распределение такого же по величине заряда, но противоположного знака.

**Задача 16.2.** Найти распределение заряда на уединенном проводнике в форме вытянутого сфероида с полуосями  $a_0$  и  $b_0$  ( $a_0 > b_0$ ). Определить емкость такого проводника.

**Решение.** Задача решается аналогично предыдущему случаю. Введем вытянутую сфероидальную систему координат, задаваемую поверхностями вытянутого сфероида и двухполостного гиперболоида вращения. Эти поверхности получаются вращением эллипса вокруг большой оси и гиперболы вокруг оси, проходящей через фокусы. Уравнения поверхностей будут иметь вид

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2 - 1} + \frac{z^2}{\xi^2} = c^2 \quad (\xi \geq 1), \quad (16.26)$$

$$\frac{z^2}{\eta^2} - \frac{x^2 + y^2}{1 - \eta^2} = c^2 \quad (0 \leq \eta \leq 1). \quad (16.27)$$

При этом получим

$$x = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \psi, \quad y = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \psi, \\ z = \pm c \xi \eta. \quad (16.28)$$

Обратное преобразование имеет тот же вид, что и (16.5), но теперь  $r_{\pm} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp c)^2}$ .

Коэффициенты Ламе для вытянутой сфероидальной системы координат равны

$$h_1 = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_3 = \\ = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}. \quad (16.29)$$

Откуда

$$h_2 h_3 / h_1 = c(\xi^2 - 1). \quad (16.30)$$

В вытянутой сфероидальной системе координат уравнение также имеет решение, зависящее от одной переменной  $\xi$ . Соответствующее уравнение, следующее из уравнения Лапласа, при этом имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\xi) \right) = 0. \quad (16.31)$$

Первое интегрирование дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = - \frac{A}{\xi^2 - 1} . \quad (16.32)$$

Второе интегрирование дает

$$\varphi(\xi) = A \frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} + B. \quad (16.33)$$

Учитывая нормировку потенциала на бесконечности, константу  $B$  следует положить равной нулю. Первая константа интегрирования  $A$  определяется зарядом проводника  $Q$  или его потенциалом  $\varphi_0$ . Для того чтобы выразить константу  $A$  через заряд, рассмотрим асимптотическую форму (16.33) при  $\xi \rightarrow \infty$  и учтем, что  $c\xi = (r_+ + r_-)/2 \approx r$ . При этом получим

$$\varphi_{\infty}(\xi) = A \frac{1}{\xi} \approx A \frac{c}{r} . \quad (16.34)$$

Откуда следует, что

$$A = Q/4\pi\epsilon_0 c. \quad (16.35)$$

Окончательно для потенциала получаем

$$\varphi(\xi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2c} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \ln \frac{a + c}{b} . \quad (16.36)$$

Заметим, что переход от вытянутого эллипсоида к сжатому эллипсоиду можно осуществить заменой в формуле (16.36)  $a \rightleftharpoons b$  ( $a > b$ ). При этом  $c \rightarrow \sqrt{b^2 - a^2} = i\sqrt{a^2 - b^2} = ic$ . Выражение (16.36) в результате замены  $a \rightleftharpoons b$ ,  $c \rightarrow ic$  станет равным

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2ic} \ln \frac{b + ic}{b - ic} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} \operatorname{arctg} \frac{b}{c} , \quad (16.37)$$

т. е. перейдет в выражение для потенциала сжатого сфероида. Из (16.36) видно, что эквипотенциальные поверхности суть вытянутые сфероиды. При этом напряженность поля в разных точках сфероида будет разной, так как

$$E = -(\operatorname{grad} \varphi)_\xi = - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2} \sqrt{\xi^2 - 1}} . \quad (16.38)$$

Поверхностная плотность заряда будет равна

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi c^2} \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \sqrt{\xi_0^2 - 1}} . \quad (16.39)$$

Для проверки можно вычислить суммарный заряд, исходя из выражения (16.39). Учитывая, что  $dS = h_2 h_3 d\eta d\psi = c^2 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \sqrt{\xi_0^2 - 1} d\eta d\psi$ , получим

$$\iint \sigma dS = \frac{Q}{4\pi c^2} 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{c^2 \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \times \\ \times d\eta d\psi = Q, \quad (16.40)$$

как и должно быть.

Выражение (16.39) можно преобразовать к более удобному виду, аналогичному (16.24). Для этого заметим, что в случае вытянутого сфероида

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2} \left( \frac{x^2 + y^2}{b^4} + \frac{z^2}{a^4} \right). \quad (16.41)$$

Учитывая (16.41), получим из (16.39)

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{a_0 b_0^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{b_0^4} + \frac{z^2}{a^4}}}. \quad (16.42)$$

Для очень вытянутого сфероида ( $a_0 \gg b_0$ ) можно считать, что первый член под корнем в (16.42) много больше второго. Эти члены соизмеримы лишь вблизи самых концов сфероида, для которых  $x^2 + y^2 \sim \sim b_0^4/a_0^2$ . Если не рассматривать эти области, которые содержат малую долю заряда (порядка  $Q(b_0/a_0)^2$ ), то для остальной части очень вытянутого сфероида можно положить

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (16.43)$$

Из (16.43) видно, что поверхностная плотность заряда даже для очень вытянутого сфероида в разных частях различна, так как меняется толщина сфероида  $2\sqrt{x^2 + y^2}$ . Однако для линейной плотности заряда получается постоянное для всей длины сфероида значение

$$\gamma = \sigma 2\pi \sqrt{x^2 + y^2} = Q/2a_0 \quad (a_0 \approx c). \quad (16.44)$$

Из этого обстоятельства следует, что эквипотенциальные поверхности равномерно заряженной нити длиной  $2c$  — вытянутые сфероиды, потенциал для которых будет определяться формулой (16.36).



Из формулы (16.36) можно найти емкость вытянутого сфероида:

$$C = \frac{4 \pi \epsilon_0 2 c}{\ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c}} = \frac{4 \pi \epsilon_0 c}{\ln \frac{a_0 + c}{b_0}}. \quad (16.45)$$

Для очень вытянутого сфероида остается зависимость от  $b_0$  ( $c \rightarrow a_0$ ):

$$C_{b \rightarrow 0} = 4 \pi \epsilon_0 \frac{a_0}{\ln \frac{2a_0}{b_0}}. \quad (16.46)$$

Если задан не заряд, а потенциал проводника  $\varphi_0$ , то вне проводника потенциал будет равен

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\ln \frac{a+c}{a-c}}{\ln \frac{a_0+c}{a_0-c}}. \quad (16.47)$$

## § 17. ПРОВОДНИКИ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Задача 17.1.** Найти распределение заряда на поверхности незаряженного сфероида, внесенного в однородное электростатическое поле. Рассмотреть случаи, в которых поле параллельно и перпендикулярно оси сфероида для двух типов сфероидов.

**Решение.** Эту задачу удобно решать в соответствующей сфероидальной системе координат. В отличие от предыдущей задачи решение теперь нельзя искать в виде функции, зависящей от одной переменной, так как эквипотенциальные поверхности уже не будут являться сфероидами, за исключением лишь поверхности самого проводника. Однако решение уравнения Лапласа можно искать в виде произведения:

$$\varphi(\xi, \eta, \psi) = G(\xi) F(\eta) K(\psi). \quad (17.1)$$

Априори существование решений такого типа не очевидно. Оно обусловлено тем, что уравнение Лапласа допускает разделение переменных в сфероидальной системе координат.

Подставив искомое решение в форме (17.1) и разделив обе части уравнения Лапласа на произведение  $GFK$ , получим

$$\frac{1}{GFK} h_1 h_2 h_3 \Delta (GFK) = 0. \quad (17.2)$$

В развернутой форме уравнение (17.2) имеет вид

$$\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + \frac{h_1 h_2}{h_3 K} \frac{\partial^2 K}{\partial \psi^2} = 0. \quad (17.3)$$

Коэффициенты Ламе не зависят от  $\psi$  (аксиальная симметрия), поэтому должно выполняться уравнение

$$\frac{1}{K(\psi)} \frac{\partial^2 K(\psi)}{\partial \psi^2} = -C_1, \quad (17.4)$$

где  $C_1$  — константа. Уравнение (17.3) приводится к виду

$$\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) - \frac{h_1 h_2}{h_3} C_1 = 0. \quad (17.5)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (17.5) учтем конкретный вид коэффициентов Ламе. В сжатой сфероидальной системе координат

$$\begin{aligned} \frac{h_2 h_3}{h_1} &= c \xi \eta \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad \frac{h_1 h_3}{h_2} = c \xi \eta \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \\ \frac{h_1 h_2}{h_3} &= c \left( \frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\xi^2} \right) \frac{\xi \eta}{\sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{\eta^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (17.6)$$

И уравнение (17.5) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) + C_1 \frac{1}{\xi^2} = \\ &= - \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\eta} \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + C_1 \frac{1}{\eta^2}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

В уравнении (17.7) левая часть зависит от  $\xi$ , а правая — от  $\eta$ . Это означает, что и правая и левая части равны константе, которую мы обозначим  $-C_2$ . При этом получим два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \frac{1}{\xi^2} C_1 + C_2 \right) G = 0, \quad (17.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \sqrt{1-\eta^2} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) - \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \left( \frac{1}{\eta^2} C_1 + C_2 \right) F = 0. \quad (17.9)$$

Таким образом, вместо одного уравнения для функции, зависящей от трех переменных, получено три уравнения для трех функций, каждая из которых зависит от одной переменной, т. е. уравнения (17.4), (17.8) и (17.9).

Аналогичным образом для вытянутой сферондальной системы координат

$$\begin{aligned} \frac{h_2 h_3}{h_1} &= c (\xi^2 - 1), \quad \frac{h_1 h_3}{h_2} = c (1 - \eta^2), \\ \frac{h_1 h_2}{h_3} &= \frac{c}{\xi^2 - 1} + \frac{c}{1 - \eta^2}. \end{aligned} \quad (17.10)$$

С учетом (17.10) из уравнения (17.5) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\xi^2 - 1) \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) - C_1 \frac{1}{\xi^2 - 1} = \\ = - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( (1 - \eta^2) \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) + C_1 \frac{1}{1 - \eta^2}. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Так как левая и правая части уравнения (17.11) опять зависят от разных переменных, то оно эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( (\xi^2 - 1) \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) + \left( C_2 - C_1 \frac{1}{\xi^2 - 1} \right) G = 0, \quad (17.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( (1 - \eta^2) \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) - \left( C_2 + C_1 \frac{1}{1 - \eta^2} \right) F = 0. \quad (17.13)$$

Уравнения (17.4), (17.8), (17.9) или (17.4), (17.12), (17.13) не являются полностью независимыми, так как они связаны константами  $C_1$  и  $C_2$ . Например, выбор решения уравнения (17.4) определяет константу  $C_1$ , а выбор решения уравнения (17.9) определяет вторую константу  $C_2$ . Эти две константы входят в уравнение (17.8), т. е. конкретный вид уравнения (17.8) зависит от выбранных решений уравнений (17.4) и (17.9).

Уравнения (17.8) и (17.12) можно записать в стандартном виде:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( R(\xi) \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) + Q(\xi) G(\xi) = 0. \quad (17.14)$$

При этом для сжатой сфероидальной системы координат

$$R(\xi) = \xi \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad Q(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \frac{1}{\xi^2} C_1 + C_2 \right). \quad (17.15)$$

Для вытянутой сфероидальной системы координат

$$R(\xi) = \xi^2 - 1, \quad Q(\xi) = C_2 - C_1 \frac{1}{\xi^2 - 1}. \quad (17.16)$$

Уравнение (17.14) имеет два независимых решения. Пусть одно известно и равно  $G_0(\xi)$ , тогда второе решение можно найти с помощью интегрирования. Обозначим второе решение через  $G(\xi)$  и покажем, что

$$G(\xi) = G_0(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{G_0^2(s) R(s)}. \quad (17.17)$$

Дифференцируя (17.17) по  $\xi$ , получим

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial G_0(\xi)}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{G_0^2(s) R(s)} - \frac{1}{G_0(\xi) R(\xi)}. \quad (17.18)$$

Второе дифференцирование дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( R(\xi) \frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi} \right) &= -Q(\xi) G_0(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{G_0^2(s) R(s)} = \\ &= -Q(\xi) G(\xi). \end{aligned} \quad (17.19)$$

Из (17.19) следует, что (17.17) удовлетворяет уравнению (17.14). В дальнейшем второе решение будем обозначать

$$G(\xi) = G_0(\xi) A(\xi), \quad (17.20)$$

где

$$A(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{G_0^2(s) R(s)}. \quad (17.21)$$

Вернемся к поставленной задаче. Пусть напряженность невозмущенного однородного поля равна  $E_0$ , а проводник имеет форму сфероида (сжатого или вытянутого) с полуосями  $a_0 = c\xi_0$ ,  $b_0 = c\sqrt{\xi_0^2 - 1}$ . Потенциал в точке  $O$ , куда попадает центр сфероида и которую выберем за начало координат, для простоты положим равным нулю. Задачу будем решать

в соответствующей (сжатой или вытянутой) сфероидальной системе координат. Рассмотрим два случая, в которых внешнее невозмущенное поле направлено параллельно ( $\parallel$ ) или перпендикулярно ( $\perp$ ) оси симметрии сфероида. Потенциал невозмущенного поля будет

$$\varphi_0 = -E_0 z \quad (\parallel) \quad \text{или} \quad \varphi_0 = -E_0 x \quad (\perp). \quad (17.22)$$

В сфероидальной системе координат  $z$  и  $x$  можно представить в едином виде:

$$z = c G_{0\parallel}(\xi) F_{\parallel}(\eta) K_{\parallel}(\psi) T_{\parallel}, \quad x = c G_{0\perp}(\xi) F_{\perp}(\eta) K_{\perp}(\psi) T_{\perp}. \quad (17.23)$$

При этом потенциал невозмущенного поля будет записываться в виде

$$\varphi_0 = -E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T, \quad (17.24)$$

где  $G_0$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $T$  для каждого из четырех случаев будут иметь свой вид.

В сжатой сфероидальной системе координат

$$z = \pm c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad \text{поэтому} \\ G_{0\parallel}(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad F_{\parallel}(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad K_{\parallel}(\psi) = 1, \quad T_{\parallel} = \text{sign } z, \quad (17.25)$$

$x = c\xi\eta \cos \psi$ , поэтому

$$G_{0\perp}(\xi) = \xi, \quad F_{\perp}(\eta) = \eta, \quad K_{\perp}(\psi) = \cos \psi, \quad T_{\perp} = 1. \quad (17.26)$$

В вытянутой сфероидальной системе координат  $z = \pm c\xi\eta$ , поэтому

$$G_{0\parallel}(\xi) = \xi, \quad F_{\parallel}(\eta) = \eta, \quad K_{\parallel}(\psi) = 1, \quad T_{\parallel} = \text{sign } z, \quad (17.27)$$

$x = c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \psi$ , поэтому

$$G_{0\perp}(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad F_{\perp}(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2}, \\ K_{\perp}(\psi) = \cos \psi, \quad T_{\perp} = 1. \quad (17.28)$$

Вне проводника (эту область будем обозначать индексом 2) потенциал возмущенного поля будем искать в виде суперпозиции двух решений уравнения Лапласа, имеющих одинаковую зависимость от переменных  $\eta$  и  $\psi$ , т. е. в виде суперпозиции:

$$-E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T \quad \text{и}$$

$$-E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T A(\xi), \quad (17.29)$$

$A(\xi)$  вычисляется по формуле (17.21) в соответствии с (17.25), (17.26), (17.27) или (17.28).

Для сжатой сфероидальной системы координат

$$A_{\parallel}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (17.30)$$

$$A_{\perp}(\xi) = \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2} \right). \quad (17.31)$$

Для вытянутой сфероидальной системы координат

$$A_{\parallel}(\xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - \frac{1}{\xi}, \quad (17.32)$$

$$A_{\perp}(\xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi}{\xi^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \right). \quad (17.33)$$

Учитывая, что при выбранной нормировке потенциала на поверхности сфероида, т. е. при  $\xi = \xi_0$ , потенциал должен обратиться в нуль, эта суперпозиция должна иметь вид

$$\varphi = -E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T (1 - A(\xi)/A(\xi_0)), \quad (17.34)$$

т. е.

$$\varphi = -E_0 z (1 - A_{\parallel}(\xi)/A_{\parallel}(\xi_0)) \text{ для случая } (\parallel), \quad (17.35)$$

$$\varphi = -E_0 x (1 - A_{\perp}(\xi)/A_{\perp}(\xi_0)) \text{ для случая } (\perp). \quad (17.36)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A(\xi) = \frac{-1}{G_0^2(\xi) R(\xi)}, \quad (17.37)$$

для поверхностной плотности зарядов получим

$$\begin{aligned} \sigma = -\epsilon_0 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} &= \epsilon_0 E_0 \frac{1}{h_1} c G_0(\xi_0) F(\eta) K(\psi) T \times \\ &\times \frac{1}{G_0^2(\xi_0) R(\xi_0) A(\xi_0)}. \end{aligned} \quad (17.38)$$

Выражение (17.38) и представляет решение поставленной задачи. При этом, согласно (17.6), (16.29)

$$h_1 = c \sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} / \sqrt{\xi_0^2 - 1}. \text{ Согласно (17.15), (17.16)}$$

$R(\xi_0)_{\text{сж}} = \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}$ ,  $R(\xi_0)_{\text{выт}} = \xi_0^2 - 1$ .  $G_0(\xi_0)$ ,  $F(\eta)$ ,  $K(\psi)$ ,  $T$  определяются формулами (17.25) — (17.28),  $A(\xi_0)$  определяется формулами (17.30) — (17.33).

Для четырех рассмотренных случаев получим

$$\sigma_{\text{сж} \parallel} = \pm e_0 E_0 \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \times \\ \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}}, \quad (17.39)$$

$$\sigma_{\text{сж} \perp} = e_0 E_0 \frac{\eta \cos \psi}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0^2} \times \\ \times \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} - \frac{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}{\xi_0^2} \right)}, \quad (17.40)$$

$$\sigma_{\text{выт} \parallel} = \pm e_0 E_0 \frac{\eta}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} \xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - 1}} \times \\ \times \frac{1}{\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{1}{\xi_0}}, \quad (17.41)$$

$$\sigma_{\text{выт} \perp} = e_0 E_0 \frac{\sqrt{1-\eta^2} \cos \psi}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2} (\xi_0^2 - 1)} \times \\ \times \frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} \right)}. \quad (17.42)$$

Для проверки рассмотрим асимптотическую форму ( $\xi_0 \rightarrow \infty$ ) формул (17.39) — (17.42). Асимптотическая форма ( $\xi_0 \rightarrow \infty$ ) для всех четырех функций  $A(\xi)$  одна и та же, т. е.

$$A(\xi) \approx 1/3\xi^3 \quad (\xi \gg 1). \quad (17.43)$$

В асимптотическом случае ( $\xi_0 \gg 1$ )  $c\xi_0 = (r_+ + r_-)/2 \approx \approx R$ , где  $R$  — радиус сферы, получающейся в пределе  $\xi_0 \rightarrow \infty$  (при этом для конечного значения  $R$  необходимо, чтобы  $c \rightarrow 0$ ). Для сжатого сфероида в пре-

деле  $\xi_0 \rightarrow \infty$  из (17.25), (17.26) получим  $\pm \sqrt{1-\eta^2} = z/R = \cos \theta$ ,  $\eta \cos \psi = x/R = \cos \theta_x$ , где  $\theta$  (или  $\theta_x$ ) — угол, определяющий положение точки на сфере. Для вытянутого сфероида в пределе  $\xi_0 \rightarrow \infty$  из (17.27), (17.28) получим  $\pm \eta = z/R = \cos \theta$ ,  $\sqrt{1-\eta^2} = x/R = \cos \theta_x$ . Таким образом, все четыре выражения в пределе  $\xi_0 \rightarrow \infty$  переходят в

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (17.44)$$

Теперь рассмотрим другой предельный переход  $\xi_0 \rightarrow 1$ . Сжатый сфероид при этом переходит в диск радиуса  $R=c$ . Функции  $A(\xi_0)$  переходят в предельные формы:

$$A_{\text{сжл}}(\xi_0) \rightarrow a_0/b_0, \quad A_{\text{сжл}}(\xi_0) \rightarrow \pi/4. \quad (17.45)$$

При этом, учитывая (17.26), получим в пределе  $\xi_0 \rightarrow 1$

$$\eta \cos \psi \rightarrow x/R. \quad (17.46)$$

Вытянутый сфероид при  $\xi_0 \rightarrow 1$  переходит в сфероидальную палочку. При этом

$$A_{\text{вытл}}(\xi_0) \rightarrow \ln(2a_0/b_0), \quad A_{\text{вытл}}(\xi_0) \rightarrow 1/2 a_0^2/b_0^2, \quad (17.47)$$

$$\eta \rightarrow \pm z/a_0. \quad (17.48)$$

С учетом (17.45) — (17.48) для предельного случая  $\xi_0 \rightarrow 1$  получим:

$$\sigma_{\text{диск}} \parallel = \pm \epsilon_0 E_0, \quad (17.49)$$

$$\sigma_{\text{диск}} \perp = \epsilon_0 E_0 \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \frac{4}{\pi}, \quad (17.50)$$

$$\sigma_{\text{пал}} \parallel = \epsilon_0 E_0 \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\ln \frac{2a_0}{b_0}}, \quad (17.51)$$

$$\sigma_{\text{пал}} \perp = \epsilon_0 E_0 2 \cos \psi. \quad (17.52)$$

Рассмотрим распределение заряда на поверхности сфероидальной палочки в случае продольного поля, описываемого формулой (17.51). Эти поверхностные заряды создают внутри сфероида однородное электрическое поле, равное  $-E_0$ , которое компенсирует внешнее однородное поле  $E_0$ . Аналогичным образом поверхностные заряды создают электрическое поле внутри проводника (неидеального), когда по нему



идет электрический ток и поверхность проводника уже не является эквипотенциальной.

**Задача 17.2.** Найти распределение заряда на поверхности незаряженного сфероида, внесенного в однородное поле, в случае, когда направление возмущенного поля и ось сфероида составляют некоторый угол.

**Решение.** Если поле  $E_0$  направлено под углом  $\theta$  к оси сфероида, то, рассматривая отдельно продольную часть  $E_{0\parallel} = E_0 \cos \theta$  и поперечную часть  $E_{0\perp} = E_0 \sin \theta$  и используя принцип суперпозиции, получим для возмущенного потенциала, согласно (17.35), (17.36),

$$\varphi = -E_0 \cos \theta z \left( 1 - \frac{A_{\parallel}(\xi)}{A_{\parallel}(\xi_0)} \right) - E_0 \sin \theta x \left( 1 - \frac{A_{\perp}(\xi)}{A_{\perp}(\xi_0)} \right). \quad (17.53)$$

Для поверхностной плотности зарядов получим

$$\sigma = \sigma_{\parallel} \cos \theta + \sigma_{\perp} \sin \theta, \quad (17.54)$$

где  $\sigma_{\parallel}$ ,  $\sigma_{\perp}$  для сжатого сфероида определяются формулами (17.39), (17.40), а для вытянутого сфероида — формулами (17.41), (17.42).

**Задача 17.3.** Найти распределение заряда на поверхности заряженного сфероида, внесенного в однородное электрическое поле.

**Решение.** Если проводник имеет заряд  $Q$ , то к выражению для потенциала, полученного для незаряженного сфероида, нужно добавить потенциал уединенного заряженного сфероида в форме (16.15) или (17.36). При этом для поверхностной плотности заряда получим

$$\sigma = \sigma_{\parallel} \cos \theta + \sigma_{\perp} \sin \theta + \sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (17.55)$$

где  $\sigma_2$  определяется формулой (16.24) (для сжатого сфероида) или формулой (16.42) (для вытянутого сфероида). При этом следует учитывать, что при наличии заряда на проводящем сфероиде его поле будет убывать обратно пропорционально квадрату расстояния, а не кубу, как в случае незаряженного сфероида. Кроме того, это поле зависит от величины заряда сфероида  $Q$ . При решении задачи предполагается, что внешние заряды, если они находятся на проводниках, должны быть достаточно удаленными,

а заряд  $Q$  достаточно малым, чтобы не учитывать его влияние на распределение зарядов на внешних проводниках.

**Задача 17.4.** Найти дипольный момент проводящего незаряженного сфероида, внесенного во внешнее поле.

**Решение.** На больших расстояниях поле, обусловленное зарядами, распределенными по поверхности проводника, можно рассматривать, как поле диполя:

$$E_{\text{дип}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 r^3} (3 (\mathbf{pr}) \mathbf{r} - \mathbf{p} r^2) \quad (17.56)$$

где дипольный момент  $\mathbf{p}$  определяется формулами

$$p_z = \iint_S \sigma z dS, \quad p_x = \iint_S \sigma x dS, \quad p_y = \iint_S \sigma y dS. \quad (17.57)$$

Рассмотрим случай, в котором внешнее поле  $E_0$  параллельно оси сфероида, т. е. оси  $Oz$ . В этом случае  $\text{sign } \sigma = \text{sign } z$ , поэтому  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ . Если вектор  $E_0$  параллелен оси  $Ox$ , то  $p_z = 0$ ,  $p_y = 0$ . Если вектор  $E_0$  перпендикулярен оси  $Oy$  (что всегда будет подразумеваться), то  $p_y = 0$ . Если вектор  $E_0$  составляет с осью  $Oz$  угол  $\theta$  (и перпендикулярен оси  $Oy$ ), то

$$p_z = \iint_S \sigma_{\parallel} \cos \theta z dS, \quad p_x = \iint_S \sigma_{\perp} \sin \theta x dS, \quad p_y = 0. \quad (17.58)$$

Учитывая (17.23) и (17.38) для продольной и поперечной составляющих поля ( $E_{\parallel} = E_0 \cos \theta$ ,  $E_{\perp} = E_0 \sin \theta$ ), получим:

$$\sigma_{\parallel} \cos \theta z dS = E_0 \cos \theta c^2 F_{\parallel}^2(\eta) K_{\parallel}^2(\psi) \frac{1}{A_{\parallel}(\xi_0)} \frac{h_2 h_3}{h_1 R(\xi_0)} d\eta d\psi. \quad (17.59)$$

$$\sigma_{\perp} \sin \theta x dS = E_0 \sin \theta c^2 F_{\perp}^2(\eta) K_{\perp}^2(\psi) \frac{1}{A_{\perp}(\xi_0)} \frac{h_2 h_3}{h_1 R(\xi_0)} d\eta d\psi. \quad (17.60)$$

Для сжатой сфероидальной системы координат

$$F_{\parallel}(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad K_{\parallel}(\psi) = 1, \quad \frac{h_2 h_3}{h_1 R(\xi_0)} = \frac{c \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}},$$

$$F_{\perp}(\eta) = \eta, \quad K_{\perp}(\psi) = \cos \psi. \quad (17.61)$$

Подставляя (17.61) в (17.59) и (17.60), получим:

$$p_z = \varepsilon_0 E_0 \cos \theta \frac{2 \pi c^3}{A_{\parallel}(\xi_0)} 2 \int_0^1 \eta \sqrt{1-\eta^2} d\eta =$$

$$= 4 \pi \varepsilon_0 E_0 \cos \theta \frac{c^3}{3 A_{\parallel}(\xi_0)}, \quad (17.62)$$

$$p_x = \varepsilon_0 E_0 \sin \theta \frac{c^3}{A_{\perp}(\xi_0)} 2 \int_0^1 \frac{\eta^3 d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi =$$

$$= 4 \pi \varepsilon_0 E_0 \sin \theta \frac{c^3}{3 A_{\perp}(\xi_0)}. \quad (17.63)$$

В случае вытянутой сфероидальной системы координат

$$F_{\parallel}(\eta) = \eta, K_{\parallel}(\psi) = 1, \frac{h_2 h_3}{h_1 R(\xi_0)} = c,$$

$$F_{\perp}(\eta) = \sqrt{1-\eta^2}, K_{\perp}(\psi) = \cos \psi. \quad (17.64)$$

Подставляя (17.64) в (17.59) и (17.60), получим:

$$p_z = \varepsilon_0 E_0 \cos \theta \frac{c^3 2 \pi}{A_{\parallel}(\xi_0)} 2 \int_0^1 \eta^2 d\eta =$$

$$= 4 \pi \varepsilon_0 \cos \theta \frac{c^3}{3 A_{\parallel}(\xi_0)}. \quad (17.65)$$

$$p_x = \varepsilon_0 E_0 \sin \theta \frac{c^3}{A_{\perp}(\xi_0)} 2 \int_0^1 (1-\eta^2) d\eta \int \cos^2 \psi d\psi =$$

$$= 4 \pi \varepsilon_0 E_0 \sin \theta \frac{c^3}{3 A_{\perp}(\xi_0)}. \quad (17.66)$$

Из (17.62)—(17.65) видно, что для сжатой и вытянутой систем координат формулы для  $p_x$ ,  $p_z$  имеют одинаковый вид и различаются лишь конкретным значением множителей  $1/A_{\parallel}(\xi_0)$ ,  $1/A_{\perp}(\xi_0)$ .

Если внешнее поле  $E_0$  не совпадает по направлению с осью сфероид и не перпендикулярно этой оси, то направление дипольного момента  $p = \{p_x, 0, p_z\}$  не совпадает с направлением поля, так как  $A_{\parallel} \neq A_{\perp}$  (если сфероид не шар).

## § 18. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ДИЭЛЕКТРИКОВ

**Задача 18.1.** Найти поле вне и внутри однородного диэлектрика в форме сфероида, внесенного в однородное электростатическое поле.

**Решение.** Выделим два частных случая, в которых внешнее невозмущенное поле направлено параллельно ( $\parallel$ ) или перпендикулярно ( $\perp$ ) оси симметрии сфероида. Потенциал невозмущенного поля при этом будет описываться выражением вида (17.24), т. е.

$$\varphi_0 = -E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T. \quad (18.1)$$

Вне диэлектрика (в области 2) потенциал возмущенного поля (т. е. поля в присутствии диэлектрика) будем искать в виде суперпозиции двух соответствующих решений уравнения Лапласа, т. е. в виде

$$\varphi_2 = -E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T(1 - C_2 A(\xi)/A(\xi_0)), \quad (18.2)$$

где  $C_2$  — некоторая константа, которая определится из граничных условий. (В случае проводника эта константа равняется единице.)

Во внутренней области диэлектрика, которую будем обозначать индексом 1, второе решение непригодно, так как оно дает сингулярность для поля в фокальных точках. Поэтому внутри диэлектрика решение ищем в виде

$$\varphi_1 = -E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T C_1. \quad (18.3)$$

Условие непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля записывается в виде

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \Big|_S = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} \Big|_S, \quad \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \psi} \Big|_S = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi} \Big|_S. \quad (18.4)$$

Условие непрерывности потенциала требует выполнения равенства

$$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S. \quad (18.5)$$

(18.4) и (18.5) приводят к одному и тому же уравнению для определения констант  $C_1$  и  $C_2$ :

$$1 - C_2 = C_1. \quad (18.6)$$

Условие непрерывности нормальных составляющих вектора электрического смещения  $D$  записывается в виде

$$\epsilon_r \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Big|_S = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \Big|_S \quad (18.7)$$

и приводит ко второму уравнению для определения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\frac{\partial G_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} (1 - C_2) + G_0 C_2 \frac{1}{G_0^2 R A(\xi_0)} = \epsilon_r \frac{\partial G_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} C_1. \quad (18.8)$$

Уравнение (18.8) можно записать в виде

$$1 - C_2 + \frac{1}{n} C_2 = \epsilon_r C_1, \quad (18.9)$$

где

$$n = A(\xi_0) G_0'(\xi_0) G_0'(\xi_0) R(\xi_0) (G_0'(\xi_0) = \frac{\partial G_0(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0}). \quad (18.10)$$

Решая уравнения (18.6) и (18.9), получим

$$C_1 = \frac{1}{1 + n(\epsilon_r - 1)}, \quad C_2 = \frac{1 + n(\epsilon_r - 1)}{1 + n(\epsilon_r - 1)}. \quad (18.11)$$

Поле внутри диэлектрика равно

$$E = \frac{E_0}{1 + n(\epsilon_r - 1)}, \quad (18.12)$$

т. е. поле внутри диэлектрика однородно, и напряженность его меньше напряженности внешнего невозмущенного поля  $E_0$ .

Снаружи поле неоднородно. Потенциал его описывается функцией (18.2) со значением  $C_2$ , даваемым соотношением (18.11).

Из соотношения (18.11) видно, что поле внутри и вне сфероида зависит не только от значения относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_r$ , но и от формы сфероида, которой определяется величина  $n$ . Назовем эту величину фактором формы.

Для сфероида возникают два «поперечных» фактора формы  $n_x$  и  $n_y$ , которые мы будем обозначать  $n_{\perp}$ , так как  $n_x = n_y$ , и «продольный» фактор формы  $n_z = n_{\parallel}$ .

Покажем, что

$$n_x + n_y + n_z = 1, \text{ т. е. } 2n_{\perp} + n_{\parallel} = 1. \quad (18.13)$$

Для сжатой сфероидальной системы координат

$$G_{0\parallel}(\xi_0) G'_{0\parallel}(\xi_0) R(\xi_0) = a_0^2 b_0 / c^3, \quad (18.14)$$

$$G_{0\perp}(\xi_0) G'_{0\perp}(\xi_0) R(\xi_0) = a^2 b_0 / c^3, \quad (18.15)$$

т. е. эти множители равны. При этом, учитывая (17.30) и (17.31), получим

$$\begin{aligned} n_{\parallel} &= \frac{a_0^2 b_0}{c^3} \left( \frac{c}{b_0} - \operatorname{arctg} \frac{c}{b_0} \right), \quad n_{\perp} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{a_0^2 b_0}{c^3} \left( \operatorname{arctg} \frac{c}{b_0} - \frac{cb_0}{a_0^2} \right). \end{aligned} \quad (18.16)$$

Для вытянутой сфероидальной системы координат

$$G_{0\parallel}(\xi_0) G'_{0\parallel}(\xi_0) R(\xi_0) = a_0 b_0^2 / c^3, \quad (18.17)$$

$$G_{0\perp}(\xi_0) G'_{0\perp}(\xi_0) R(\xi_0) = a_0 b_0^2 / c^3. \quad (18.18)$$

При этом, учитывая (17.32) и (17.33), получим

$$\begin{aligned} n_{\parallel} &= \frac{a_0 b_0^2}{c^3} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c} - \frac{c}{a_0} \right), \\ n_{\perp} &= \frac{a_0 b^2}{2c^3} \left( \frac{ca_0}{b_0^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{a_0 + c}{a_0 - c} \right). \end{aligned} \quad (18.19)$$

С помощью (18.16) и (18.19) легко доказывается соотношение (18.13) ( $a_0^2 = b_0^2 - c^2$ ).

В предельных случаях получаем из (18.16) и (18.19)

$$\begin{aligned} n_{\text{шар}} &= 1/3, \quad n_{\text{диск}\parallel} = 1, \quad n_{\text{диск}\perp} = 0, \quad n_{\text{пал}\parallel} = 0, \\ n_{\text{пал}\perp} &= 1/2. \end{aligned} \quad (18.20)$$

Поле внутри диэлектрика в рассматриваемом случае равно

$$E = \frac{E_0}{1 + n(e_r - 1)}. \quad (18.21)$$

Если поле  $E_0$  составляет угол  $\theta$  с осью  $oz$  (ось сфероиды) и перпендикулярно оси  $oy$ , т. е.  $E_{0z} = E_0 \cos \theta$ ,

$E_{0x} = E_0 \sin \theta$ , то

$$E_z = \frac{E_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel}(\epsilon_r - 1)}, E_x = \frac{E_0 \sin \theta}{1 + n_{\perp}(\epsilon_r - 1)}, E_y = 0. \quad (18.22)$$

Внутри диэлектрика в форме сфероида поле опять однородно, но направление этого поля не совпадает с направлением внешнего невозмущенного поля  $E_0$ , так как  $n_{\parallel} \neq n_{\perp}$ .

**Задача 18.2.** Определить дипольный момент диэлектрического сфероида, внесенного во внешнее однородное поле.

**Решение.**

$$p_z = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel}(\epsilon_r - 1)} V, p_x = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0 \sin \theta}{1 + n_{\perp}(\epsilon_r - 1)} V, p_y = 0, \quad (18.23)$$

где  $V$  — объем сфероида. Для сжатого сфероида  $V = \frac{4}{3}\pi a_0 b_0^2$ . Для вытянутого сфероида  $V = \frac{4}{3}\pi a_0^2 b_0$ .

Заметим, что для всех четырех случаев

$$V/n = \frac{4}{3}\pi c^3/A(\xi_0). \quad (18.24)$$

При этом в пределе  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  формулы (18.23) переходят в соответствующие формулы для дипольного момента проводящего сфероида (ср. с формулами (17.65), (17.66)).

**Задача 18.3.** Найти поле в сфероидальной полости внутри однородного диэлектрика, считая, что диэлектрик поляризован вдали от полости однородно.

**Решение** этой задачи можно провести аналогичным образом. Ответ можно получить, заменяя в формулах (18.22)  $\epsilon_r$  на  $1/\epsilon_r$ .

## § 19. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

**Задача 19.1.** Найти изменение энергии электростатического поля при внесении в поле заряженного проводника.

**Решение.** Пусть вначале внешнее поле  $E_0$  и поле заряженного проводника нигде не перекрываются. При этом проводник не взаимодействует с внешним полем. Суммарная энергия электростатического поля

в этом случае равна

$$W_0 = \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{E}_0 \mathbf{D}_0 dV + \frac{1}{2} \varphi_{\text{уед}} Q, \quad (19.1)$$

где  $V_1$  обозначает ту часть пространства, которую займет проводник после того, как он будет внесен в поле. Через  $\varphi_{\text{уед}}$  обозначен потенциал заряженного проводника в уединенном положении.

После внесения проводника в поле полная энергия электростатического поля будет равна

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_2} \mathbf{E} \mathbf{D} dV, \quad (19.2)$$

так как в области  $V_1$  поле будет равно нулю.

Разность энергий двух состояний  $\delta W = W - W_0$  можно рассматривать как энергию заряженного проводника в поле. Эта разность энергий равна работе внешних сил, с помощью которых проводник был внесен в поле. Работа эта может быть как положительной, так и отрицательной.

Разность энергий  $\delta W$  можно преобразовать таким образом, чтобы она содержала лишь интегралы по поверхности проводника. Для этого учтем, что в области  $V_2$

$$\mathbf{E}_0 \mathbf{D} = \mathbf{E}_0 \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}_0 \mathbf{E}, \quad (19.3)$$

так как предполагается, что диэлектрические свойства в области  $V_2$  не изменяются в результате внесения проводника. Используя (19.3),  $\delta W$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{1}{2} \iiint_{V_2} \mathbf{E} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_2} \mathbf{E}_0 (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) dV - \\ & - \frac{1}{2} \int_{V_1} \bar{\mathbf{E}}_0 \mathbf{D}_0 dV - \frac{1}{2} \varphi_{\text{уед}} Q. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Для дальнейшего преобразования воспользуемся соотношением (15.4). При этом получим

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{1}{2} \iiint_{V_2} \varphi (\rho - \rho_0) dV + \frac{1}{2} \sum_i \iint_{S_i} \varphi (\sigma - \sigma_0) dS + \\ & + \frac{1}{2} \iint_S \varphi (\sigma - D_{0n}) dS + \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \varphi_0 (\rho - \rho_0) dV + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_i \iiint_{S_i} \varphi_0 (\sigma - \sigma_0) dS + \frac{1}{2} \iint_S \varphi_0 (\sigma - D_{0n}) dS + \\
& + \frac{1}{2} \iint_S \varphi_0 D_{0n} dS - \frac{1}{2} \varphi_{\text{уел}} Q. \quad (19.5)
\end{aligned}$$

Первые три члена в (19.5) являются преобразованием (15.4) первого интеграла (19.4). Первый интеграл (19.5) обращается в нуль, так как в области  $V_2$   $\rho = \rho_0$ , т. е. объемное распределение зарядов предполагается фиксированным и не меняется от внесения заряда.

Второй член (19.5) представляет сумму интегралов по поверхностям, на которых возникает разрыв нормальной составляющей векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{D}_0$ . Это могут быть поверхности заряженных или незаряженных проводников, находящихся в области  $V_2$ , а также диэлектрические поверхности с находящимися на них поверхностными зарядами. В случае проводников  $\sigma_0 \neq \sigma$ , так как внесение проводника в поле вызовет изменение поля в области  $V_2$  и, следовательно, приведет к смещению зарядов на других проводниках. Но на поверхности проводников потенциал  $\varphi$  постоянен и, следовательно, интегралы по этим поверхностям дадут заряды, но суммарные заряды на всех проводниках остаются неизменными, поэтому для проводящих поверхностей интегралы, входящие во второй член (19.5), обратятся в нуль. Для интегралов по непроводящим поверхностям следует считать  $\sigma = \sigma_0$ . Таким образом, все интегралы, входящие во второй член (19.5), обращаются в нуль. Третий член (19.5) представляет интеграл по поверхности внесенного в поле проводника. Потенциал на этой поверхности постоянен, а до внесения проводника в области  $V_1$  не должно быть зарядов, поэтому интегрирование  $D_{0n}$  дает нуль, а весь третий член в (19.5) равен  $1/2 \varphi Q$ .

Четвертый, пятый и шестой члены в (19.5) отличаются от рассмотренных трех предыдущих лишь тем, что в них входит невозмущенный потенциал  $\varphi_0$  вместо потенциала  $\varphi$ . При этом четвертый и пятый члены (19.5) обращаются в нуль подобно первому и второму. Седьмой член получается в результате преобразования объемного интеграла в (19.4) по обла-

сти  $V_1$ , поэтому он возникает с обратным знаком по отношению ко второму интегралу шестого члена и они друг друга компенсируют. Таким образом, разность  $\delta W$  преобразуется к виду:

$$\delta W = W - W_0 = \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_{\text{вед}}) Q + \frac{1}{2} \iint_S \varphi_0 \sigma dS. \quad (19.6)$$

Рассмотрим несколько примеров применения соотношения (19.6).

**Задача 19.2.** Какую работу нужно совершить, чтобы удалить из электрического поля проводящий незаряженный или заряженный шар? Радиус шара мал по сравнению с размерами области, в которой напряженность поля меняется существенным образом.

**Решение.** Пусть проводящий шар радиуса  $R$  вносится во внешнее однородное (в некоторой области) поле  $E_0$ . Для начала рассмотрим незаряженный шар. Пусть точка, в которую попадает центр шара, до внесения шара имела потенциал  $\varphi_{00}$ . Потенциал невозмущенного поля в той области, где поле считается однородным, можно задать в виде

$$\varphi_0 = \varphi_{00} - E_0 z = \varphi_{00} - E_0 r \cos \theta. \quad (19.7)$$

После внесения шара потенциал будет задаваться выражением

$$\varphi = \varphi_{00} - E_0 z \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) = \varphi_{00} - E_0 \cos \theta \left( r - \frac{R^3}{r^2} \right) \quad (r > R),$$

$$\varphi = \varphi_{00} \quad (r \leq R). \quad (19.8)$$

Добавленный в (19.8) член представляет потенциал диполя, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме того, (19.8) удовлетворяет постоянству потенциала на поверхности шара (при  $r = R$ ). Таким образом, (19.8) действительно описывает поле в присутствии проводящего незаряженного шара.

Поверхностная плотность зарядов на проводящем шаре равна

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_S = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (19.9)$$

Для энергии шара в поле  $E_0$  получим исходя из

(19.6), (19.7) и (19.9) выражение

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint \varphi_0 \sigma dS = \frac{-1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_0 R^3 \cos \theta \, 3 \epsilon_0 E_0 \times \\ \times \cos \theta \sin \theta d\psi d\theta = -2 \pi \epsilon_0 E_0^2 R^3. \quad (19.10)$$

Работа внешних сил, необходимая для внесения незаряженного проводника в поле, всегда отрицательная. При удалении незаряженного проводника из поля внешние силы должны совершать положительную работу. В случае шара эта работа равна  $2\pi\epsilon_0 E_0^2 R^3$ .

Если шар имеет заряд  $Q$ , то работа, связанная с внесением его в поле, определяется не только напряженностью этого поля, но зависит также и от потенциала той области, куда вносится шар.

Потенциал при этом описывается выражением

$$\varphi_0 = \varphi_{00} - E_0 \cos \theta (r - R^3/r^2) + Q/4\pi\epsilon_0 r, \quad (19.11)$$

переходящим в  $\varphi_0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Поверхностная плотность зарядов на шаре равна

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta + Q/4\pi R^2. \quad (19.12)$$

Энергия шара описывается выражением

$$\delta W = \frac{1}{2} Q \left( \varphi_{00} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right) + \\ + \frac{1}{2} \varphi_{00} Q - 2 \pi \epsilon_0 E_0^2 R = Q \varphi_{00} - 2 \pi \epsilon_0 E_0^2 R^3. \quad (19.13)$$

Если радиус шара устремить к нулю, то получим известный результат для точечного заряда.

**Задача 19.3.** Найти энергию незаряженного проводящего сфероида в однородном электростатическом поле в случае, когда поле параллельно или перпендикулярно оси сфероида.

**Решение.** Если проводящий сфероид не заряжен, то потенциал вблизи проводника описывается выражением (см. 17.34))

$$\varphi = \varphi_{00} - E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T(1 - A(\xi)/A(\xi_0)). \quad (19.14)$$

Для поверхностной плотности зарядов имеем выражение (17.38)

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 E_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T}{h_1 G_0^2(\xi) R(\xi) A(\xi_0)}. \quad (19.15)$$

Учитывая, что  $\varphi_0 = \varphi_{00} E_0 c G_0 FKT$ , получим для энергии незаряженного сфероид в поле  $E_0$  выражение

$$\delta W = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon_0 E_0^2 c^2 F^2 K^2}{A} \frac{h_2 h_3}{h_1 R} d\eta d\psi. \quad (19.16)$$

Выражение (19.16) отличается от соответствующего выражения для дипольного момента проводника в поле лишь множителем (см. (17.58) — (17.60)). Поэтому для всех четырех случаев получим формально одинаковые выражения для  $\delta W$ , отличающиеся лишь конкретным значением множителя  $1/A(\xi_0)$ :

$$\delta W = -2\pi\epsilon_0 E_0^2 \frac{c^3}{3A(\xi_0)} = -\frac{1}{2} p E_0, \quad (19.17)$$

где дипольный момент  $p$  определяется выражением (17.65), если  $\theta=0$ , или (17.66), если  $\theta=\pi/2$ .

В случае  $a_0 \gg c$  сфероиды по форме мало отличаются от шара, поэтому асимптотическая форма  $A(\xi_0)$  для  $\xi_0 \gg 1$  во всех четырех случаях одна и та же:  $A_{ac}(\xi_0) = 1/3\xi_0^3$ . При этом все четыре формулы переходят в соответствующую форму для шара:

$$\delta W_{ac} = -2\pi\epsilon_0 E_0^2 \frac{c^3}{3A_{ac}(\xi_0)} = -2\pi\epsilon_0 E_0^2 R^3 (a_0 = R). \quad (19.18)$$

**Задача 19.4.** Найти энергию незаряженного проводящего сфероид в однородном электростатическом поле в случае, когда поле составляет некоторый угол с осью сфероид.

**Решение.** Случай, в котором поле  $E_0$  составляет угол  $\theta$  с осью сфероид, можно представить как суперпозицию двух случаев. При этом  $E_{0\parallel} = E_0 \cos \theta$  и  $E_{0\perp} = E_0 \sin \theta$ , поэтому ( $\varphi_{00} = 0$ )

$$\begin{aligned} \varphi &= -E_0 \cos \theta G_{0\parallel} F_{\parallel} K_{\parallel} T_{\parallel} (1 - A_{\parallel}(\xi) / A_{\parallel}(\xi_0)) - \\ &\quad - E_0 \sin \theta G_{0\perp} F_{\perp} K_{\perp} (1 - A(\xi) / A(\xi_0)) = \\ &= \varphi_{\parallel} \cos \theta + \varphi_{\perp} \sin \theta, \end{aligned} \quad (19.19)$$

$$\sigma = \sigma_{\parallel} \cos \theta + \sigma_{\perp} \sin \theta. \quad (19.20)$$

Выражение для энергии не будет содержать перекрестных членов, которые при интегрировании по поверхности проводника пропадают в силу свойств

симметрии:

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \iint_S (\varphi_{0\parallel} \cos \theta + \varphi_{0\perp} \sin \theta) (\sigma_{\parallel} \cos \theta + \\ &+ \sigma_{\perp} \sin \theta) dS = \frac{1}{2} \iint_S \varphi_{0\parallel} \sigma_{\parallel} \cos^2 \theta dS + \frac{1}{2} \iint_S \varphi_{0\perp} \times \\ &\times \sigma_{\perp} \sin^2 \theta dS = -2 \pi \epsilon_0 E_0^2 \frac{c^3}{3} \left( \frac{\cos^2 \theta}{A_{\parallel}} + \frac{\sin^2 \theta}{A_{\perp}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} p E_0. \end{aligned} \quad (19.21)$$

**Задача 19.5.** Найти момент сил, действующий на незаряженный проводящий сфероид в однородном электростатическом поле. Рассмотреть предельные формы (диск и сфероидальную палочку).

**Решение.** Выражение для энергии в форме (19.21) зависит от угла  $\theta$ , это означает, что на проводник будет действовать момент сил со стороны электрического поля. Этот момент сил равен

$$M = -\frac{\partial}{\partial \theta} (\delta W) = -2 \pi \epsilon_0 E_0^2 \frac{c^3}{3} \sin 2\theta \left( \frac{1}{A_{\parallel}} - \frac{1}{A_{\perp}} \right). \quad (19.22)$$

Для вытянутого сфероида выражение в скобках в (19.22) положительно, для сжатого сфероида — отрицательно. Это означает, что для вытянутого сфероида устойчивое положение равновесия соответствует  $\theta_{уст} = 0$  (или  $\pi$ ), для сжатого сфероида  $\theta_{уст} = \pi/2$ .

В пределе  $\xi_0 \rightarrow 1$  ( $b_0 \rightarrow 0$ ) сжатый сфероид можно рассматривать как диск, а вытянутый — как сфероидальную палочку. Используя при этом для  $A(\xi_0)$  соответствующие предельные выражения (17.45), (17.47), получим из (19.22) выражения для моментов сил, действующих в однородном электрическом поле на проводящий диск радиуса  $R$  и сфероидальную проводящую палочку длиной  $2a_0$ :

$$M_{\text{диск}} = 2 \pi \epsilon_0 E_0^2 \frac{R^3}{3} \sin 2\theta \frac{4}{\pi}, \quad (19.23)$$

$$M_{\text{пал}} = -2 \pi \epsilon_0 E_0^2 \frac{a_0^3}{3} \sin 2\theta \frac{1}{\ln \frac{2a_0}{b_0}}. \quad (19.24)$$

**Задача 19.6.** Найти энергию заряженного проводящего сфероида во внешнем однородном поле.

**Решение.** Если сфероид имеет заряд  $Q$ , то потенциал вблизи сфероида описывается выражением

$$\varphi = \varphi_{00} - E_0 c G_0 FKT (1 - A(\xi)/A(\xi_0)) + \varphi_2(\xi), \quad (19.25)$$

где  $\varphi_2(\xi)$  — потенциал, описывающий поле уединенного заряженного сфероида, задаваемый формулами (16.15), (16.36). При этом плотность зарядов на проводнике описывается двумя членами:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (19.26)$$

где  $\sigma_1$  относится к случаю незаряженного сфероида, а  $\sigma_2$  — к случаю заряженного уединенного сфероида.

Подставляя  $\varphi_0 = \varphi_{00} - E_0 c G_0 FKT$  и  $\sigma$  в формулу (19.6), получим

$$\delta W = \varphi_{00} Q - 2 \pi \epsilon_0 E_0^2 \frac{c^3}{3A} = \varphi_{00} Q - \frac{1}{2} p E_0. \quad (19.27)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и случай, в котором поле  $E_0$  составляет угол  $\theta$  с осью сфероида. При этом второй член в (19.27) заменится на выражение (19.21), и мы получим

$$\begin{aligned} \delta W &= \varphi_{00} Q - 2 \pi \epsilon_0 E_0^2 \frac{c^3}{3} \left( \frac{\cos^2 \theta}{A_{\parallel}} + \frac{\sin^2 \theta}{A_{\perp}} \right) = \\ &= \varphi_{00} Q - \frac{1}{2} p E_0. \end{aligned} \quad (19.28)$$

**Задача 19.7.** Найти силу, действующую на незаряженный проводящий шар в поле точечного источника.

**Решение.** Известно, что потенциал в случае незаряженного проводящего шара и внешнего точечного заряда вне шара такой же, как потенциал трех точечных зарядов, т. е.

$$\varphi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r_1} - \frac{nq}{4 \pi \epsilon_0 r_2} + \frac{nq}{4 \pi \epsilon_0 r}, \quad (19.29)$$

где  $q$  — внешний точечный заряд, находящийся в точке  $M$ ,  $n=R/l$ ,  $R$  — радиус шара,  $l$  — расстояние от центра шара  $O$  до точки  $M$ ,  $r_1$  — расстояние от точки  $M$  до точки  $\mathcal{P}$ , где определяется потенциал,  $r$  — расстояние  $O\mathcal{P}$ ,  $r_2$  — расстояние от точки  $K$ , где расположен заряд  $-nq$ , до точки  $\mathcal{P}$ . Точка  $K$

находится на отрезке  $OM$  на расстоянии  $a=R^2/l$  от точки  $O$ .

Потенциал, обусловленный зарядами, возникающими на шаре, равен

$$\Phi_{\text{ш}} = \frac{nq}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (19.30)$$

Сила, действующая на шар, по абсолютной величине равна силе, действующей на точечный заряд, т. е. силе

$$F' = \frac{nq^2}{4 \pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r^2} \right) = - \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{R}{l} \left( \frac{1}{(l-R^2/l)^2} - \frac{1}{l^2} \right). \quad (19.31)$$

**Задача 19.8.** Определить энергию проводящего шара в поле точечного заряда.

**Решение.** Работа, которую нужно совершить, чтобы удалить заряд на бесконечность, равна

$$A = \int_l^\infty F dz = \frac{q^2}{8 \pi \epsilon_0} \frac{R^3}{(l^2 - R^2) l^2}. \quad (19.32)$$

Следовательно, энергия проводящего шара в поле точечного заряда, определяемая как работа, которую нужно совершить, чтобы внести этот проводник в поле, равна

$$\delta W = -2 \pi \epsilon_0 E_0^2 R^3 \frac{1}{1 - R^2/l^2}, \quad (19.33)$$

где  $E_0 = q/4\pi\epsilon_0 l^2$  равна напряженности невозмущенного поля в точке  $O$ . Если  $R \ll l$ , то внешнее поле является слабо неоднородным, при этом

$$\delta W \simeq \delta W_0 = -2\pi\epsilon_0 E_0^2 R^3 = -1/2 p E_0, \quad (19.34)$$

где  $p$  — дипольный момент проводящего шара, возникающий в однородном поле  $E_0$ .

**Задача 19.9.** Найти силу, действующую на незаряженный проводящий сфероид в слабо неоднородном электростатическом поле.

**Решение.** Если в поле точечного заряда находится незаряженный проводящий сфероид, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до точечного заряда, т. е.  $a_0 \ll l$ , то силу  $F$ , действующую на сфероид, можно определить, найдя силу, действующую со стороны проводника на точечный заряд. Поле

проводника можно рассматривать как поле диполя, а для определения дипольного момента в случае слабой неоднородности можно использовать приближенные однородного поля.

При этом

$$F' = E_{\text{дип}} q = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 l^3} q = -p \left. \frac{\partial E_0}{\partial z} \right|_l, E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2}. \quad (19.35)$$

Для двух частных случаев получим

$$F_{\parallel} = -F' = p \frac{\partial E_0}{\partial z}, F_{\perp} = -F' = p \frac{\partial E_0}{\partial x}. \quad (19.36)$$

Из (19.36), (19.17) видно, что в приближении слабой неоднородности внешнего поля сила, действующая на проводящий сфероид (для двух типов ориентации), равна

$$F_{\parallel} = -\frac{\partial}{\partial z} \delta W = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} p E_0 \right), F_{\perp} = -\frac{\partial}{\partial x} \delta W = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} p E_0 \right), \quad (19.37)$$

где  $\delta W$  рассчитывается в приближении однородного поля, равного значению невозмущенного поля в точке  $O$ , т. е. в точке, в которую попадает центр сфероид.

С учетом (19.17), (19.37) запишутся в виде

$$F_{\parallel} = \frac{2\pi\epsilon_0 c^3}{3 A_{\parallel}(\xi_0)} \frac{\partial}{\partial z} (E_0^2), F_{\perp} = \frac{2\pi\epsilon_0 c^3}{3 A_{\perp}(\xi_0)} \frac{\partial}{\partial x} (E_0^2). \quad (19.38)$$

Например, для диска ( $R=c$ ) с учетом (17.45) получим

$$F_{\perp} = \frac{8}{3} \epsilon_0 R^3 \frac{\partial E_0^2}{\partial x}. \quad (19.39)$$

Для шара с учетом (17.43) ( $R=c\xi_0$ ) получим

$$F = 2\pi\epsilon_0 R^3 \left. \frac{\partial}{\partial z} (E_0^2) \right|_l, \quad (19.40)$$

что совпадает с (19.31) для случая  $z=l \gg R$  и  $E_0 = q/4\pi\epsilon_0 z^2$ .

**Задача 19.10.** Найти изменение энергии электростатического поля при внесении в него диэлектрика.



**Решение.** Пусть в электростатическое поле напряженностью  $E_0$ , энергия которого равна

$$W_0 = \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{E}_0 \mathbf{D}_0 dV, \quad (19.41)$$

вносится твердый диэлектрик, который в конечном положении занимает объем  $V_1$ . Предполагается, что до внесения диэлектрика этот объем был свободен от зарядов и диэлектриков. В конечном состоянии энергия электростатического поля равна

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{E} \mathbf{D} dV. \quad (19.42)$$

Учитывая, что в объеме  $V_2$  диэлектрические свойства не менялись, т. е.  $\mathbf{E} \mathbf{D}_0 = \epsilon \mathbf{E} \mathbf{E}_0 = \mathbf{D} \mathbf{E}_0$ , получим разность

$$\begin{aligned} \delta W = W - W_0 &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{E} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{E}_0 (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\mathbf{E} \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \mathbf{D}) dV. \end{aligned} \quad (19.43)$$

Последний член в (19.43) возникает в результате того, что в области  $V_1$  изменяется диэлектрическая постоянная, поэтому  $\mathbf{E} \mathbf{D}_0 \neq \mathbf{E}_0 \mathbf{D}$ . Первые два члена (19.43) можно преобразовать так же, как это было сделано в соотношении (19.4). При этом получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{E} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) dV &= \frac{1}{2} \iiint_{V_2} \varphi (\rho - \rho_0) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \iint_{S_i} \varphi (\sigma - \sigma_0) dS + \frac{1}{2} \iint_S \varphi (D_n^{(2)} - D_n^{(1)} - \\ &- D_{0n}^{(2)} + D_{0n}^{(1)}) dS = 0. \end{aligned} \quad (19.44)$$

Первые два члена в (19.44) обращаются в нуль так же, как в (19.5). Последний член в (19.44) обращается в нуль вследствие того, что на поверхности диэлектрика нет свободных поверхностных зарядов, т. е. на границе  $S$   $D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = 0$  и  $D_{0n}^{(2)} - D_{0n}^{(1)} = 0$ . Аналогичным образом обращается в нуль и второй

член (19.43). Таким образом, получим

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\mathbf{E} \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \mathbf{D}) dV. \quad (19.45)$$

Учитывая, что в области  $V_1$   $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , получим

$$\delta W = -\frac{1}{2} \iiint_{V_1} \mathbf{P} \mathbf{E}_0 dV. \quad (19.46)$$

Рассмотрим некоторые примеры применения формулы (19.46).

**Задача 19.11.** Найти энергию диэлектрика в форме сфероида, внесенного в однородное электрическое поле.

**Решение.** Пусть в однородное поле  $\mathbf{E}_0$  вносится сфероид. Тогда, если ось сфероида параллельна ( $\parallel$ ) или перпендикулярна ( $\perp$ ) внешнему невозмущенному полю, получим с учетом (18.19)

$$\begin{aligned} \delta W &= -\frac{\epsilon_0}{2} (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \mathbf{E}_0 V = -\frac{\epsilon_0}{2} (\epsilon_r - 1) \times \\ &\times \frac{E_0^2}{1 + n (\epsilon_r - 1)} V = -\frac{1}{2} p E_0^2, \end{aligned} \quad (19.47)$$

где  $n$  — соответствующий фактор формы,  $p$  — дипольный момент сфероида.

Если однородное поле направлено под углом  $\theta$  к оси симметрии, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 \mathbf{E} &= E_{0\parallel} E_{\parallel} + E_{0\perp} E_{\perp} = E_0^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{1 + n_{\parallel} (\epsilon_r - 1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \theta}{1 + n_{\perp} (\epsilon_r - 1)} \right). \end{aligned} \quad (19.48)$$

Энергия сфероида в поле равна

$$\begin{aligned} \delta W &= -\frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0^2 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{1 + n_{\parallel} (\epsilon_r - 1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \theta}{1 + n_{\perp} (\epsilon_r - 1)} \right\} V. \end{aligned} \quad (19.49)$$

**Задача 19.12.** Определить момент сил, действующий на диэлектрик в форме сфероида во внешнем однородном электрическом поле. Рассмотреть предельные формы (диск и сфероидальная палочка).

**Решение.** Энергия в (19.49) зависит от угла, следовательно, на сфероид действует со стороны поля момент сил:

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{\partial}{\partial \theta} (\delta W) = -\frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0^2 \sin 2\theta \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{1 - n_{\parallel} (\epsilon_r - 1)} - \frac{1}{1 - n_{\perp} (\epsilon_r - 1)} \right\} V = \\
 &= -\frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)^2 E_0^2 \sin 2\theta \frac{n_{\perp} - n_{\parallel}}{(1 + n_{\parallel} (\epsilon_r - 1)) (1 + n_{\perp} (\epsilon_r - 1))} V.
 \end{aligned}
 \tag{19.50}$$

Момент сил определяется факторами формы. Для сжатого сфероида  $n = AG_0 G'_0 R = \frac{a_0^2 b_0}{c^3} A$ , при этом

$n_{\perp} - n_{\parallel} = \frac{a_0^2 b_0}{c^3} (A_{\perp} - A_{\parallel}) < 0$ , т. е. устойчивое положение равновесия соответствует углу  $\theta = \pi/2$ . Для вытянутого сфероида  $n = AG_0 G'_0 R = \frac{c_0 b^2}{\epsilon}$ , при этом

$n_{\perp} - n_{\parallel} = \frac{a_0 b_0^2}{c^3} (A_{\perp} - A_{\parallel}) > 0$ , т. е. устойчивое положение равновесия соответствует углу  $\theta = 0$ .

Для проверки полученных формул можно использовать предельный переход  $\epsilon_r \rightarrow \infty$ . В этом случае поле вблизи диэлектрика нормально к поверхности диэлектрика, а внутри диэлектрика при конечном значении поляризации поле  $E$  равно нулю. Поэтому энергия диэлектрика в пределе  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  должна равняться энергии незаряженного проводника той же формы и размеров. Учитывая, что  $\frac{V}{n} = \frac{4}{3} \pi \frac{c^3}{A}$ , в пределе  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  из (19.47), (19.49), (19.50) получим (19.17), (19.21), (19.22).

В предельных случаях  $\xi_0 \rightarrow 1$  формула (19.50) дает значение момента сил, действующего на диск или сфероидальную палочку. Для диска  $n_{\parallel} = 1$ ,  $n_{\perp} = 0$ , откуда

$$M_{\text{диск}} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0^2 \sin 2\theta \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) V. \tag{19.51}$$

Для сфероидальной палочки  $n_{\parallel}=0$ ,  $n_{\perp}=1/2$ , откуда

$$M_{\text{пал}} = -\frac{1}{2} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0^2 \sin 2\theta \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1)} \right). \quad (19.52)$$

**Задача 19.13.** Определить силу, действующую на диэлектрик в форме сфероида в слабо неоднородном электростатическом поле.

**Решение.** В неоднородном поле на диэлектрик действует сила. Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при рассмотрении проводника в поле точечного заряда, для слабой неоднородности получим, что силу, действующую на диэлектрический сфероид, можно представить как силу, действующую на диполь. При этом для двух типов ориентации сфероида получим

$$F_{\parallel} = p \frac{\partial E_0}{\partial z}, \quad F_{\perp} = p \frac{\partial E_0}{\partial x}. \quad (19.53)$$

Выражая дипольный момент через среднюю (по объему) поляризацию, получим

$$p = \iiint P dV = \langle P \rangle V. \quad (19.54)$$

В приближении слабой неоднородности для вычисления средней поляризации можно использовать приближение однородного поля, т. е. положить для сфероида

$$\langle P \rangle = \epsilon_0 \frac{(\epsilon_r - 1) E_0}{1 + n (\epsilon_r - 1)}. \quad (19.55)$$

При этом для силы, действующей на диэлектрический сфероид, получим приближенное выражение

$$F_{\parallel} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_0}{1 + n_{\parallel} (\epsilon_r - 1)} \frac{\partial E_0}{\partial z} V = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial z} \times \\ \times \left( \frac{(\epsilon_r - 1) E_0^2}{1 + n_{\parallel} (\epsilon_r - 1)} \right) V = -\frac{\partial}{\partial z} (\delta W_{\parallel}), \quad (19.56)$$

$$F_{\perp} = \epsilon_0 \frac{(\epsilon_r - 1) E_0}{1 + n_{\perp} (\epsilon_r - 1)} \frac{\partial E_0}{\partial x} V = -\frac{\partial}{\partial x} (\delta W_{\perp}). \quad (19.57)$$

В предельном случае  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  (19.56), (19.57) переходят в соответствующие выражения для проводящего сфероида.

## § 20. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ И МАГНЕТИКОВ

**Задача 20.1.** Показать, что интеграл по замкнутому контуру, охватывающему рамку с током, от напряженности магнитного поля, равен току, идущему по рамке.

**Решение.** Учитывая, что напряженность магнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (20.1)$$

где  $I d\mathbf{l}$  — элемент тока,  $\mathbf{r}$  — вектор, проведенный от элемента тока в точку  $\mathcal{P}$ , где определяется поле, получим для интеграла по замкнутому контуру  $X$ :

$$\oint_X \mathbf{H} d\mathbf{x} = \frac{I}{4\pi} \oint_X \oint_L \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{r}) d\mathbf{x}}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \oint \oint \frac{(-d\mathbf{x} \times d\mathbf{l}) \left( \frac{-\mathbf{r}}{r} \right)}{r^2}. \quad (20.2)$$

Выражение, стоящее под интегралом, представляет проекцию элемента площади на направление  $-\mathbf{r}/r$ , отнесенную к  $r^2$ . Элемент площади получается в результате смещения элемента рамки на величину  $-d\mathbf{x}$ . Интегрирование этого выражения по всей рамке дает изменение телесного угла  $d\Omega$ , возникающее в результате смещения точки наблюдения  $\mathcal{P}$  на  $d\mathbf{x}$ . Телесный угол будем считать положительным, если наблюдателю, находящемуся в точке  $\mathcal{P}$ , ток в рамке кажется идущим по часовой стрелке. В противном случае телесному углу будем приписывать отрицательные значения.

Пусть начальной точке  $\mathcal{P}$  соответствует положительное значение телесного угла. При приближении к точке  $C$ , лежащей в плоскости рамки (внутри), телесный угол будет стремиться к значению  $2\pi$ . Сразу после прохождения плоскости рамки он станет равным  $-2\pi$ . Интегрирование по замкнутому контуру, охватывающему рамку один раз, даст

$$\begin{aligned} \frac{I}{4\pi} \oint_X d\Omega &= \frac{I}{4\pi} \int_C^C d\Omega + \frac{I}{4\pi} \int_C^{\mathcal{P}} d\Omega = \frac{I}{4\pi} (2\pi - \Omega(\mathcal{P})) + \\ &+ \frac{I}{4\pi} (\Omega(\mathcal{P}) - (-2\pi)) = I, \end{aligned} \quad (20.3)$$

т. е.

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} d\mathbf{x} = I. \quad (20.4)$$

**Задача 20.2.** Найти векторный потенциал треугольной рамки с током на больших расстояниях от рамки.

**Решение.** Обозначим вектор, проведенный из точки  $Q$ , в которой находится элемент тока  $I d\mathbf{l}$ , в точку  $\mathcal{P}$ , в которой определяется векторный потенциал, через  $\mathbf{r}'$ , а вектор, проведенный из некоторой точки  $O$ , находящейся вблизи элемента  $d\mathbf{l}$ , в точку  $Q$  — через  $\mathbf{r}$ . Для вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $\mathcal{P}$ , получим  $\mathbf{r} = \mathbf{\rho} + \mathbf{r}'$ , откуда  $r'^2 = r^2 - 2\mathbf{\rho} \cdot \mathbf{r} + \rho^2$ . Учитывая малость  $\rho$  ( $\rho \ll r$ ), получим приближенное равенство

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{\rho} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (20.5)$$

Векторный потенциал линейного тока определяется выражением

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l}}{r'}. \quad (20.6)$$

На больших расстояниях, используя (20.5) и то, что  $\oint d\mathbf{l} = 0$ , получим

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint d\mathbf{l} (\mathbf{\rho} \cdot \mathbf{r}). \quad (20.7)$$

Рассмотрим рамку в виде прямоугольного треугольника, стороны которого задаются уравнениями 1)  $x' = 0$ , 2)  $y' = b$  3)  $y' = (b/a)x'$ . Точку  $O$  свяжем с началом координат, при этом вектор  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  и  $\mathbf{\rho} = \{x', y', 0\}$ .

Интегрируя по контуру рамки, получим

$$\begin{aligned} \oint_L d\mathbf{x}' (\mathbf{\rho} \cdot \mathbf{r}) &= \int_0^a dx' \left( x' x + \frac{b}{a} x' y \right) + \int_a^0 dx' (x' x + \\ &+ by) = -\frac{1}{2} aby = -S y, \end{aligned} \quad (20.8)$$

$$\begin{aligned} \oint_L dy' (\mathbf{\rho} \cdot \mathbf{r}) &= \int_0^b dy' \left( \frac{a}{b} y' x + y' y \right) + \int_b^0 dy' y' y = \\ &= \frac{1}{2} abx = S x, \end{aligned}$$

т. е.

$$\oint_L d\mathbf{l}(\mathbf{p}\mathbf{r}) = \mathbf{S} \times \mathbf{r}, \text{ где } \mathbf{S} = \{0, 0, S\}. \quad (20.9)$$

Если ввести магнитный (дипольный) момент рамки, равный

$$\mathbf{p}_m = IS, \quad (20.10)$$

то для векторного потенциала получим

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_m \times \mathbf{r}. \quad (20.11)$$

Если рамка имеет более сложную форму, то ее можно представить состоящей из рассмотренных треугольных элементов, при этом на больших расстояниях

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{1}{r_{mi}^3} \mathbf{p}_{mi} \times \mathbf{r} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{p}_m \times \mathbf{r},$$

где

$$\mathbf{p}_m = \sum_i \mathbf{p}_{mi}. \quad (20.12)$$

**Задача 20.3.** Найти индукцию магнитного поля, создаваемую рамкой с током, на больших расстояниях от рамки.

**Решение.**

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \text{rot}(\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}) + \left( \text{grad} \frac{1}{r^3} \times (\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}) \right) \right\}. \quad (20.13)$$

Учитывая, что

$$\text{rot}(\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}) = 2 \mathbf{p}_m, \quad \text{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right) = - \frac{3}{r^5} \mathbf{r}, \quad (20.14)$$

получим из (20.13)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \{ 3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{p}_m r^2 \}. \quad (20.15)$$

**Задача 20.4.** Показать, что магнитное поле, создаваемое рамкой с током, можно описывать скалярным потенциалом.

**Решение.** Для области пространства, где нет объемных токов,

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0.$$

Такая ситуация возникает, например, в том случае, если поле создается плоской рамкой с током бесконечно малого сечения. Для того чтобы область вне проводников с током сделать односвязной, необходимо на рамку мысленно натянуть перегородку. При этом точки с разных сторон перегородки будут считаться существенно различными. При наличии перегородки

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{x} = 0$$

для всей области, где нет токов (так как контур интегрирования не должен пересекать перегородку), поэтому можно будет ввести скалярный потенциал

$$\varphi_m = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{H} d\mathbf{x} = -\frac{I}{4\pi} \Omega(\mathcal{P}). \quad (20.16)$$

Из (20.16) видно, что точкам с разных сторон перегородки соответствуют разные значения потенциала  $\varphi_m$ . Ситуация при этом аналогична той, которая возникает для плоского конденсатора с бесконечно малым расстоянием между пластинами (двойной слой).

Из (20.16) получим

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_m. \quad (20.17)$$

Используя аналогию между магнитостатикой и электростатикой, можно получить формулу для индукции магнитного поля магнитного диполя в виде (20.15).

**Задача 20.5.** Найти поле и намагничение внутри однородного магнетика в форме сфероида, помещенного в однородное магнитное поле.

**Решение.** Вводя скалярный потенциал  $\varphi_m$ , получим уравнение

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div} (-\mu_0 \text{grad } \varphi_m + \mu_0 \mathbf{J}) = 0. \quad (20.18)$$

Чтобы не ограничить рассмотрение случаем линейной зависимости между намагничением и полем, который полностью аналогичен соответствующей задаче с диэлектриком, положим лишь, что намагничение однородно. При этом получим уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi_m = 0 \quad (20.19)$$



с соответствующими граничными условиями на границе магнетика. Решение будем искать в виде, аналогичном (18.2):

$$\varphi_{m2} = -H_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T (1 - C_2 A(\xi) / A(\xi_0)) \quad (\text{вне магнетика}), \quad (20.20)$$

$$\varphi_{m1} = -H_0 c G_0(\xi) F(\eta) K(\psi) T C_1 \quad (\text{внутри магнетика}). \quad (20.21)$$

Условие непрерывности тангенциальных составляющих вектора **H** приводит к уравнению

$$1 - C_2 = C_1. \quad (20.22)$$

Условие непрерывности нормальных составляющих вектора **B** приводит к уравнению (для случая  $\parallel$ )

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} H_0 \left\{ 1 - C_2 + \frac{1}{n} C_2 \right\} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} H_0 C_1 + J \cos \theta, \quad (20.23)$$

где  $\theta$  — угол между направлением намагничивания и нормалью к поверхности сфероида.

В случае ( $\perp$ ) вместо  $\partial z / \partial \xi$  возникнет множитель  $\partial x / \partial \xi$ .

$$\cos \theta = \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} \left( \text{или } \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_{\xi_0} \right). \quad (20.24)$$

Из (20.21) видно, что

$$H_1 = C_1 H_0. \quad (20.25)$$

Исключая из (20.23) с помощью (20.22)  $C_2$  и учитывая (20.24) и (20.25), получим

$$H_1 = H_0 - nJ. \quad (20.26)$$

Чтобы найти  $J$ , введем магнитную восприимчивость  $\chi$  и магнитную проницаемость  $\mu_r = 1 + \chi$ :

$$\chi = J / H_1 = J / C_1 H_0. \quad (20.27)$$

В (20.27)  $\chi$  может быть функцией поля, т. е.  $\chi = \chi(H_1)$ . Используя (20.25), (20.27), из (20.26) получим

$$C_1 = 1 / [1 + n\chi(H_1)], \quad (20.28)$$

откуда

$$H_1 = H_0 / [1 + n\chi(H_1)]. \quad (20.29)$$

Для намагничения и магнитной индукции получим

$$J = \chi H_0 / (1 + n\chi), \quad B = \mu_0 \mu_r H_0 / (1 + n\chi) \quad (20.30)$$

Из (20.29), (20.30) видно, что для сильных магнетиков ( $\chi \gg 1$ )

$$H_1 \ll H_0, \quad J = H_0/n, \quad B = \mu_0 H/n. \quad (20.31)$$

Из (20.31) видно, что для сильных магнетиков (в том числе и для ферромагнетиков, когда  $\chi = \chi(H_1) \gg 1$ ) намагничение и индукция магнетика в форме сфероида определяются лишь внешним полем  $H_0$  и фактором формы  $n$ , зависимость от  $\chi$ ,  $\mu_r$  при этом пропадает.

Если внешнее поле  $H_0$  составляет угол  $\theta$  с осью сфероида, то

$$J_z = \frac{\chi_{\parallel} H_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel} \chi_{\parallel}}, \quad J_x = \frac{\chi_{\perp} H_0 \cos \theta}{1 + n_{\perp} \chi_{\perp}}, \quad (20.32)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 (1 + \chi_{\parallel}) H_0 \cos \theta}{1 + n_{\parallel} \chi_{\parallel}}, \quad B_x = \frac{\mu_0 (1 + \chi_{\perp}) H_0 \cos \theta}{1 + n_{\perp} \chi_{\perp}}, \quad (20.33)$$

$$\chi_{\parallel} = \chi_{\parallel}(J_x, J_z), \quad \chi_{\perp} = \chi_{\perp}(J_x, J_z).$$

**Задача 20.6.** Рассмотреть вопрос об однозначности решения уравнений для постоянного магнитного поля.

**Решение.** Учитывая уравнения

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \text{ и } \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (20.34)$$

и граничное условие

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{j}_{\text{пов}}, \quad (20.35)$$

( $\mathbf{n}$  направлен из области 1 в область 2), а также соотношение

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \quad (20.36)$$

и теореме Остроградского, получим

$$\iiint_V \mathbf{B} \mathbf{H} dV = \iiint_V \mathbf{j} \mathbf{A} dV + \iint_S \mathbf{j}_{\text{пов}} \mathbf{A} dS. \quad (20.37)$$

Рассмотрим два случая  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{j}_{\text{пов}}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{j}'_{\text{пов}}$ ,

$A', H', B'$ . Обобщая (20.37), получим

$$\iiint_V (B - B') (H - H') dV = \iiint_V (j - j') (A - A') dV + \\ + \iint (j_{\text{пов}} - j'_{\text{пов}}) (A - A') dS. \quad (20.38)$$

Если  $j = j'$ ,  $j_{\text{пов}} = j'_{\text{пов}}$ , то получим

$$\iiint_V (B - B') (H - H') dV = 0. \quad (20.39)$$

Если  $B = \mu H$ , где  $\mu$  — константа, то из (20.39) следует, что  $B = B'$ . В случае более сложной зависимости  $J$  от  $H$ , например в случае зависимости  $\chi(H_1)$ , возникающей для первоначально размагниченного магнетика при последовательном увеличении внешнего поля  $H_0$ , вопрос об однозначности может быть решен путем анализа выражения (20.29). В случае гистерезиса однозначность нарушается явным образом. При этом может существовать остаточная намагниченность без внешнего поля  $H_0$ .

**Задача 20.7.** Рассмотреть зависимость остаточной намагниченности в сфероиде от его формы.

**Решение.** Пусть при размагничивании очень длинного сфероида, для которого  $n_{\parallel} \simeq 0$  (или тороида), зависимость намагничения от внутреннего поля  $H_1$  (при  $n=0$ ,  $H_1=0$ ) описывается функцией  $J=f(H_1)$ . При этом  $J_{\text{ост}}(n=0)=f(0)$ . Для сфероида, имеющего фактор формы  $n$ , из уравнения (20.26) при  $H_0=0$  получим  $H_{1\text{ост}} = -nJ_{\text{ост}}$ .  $J_{\text{ост}}$  определится из уравнения

$$J_{\text{ост}} = f(-nJ_{\text{ост}}) < J_{\text{ост}}(n=0).$$

Для остаточного значения  $B$  получим

$$B_{\text{ост}} = \mu_0 (H_{1\text{ост}} + J_{\text{ост}}) = \mu_0 (1-n) J_{\text{ост}}. \quad (20.40)$$

Из (20.40) видно, что при  $n=1$   $B_{\text{ост}}=0$ .

**Задача 20.8.** Найти силу, с которой взаимодействуют на большом расстоянии две круговые рамки с токами.

**Решение.** Рассмотрим рамку с током в неоднородном внешнем поле. На нее действует сила

$$\mathbf{F}_{12} = I_2 \oint_L d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1. \quad (20.41)$$

Введем потенциальную функцию  $U$ :

$$\begin{aligned} -\delta U_{12} &= \mathbf{F}_{12} \delta \mathbf{x} = I_2 \oint_{L_1} (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1) \delta \mathbf{x} = I_2 \oint_{L_1} (\delta \mathbf{x} \times d\mathbf{l}_2) \mathbf{B}_1 = \\ &= I_2 \delta \iint_{S_1} \mathbf{B}_1 d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (20.42)$$

Тогда для слабо неоднородного поля

$$F_x = - \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{I=\text{const}} \approx I_2 S_2 \frac{\partial B_1}{\partial x} = p_{m2} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (20.43)$$

На расстояниях, больших по сравнению с рамкой, поле первой рамки определяется формулой (20.15), где  $p_m = I_1 S_1$ .

В случае, когда обе рамки находятся в одной плоскости, получим

$$\mathbf{B}_1 = - \frac{\mu_0}{4\pi} p_{m1} \frac{1}{x^3}. \quad (20.44)$$

Для силы взаимодействия получим

$$F_x = \frac{\mu_0}{4\pi} 3 p_{m1} p_{m2} \frac{1}{x^4}. \quad (20.45)$$

Если дипольные моменты одного знака, то рамки отталкиваются.

В случае, когда обе рамки имеют общую ось

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} 2 p_{m1} \frac{1}{z^3}, \quad (20.46)$$

и сила равна

$$F_z = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6 p_{m1} p_{m2}}{z^4}. \quad (20.47)$$

## § 21. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Если  $\mu_r$  не зависит от поля, то энергия магнитного поля равна

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV. \quad (21.1)$$

**Задача 21.1.** Найти энергию однородного сфероида в однородном магнитном поле.

**Решение.** Пусть в объем  $V_1$  вносится магнетик. Первоначально в объеме  $V_1$   $\mu_r = 1$ . В остальной части  $\mu_r$  не меняется. Изменение энергии при внесении в объем  $V_1$  магнетика равно

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B} \mathbf{H} dV - \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B}_0 \mathbf{H}_0 dV = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B}_0 (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) dV + \\ &\quad + \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\mathbf{B} \mathbf{H}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{H}) dV. \end{aligned} \quad (21.2)$$

В преобразовании (21.2) учтено, что в области 2

$$\mathbf{B} \mathbf{H}_0 = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0 \mathbf{H}.$$

Для преобразования (21.2) учтем соотношение

$$\iiint_{V_1+V_2} \mathbf{B} \mathbf{H}_0 dV = \iiint_{V_1+V_2} \mathbf{j}_0 \mathbf{A} dV + \iint_S \mathbf{j}_{0 \text{ пов}} \mathbf{A} dS, \quad (21.3)$$

которое является обобщением соотношения (20.37).

Учитывая, что  $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_0$  и  $\mathbf{j}_{\text{пов}} = \mathbf{j}_{0 \text{ пов}}$  и (21.3), получим, что первые два интеграла в (21.2) обращаются в нуль. Учитывая, далее, что в области 1  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J})$ ,  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ , получим

$$\delta W = \frac{1}{2} \iiint_{V_1} (\mathbf{B} \mathbf{H}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{H}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \mathbf{J} \mathbf{B}_0 dV. \quad (21.4)$$

Рассмотрим случай, когда внешнее поле однородно, вносимый магнетик также однороден и имеет форму сфероида. С учетом (20.32), (20.33), получим

$$\delta W = \frac{1}{2} \chi H_0^2 B_0 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{1 + n_{\parallel} \chi} + \frac{\sin^2 \theta}{1 + n_{\perp} \chi} \right\} V, \quad (21.5)$$

где  $V$  — объем сфероида, равный  $4/3 \pi b^2 a$  или  $4/3 \pi b a^2$ .

**Задача 21.2.** Найти момент сил, действующий на однородный сфероид в однородном магнитном поле.

**Решение.**

$$\begin{aligned} M &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\delta W) = - \frac{1}{2 \mu_0} \chi B_0^2 \sin 2\theta \left\{ \frac{1}{1 + n_{\parallel} \chi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1 + n_{\perp} \chi} \right\} V = - \frac{1}{2 \mu_0} \chi^2 B_0^2 \sin 2\theta \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{n_{\perp} - n_{\parallel}}{(1 + n_{\parallel} \chi)(1 + n_{\perp} \chi)} \right\} V. \quad (21.6)$$

Анализ (21.6) и предельные формы (диск ( $n_{\parallel}=1$ ,  $n_{\perp}=0$ ) и сфероидальная палочка ( $n_{\parallel}=0$ ,  $n_{\perp}=1/2$ ); см. в (19.12).

**Задача 21.3.** Найти силу, действующую на однородный сфероид в слабо неоднородном магнитном поле.

**Решение.** Пусть внешнее поле создается кольцом с током, а центр сфероида расположен в плоскости кольца на большом расстоянии от него. При этом ограничимся рассмотрением двух частных случаев ориентации сфероида: случаем ( $\parallel$ ), в котором ось сфероида перпендикулярна плоскости кольца (т. е. параллельна внешнему полю), и случаем ( $\perp$ ), в котором ось сфероида направлена по прямой, соединяющей центры кольца и сфероида (т. е. внешнее поле перпендикулярно оси сфероида).

Сила, действующая на магнетик, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей на кольцо с током.

Введем систему координат с началом в центре сфероида. Координаты сфероида обозначим через  $x_1, y_1, z_1$ .

Поле магнетика определяется его намагничением и в плоскости  $z=0$  равно

$$B_1(x, y, 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{3(Jr) \mathbf{r} - J r^2}{r^5} dx_1 dy_1 dz_1, \quad (21.7)$$

где  $\mathbf{r} = \{x - x_1, y - y_1, -z_1\}$ .

Обозначим координату центра кольца через  $x_0 < 0$ . Для точек, лежащих в плоскости кольца (внутри него),  $x \approx x_0$ ,  $|y| \ll x_0$ .

Для точек сфероида  $|x_1| \ll x_0$ ,  $|y_1| \ll x_0$ ,  $|z_1| \ll x_0$ . Учитывая малость всех координат по сравнению с  $x$ , получим

$$\left. \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ J_z=\text{const}}} = \frac{3\mu_0}{4\pi x_0^4} \iiint J_z dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{3\mu_0}{4\pi x_0^4} p_{m1}. \quad (21.8)$$

где

$$p_{m1} = \iiint J_z dx_1 dy_1 dz_1. \quad (21.9)$$

Сила, действующая на кольцо с током, равна

$$F = IS \frac{\partial B_z}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ J_z=\text{const}}} = \frac{3 \mu_0 p_{m1} p_{m2}}{4 \pi x_0^4}, \quad (21.10)$$

где  $p_{m2} = IS_1$ .

Формулу (21.10) можно представить в виде

$$F = p_{m1} \frac{\partial B_{0z}}{\partial x_1} \bigg|_{x_1=0, y_1=0, z_1=0}, \quad (21.11)$$

где

$$B_0(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4 \pi} \frac{3(p_{m2} r_{01}) r_{01} - p_{m2} r_{01}^2}{r_{01}^5}, \quad (21.12)$$

$$r_{01} = \{x_1 - x_0, y_1, z_1\}.$$

При этом

$$\frac{\partial B_{0z}}{\partial x_1} \bigg|_{x_1=0, y_1=0, z_1=0} = \frac{3 \mu_0}{x_0^4} p_{m2}. \quad (21.13)$$

В случае слабой неоднородности при вычислении магнитного момента  $p_{m1}$  можно считать, что поле  $B_0$  однородно и равно его значению в центре сфероида. При этом

$$p_{m1} = \frac{\chi B_0}{\mu_0 (1 + n \chi)} V_1. \quad (21.14)$$

Для силы, действующей на сфероид, получим выражение

$$F = \frac{\chi B_0 V_1}{\mu_0 (1 + n_{\parallel} \chi)} \frac{\partial B_0}{\partial x_1} \bigg|_{x_1=0} = \frac{1}{2 \mu_0} \frac{\chi V_1}{1 + n_{\parallel} \chi} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_1} (B_0^2) \bigg|_{x_1=0} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta W_{\parallel}) \bigg|_{x_1=0}, \quad (21.15)$$

где  $\delta W_{\parallel}$  вычисляются в приближении однородного поля, равного значению поля  $B_0$  в центре сфероида.

Аналогичным образом можно рассмотреть случай ( $\perp$ ). При этом получим

$$F = \frac{\chi B_0 V_1}{\mu_0 (1 + n_{\perp} \chi)} \frac{\partial B_0}{\partial x_1} \bigg|_{x_1=0} = \frac{1}{2 \mu_0} \frac{\chi V_1}{1 + n_{\perp} \chi} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x_1} (B_0^2) \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\delta W_{\perp}) \Big|_{x_1=0}. \quad (21.16)$$

Если  $n\chi \gg 1$ , то из (21.15), (21.16) получаем

$$F = \frac{1}{2\mu_0} \frac{V_1}{n} \frac{\partial}{\partial x_1} (B_0^2) \Big|_{x_1=0}. \quad (21.17)$$

Для шара радиуса  $R$  и кольца с током радиуса  $a$  получим силу взаимодействия

$$F = \frac{3\chi}{3+\chi} \frac{\mu_0}{4} \pi I^2 a^4 R^3 \frac{1}{x_0^7}. \quad (21.18)$$

Если  $\chi \gg 1$ , то

$$F = \frac{3}{4} \mu_0 \pi I^2 a^4 R^3 \frac{1}{x_0^7}. \quad (21.19)$$

**Задача 21.4.** Определить коэффициент самоиндукции для квадратной рамки с током. Рассмотреть также рамку в виде кольца.

**Решение.** Обозначим сторону квадрата через  $b$ , радиус проволоки — через  $a$ . Будем считать, что  $a \ll b$ , и при вычислении пренебрегать величинами порядка  $a/b$  по сравнению с единицей.

В рассматриваемом случае энергия магнитного поля равна

$$W = \frac{1}{2} I^2 L = \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{пров}}} j(x, y, z) A(x, y, z) dV, \quad (21.20)$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_{\text{пров}}} \frac{j'(x_1, y_1, z_1) dV}{R}, \quad R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}. \quad (21.21)$$

Найдем вклад в  $A$  прямолинейного участка тока длиной  $l$ . Обозначим этот вклад через  $A_1$ :

$$A_1(z, r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\tau}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi + (z-z_1)^2}} \times \\ \times r_1 dr_1 d\varphi dz_1, \quad (21.22) \\ \tau = \{0, 0, 1\}.$$

Интегрируя по  $z_1$ , получим ( $\rho^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi$ )

$$\int_0^l \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z_1)^2}} dz_1 = \int_0^z \frac{dz_1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z_1)^2}} +$$



$$+ \int_z^l \frac{dz_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}} = \ln(z + \sqrt{z^2 + \rho^2}) - \ln \rho + \\ + \ln(l - z + \sqrt{(l - z)^2 + \rho^2}) - \ln \rho. \quad (21.23)$$

Для точек, лежащих внутри рассматриваемого проводника,  $r < a$ , и так как  $a \rightarrow 0$ , то  $\ln(z + \sqrt{z^2 + \rho^2}) \rightarrow \ln 2z$ ,  $\ln(l - z + \sqrt{(l - z)^2 + \rho^2}) \rightarrow \ln(2(l - z))$ . Интегрирование этих членов по  $r_1 dr_1$  и  $d\varphi$  дает множитель  $\pi a^2$ .

$$\int_0^{2\pi} \ln(\rho^2) d\varphi = \int_0^{2\pi} \ln\{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi\} d\varphi = \\ = 2\pi \{\ln(r^2) \theta(r - r_1) + \ln(r_1^2) \theta(r_1 - r)\}, \quad (21.24)$$

где  $\theta(r - r_1) = 1$ , если  $r > r_1$ , и  $\theta(r - r_1) = 0$ , если  $r < r_1$ .

Интегрируя по  $r_1$ , получим

$$4\pi \int_0^a \{\ln(r) \theta(r - r_1) + \ln(r_1) \theta(r_1 - r)\} r_1 dr_1 = \\ = \pi a^2 \left\{ \ln(a^2) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} - \frac{1}{2} \right\}. \quad (21.25)$$

Для  $A_1(r, z)$  при  $r < a$ ,  $z \gg a$ ,  $l - z \gg a$  получим

$$A_1(r, z) = \frac{\mu_0 \tau}{4\pi} I \left\{ \ln \left( \frac{z(l - z)}{(a/2)^2} \right) + 1 - \frac{z^2}{a^2} \right\}. \quad (21.26)$$

Рассмотрим вклад в векторный потенциал второго тока такой же длины  $l$ , идущего параллельно первому. Расстояние между осями пусть будет равно  $b$ . Вклад будем рассматривать для точек, являющихся внутренними по отношению к первому прямому току. Этот вклад обозначим через  $A_2$ . Он будет иметь другой знак, т. е. ток по второму проводу идет в противоположном направлении:

$$A_2 = - \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^l \frac{dz_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + b^2}} = \\ = - \frac{\mu_0}{4\pi} I \{\ln(z + \sqrt{z^2 + b^2}) - \ln b + \ln(l - z + \\ + \sqrt{(l - z)^2 + b^2}) - \ln b\}, \quad A_2 = A_2 \tau. \quad (21.27)$$

Проинтегрируем  $A_{1j}$  и  $A_{2j}$  по объему первого про-

вода:

$$\frac{1}{2} \iiint \mathbf{A}_1 \mathbf{j} dV = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0}{4\pi} 2l \left\{ \ln \frac{2l}{a} - \frac{3}{4} \right\}, \quad (21.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A}_2 \mathbf{j} dV = & -\frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0}{4\pi} 2l \ln(l + \sqrt{l^2 + b^2}) - \\ & - \sqrt{l^2 + b^2} + b - l \ln b \}. \end{aligned} \quad (21.29)$$

Для двухпроводной линии  $l \gg b$ , при этом получим

$$\frac{1}{2} \int_{V_{\text{перв. пров}}} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{j} dV = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0}{4\pi} l \left\{ \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right\}. \quad (21.30)$$

Интегрирование по второму проводу даст такое же выражение, как (21.30). Поэтому

$$W = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0}{2\pi} l \left\{ \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right\}. \quad (21.31)$$

Таким образом, для коэффициента самоиндукции двухпроводной линии получим

$$L_{\text{лин}} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left\{ \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right\}. \quad (21.32)$$

Для квадрата  $l=b$ , при этом получим, учитывая все четыре стороны квадрата,

$$W = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0}{\pi} 2b \left\{ \ln \frac{2b}{a} - \frac{7}{4} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right\}. \quad (21.33)$$

Откуда

$$L_{\text{кв}} = \frac{\mu_0}{\pi} 2b \left\{ \ln \frac{2b}{a} - \frac{7}{4} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} \right\}. \quad (21.34)$$

Вклад в  $\mathbf{A}$  прилегающих к первому проводу сторон квадрата не учитывался, так как эта часть  $\mathbf{A}$  перпендикулярна  $\mathbf{j}$  первого провода.

Если в (21.22) провести интегрирование по  $z_1$  от  $z-\Delta$  до  $z+\Delta$ , где  $\Delta \ll R_{\text{крив}}$ , но  $\Delta \gg a$ , то вклад  $\mathbf{A}_\Delta$  в  $\mathbf{A}$ , даваемый прямым участком тока, около точки  $\mathcal{P}$ , в которой определяется потенциал, будет ( $r < a$ )

$$\mathbf{A}_\Delta(r, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left\{ \int_{a/2 < |z-z_1| < \Delta} \frac{\tau dz_1}{|z-z_1|} + \tau \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right\}. \quad (21.35)$$

Добавляя к  $A_\Delta$  вклад остальных участков проводов, которые для точки  $\mathcal{P}$  можно рассматривать как бесконечно тонкие, получим выражение для векторного потенциала в виде

$$\mathbf{A}(\mathcal{P}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left\{ \int_{R>a/2} \frac{d\mathbf{l}_1}{R} + \tau \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right\}, \quad (21.36)$$

где  $R$  — расстояние от осевого элемента  $d\mathbf{l}_1$  до осевой точки  $\mathcal{P}_0$  плоскости сечения провода, для которой ищется  $\mathbf{A}$ . Интегрирование в (21.36) ведется по всему осевому контуру тока, за исключением участка, для которого расстояние  $R < a/2$ . Второй член в (21.36) возник в результате учета вклада в  $\mathbf{A}$  точек, близких к  $\mathcal{P}$ . Вектор  $\tau$  — единичный вектор вдоль оси тока в точке  $\mathcal{P}_0$ .

Выражение (21.36) справедливо для любого контура тока в приближении тонких проводов.

Учитывая, что

$$jdl = \frac{I}{\pi a^2} dl, \quad \int_0^a \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) r dr d\varphi = \frac{1}{2} \pi a^2, \quad (21.37)$$

получим в результате интегрирования по объему провода выражение для энергии магнитного поля:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{j} \mathbf{A} dV = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \left\{ \iint_{R<a/2} \frac{d\mathbf{l} d\mathbf{l}_1}{R} + \frac{1}{2} l \right\}, \quad (21.38)$$

где  $l$  — полная длина провода.

При этом для коэффициента самоиндукции получаем выражение

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \iint_{R<a/2} \frac{d\mathbf{l} d\mathbf{l}_1}{R} + \frac{1}{2} l \right\}. \quad (21.39)$$

Формулу (21.39) можно использовать для определения коэффициента самоиндукции кольца радиуса  $b \gg a$ .

Если элемент  $d\mathbf{l}_1$  повернут относительно элемента  $d\mathbf{l}$  на угол  $\varphi$ , то  $d\mathbf{l} d\mathbf{l}_1 = dl dl_1 \cos \varphi = dl b \cos \varphi d\varphi$ . При этом для интеграла в (21.39) получим

$$\iint_{R<a/2} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}}{R} = 2 \oint dl \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{b \cos \varphi d\varphi}{2b \sin \frac{\varphi}{2}} = l \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (21.40)$$

В (21.40)  $\varphi_0$  определяется условием  $2b \sin(\varphi_0/2) = a/2$  или  $\varphi_0 \approx a/2b$ . Учитывая, что

$$\int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sin(\varphi/2)} = -4 \cos \frac{\varphi_0}{2} - 2 \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{4} \right) \approx \approx -4 + 2 \ln \frac{8b}{a}, \quad (21.41)$$

для коэффициента самоиндукции кольца получим

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left\{ \ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right\} \quad (l = 2\pi b). \quad (21.42)$$

## § 22. ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

**Задача 22.1.** Определить электромагнитное поле движущегося с ускорением точечного заряда.

**Решение.** Из системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (22.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

для вакуума ( $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ), вводя потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , для которых

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (22.2)$$

и используя дополнительное условие Лоренца:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + 1/c^2 \dot{\varphi} = 0, \quad (22.3)$$

где  $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$ , получим волновые уравнения для потенциалов

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (22.4)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (22.5)$$

В (22.4) и (22.5)

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi, \quad \Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (22.6)$$

Рассмотрим уравнение (22.4) для случая, когда  $\rho$  отлично от нуля лишь в окрестности точки  $\mathcal{Q}$ . В точке наблюдения  $\mathcal{P}$  потенциал будет зависеть лишь от времени и расстояния между точками  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{P}$ , которое

мы обозначим через  $r$ . При этом уравнение (22.4) в сферической системе координат запишется в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi) - \frac{1}{c^2} (r \ddot{\varphi}) = 0. \quad (22.7)$$

Из уравнения (22.7) следует, что

$$\varphi = \frac{f(t \pm r/c)}{r}. \quad (22.8)$$

Исключая область, непосредственно примыкающую к точке наблюдения  $\mathcal{P}$ , получим, используя принцип суперпозиции, для запаздывающего потенциала выражение

$$\varphi = \iiint_{r>a} \frac{f(t-r/c)}{r} dV \quad (a \rightarrow 0). \quad (22.9)$$

Область, близкая к точке  $\mathcal{P}$ , должна давать вклад в  $\varphi$  такой же, как в случае электростатики, так как для нее запаздывание  $r/c$  мало, т. е.

$$\varphi_2 = \iiint_{r<a} \frac{\rho(t)}{4\pi\epsilon_0 r} dV. \quad (22.10)$$

Формулы (22.9) и (22.10) могут быть объединены в один интеграл, если в (22.9) положить

$$f(t-r/c) = \frac{\rho(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0}. \quad (22.11)$$

При этом получим решение уравнения (22.4) в виде запаздывающих потенциалов

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(x_Q, y_Q, z_Q, t - \frac{r}{c}\right)}{r} \times \\ \times dx_Q dy_Q dz_Q. \end{aligned} \quad (22.12)$$

Для  $A$  получаем аналогичное по форме решение уравнения (22.5):

$$\begin{aligned} A(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j\left(x_Q, y_Q, z_Q, t - \frac{r}{c}\right)}{r} \times \\ \times dx_Q dy_Q dz_Q. \end{aligned} \quad (22.13)$$

В (22.12), (22.13)  $r = [(x-x_Q)^2 + (y-y_Q)^2 + (z-z_Q)^2]^{1/2}$ . Рассмотрим  $\varphi$ ,  $A$  для точечного заря-

да. Пусть координаты этого заряда в момент  $t' = t - r/c$  равны  $x_q(t')$ ,  $y_q(t')$ ,  $z_q(t')$ . При этом

$$\rho(x_Q, y_Q, z_Q, t') = q\delta(x_Q - x_q)\delta(y_Q - y_q)\delta(z_Q - z_q), \quad (22.14)$$

Предположим, что в момент  $t'$  заряд имеет скорость  $\mathbf{v}$ , направленную вдоль оси  $Oz_Q$ . В этом случае интегрирование по  $z_Q$  осложнится тем обстоятельством, что разным точкам  $z_Q$  будут соответствовать разные моменты времени  $t'$ . Хотя для точечного заряда эти различия во времени будут стремиться к нулю, но ввиду сингулярности  $\delta(z_Q - z_q)$  их нужно учитывать. Введем новую переменную интегрирования  $\xi = z_Q - z_q(t')$ . При этом

$$\begin{aligned} d\xi &= dz_Q - \frac{dz_q}{dt'} dt' = dz_Q - v(t') dt', \\ dt' &= d(t - r/c) = -\frac{dr}{c} = \frac{vr}{c} \frac{dz_Q}{v}, \\ d\xi &= \left(1 - \frac{vr}{cr}\right) dz_Q \quad (r = \{x - x_Q, y - y_Q, z - z_Q\}), \end{aligned} \quad (22.15)$$

$$\frac{dz_Q}{r} = \frac{d\xi}{r - vr/c}.$$

Интегрирование по  $z_Q$  даст

$$\begin{aligned} \int \frac{\delta(z_Q - z_q)}{r} dz_Q &= \int \delta(\xi) \frac{1}{r - rv/c} d\xi = \\ &= \frac{1}{r - rv/c} \Big|_{t'}, \quad (r = \{x - x_Q, y - y_Q, z - z_q(t')\}). \end{aligned} \quad (22.16)$$

По двум другим направлениям скорость в момент  $t'$  равна нулю, поэтому

$$\int \delta(x_Q - x_q) dx_Q = 1, \quad \int \delta(y_Q - y_q) dy_Q = 1, \quad (22.17)$$

В дальнейшем координаты точечного заряда будем обозначать через  $x_q, y_q, z_q$ , при этом в (22.16)

$$r = \{x - x_q, y - y_q, z - z_q\}. \quad (22.18)$$

Учитывая (22.14), (22.16), (22.17), получим из (22.12)

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r - rv/c} \Big|_{t'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s(t')}. \quad (22.19)$$

Аналогичным образом получим

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v}}{r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c} \Big|_{t'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v}(t')}{s(t')}, \quad (22.20)$$

где

$$s(t') = r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/c \Big|_{t'}. \quad (22.21)$$

Для того чтобы найти выражения для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , достаточно воспользоваться соотношениями (22.2). Однако дифференцирование осложняется ввиду дополнительной неявной зависимости от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , входящих в  $t'$ . При этом получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} &= -\mathbf{v}(t'), \quad \frac{\partial r}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r}, \quad r(t') = c(t - t'), \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= \frac{\partial r}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right), \quad (22.22) \\ \left( 1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{rc} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} &= 1, \text{ т. е. } \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{r}{s}. \end{aligned}$$

Производя аналогичные вычисления, получим

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\mathcal{P}} t' &= -\mathbf{r}/cs, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= -\left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r} + \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{c} - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{r}{s}, \\ \text{grad}_{\mathcal{P}} s &= \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r} + \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{c} - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{cs}, \quad (22.23) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \dot{\mathbf{v}} \frac{r}{s}, \quad \text{rot}_{\mathcal{P}} \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}}{cs}. \end{aligned}$$

Учитывая (22.22), (22.23), получим из (22.19), (22.20), согласно (22.2),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3} \left\{ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2} \left[ \mathbf{r} \times \left[ \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{v}} \right] \right] \right\}, \quad (22.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \frac{-\mu_0 q}{4\pi s^3} \left\{ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \right) (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s}{c} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) \right\}. \quad (22.25) \end{aligned}$$

Из (22.23), (22.24) вытекает соотношение

$$\mathbf{B} = \mathbf{r} \times \mathbf{E}/rc. \quad (22.26)$$

**Задача 22.2.** Определить силу, действующую на заряд малого размера со стороны его собственного поля, в момент времени, когда скорость заряда равна нулю.

**Решение.** Пусть в момент  $t=0$  точечный заряд  $q$  имеет ускорение  $\dot{\mathbf{v}}(0) \neq 0$ , но скорость его  $\mathbf{v}(0)=0$ . Найдем величины  $s(t')$ ,  $r(t')$ ,  $\mathbf{r}(t')$ ,  $v(t')$ ,  $\dot{v}(t')$ , определяющие поле  $\mathbf{E}(x, y, z, 0)$  в момент  $t=0$  в точке, которой соответствует вектор  $\mathbf{r}(0)=\{x-x_q(0), y-y_q(0), z-z_q(0)\}$ .

Производя разложение по степеням  $t'=-r(t')/c$ , получим

$$\mathbf{r}(t') = \mathbf{r}(0) - \frac{1}{2} \frac{r^2(t')}{c^2} \dot{\mathbf{v}}(0) + \frac{1}{6} \frac{r^3(t')}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}(0) + \dots \quad (22.27)$$

В дальнейшем  $\mathbf{r}(0) \equiv \mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}(0) \equiv \dot{\mathbf{v}}$ ,  $\ddot{\mathbf{v}}(0) \equiv \ddot{\mathbf{v}}$ .

Все разложения будем производить до таких степеней  $r$ , чтобы в выражении для результирующей силы можно было бы получить члены порядка  $r^n$  ( $n \leq 0$ ). При этом членами порядка  $r^m$  ( $m > 0$ ) будем пренебрегать (условие малости размеров заряда):

$$\begin{aligned} r^2(t') = r^2 - \frac{r^2(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})}{c^2} + \frac{r^2(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})^2}{c^4} + \frac{1}{4} \frac{r^4}{c^4} \dot{\mathbf{v}}^2 + \\ + \frac{1}{3} \frac{r^3}{c^3} (\mathbf{r}\ddot{\mathbf{v}}) + \dots, \end{aligned} \quad (22.28)$$

$$r(t') = r - \frac{r}{2c^2} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) + \frac{r}{8c^4} [r^2\dot{v}^2 + 3(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})^2] + \frac{r^2}{6c^3} (\mathbf{r}\ddot{\mathbf{v}}) + \dots, \quad (22.29)$$

$$\mathbf{r}(t') = \mathbf{r} - \frac{r^2}{2c^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{r^2(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})}{2c^4} \dot{\mathbf{v}} + \frac{r^3}{6c^3} \ddot{\mathbf{v}} + \dots, \quad (22.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t') = -\frac{r}{c} \dot{\mathbf{v}} + \frac{r}{2c^3} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{v}} + \frac{r^2}{2c^2} \ddot{\mathbf{v}} + \dots, \quad v^2(t') = \\ = \frac{r^2}{c^2} \dot{v}^2 + \dots, \end{aligned} \quad (22.31)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t') = \dot{\mathbf{v}} - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{v}} + \dots, \quad (22.32)$$

$$s(t') = r + \frac{r}{2c^2} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) - \frac{r}{8c^4} [3r^2\dot{v}^2 + (\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})^2] - \frac{r^2}{3c^3} (\mathbf{r}\ddot{\mathbf{v}}) + \dots, \quad (22.33)$$



$$\frac{1}{s^3(t')} = \frac{1}{r^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2c^2} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) + \frac{3}{8c^4} [3r^2\dot{\mathbf{v}}^2 + 5(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})^2] + \right. \\ \left. + \frac{r}{c^3} (\mathbf{r}\ddot{\mathbf{v}}) + \dots \right\}. \quad (22.34)$$

Подставляя разложения (22.29) — (22.34) в (22.24), получим выражение для напряженности электрического поля точечного заряда вблизи заряда в тот момент, когда его скорость обращается в нуль:

$$\mathbf{E}(x, y, z, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \mathbf{r} - \frac{r^2}{2c^2} \dot{\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})}{2c^2} + \frac{2}{3} \frac{r^3}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} \frac{r^2}{c^4} \dot{\mathbf{v}}^2 \mathbf{r} + \frac{3}{8c^4} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}})^2 \mathbf{r} + \frac{3}{4} \frac{r^2}{c^4} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{v}} + \dots \right\}. \quad (22.35)$$

Рассмотрим систему, состоящую из большого числа точечных зарядов  $q_i$ , жестко связанных между собой так, что  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{v}}$ ,  $\ddot{\mathbf{v}}_i = \ddot{\mathbf{v}}$ . Сила, действующая на заряд  $q_i$  со стороны всех остальных зарядов, равна

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{E}_j q_j, \quad (22.36)$$

а суммарная сила, действующая на всю систему зарядов, равна

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \dot{\mathbf{v}} - \\ - \frac{1}{c^2} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} q_i q_j \frac{\mathbf{r}_{ij}(\mathbf{r}_{ij} \dot{\mathbf{v}})}{r_{ij}^3} + \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \sum_{i,j} q_i q_j \ddot{\mathbf{v}}. \quad (22.37)$$

Два последних члена, входящие в (22.35), в результате суммирования в (22.37) пропадают, так как  $\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$ .

Соотношение между первым и вторым членами в (22.37) зависит от геометрии систем. Если система сжата в плоскости, перпендикулярной  $\dot{\mathbf{v}}$ , то второй член обращается в нуль, так как  $\mathbf{r}_{ij}\dot{\mathbf{v}} = 0$ . Если система вытянута в линию в направлении  $\dot{\mathbf{v}}$ , то второй член равен первому.

Рассмотрим случай, в котором заряды распределены сферически-симметричным образом.

Пусть  $\dot{\mathbf{v}} \parallel \text{оси } Oz$ , тогда

$$\sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} (\mathbf{r}_{ij} \dot{\mathbf{v}}) = \dot{v} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} (z_i - z_j). \quad (22.38)$$

При этом в силу симметрии отличной от нуля будет только  $z$ -компонента (22.38), равная (опять в силу симметрии)

$$\dot{v} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} (z_i - z_j)^2 = \frac{1}{3} \dot{v} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (22.39)$$

Так как для сферически-симметричного случая направление оси  $Oz$  ничем не выделено, то

$$\sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} (\mathbf{r}_{ij} \dot{\mathbf{v}}) = \frac{1}{3} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \dot{\mathbf{v}}. \quad (22.40)$$

Имея в виду (22.40), запишем соотношение (22.37) в виде

$$\mathbf{F} = -\frac{4}{3} \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \dot{\mathbf{v}} + \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} Q^2 \ddot{\mathbf{v}}, \quad (22.41)$$

где  $Q = \sum_i q_i$ , так как ограничение  $i \neq j$  в последнем члене ввиду большого числа зарядов можно снять. Второй член можно рассматривать как некоторую добавку к массе тела, несущего заряд, т. е. положить

$$\delta m = \frac{4}{3} \frac{W_{\text{эл.св}}}{c^2} = \frac{4}{3} \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad (22.42)$$

при этом уравнение движения заряда будет иметь вид

$$(m + \delta m) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} + \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} Q^2 \dot{\mathbf{v}}. \quad (22.43)$$

В дальнейшем под массой излучающего заряда будем понимать эффективную массу  $m_{\text{эф}} = m + \delta m$  либо не учитывать добавку  $\delta m$ , так как для макроскопических зарядов она мала.

Второй член в правой части представляет собой силу торможения излучением. Эта сила играет существенную роль в процессах излучения.

**Задача 22.3.** Определить поле вблизи медленно движущегося точечного заряда и найти силу, действующую со стороны этого поля на заряд.

**Решение.** В предыдущей задаче предполагалось, что скорость заряда в рассматриваемый момент времени равна нулю. Чтобы снять это ограничение и не иметь дело с релятивистскими соотношениями, рассмотрим случай движущегося заряда при условии, что его скорость  $v \ll c$ , т. е. при определении поля будем пренебрегать величинами порядка  $v^2/c^2$  по сравнению с единицей. Кроме того, будем считать, что и производные от скорости малы, и будем учитывать лишь линейные члены по скорости и ее производным. Такой подход возможен, например, если заряд совершает почти периодическое движение с достаточно малой амплитудой. Пусть  $x = a \sin \omega t$ , тогда  $v = a\omega \cos \omega t$ , и условие  $v/c \ll 1$  означает, что  $a\omega/c = (a/\lambda) 2\pi \ll 1$ , т. е. что длина излучаемой волны много больше амплитуды  $a$ . При этом, например, в разложении (22.28) третий член много меньше пятого члена, так как  $\dot{v}^2/c\ddot{v} \sim \omega^4 a^2/\omega^3 a c = 2\pi a/\lambda \ll 1$ . Это означает, что члены, пропорциональные  $\ddot{v}$ , следует учитывать, а квадратичными членами можно пренебречь. Соответствующее разложение, аналогичное (22.29) — (22.33), будет при этом иметь вид ( $r(0) \equiv r$  и т. д.)

$$r(t') = r + \frac{rv}{c} - \frac{r}{2c^2} (r\dot{v}) + \frac{r^2}{6c^3} (r\ddot{v}) + \dots, \quad (22.44)$$

$$\mathbf{r}(t') = \mathbf{r} + \frac{r}{c} \mathbf{v} - \frac{r^2}{2c^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{6} \frac{r^3}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} + \dots, \quad (22.45)$$

$$\mathbf{v}(t') = \mathbf{v} - \frac{r}{c} \dot{\mathbf{v}} + \frac{r^2}{2c^2} \ddot{\mathbf{v}} + \dots, \quad (22.46)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t') = \dot{\mathbf{v}} - \ddot{\mathbf{v}} \frac{r}{c} + \dots, \quad (22.47)$$

$$s(t') = r + \frac{r}{2c^2} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}} - \frac{r^2}{3c^3} r\ddot{\mathbf{v}} + \dots]. \quad (22.48)$$

Из (22.44) — (22.46) следует, что

$$\mathbf{r}(t') - \frac{\mathbf{v}(t')}{c} r(t') = \mathbf{r} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}} \frac{r^2}{c^2} - \frac{1}{3} \ddot{\mathbf{v}} \frac{r^3}{c^3} + \dots. \quad (22.49)$$

Учитывая (22.44) — (22.49), получим из (22.24)

$$\mathbf{E}(x, y, z, 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \mathbf{r} - \frac{r^2}{2c^2} \dot{\mathbf{v}} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{2c^2} + \frac{2}{3} \frac{r^3}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right\}, \quad (22.50)$$

т. е. в рассматриваемом приближении электрическое поле не зависит от скорости заряда  $\mathbf{v}(t)$ . Таким образом, уравнение (22.41) справедливо для медленно движущегося заряда и в тот момент времени, когда его скорость не равна нулю, но  $v^2/c^2 \ll 1$ .

## ГЛАВА 4

# ОПТИКА

### § 23. ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

**Задача 23.1.** Рассмотреть излучение осциллятора, совершающего колебания с малой амплитудой.

**Решение.** Пусть некоторый точечный заряд совершает колебания вдоль оси  $Oz$  под действием квазиупругой внешней силы  $F = -m\omega_0^2 z$ . Никакие другие внешние силы при этом не действуют. Однако надо учитывать силу торможения излучением, равную

$$\dot{f} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \ddot{z}. \quad (23.1)$$

Осциллятор будет совершать медленно затухающие колебания, так как предполагается, что амплитудное значение силы много больше амплитудного значения  $\dot{f}$ . При этом можно положить, что

$$f \approx -\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \omega_0^2 \dot{z} = -m\gamma \dot{z}, \quad (23.2)$$

где

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega_0^2}{4\pi\epsilon_0 c^3 m}. \quad (23.3)$$

Уравнение колебания заряда  $q$ , связанного с точечной массой  $m$ , с учетом (23.2) запишется в виде

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0. \quad (23.4)$$

Откуда

$$z(t) = a e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega' t - \psi), \quad (23.5]$$

где  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ , а  $\psi$  — начальная фаза;

$$\dot{z}(t) = -\omega_0 a e^{-\frac{\gamma}{2} t} \sin(\omega' t - \psi + \sigma), \quad (23.6)$$

где

$$\sin \sigma = \gamma/2\omega_0, \quad \cos \sigma = \omega'/\omega_0. \quad (23.7)$$

Если  $\dot{z}(0) = 0$ , то  $\psi = \sigma$  и

$$z(0) = a \cos \sigma = a\omega'/\omega_0. \quad (23.8)$$

При этом энергия, запасенная в осцилляторе, в момент  $t=0$  равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 z^2(0) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 \cos^2 \sigma = \frac{1}{2} m \omega'^2 a^2. \quad (23.9)$$

Замена в (23.2)  $\ddot{z} \rightarrow -\omega_0^2 z$  предполагает малость  $\gamma$  по сравнению с  $\omega_0$ , поэтому во всех последующих соотношениях будем пренебрегать величинами порядка  $\gamma/\omega_0$  по сравнению с единицей. При этом

$$\sigma \rightarrow 0, \quad z(0) \rightarrow a, \quad \omega' \rightarrow \omega_0, \quad \mathcal{E} \rightarrow \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2. \quad (23.10)$$

Определим электромагнитную энергию, излучаемую осциллятором в процессе колебания. Для этого достаточно определить поток энергии через сферическую поверхность на достаточно большом расстоянии от осциллятора, т. е. в волновой зоне ( $r \gg \lambda$ ).

Из формул (22.24), (22.25) в волновой зоне получим

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} (\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}})), \quad \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 q}{4\pi c r^2} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}). \quad (23.11)$$

В сферической системе координат

$$E_\theta = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c r} q \ddot{z} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad B_\alpha = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi c r} q \dot{z} \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (23.12)$$

Излучаемая в единицу времени энергия равна

$$\iint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\sigma = \frac{q^2 \ddot{z}^2 2\pi}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{q^2 \ddot{z}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (23.13)$$

Энергия, излучаемая за все время от  $t=0$  до  $t=\infty$ , равна

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\infty \ddot{z}^2(t') dt', \quad t' = t - \frac{r}{c}. \quad (23.14)$$

Если  $t < 0$ , то  $\ddot{z}(t) = 0$ , поэтому  $\ddot{z}(t - r/c)$  обращается в нуль при  $t' < r/c$ , т. е. при  $t' < 0$ . В дальнейшем штрих писать не будем.

Вычисление временных интегралов вида (23.14) в дальнейшем будем проводить, используя описание колебаний с помощью комплексных величин. При этом  $\theta(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $\theta(t) = 1$  при  $t > 0$

$$z(t) = a e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} \theta(t), \quad (23.15)$$

$$z^{(R)}(t) = \operatorname{Re} z(t) = a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t \theta(t). \quad (23.16)$$

Для  $\ddot{z}(t)$  получим из (23.15)

$$\ddot{z}(t) = -(\omega_0 - i\gamma)^2 z(t) \approx -\omega_0^2 z(t). \quad (23.17)$$

Интегрируя по времени, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (z^{(R)}(t))^2 dt &= \frac{1}{4} \int_0^\infty (z(t) z(t) + z^*(t) z^*(t)) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\infty z(t) z^*(t) dt. \end{aligned} \quad (23.18)$$

Первый интеграл в правой части (23.18) порядка  $a^2\gamma/\omega_0^2$ , второй порядка  $a^2/\gamma$ , т. е. их отношение порядка  $(\gamma/\omega_0)^2$ . В дальнейшем интегралами типа первого интеграла в правой части (23.18) будем пренебрегать. При этом получим

$$\int_0^\infty (z^{(R)}(t))^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty z(t) z^*(t) dt = \frac{a^2}{2\gamma}. \quad (23.19)$$

Энергия, излучаемая осциллятором согласно (23.14) с учетом (23.15) — (23.17), (23.19) и (23.3), равна

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{q^2 \omega_0^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{a^2}{2\gamma} = \frac{1}{2} \omega_0^2 m a^2, \quad (23.20)$$

т. е. излученная энергия равна энергии, запасенной в осцилляторе к началу колебательного процесса.

Заметим, что при более точном расчете, т. е. с учетом сдвига фаз  $\sigma$  и частоты  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$ , получим для  $z(t)$ , согласно (23.5), при  $\psi = \sigma$

$$\bar{z}(t) = -\omega_0^2 a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega' t - \sigma). \quad (23.21)$$

Производя точное интегрирование, получим

$$\int_0^{\infty} (\ddot{z}(t))^2 dt = \omega_0^4 a^2 \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} \cos^2(\omega' t + \sigma) dt = \frac{2a^2}{\gamma} \omega_0^2 \omega'^2. \quad (23.22)$$

При этом для полной излучаемой энергии получим

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = 1/2 \omega'^2 m a^2 \quad (23.23)$$

в полном соответствии с (23.9).

**Задача 23.2.** Определить спектр излучения затухающего осциллятора.

**Решение.** Вследствие затухания излучение осциллятора не является строго монохроматичным, хотя при  $\gamma \ll \omega_0$  спектр излучения отличен от нуля лишь в узком интервале частот. Определим спектр излучения осциллятора с учетом затухания. Задавая электрическое поле в точке наблюдения согласно (23.12), (23.17) в виде

$$E^{(R)}(t) = E_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos \omega_0 t \theta(t) \quad (23.24)$$

и разлагая (23.24) в ряд Фурье, получим

$$E^{(R)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (23.25)$$

где фурье-компонента  $g(\omega)$  определяется обратным преобразованием

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^{(R)}(t) e^{i\omega t} dt. \quad (23.26)$$

Согласно (23.24), нижний предел в (23.26) можно положить равным нулю.

Найдем  $g(\omega)$  для действительного сигнала в форме (23.24):

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos \omega_0 t e^{i\omega t} dt = \\ &= \frac{E_0}{4\pi} \left\{ \frac{i}{\omega - \omega_0 + i\frac{\gamma}{2}} + \frac{i}{\omega + \omega_0 + i\frac{\gamma}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (23.27)$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения введем наряду с действительным сигналом  $E^{(R)}(t)$  аналити-



ческий сигнал  $E(t)$ , определяемый соотношением

$$E(t) = 2 \int_0^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (23.28)$$

В (23.28)  $g(\omega)$  определяется, исходя из действительного сигнала, поэтому  $g^*(\omega) = g(-\omega)$ . Взяв действительную часть от  $E(t)$ , получим

$$\operatorname{Re} E(t) = E^{(R)}(t). \quad (23.29)$$

Найдем явный вид  $E(t)$ , используя (23.27) и условие  $\gamma \ll \omega_0$ . Так как интегрирование в (23.28) ведется в области  $\omega > 0$ , то вклад второго члена (23.27) в интеграл (23.28) мал. С другой стороны, в области  $\omega < 0$  первый член (23.27) дает малый вклад в интеграл типа (23.25). При этом получим

$$\begin{aligned} E(t) &\approx 2 \int_0^{\infty} \frac{E_0}{4\pi} \frac{i}{\omega - \omega_0 + i \frac{\gamma}{2}} e^{-i\omega t} d\omega \approx \\ &\approx \frac{i E_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0 + i \frac{\gamma}{2}} d\omega. \end{aligned} \quad (23.30)$$

Для вычисления интеграла рассмотрим плоскость комплексных значений  $\omega$ . При  $t < 0$  интеграл (23.30) можно замкнуть с помощью дуги большого круга в верхней полуплоскости, так как на этой дуге  $e^{-i\omega t} \rightarrow 0$  ( $R_{\text{дуг}} \rightarrow \infty$ ) при  $t < 0$ . С другой стороны, полюс в подынтегральном выражении (23.30) расположен в точке  $\omega = \omega_0 - i\gamma/2$ , т. е. вне контура интегрирования, поэтому при  $t < 0$  (23.30) обращается в нуль.

Если  $t > 0$ , то контур интегрирования можно замыкать в нижней полуплоскости, при этом полюс окажется внутри контура, и, согласно теории вычетов, получим

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t} \theta(t). \quad (23.31)$$

Заметим, что (23.31) не является точным выражением для аналитического сигнала, но из (23.29) видно, что различие между точным значением (23.28) и (23.31) составляет чисто мнимую величину, которая мала при  $\gamma \ll \omega_0$ .

Введем интеграл интенсивности излучения осциллятора:

$$\begin{aligned} I_{\text{инт}} &= \int_0^{\infty} (E^{(R)}(t))^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) g^*(\omega) d\omega = \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} g(\omega) g^*(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} S_{\text{инт}}(\omega) d\omega, \quad (23.32) \end{aligned}$$

где

$$S_{\text{инт}}(\omega) = 4\pi g(\omega) g^*(\omega) \quad (23.33)$$

представляет спектральную плотность излучения.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E(t) E^*(t) dt &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} g(\omega) g^*(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} dt d\omega d\omega' = \\ &= 8\pi \int_0^{\infty} g(\omega) g^*(\omega) d\omega. \quad (23.34) \end{aligned}$$

Из сравнения (23.33) и (23.34) вытекает соотношение

$$I_{\text{инт}} = \int_0^{\infty} (E^{(R)}(t))^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E(t) E^*(t) dt. \quad (23.35)$$

Соотношение (23.35) аналогично (23.19), но, в отличие от (23.19), является точным, справедливым для любого сигнала при условии, что  $E(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $E(t) = 0$  при  $t < 0$ . Различие в (23.35) и (23.19) заключается в определении аналитического сигнала в виде (23.28), а не в виде (23.31), которое соответствует (23.15), но является лишь приближенным.

Для спектральной плотности интеграла интенсивности излучения осциллятора получим, учитывая малость  $\gamma$  и отбрасывая второй член в (23.27), так как интегрирование в (23.32) ведется в области  $\omega > 0$ :

$$S_{\text{инт}}(\omega) = \frac{1}{4\pi} E_0^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (23.36)$$

Спектр излучения осциллятора, соответствующий форме (23.36), называется лоренцевской линией с уширением  $\gamma$ . Ширина линии, возникающая в результате силы торможения излучением, называется естественной шириной линии.

**Задача 23.3.** Рассмотреть излучение двух близких осцилляторов.

**Решение.** Рассмотрим два одинаковых осциллятора, находящихся на близком расстоянии друг от друга ( $r_{12} \ll \lambda$ ) и совершающих колебания в одном направлении. Амплитуду колебания будем считать малой и поэтому будем пренебрегать квадратами амплитуды и другими степенями, кроме первой. Пусть оба осциллятора совершают синфазные колебания с одинаковой амплитудой. При этом амплитуда суммарного электромагнитного поля, излучаемого этими близко расположенными осцилляторами, будет в два раза больше, чем амплитуда поля, излучаемого одним осциллятором, а интенсивность излучения будет в четыре раза больше, чем интенсивность излучения одного осциллятора. С другой стороны, ясно, что суммарная энергия, запасенная в двух осцилляторах, лишь в два раза больше, чем энергия, запасенная в одном осцилляторе. Это означает, что два близко расположенных осциллятора будут излучать запасенную в них энергию более интенсивно, чем осцилляторы, удаленные друг от друга. Рассмотрим действие электрического поля первого заряда на второй заряд. Положения зарядов будем описывать векторами  $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_1(0) + \delta \mathbf{r}_1(t)$ ,  $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_2(0) + \delta \mathbf{r}_2(t)$ . При этом  $\mathbf{r}_{12}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(0) - \mathbf{r}_1(0) + \delta \mathbf{r}_2(t) - \delta \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_{12}(0) + \delta \mathbf{r}_{12}(t)$ , где  $\delta \mathbf{r}_{12}(t) = \delta \mathbf{r}_2(t) - \delta \mathbf{r}_1(t)$ . Будем считать, что  $|\delta \mathbf{r}_{12}(t)| \ll |\mathbf{r}_{12}(0)|$ . В приближении, линейном по амплитуде колебаний, получим ( $\mathbf{r}_{12}(0) \equiv \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{r}_{12}(t) \equiv \delta \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_{12}(t) \equiv \mathbf{r}(t)$ ):

$$\frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} \approx \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{1}{r^5} (3(\mathbf{r} \delta \mathbf{r}) \mathbf{r} - \delta \mathbf{r} r^2), \quad (23.37)$$

$$\frac{\mathbf{v}_1(t)}{r(t)} \approx \frac{\mathbf{v}_1(t)}{r}, \quad \frac{\mathbf{r}(t)(\mathbf{r}(t) \dot{\mathbf{v}}_1(t))}{r^3(t)} \approx \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \dot{\mathbf{v}}_1(t))}{r^3}. \quad (23.38)$$

Рассмотрим случай, в котором движение зарядов возможно лишь вдоль оси  $oz$ . Пусть при этом вектор  $\mathbf{r}_{12}(0)$  составляет угол  $\theta$  с осью  $oz$ . В этом случае для  $z$ -компонент (23.37), (23.38) получим, обозначая  $\delta \mathbf{r}_1(t) = \{0, 0, z_1(t)\}$ ,  $\delta \mathbf{r}_2(t) = \{0, 0, z_2(t)\}$ ,

$$\left\{ \frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} \right\}_z = \left\{ \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right\}_z - \frac{1}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) (z_2(t) - z_1(t)), \quad (23.39)$$

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1(t)}{r(t)} \right\}_z = \frac{1}{r} \ddot{z}_1(t), \quad \left\{ \frac{\mathbf{r}(t)(\mathbf{r}(t) \dot{\mathbf{v}}_1(t))}{r^3(t)} \right\}_z = \frac{1}{r} \cos^2 \theta \ddot{z}_1(t). \quad (23.40)$$

Члены, представленные в (23.40), дают силу, действующую со стороны первого заряда на второй заряд, равную, согласно (22.50),

$$F'_{12}(t) = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 c^2} (\cos^2 \theta + 1) \ddot{z}. \quad (23.41)$$

Коэффициент при  $\ddot{z}_1$  имеет порядок релятивистской добавки к массе, обусловленной энергией взаимодействия зарядов. Так как эта добавка мала по сравнению с макроскопической массой  $m$ , то силой  $F'_{12}(t)$  можно пренебречь.

Введем коэффициент

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^3 m} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (23.42)$$

при этом зависящую от времени часть взаимодействия, обусловленного первым членом (22.50) (кулоновского взаимодействия), можно будет представить в виде

$$F_{12}(t) = -\alpha m (z_2(t) - z_1(t)). \quad (23.43)$$

Если еще учесть взаимодействие, обусловленное последним членом (22.37), которое не зависит от координат зарядов (лишь бы они были близки) и представляет собой торможение первого заряда излучением второго, а также торможение второго заряда собственным излучением, то получим суммарную переменную силу, действующую на второй заряд:

$$F_2(t) = -m\omega_0^2 z_2 - \alpha m (z_2 - z_1) + \gamma (\dot{z}_1 + \dot{z}_2). \quad (23.44)$$

Постоянные силы (внешние и электростатические) обеспечивают существование положения равновесия и одномерность движения. Так как эти силы компенсируются, то они не входят в уравнение колебания.

Учитывая (23.44) и аналогичное выражение для переменной силы, действующей на первый заряд, получим уравнения колебаний зарядов:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + \gamma (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) + \omega_0^2 z_1 + \alpha (z_1 - z_2) &= 0, \\ \ddot{z}_2 + \gamma (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) + \omega_0^2 z_2 + \alpha (z_2 - z_1) &= 0. \end{aligned} \quad (23.45)$$

Система (23.45) представляет собой систему уравнений связанных колебаний. Двум нормальным колебаниям (двум модам) соответствуют колебания с одинаковой амплитудой в фазе или противофазе.

Первой моде (синфазной) соответствует условие  $z_1(t) = z_2(t)$ . При этом система (23.45) распадается на два не связанных уравнения:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 + 2\gamma\dot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 + 2\gamma\dot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 &= 0.\end{aligned}\quad (23.46)$$

Уравнения в системе (23.46) отличаются от уравнения колебания одиночного осциллятора (23.4) удвоением силы торможения излучением. При этом  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . Вычисляя энергию, излучаемую парой синфазно колеблющихся осцилляторов, получим аналогично (23.20)

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{(2q)^2 \omega_0^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{a^2}{2 \cdot 2\gamma} = 2 \cdot \frac{1}{2} \omega_0^2 m a^2. \quad (23.47)$$

Или, производя более точные вычисления, аналогичные (23.21), (23.22),

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \omega_1^2 m a^2. \quad (23.48)$$

В процессе синфазных колебаний энергия кулоновского взаимодействия не меняется, поэтому энергия, запасенная к началу колебаний в системе, равна  $\mathcal{E} = 2 \cdot \frac{1}{2} \omega_1^2 a^2 \approx 2 \cdot \frac{1}{2} \omega_0^2 a^2$ . Соотношение (23.47) (или более точное (23.48)) показывает, что при возбуждении в системе (23.45) первой (синфазной) моды вся энергия, запасенная в системе, излучается в виде электромагнитной энергии.

В этом случае по сравнению с излучением одного осциллятора интенсивность излучения в начале процесса увеличивается в четыре раза, время излучения уменьшается в два раза. Ширина линии излучения и интенсивность в центре линии увеличиваются в два раза.

Второй моде (противофазной) соответствует условие  $z_1(t) = -z_2(t)$ . При этом система (23.45) также распадается на два не связанных уравнения:

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 + (\omega_0^2 + 2\alpha) z_1 &= 0, \\ \ddot{z}_2 + (\omega_0^2 + 2\alpha) z_2 &= 0.\end{aligned}\quad (23.49)$$

Из (23.49) видно, что должно выполняться условие  $\omega_0^2 > 2|\alpha|$ , иначе в системе невозможны колебания при отрицательных значениях  $\alpha$  (т. е. когда  $3\cos^2\theta < 1$ ). Мы будем считать, что  $\omega_0^2 \gg |\alpha|$ , это означает, что

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r c^2 m} \left( \frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \ll 1. \quad (23.50)$$

Частоту второй моды обозначим через  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha}$ .

Из (23.49) видно, что вторая мода не затухает. При этом излучения тоже нет, так как поле одного осциллятора компенсирует поле другого ( $r \ll \lambda$ ).

В общем случае в колебательной системе могут быть возбуждены обе моды, при этом

$$\begin{aligned} z_1(t) &= a_1 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t}, \\ z_2(t) &= a_1 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t}. \end{aligned} \quad (23.51)$$

Излучение характеризуется суммарным смещением, т. е.

$$z_1(t) + z_2(t) = 2a_1 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_1 t}. \quad (23.52)$$

Из (23.52) видно, что энергия, запасенная в первой моде и равная

$$\mathcal{E}_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} m \omega_0^2 |a_1|^2 \quad (\omega_1 \approx \omega_0), \quad (23.53)$$

излучается независимо от присутствия второй моды.

После того как энергия первой моды будет полностью излучена, в системе останутся колебания второй моды. Связанная с этими колебаниями энергия определяется не только внешней квазиупругой силой  $F_{\text{внеш}} = -m\omega_0^2 z$ , но также и кулоновским взаимодействием  $F_{12}(t) = -\alpha m(z_2 - z_1) = -2\alpha m z_2$ . Поэтому энергия, запасенная во второй моде, равна

$$\mathcal{E}_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m \omega_2^2 |a_2|^2 \quad (\omega_2^2 = \omega_0^2 - 2\alpha). \quad (23.54)$$

При возбуждении в системе обеих мод будут наблюдаться биения. Учитывая, что  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $|\alpha| \ll \omega_0^2$ , движение каждого заряда можно представить как колебание с медленно меняющейся амплитудой:

$$z_1(t) = A_1(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad z_2(t) = A_2(t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (23.55)$$

При этом, полагая  $t=0$ , получим

$$a_1 = \frac{1}{2} (A_1(0) + A_2(0)), \quad a_2 = \frac{1}{2} (A_1(0) - A_2(0)). \quad (23.56)$$

Рассмотрим два частных случая.

Пусть в системе в начальной стадии возбуждены колебания с одинаковой амплитудой, но со сдвигом фаз, равным  $\pi/2$ . Этому случаю соответствует соотношение между комплексными амплитудами  $A_1$  и  $A_2$

$$A_2 = iA_1. \quad (23.57)$$

При этом для амплитуды первой моды получим

$$a_1 = 1/2 A_1 (1 + i), \quad |a_1|^2 = 1/2 |A_1|^2. \quad (23.58)$$

Будет излучена энергия

$$\mathcal{E}_1 = 2 \cdot 1/2 m \omega_0^2 |a_1|^2 = 1/2 m \omega_0^2 |A_1|^2. \quad (23.59)$$

Амплитуда второй моды будет равна

$$a_2 = 1/2 A_1 (1 - i), \quad \text{откуда } |a_2|^2 = 1/2 |A_1|^2. \quad (23.60)$$

В приближении  $\omega_1 \approx \omega_0$  будет излучена половина энергии, запасенной к моменту  $t=0$  в колебательной системе. Излученная энергия будет равна энергии, которую излучил бы одиночный осциллятор с такой же начальной амплитудой, но характерное время излучения будет в два раза меньше, чем для одиночного излучателя. Интенсивность излучения в начале процесса будет в два раза больше, чем при той же начальной амплитуде одиночного осциллятора. Во втором случае предположим, что в системе к начальному моменту возбуждены колебания только первого заряда, а второй вначале покоится. В этом случае  $A_2 = 0$  и

$$a_1 = 1/2 A_1, \quad |a_1|^2 = 1/4 |A_1|^2, \quad (23.61)$$

$$a_2 = 1/2 A_1, \quad |a_2|^2 = 1/4 |A_1|^2. \quad (23.62)$$

В этом случае опять будет излучена половина ( $\omega_1 \approx \omega_0$ ) запасенной в системе энергии, но эта энергия при той же амплитуде  $|A_1|$  будет в два раза меньше, чем в первом случае. Интенсивность излучения в начале процесса будет такой же, как при излучении одиночным осциллятором с той же начальной амплитудой.

Существенной особенностью излучения двух близких осцилляторов является то, что независимо от того, в какой мере в системе возбуждены обе моды (т. е. независимо от начальных амплитуд и фаз), характерное время излучения первой моды всегда в

два раза меньше характерного времени излучения одиночного осциллятора. При этом уширение линии при излучении двух близких осцилляторов в два раза больше, чем естественное уширение линии одиночного осциллятора.

**Задача 23.4.** Рассмотреть излучение большого числа осцилляторов, удаленных друг от друга и возбуждаемых в случайные моменты времени со случайными фазами.

**Решение.** Если расстояние между осцилляторами существенно больше длины волны излучения, то взаимодействием осцилляторов друг на друга можно пренебречь. Однако при этом всегда нужно учитывать силу торможения собственным излучением, что приводит к затуханию колебаний и, следовательно, к ограниченному времени излучения.

Пусть в области наблюдения волны, возбуждаемые осцилляторами, распространяются приблизительно в одном направлении (т. е. угловые размеры области излучения малы). Каждая волна имеет свою поляризацию. Мы для простоты будем рассматривать лишь одну поляризацию, т. е. одно направление колебания вектора  $\mathbf{E}$ . В силу того что осцилляторы возбуждаются таким образом, что колебания их происходят в разных направлениях, проекции вектора  $\mathbf{E}$  на заданное направление для разных волн будут разными. Поле в точке наблюдения является суммой полей, излучаемых отдельными осцилляторами:

$$E^{(R)}(t) = \sum_n E_n^{(R)}(t). \quad (23.63)$$

Пусть некоторый осциллятор возбуждается в момент времени  $t_n - r_n/c$ , после чего он начинает испускать волны с убывающей по времени амплитудой. Поле этого осциллятора в точке наблюдения будем описывать функцией

$$E_n^{(R)}(t) = E_{n0}^{(R)} e^{-\frac{\gamma_n}{2}(t-t_n)} \cos[\omega_n(t-t_n) + \varphi_n] \theta(t-t_n), \quad (23.64)$$

где  $\varphi_n$  — начальная фаза, которую мы будем счи-



тать случайной величиной. В (23.64) предполагается, что различные осцилляторы могут иметь различные частоты и различные  $\gamma_n$ .

Так как некоторые осцилляторы к моменту наблюдения еще не возбуждены ( $\theta(t-t_n)=0$ ) или, наоборот, были возбуждены очень давно

$$\left( e^{-\frac{\gamma_n}{2}(t-t_n)} \approx 0 \right),$$

то суммирование в (23.63) фактически охватывает моменты  $t_n$ , для которых  $0 < t-t_n \leq 1/\gamma$ . Разложим (23.64) в интеграл Фурье:

$$E^{(R)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (23.65)$$

При этом для (23.64) получим

$$g_n(\omega) = \frac{E_{n0} e^{i\omega t_n}}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-i\varphi_n}}{\omega - \omega_n + i\gamma_n/2} + \frac{e^{i\varphi_n}}{\omega + \omega_n + i\gamma_n/2} \right\}. \quad (23.66)$$

Рассмотрим операцию усреднения по времени, которую будем обозначать угловыми скобками:

$$\begin{aligned} \langle (E^{(R)}(t))^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (E^{(R)}(t))^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int E_n^{(R)}(t) E_m^{(R)}(t) dt. \end{aligned} \quad (23.67)$$

В (23.67) суммирование распространяется лишь на те волны, которые дают вклад в (23.64) при  $0 < t < T$ . Пусть время усреднения много больше времени затухания отдельного цуга, т. е.  $T \gg 1/\gamma_n$ . В этом случае если число возбуждений велико и более или менее равномерно распределено по всему интервалу  $0 < t_n < T$ , то число цугов волн, не полностью входящих в интервал  $0 < t < T$ , будет относительно невелико. В этом случае условие суммирования в (23.67) можно записать в виде  $0 < t_n < T$ ,  $0 < t_m < T$ . Пусть за время  $T$  возбуждается  $N$  колебаний осцилляторов. Обозначая номера возбуждений (в порядке возрастания  $t_n$ ) через  $n$ , получим, что суммы в (23.67) распространяются от  $n, m=0$  до  $n, m=N$ .

Интегрируя по времени, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} E_n^{(R)}(t) E_m^{(R)}(t) dt &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\omega') g_m^*(\omega') d\omega' = \\ &= 4\pi \operatorname{Re} \int_0^{\infty} g_n(\omega') g_m^*(\omega') d\omega'. \end{aligned} \quad (23.68)$$

Для аналитического сигнала получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_n(t) E_m^*(t) dt = 8\pi \int_0^{\infty} g_n(\omega') g_m^*(\omega') d\omega'. \quad (23.69)$$

Сравнивая (23.68) и (23.69), получим соотношение, аналогичное (23.35):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_n^{(R)}(t) E_m^{(R)}(t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int E_n(t) E_m^*(t) dt. \quad (23.70)$$

Учитывая (23.70) для  $E^{(R)}(t)$  в форме (23.63), получим

$$\langle (E^{(R)}(t))^2 \rangle = 1/2 \langle E(t) E^*(t) \rangle, \quad (23.71)$$

где

$$E(t) = \sum_n E_n(t). \quad (23.72)$$

Согласно (23.63), (23.68)

$$\begin{aligned} \langle (E^{(R)}(t))^2 \rangle &= \frac{4\pi}{T} \sum_n \sum_m \int_0^{\infty} g_n(\omega') g_m^*(\omega') d\omega' = \\ &= \frac{4\pi}{T} \left\{ \sum_n \int_0^{\infty} g_n(\omega') g_n^*(\omega') d\omega' + \sum_{n \neq m} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} g_n(\omega') g_m^*(\omega') d\omega' \right\}. \end{aligned} \quad (23.73)$$

В (23.73) выделены диагональные  $n=m$  и недиагональные части двойной суммы по  $n$  и  $m$ .

Рассмотрим недиагональную часть. Для  $\omega' > 0$  при  $\gamma_n \ll \omega_n$ ,  $\gamma_m \ll \omega_m$  получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g_n(\omega') g_m^*(\omega') &= \\ &= \frac{E_{n0} E_{m0}}{(4\pi)^2} \operatorname{Re} \frac{e^{i[\omega' (t_n - t_m) + \varphi_m - \varphi_n]}}{\left( \omega' - \omega_n + i \frac{\gamma_n}{2} \right) \left( \omega' - \omega_m - i \frac{\gamma_m}{2} \right)} = \\ &= \frac{E_{n0} E_{m0}}{(4\pi)^2} \frac{\cos \psi_{nm}}{\sqrt{(\omega' - \omega_n)^2 + \left( \frac{\gamma_n}{2} \right)^2} \sqrt{(\omega' - \omega_m)^2 + \left( \frac{\gamma_m}{2} \right)^2}}, \end{aligned} \quad (23.74)$$

$$\text{где} \quad \psi_{nm} = \omega' (t_n - t_m) + \varphi_m - \varphi_n + \alpha_m - \alpha_n, \quad (23.75)$$

$$\text{tg } \alpha_n = \gamma_n / 2 (\omega' - \omega_n), \quad \text{tg } \alpha_m = \gamma_m / 2 (\omega' - \omega_m). \quad (23.76)$$

Среди излучаемых частот могут быть одинаковые. Рассмотрим две частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , которые, в частности, могут быть равны, и рассмотрим ту часть двойной суммы при  $n \neq m$ , в которой  $\omega_n = \omega_1$ , а  $\omega_m = \omega_2$ . При этом в (23.73) все равно будет много членов, соответствующих различным актам излучения. Для этой части суммы получим выражение через соответствующие средние значения:

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega_n = \omega_1, \omega_m = \omega_2, n \neq m} \text{Re} \{g_n(\omega') g_m^*(\omega')\} = \\ &= \frac{N(\omega_1) N(\omega_2)}{(4\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{(\omega' - \omega_1)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \sqrt{(\omega' - \omega_2)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} \times \\ & \quad \times \overline{(E_{n0} E_{m0} \cos \psi_{nm})}. \end{aligned} \quad (23.77)$$

В (23.77) черта сверху означает усреднение по ансамблю,  $N(\omega_1)$  — число актов излучения в интервале времени  $0 < t < T$  с частотой  $\omega_1$ ,  $N(\omega_2)$  — число актов излучения в том же интервале времени с частотой  $\omega_2$ . Учитывая, что случайные значения фаз и случайные значения амплитуд статистически независимы, получим

$$\overline{(E_{n0} E_{m0} \cos \psi_{nm})} = \overline{(E_{n0} E_{m0})} \overline{\cos \psi_{nm}} = 0. \quad (23.78)$$

Выражение (23.78) обращается в нуль за счет случайных значений фаз  $\varphi_n, \varphi_m$ .

Заметим, что (23.78) обращается в нуль и в том случае, если фазы  $\varphi_n, \varphi_m$  принимают случайным образом одно из двух значений — 0 или  $\pi$ .

Учитывая (23.78), получим для (23.73)

$$\langle (E^{(R)}(t))^2 \rangle = \frac{4\pi}{T} \sum_n \int_0^\infty g_n(\omega') g_n^*(\omega') d\omega'. \quad (23.79)$$

Для  $\omega > 0$ , учитывая малость  $\gamma_n$  ( $\gamma_n \ll \omega_n$ ), в (23.66) можно оставить лишь первый член. При этом получим

$$\int_0^\infty g_n(\omega) g_n^*(\omega') d\omega' = \left( \frac{E_{n0}}{4\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{\gamma_n}. \quad (23.80)$$

Если все осцилляторы испускают одну частоту, т. е.  $\omega_n = \omega_0$ ,  $\gamma_n = \gamma$ , а число возбуждений осцилляторов в единицу времени равно  $N$ , то, вводя средний квадрат амплитуды

$$E_0^2 = \overline{E_{n0}^2} = \frac{1}{NT} \sum_n (E_{n0})^2, \quad (23.81)$$

получим

$$\langle (E^{(R)}(t))^2 \rangle = NE_0^2/2\gamma. \quad (23.82)$$

В случае излучения цугов волн различных частот рассмотрим малый интервал частот  $\omega < \omega_n < \omega + \Delta\omega$ . Пусть в этом интервале в единицу времени происходит излучение  $N(\omega)\Delta\omega$  цугов волн. Вводя среднее по этому интервалу частот значение квадрата амплитуды

$$E_0^2(\omega) = \overline{E_{n0}^2}_{\omega < \omega_n < \omega + \Delta\omega} = \frac{1}{N(\omega)\Delta\omega T} \sum_{\omega < \omega_n < \omega + \Delta\omega} E_{n0}^2, \quad (23.83)$$

получим

$$\langle (E^{(R)}(t))^2 \rangle = \int_0^\infty N(\omega) \frac{E_0^2(\omega)}{2\gamma} d\omega. \quad (23.84)$$

## § 24. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

**Задача 24.1.** Рассмотреть интерференцию, возникающую в результате отражения плоской монохроматической волны от идеального зеркала, покрытого тонким плоскопараллельным слоем диэлектрика, и показать, исходя из формул Френеля, что в результате отражения ее меняется лишь фаза волны и направления ее распространения, а амплитуда остается неизменной.

**Решение.** Рассмотрим известную ситуацию, которая может показаться парадоксальной. Пусть идеальное зеркало покрыто тонким (порядка длины волны) плоскопараллельным слоем диэлектрика. Пусть на эту поверхность под некоторым углом падает плоская монохроматическая электромагнитная волна. В результате отражения возникнет волна, уходящая от зеркала. Так как в самой пленке и при отражениях не происходит поглощения энергии, то

ясно, что амплитуда отраженной волны должна равняться амплитуде падающей волны (изменяется лишь фаза). Парадоксальным может показаться то, что это равенство амплитуд должно выполняться для всех углов падения, для различных толщин диэлектрической пленки и для различных показателей преломления пленки, хотя известно, что коэффициенты отражения зависят от углов падения и показателей преломления, а результат интерференции существенно зависит от толщины пленки.

Рассмотрим указанную ситуацию, применяя формулы Френеля. Обозначим амплитуду падающей волны через  $E$ , амплитуду отраженной волны — через  $E^r$ , а амплитуду преломленной волны — через  $E^g$ . Коэффициенты отражения обозначим через  $r$ , а коэффициент преломления — через  $g$ . По определению,

$$E^r = rE, \quad E^g = gE, \quad (24.1)$$

где  $r$  и  $g$  определяются формулами Френеля. Из формул Френеля получаем, что

$$r^2 + gg' = 1, \quad (24.2)$$

где  $g'$  — коэффициент прохождения для волны, идущей в обратном направлении, т. е. падающей на границу под углом падения, равным углу преломления волны, идущей в прямом направлении. Соотношение (2) выполняется для  $s$ - и  $p$ -поляризаций.

В результате многократного отражения падающей волны на двух границах пленки получим ряд волн. Результирующую волну обозначим через  $E^R$ . Учитывая, что при отражении от идеального зеркала, т. е. на нижней границе диэлектрического слоя, коэффициент отражения по модулю равен единице, и вводя разность фаз  $\delta$ , возникающую при однократном прохождении диэлектрического слоя в прямом и обратном направлениях и однократном отражении от идеального зеркала, получим ( $r_{12} = r$ ,  $r_{21} = -r$ ,  $g_{12} = g$ ,  $g_{21} = g'$ )

$$\begin{aligned} E^R &= rE + gg' e^{i\delta} E - rg' e^{2i\delta} E + gr^2 g' e^{3i\delta} E + \dots = \\ &= \left( r + \frac{gg'}{1 + r e^{i\delta}} \right) E = \frac{r + (r^2 + gg') e^{i\delta}}{1 + r e^{i\delta}} E. \end{aligned} \quad (24.3)$$

Учитывая (24.2), получим

$$E^R = \frac{r + e^{i\delta}}{1 + r e^{i\delta}} E = \frac{1 + r e^{-i\delta}}{1 + r e^{i\delta}} e^{i\delta} E. \quad (24.4)$$

Из (24.4) видно, что  $|E^R| = |E|$ , т. е. амплитуды отраженной и падающей волн равны. Этот пример показывает, что при рассмотрении отражений от тонких пленок, вообще говоря, нельзя игнорировать многократные отражения, ссылаясь на то, что коэффициент отражения мал и многократно отраженные волны будут иметь значительно меньшую амплитуду. Если бы мы учли лишь волны, однократно отраженные от верхней границы, и волну, отраженную лишь от идеального зеркала, мы не получили бы точное сохранение амплитуды, но приближенное равенство тем не менее имело бы место, т. е.

$$\begin{aligned} rE + gg'e^{i\delta}E - gg're^{i2\delta} &= r + (1 + r^2)e^{i\delta} - (r - r^3)e^{i2\delta} \approx \\ &\approx (1 + r\bar{e}^{i\delta} - re^{i\delta})e^{i\delta} = (1 - ir2 \sin \delta)e^{i\delta}. \end{aligned} \quad (24.5)$$

По модулю это выражение приблизительно равно единице (если пренебречь величинами порядка  $r^2$ ).

**Задача 24.2.** Плоскопараллельная пластинка с двух сторон покрыта тонкой просветляющей пленкой, дающей полное просветление при нормальном падении света с длиной волны  $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-7}$  м (5000 Å). Показатель преломления стекла равен  $n = 1,56$ . Какая часть света пройдет через стеклянную пластинку при длине волны  $\lambda_2 = 6 \cdot 10^{-7}$  м (6000 Å)?

**Решение.** Пусть волна падает нормально на стеклянную плоскопараллельную пластинку, покрытую тонкой диэлектрической пленкой. Показатель преломления внешней среды обозначим через  $n_1$ , показатель преломления пленки — через  $n_2$ , показатель преломления стекла — через  $n_3$ . Соответствующие границы раздела будем обозначать двумя индексами. С учетом многократных отражений на границах пленки получим для суммарной отраженной волны  $E^R$

$$\frac{E^R}{E} = r_{12} + g_{12} r_{23} g_{21} e^{i\delta} + g_{12} r_{23} r_{21} r_{23} g_{23} e^{i2\delta} +$$

$$+ g_{12} r_{23} r_{21} r_{23} r_{21} r_{23} g_{21} e^{i 3 \delta} + \dots = r_{12} + \frac{g_{12} g_{21} r_{23} e^{i \delta}}{1 - r_{21} r_{23} e^{i \delta}} =$$

$$= \frac{r_{12} + (r_{12}^2 + g_{12} g_{21}) r_{23} e^{i \delta}}{1 - r_{21}^2 r_{23} e^{i \delta}} = \frac{r_{12} + r_{23} e^{i \delta}}{1 + r_{12} r_{23} e^{i \delta}}. \quad (24.6)$$

Для того чтобы  $E^R$  обратилось в нуль, необходимо, чтобы  $e^{i \delta}$  было действительным, т. е.  $\delta = \pi$ . При этом получаем  $r_{12} = r_{23}$ , т. е.  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ . Эти условия просветления могут быть выполнены лишь для одной длины волны  $\lambda_0$ . Если пренебречь дисперсией пленки, то  $\delta = (2\pi/\lambda) 2hn_2 \cos \chi = \pi \lambda_0/\lambda$ .

Будем считать, что стеклянная пластинка имеет такую толщину, что интерференция волн, отраженных от первой и второй поверхностей пластинки, не происходит из-за недостаточной степени когерентности волн.

Для прошедшей первый просветляющий слой волны получим

$$E_3 = \{g_{12} g_{23} (1 + r_{23} r_{21} e^{i \delta} + (r_{23} r_{21} e^{i \delta})^2 + \dots)\} E =$$

$$= \frac{g_{12} g_{23}}{1 - r_{23} r_{21} e^{i \delta}} E. \quad (24.7)$$

После прохождения второго слоя сформируется волна с комплексной амплитудой

$$E' = E_3 \frac{g_{32} g_{21}}{1 - r_{21} r_{23} e^{i \delta}}. \quad (24.8)$$

Квадрат модуля амплитуды прошедшей волны будет равен

$$|E'|^2 = \left| \frac{g_{32} g_{21}}{1 - r_{21} r_{23} e^{i \delta}} \right|^2 \left| \frac{g_{12} g_{23}}{1 - r_{23} r_{21} e^{i \delta}} \right|^2 E^2 =$$

$$= \frac{(1 - r_{12}^2)^2 (1 - r_{23}^2)^2 E^2}{\left( (1 + r_{12} r_{23})^2 - 4 r_{12} r_{23} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)^2}. \quad (24.9)$$

Если пренебречь дисперсией стекла, то  $r_{12} = r_{23}$  для всего диапазона длин волн. Положив в этом случае  $r_{12}^2 = r_{23}^2 = R$ , получим

$$|E'|^2 = \frac{(1 - R)^4}{\left( (1 + R)^2 - 4 R \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)^2} E^2. \quad (24.10)$$

**Задача 24.3.** Найти степень временной когерентности для излучения движущихся атомов.

**Решение.** Изменение частоты излучения, обусловленное эффектом Допплера, в нерелятивистском приближении равно

$$\omega = \omega_0(1 + v/c), \quad (24.11)$$

где  $v$  — скорость излучателя в направлении на наблюдателя. Из (24.1) получаем

$$v = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} c. \quad (24.12)$$

Распределение атомов по скоростям (одномерное) определяется законом Максвелла:

$$dN = N_1 e^{-mv^2/2kT} dv. \quad (24.13)$$

Переходя к распределению по частотам излучения, получим

$$dN = N_0 e^{-a(\omega - \omega_0)^2} d\omega, \quad N_0 = N_1 \frac{c}{\omega_0}, \quad a = \frac{mc^2}{2kT} \frac{1}{\omega_0^2}. \quad (24.14)$$

Если различие между светом, идущим по одному и другому каналам, обусловлено лишь разностью хода, т. е. интенсивности и спектральный состав одинаковые, то комплексная временная когерентность определяется соотношением

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E_1(t + \tau) E_2^*(t) \rangle}{\langle E_1(t) E_2^*(t) \rangle} = \frac{\int_0^\infty N(\omega) \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega'\tau}}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2/4} d\omega d\omega'}{\int_0^\infty N(\omega) \int_0^\infty \frac{1}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2/4} d\omega d\omega'}. \quad (24.15)$$

Числитель (24.15) отличается от (23.79) лишь наличием запаздывания  $\tau$  в  $E_1(t + \tau)$ .

Учитывая малость  $\gamma$  ( $\gamma \ll \omega'_0 \approx \omega_0$ ), получим

$$\gamma(\tau) = \frac{\int_0^\infty N(\omega) e^{-i\omega\tau} e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} d\omega}{\int_0^\infty N(\omega) d\omega} =$$



$$= e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} \frac{\int_0^\infty e^{-a(\omega-\omega_0)^2} e^{-i\omega\tau} d\omega}{\int_0^\infty e^{-a(\omega-\omega_0)^2} d\omega}. \quad (24.16)$$

Интегралы в (24.16) можно распространить на область от  $-\infty$  до  $+\infty$ , так как  $1/a \ll \omega_0$ . Введем переменную  $\xi = \omega - \omega_0$ .

$$\gamma(\tau) = \frac{e^{-i\omega_0\tau} e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2} e^{-i\xi\tau} d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2} d\xi}. \quad (24.17)$$

Произведем еще одно преобразование переменной интегрирования:

$$\begin{aligned} \xi^2 - i\frac{\tau}{a}\xi &= \xi^2 - i\frac{\tau}{a}\xi - \frac{\tau^2}{4a^2} + \frac{\tau^2}{4a^2} = \left(\xi - i\frac{\tau}{2a}\right)^2 + \frac{\tau^2}{4a^2} = \\ &= \zeta^2 + \frac{\tau^2}{4a^2}, \quad \zeta = \xi - i\frac{\tau}{2a}. \end{aligned} \quad (24.18)$$

При этом

$$e^{-a\xi^2} e^{-i\xi\tau} = e^{-\tau^2/4a} e^{-a\zeta^2} \quad (24.19)$$

и (24.17) запишется в виде

$$\gamma(\tau) = e^{-i\omega_0\tau} e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} e^{-\frac{\tau^2}{4a}} \frac{\int_{-\infty-i\tau/2a}^{+\infty-i\tau/2a} e^{-a\zeta^2} d\zeta}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2} d\xi}. \quad (24.20)$$

Контур интегрирования по  $\zeta$  в (24.20) можно сдвинуть в плоскости комплексных значений  $\zeta$  в направлении мнимой оси на величину  $\tau/2a$ , после чего пределы по  $\zeta$  станут равными  $\pm\infty$ , т. е. интеграл в числителе станет равен интегралу в знаменателе. Таким образом, получаем

$$\gamma(\tau) = e^{-\frac{\gamma}{2}|\tau|} e^{-\frac{\tau^2}{4a}} e^{-i\omega_0\tau}. \quad (24.21)$$

**Задача 24.4.** На примере получения интерференции света с помощью бипризмы рассмотреть влияние размеров источника на видность интерференционной картины.

**Решение.** Для точечного источника интенсивность света в интерференционной картине равна

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \gamma(\tau) \cos \delta. \quad (24.22)$$

Если установка с бипризмами симметрична относительно оси системы (точнее, плоскости, проходящей через ось), а углы интерференции  $\psi$  и углы схождения  $\varphi$  малы, то разность фаз определяется выражением

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (\psi x_1 + \varphi x), \quad (24.23)$$

где  $x_1$  и  $x$  — координаты источника и точки наблюдения (оси  $Ox_1$  и  $Ox$  перпендикулярны оси системы, т. е. биссектрисам углов  $\psi$  и  $\varphi$ ).

Для источника, обладающего небольшой протяженностью в направлении оси  $Ox_1$  (например, щели шириной  $s$ ), при условии некогерентности излучения отдельных точек источника и равномерной светимости получим вместо (24.22)

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \gamma(\tau) \frac{1}{S} \int_{-s/2}^{s/2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\psi x_1 + \varphi x) dx_1, \quad (24.24)$$

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \gamma(\tau) \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} \psi s}{\frac{\pi}{\lambda} \psi s} \cos \frac{2\pi}{\lambda} \varphi x. \quad (24.25)$$

Мы считаем ширину щели столь малой, что при интегрировании углы  $\psi$  и  $\varphi$  не меняются. Углы  $\psi$  и  $\varphi$  связаны соотношением  $a\psi = b\varphi$ , где  $a$  — расстояние от источника до бипризмы (бипризма тонкая),  $b$  — расстояние от бипризмы до плоскости наблюдения. В случае бипризмы углы  $\psi$ ,  $\varphi$  связаны вторым соотношением  $\varphi + \psi = 2(n-1)\alpha$ , где  $\alpha$  — преломляющий угол призмы, который предполагается малым,  $n$  — показатель преломления материала призмы. Углы падения предполагаются малыми. При малых порядках  $\gamma(\tau) \approx 1$ . В этом случае видимость равна

$$V = \left| \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} s \psi}{\frac{\pi}{\lambda} s \psi} \right|. \quad (24.26)$$

Максимальному углу  $\psi$  соответствует угол  $\varphi=0$  («сходящиеся» лучи идут параллельно, т. е. сходятся на бесконечности), следовательно,  $\psi_{\max}=2(n-1)\alpha$ . Если

$$V_{\min} = \frac{\sin \frac{\pi}{\lambda} s 2(n-1)\alpha}{\frac{\pi}{\lambda} s 2(n-1)\alpha} \approx 1, \quad (24.27)$$

то интерференционная картина будет обладать хорошей видимостью всюду, где есть перекрытие пучков и разность хода такова, что  $\gamma(\tau)$  также близко к единице.

Условие хорошей видимости обычно полагают в виде

$$(\pi/\lambda) s \psi \leq \pi/4, \quad (24.28)$$

что приводит к условию на размеры источника

$$s \leq \lambda/4\psi. \quad (24.29)$$

В случае установки с бипризмами и максимального угла  $\psi$  получаем

$$s \leq \lambda/8(n-1)\alpha. \quad (24.30)$$

## § 25. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

**Задача 25.1.** Найти волновое возмущение в области  $z>0$ , если все источники волн находятся в области  $z<0$  и известно волновое возмущение в плоскости  $z=0$ .

**Решение.** В основу рассмотрения задачи положим интеграл Кирхгофа:

$$v(\mathcal{P}) = \iint_{\sigma} \left( v \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (25.1)$$

где  $v(\mathcal{P})$  — волновое возмущение в точке наблюдения  $\mathcal{P}$  с координатами  $x, y, z>0$ ,  $\partial v/\partial n$  — производная в направлении нормали к поверхности интегрирования  $\sigma$ , направленной в области наблюдения,  $G$  — функция Грина, равная

$$G(R) = e^{i\hbar R}/4\pi R, \quad k=2\pi/\lambda, \quad (25.2)$$

$R$  — расстояние от некоторой точки  $\mathcal{Q}$  с координата-

ми  $x', y', z'$  до точки наблюдения  $\mathcal{P}$ , т. е.

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

В качестве поверхности  $\sigma$  можно взять любую поверхность, ограничивающую область наблюдения. В дальнейшем под поверхностью  $\sigma$  будем понимать плоскость  $z'=0$  и полусферу бесконечно большого радиуса, замыкающую эту поверхность. С учетом дополнительного условия излучения (условия Зоммерфельда) интеграл по полусфере в пределе  $r_{\text{сф}} \rightarrow \infty$  будет равен нулю.

Таким образом, в (25.1) интегрирование можно производить по плоскости  $z'=0$ . При этом

$$v(x, y, z) = \iint \left( v \frac{\partial G(R)}{\partial n} - G(R) \frac{\partial v}{\partial n} \right) dx' dy'. \quad (25.3)$$

Чтобы исключить из (25.3) производную  $\partial v / \partial n$ , рассмотрим сопряженную функцию Грина  $G(R')$ , где  $R'$  представляет расстояние между точкой  $Q$  и точкой  $\mathcal{P}'$  с координатами  $x, y, -z$ , т. е. зеркально-симметричной по отношению к точке  $\mathcal{P}$ .

Если точка  $Q$  лежит в плоскости  $z'=0$ , то  $R'=R$ . При этом

$$G(R') = G(R), \quad \left. \frac{\partial}{\partial z'} G(R') \right|_{z'=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z'} G(R) \right|_{z'=0}. \quad (25.4)$$

В области  $z' > 0$   $R'$  не обращается в нуль, поэтому вместо (25.1) получим

$$\iint \left( v \frac{\partial G(R')}{\partial n} - G(R') \frac{\partial v}{\partial n} \right) dx' dy' = 0. \quad (25.5)$$

Учитывая (25.4), соотношение (25.5) можно записать в виде

$$\iint \left( v \frac{\partial G(R)}{\partial n} + G(R) \frac{\partial v}{\partial n} \right) dx' dy' = 0. \quad (25.6)$$

Складывая (25.1) и (25.6), получим искомое соотношение (интеграл Зоммерфельда)

$$v(\mathcal{P}) = 2 \iint v \frac{\partial G(R)}{\partial n} dx' dy'. \quad (25.7)$$

Соотношение (25.7) является точным, если в нем использовано точное значение  $v$  в плоскости  $z'=0$ . Для удаленных точек наблюдения  $R \gg \lambda$ , т. е.  $kR \gg 1$ . В этом случае вместо точной формулы (25.7) мож-

но использовать асимптотически точную формулу, в которой используется асимптотическая формула

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \approx \frac{ike^{ikR}}{4\pi R} \frac{\partial R}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = \frac{-ike^{ikR}}{4\pi R} \frac{z}{R} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{R} \cos \theta,\end{aligned}\quad (25.8)$$

здесь  $\cos \theta = z/R$ ,  $\theta$  — угол дифракции.

С учетом (25.8) соотношение (25.7) запишется в виде

$$v(\mathcal{P}) = \frac{1}{i\lambda} \iint \cos \theta v \frac{e^{ikR}}{R} dx' dy'. \quad (25.9)$$

**Задача 25.2.** Рассмотреть интегральное соотношение Зоммерфельда для электромагнитного поля и выразить напряженность электрического поля в области  $z > 0$  через тангенциальную составляющую вектора напряженности электрического поля в плоскости дифракции.

**Решение.** Соотношение (25.7) выполняется для всех компонент вектора напряженности электрического поля, т. е.

$$\mathbf{E}(x, y, z) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(x', y', 0) \frac{\partial G(R)}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dx' dy'. \quad (25.10)$$

В качестве примера рассмотрим дифракцию света на узкой щели в непрозрачном экране. Ось  $Oy'$  направим вдоль щели. Пусть на экран с щелью падает нормально плоская монохроматическая волна. Рассмотрим два случая поляризации.

В первом случае будем считать, что в падающей плоской волне вектор  $\mathbf{E}$  направлен вдоль щели, т. е.  $\mathbf{E} = \{0, E_y(z), 0\}$ . Щель считается бесконечно длинной, поэтому в дифрагирующей волне не должно быть зависимости от  $y$ . Из анализа уравнений Максвелла в этом случае будет следовать, что в дифрагирующей волне будут присутствовать лишь компоненты  $E_y(x, z)$ ,  $H_x(x, z)$ ,  $H_z(x, z)$ . Дифракция света происходит в плоскости  $x, z$ , т. е. для всех направлений дифракции вектор  $\mathbf{E}(x, z)$  перпендикулярен направлению распространения света. Этот случай назовем  $E$ -поляризацией.

Во втором случае пусть вектор  $\mathbf{E}$  в падающей плоской волне направлен перпендикулярно щели, т. е.

$\mathbf{E} = \{E_x(z), 0, 0\}$ . В этом случае в дифрагирующей волне должны быть компоненты  $E_x(x, z)$  и  $E_y(x, z)$ . Только при наличии этих двух компонент в дифрагирующей волне колебания вектора  $\mathbf{E}$  будут перпендикулярны распространению. Вектор  $\mathbf{H}$ , наоборот, в дифрагирующей волне будет иметь лишь одну компоненту  $H_y(x, z)$  как в падающей волне. Этот случай назовем  $H$ -поляризацией.

В общем случае, если нет зависимости от  $y$ , система уравнений Максвелла распадается на две группы уравнений. В одну входят  $E_y(x, z)$ ,  $H_x(x, z)$ ,  $H_z(x, z)$ , в другую —  $E_x(x, z)$ ,  $E_z(x, z)$ ,  $H_y(x, z)$ . Так как эти уравнения не связаны, то случаи  $E$ - и  $H$ -поляризаций можно рассматривать независимо друг от друга и тогда, когда обе поляризации присутствуют одновременно, например падающая волна поляризована под некоторым углом к оси  $Oy$ .

При рассмотрении дифракции света на отверстии в непрозрачном экране поле в отверстии обычно заменяют полем падающей волны, а на непрозрачной части экрана полагают равным нулю. Такой подход основан на том, что размеры отверстия предполагаются большими по сравнению с длиной волны света. В этом случае поле в отверстии будет отличаться существенным образом от поля падающей волны лишь вблизи краев отверстия (на расстояниях порядка длины волны).

Однако полностью игнорировать различие между полем падающей волны и полем, возникающим в отверстии, нельзя, так как при этом из формулы (25.10) следовало бы, что в дифрагирующей волне не должны присутствовать те компоненты, которых не было в падающей волне. Такой вывод противоречит условию поперечности электромагнитных волн, т. е. условию  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Например, если на узкую щель нормально падает плоская волна, то в случае  $H$ -поляризации в дифрагирующей волне должны быть две компоненты  $E_x(x, z)$  и  $E_z(x, z)$ , а это означает, что и в плоскости щели должна быть  $E_z$ -компонента.

Используя уравнение  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ , формулу (25.10) можно преобразовать таким образом, чтобы в нее входила лишь тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля в плоскости дифракции. Под плоскостью дифракции будем пони-

мать плоскость, примыкающую к экрану со стороны области наблюдения. Если экран идеально проводящий, то тангенциальная составляющая вектора электрического поля в плоскости дифракции вне отверстия должна равняться нулю.

Для проведения указанного преобразования учтем, что (25.6) для  $v = E_z$  можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial z'} \iint (E_z G) dx' dy' = 0. \quad (25.11)$$

Будем считать, что при  $x', y' = \pm\infty$  поле в плоскости дифракции обращается в нуль, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x'} (E_x G) dx' dy' = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x G \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} dy' = 0, \quad (25.12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y'} (E_y G) dx' dy' = \int_{-\infty}^{+\infty} E_y G \Big|_{y=-\infty}^{y=+\infty} dx' = 0. \quad (25.13)$$

Из (25.11) — (25.13) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{div} (\mathbf{E} G) dx' dy' = 0. \quad (25.14)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{div}_Q (\mathbf{E} G) = \mathbf{E} \operatorname{grad}_Q G + G \operatorname{div} \mathbf{E} = \mathbf{E} \operatorname{grad}_Q G, \quad (25.15)$$

так как в вакууме  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Поэтому (25.14) можно записать в виде

$$\iint (\mathbf{E} \operatorname{grad}_Q G) dx' dy' = 0. \quad (25.16)$$

Если ввести единичный вектор  $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ , то вспомогательное соотношение (25.16) можно представить в виде

$$2 \iint \mathbf{n} (\mathbf{E} \operatorname{grad}_Q G) dx' dy'. \quad (25.17)$$

Основное соотношение (25.10) можно записать в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z) = 2 \iint \mathbf{E} (\mathbf{n} \operatorname{grad}_Q G) dx' dy'. \quad (25.18)$$

Вычитая из (25.18), (25.17), получим

$$\mathbf{E}(x, y, z) = 2 \iint (\operatorname{grad}_Q G \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})) dx' dy'. \quad (25.19)$$

В (25.19), в отличие от (25.10), содержится лишь тангенциальная компонента вектора  $\mathbf{E}(x', y', 0)$ .

В случае  $kR \gg 1$

$$\text{grad}_Q G \approx \frac{ik e^{ikR}}{4\pi R} \left( \frac{-\mathbf{R}}{R} \right), \quad (25.20)$$

где  $\mathbf{R} = \{x-x', y-y', z\}$ .

С учетом (25.20) получим асимптотически точную формулу

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \right) \frac{e^{ikR}}{R} dx' dy'. \quad (25.21)$$

Если размеры отверстия малы по сравнению с  $R$ , то в (25.21) вектор  $\mathbf{R}$  можно заменить на вектор  $\mathbf{R}_0 = \{x, y, z\}$ , выбрав начало координат в некоторой средней точке отверстия. В фазе  $kR$  такую замену делать нельзя.

При этом получим

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint \left( \frac{\mathbf{R}_0}{R_0} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \right) \frac{e^{ikR}}{R_0} dx' dy'. \quad (25.22)$$

Из (25.22) видно, что в дифрагирующей волне вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен направлению дифракции  $\mathbf{R}_0/R_0$ .

**Задача 25.3.** Рассмотреть дифракцию света на щели для двух случаев поляризации падающего света.

**Решение.** Рассмотрим дифракцию плоской волны на узкой щели в случае  $E$ - и  $H$ -поляризаций, используя формулу (25.21).

Для  $E$ -поляризации  $\mathbf{E} = \{0, E_y, 0\}$ . При этом  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \{E_y, 0, 0\}$ . Начало координат выберем так, чтобы точке наблюдения  $\mathcal{P}$  соответствовали координаты  $x, 0, z$ . Для этой точки основной вклад в интеграл (25.21) дает относительно небольшая область значений  $y'$  (около  $y'=0$ ), для которой можно произвести замену  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_0 = \{x, 0, z\}$ , т. е. воспользоваться формулой (25.22). При этом  $(\mathbf{R}_0 \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}))/R_0 = \{0, E_y, 0\} z/R_0 = \{0, E_y, 0\} \cos \varphi$ , и из (25.22) получаем

$$E_y = \frac{\cos \varphi}{i\lambda R_0} \iint E_y(x', 0) e^{ikR} dx' dy'. \quad (25.23)$$

В случае  $H$ -поляризации для падающей волны в



плоскости дифракции  $\mathbf{E} = \{E_x(x', 0), 0, E_z(x', 0)\}$ , при этом  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = -E_x \{0, 1, 0\}$ ,  $(\mathbf{R}_0 \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})) / R_0 = E_x \{z, 0, -x\} / R_0$ , т. е.  $|(\mathbf{R}_0 \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})) / R_0| = E_x$ . При этом получаем

$$|E(x, z)| = \frac{1}{i \lambda R_0} \iint E_x(x', 0) e^{ikR} dx' dy'. \quad (25.24)$$

Вектор  $\mathbf{E}(x, z)$  лежит в плоскости  $xOz$  и перпендикулярен вектору  $\mathbf{R}_0$ .

Из сравнения (25.23) и (25.24) видно, что интенсивность дифрагирующего на узкой щели света зависит от поляризации света, падающего на щель.

Из (25.24) получаем, что для случая  $H$ -поляризации

$$E_y(x, z) = |\mathbf{E}(x, z)| \cos \varphi. \quad (25.25)$$

Соотношение (25.25) соответствует (25.23), но в случае  $H$ -поляризации (25.25) определяет не полное поле, а лишь  $y$ -компоненту вектора напряженности.

В случае дифракции на узкой щели нет зависимости напряженностей электромагнитного поля от координаты  $y'$ . Поэтому в (25.23) и (25.24) можно провести интегрирование по  $y'$ , используя приближение Френеля, а при интегрировании по  $x'$  использовать приближение Фраунгофера. Для этого представим вектор  $\mathbf{R}$  в виде разности  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \boldsymbol{\rho}$ , где  $\boldsymbol{\rho} = \{x', y', 0\}$  — вектор, проведенный из точки начала координат в точку  $Q$ . Разлагая  $R$  по степеням  $\boldsymbol{\rho}$ , получим

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\mathbf{R}_0 - \boldsymbol{\rho})^2} = R_0 \sqrt{1 - \frac{2\mathbf{R}_0 \boldsymbol{\rho}}{R_0^2} + \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{R_0^2}} = \\ &= R_0 \left( 1 - \frac{\mathbf{R}_0 \boldsymbol{\rho}}{R_0^2} + \frac{\boldsymbol{\rho}^2}{2R_0^2} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{R}_0 \boldsymbol{\rho})^2}{R_0^4} + \dots \right) = \\ &= R_0 - \frac{x' x}{R_0} + \frac{x'^2 + y'^2}{2R_0} - \frac{x'^2 x^2}{2R_0^3} + \dots \end{aligned} \quad (25.26)$$

Если ввести вместо координаты точки наблюдения  $x$  угол дифракции  $\varphi$ , то  $x/R_0 = \sin \varphi$  ( $z/R_0 = \cos \varphi$ ). При этом (25.26) запишется в виде

$$R = R_0 - x' \sin \varphi + \frac{x'^2 \cos^2 \varphi + y'^2}{2R_0} + \dots \quad (25.27)$$

Если для всех точек отверстия  $Q$  выполняется условие  $x'^2 \ll R_0 \lambda$ , то в (25.27) можно не учитывать члены, содержащие  $x'^2$  и более высокие степени  $x'$ , т. е. ограничиться при интегрировании по  $x'$  приближением Фраунгофера. Интегрирование по  $y'$  формально осуществляется по области  $-\infty < y' < +\infty$ . Но основной вклад в интеграл дает конечная область, для которой можно ограничиться квадратичным приближением по  $y'$  в (25.27), т. е. приближением Френеля.

Учитывая сказанное, получим

$$R = R_0 - x' \sin \varphi + \frac{1}{2R_0} y'^2. \quad (25.28)$$

Для интегрирования по  $y'$  введем безразмерную координату  $u = \sqrt{\frac{2}{\lambda R_0}} y'$ . При этом  $\frac{2\pi i}{\lambda} \frac{y'^2}{2R_0} = \frac{\pi}{2} u^2$ ,  $dy' = \sqrt{\frac{\lambda R_0}{2}} du$ .

Интегрирование по  $y'$  дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik y'^2/2R_0} dy' = \sqrt{\frac{\lambda R_0}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\pi}{2} u^2} du = \sqrt{i \lambda R_0}. \quad (25.29)$$

В (25.29) учтены значения интегралов Френеля:

$$C(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \quad C(\infty) = \frac{1}{2}, \quad (25.30)$$

$$S(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \quad S(\infty) = \frac{1}{2} \quad (25.31)$$

и соотношение  $1 + i = \sqrt{2}i$ .

Из таблиц интегралов Френеля имеем

$$\left( C(w) = C'\left(\frac{\pi}{2} w^2\right), \quad S(w) = S'\left(\frac{\pi}{2} w^2\right) \right)$$

$$C'\left(\frac{\pi}{2} 8^2\right) = 0,4998; \quad C'\left(\frac{\pi}{2} 9^2\right) = 0,5354;$$

$$C'\left(\frac{\pi}{2} 10^2\right) = 0,4999,$$

$$S'\left(\frac{\pi}{2} 8^2\right) = 0,4602; \quad S'\left(\frac{\pi}{2} 9^2\right) = 0,5354;$$

$$S' \left( \frac{\pi}{2} 10^2 \right) = 0,4682.$$

Из приведенных примеров видно, что для получения предельных значений интегралов Френеля достаточно, чтобы  $w$  было равно нескольким десяткам. Если  $R_0 = 1$  м,  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м (5000 Å), то значению  $w = 20$  соответствует  $y'_{\max} = 1$  см.

Учитывая (25.28), (25.29), получим для  $E$ -поляризации

$$E_y(x, z) = \frac{\cos \varphi e^{ikR_0}}{\sqrt{i\lambda R_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x', 0) e^{-ik \sin \varphi x'} dx'. \quad (25.32)$$

Для  $H$ -поляризации получим

$$|E(x, z)| = \frac{e^{ikR_0}}{\sqrt{i\lambda R_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(x', 0) e^{-ik \sin \varphi x'} dx'. \quad (25.33)$$

Если щель не очень узкая по сравнению с длиной волны, то в (25.32), (25.33) можно заменить поле в щели полем падающей волны, т. е.

$$E_y(x', 0) \approx E_{0y} \theta(|x'| - b), \quad E_x(x', 0) = E_{0x} \theta(|x'| - b). \quad (25.34)$$

**Задача 25.4.** Рассмотреть дифракцию света на плоском объекте, используя разложение напряженностей полей в интегралы Фурье.

**Решение.** Рассмотренный метод Кирхгофа для решения задач, связанных с дифракцией света, является не единственно возможным. Для плоских объектов дифракции с успехом может применяться метод Рэлея, основанный на разложении напряженности электрического поля в интеграл Фурье.

Разложим  $E(x, y, z)$  в двойной интеграл Фурье:

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (25.35)$$

Учитывая, что  $E(x, y, z)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta E(x, y, z) + k^2 E(x, y, z) = 0, \quad (25.36)$$

получим уравнение для фурье-компонент поля

$$\left( -k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E(k_x, k_y; z) + k^2 E(k_x, k_y; z) = 0. \quad (25.37)$$

Из (25.37) следует, что

$$E(k_x, k_y; z) = E(k_x, k_y; z') e^{\pm i \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} (z - z')} \quad (25.38)$$

Выбор знака перед корнем в показателе экспоненты в (25.38) связан с дополнительным условием. Мы будем рассматривать волны, распространяющиеся под острым углом к положительному направлению оси  $Oz$ . В этом случае при  $k_x^2 + k_y^2 > k^2$  получим так называемую неоднородную волну, амплитуда которой должна убывать с ростом  $z$ , т. е.

$$E(k_x, k_y; z) = E(k_x, k_y; z') e^{-\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} (z - z')} \quad (25.39)$$

Это условие убывания амплитуды означает, что в (25.38) должен быть перед корнем взят знак плюс. Используя (25.38), получим фурье-представление для  $E(x, y, z)$ :

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x, k_y; z') e^{i(k_x x + k_y y) + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} (z - z')} dk_x dk_y \quad (25.40)$$

Если  $k_x^2 + k_y^2 < k^2$ , то можно ввести вектор  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ ,  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ . При этом  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ . Если  $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ , то для  $k_z$  получается мнимое значение, соответствующее неоднородной волне. С помощью вектора  $\mathbf{k}$  соотношение записывается в виде

$$E(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x, k_y; z') e^{-ik_z z'} e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} dk_x dk_y, \quad (25.41)$$

$$\mathbf{x} = \{x, y, z\}.$$

Соотношение (25.41) представляет собой разложение  $E(x, y, z)$  по плоским (в том числе и неоднородным) волнам. В плоскости  $z = z'$  получим

$$E(\mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(k_x, k_y; z') e^{i(k_x x' + k_y y')} dk_x dk_y. \quad (25.42)$$

Обратное по отношению к (25.42) преобразование имеет вид

$$E(k_x, k_y; z') = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint E(\mathbf{x}') e^{-i(k_x x' + k_y y')} dx' dy'. \quad (25.43)$$

Подставляя (25.43) в (25.40), получим

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \mathbf{E}(\mathbf{x}') e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} d\mathbf{x}' dy' dk_x dk_y. \quad (25.44)$$

Соотношение (25.44) выражает напряженность электрического поля в области  $z > z'$  через напряженность поля в плоскости  $z = z'$ .

**Задача 25.5.** Показать соответствие между методом Кирхгофа и методом Рэлея.

**Решение.** Соотношение (25.44) имеет тот же смысл, что и соотношение (25.10), но представлено в другом виде. Если провести в (25.44) интегрирование по  $k_x, k_y$ , то мы должны получить соотношение (25.10).

Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} dk_x dk_y, \quad (25.45)$$

входящий в соотношение (25.44).

Целесообразно предварительно преобразовать его в трехмерный интеграл, вводя интегрирование по  $q$  для того, чтобы интеграл стал более симметричным по форме. Для этой цели рассмотрим комплексную величину  $p + is = \sqrt{(k + i\varepsilon)^2 - k_x^2 - k_y^2}$ , где  $\varepsilon$  — бесконечно малая положительная величина. Существенно, что  $s > 0$ . Если  $k^2 > k_x^2 + k_y^2$ , то  $s = \varepsilon k \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ ; если  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ , то  $s = \varepsilon k$ ; если  $k^2 < k_x^2 + k_y^2$ , то  $s = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$ .

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iq(z-z')}}{q^2 - (p + is)^2} dq. \quad (25.46)$$

Его можно вычислить, если рассмотреть плоскость комплексных значений  $q$ . Учитывая, что  $z - z' > 0$ , контур интегрирования можно замкнуть дугой большой окружности в верхней полуплоскости. При этом внутри контура окажется лишь полюс, находящийся в точке  $q = p + is$ . Используя теорему о вычетах, получим для (25.46)

$$I_1 = 2\pi i \frac{e^{i(p+is)(z-z')}}{2(p+is)} = i\pi \frac{e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}(z-z')}}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}. \quad (25.47)$$

Дифференцируя (25.47) по  $z'$ , получим

$$2 \frac{\partial}{\partial z'} I_1 = 2 \pi e^{i \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} (z - z')} \quad (25.48)$$

Используя (25.48), (25.46), получим для (25.45) выражение в виде тройного интеграла ( $\mathbf{k}_1 = \{k_{1x}, k_{1y}, k_{1z}\}$ ,  $\mathbf{R} = \{x - x', y - y', z - z'\}$ )

$$\begin{aligned} I &= 2 \frac{\partial}{\partial z'} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{e^{i \mathbf{k}_1 \mathbf{R}}}{k_1^2 - (k + i\varepsilon)^2} dk_{1x} dk_{1y} dk_{1z} \right\} = \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial z'} I_2(\mathbf{R}). \end{aligned} \quad (25.49)$$

Вычисление интеграла

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{e^{i \mathbf{k}_1 \mathbf{R}}}{k_1^2 - (k + i\varepsilon)^2} dk_{1x} dk_{1y} dk_{1z} \quad (25.50)$$

удобно провести в сферической системе координат, выбрав ось  $k_{1z}$  вдоль направления вектора  $\mathbf{R}$ . При этом  $\mathbf{k}_1 \mathbf{R} = k_1 R \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{R}$ . Элемент объема равен  $d^3 k_1 = k_1^2 \sin \theta dk_1 d\theta d\varphi$ . Интегрирование по азимутальному углу дает множитель  $2\pi$ , при этом получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi k_1^2 \sin \theta \frac{e^{i k_1 R \cos \theta}}{k_1^2 - (k + i\varepsilon)^2} dk_1 d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i R} \int_0^\infty k_1 \frac{e^{-i k_1 R} - e^{i k_1 R}}{k_1^2 - (k + i\varepsilon)^2} dk_1 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i R} \left\{ \int_0^\infty k_1 \frac{e^{i k_1 R}}{k_1^2 - (k + i\varepsilon)^2} dk_1 - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty k_1 \frac{e^{-i k_1 R}}{k_1^2 - (k + i\varepsilon)^2} dk_1 \right\}. \end{aligned} \quad (25.51)$$

Заменяя во втором интеграле (25.51)  $k_1 \rightarrow -k_1$ , получим

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i R} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \frac{e^{i k_1 R}}{k_1^2 - (k + i\varepsilon)^2} dk_1. \quad (25.52)$$

В (25.52) контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости комплексных значений  $k_1$ . При этом внутри контура будет полюс в точке  $k_1 =$

$=k+i\varepsilon$ . Применяя теорему о вычетах, получим

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} = G(R). \quad (25.53)$$

Таким образом, интеграл (25.50) представляет разложение функции Грина в интеграл Фурье.

Учитывая (25.49) и (25.53), получим

$$I = 2 \frac{\partial}{\partial z'} G(R). \quad (25.54)$$

Подставляя (25.45) в форму (25.54) в (25.44), получим

$$E(x, y, z) = 2 \iint E(x', y', 0) \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dx' dy' \quad (25.55)$$

в полном соответствии с (25.10).

Заметим, что функцию Грина можно представить в виде двойного интеграла Фурье. Для этого учтем эквивалентность двух форм (25.46) и (25.47). Заменив в (25.50) (25.46) на (25.47), получим, учитывая (25.53),

$$G(R) = \frac{i}{(2\pi)^2} \iint \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}}{2\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y. \quad (25.56)$$

Вычисляя  $\text{grad}_Q G(R)$  в форме (25.56), получим

$$\text{grad}_Q G(R) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \frac{1}{2} \mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}}{k^2 - k_x^2 - k_y^2} dk_x dk_y. \quad (25.57)$$

Подставляя (25.57) в (25.19), получим формулу, в которой присутствует лишь тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля,

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \frac{(\mathbf{k} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}))}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} dk_{1x} dk_{1y} dx' dy'. \quad (25.58)$$

**Задача 25.6.** Показать, что основной вклад в напряженность электрического поля в некоторой точке наблюдения при разложении дифрагирующего поля по плоским волнам дают волны, направление распространения которых мало отличается от направления дифракции.

**Решение.** Плоские волны безграничны по фронту, поэтому в точку наблюдения  $\mathcal{P}$  приходят волны со всевозможными направлениями распространения. Однако при  $kR \gg 1$  основной вклад в интеграл Фурье в выражении (25.44) дают плоские волны, волновой вектор которых  $\mathbf{k}$  по направлению мало отличается от вектора  $\mathbf{R}$ .

Для доказательства этого утверждения воспользуемся асимптотическим вычислением интеграла в (25.44), (25.58) методом стационарной фазы. Для этого разложим фазу  $\mathbf{k}\mathbf{R}$  в ряд по степеням  $\mathbf{k}-\mathbf{k}_0$  около  $\mathbf{k}_0$ , для которого фаза  $\mathbf{k}\mathbf{R}$  имеет экстремальное значение. При этом разложение не будет содержать линейных членов, а квадратичные члены дадут известные интегралы Френеля.

Обозначим через  $\delta(k_x, k_y)$  фазу  $\mathbf{k}\mathbf{R}$ :

$$\delta(k_x, k_y) = k_x(x-x') + k_y(y-y') + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}(z-z'). \quad (25.59)$$

Интегрирование по  $k_x, k_y$  проще всего провести, вводя новую систему координат  $XYZ$ , начало которой выберем в точке  $Q(x', y', z')$ . Ось  $OZ$  направим параллельно оси  $Oz$ , а плоскость  $ZX$  выделим осью  $OZ$  и точкой наблюдения  $\mathcal{P}(x, y, z)$ . В новой системе координат точка  $\mathcal{P}$  будет иметь координаты  $\{X, 0, Z\}$ . Компоненты  $\mathbf{k}$  будут

$$K_X, K_Y, K_Z = \sqrt{k^2 - K_X^2 - K_Y^2}.$$

Фаза в новой системе координат запишется в виде

$$\delta(K_X, K_Y) = K_X X - \sqrt{k^2 - K_X^2 - K_Y^2} Z. \quad (25.60)$$

Найдем значение компонент вектора  $\mathbf{k}_0$ , для которого фаза имеет экстремальное значение. Учитывая, что

$$\frac{\partial K_Z}{\partial K_X} = -\frac{K_X}{K_Z}, \quad \frac{\partial K_Z}{\partial K_Y} = -\frac{K_Y}{K_Z}, \quad (25.61)$$

получим из (25.60) и условия экстремальности

$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial K_X} \right|_{\mathbf{k}_0} = X - \frac{K_{0X}}{K_{0Z}} Z = 0, \quad (25.62)$$



$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial K_Y} \right|_{\mathbf{k}_0} = -\frac{K_{0Y}}{K_{0Z}} Z = 0. \quad (25.63)$$

Вводя угол дифракции  $\theta$ , получим  $\sin \theta = X/R$ ,  $\cos \theta = Z/R$  ( $R = \sqrt{X^2 + Z^2}$ ). При этом из (25.61), (25.62) следует, что

$$K_{0X} = k \sin \theta, K_{0Y} = 0, K_{0Z} = k \cos \theta, \text{ т. е. } \mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{R}. \quad (25.64)$$

Для вторых производных в точке  $\mathbf{k}_0 = \{K_{0X}, 0, K_{0Z}\}$  получим

$$\left. \frac{\partial^2 \delta}{\partial K_X^2} \right|_{\mathbf{k}_0} = \frac{-R}{k \cos^2 \theta}, \quad \left. \frac{\partial^2 \delta}{\partial K_Y^2} \right|_{\mathbf{k}_0} = \frac{-R}{k}, \quad \left. \frac{\partial^2 \delta}{\partial K_X \partial K_Y} \right|_{\mathbf{k}_0} = 0. \quad (25.65)$$

Разложение фазы  $\delta(K_X, K_Y)$  в ряд Тейлора около точки  $\mathbf{k}_0$  будет иметь вид

$$\delta(K_X, K_Y) = kR - \frac{R}{2k \cos^2 \theta} (K_X - K_{0X})^2 - \frac{R}{2k} K_Y^2 + \dots \quad (25.66)$$

Для достаточно больших значений  $kR$  можно ограничиться учетом лишь выписанных в (25.66) членов разложения (метод стационарной фазы), так как вдали от экстремальной точки фазовый множитель  $e^{i\delta}$  осциллирует с ростом  $K_X - K_{0X}$ ,  $K_Y$  и далекие от экстремума области практически не дают вкладов в интегралы (25.44), (25.58).

С учетом лишь квадратичных членов в разложении (25.66) рассматриваемые интегралы преобразуются к виду интегралов Френеля. Для этого введем безразмерные переменные  $u$  и  $v$ :

$$\frac{R}{2k \cos^2 \theta} (K_X - K_{0X})^2 = \frac{\pi}{2} u^2, \quad \frac{R}{2k} K_Y^2 = \frac{\pi}{2} v^2. \quad (25.67)$$

При этом

$$dK_X dK_Y = \frac{\pi k}{R} \cos \theta du dv. \quad (25.68)$$

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta} dK_X dK_Y = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\pi k \cos \theta}{R} e^{ikR} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{\pi}{2} u^2} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i \frac{\pi}{2} v^2} dv = \end{aligned}$$

$$= k \cos \theta \frac{e^{i k R}}{4\pi R} (1-i)^2 = \frac{e^{i k R}}{i \lambda R} \cos \theta \approx$$

$$\approx 2 \operatorname{grad}_{\mathcal{Q}} G \mathbf{n} = 2 \frac{\partial G}{\partial n}, \quad (25.69)$$

т. е. (25.69) соответствует асимптотической форме  $2\partial G/\partial n$  (25.8). Подставляя (25.69) в (25.44) (с учетом (25.59)), получим асимптотическую форму (типа (25.9)) интеграла (25.10). Подстановка (25.69) в (25.58) (с учетом (25.64)) дает асимптотическую формулу (25.21).

В (25.69) основной вклад дают области  $|u| \leq 20$ ,  $|v| \leq 20$  (см. замечание после (25.31)), т. е. области

$$|K_X - K_{0X}| \cos \theta / k \lesssim 20 \sqrt{\frac{\pi}{kR}}, \quad K_Y / k \lesssim 20 \sqrt{\frac{\pi}{kR}}, \quad (25.70)$$

что для  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м (5000 Å) и  $R = 1$  м дает

$$|K_X - K_{0X}| \cos \theta / k \lesssim 0,01, \quad K_Y / k \lesssim 0,01.$$

Это означает, что при  $kR \gg 1$  основной вклад в волновое возмущение в точке  $\mathcal{P}$  дают плоские волны, направление распространения которых мало отличается от направления вектора  $\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{R}$ .

**Задача 25.7.** Рассмотреть поток электромагнитной энергии дифрагирующих волн.

**Решение.** Средний по времени поток электромагнитной энергии через поверхность  $f$  определяется с помощью усредненного вектора Умова — Пойнтинга

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (25.71)$$

Поток через плоскость  $z = \text{const}$  будет равен ( $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ )

$$N = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \mathbf{n} \, dx \, dy. \quad (25.72)$$

Выражение для  $\mathbf{E}$  возьмем в форме (25.41) ( $z' = 0$ ):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \iint \mathbf{E}(k_x, k_y) e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} \, dk_x dk_y, \quad (25.73)$$

$\mathbf{H}$  определим с помощью уравнения Максвелла

$$i \omega \mu_0 \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (25.74)$$

Из (25.74), (25.73) получим

$$\mathbf{H}^* = \frac{1}{\mu_0 \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{k}_1^* \times \mathbf{E}^*(k_1)) e^{i \mathbf{k}_1^* \cdot \mathbf{x}} dk_{1x} dk_{1y},$$

$$\mathbf{k}_1^* = \{k_{1x}, k_{1y}, (\sqrt{k^2 - k_{1x}^2 - k_{1y}^2})\} \text{ т. е. если } \quad (25.75)$$

$$k_{1x}^2 + k_{1y}^2 - k^2 > 0, \text{ то } k_{1z}^* = -i \sqrt{k_{1x}^2 + k_{1y}^2 - k^2}.$$

Подставляя (25.73) и (25.75) в (25.72), получим выражение в виде шестикратного интеграла. Интегрирование по  $x$  и  $y$  дает  $\delta$ -функции:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[(k_x - k_{0x})x + (k_y - k_{1y})y]} dx dy = \\ & = (2\pi)^2 \delta(k_x - k_{1x}) \delta(k_y - k_{1y}). \end{aligned} \quad (25.76)$$

При этом для усредненного потока энергии получим

$$\begin{aligned} \iint \langle S \rangle_z dx dy &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{(2\pi)^2}{\mu_0 \omega} \iint (\mathbf{E}(\mathbf{k}) \times (\mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*(\mathbf{k}))) \mathbf{n} \times \\ & \times e^{-2 \operatorname{Im} \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z} dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (25.77)$$

Рассмотрим двойное векторное произведение в (25.77) и учтем, что вследствие уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  из (25.73) получаем уравнение

$$\mathbf{k} \mathbf{E}(\mathbf{k}) = 0; \quad (25.78)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \times (\mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*)) &= \mathbf{k}^* (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) - \mathbf{E}^* (\mathbf{k}^* \mathbf{E}) = \mathbf{k}^* (\mathbf{E} \mathbf{E}^*) + \\ & + \mathbf{E}^* (k_z - k^*) E_z. \end{aligned} \quad (25.79)$$

Из (25.79) следует, что

$$\operatorname{Re} (\mathbf{E} \times (\mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*)) \mathbf{n} = \mathbf{E} \mathbf{E}^* (\mathbf{k} \mathbf{n}) \theta(k^2 - k_x^2 - k_y^2). \quad (25.80)$$

Для среднего по времени потока энергии получим

$$\begin{aligned} \iint \langle S \rangle_z dx dy &= \frac{(2\pi)^2}{2\mu_0 \omega} \iint_{k_x^2 + k_y^2 < k^2} \mathbf{E}(\mathbf{k}) \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) k_z dk_x dk_y, \\ k_z &= \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}. \end{aligned} \quad (25.81)$$

Из соотношения (25.81) видно, что средний поток энергии не зависит от положения плоскости  $z = \text{const}$  (предполагалось лишь, что  $z \geq 0$ ). При этом левую часть (25.81) можно рассматривать как поток через плоскость дифракции  $z = 0$ , а правую часть — как

поток, связанный с дифрагирующими волнами в области  $z > 0$ . Вместо вектора  $\mathbf{k}$  введем углы  $\theta, \psi$ , т. е. перейдем к сферической системе координат, положив

$$k_x = k \sin \theta \cos \psi, \quad k_y = k \sin \theta \sin \psi, \quad k_z = k \cos \theta. \quad (25.82)$$

Учитывая, что

$$dk_x dk_y = k^2 \cos \theta \, d\Omega = k^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta d\psi, \quad (25.83)$$

получим для потока энергии

$$\iint \langle S \rangle_z dx dy = \frac{(2\pi k)^2}{2\mu_0 c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} |\mathbf{E}(k_x, k_y)|^2 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta d\psi. \quad (25.84)$$

Если поток дифрагирующих волн рассматривается на достаточно большом расстоянии от объекта дифракции, т. е.  $kR_0 \rightarrow \infty$ , где  $R_0 = \{x, y, z\}$  (объект дифракции расположен вблизи начала координат), то  $\mathbf{E}(k_x, k_y)$  можно выразить через  $\mathbf{E}(x, y, z)$ , проводя асимптотическое вычисление интеграла (25.73):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \int \mathbf{E}(k_x, k_y) e^{ikR_0} dk_x dk_y = \\ &= \mathbf{E}(k_{0x}, k_{0y}) e^{ikR_0} \int \int e^{i(\mathbf{k}R_0 - kR_0)} dk_x dk_y = \\ &= \mathbf{E}(k_{0x}, k_{0y}) e^{ikR_0} \frac{2\pi k \cos \theta}{i R_0} \end{aligned} \quad (25.85)$$

аналогично тому, как это было сделано в (25.69). В (25.85) углы  $\theta$  и  $\psi$  связаны с координатами точки  $\mathcal{P}$  соотношениями  $x = R_0 \sin \theta \cos \psi$ ,  $y = R_0 \sin \theta \sin \psi$ ,  $z = R_0 \cos \theta$ , а  $k_{0x}, k_{0y}$  при этом определяется согласно (25.82). С учетом (25.85) соотношение (25.84) можно записать в виде

$$\iint \langle S \rangle_z dx dy = \frac{1}{2\mu_0 c} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} |\mathbf{E}(x, y, z)|^2 R_0^2 \sin \theta \, d\theta d\psi. \quad (25.86)$$

Правая часть выражает поток энергии дифрагирующих волн через половину поверхности сферы радиуса  $R_0$ . Действительно, поле в точке  $\mathcal{P}$ , определяемой вектором  $\mathbf{R}_0$ , является суперпозицией плоских волн, для которых  $\mathbf{k}/k \approx \mathbf{R}_0/R_0$ . Поэтому

$$\mathbf{H}(x, y, z) \approx \frac{1}{\mu_0 \omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \quad \text{и} \quad \mathbf{kE} = 0. \quad (25.87)$$

Для потока энергии через элемент сферы  $df = R_0^2 \sin \theta d\theta d\psi (R_0/R_0)$  получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}(x) \times \mathbf{H}^*(x)) df &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} (\mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}^*)) = \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} |\mathbf{E}(x)|^2 \mathbf{k} df = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathbf{E}(x)|^2 df. \end{aligned} \quad (25.88)$$

Сравнение (25.88) с подынтегральным выражением правой части (25.86) показывает, что интеграл в правой части (25.86) описывает поток энергии через половину поверхности сферы радиуса  $R_0$ .

В заключение рассмотрим волновой пакет, образованный суммой плоских волн в виде интеграла (25.73) при условии, что вектор  $\mathbf{E}(k_x, k_y)$  отличен от нуля лишь в малой области  $k_{0x} < k_x < k_{0x} + \Delta k_x$ ,  $k_{0y} < k_y < k_{0y} + \Delta k_y$ .

Для суммы волновых пакетов, фурье-компоненты которых не перекрываются (т. е.  $E_i(k_x, k_y) \cdot E_j^*(k_x, k_y) = 0$ , если  $i \neq j$ ), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \sum_i \mathbf{E}_i(x), \quad \mathbf{H}^*(x, y, z) = \sum_j \mathbf{H}_j^*(x), \\ N &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \operatorname{Re} \iint (\mathbf{E}_i(x) \times \mathbf{H}_j^*(x)) dx dy = \\ &= \frac{(2\pi)^2}{2\mu_0 \omega} \iint \sum_{ij} (\mathbf{E}_i(k_x, k_y) \mathbf{E}_j^*(k_x, k_y)) k_z dk_x dk_y = \\ &= \frac{(2\pi)^2}{2\mu_0 \omega} \iint_{k^2 > k_x^2 + k_y^2} \sum_i (\mathbf{E}_i(k_x, k_y) \mathbf{E}_i^*(k_x, k_y)) k_z dk_x dk_y. \end{aligned} \quad (25.89)$$

Из (25.89) следует, что волновые пакеты не интерферируют между собой, несмотря на то что в отдельных частях пространства волновые пакеты могут перекрываться, т. е.

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_i \iint (\mathbf{E}_i(x) \times \mathbf{H}_i^*(x)) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \iint (\mathbf{E}_i(x) \times \mathbf{H}_i^*(x)) dx dy. \end{aligned} \quad (25.90)$$

Соотношение (25.90) показывает, что волны, дифрагирующие по разным направлениям, можно рассматривать независимо друг от друга.

**Цена 35 коп.**