

УДК 624.04 + 69.04

РАСЧЕТ ПРОСТОГО НАХЛЕСТОЧНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПЛАСТИН В MSC PATRAN-NASTRAN

В. А. Жилкин

В данной статье приводится обзор принципиальных аналитических работ по созданию моделей клеевых соединений пластин внахлестку. Следуя основополагающим решениям этой задачи, выводятся аналитические зависимости для нормальных и касательных напряжений в клеевом слое. Предполагается, что нормальные и касательные напряжения постоянны по толщине клеевого слоя и что материалы клеевого соединения работают упруго. Полученные на их основе распределения напряжений сравниваются с численным решением, выполненным в программном продукте MSC Patran-Nastran, в котором клеевое соединение моделируется либо балочными элементами (Beam), либо двумерными элементами (2D Solid). Показано, что при моделировании клеевого соединения балочными элементами в сечениях листов, примыкающих к склейке, получаются те же величины внутренних силовых факторов, что и при вычислении по предлагаемым аналитическим зависимостям. Численное моделирование клеевого соединения в рамках плоской задачи теории упругости показало, что предложенные аналитические зависимости для определения напряжений в клеевом слое удовлетворительно описывают величины напряжений на уровне середины клеевого слоя.

Ключевые слова: клеевое соединение, пластины средней толщины, соединение внахлестку, аналитические модели распределения, нормальные и касательные напряжения, численное моделирование клеевого соединения, MSC Patran-Nastran.

1. Историческая справка.

Вывод основополагающих уравнений

Успехи современной химии, предоставившей в распоряжение конструктора и технолога синтетические универсальные и специальные клеи, способные сравнительно прочно сцепляться с разнородными материалами, сделали склеивание одним из самых надежных, а в ряде случаев и единственным практически приемлемым методом соединения неметаллических материалов с металлами. Клеевые соединения нашли широкое применение в строительстве, электротехнической промышленности, в автомобилестроении, судостроении, авиационной и ракетно-космической технике.

Клеевые швы предназначены для передачи сдвигающей нагрузки. В 30-х годах прошлого столетия экспериментально было установлено, что в клеевом слое кроме касательных возникают и нормальные (отдирающие) напряжения [1–3], которым клеевые швы, как правило, сопротивляются плохо. Для большинства клеевых соединений материалы склеиваемых деталей при эксплуатационных нагрузках и условиях окружающей среды ведут себя линейно упруго, в то время как клей может проявлять вязкоупругие или нелинейные свойства. Конструктору, проектирующему клеевое соединение, требуются знания о распределении напряжений вдоль клеевого слоя. Однако до настоящего времени

точного аналитического решения геометрически и физически нелинейной задачи о распределении напряжений в клеевом слое не существует. Существующие приближенные аналитические модели клеевого соединения базируются на тех или иных упрощающих предположениях в отношении моделирования клея и склеиваемых деталей. Поэтому наряду с приближенными аналитическими методами решения задачи о склейках выполнялись экспериментальные работы, оценивающие степень приближения величин напряжений, вычисленных по предлагаемым зависимостям, к реальному распределению напряжений в клеевом слое. Обзоры работ, посвященных расчету распределения напряжений в клеевых соединениях, приведены в [2, 3, 8, 19, 28–30]. Пытаясь подобрать физические и геометрические параметры клея и склеиваемых пластин, обеспечивающих необходимую прочность соединений, а в авиации еще и наименьший вес, исследователи совершенствовали как аналитические модели соединений [9–17, 24–28], так и экспериментальные методы [15, 21, 22]. Как показал анализ литературных источников [28–35], научно-исследовательские работы в этом направлении не прекратились до настоящего времени. Наибольшее число работ, начиная с 30-х годов прошлого века, посвящено расчету соединений внахлестку [9–35].

Склеивание было известно еще до того, как человек смог записать свою историю. В захоронениях, относящихся к 4000 г до н.э., обнаружены кувшины и сосуды с клеем и клейкими смо-

лами, склеенные наконечники копий и наконечники, приклеенные к рукояткам [1]. Но только к началу XX века (~1915 г.) началось промышленное использование клеев на основе альбуминов крови для склеивания древесины в авиационных и судостроительных конструкциях.

Клей для соединения металла с древесиной в ответственных местах конструкции самолета, пожалуй, впервые был использован в 1944 г. английской фирмой де Хэвилленд в одноместном истребителе «Хорист» [2]. Элементы крыла, находящиеся в растянутой зоне, были изготовлены из алюминиевого сплава, а элементы, испытывающие в полете сжимающие напряжения, – из древесины. Именно к этому моменту времени относятся основные работы по расчету клеевых соединений пластин внахлестку. Многочисленные испытания показали, что напряжения в клеевом слое распределены неравномерно и что разрушение начинается у края нахлестки [9].

Используя балочное приближение получим основополагающие аналитические зависимости для определения нормальных и касательных напряжений в клеевом слое для жестких и гибких соединений внахлестку.

Предположим, что склеенные пластины изгибаются по цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси y . Геометрия простого нахлесточного соединения и положительные направления внутренних силовых факторов и напряжений в клеевом слое приведены на рисунке 1.

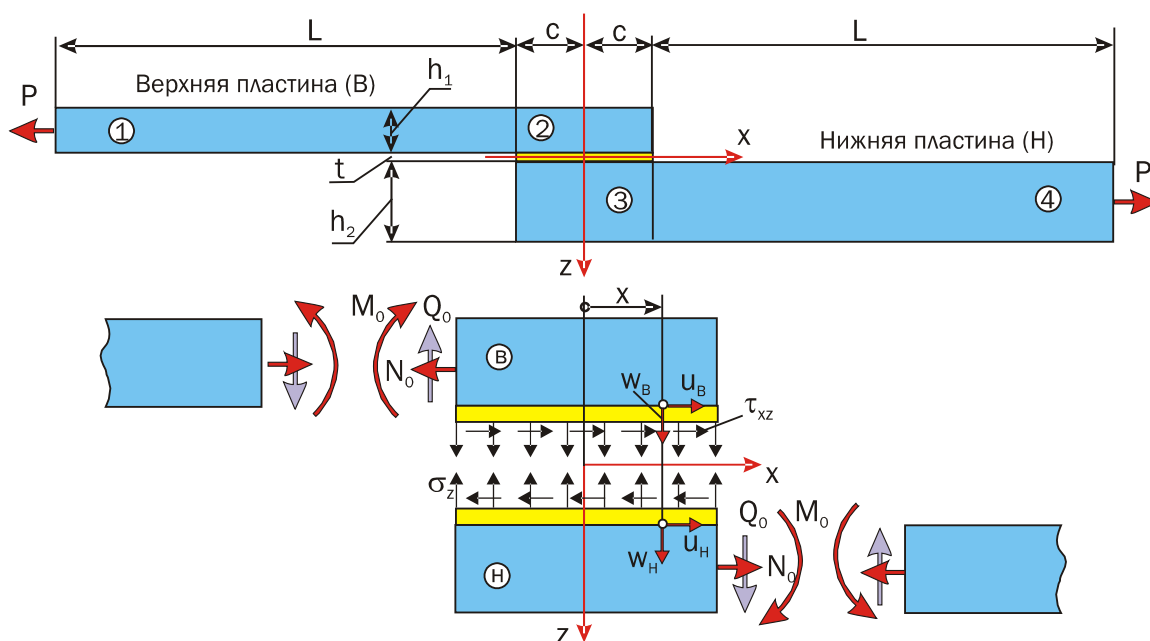


Рис. 1

В соответствии с гипотезами, принимаемыми для пластин средней толщины, уравнения закона Гука запишутся так:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \sigma_x). \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – относительные деформации в направлении координатных осей x и y ;

σ_x, σ_y – нормальные напряжения;

E – модуль упругости материала;

μ – коэффициент Пуассона.

Выделим из клеевого соединения двумя вертикальными плоскостями, параллельными плоскости xoz , полосу шириной в единицу длины, например, равной 1 см. Полоска будет находиться в условиях плоской деформации, так как вследствие связи с соседними полосками она не сможет деформироваться в направлении оси y . Таким образом, удлинение волокон в направлении оси y будет равно нулю:

$$\varepsilon_y = 0 = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x),$$

откуда

$$\sigma_y = \mu \sigma_x,$$

что повлечет за собой

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu^2 \sigma_x) = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma_x.$$

Зависимость между напряжениями σ_x и деформациями ε_x имеет тот же вид, что и для простой балки в элементарной теории сопротивления материалов, но только обычный модуль упругости должен быть заменен величиной

$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}. \quad (2)$$

Выражения для определения величин напряжений, вызванных растяжением пластин и их поперечным изгибом,

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F_x}; \quad \sigma_x = \frac{M_x}{J_y} z, \quad (3)$$

ничем не отличаются от напряжений в балке таких же размеров, так как модуль упругости сюда не входит; F_x – площадь поперечного сечения полосы единичной ширины; M_x – изгибающий момент в сечении балки-полоски единичной ширины; J_y – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси y .

Поэтому безразлично, какой теорией пользоваться при выводе соотношений для напряжений в клеевом слое: балочной или теорией пластин, только не надо забывать о существовании соотношения (2).

При растяжении клеевого соединения внахлестку оно изгибается (рис. 2). Длительное время изгиб в расчет не принимался.

Впервые в упрощенной постановке задача об определении распределения касательных напряжений в клеевом слое для жестких соединений внахлестку была решена Фолькерсеном в 1938 году [10]. Он предполагал, что

- склеиваемые элементы работают лишь на растяжение,

- в клеевом слое создаются только касательные напряжения τ_{xz} , не превышающие предела упругости,

- деформация сдвига в клеевом слое γ_{xz} постоянна по толщине клеевого слоя t и определяется только взаимными перемещениями точек, лежащих в одном сечении клеевого слоя и относящихся к противоположным границам клеев – конструкция (рис. 1):

$$\gamma_{xz} = \frac{u_H - u_B}{t}, \quad (4)$$

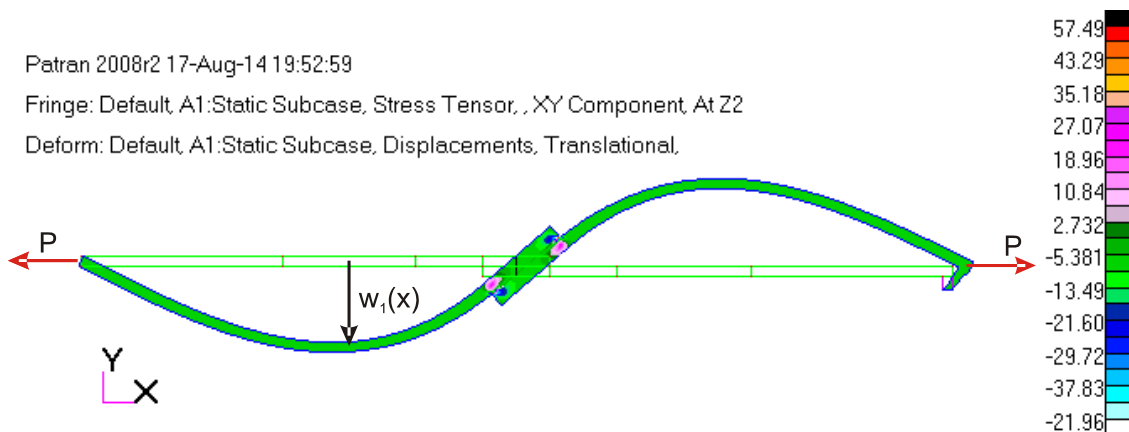


Рис. 2

где u_H, u_B – перемещения граничных точек для нижнего и верхнего листов соответственно в направлении оси x (рис. 1).

Выведем формулу Фолькерсена, предполагая, что листы в клеевом соединении испытывают только растяжение.

Вырежем малый элемент клеевого соединения в зоне склейки (рис. 3), из условия равновесия которого: $\Sigma X = 0$, следует

$$\frac{dN_B}{dx} + \tau_{xz} = 0; \quad \frac{dN_H}{dx} - \tau_{xz} = 0. \quad (5)$$

В соответствии с законом Гука для касательных напряжений

$$\tau_{xz} = G_k \gamma_{xz} = G_k \frac{u_H - u_B}{t}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{xz}}{dx} &= \frac{G_k}{t} \left(\frac{du_H}{dx} - \frac{du_B}{dx} \right) = \\ &= \frac{G_k}{t} (\varepsilon_H - \varepsilon_B) = \frac{G_k}{t} \left(\frac{N_H}{E_H F_H} - \frac{N_B}{E_B F_B} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon_H, \varepsilon_B$ – относительные деформации в сечении x ;

N_H, N_B нормальные силы;

$E_H F_H, E_B F_B$ – жесткости поперечных сечений для нижнего и верхнего листов соответственно в направлении оси x .

Вычислим вторую производную от выражения (6) и учтем уравнения равновесия (5)

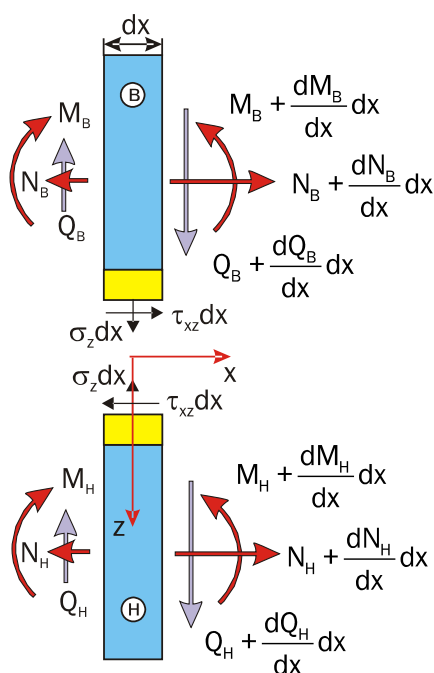


Рис. 3

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tau_{xz}}{dx^2} &= \frac{G_k}{E_H F_H t} \left(\frac{dN_H}{dx} - \frac{E_H F_H}{E_B F_B} \frac{dN_B}{dx} \right) = \\ &= \frac{G_k}{E_H F_H t} \left(1 + \frac{E_H F_H}{E_B F_B} \right) \tau. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\alpha^2 = \frac{G_k}{E_H F_H t} \left(1 + \frac{E_H F_H}{E_B F_B} \right), \quad (7)$$

получим дифференциальное уравнение для касательного напряжения τ_{xz} :

$$\frac{d^2 \tau_{xz}}{dx^2} - \alpha^2 \tau_{xz} = 0, \quad (8)$$

решение которого

$$\tau_{xz} = A \operatorname{ch}(\alpha x) + B \operatorname{sh}(\alpha x), \quad (9)$$

где A, B – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий задачи (см. уравнение (6)):

$$\begin{aligned} \text{при } x = -c \quad \frac{d\tau_{xz}}{dx} \Big|_{x=-c} &= \frac{G_k}{t} \left(0 - \frac{N_B}{E_B F_B} \right) = \\ &= -A \alpha \operatorname{sh}(\alpha c) + B \alpha \operatorname{ch}(\alpha c); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = c \quad \frac{d\tau_{xz}}{dx} \Big|_{x=c} &= \frac{G_k}{t} \left(\frac{N_H}{E_H F_H} - 0 \right) = \\ &= A \alpha \operatorname{sh}(\alpha c) + B \alpha \operatorname{ch}(\alpha c), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A &= \frac{G_k P}{2t} \frac{1}{\alpha \operatorname{sh}(\alpha c)} \left(\frac{1}{E_H F_H} + \frac{1}{E_B F_B} \right) = \frac{P}{2c} \frac{\alpha c}{\operatorname{sh}(\alpha c)}, \\ B &= \frac{G_k P}{2t} \frac{1}{\alpha \operatorname{ch}(\alpha c)} \left(\frac{1}{E_H F_H} - \frac{1}{E_B F_B} \right) = \\ &= \frac{P}{2c} \frac{\alpha c}{\operatorname{ch}(\alpha c)} \frac{1 - \psi}{1 + \psi}, \quad \psi = \frac{E_H F_H}{E_B F_B}. \end{aligned}$$

Итак, касательные напряжения в клеевом слое по Фолькерсену распределяются по закону

$$\tau_{xz}^{\Phi} = \frac{P}{2c} \alpha c \left(\frac{\operatorname{ch}(\alpha x)}{\operatorname{sh}(\alpha c)} + \frac{1 - \psi}{1 + \psi} \frac{\operatorname{sh}(\alpha x)}{\operatorname{ch}(\alpha c)} \right). \quad (10)$$

Полученное выражение не противоречит аналогичным соотношениям, приведенным в работах [10, 33].

Если жесткости поперечных сечений листов одинаковы, то второе слагаемое в выражении (12) пропадает и касательные напряжения

в клеевом слое распределяются по закону гиперболического косинуса. Максимальные касательные напряжения возникают вблизи конца нахлестки и равны:

$$\tau_{xz_max}^{\Phi} = \frac{P\alpha \operatorname{ch}(\alpha c)}{2 \operatorname{sh}(\alpha c)} = \frac{P}{2c} \frac{c\alpha}{\operatorname{th}(\alpha c)} = \tau_{xz_cp}^{\Phi} \cdot k, \quad (11)$$

где $\tau_{xz_cp}^{\Phi} = \frac{P}{2c}$ – средние напряжения в клеевом слое;

$k = \frac{c\alpha}{\operatorname{th}(\alpha c)}$ – коэффициент концентрации касательных напряжений, который при $c\alpha > 3$ изменяется по линейному закону, так как $\operatorname{th}(\alpha c) \approx 1$.

Теория Фолькерсена довольно точно описывает распределение напряжений сдвига для соединения с двусторонними накладками, так как в этом случае влияние изгиба мало.

Изгиб соединения внахлестку впервые был учтен в работе Голанда и Рейсснера [11]. Полученные результаты свидетельствуют о наличии значительных нормальных напряжений на концах соединения, в несколько раз превышающие растягивающие напряжения. Максимальные касательные напряжения наблюдаются вблизи конца нахлестки и имеют тот же порядок, что и растягивающие напряжения. Оба напряжения практически исчезают на расстоянии порядка толщины пластины от края. Полученные зависимости для отрывающих и касательных напряжений в клеевом слое применимы для случая растяжения одинаковых, склеиваемых внахлестку материалов равной толщины. Они неприменимы для материалов различной жесткости или для нахлесточных соединений, находящихся под внешней изгибающей нагрузкой. Работа [11] является основополагающей в теории клеевых соединений, предпосылки которой были использованы в дальнейшем другими исследователями.

Получим эти зависимости.

Из условий равновесия малого элемента: $\Sigma M = 0$, $\Sigma Z = 0$, следует (рис. 3):

$$\frac{dM_B}{dx} - Q_B + \tau_{xz} \left(\frac{h+t}{2} \right) = 0;$$

$$\frac{dM_H}{dx} - Q_H + \tau_{xz} \left(\frac{h+t}{2} \right) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{dQ_B}{dx} + \sigma_z = 0; \quad \frac{dQ_H}{dx} - \sigma_z = 0. \quad (13)$$

Деформации пластин на уровне клеевого слоя, вызванные растяжением и изгибом пластин, определяются зависимостями:

$$\frac{du_B}{dx} = \frac{N_B}{R} + \frac{M_B}{D} \frac{h}{2}; \quad \frac{du_H}{dx} = \frac{N_H}{R} - \frac{M_H}{D} \frac{h}{2}, \quad (14)$$

где $R = Eh$ – жесткость поперечного сечения балки полоски при ее растяжении;

$$D = \frac{Eh^3(1-\mu^2)}{12} \quad \text{– жесткость поперечного сечения балки полоски при ее изгибе.}$$

Преобразуем выражение (6), подставив в него зависимости (14):

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{xz}}{dx} &= \frac{G_k}{t} \left(\frac{du_H}{dx} - \frac{du_B}{dx} \right) = \\ &= \frac{G_k}{t} \left[\left(\frac{N_H}{R} - \frac{M_H}{D} \frac{h}{2} \right) - \left(\frac{N_B}{R} + \frac{M_B}{D} \frac{h}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Возьмем производную от уравнения (15):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tau_{xz}}{dx^2} &= \frac{G_k}{t} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{dN_H}{dx} - \frac{dN_B}{dx} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h}{2D} \left(\frac{dM_H}{dx} + \frac{dM_B}{dx} \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим в уравнение (16) выражения (5) и (12) для производных от внутренних силовых факторов:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tau_{xz}}{dx^2} &= \frac{G_k}{t} \left[\frac{2\tau_{xz}}{R} - \frac{h}{2D} (Q_H + Q_B - \right. \\ &\quad \left. - 2\tau_{xz} \left(\frac{h+t}{2} \right)) \right] = \frac{G_k}{t} \left[2\tau_{xz} \left(\frac{1}{R} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{h}{2D} \left(\frac{h+t}{2} \right) \right) - \frac{h}{2D} (Q_H + Q_B) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Возьмем еще раз производную от выражения (17). Получим

$$\frac{d^3\tau_{xz}}{dx^3} = \frac{2G_k}{t} \left(\frac{1}{R} + \frac{h}{2D} \left(\frac{h+t}{2} \right) \right) \frac{d\tau_{xz}}{dx}.$$

Здесь учтено, что на основании уравнений равновесия (13):

$$\frac{dQ_H}{dx} + \frac{dQ_B}{dx} = 0.$$

Введем обозначение:

$$\beta^2 = \frac{2G_k}{t} \left(\frac{1}{R} + \frac{h}{2D} \left(\frac{h+t}{2} \right) \right), \quad (18)$$

Дифференциальное уравнение для определения касательного (сдвигового) напряжения τ_{xz} в клеевом слое примет вид:

$$\frac{d^3\tau_{xz}}{dx^3} - \beta^2 \frac{d\tau_{xz}}{dx} = 0,$$

решением которого будет выражение:

$$\tau_{xz} = C_1 \operatorname{ch}(\beta x) + C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3. \quad (19)$$

Постоянные интегрирования C_i ($i = 1, 2, 3$) найдем из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } x = -c \quad \frac{d\tau_{xz}}{dx} \Big|_{x=-c} &= \frac{-G_k}{t} \left(\frac{N_0}{R} + \frac{M_0}{D} \frac{h}{2} \right) = \\ &= -C_1 \beta \operatorname{sh}(\beta c) + C_2 \beta \operatorname{ch}(\beta c); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x = c \quad \frac{d\tau_{xz}}{dx} \Big|_{x=c} &= \frac{G_k}{t} \left(\frac{N_0}{R} - \frac{M_0}{D} \frac{h}{2} \right) = \\ &= C_1 \beta \operatorname{sh}(\beta c) + C_2 \beta \operatorname{ch}(\beta c); \end{aligned}$$

$$\int_{-c}^c \tau_{xz}(\xi) d\xi = \frac{2C_1}{\beta} \operatorname{sh}(\beta c) + 2cC_3 = N_0.$$

Решая систему трех уравнений с тремя известными, найдем

$$C_1 = \frac{G_k N_0}{Rt} \left[1 + \frac{M_0 Rh}{2DN_0} \right] \frac{1}{\beta \operatorname{sh}(\beta c)}; \quad C_2 = 0;$$

$$C_3 = \frac{N_0}{2c} - C_1 \frac{\operatorname{sh}(\beta c)}{\beta c}.$$

Итак, касательные напряжения по Голанду и Рейсснеру определяются зависимостью:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x) &= \frac{G_k N_0}{Rt} \left[1 + \frac{M_0 Rh}{2DN_0} \right] \times \\ &\times \left(\frac{\operatorname{ch}(\beta x)}{\beta \operatorname{sh}(\beta c)} - \frac{1}{\beta^2 c} \right) + \frac{N_0}{2c}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для определения нормальных (отрывающих) напряжений в клеевом слое воспользуемся второй гипотезой, что относительная деформация ε_z в клеевом слое постоянна и определяется зависимостью

$$\varepsilon_z = \frac{w_H - w_B}{t}, \quad (21)$$

где w_H , w_B – перемещения граничных точек для нижнего и верхнего листов соответственно в направлении оси z (рис. 1).

Возьмем вторую производную от закона Гука для материала клея:

$$\sigma_z = E_k \varepsilon_z = E_k \frac{w_H - w_B}{t}$$

и учитывая, что кривизны пластин в направлении оси x для листов клеевого соединения равны

$$\frac{d^2 w_H}{dx^2} = -\frac{M_H}{D_H}, \quad \frac{d^2 w_B}{dx^2} = -\frac{M_B}{D_B}$$

и что для рассматриваемого случая $D_H = D_B = D$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_z}{dx^2} &= \frac{E_k}{t} \left(\frac{d^2 w_H}{dx^2} - \frac{d^2 w_B}{dx^2} \right) = \\ &= \frac{E_k}{t} \left(-\frac{M_H}{D_H} + \frac{M_B}{D_B} \right) = \frac{E_k}{tD} (M_B - M_H). \end{aligned} \quad (22)$$

Беря производную от полученного соотношения еще раз и учитывая уравнения равновесия (12), найдем:

$$\frac{d^3 \sigma_z}{dx^3} = \frac{E_k}{tD} \left(\frac{dM_B}{dx} - \frac{dM_H}{dx} \right) = \frac{E_k}{tD} (Q_B - Q_H). \quad (23)$$

Для исключения поперечных сил Q_B и Q_H запишем выражение четвертой производной от нормального напряжения σ_z и воспользуемся уравнениями равновесия (13):

$$\frac{d^4 \sigma_z}{dx^4} = \frac{E_k}{tD} \left(\frac{dQ_B}{dx} - \frac{dQ_H}{dx} \right) = -\frac{2E_k}{tD} \sigma_z.$$

Вводя обозначение

$$4\alpha^4 = \frac{2E_k}{tD}, \quad (24)$$

приходим к хорошо известному в механике дифференциальному уравнению [36–38]:

$$\sigma_z^{IV} + 4\alpha^4 \sigma_z = 0, \quad (25)$$

общий интеграл которого можно выразить через функции Пузыревского V_i ($i = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \sigma_z(x) &= K_0 V_0(\alpha x) + K_1 V_1(\alpha x) + \\ &+ K_2 V_2(\alpha x) + K_3 V_3(\alpha x), \end{aligned}$$

где K_i ($i = 0, 1, 2, 3$) – постоянные интегрирования;

$$V_0(\alpha x) = \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(\alpha x);$$

$$V_1(\alpha x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch}(\alpha x) \sin(\alpha x) + \operatorname{sh}(\alpha x) \cos(\alpha x));$$

$$V_2(\alpha x) = \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(\alpha x);$$

$$V_3(\alpha x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch}(\alpha x) \sin(\alpha x) - \operatorname{sh}(\alpha x) \cos(\alpha x)).$$

Функции Пузыревского при дифференцировании по переменной x переходят одна в другую:

$V_0'(\alpha x) = -\sqrt{2}\alpha V_3(\alpha x)$	$V_0''(\alpha x) = -2\alpha^2 V_2(\alpha x)$	$V_0'''(\alpha x) = -2\sqrt{2}\alpha^3 V_1(\alpha x)$
$V_1'(\alpha x) = \sqrt{2}\alpha V_0(\alpha x)$	$V_1''(\alpha x) = -2\alpha^2 V_3(\alpha x)$	$V_1'''(\alpha x) = -2\sqrt{2}\alpha^3 V_2(\alpha x)$
$V_2'(\alpha x) = \sqrt{2}\alpha V_1(\alpha x)$	$V_2''(\alpha x) = 2\alpha^2 V_0(\alpha x)$	$V_2'''(\alpha x) = -2\sqrt{2}\alpha^3 V_3(\alpha x)$
$V_3'(\alpha x) = \sqrt{2}\alpha V_2(\alpha x)$	$V_3''(\alpha x) = 2\alpha^2 V_1(\alpha x)$	$V_3'''(\alpha x) = 2\sqrt{2}\alpha^3 V_0(\alpha x)$

Постоянные интегрирования K_i определяем из граничных условий задачи (см. выражения (22) и (23)):

$$\left. \frac{d^2 \sigma}{dx^2} \right|_{x=-c} = \left. \frac{d^2 \sigma}{dx^2} \right|_{x=c} = \frac{E_k}{tD} M_0;$$

$$\left. \frac{d^3 \sigma}{dx^3} \right|_{x=-c} = - \left. \frac{d^3 \sigma}{dx^3} \right|_{x=c} = \frac{E_k}{tD} Q_0.$$

Откуда

$$K_0 = \frac{E_k (Q_0 V_0 - \sqrt{2}\alpha M_0 V_3)}{D\alpha^3 t (sh(2\alpha c) + \sin(2\alpha c))}; K_1 = 0;$$

$$K_2 = \frac{E_k (Q_0 V_2 + \sqrt{2}\alpha M_0 V_1)}{D\alpha^3 t (sh(2\alpha c) + \sin(2\alpha c))}; K_3 = 0.$$

Итак, нормальные напряжения σ_z в клеевом слое изменяются по закону

$$\sigma_z(x) = K_0 V_0(\alpha x) + K_2 V_2(\alpha x). \quad (26)$$

Найдем формулы для определения внутренних силовых факторов Q_0 и M_0 .

Изгибающий момент в верхнем листе до склейки (рис. 1, 2 и 4) определяется выражением

$$M(x) = P \cos(\omega) (x \operatorname{tg}(\omega) - w_1), \quad (0 \leq x \leq L), \quad (27) \quad \text{здесь } \lambda_1 = \sqrt{\frac{P}{D}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{P}{8D}}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

а в зоне склейки –

$$M(s) = P \cos(\omega) \left((L+s) \operatorname{tg}(\omega) - w_2 - \frac{h}{2} \right), \quad (0 \leq s \leq 2c). \quad (28)$$

Учитывая малость угла ω (из треугольника O_1bc $\operatorname{tg} \omega = \frac{h+t}{2(L+c)}$, $\operatorname{tg}(\omega) \approx \omega$, $\cos(\omega) \approx 1$) и что кривизны листов в направлении осей x и s

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{M(x)}{D}; \quad \frac{d^2 w_2}{ds^2} = -\frac{M(s)}{8D},$$

получим два дифференциальных уравнения для определения прогибов w_1 и w_2 :

$$w_1'' - \lambda_1^2 w_1 = -\frac{P}{D} x \omega, \\ w_2'' - \lambda_2^2 w_2 = -\frac{P}{8D} \left((L+s) \omega - \frac{h}{2} \right),$$

решением которых являются функции

$$w_1(x) = A_1 \operatorname{ch}(\lambda_1 x) + B_1 \operatorname{sh}(\lambda_1 x) + x \omega, \quad (0 \leq x \leq L), \quad (29)$$

$$w_2(s) = A_2 \operatorname{ch}(\lambda_2 s) + B_2 \operatorname{sh}(\lambda_2 s) + (s+L) \omega - \frac{h}{2}, \quad (0 \leq s \leq 2c). \quad (30)$$

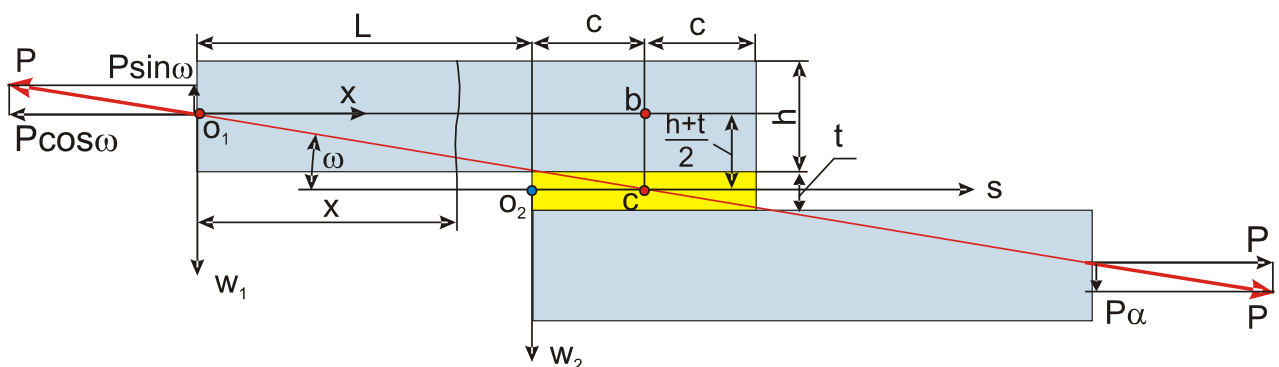


Рис. 4

Из граничных условий

$$\text{при } x = 0 \quad w_1 = 0;$$

$$\text{при } x = L \text{ и } s = 0 \quad w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{ds};$$

$$\text{при } s = c \quad w_2 = 0$$

найдем коэффициенты A_i , B_i выражений (29) и (30). Нас же интересуют только коэффициенты A_1 , B_1 .

$$A_1 = 0, \\ B_1 = -\frac{\lambda_2 \{2(L+c)\omega - h[1 - \text{ch}(c\lambda_2)]\}}{2 \left[\lambda_1 \text{ch}(\lambda_1 L) \text{sh}(c\lambda_2) + \lambda_2 \text{sh}(L\lambda_1) \text{ch}(c\lambda_2) \right]}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (29) определим прогиб срединной поверхности верхнего листа:

$$w_1(x) = B_1 \text{sh}(\lambda_1 x) + x\omega, \quad (0 \leq x \leq L). \quad (32)$$

Дважды и трижды дифференцируя зависимость (32) найдем параметры M_0 и Q_0 , входящие в выражения для коэффициентов K_0 и K_2 :

$$M_0 = -\frac{1}{D} \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \Big|_{x=L}, \quad Q_0 = -\frac{1}{D} \frac{d^3 w_1(x)}{dx^3} \Big|_{x=L}. \quad (33)$$

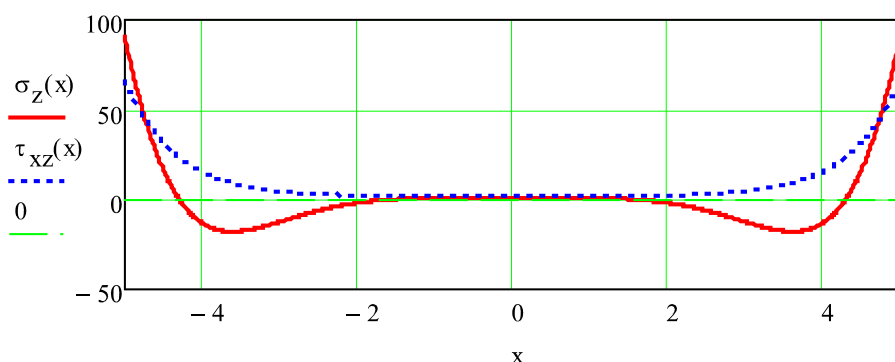
Итак, при принятых предположениях касательные напряжения в клеевом слое распределяются в соответствии с зависимостью (20), а нормальные напряжения – с зависимостью (26).

В качестве примера предположим, что $P = 100$ Н, $E = 110\,000$ Н/мм², $\mu = 0,3$, $E_k = 17\,900$ Р/мм², $\mu_k = 0,19$, $L = 60$ мм, $h = 1,5$ мм, $t = 0,15$ мм.

На рисунке 5 представлены графики нормальных и касательных напряжений в клеевом слое для принятых параметров клеевого соединения.

В работе [12] на основе теории слоистых балок, которая, в частности, была впервые разработана Ржаницыным в 1938 г. [38], получены формулы, подобные формулам Голанда и Рейсснера и приведен подробный анализ напряжений в нахлестке. Экспериментальное исследование клеевых соединений на фотоупругих моделях выполнено в 1960 году [15], а на реальных моделях из фанеры с помощью метода фотоупругих покрытий в 1974–75 гг. [22–23]. Подробное численное исследование распределения напряжений в упругом клеевом слое с помощью ЭВМ проведено в 1964 году [16]. В исследованиях Харт-Смита [21] клеевой слой наделялся идеальными упруго-пластическими свойствами. В работе [25] представлены результаты аналитического исследования влияния толщины клеевого слоя на распределение напряжений в нахлесточном соединении.

В последующих исследованиях уточнялись приближенные аналитические модели и делались попытки путем численных исследований с помощью современных ЭВМ уточнить коэффициенты концентрации напряжений у концов склейки и определить допускаемые нагрузки на клеевое соединение, например, [32–35]. Однако такие попытки, по мнению автора этой статьи, лишены смысла, ибо никогда в точности не известны характеристики клеевого слоя, кроме того, при выводе зависимостей для напряжений в клеевом слое использовано балочное приближение, а потому оно всегда будет отличаться от решения теорий упругости и пластичности. К полученным соотношениям надо относиться так же, как к зависимостям $\sigma = P/F$ и $\sigma_{\max} = M/W$ из курса «Сопротивление материалов», которые несмотря на их приближенность никто не отменял и которые позволяют оценивать уровень напряжений в бруске.



$$\sigma_z(-c) = 90.01$$

$$\tau_{xz}(-c) = 66.104$$

Рис. 5

2. Исследование напряженного состояния клеевого слоя в нахлесточном соединении металлических пластин

Пусть требуется исследовать напряженно-деформированное состояние нахлесточного соединения, рассмотренного в примере раздела 1, в программном продукте MSC Patran-Nastran. Все конечно-элементные программные продукты позволяют использовать более точные модели клеевого соединения, по сравнению с моделью Голанда и Рейсснера. При этом могут быть учтены различные физико-механические характеристики материалов как листов, так и клея. В данной работе рассматривается упругое поведение материалов соединения.

Использование одномерных элементов (1D)

Одномерные элементы позволяют исследовать деформированное состояние соединения и установить приближенное значение параметров M_0 и Q_0 , входящих в формулу (26). Предположим, что используется жесткий клей и что соединение не разрушается под действием заданной нагрузки. Смоделируем клеевое соединение тремя балками со смещенными на половину толщины листа упругими линиями, которые соединим жесткими элементами (MPC Type: RBar1). Для сечений средней балки назначим высоту $2h$. Так как при приложении растягивающих усилий к нахлесточному соединению оно как жесткое целое поворачивается на угол ω , то при создании граничных условий кроме закрепления от перемещений крайних левых точек срединной поверхности верхней

пластины правый конец нижней пластины присоединялся к основанию с помощью пластины из низко модульного материала ($E = 20 \text{ Н/мм}^2$, $\mu = 0,45$), что позволяло нахлестке, не изменяя напряженного состояния склейки, поворачиваться на угол ω .

Внешний вид конечно-элементной модели соединения приведен на рисунке 6, а деформированное состояние – на рисунке 7, на котором указана величина максимальных нормальных напряжений $\sigma_{z_max} = 251,5 \text{ Н/мм}^2$ в верхнем волокне балки и максимальное перемещение точек срединной поверхности пластин 0,68 мм.

В приложении MSC Patran-Nastran Freebody определяем величину внутренних силовых факторов M_0 и Q_0 . На рисунке 8 приведен конечный элемент верхней пластины, расположенный в конце отрезка $x = L$ и приложенные к нему вектора нормальной силы N_0 и изгибающего момента M_0 . В таблице приведены проекции векторов внутренних силовых факторов на координатные оси для обоих торцов элемента.

Вычисляя M_0 и Q_0 по формулам (32), получим: $M_0 = 64,875 \text{ Нмм}$; $Q_0 = 3,529 \text{ Н}$, порядок этих величин, выводимых МКЭ $M_0 = 69,03 \text{ Нмм}$; $Q_0 = 1,5 \text{ Н}$, тот же.

Использование двумерных элементов (2D)

Учитывая решение Рейсснера конечно-элементная сетка должна быть переменного шага, максимальное сгущение сетки должно быть в начале и в конце нахлестки. Для того чтобы обеспечить плавный переход размеров ячеек сетки от малых величин к большим,

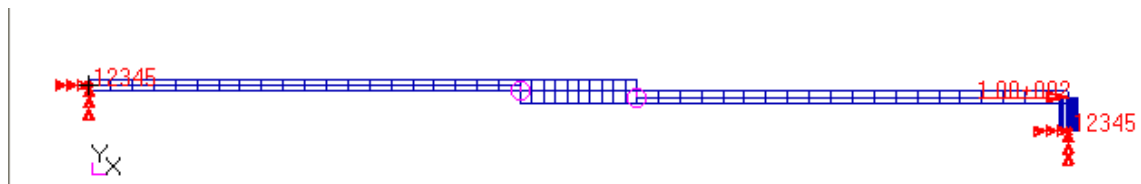


Рис. 6

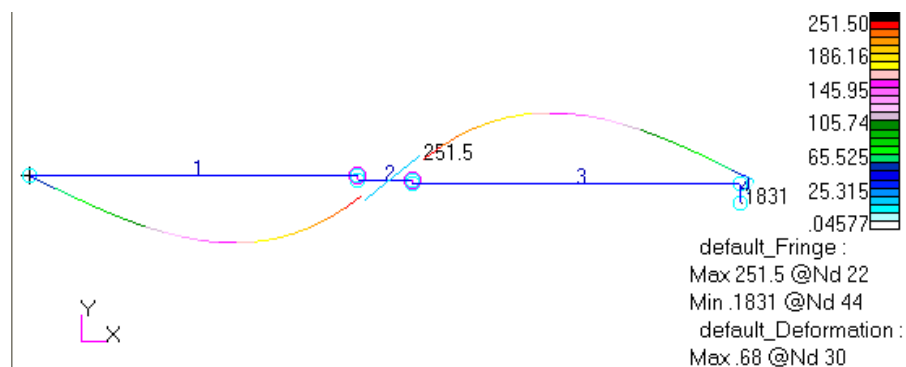


Рис. 7

листы склейки создавались из четырех пластин: $30 \times 1,5 \text{ мм}^2$; $20 \times 1,5 \text{ мм}^2$; $10 \times 1,5 \text{ мм}^2$; $10 \times 1,5 \text{ мм}^2$. Клеевой слой моделировался тремя слоями конечных элементов. Минимальный размер конечно-элементной ячейки в клеевом слое составил $0,05 \text{ мм}$.

На рисунке 9 приведена картина изополей касательных напряжений τ_{xz} , а на рисунке 10 – картина изополей, отрывающих нормальных напряжений σ_z , в зоне левого торца склейки.

Эпюры напряжений τ_{xz} и σ_z в клеевом слое приведены на рисунке 11.

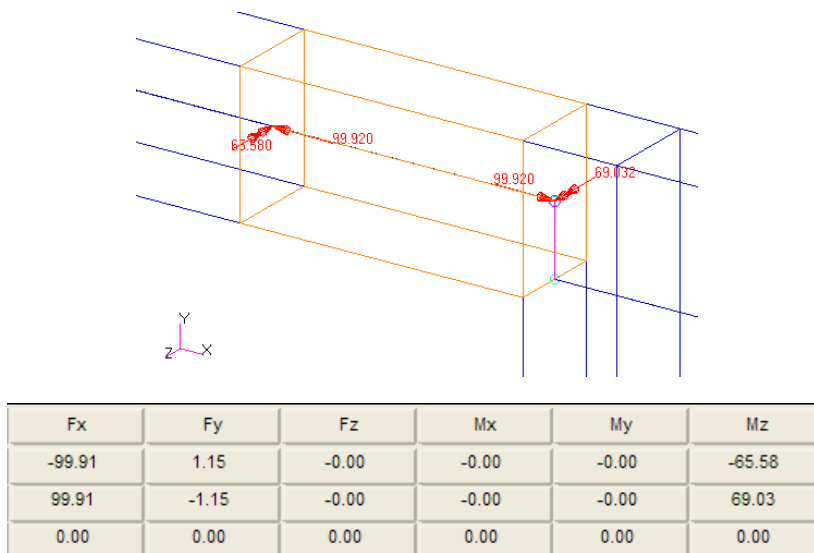


Рис. 8

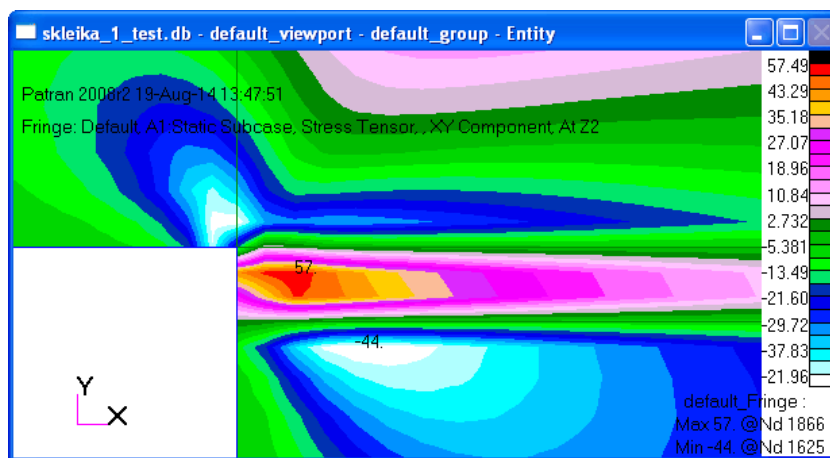


Рис. 9

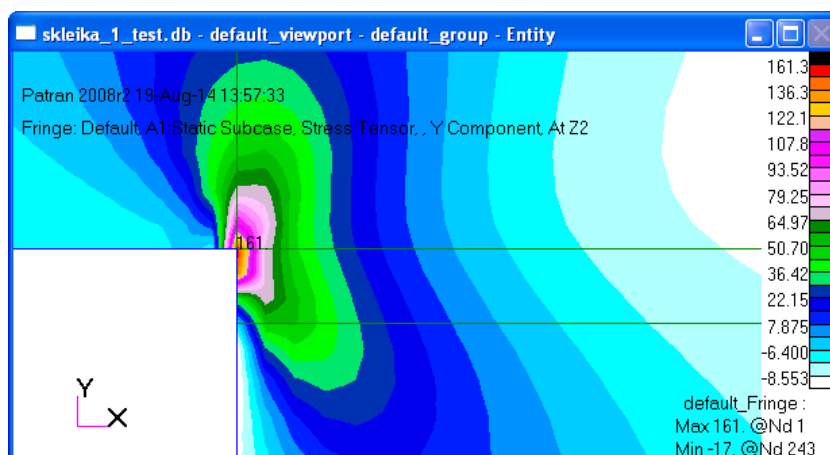


Рис. 10

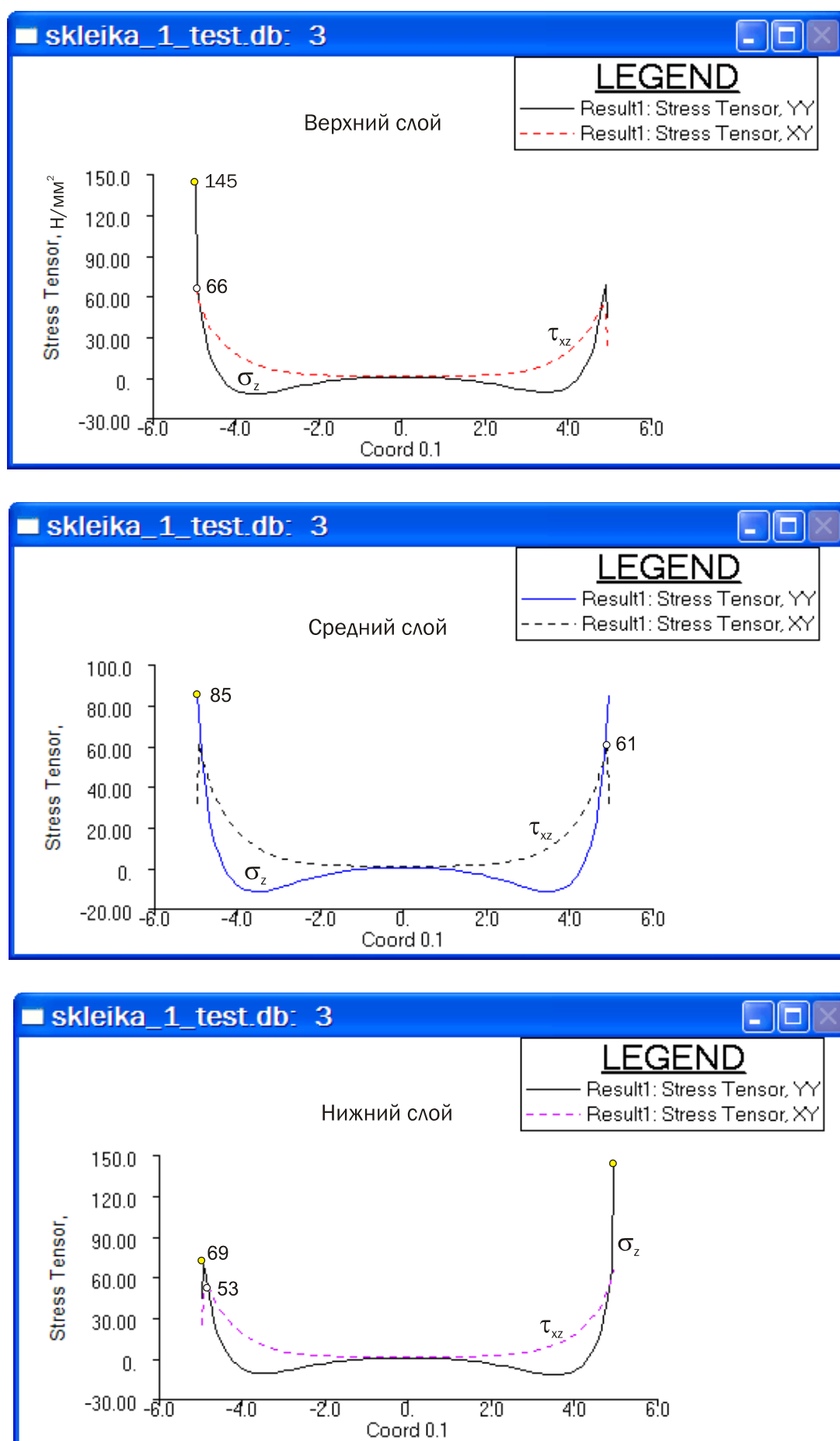


Рис. 11

Как следует из приведенных рисунков, в клеевом слое реализуется неоднородное напряженное состояние. Напряжения по толщине клеевого слоя непостоянны. Величины напряжений, найденные по формулам (20) и (26) (рис. 5): $\sigma_z(-c) = 90 \text{ Н/мм}^2$, $\tau_{xz}(-c) = 66 \text{ Н/мм}^2$, близки к величинам напряжений, возникающих в середине клеевого слоя (рис. 11).

Выводы

Формулы (20) и (26) качественно правильно описывают напряженное состояние в клеевом слое и могут быть использованы при эскизном проектировании клеевых соединений. Уточненный проверочный расчет в дальнейшем может быть выполнен с помощью конечно-элементного расчета.

Список литературы

1. Ковачич Л. Склеивание металлов и пластмасс. М.: Химия, 1985. 240 с.
2. Эпштейн Г. Склеивание металлов. М.: Оборонгиз, 1956. 212 с.
3. De Bruyne N. A., Houwink. R. Adhesion and Adhesives. Eisevier, London, 1951. Имеется в русском переводе: Адгезия, клеи, цементы, припои / под ред. Н. Дебройна и Р. Гувинка. М.: Изд. иностр. лит-ры, 1954. 582 с.
4. Клеемеханические соединения в технике / В. М. Шавырин [и др.]. М.: Машиностроение, 1968. 231 с.
5. Кейгл Ч. Клеевые соединения. М.: Мир, 1971. 296 с.
6. Перри Г. А. Склеивание армированных пластиков. М.: Судпромгиз, 1972. 256 с.
7. Капелюшник И. И., Михалев И. И., Эйдельман Б. Д. Технология склеивания деталей в самолетостроении. М.: Машиностроение, 1972. 224 с.
8. Фрейдин А. С. Прочность и долговечность клеевых соединений. М.: Химия, 1981. 272 с.
9. Third and Final Report of the Adhesives Research Committee, London, H. M. S. O., 1932.
10. Volkersen O., Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten, Luftfahrtforschung, 1938, №1/2, pp. 15-41.
11. Goland M., Reissner E., The Stresses in Cemented Joints, J. Appl. Mech., 1944, Vol.11, №1. – pp. A17-A27.
12. R. W. Cornell, "Determination of stresses in cemented lap joints," Journal of Applied Mechanics, vol. 20, pp. 355-364, 1953.
13. Demarkles L. R. Investigation of the Use of a Rubber Analog in Study of stress Distribution in Riveted and Cemented Joints, NACA Technical Note, 3413, Nov., 1955.
14. Александров А. Я., Назаров Н. И. О напряжениях в склейках // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 6.
15. Hahn, K., «Photostress Investigation of Bonded Lap Joints,» Part I - Theoretical Analysis, Douglas Aircraft Co., Research Report SM-40001 (1960).
16. Kutscha, D. Mechanics of Adhesive Bonded Lap-Type Joints: Survey and Review,» Technical Report AFML-TDR-64-298, Forest Products Laboratory, December 1964.
17. Сажин А. М. Расчет напряжений в клеевых соединениях металлических пластин при сдвиге // Вестник машиностроения. 1964. № 11.
18. Wooley G. R. and Carver D. R. Stress Concentration Factors for Bonded Lap Joints. Journal of Aircraft, 1971, vol. 8, NO. 10, p. 817-820.
19. Артюхин Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1973. Вып. 10. С. 3-27.
20. Barker R M., Hatt F. Analysis of Bonded Joints in Vehicular Structures.—AIAA Journal, 1973, vol. 11, NO. 12, p. 1650-1654
21. Hart-Smith L. J. Adhesive-Bonded Single-Lap Joints. National Aeronautics and Space Administration, Technical Report: NASA CR 112236, 1973. – pp. 1-116, Langley Research Center Hampton, Virginia.
22. Жилкин В. А., Бойтемиров Ф. А. Исследование деформированного состояния клеевого соединения внахлестку методом фотоупругих покрытий // Изв. вуз. «Строительство и архитектура». 1974. № 8. С. 62-67.
23. Жилкин В. А., Бойтемиров Ф. А. Исследование деформированного состояния клеевых соединений фанеры на ус методом фотоупругих покрытий // Изв. вуз. «Строительство и архитектура». 1975. № 3. С. 21-23.
24. Жилкин В. А., Круглов А. И. Напряжения в клеевом слое соединений балок и стержней // Тр. НИИЖТа. Новосибирск, 1975. Вып. 167. С. 107-116.
25. Жилкин В. А., Круглов А. И. Определение граничных условий при работе клеевых соединений // Изв. вуз. «Строительство и архитектура». 1975. № 9. С. 30-34.
26. Ojalvo I.U, Eidinoff H.L., "Bond Thickness Effects upon Stresses in Single-Lap Adhesive Joints", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1978, Vol.16, No 3, pp. 204:211.

27. Cooper P. A., Sawyer J. W. A Critical Examination of Stresses in an Elastic Single Lap Joint. National Aeronautics and Space Administration, Scientific and Technical information Branch: NASA Technical Paper 1507, 1979. - pp. 1-60, Langley Research Center Hampton, Virginia.
28. Charles Yang C., Tomblin J.S. Investigation of Adhesive Behavior in Aircraft Applications. Final Report: This document is available to the public through the National Technical Information Service (NTIS), Springfield, Virginia 22161, 2001, September. – pp. 1-52.
29. Zhu Y. and Kedward K. Methods of Analysis and Failure predictions for Adhesively Bonded Joints of Uniform and Variable Bondline Thickness. Final Report: This document is available to the public through the National Technical Information Service (NTIS) Springfield, Virginia 22161, 2005. – May, pp. 1-61.
30. Da Silva et al., “Analytical models of adhesively bonded joints – Part I: Literature Survey”, International Journal of Adhesion and Adhesives, 29, 2009. - pp. 319-330
31. Da Silva et al., “Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study”, International Journal of Adhesion and Adhesives, 29, 2009. - pp. 331-341
32. Silva L.F.M., Lima R.F.T., Teixeira R.M.S., Development of a Computer Program for the Design of Adhesive Joints, The Journal of Adhesion, 85, 2009.- pp. 889-918
33. Rodriguez R. Q., Paiva W. P., Sollero P., Albuquerque E. L., Rodriguess M. B. Analytical and numerical tools for bonded joint analysis. Mecanica Computacional Vol. XXIX, pages. 7557-7569; Buenos Aires, Argentina, 15-18 Noviembre 2010.
34. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints, International Journal of Adhesion and Adhesives, 2011. - vol. 31, no. 4, pp. 248–264.
35. He X., Gu F., Ball A. “Fatigue behavior of fastening joints of sheet materials and finite element analysis,” Advances in Mechanical Engineering, 2013. - vol. 2013, Article ID 658219, 9 pages.
36. Короткин Я. И., Постнов В. А., Сиверс Н. Л. Строительная механика корабля и теория упругости. Л. : Судостроение, 1968. Т. 1. 423 с.
37. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М. : Высш. школа, 1980. 408 с.
38. Ржаницын А. Р. Строительная механика. М. : Высш. школа, 1982. 400 с.

Жилкин Виталий Афанасьевич, докт. техн. наук, профессор кафедры информационных технологий и прикладной математики, ФГБОУ ВПО «Челябинская государственная агроинженерная академия» (ЧГАА).

E-mail: Zhilkin_Vitalii@mail.ru.

* * *