

V 1975

9

3

2

ТУ 19 — 32 — 73

0

1

ДИА  ИЛЫМ

07-3-121

По заказу Министерства просвещения РСФСР

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

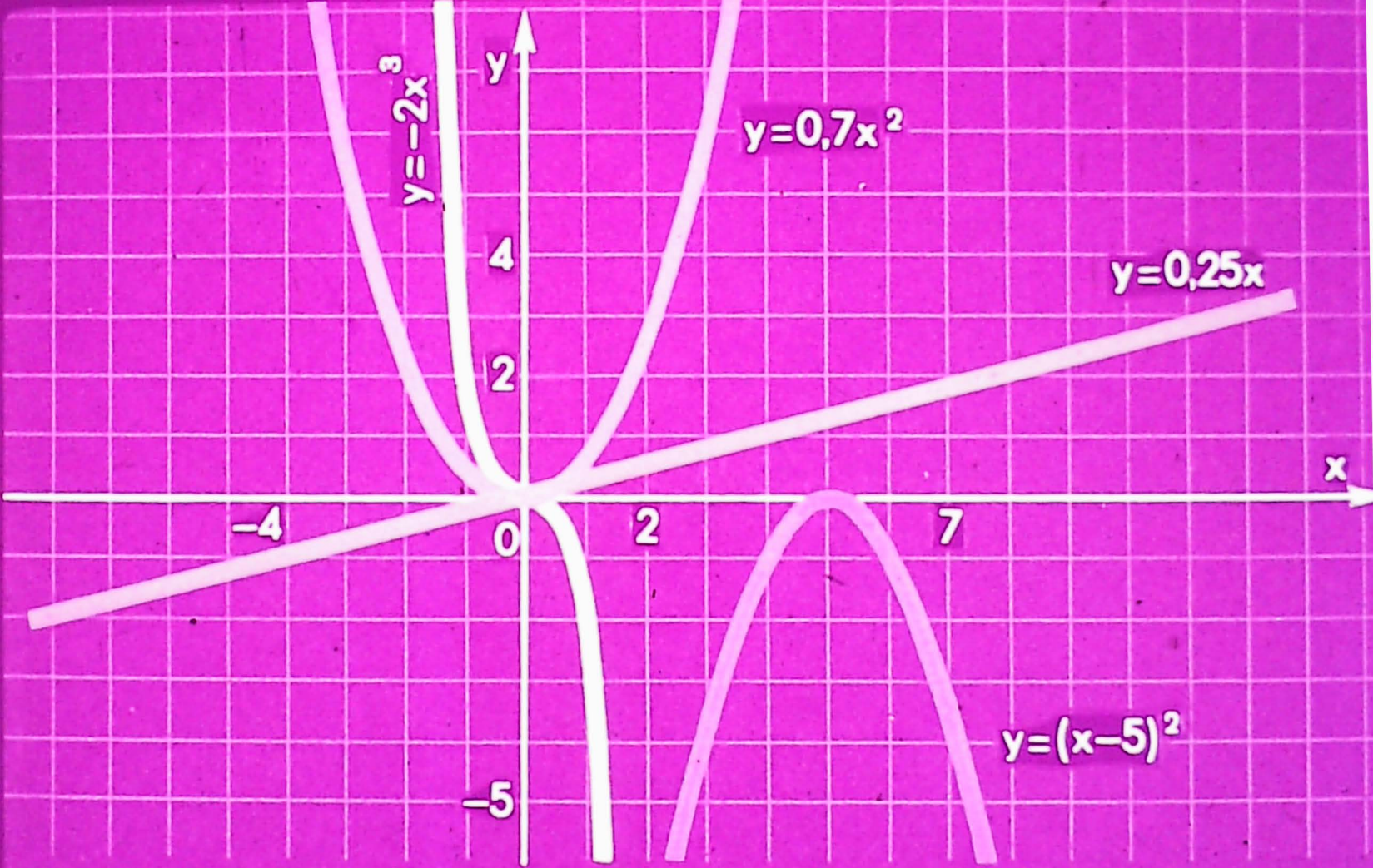
Диафильм по математике для средней школы

I Определение степенной функции.

Свойства графика степенной функции с целым показателем

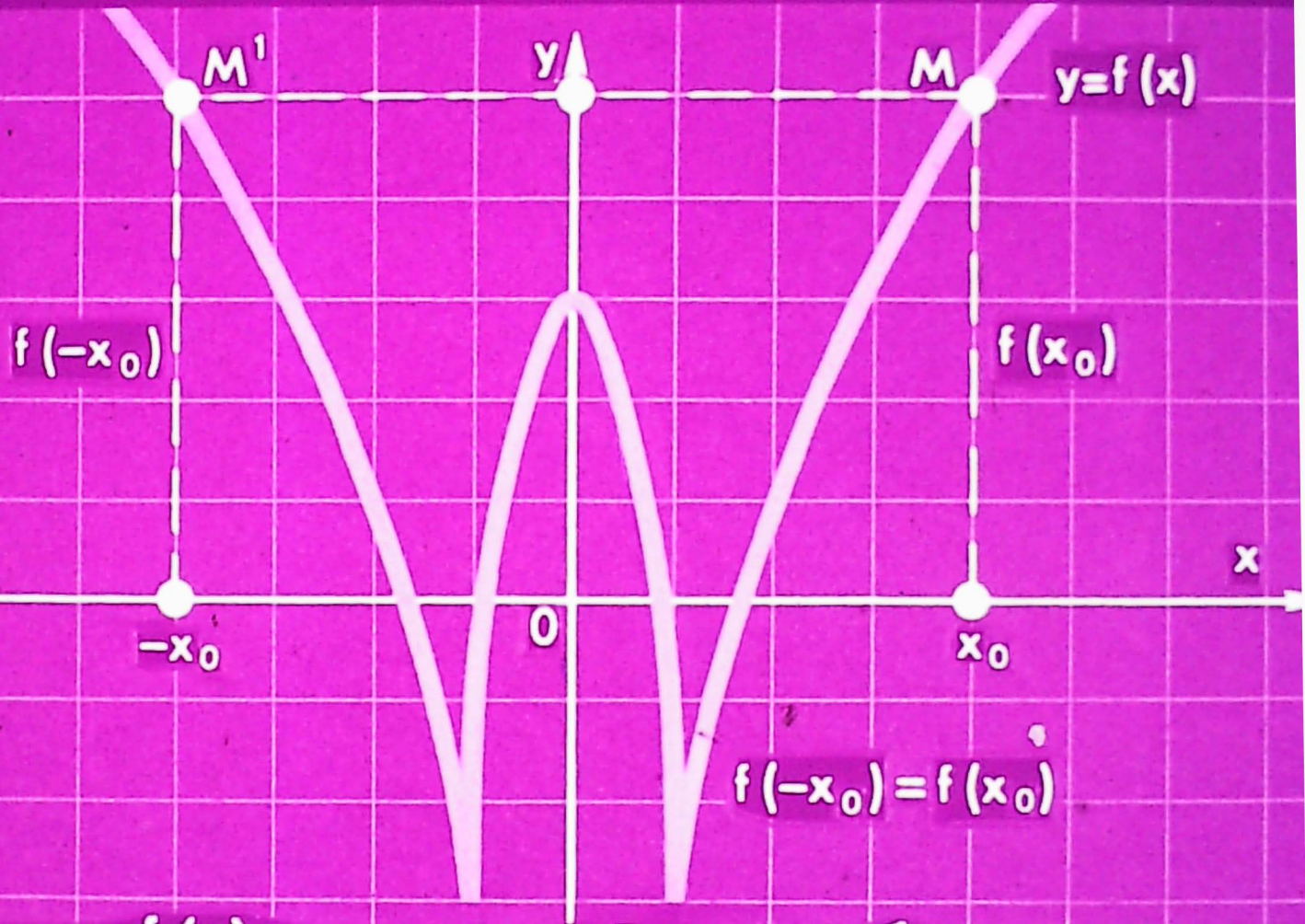
С помощью уравнений $S=vt$; $S=\frac{1}{2}qt^2$; $F=\gamma m_1 m_2 r^{-2}$ и ряда других выражаются процессы, изучаемые в физике. Эти уравнения имеют вид $y=ax^n$.

Функция, которую можно задать уравнением вида $y=ax^n$, где a и n —заданные числа, причём n —целое, а x и y —переменные, называется степенной функцией с целым показателем.



Какие из функций, графики которых здесь изображены, степенные? Дайте объяснение.

4



Функцию $f(x)$, для которой при любых значениях аргумента x выполняется тождество $f(-x)=f(x)$, называют чётной. Докажите, что график чётной функции симметричен относительно оси y , и наоборот.

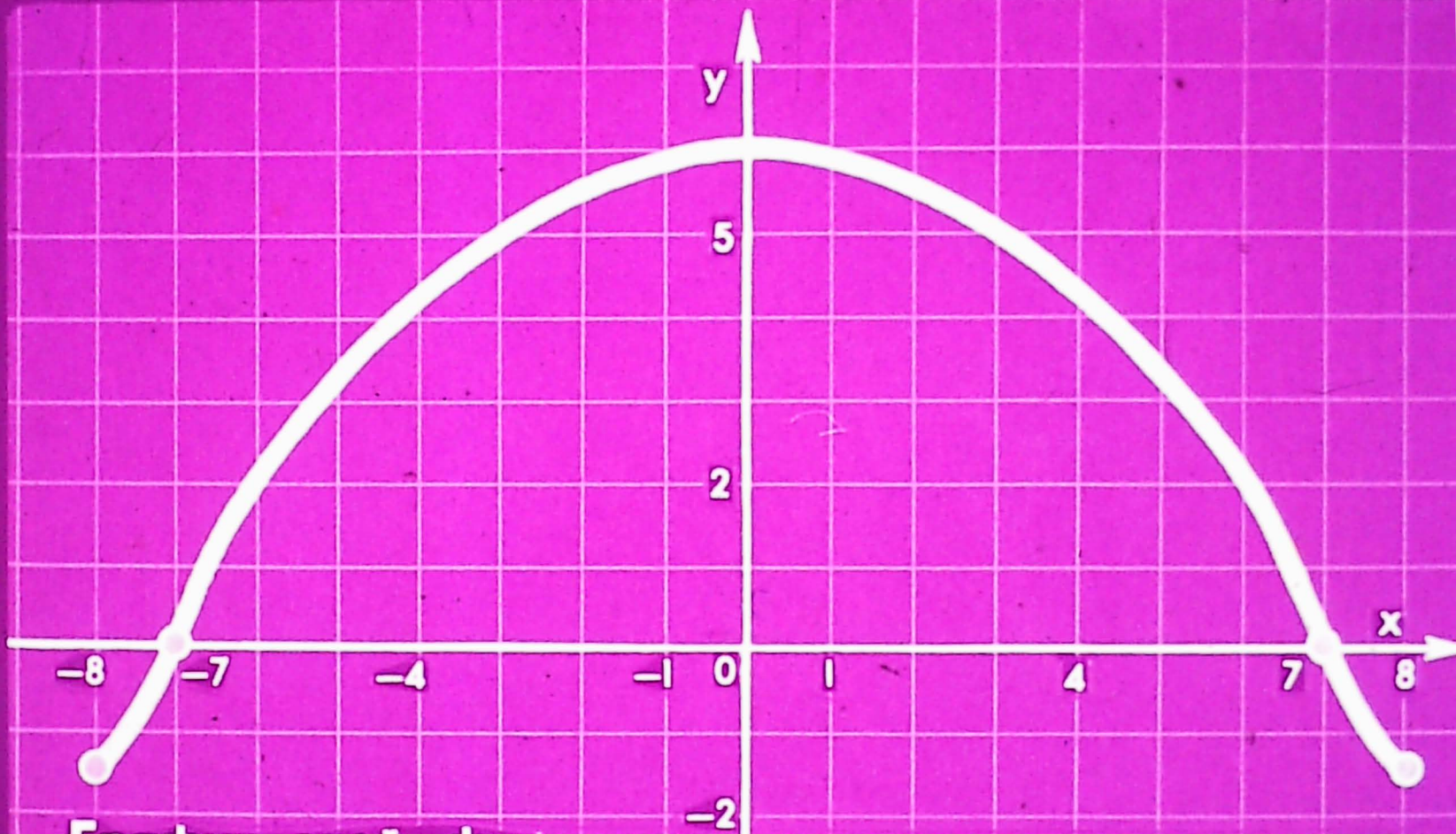
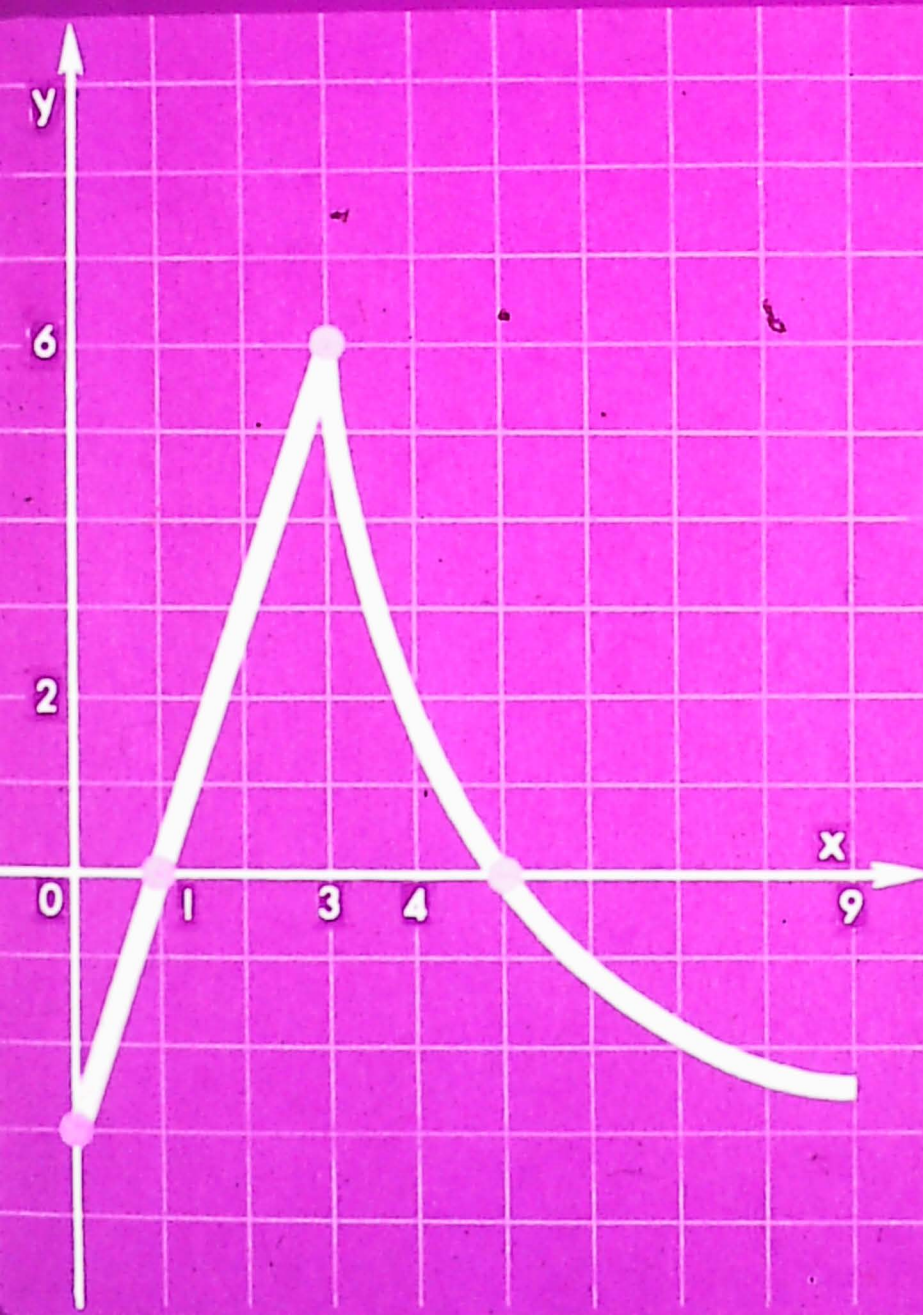
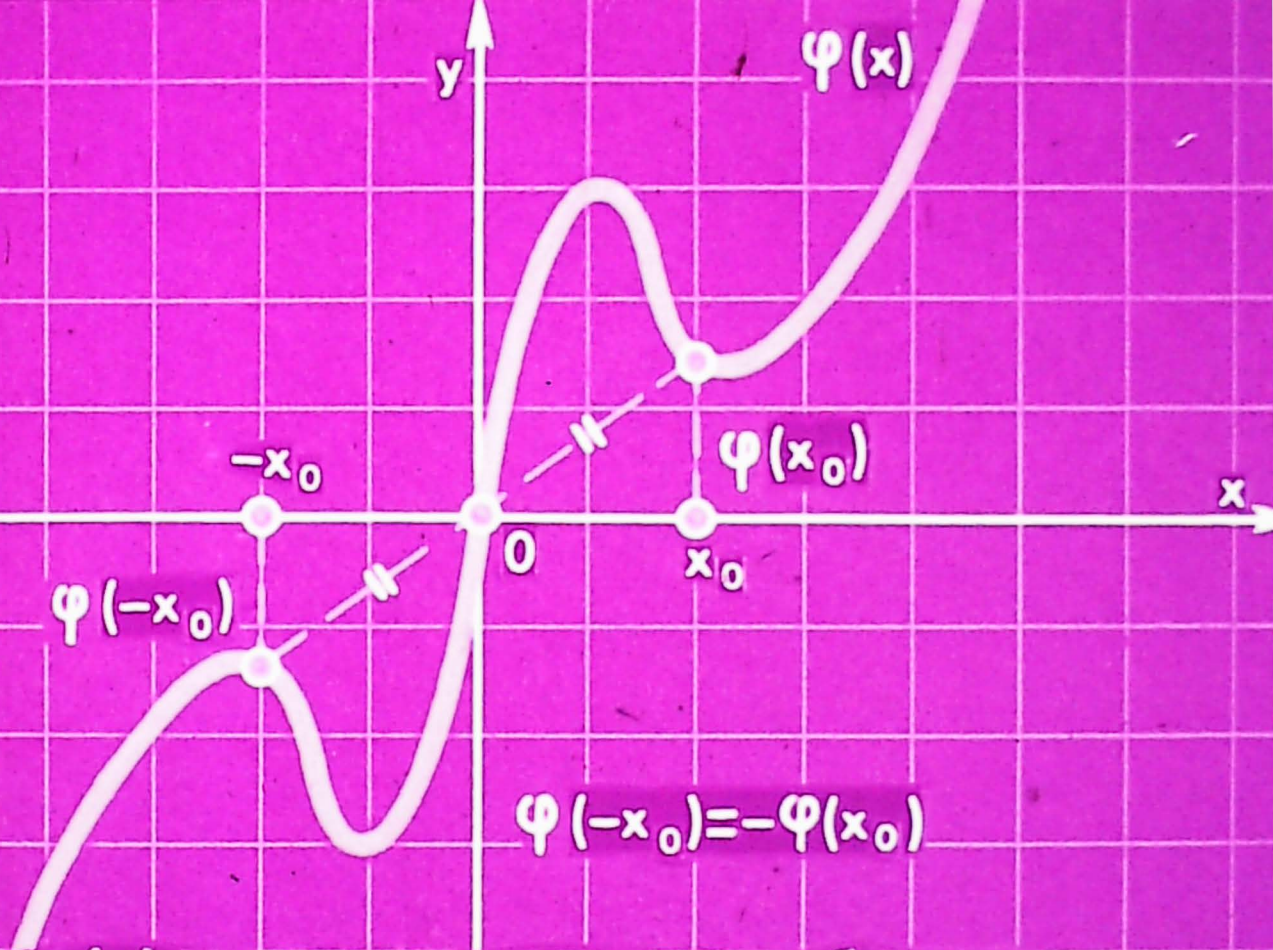


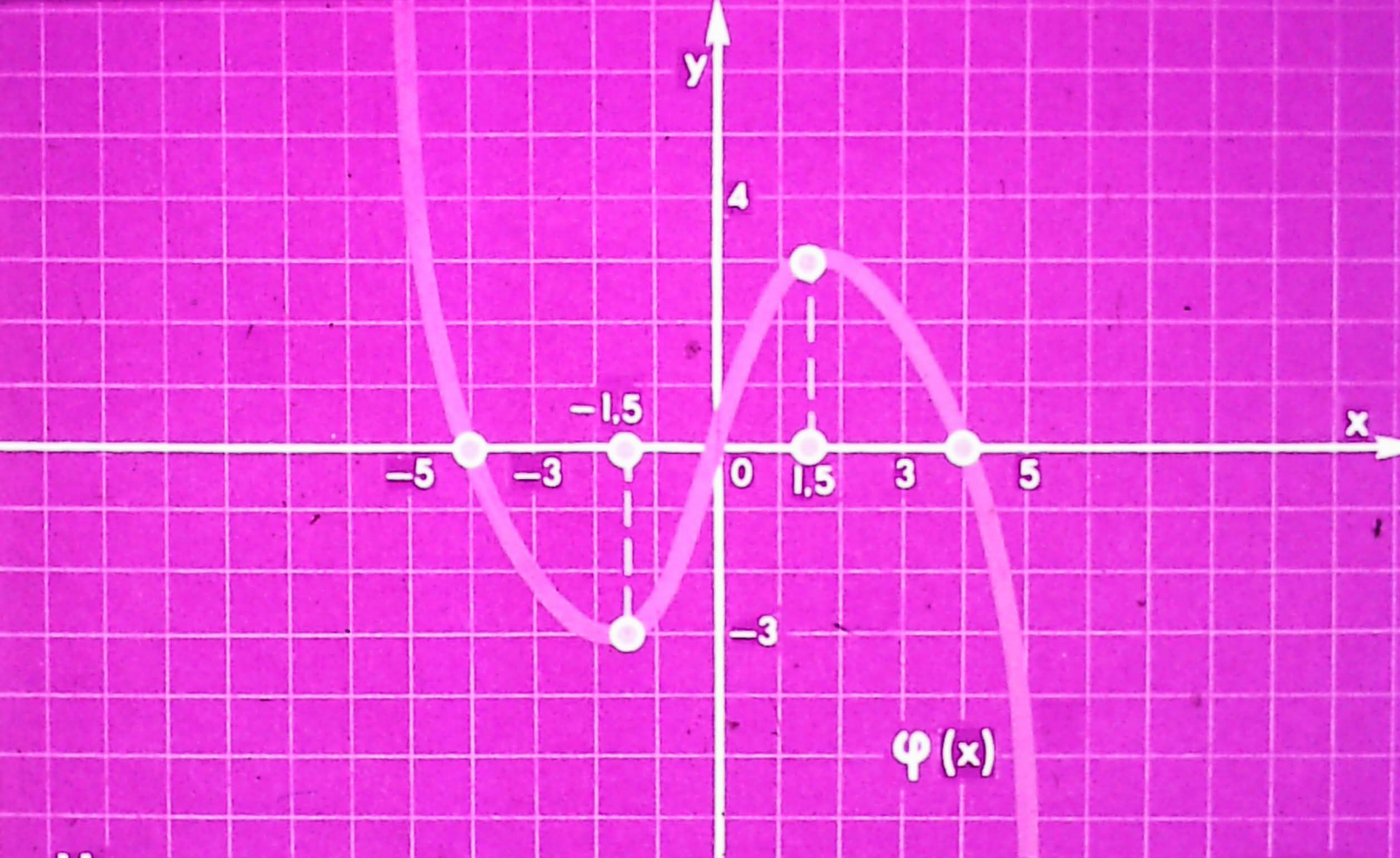
График этой функции симметричен относительно оси y . Рассматривая функцию при $-8 \leq x \leq 8$, назовите промежутки или точки, в которых $f(x)=0$; $f(x)>0$; $f(x)<0$; $f(x)$ убывает. Сравните свойства этой функции при $0 \leq x \leq 8$ и при $-8 \leq x \leq 0$.



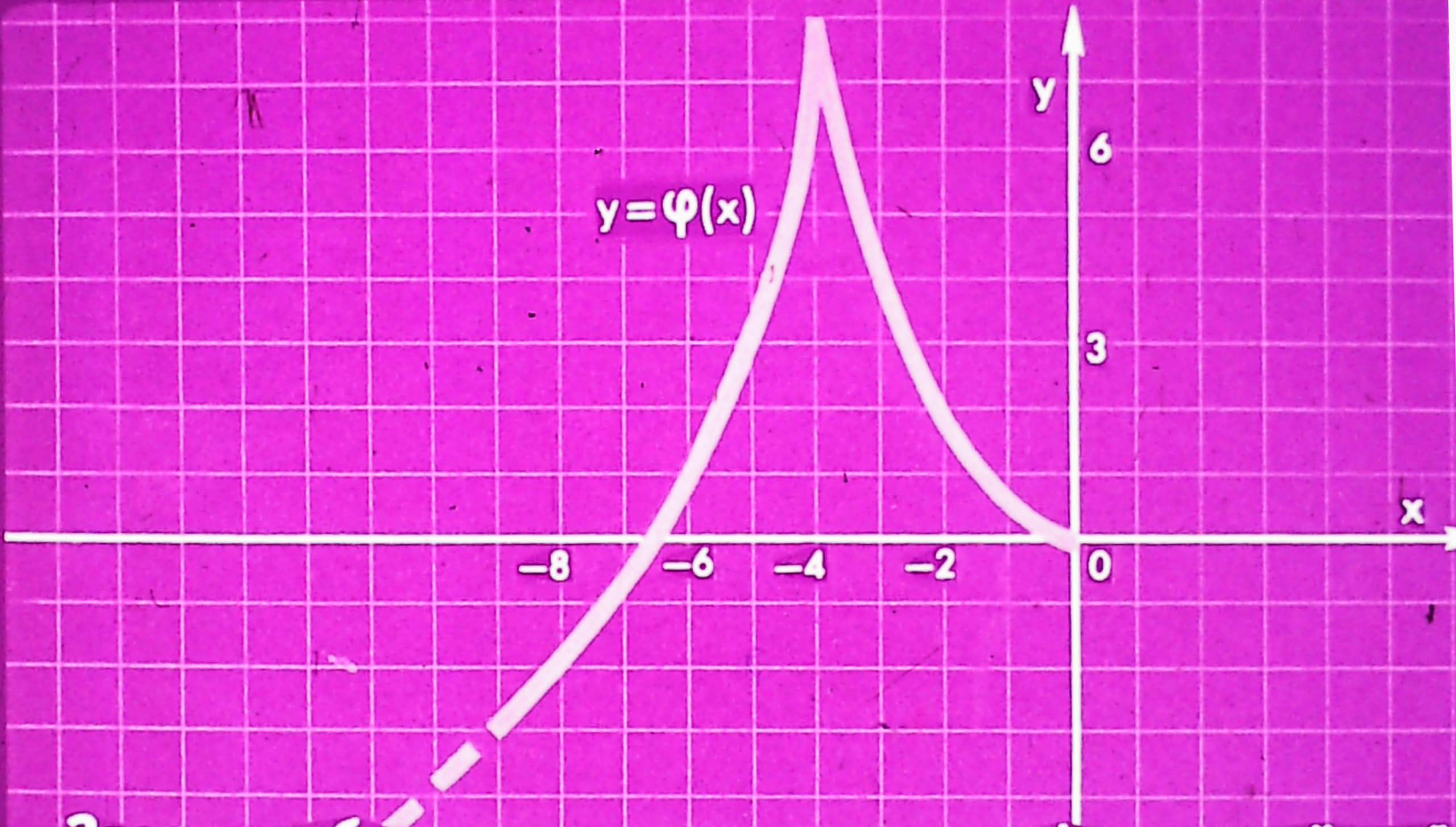
Здесь изображена лишь часть графика чётной функции $y=f(x)$, которая определена в промежутке $-9 \leq x \leq 9$. Перечислите основные свойства этой функции (сначала для $0 \leq x \leq 9$, затем для $-9 \leq x < 0$). Принадлежат ли графику точки: А (3; 6), В (-3; 6), С (-1; 0), D (9; 0)?



Функцию $\varphi(x)$, для которой при любых значениях аргумента x выполняется тождество $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, называют нечётной. Докажите, что график нечётной функции симметричен относительно начала координат, и наоборот.



Назовите промежутки или точки, в которых нечётная функция $\varphi(x)=0$, $\varphi(x)<0$, $\varphi(x)>0$, $\varphi(x)$ убывает; возрастает. Сравните свойства этой функции при $x>0$ и при $x<0$.



Здесь изображена лишь часть графика нечётной функции $y = \varphi(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Перечислите основные свойства этой функции. Принадлежат ли графику точки: К (4; -8), М (-8; -2), Р (8; 2), Q (4; 0)?

$$y=0,5x^2$$

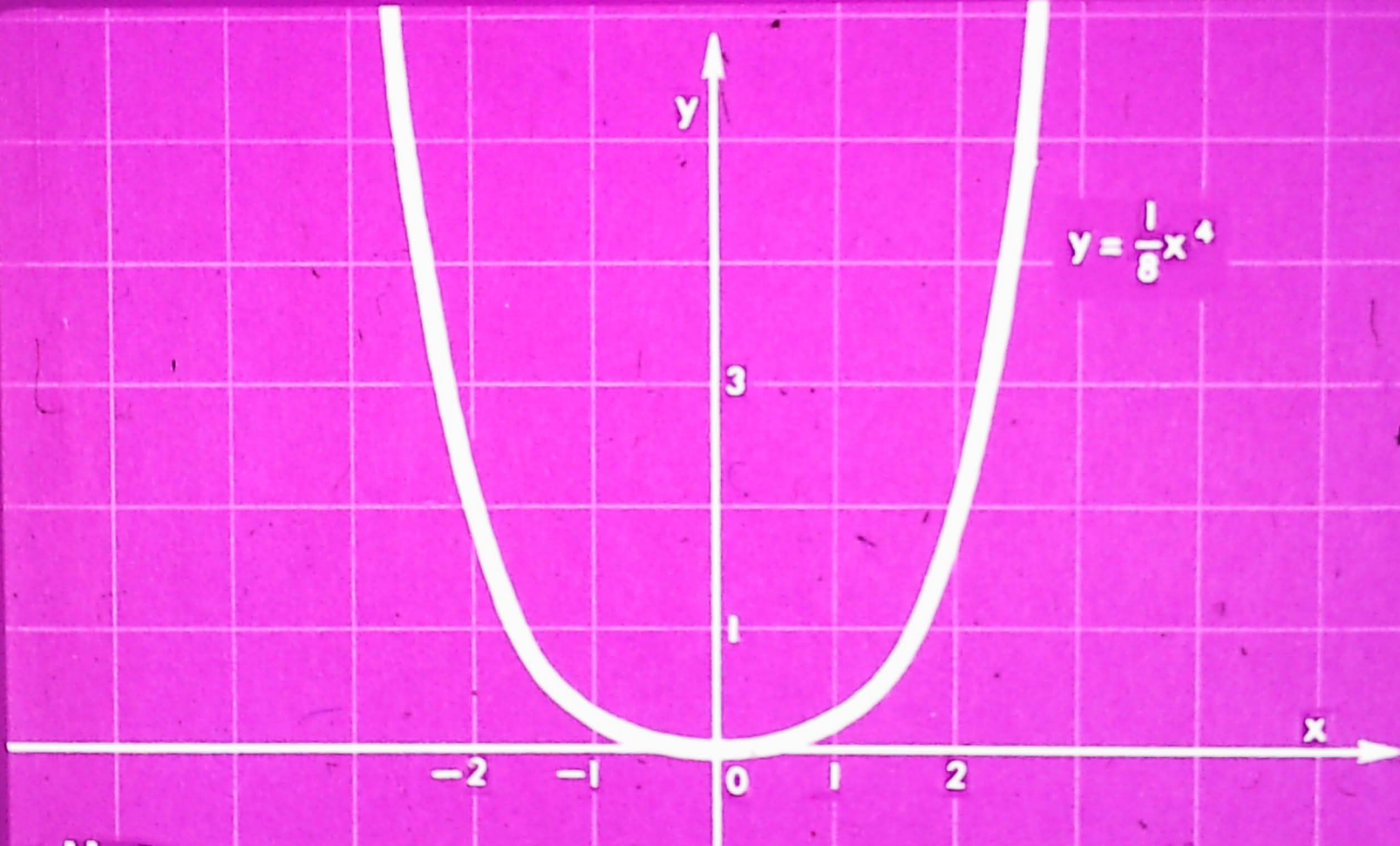
$$y=\frac{1}{4}x^5$$

$$y=1,5x-6$$

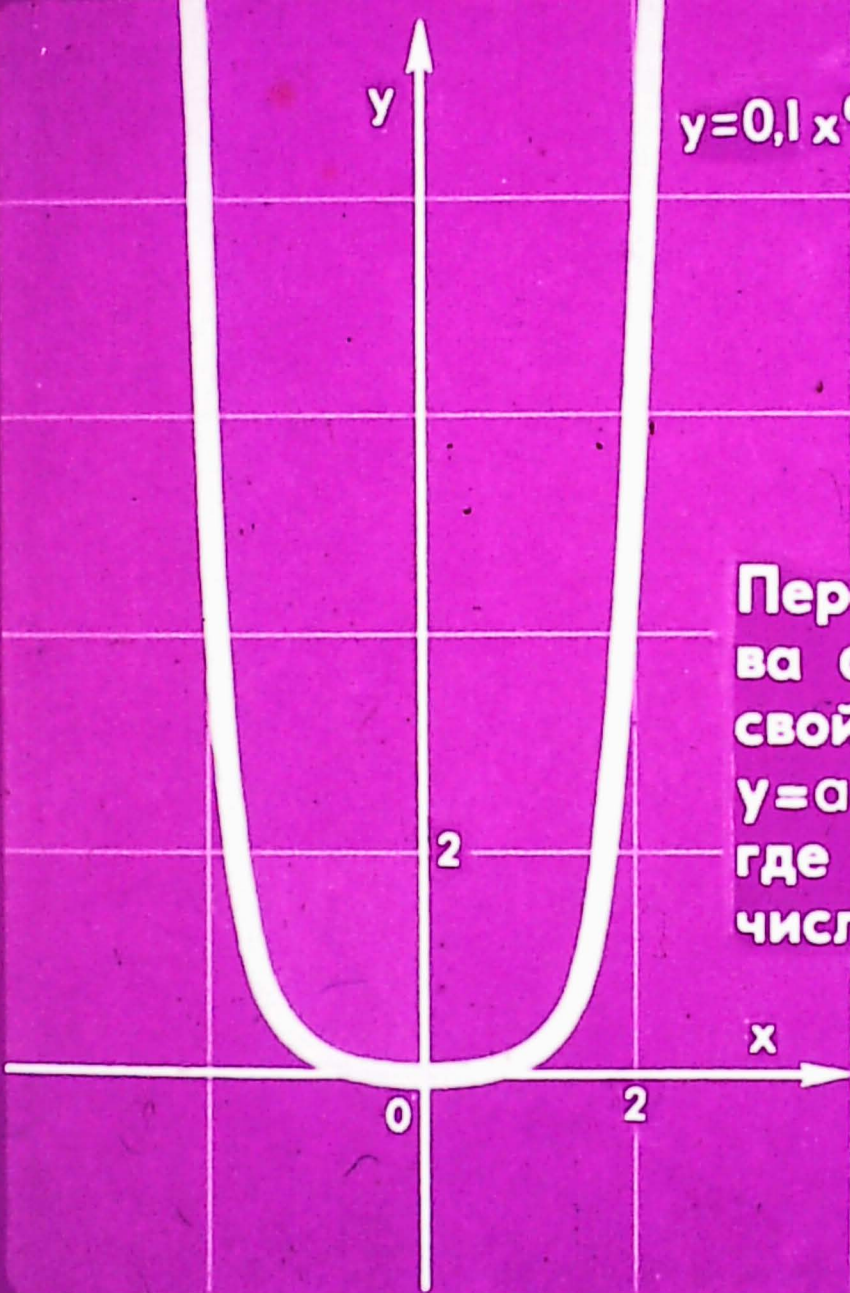
$$y=x^3-3x$$

Какие из этих функций степенные? Какие из них чётные, какие нечётные, какие не относятся к чётным или нечётным? Дайте объяснение.

II. Свойства степенной функции с натуральным показателем

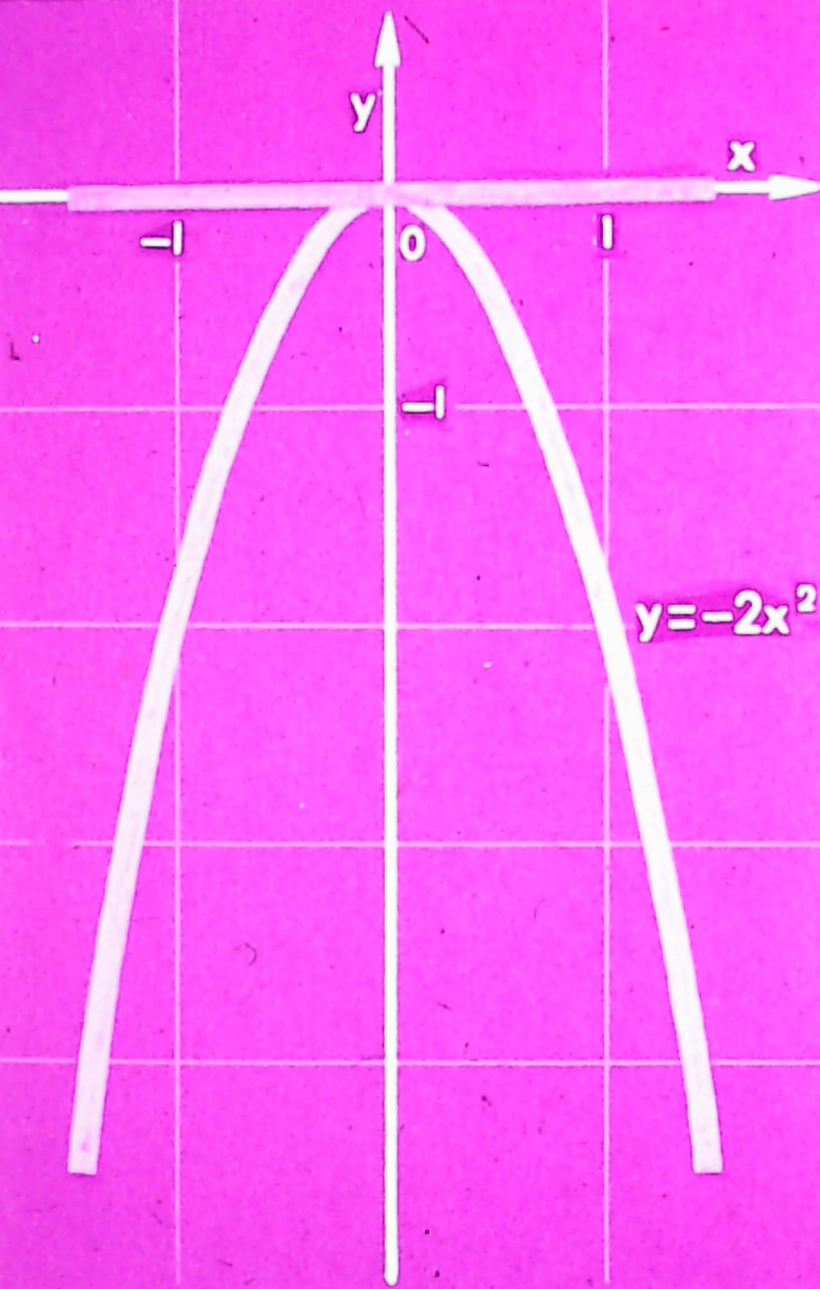


Найдите промежутки или точки, в которых степенная функция $f(x) = \frac{1}{8}x^4$ равна нулю; положительна; отрицательна; возрастает; убывает; принимает наибольшее или наименьшее значения.

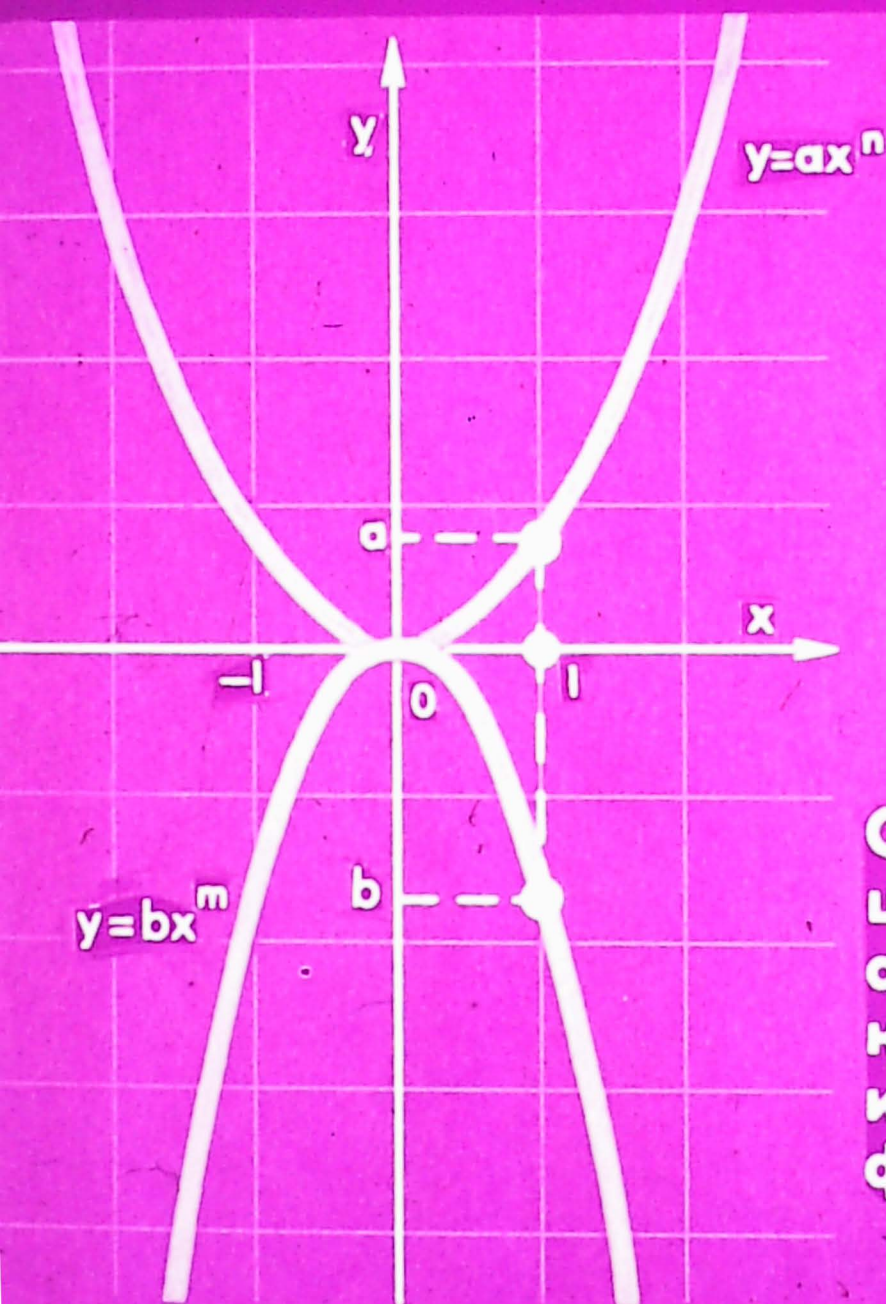


$$y=0,1x^6$$

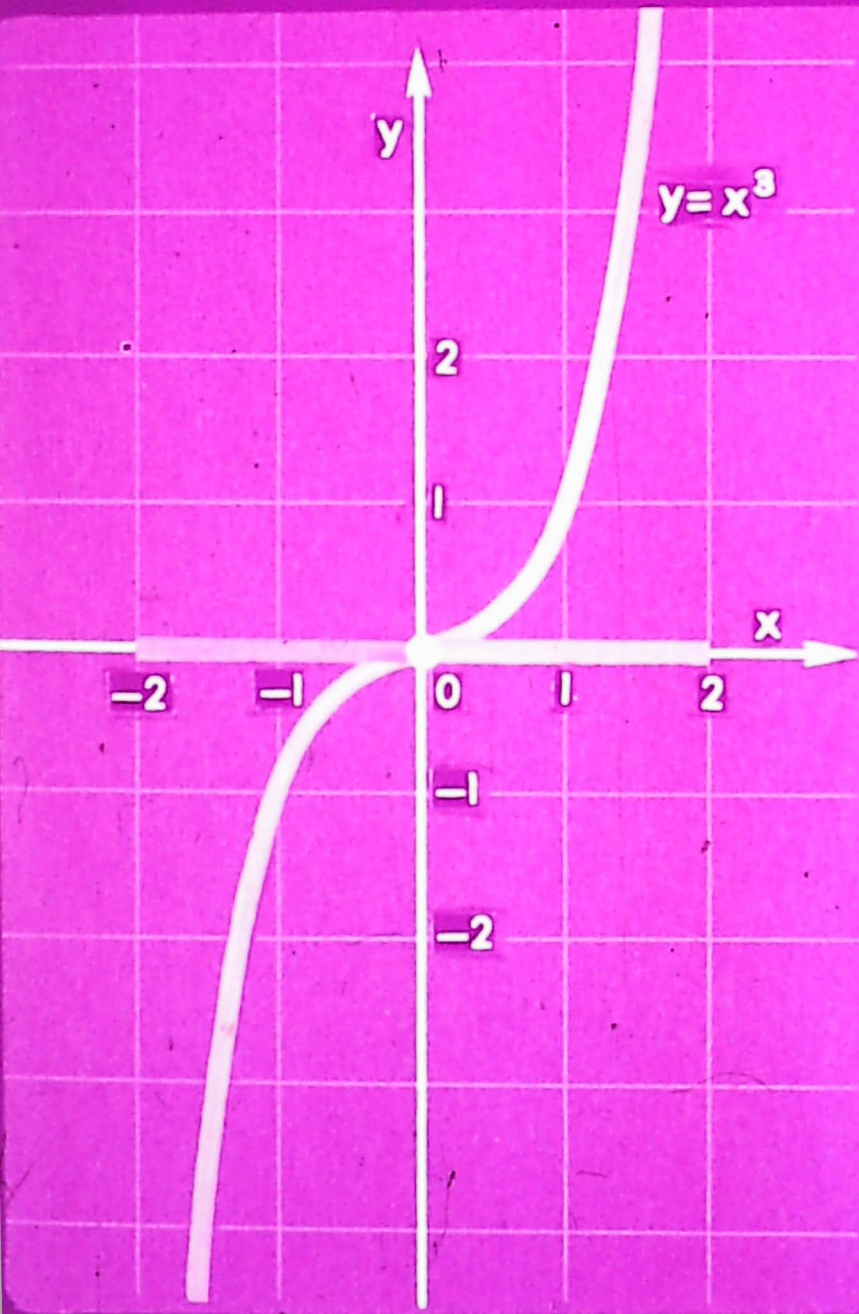
Перечислите основные свойства функции $y=0,1x^6$. Каковы свойства функции $y=237x^{12}$, $y=ax^{30}$, где $a>0$; $y=0,005x^n$, где n —чётное натуральное число?



Прочитайте свойства
функции $y = -2x^2$;
 $y = -87x^n$, где n — чёт-
ное натуральное чис-
ло; $y = ax^{102}$, где $a < 0$.



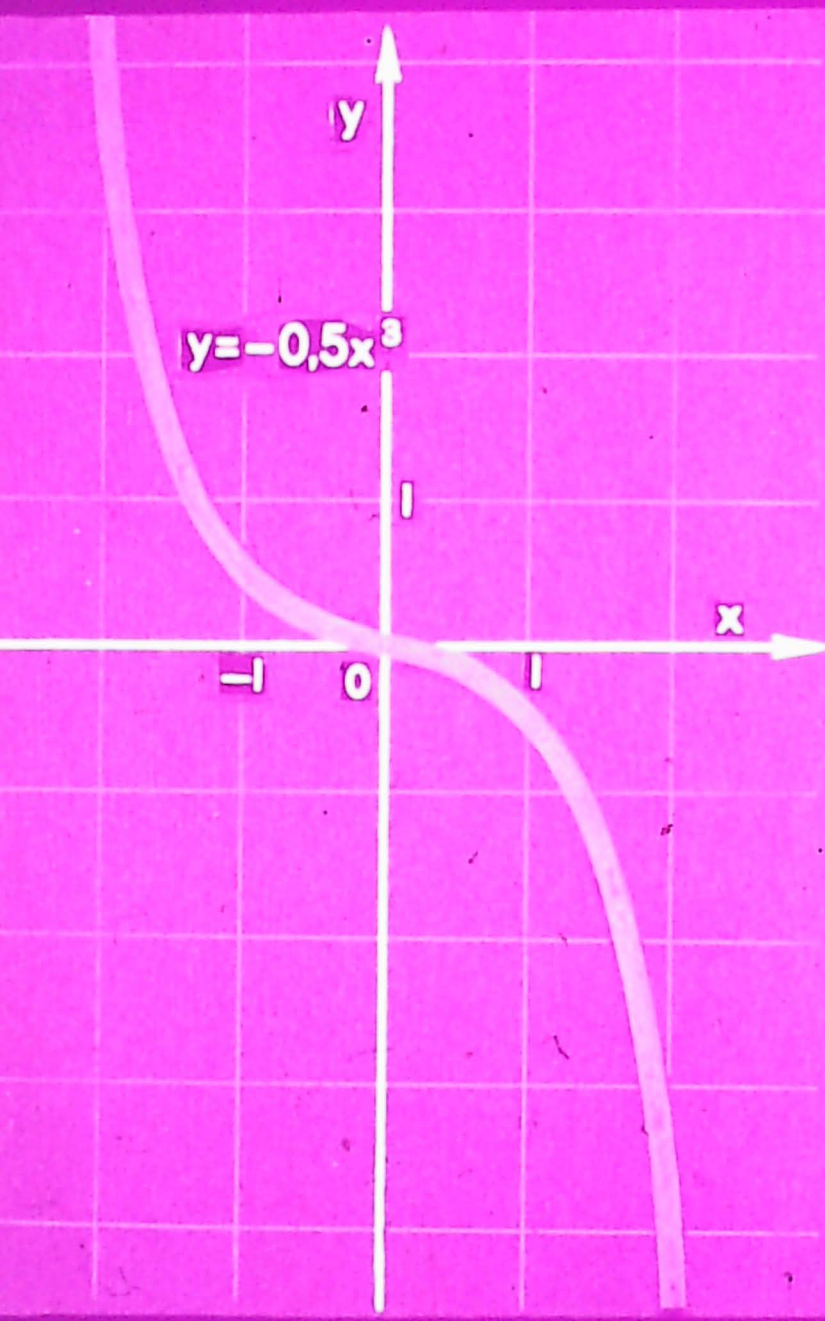
Сравните свойства функций $y = ax^n$ и $y = bx^m$, где $a > 0$, $b < 0$, n и m — чётные натуральные числа, и расположение их графиков.



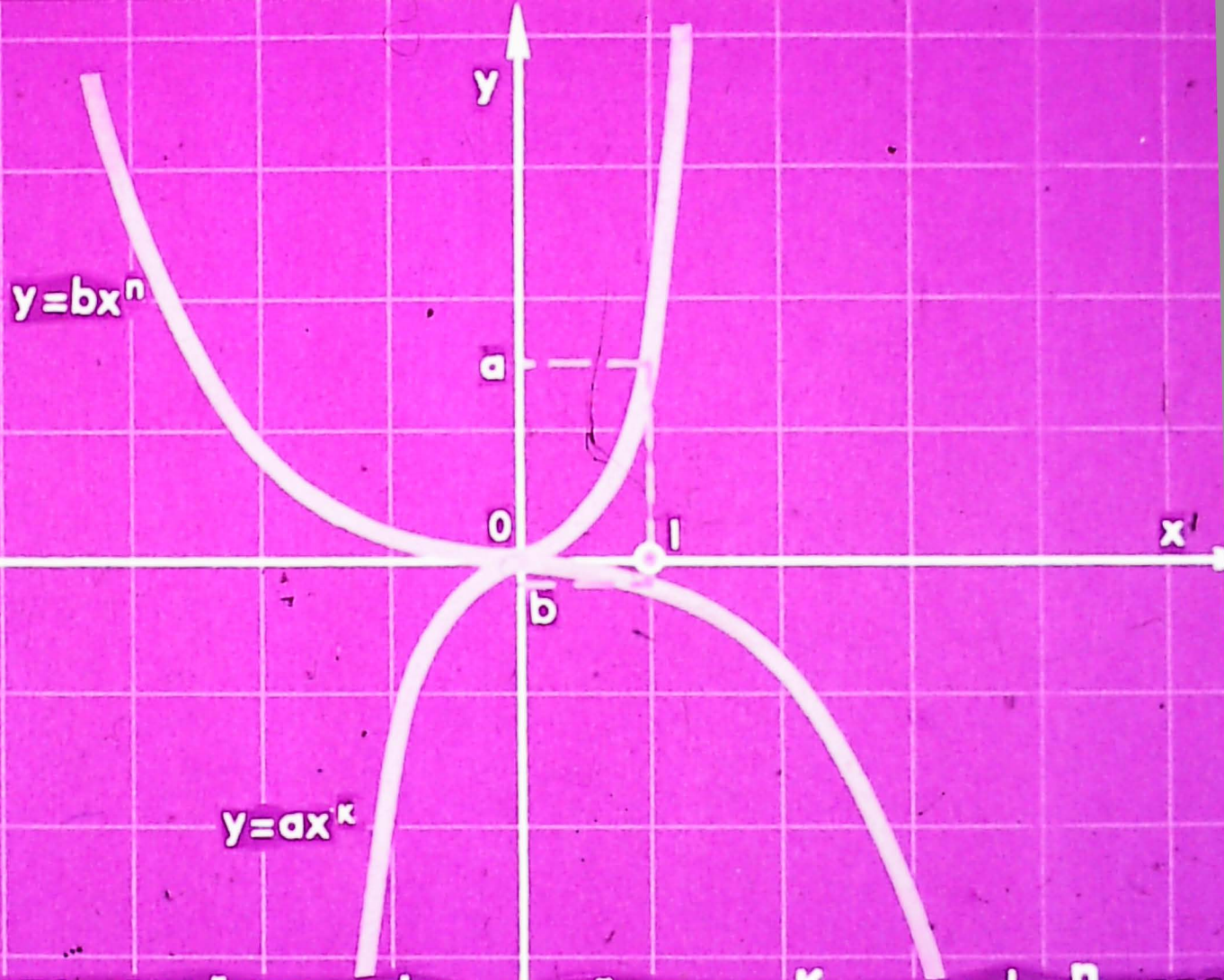
Выясните основные свойства функции $y = x^3$.



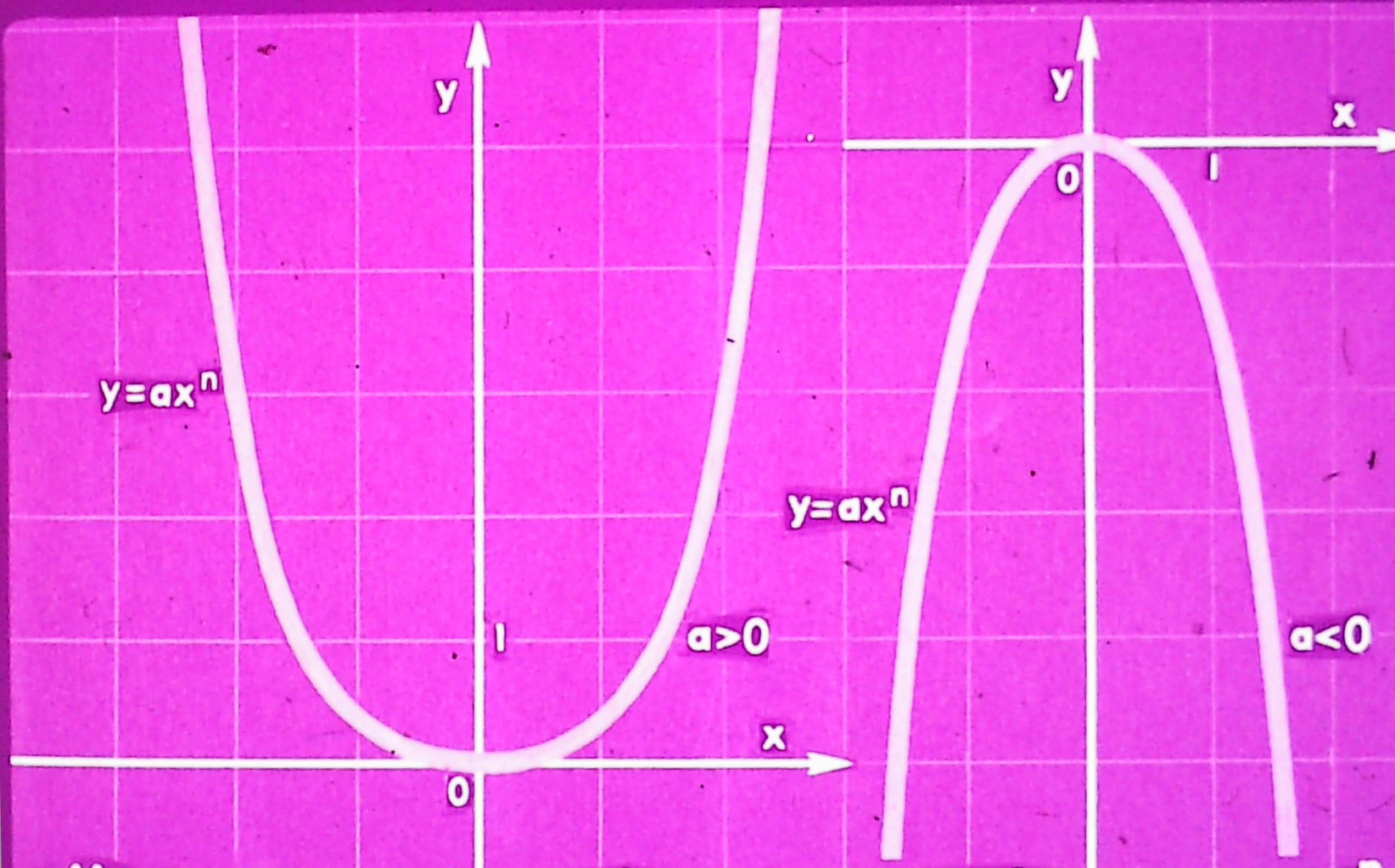
Перечислите свойства функции $y = 0.2x^5$; $y = x$; $y = ax^n$, где $a > 0$; $y = 1.0009x^n$, где n — нечётное натуральное число.



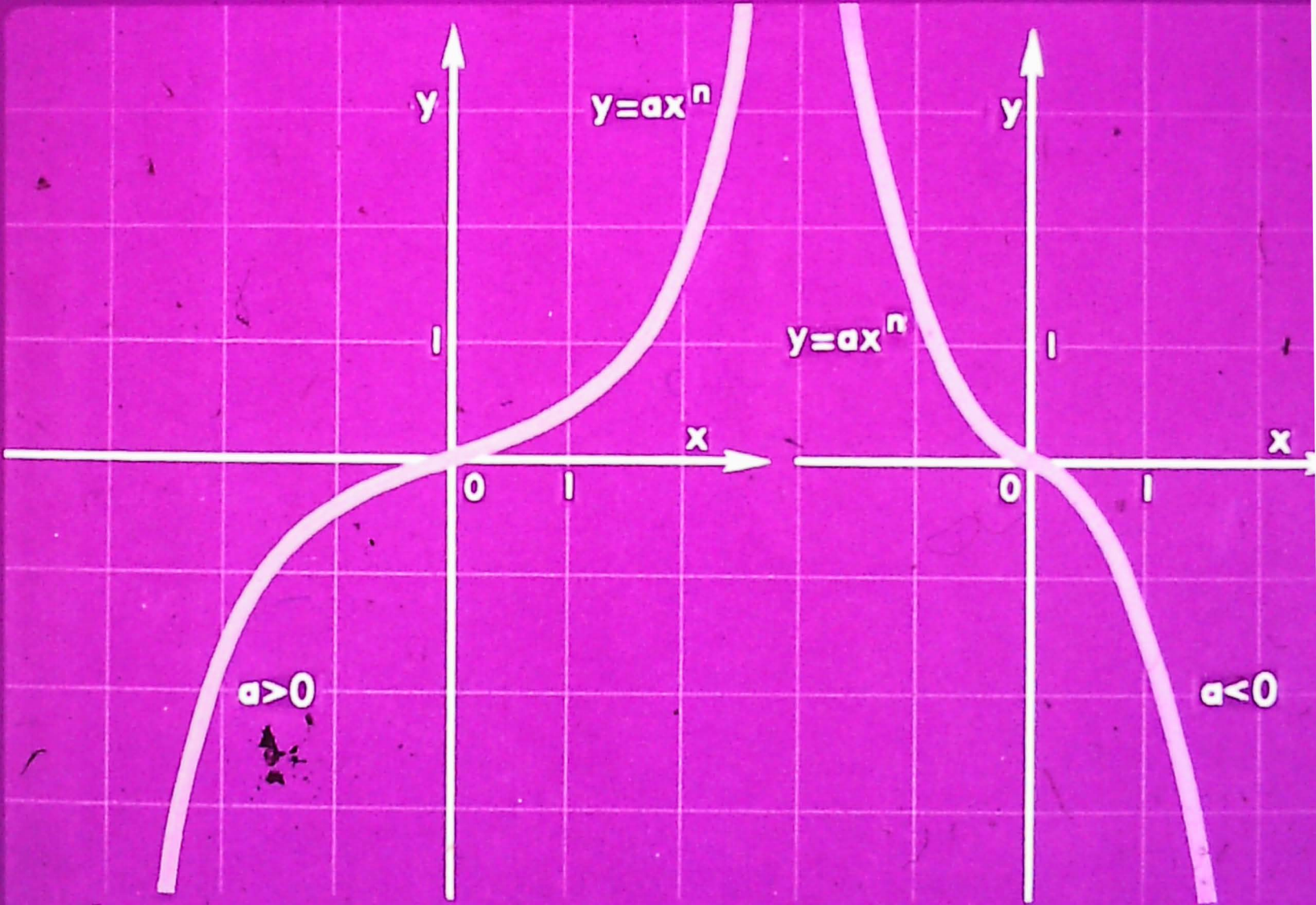
Выясните свойства функции $y = -\frac{1}{2}x^3$; $y = -5.03x^p$, где p — нечётное число.



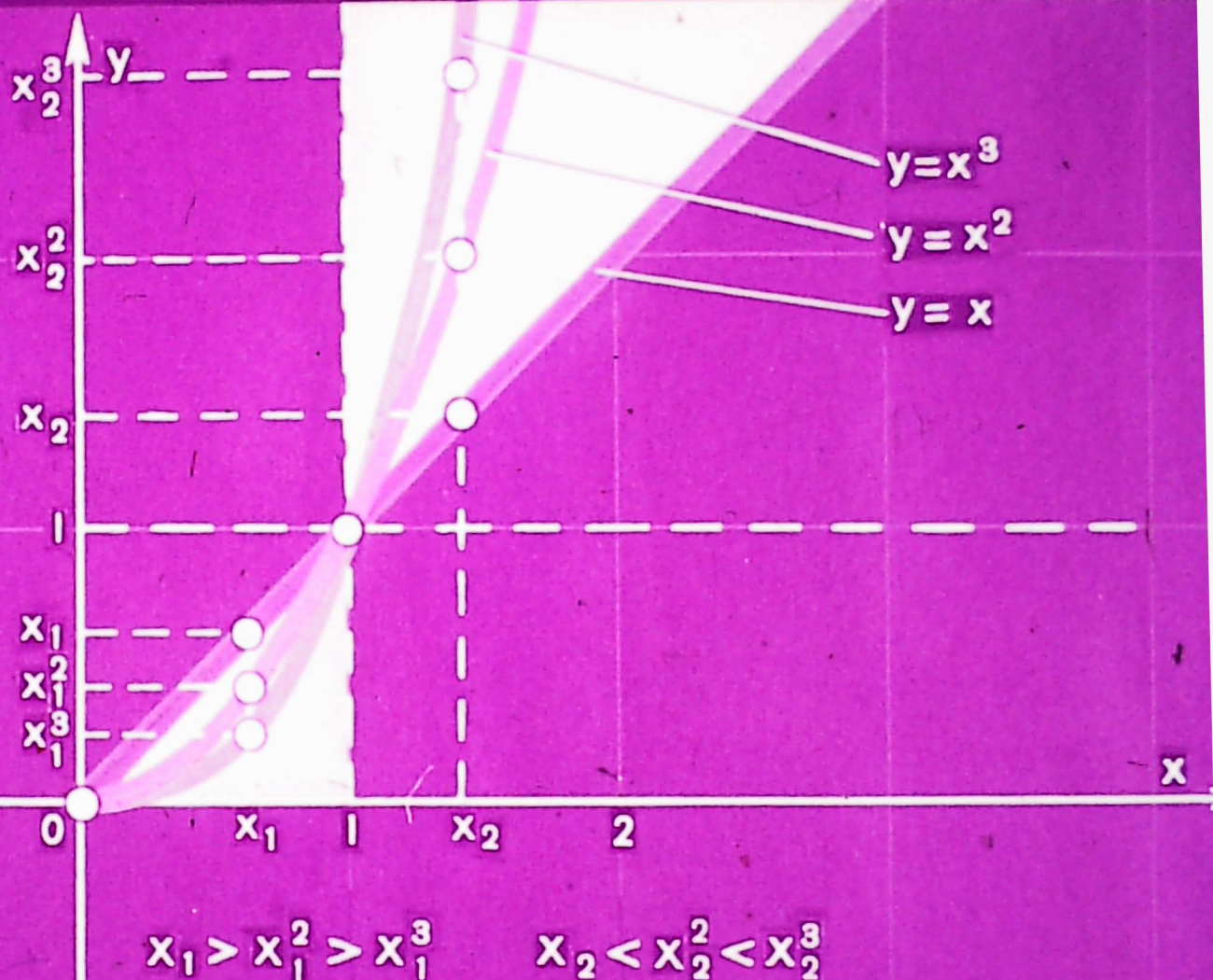
Сравните свойства функций $y = ax^k$ и $y = bx^n$, где $a > 0$, $b < 0$, k и n — нечётные числа, и расположение их графиков.



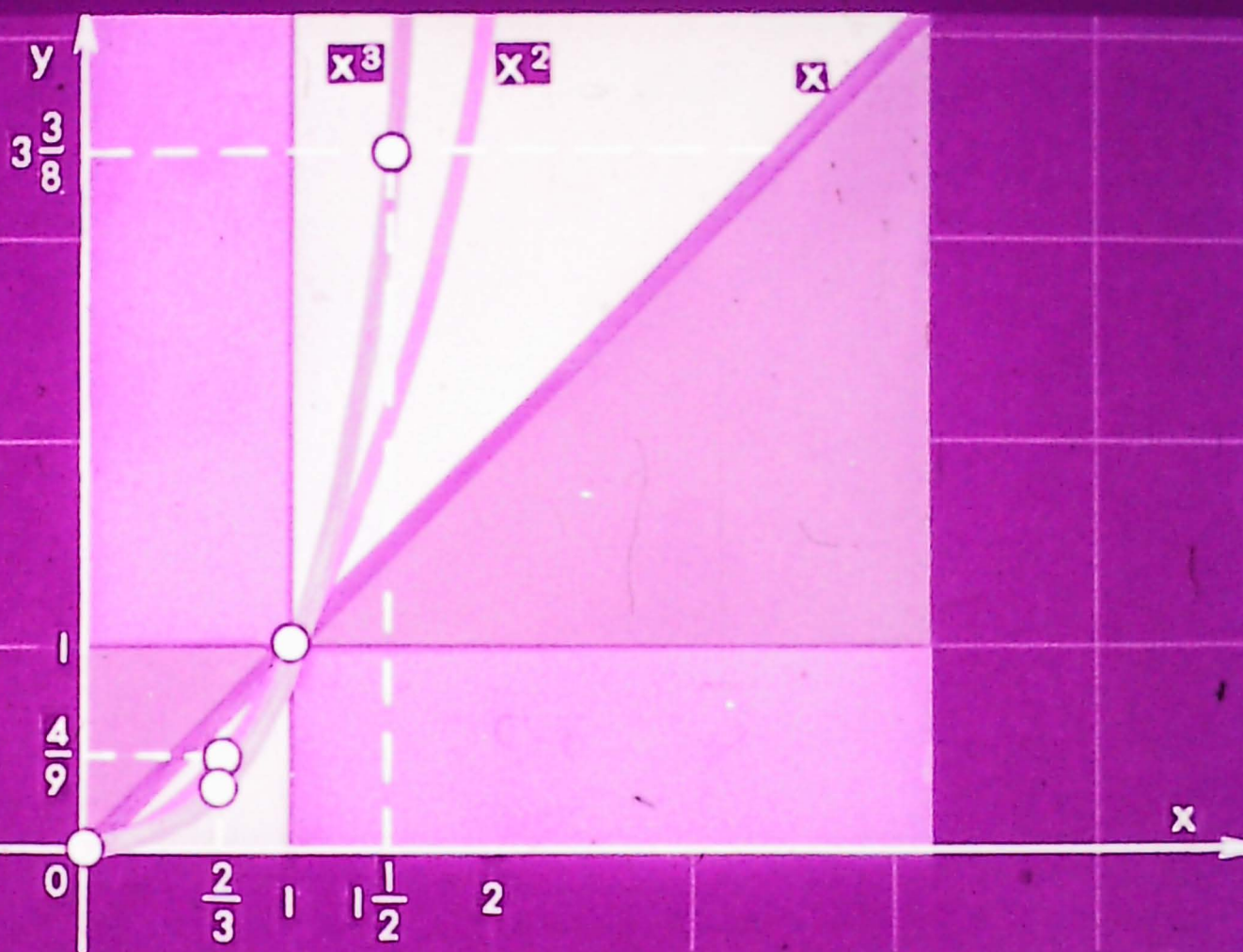
Мы выяснили, что график степенной функции $y = ax^n$ с натуральным показателем расположен: а) при чётном n в I и II четвертях, если $a > 0$, и в III и IV четвертях, если $a < 0$;



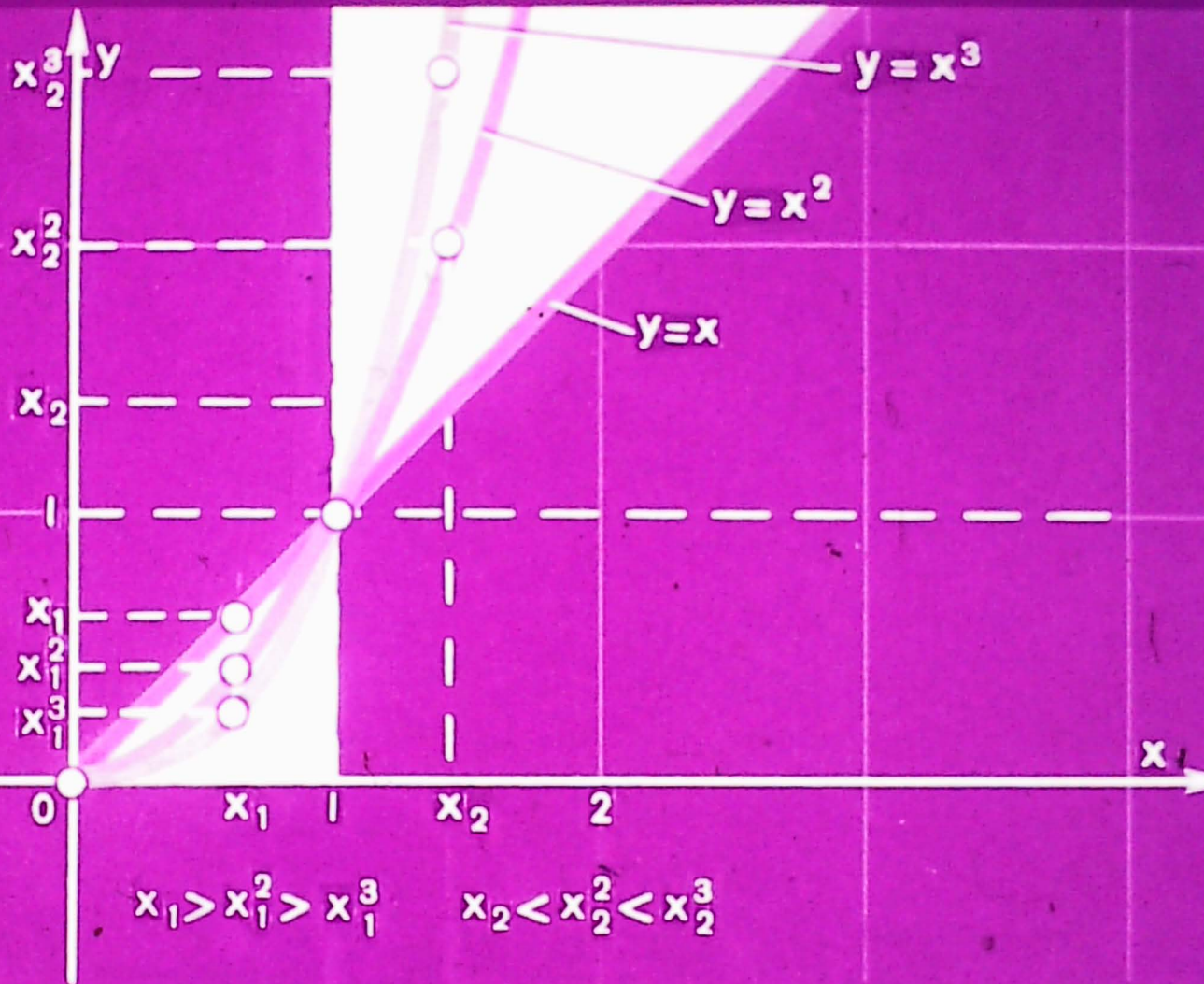
б) при нечётном n в I и III четвертях, если $a > 0$, и во II и IV четвертях, если $a < 0$.



Сравните значения x , x^2 и x^3 , рассмотрев случаи:
 а) $0 < x < 1$; б) $x = 1$; в) $x > 1$. Что больше $\frac{17}{105}$ или $(\frac{17}{105})^3$;
 $(\frac{11}{10})^2$ или $(\frac{11}{10})^3$?

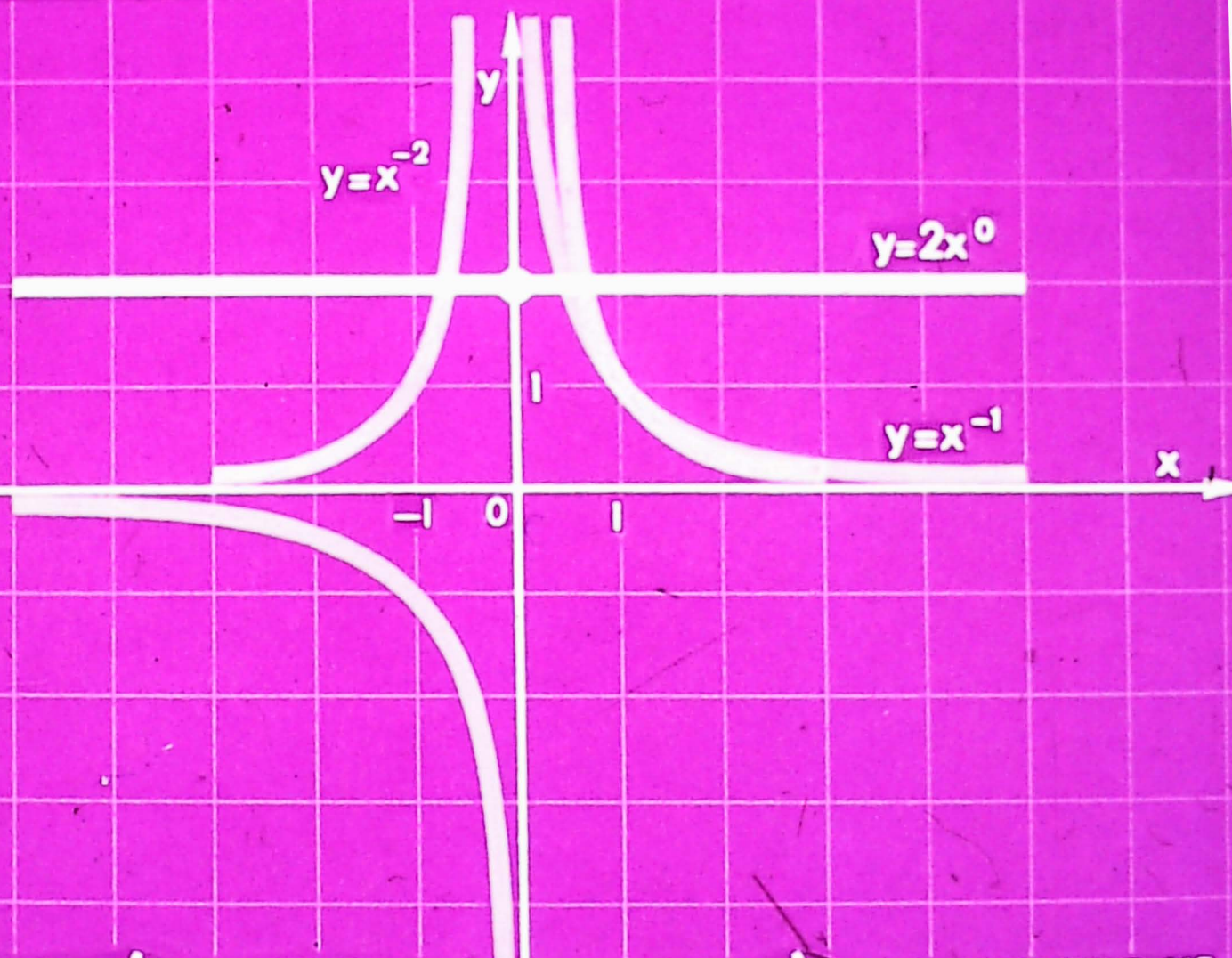


Какой из графиков проходит через точку $P(1\frac{1}{2}; 3\frac{3}{8})$, $K(\frac{2}{3}; \frac{4}{9})$, $M(1, 1)$? В какой (красной, жёлтой, зелёной) области (при $x \geq 0$) расположен график функции $y = x^n$ с натуральным показателем n ?

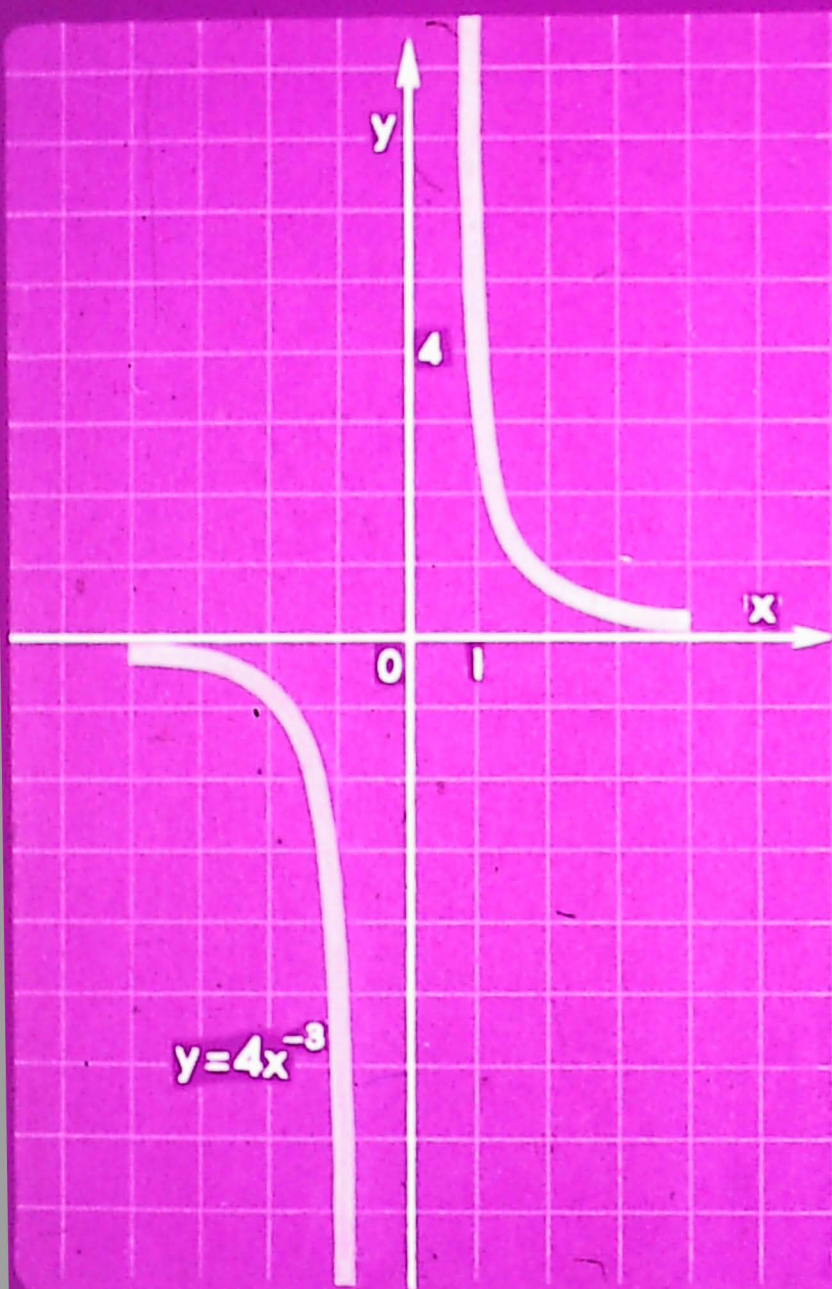


Если $y = x^n$, где целое $n > 0$, то: а) при $0 < x < 1$ всегда $y \leq x$; б) при $x > 1$ всегда $y \geq x$. Объясните это.

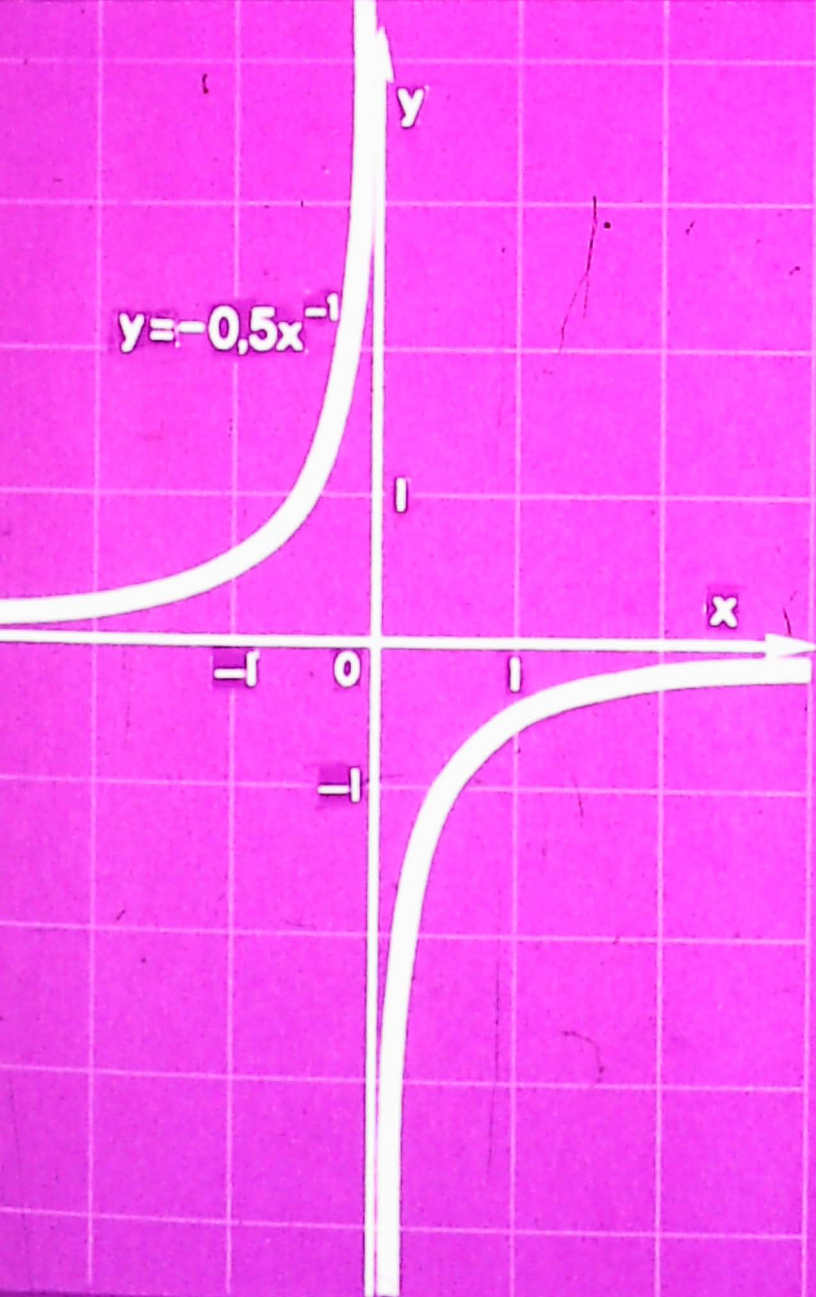
**III. Свойства
степенной функции
с целым
отрицательным
показателем**



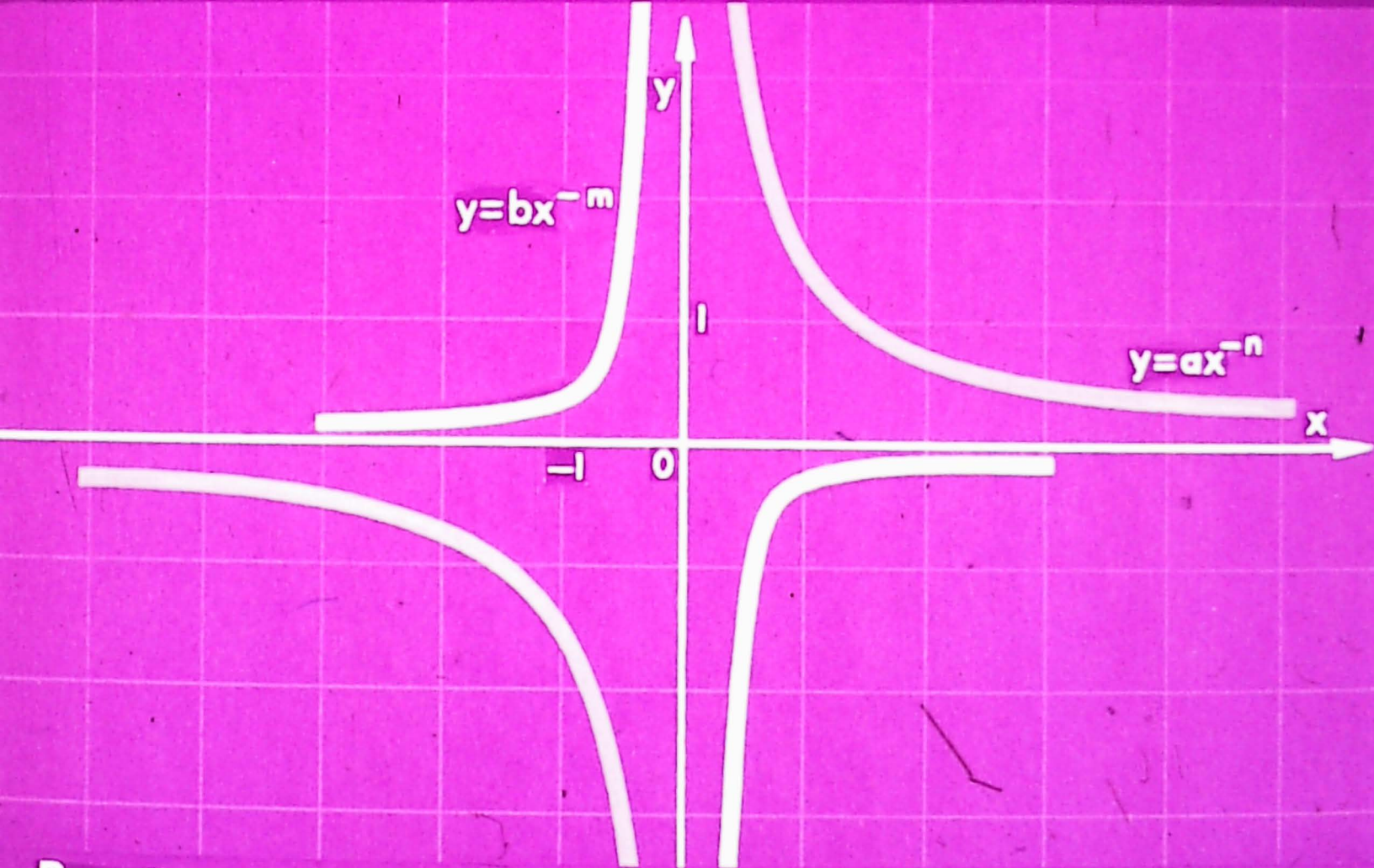
Докажите (пользуясь определением), что каждая из этих функций степенная. Какая из них чётная и какая нечётная?



Найдите промежутки или точки, в которых функция $y = 4x^{-3}$ не определена; положительна; отрицательна; возрастает или убывает.



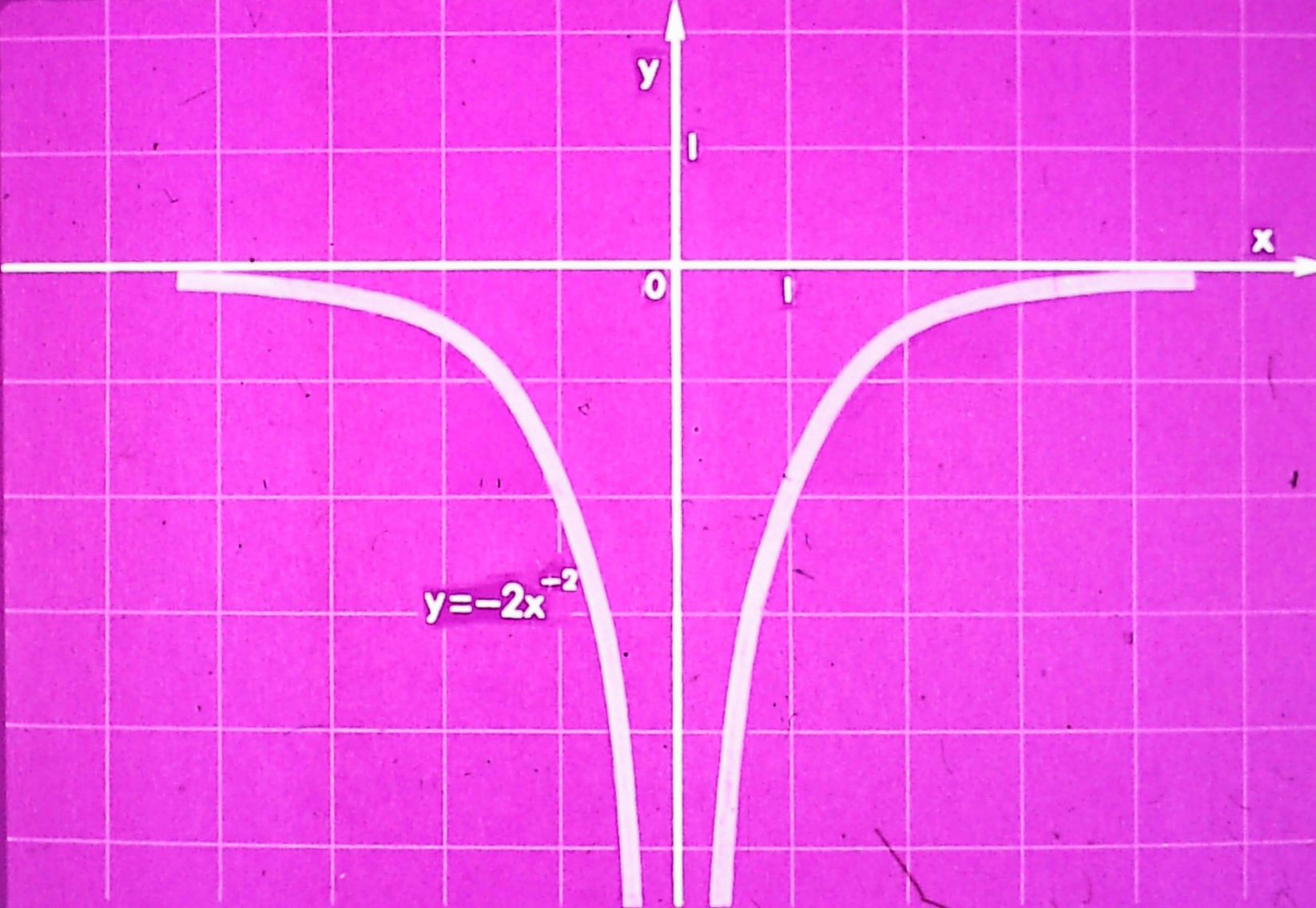
Перечислите основные свойства функции $y = -0.5x^{-1}$.



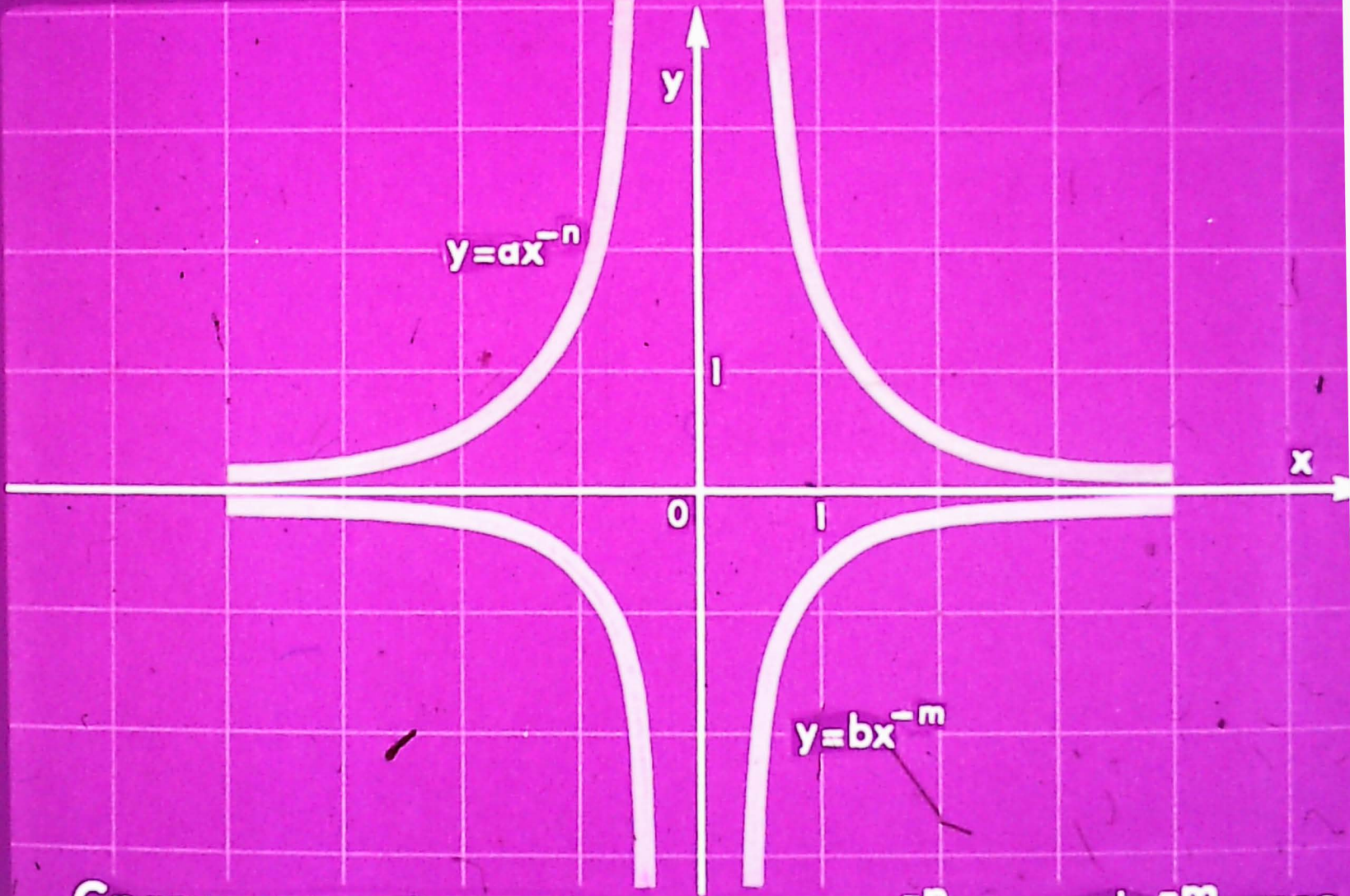
В чём сходство и различие свойств функций $y = ax^{-n}$ и $y = bx^{-m}$, где $a > 0$, $b < 0$, n и m — нечётные натуральные числа, и расположения их графиков?



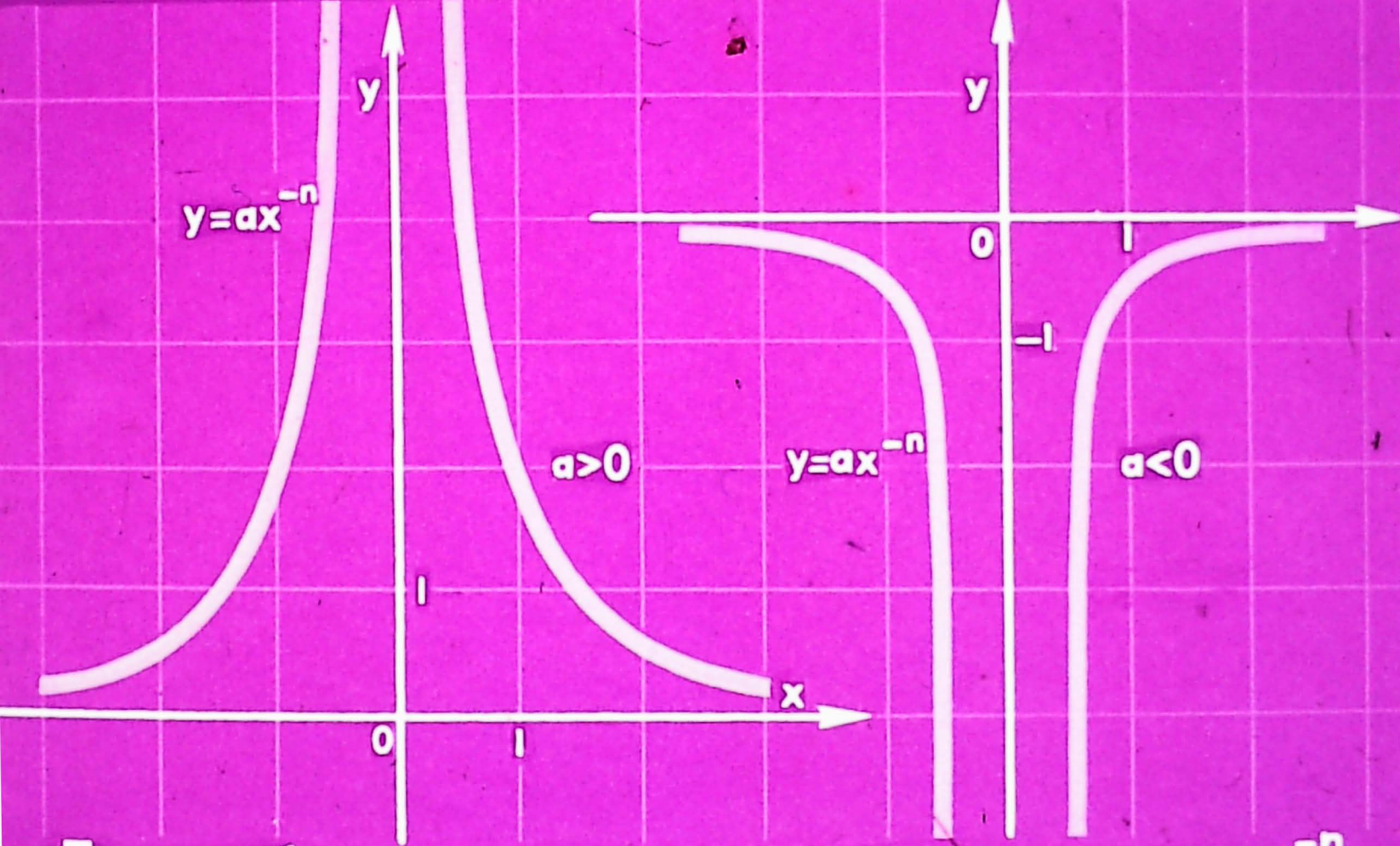
Выясните свойства функции $y = 4x^{-2}$.



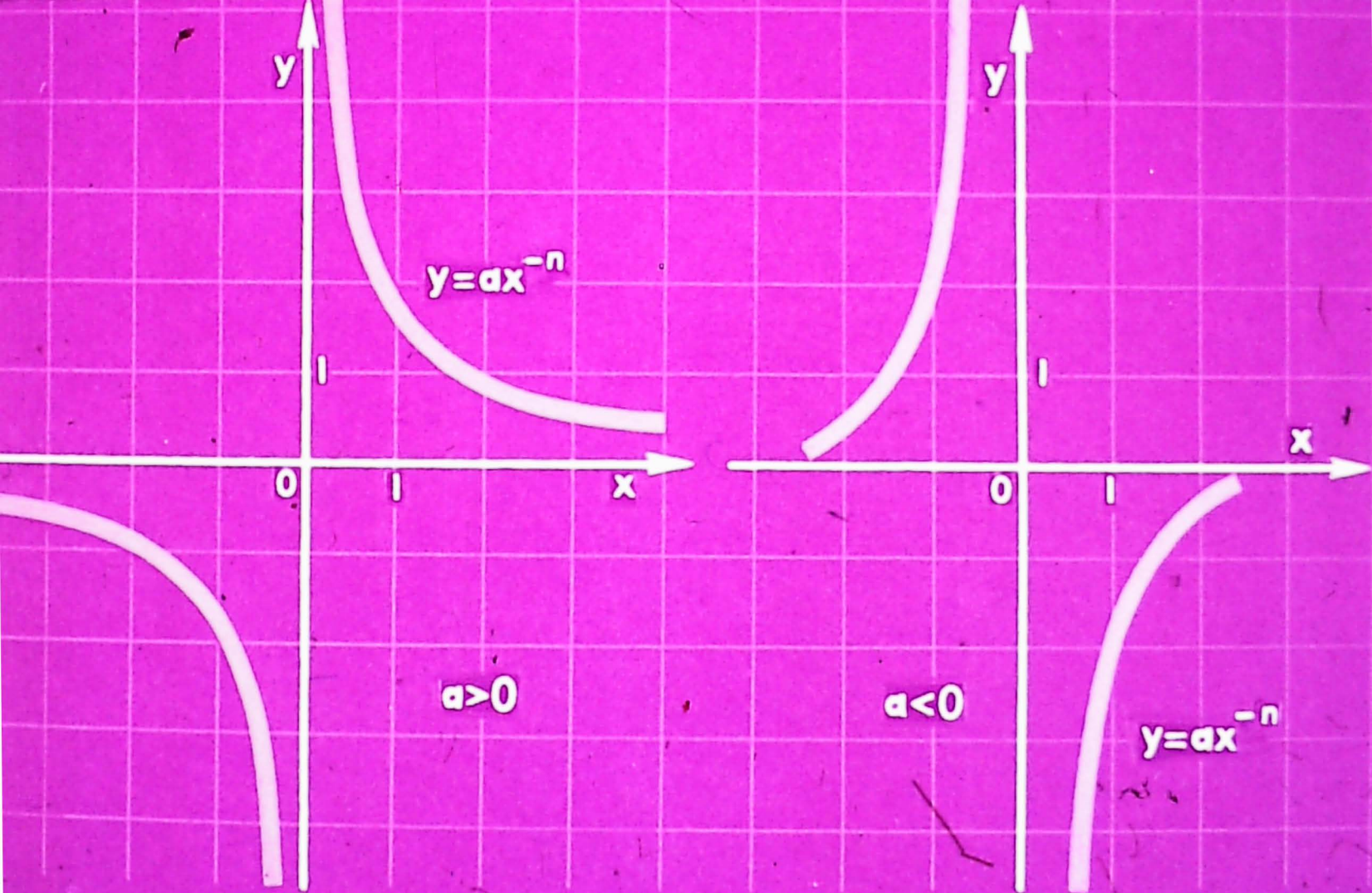
Выясните свойства функции $y = -2x^{-2}$.



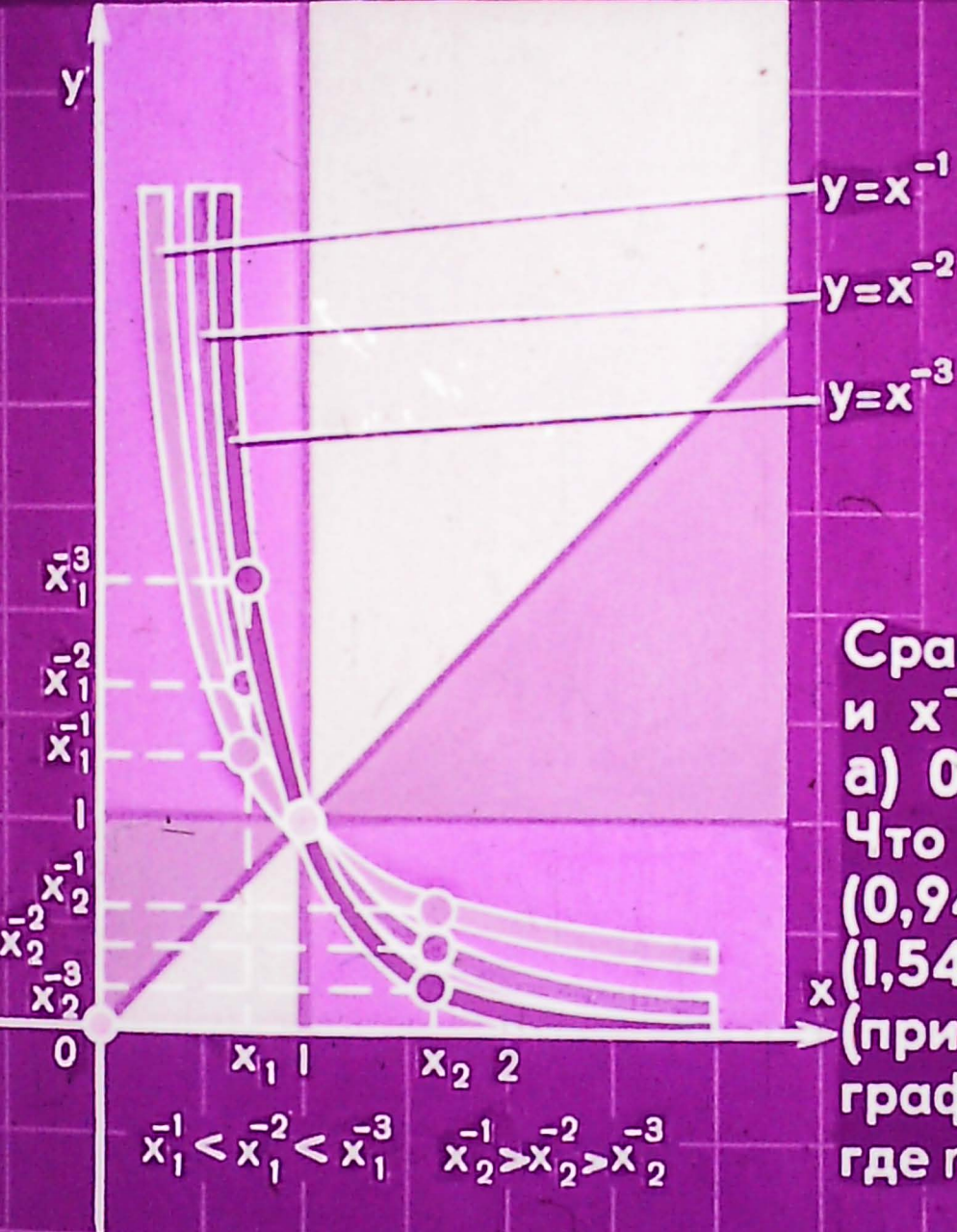
Сравните свойства функций $y = ax^{-n}$ и $y = bx^{-m}$, где $a > 0$, $b < 0$, n и m — чётные натуральные числа, и расположение их графиков.



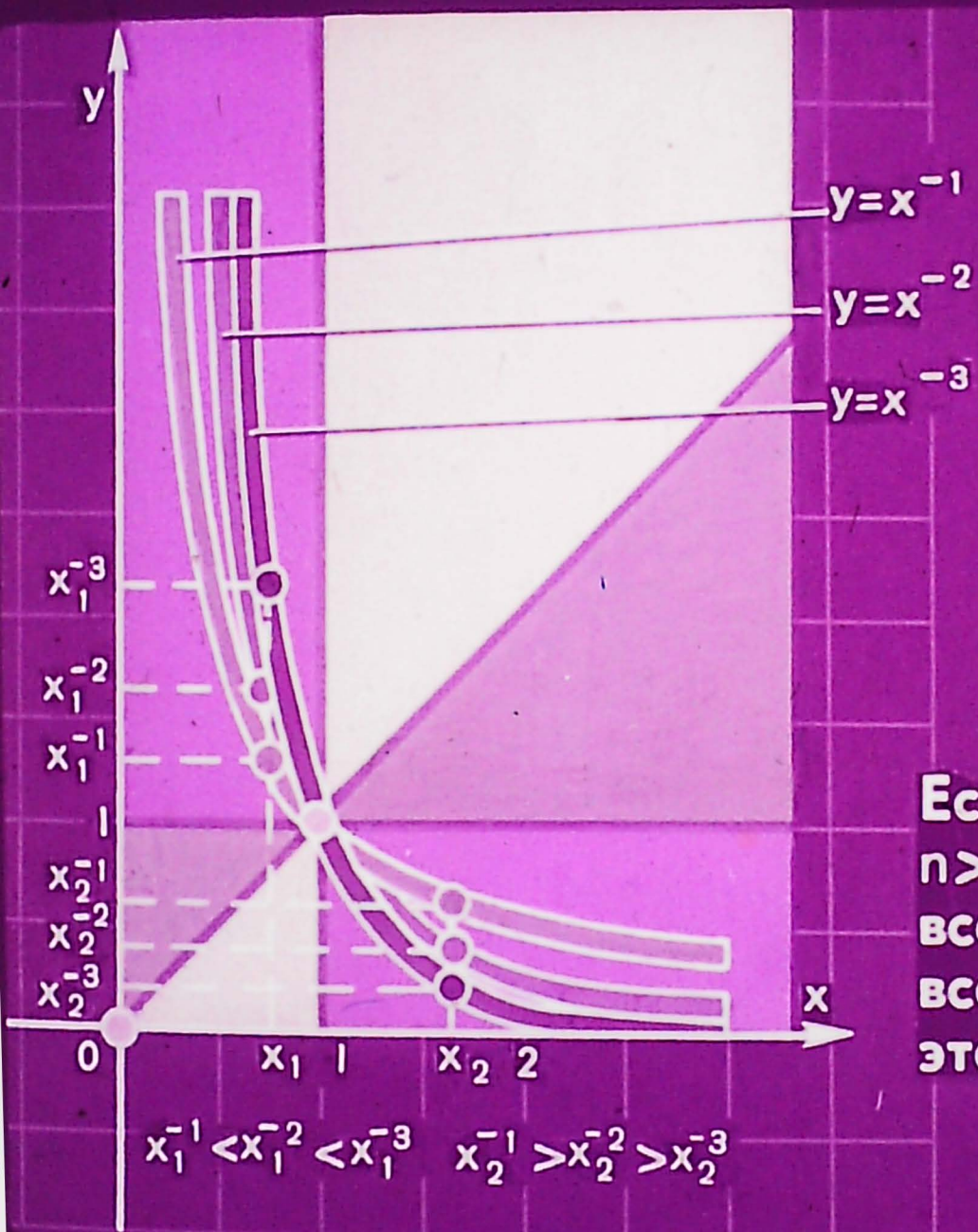
Таким образом, график степенной функции $y = ax^{-n}$, где n — натуральное число, расположен: а) при чётном n в I и II четвертях, если $a > 0$, и в III и IV четвертях, если $a < 0$;



б) при нечётном n в I и III четвертях, если $a > 0$, и во II и IV четвертях, если $a < 0$.



Сравните значения x^{-1} , x^{-2} и x^{-3} , рассмотрев случаи:
 а) $0 \leq x \leq 1$; б) $x = 1$; в) $x > 1$.
 Что больше: $(0,943)^{-1}$ или $(0,943)^{-2}$; $(1,542)^{-2}$ или $(1,542)^{-1}$? В какой области (при $x > 0$) расположен график функции $y = x^{-n}$, где n — натуральное число?

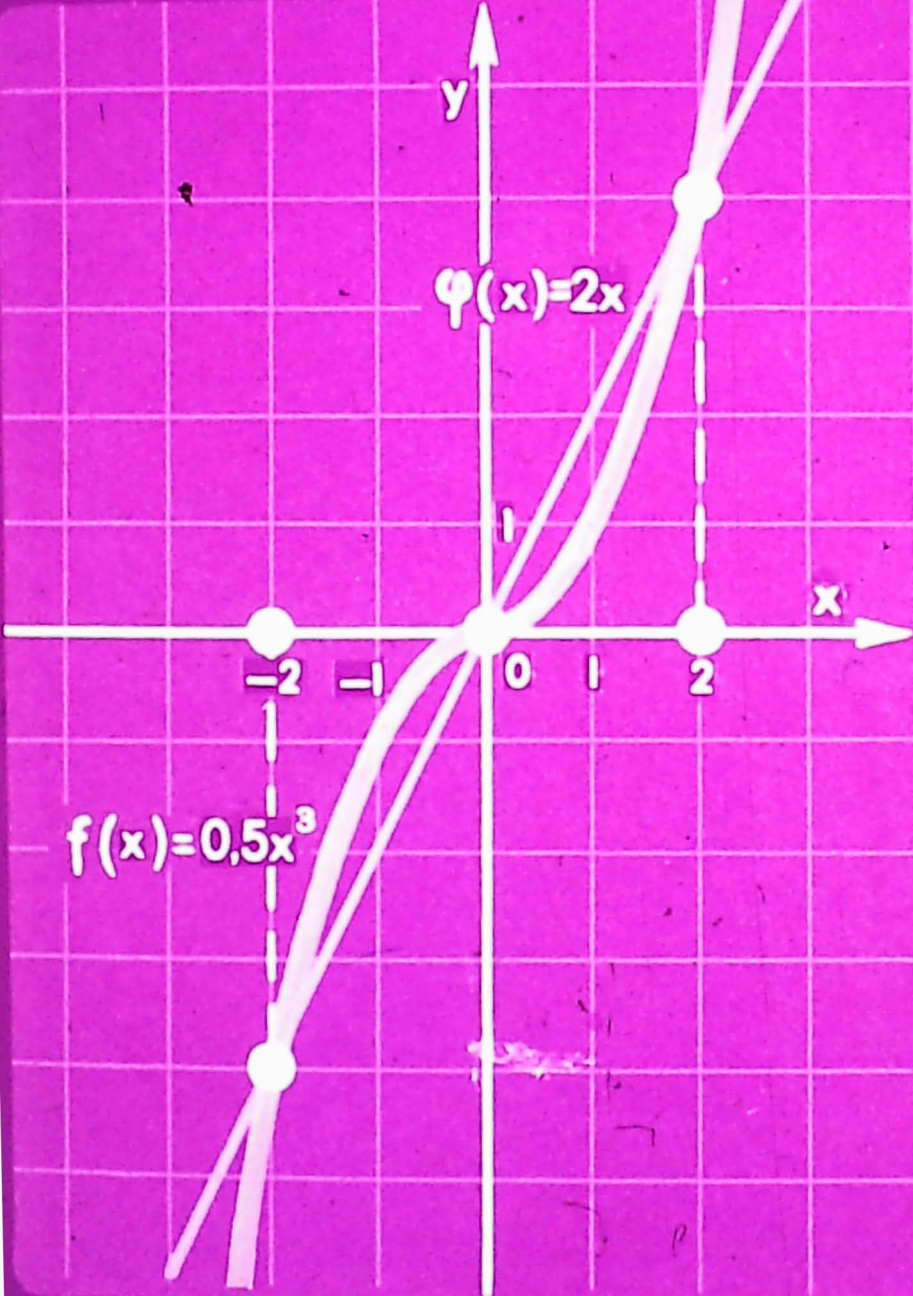


Если $y = x^{-n}$, где целое $n > 0$, то: а) при $0 < x < 1$ всегда $y > x$; б) при $x > 1$ всегда $y < x$. Объясните это.

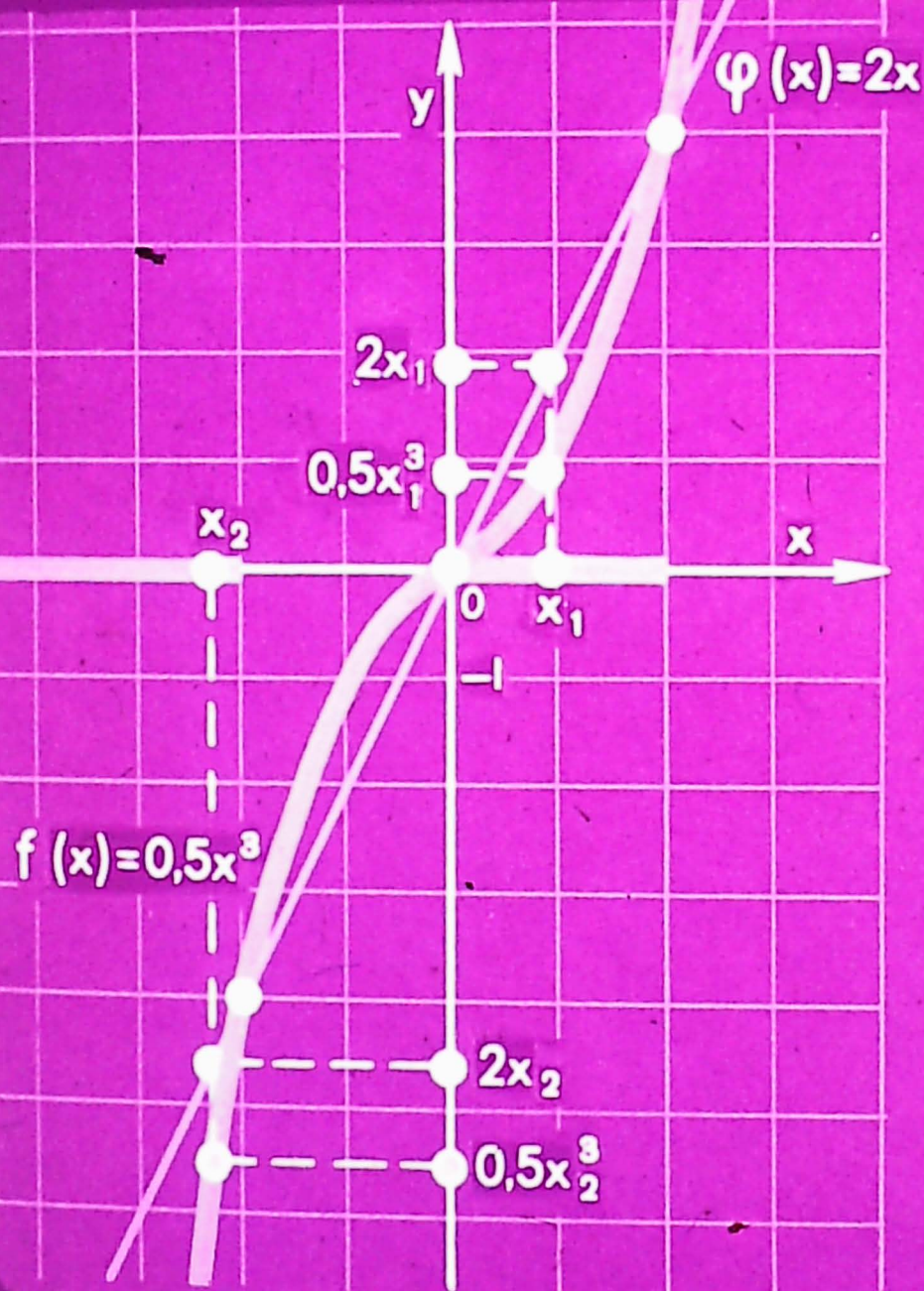


Какой знак имеет коэффициент a и целый показатель n , если известно, что график степенной функции $y = ax^n$ проходит через точку А; В; С; D; Е; К? Рассмотрите возможные случаи.

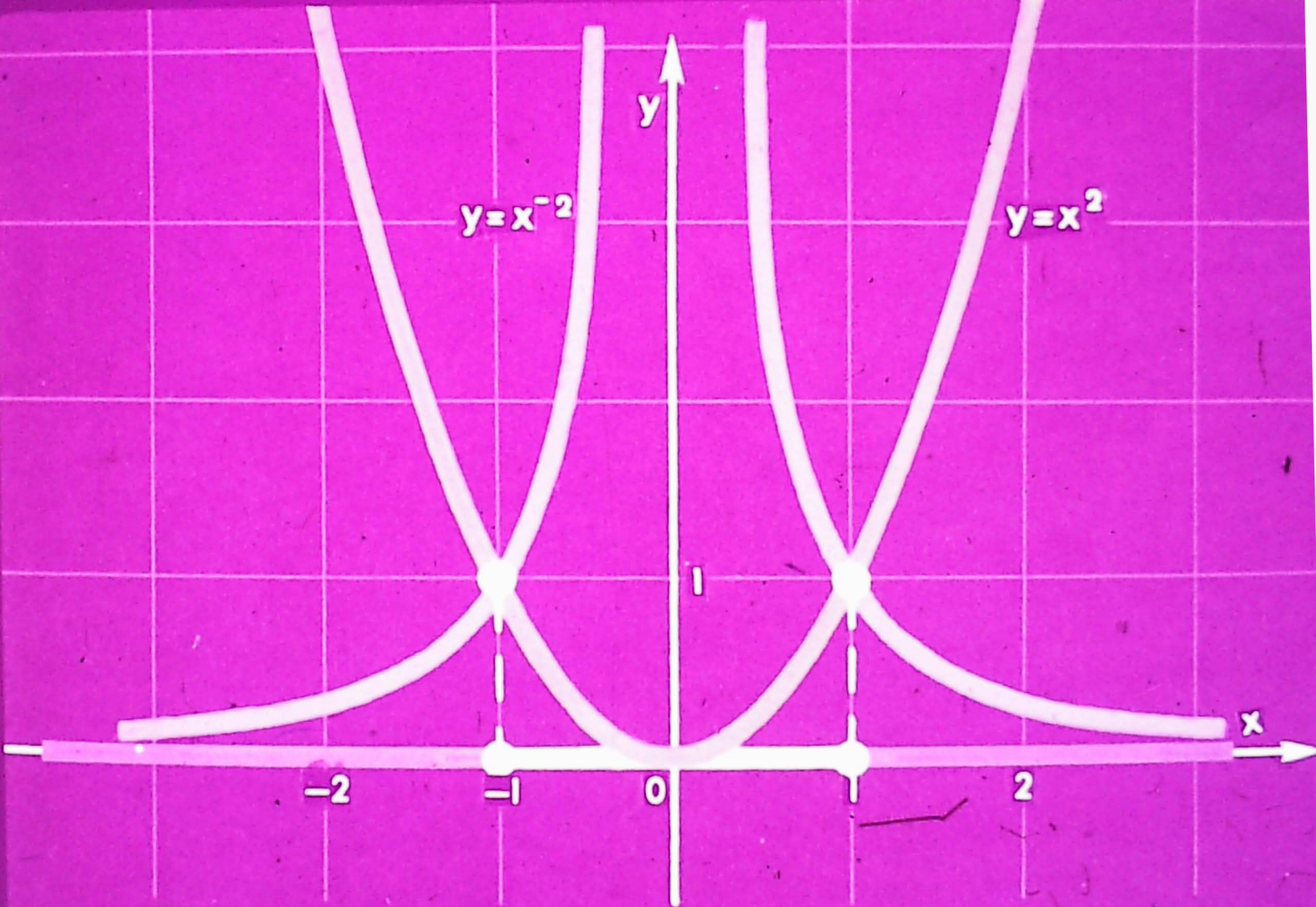
IV. Решение уравнений и неравенств



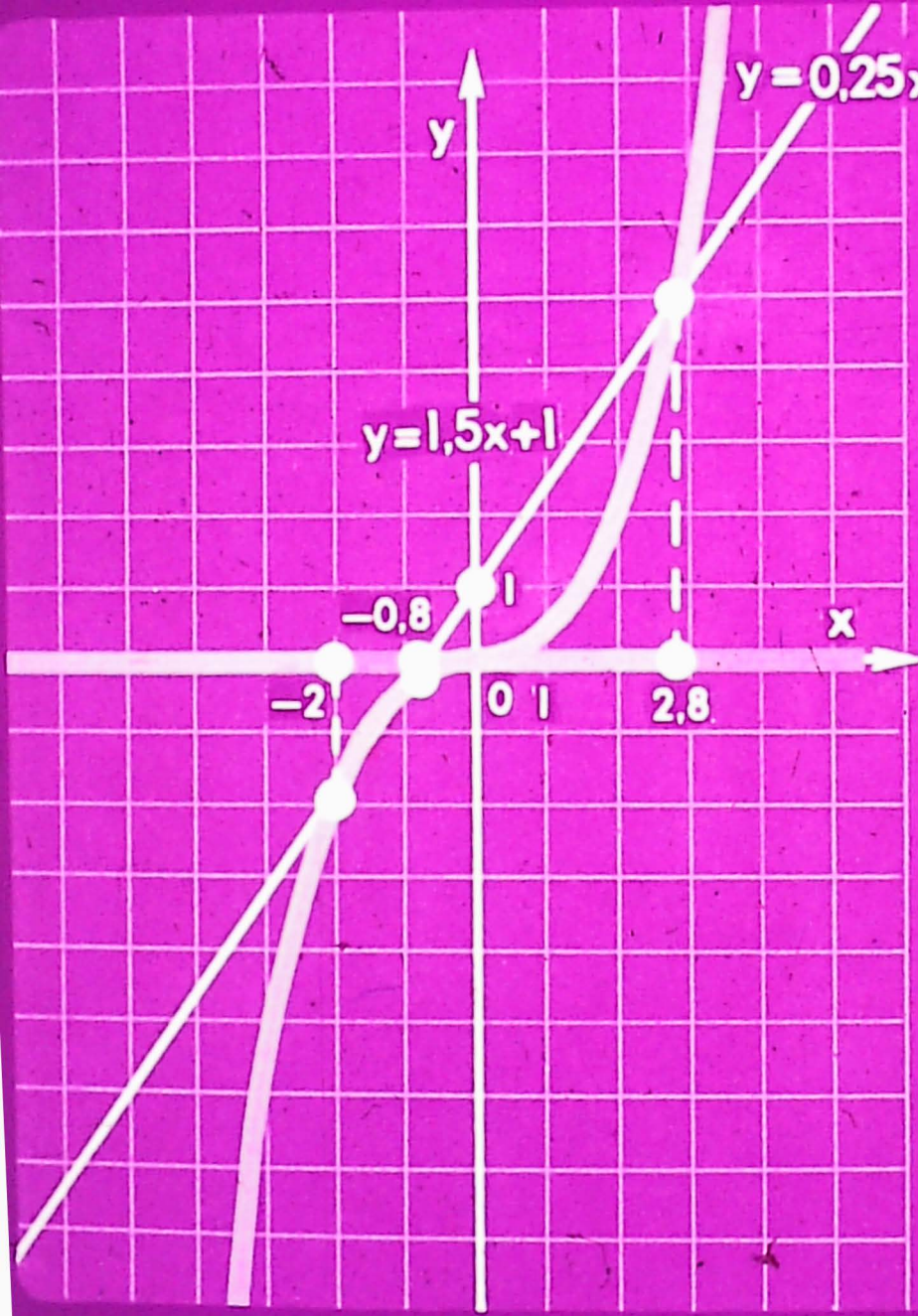
Решим графически уравнение $0,5x^3 = 2x$.
Графики функций $f(x) = 0,5x^3$ и $\varphi(x) = 2x$ имеют три общие точки. Абсциссы этих точек (числа $-2; 0; 2$) служат решением данного уравнения.



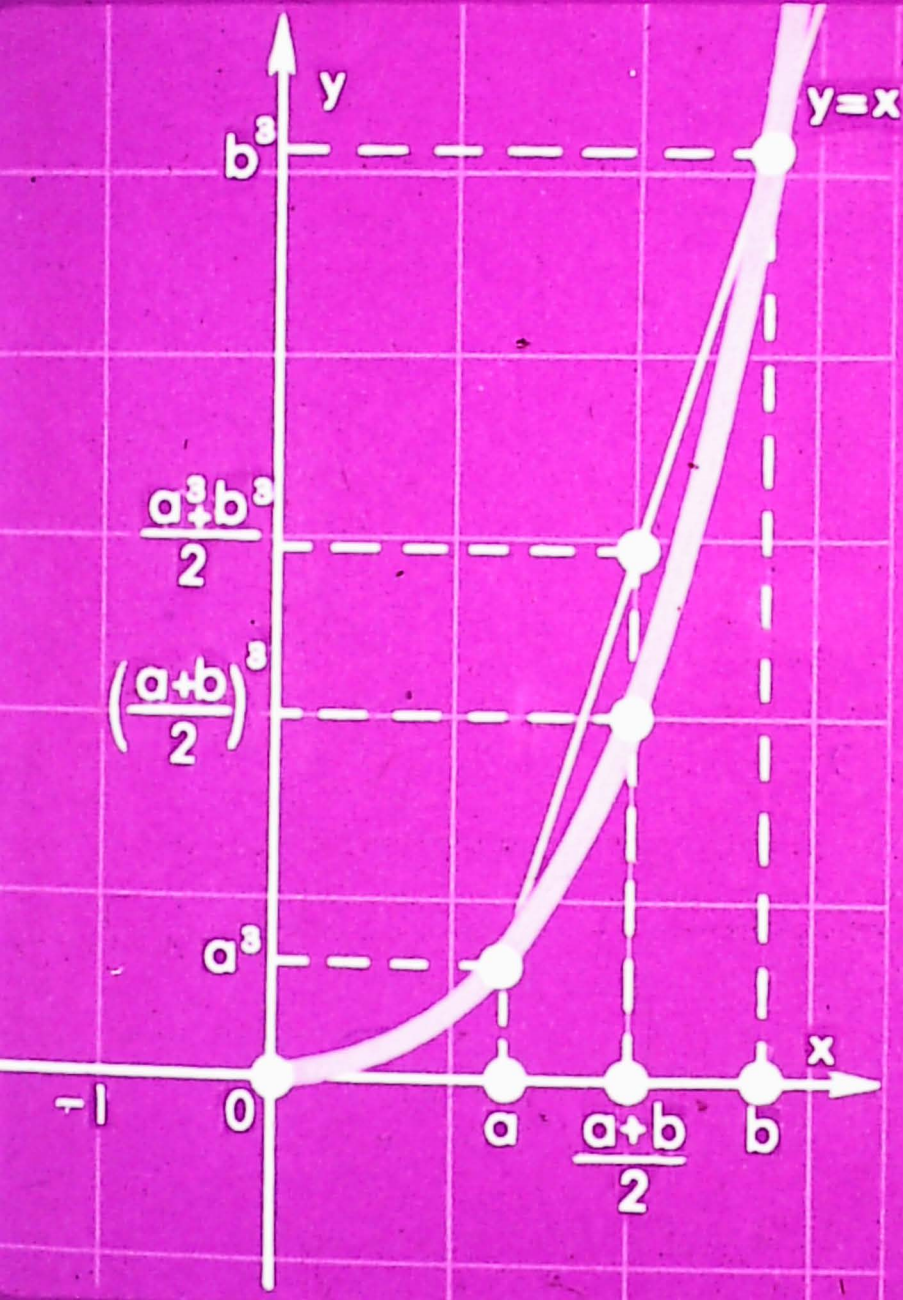
Решим неравенство $0,5x^3 < 2x$. Значение $f(x)$ меньше соответствующих значений $\varphi(x)$ при тех значениях x , где график $f(x)$ ниже графика $\varphi(x)$. Множество решений данного неравенства состоит из двух промежутков: $x < -2$ и $0 < x < 2$.



Объясните графическое решение уравнения $x^2 - x^{-2} = 0$ и неравенств $x^2 - x^{-2} < 0$; $x^2 - x^{-2} > 0$.



Объясните по графику
решение уравнения
 $0,25x^3 - 1,5x - 1 = 0$ и ре-
шение неравенств
 $0,25x^3 > 1,5x + 1$;
 $0,25x^3 - 1,5x - 1 < 0$.



Докажите неравенство $\frac{a^3+b^3}{2} > (\frac{a+b}{2})^3$, если $a \neq b$; $a > 0$ и $b > 0$, и объясните его геометрический смысл.

Конец

Автор Ю. Н. Макарычев

Чертежи и оформление Г. Г. Рожковского

Редактор Л. Б. Книжникова

Студия «Диафильм», 1967 г.

Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30

Д-270-67