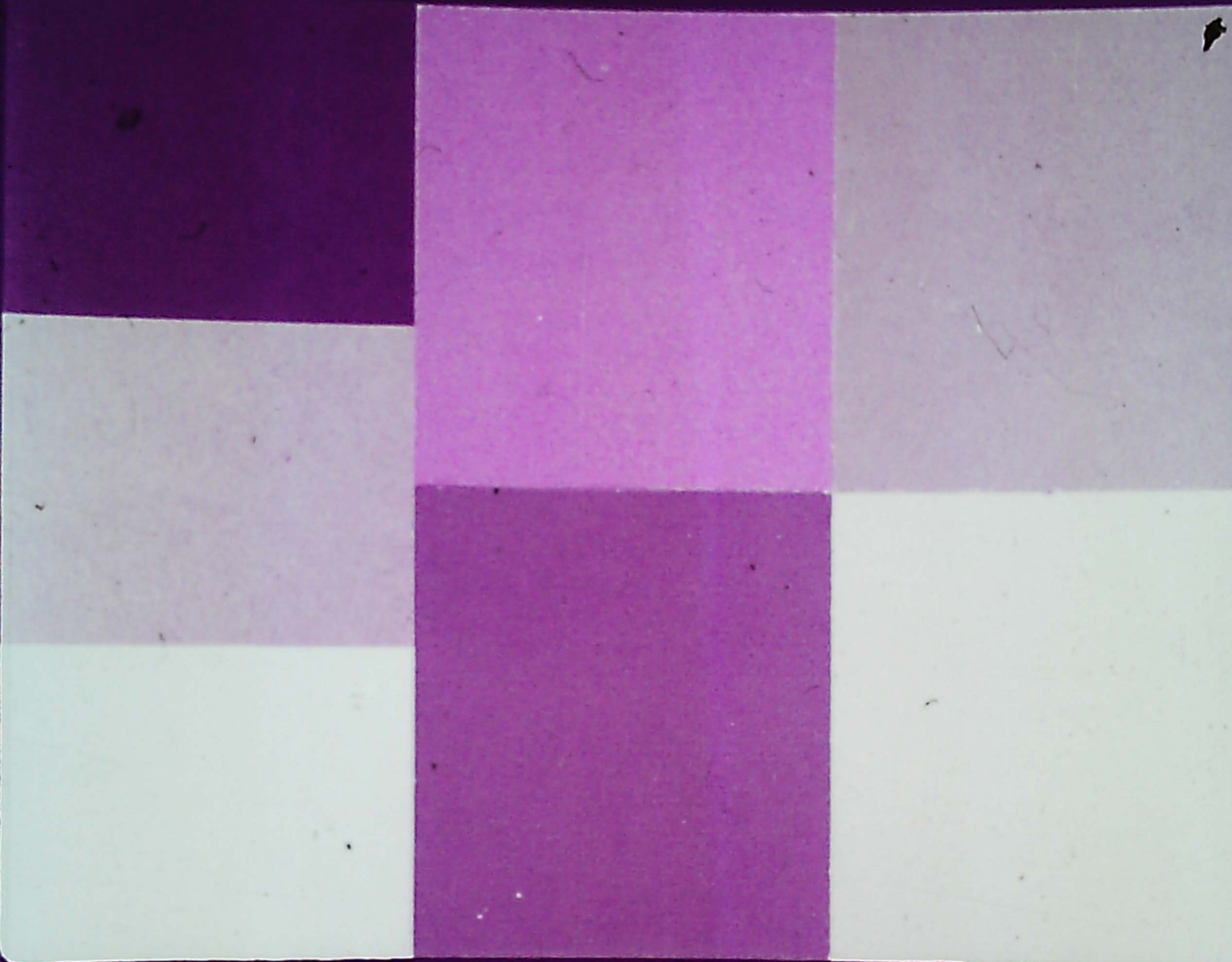


III 1975

3 5 6

ТУ 19—32—73

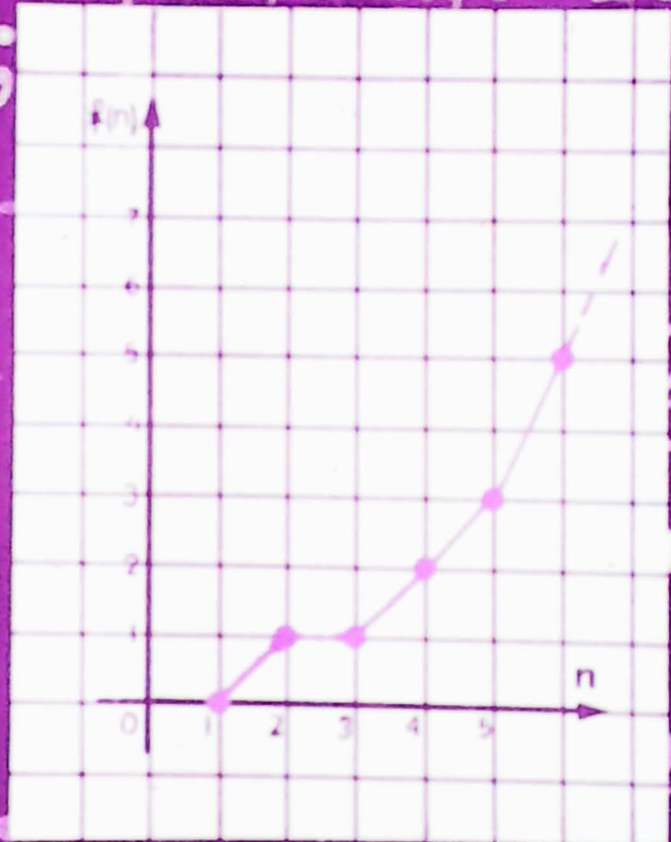
1

1

ДИАФИЛЬМ

07—3—190

По заказу
Министерства
просвещения
РСФСР



ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Диафильм по математике для средней школы

Числовая последовательность

При делении натурального числа n на 4 образуется остаток r, равный 0; 1; 2 или 3. Каждому натуральному числу n соответствует один и только один остаток r:

1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	2	3	0	1	2	3	0	...

Последовательность 1; 2; 3; 0; 1; 2; ...; $f(n)$... остатков есть функция натурального аргумента. Символом $f(n)$ обозначен общий член последовательности. Правило f отыскания остатка r позволяет найти любой член последовательности: если $n=6$, то $f(n)=2$, если $n=51$, то $f(n)=3$.

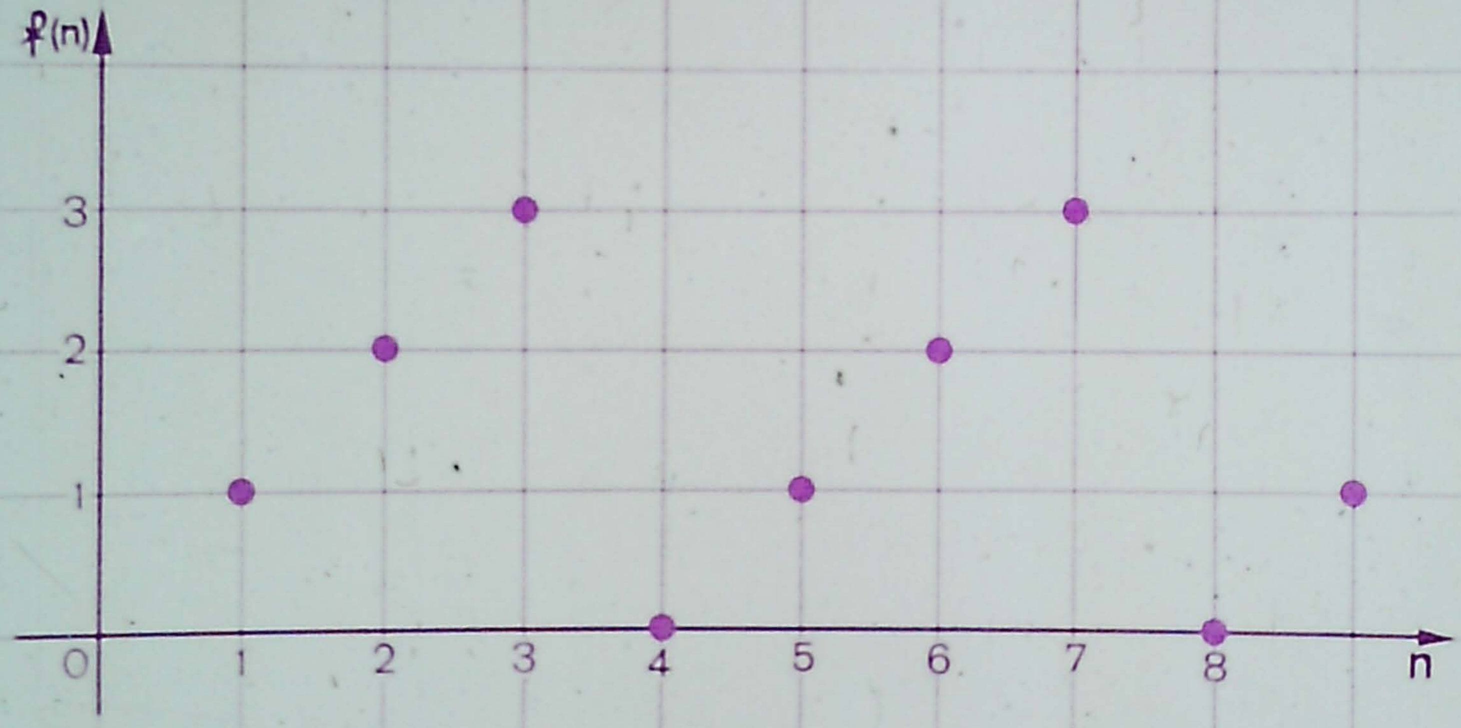
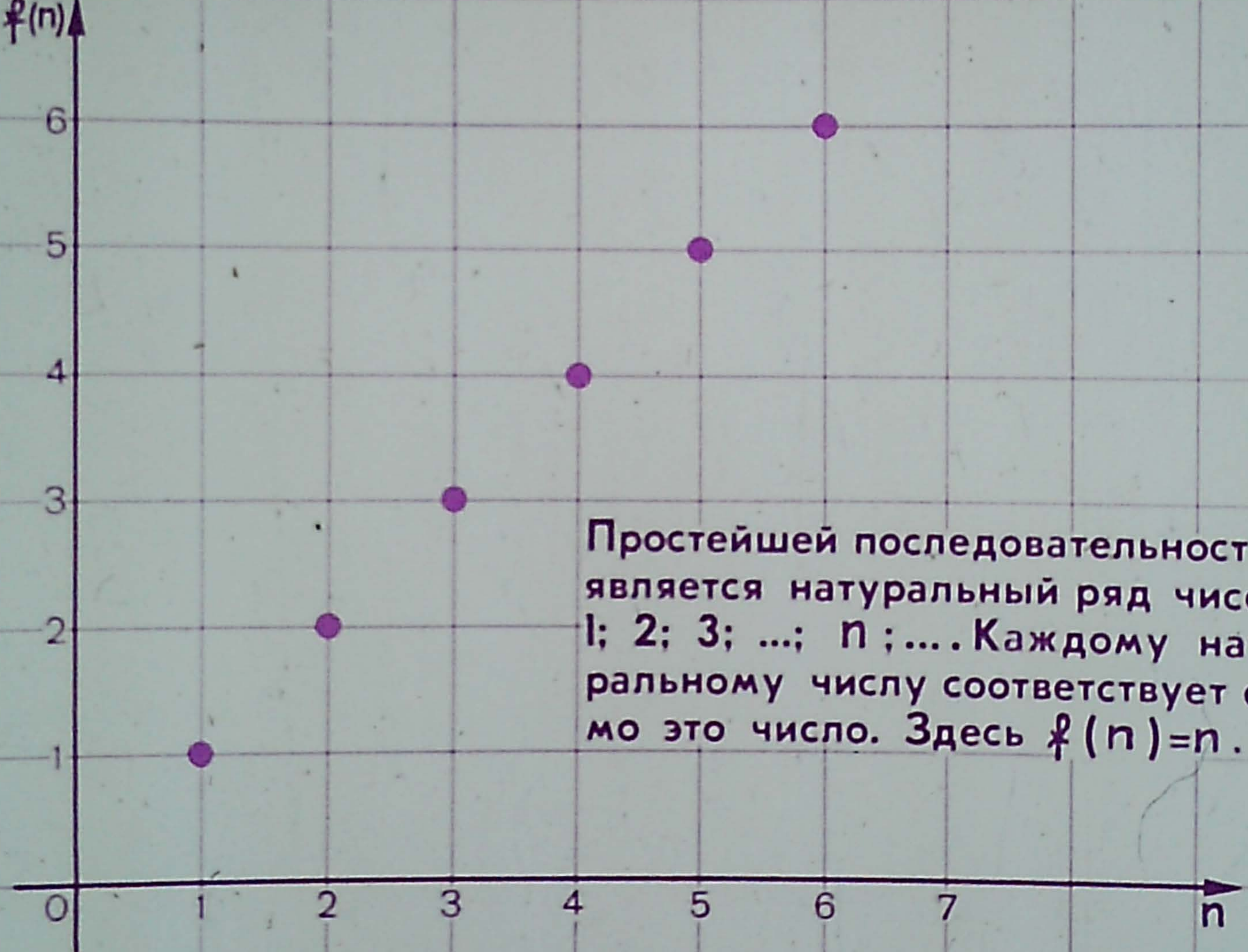
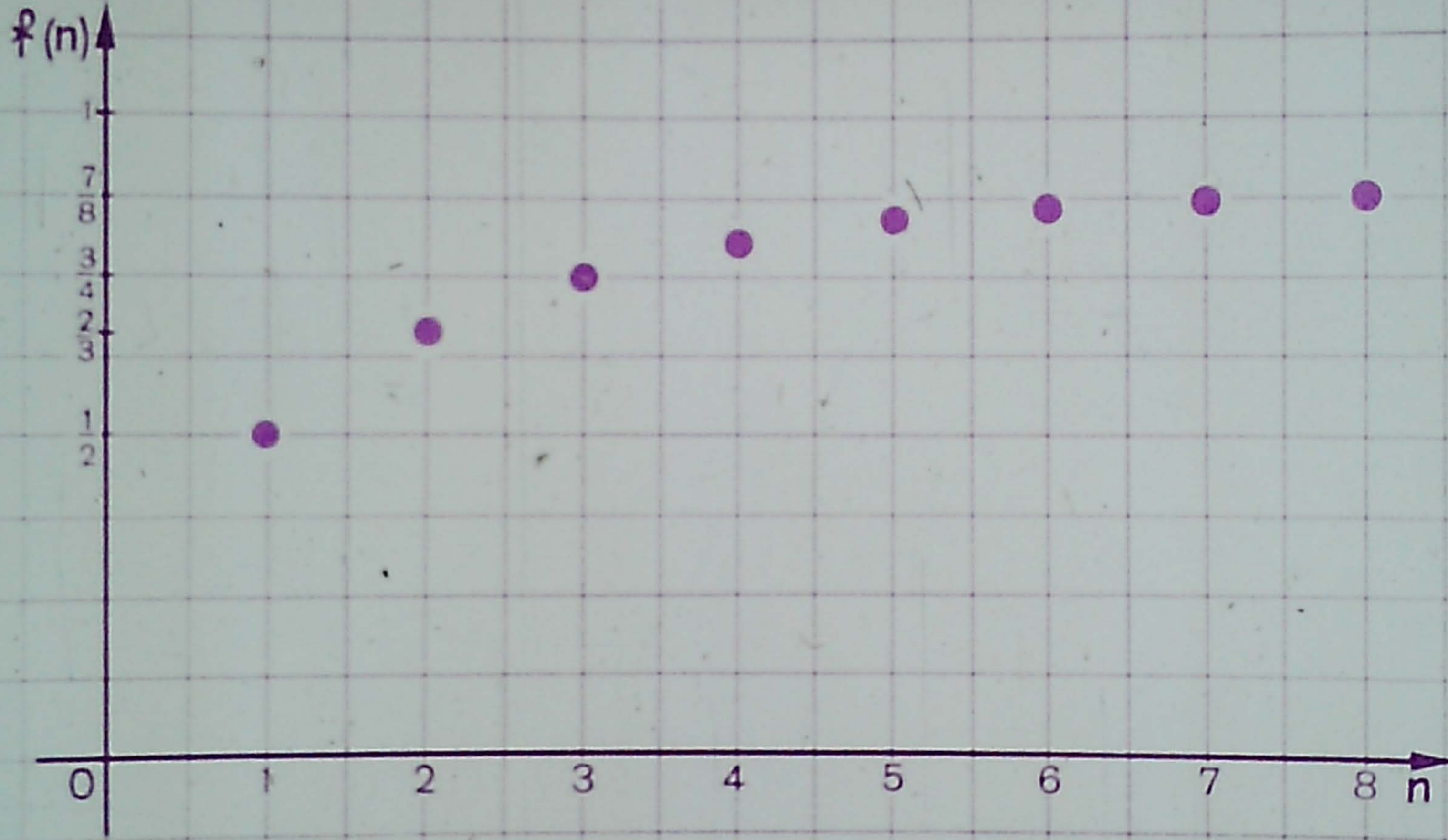


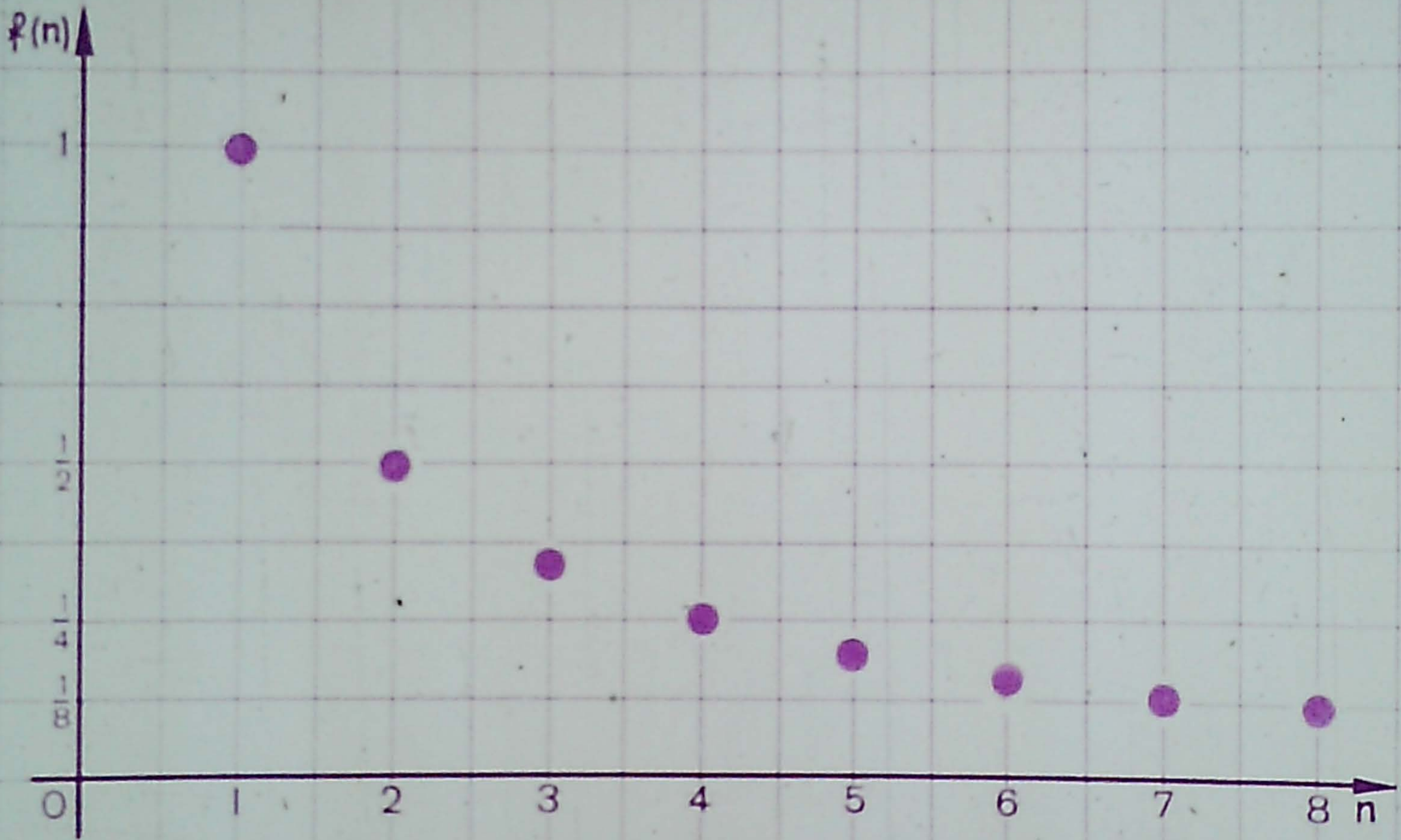
График последовательности состоит из отдельных точек с целочисленными (натуральными) абсциссами.



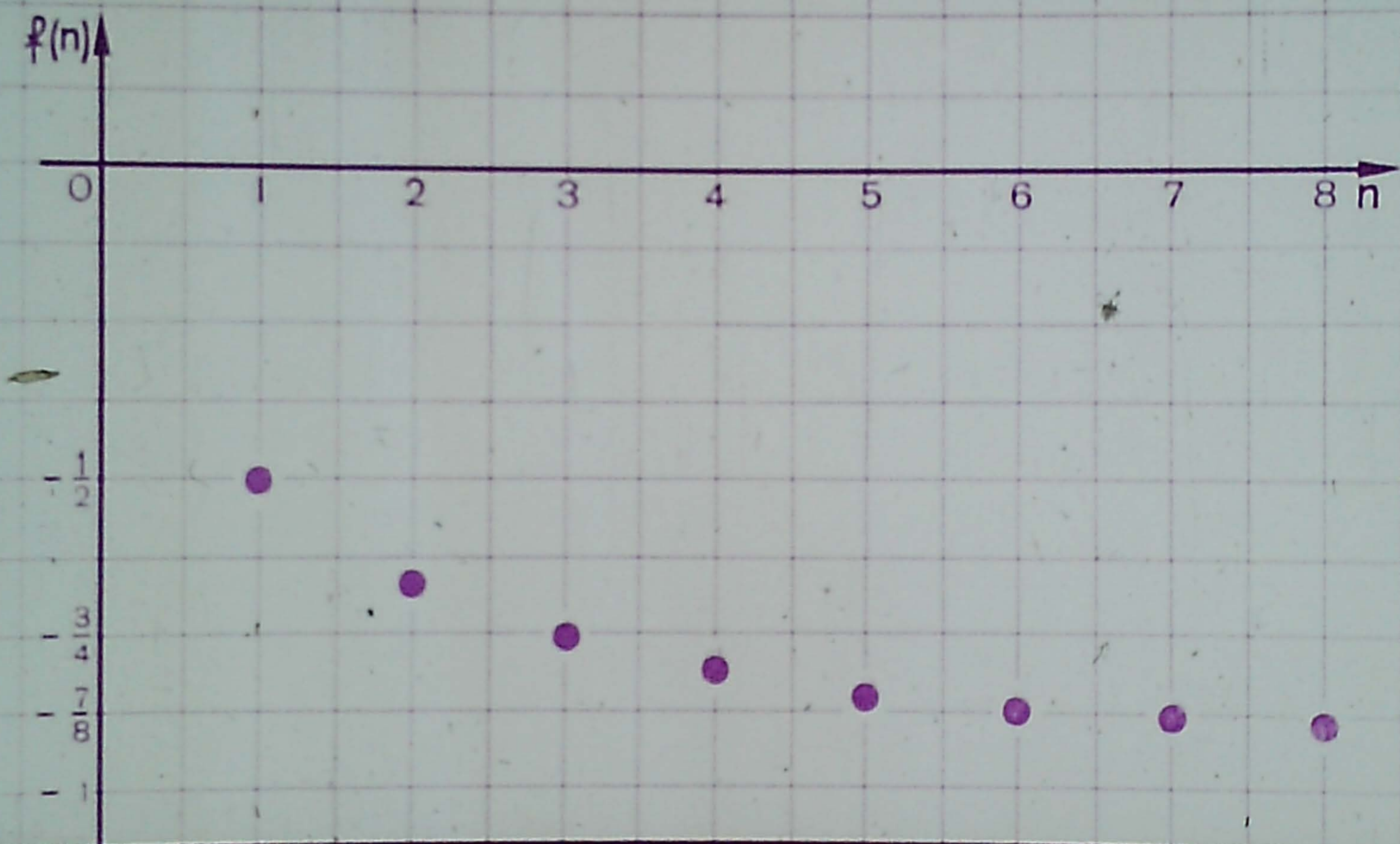
Простейшей последовательностью является натуральный ряд чисел: 1; 2; 3; ...; n ; ... . Каждому натуральному числу соответствует само это число. Здесь $f(n)=n$.



Последовательность, у которой для любого n $f(n+1) - f(n) > 0$, называется возрастающей. Почему последовательность, общий член которой $f(n) = \frac{n}{n+1}$, возрастает?



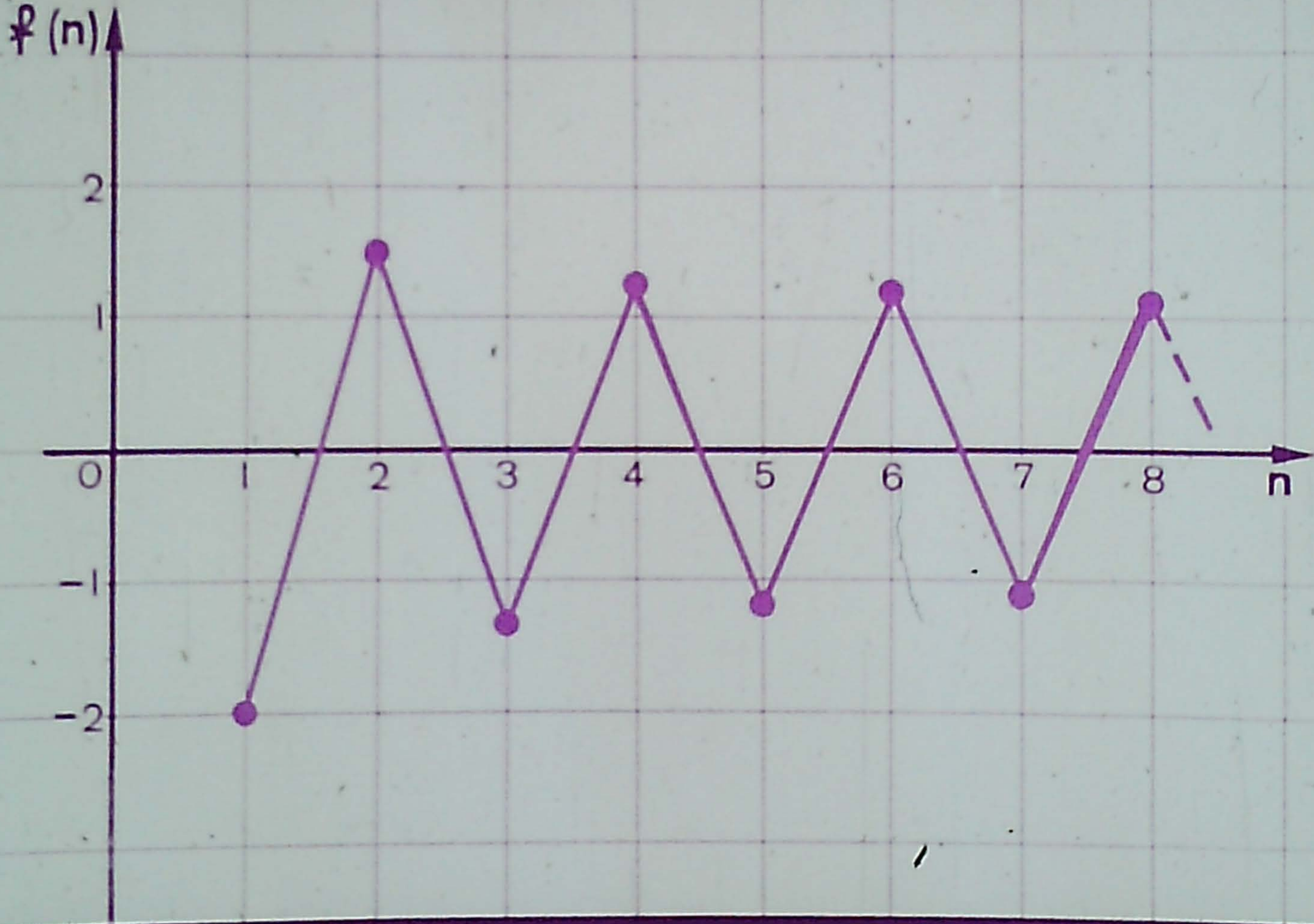
Последовательность, у которой для любого n $f(n+1)-f(n)<0$, называется убывающей. Почему последовательность 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ...; $\frac{1}{n}$; ... убывающая?



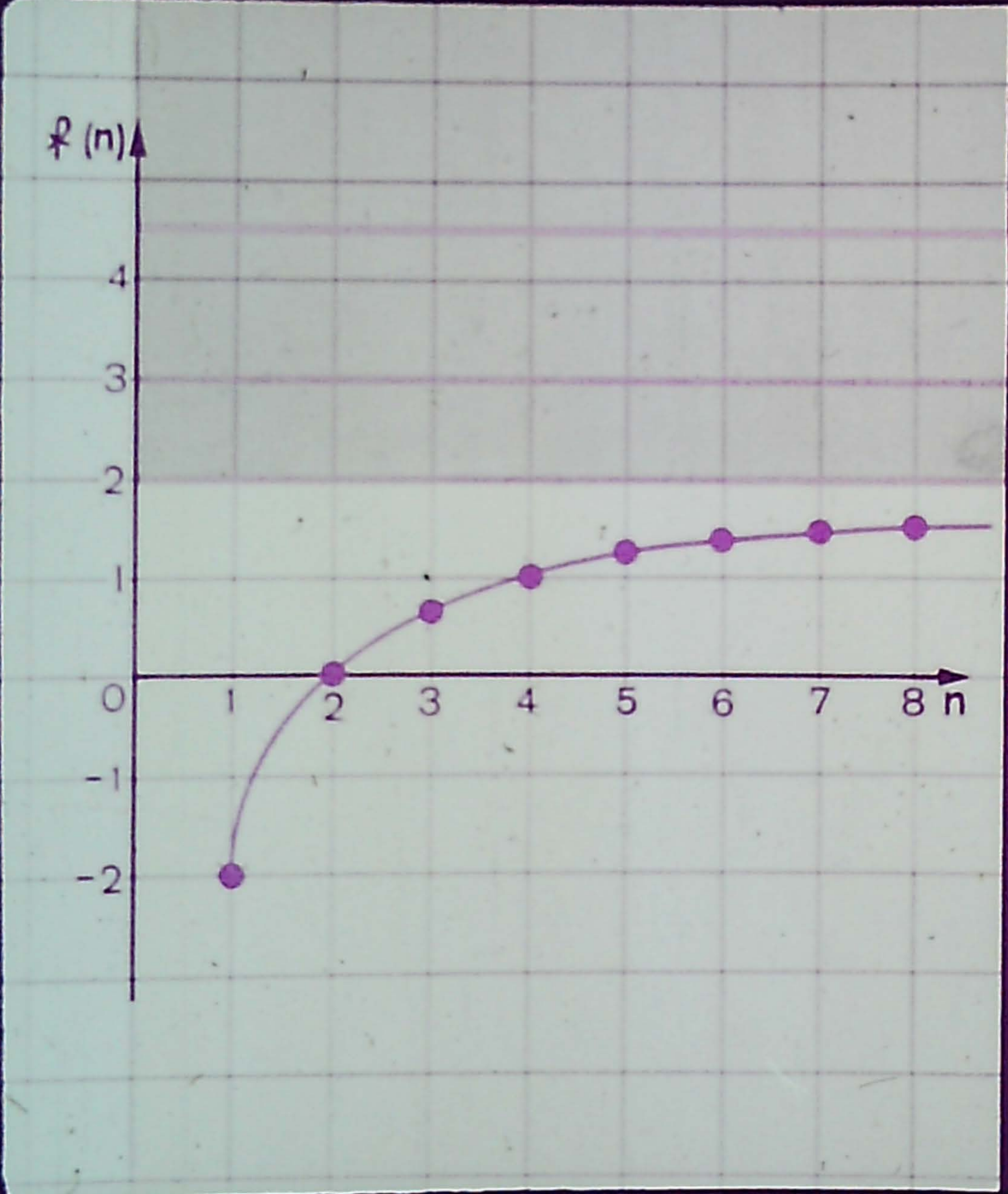
Возрастающая или убывающая последовательности называются монотонными. Почему является монотонной последовательность:

$-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \dots; -\frac{n}{n+1}; \dots$?

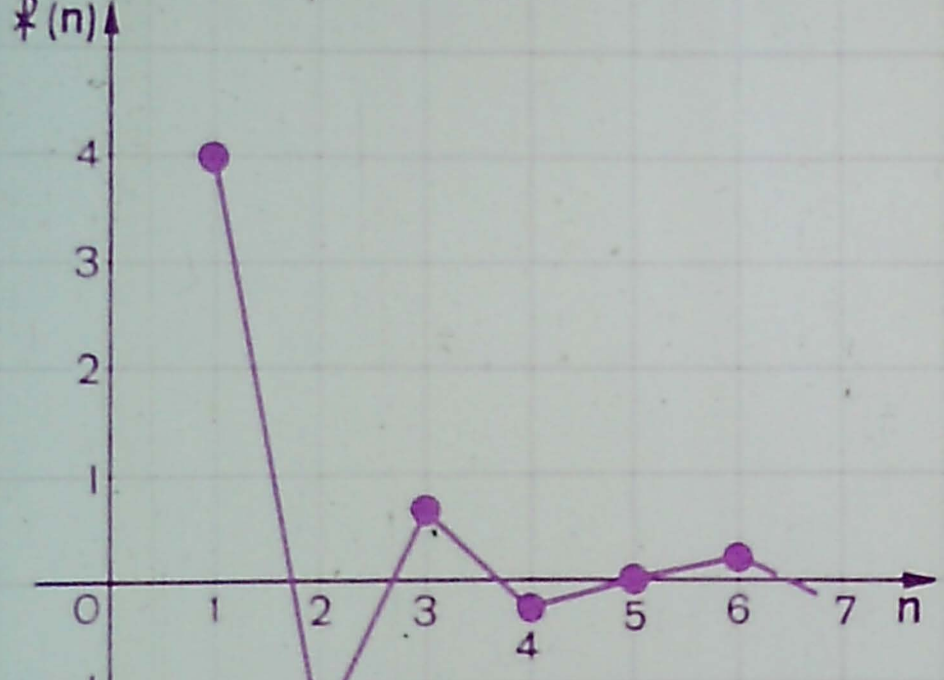
8



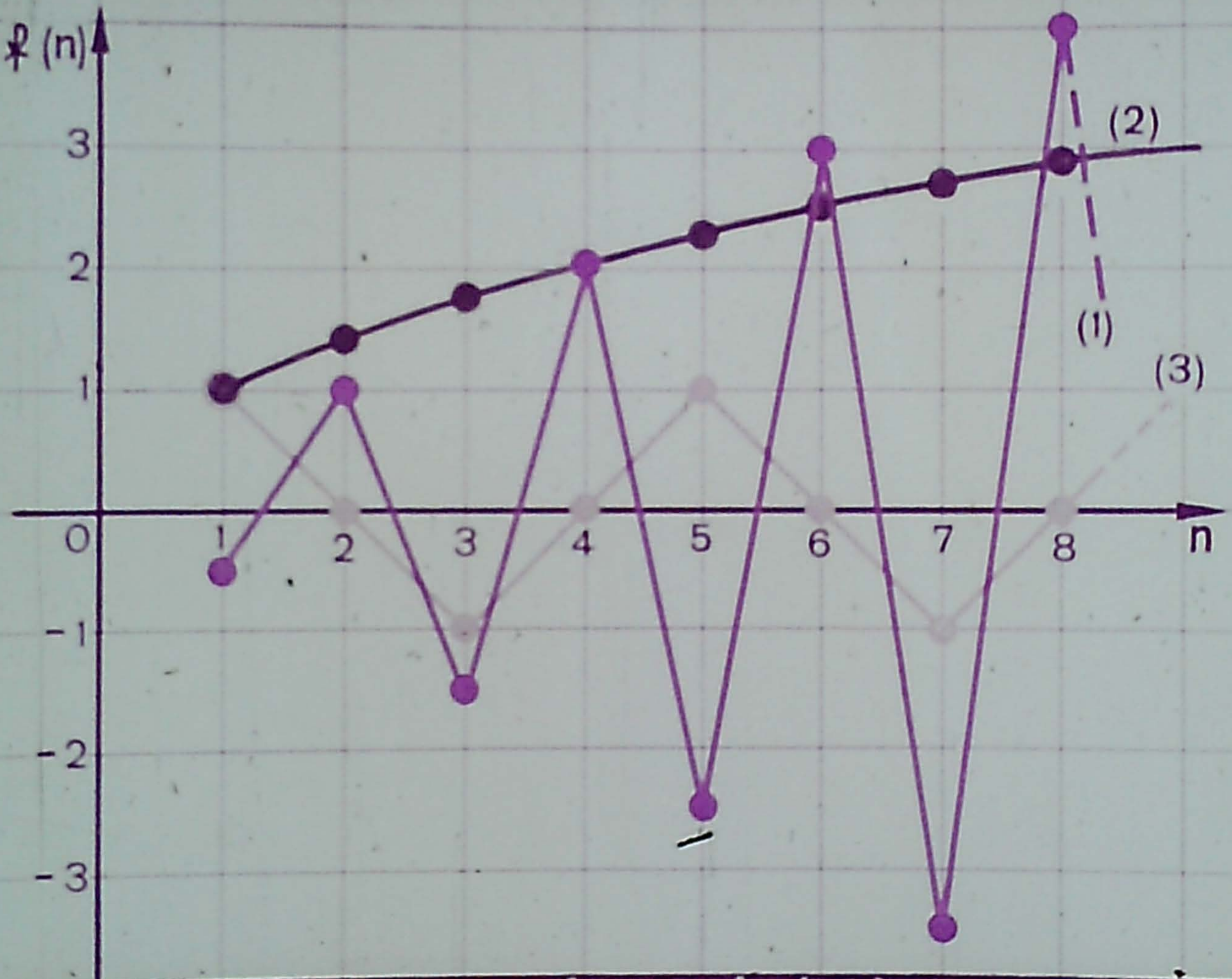
Почему последовательность, общий член которой $f(n)=(-1)^n\frac{n+1}{n}$, не является монотонной?



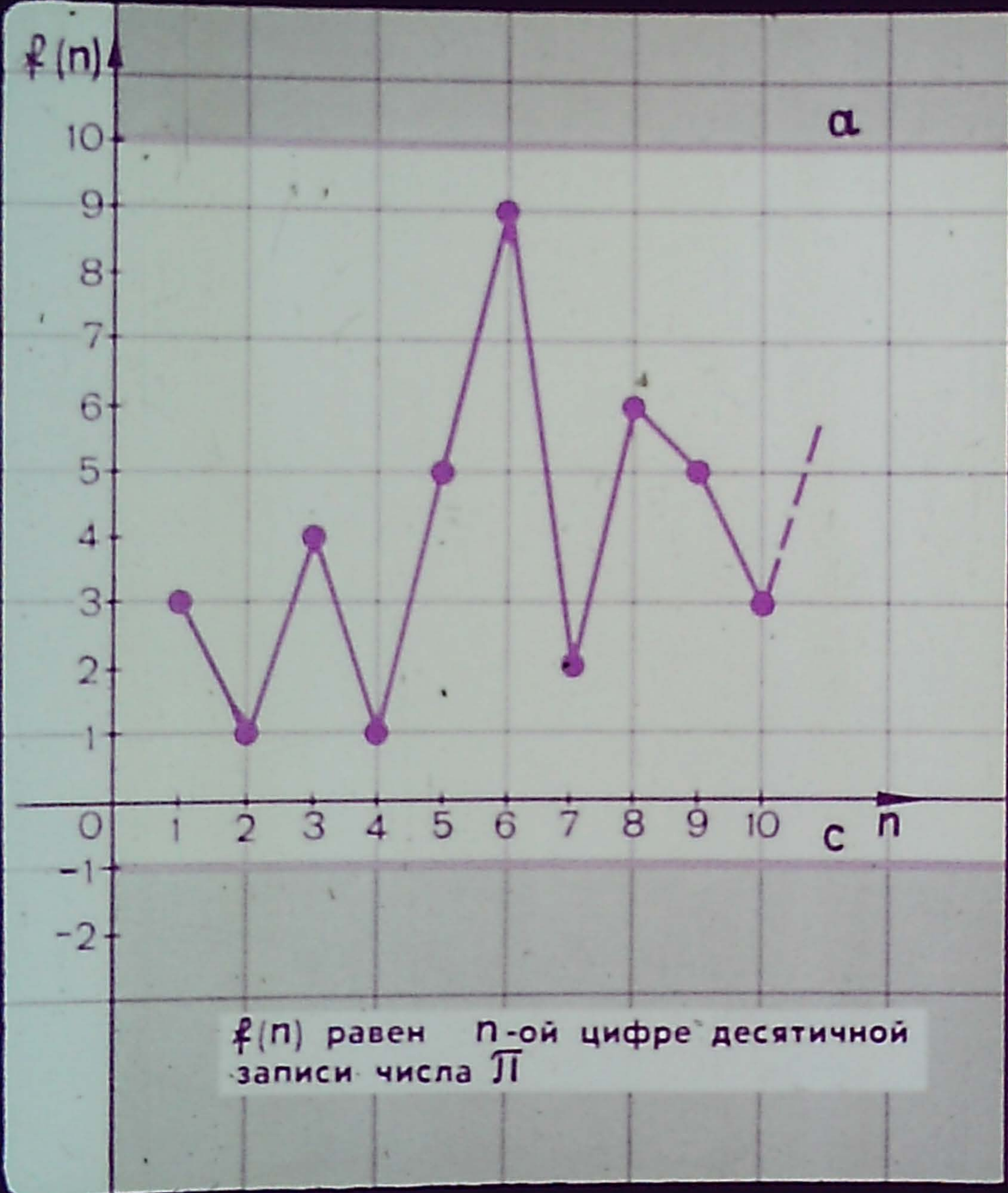
Последовательность, у которой при любом n $f(n)<M$, где M—некоторое число, называется ограниченной сверху. Последовательность с общим членом $f(n) = \frac{2n-4}{n}$ ограничена сверху. Укажите какую-нибудь её верхнюю границу.



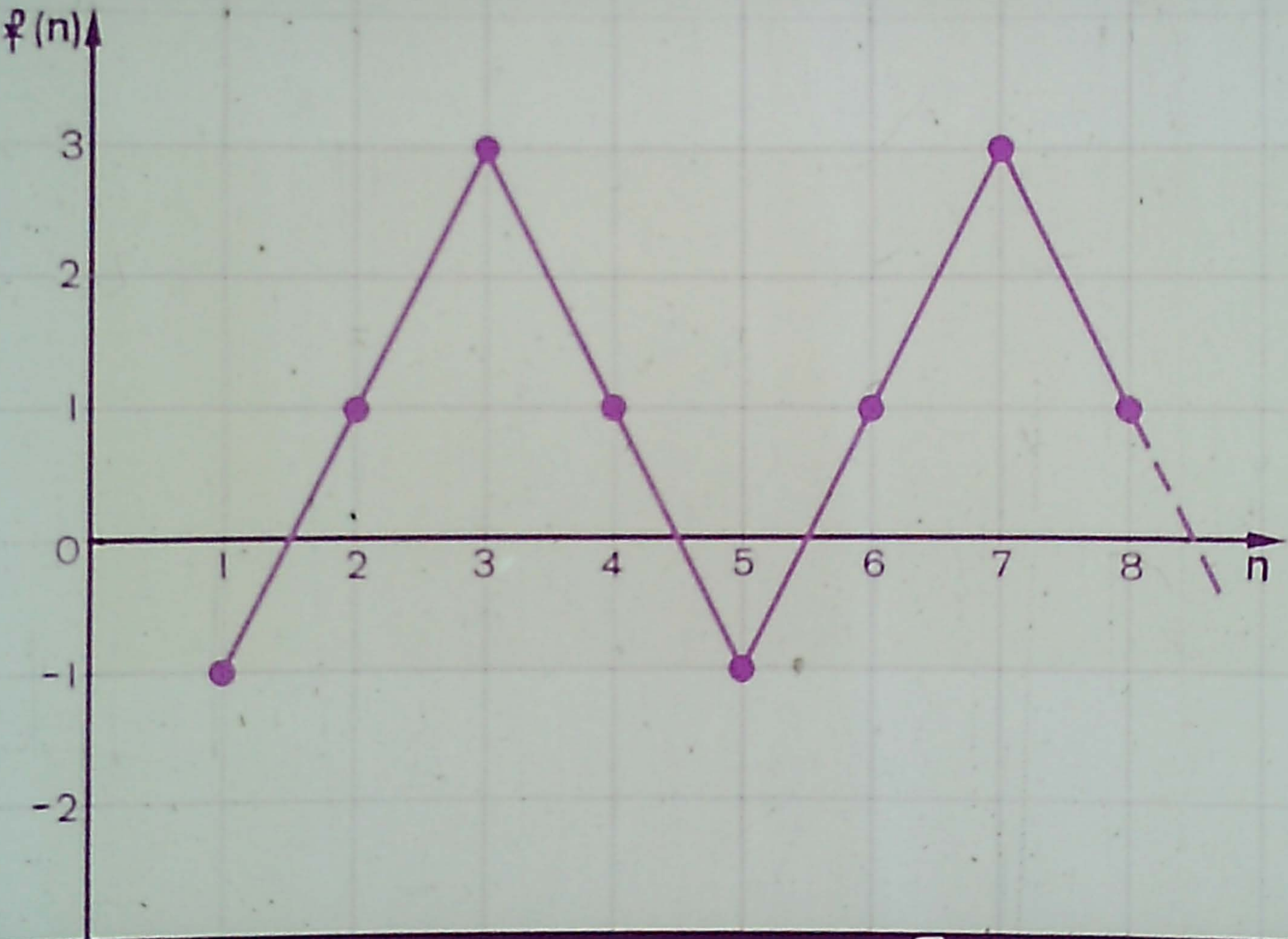
Последовательность, у которой при любом n $f(n) > m$, где m — некоторое число, называется ограниченной снизу. Последовательность $\left\{(-1)^n \frac{n-5}{n}\right\}$ (в фигурных скобках указан её общий член) ограничена снизу. Укажите какую-нибудь её нижнюю границу.



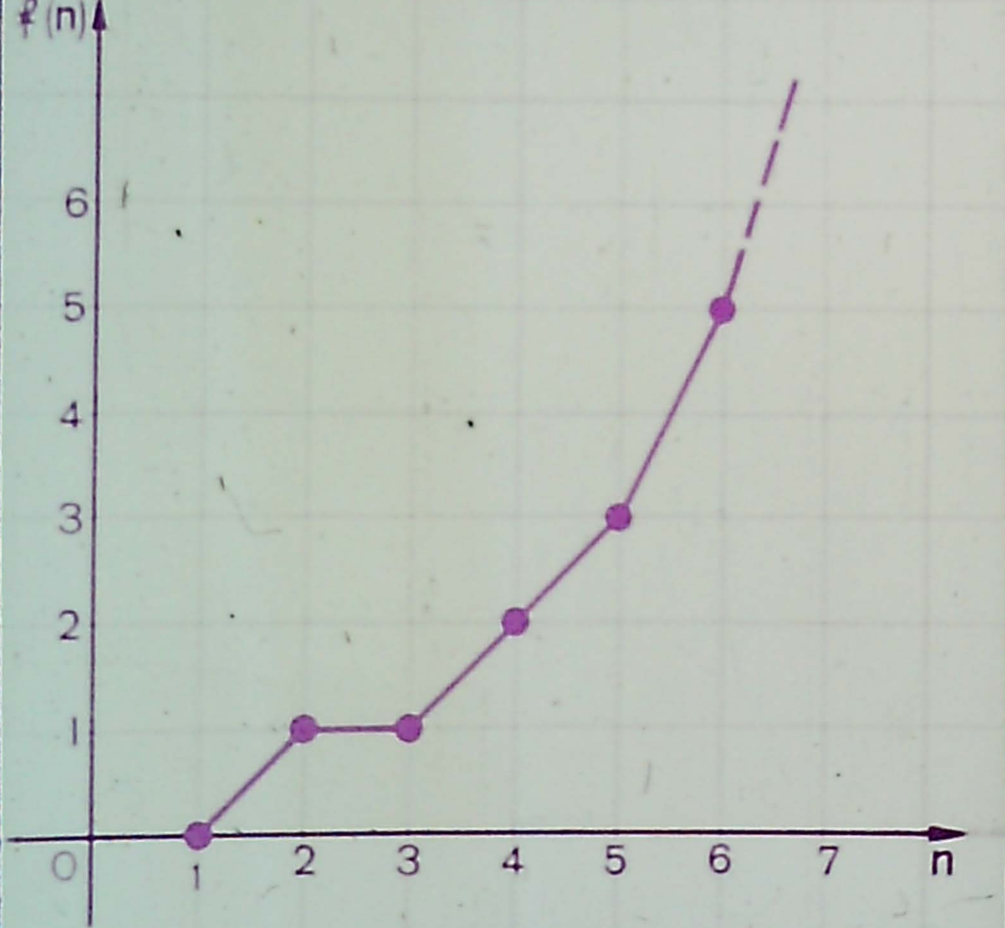
Даны последовательности: $\left\{(-1)^n \frac{n}{2}\right\}$; $\left\{\sqrt{n}\right\}$; $\left\{\sin \frac{\pi}{2} n\right\}$. Какая из них ограничена сверху; ограничена снизу; ограничена и сверху и снизу; не ограничена ни сверху, ни снизу?



Последовательность, ограниченная и сверху и снизу, называется ограниченной (просто). Её график не выходит за пределы полосы (части плоскости, ограниченной прямыми a и c).

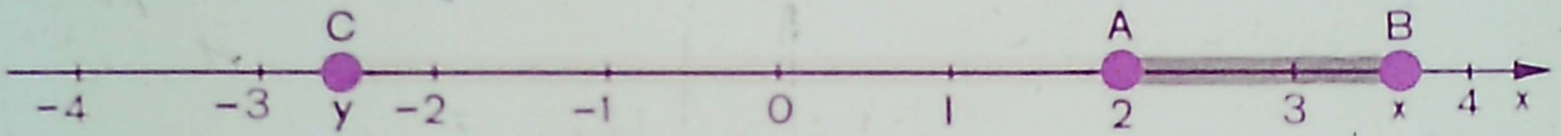


Последовательность $-1;\ 1;\ 3;\ 1;\ \ldots;\ 1+2\cos\frac{\pi}{2}(n+1);\ \ldots$ ограниченная. Укажите её верхнюю и нижнюю границы.

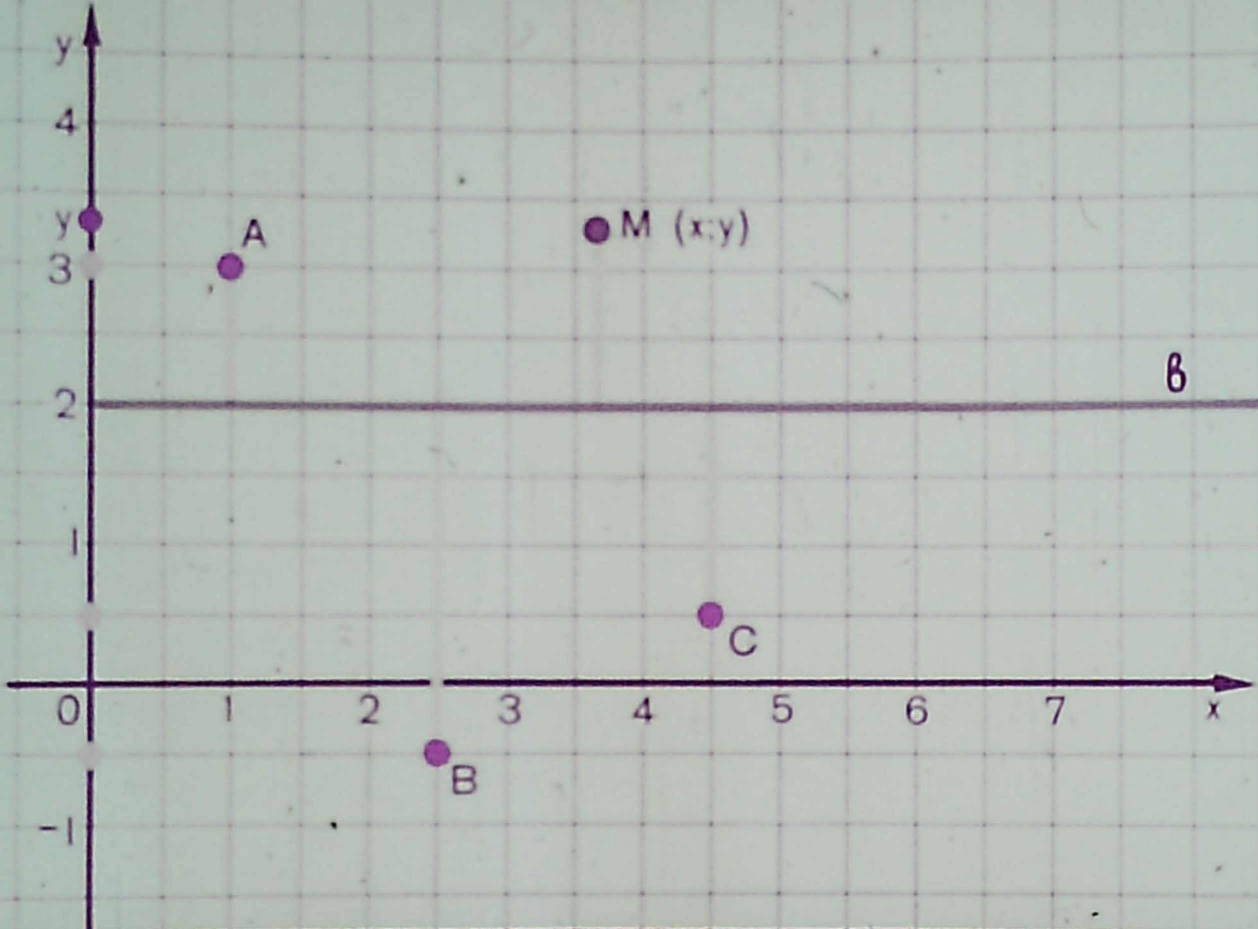


Последовательность $0;\ 1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ \ldots;\ f(n);\ldots$ задана рекурентной формулой $f(n+2)=f(n)+f(n+1)$, причём $f(1)=0$; $f(2)=1$. Почему эта последовательность не является ограниченной?

Неравенство $|f(n) - b| < \varepsilon$ и его геометрический смысл

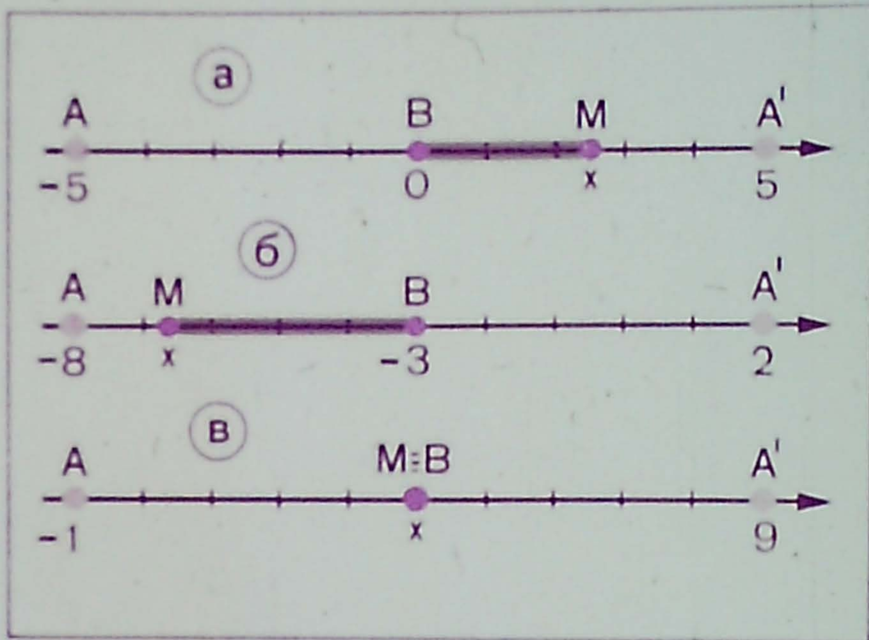


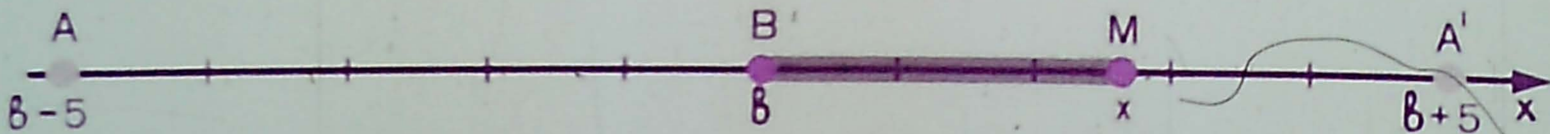
Расстояние между точками А и В числовой оси можно вычислить по формуле: $AB = |x-2|$, где x — координата точки В, число 2 — координата точки А. Проверьте, выражает ли формула $CA = |y-2|$ расстояние между точками А и С.



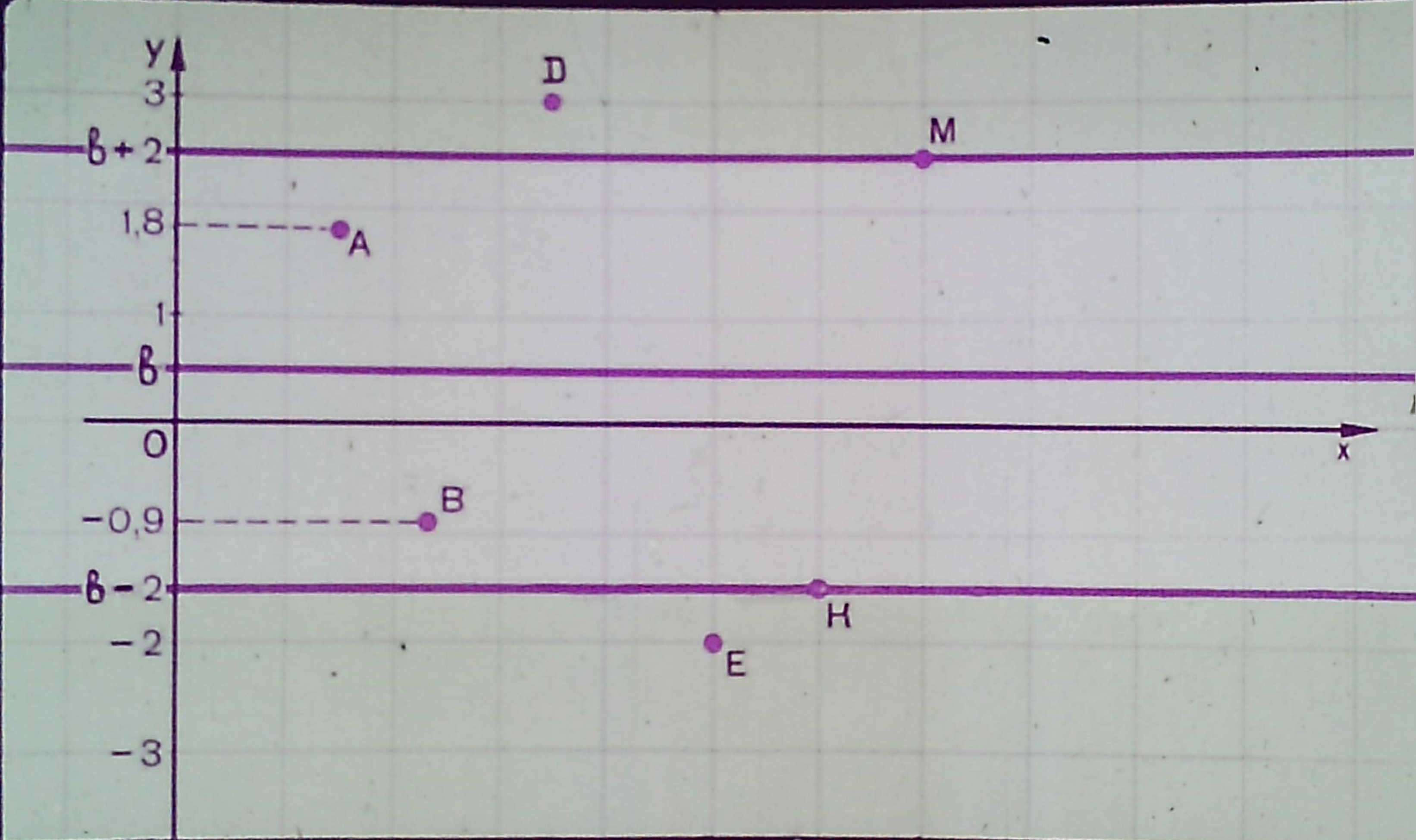
Найдите расстояние от прямой в до точек A; B; C. Справедлива ли формула $d=|2-y|$, где d — расстояние до прямой в от любой точки M плоскости с координатой y?

Для каждого из случаев (а; б; в) назовите координаты точек A; B; A' и M и найдите расстояние AB; BA'; BM.

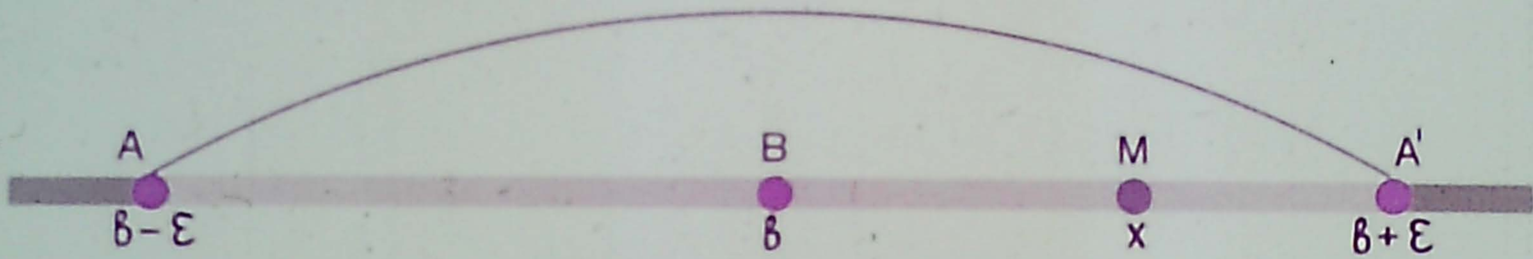




Если M — внутренняя точка отрезка AA', то почему всегда $|b - x| < 5$?

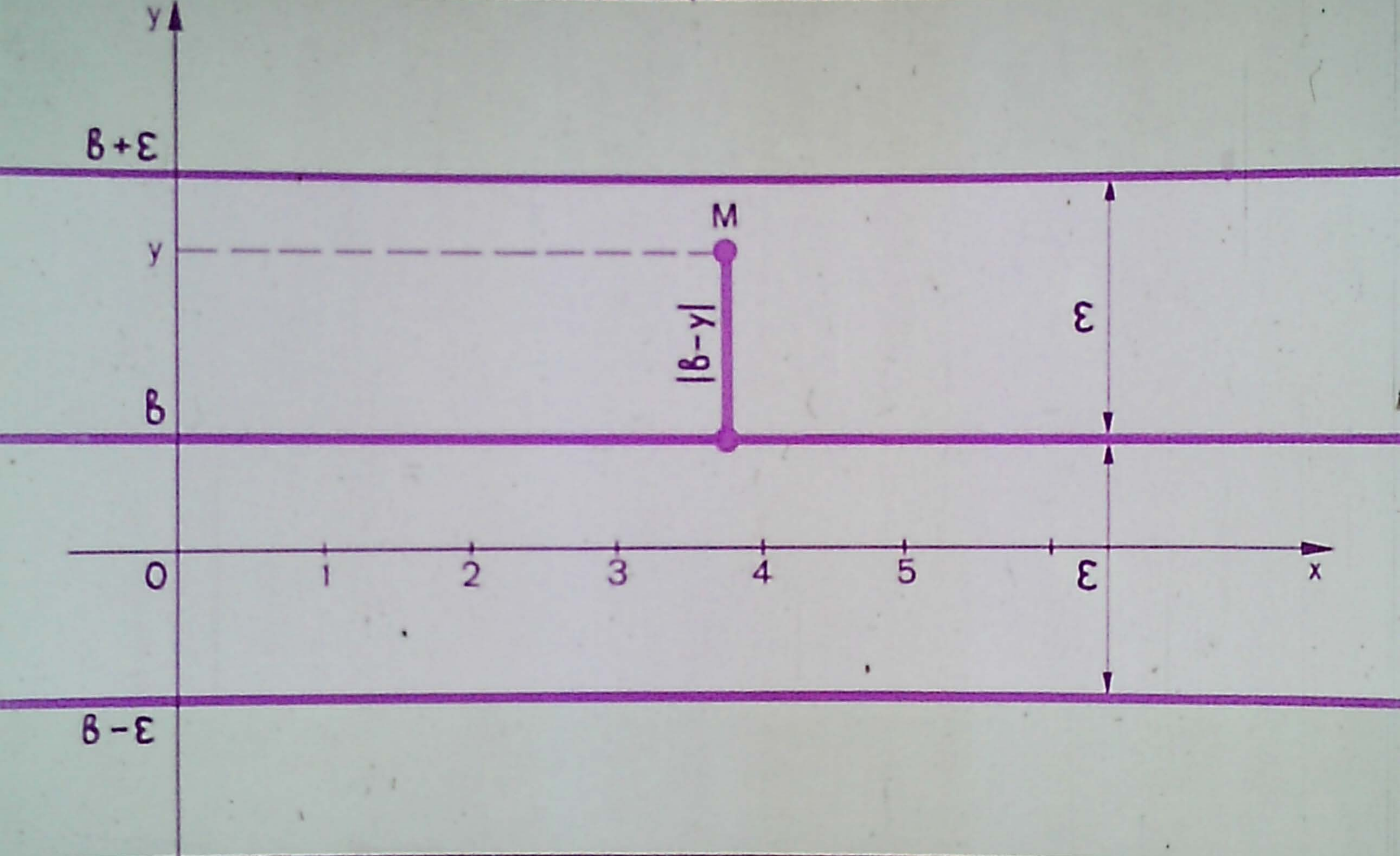


Найдите расстояние до прямой $y=в$ от точек A; B; D; E; M; K. Какие точки лежат внутри полосы; вне полосы? Сравните расстояние отмеченных точек до прямой в с числом 2. Ответ запишите в виде неравенства.

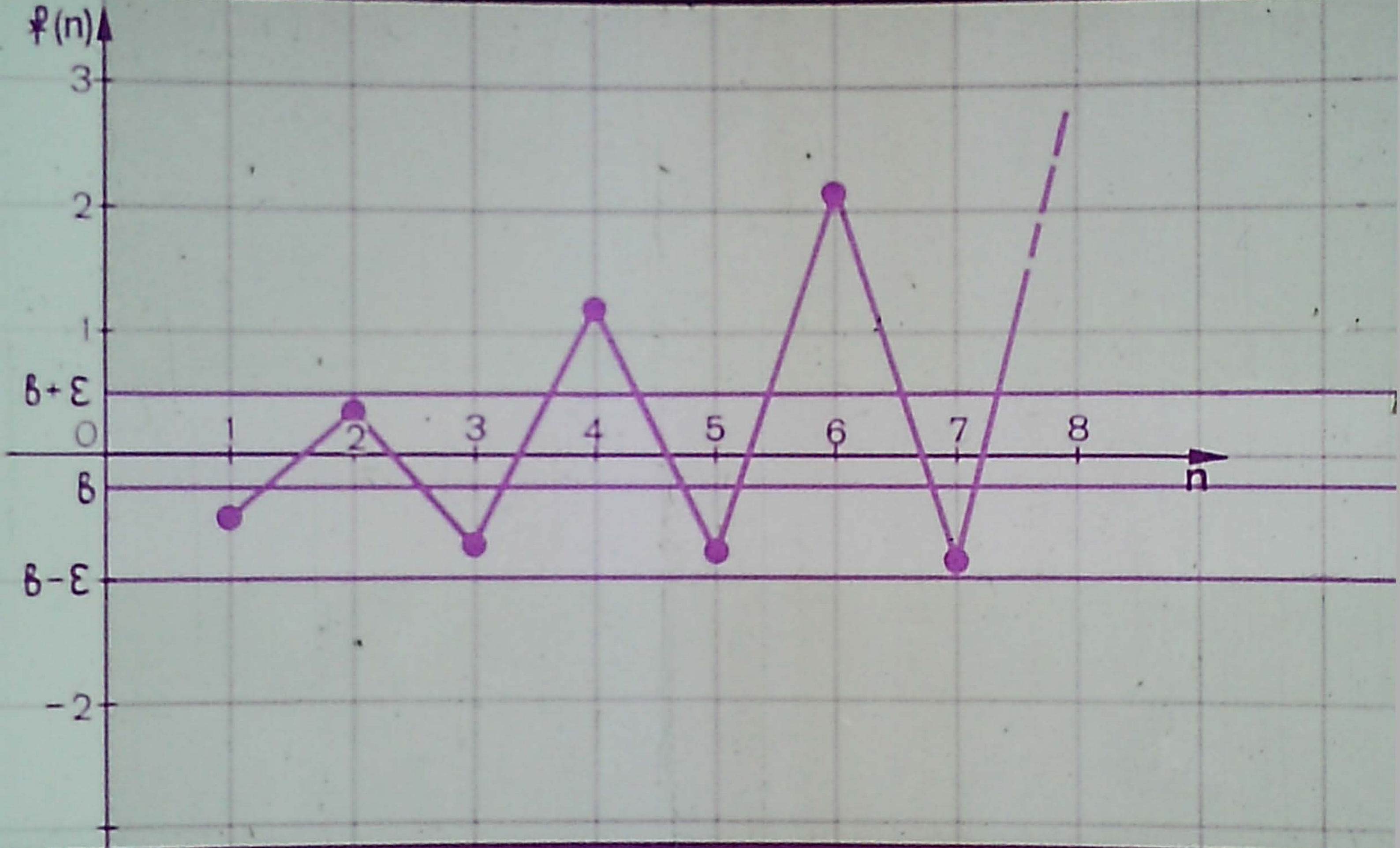


$AB = BA' = \varepsilon$

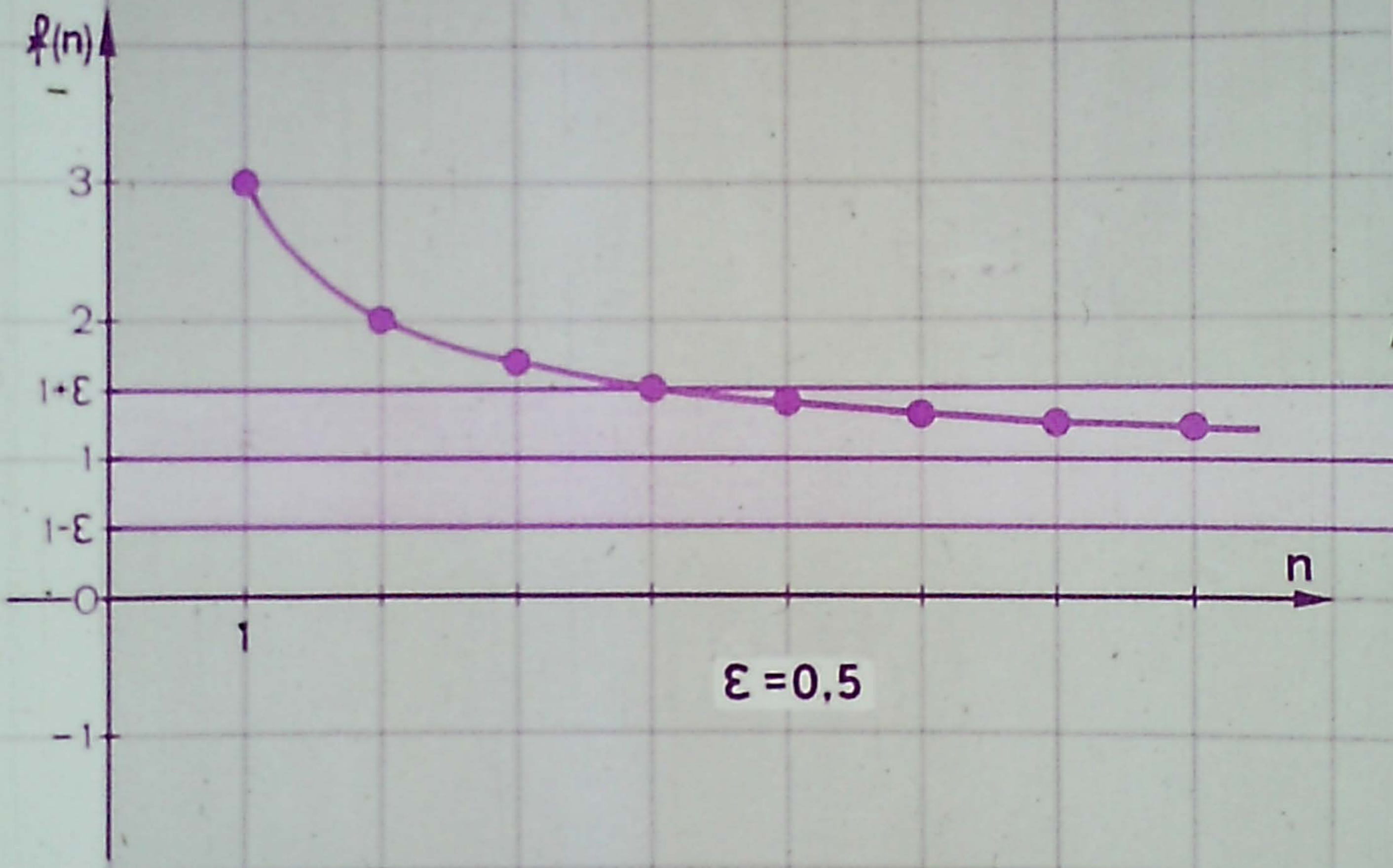
Множество чисел x, для которых $b - \varepsilon < x < b + \varepsilon$, называют ε—окрестностью точки b (ε—положительное число). Если точка M принадлежит ε—окрестности точки B, то $BM < BA$ (или BA'), и тогда выполняется неравенство $|b - x| < \varepsilon$. Объясните это.



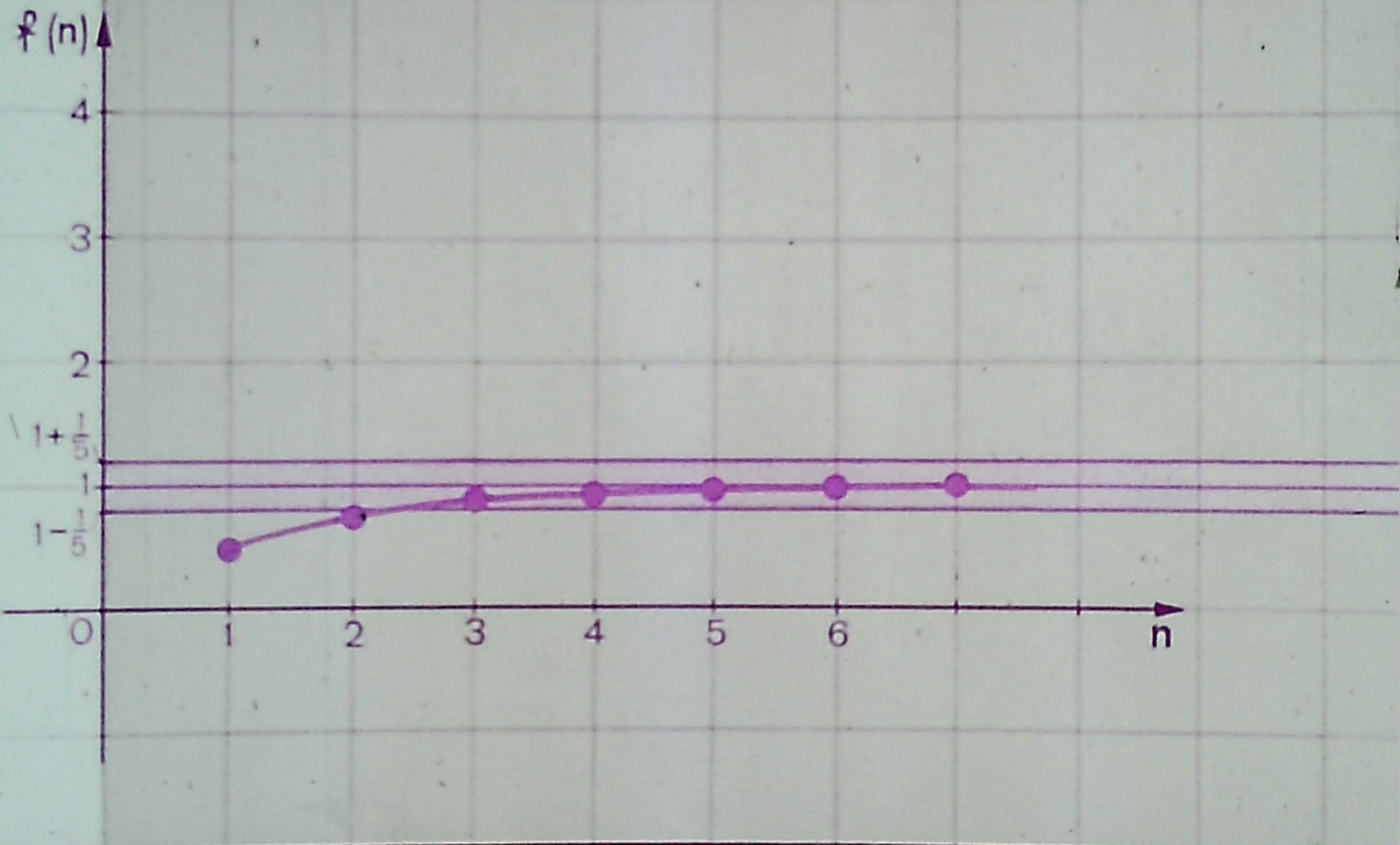
Множество точек плоскости, ограниченной прямыми $y=в+\varepsilon$ и $y=в-\varepsilon$, назовём "ε—полоской прямой в". Если точка M принадлежит ε—полоске прямой в, то $|в-y|<\varepsilon$. Объясните это.



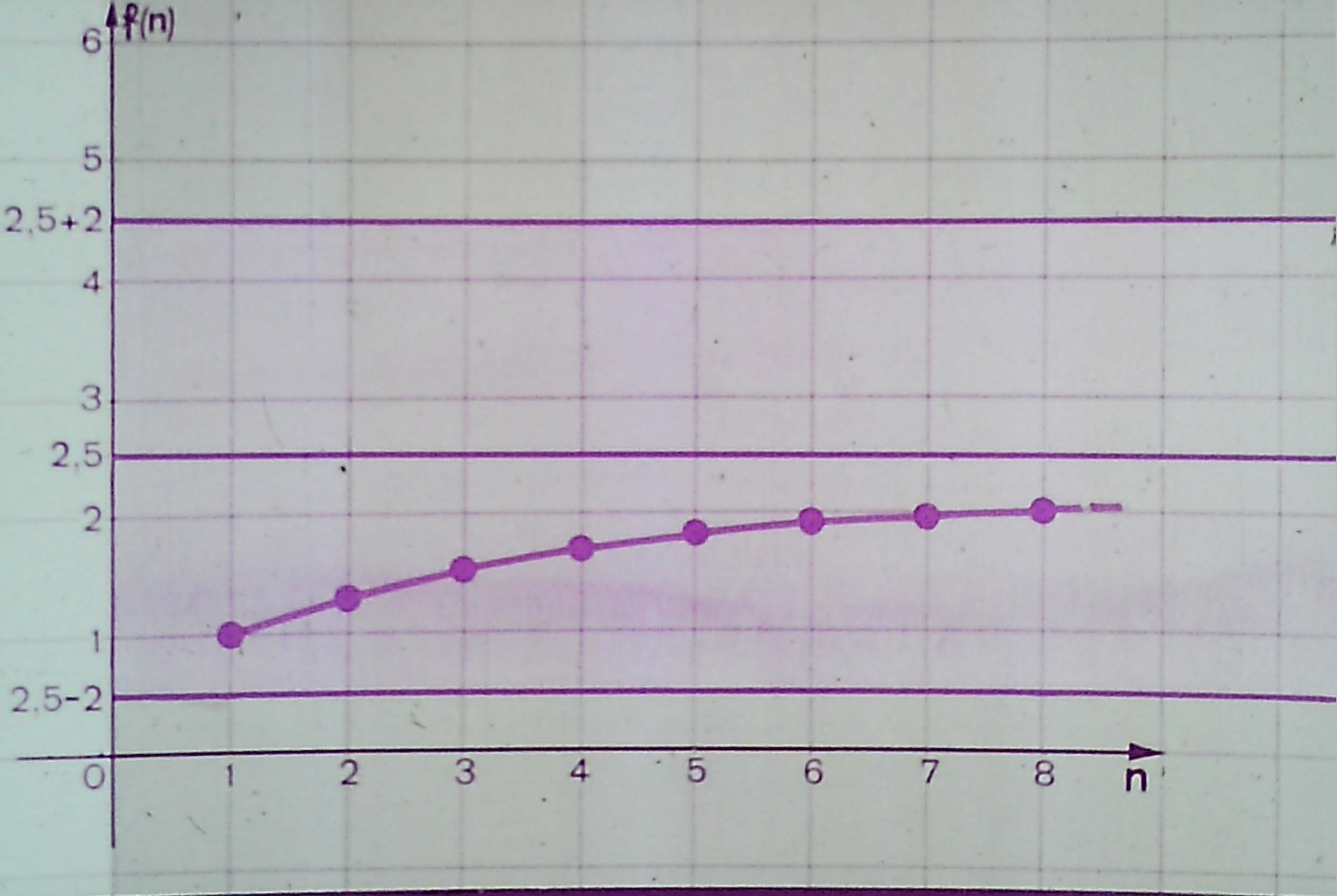
Укажите те значения n, при которых точки графика последовательности $\left\{\frac{(-1)^n+1}{4}n-\frac{n}{n+1}\right\}$ попадают в ε—полоску прямой в; выходят за её границу.



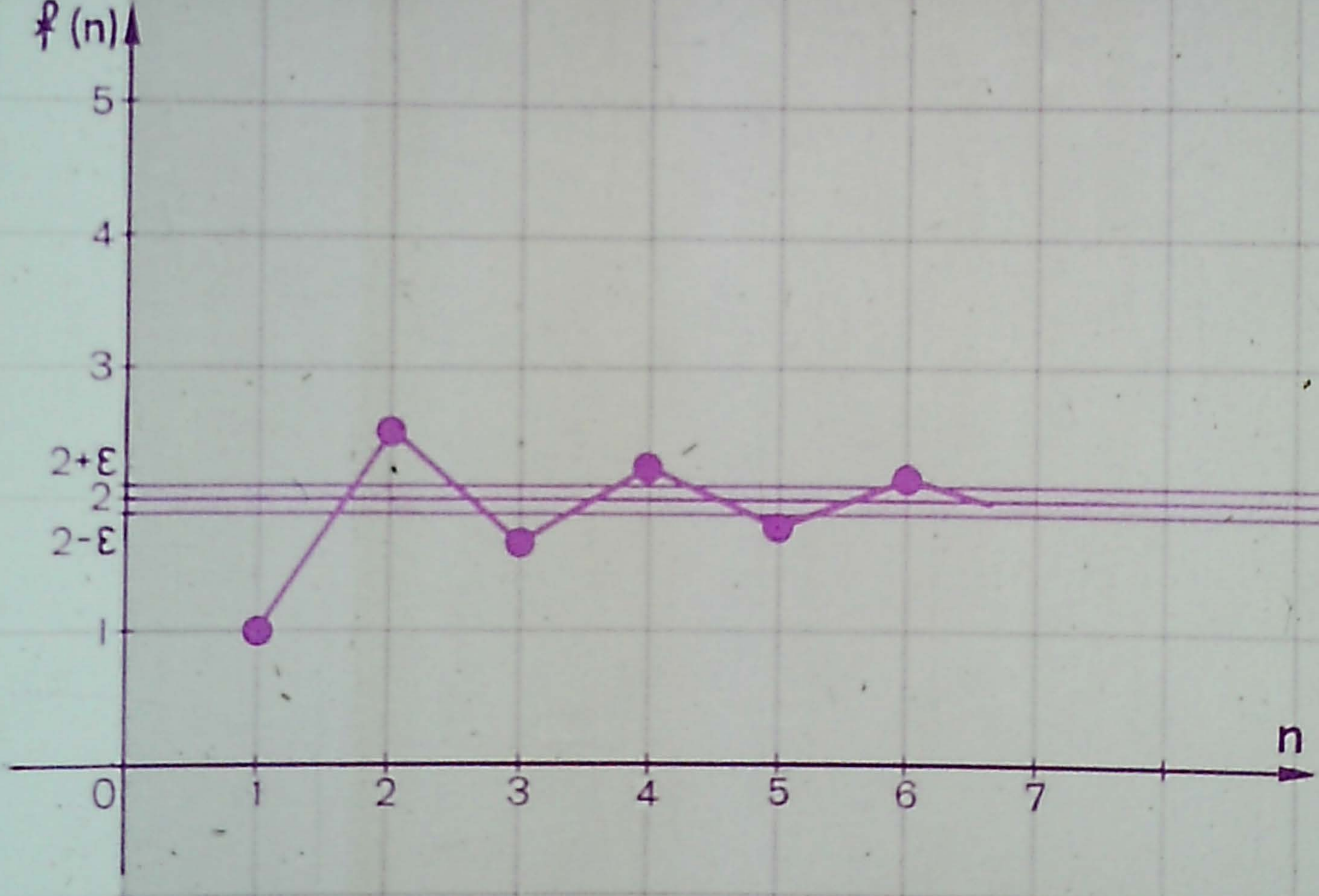
Укажите наименьший номер n, начиная с которого график последовательности $\left\{\frac{n+2}{n}\right\}$ окажется внутри ε—полоски прямой B.



Покажите, что неравенство $|f(n)-1|<\frac{1}{5}$, где $f(n)=1-\frac{1}{2n}$, выполняется для всех значений $n>2$.

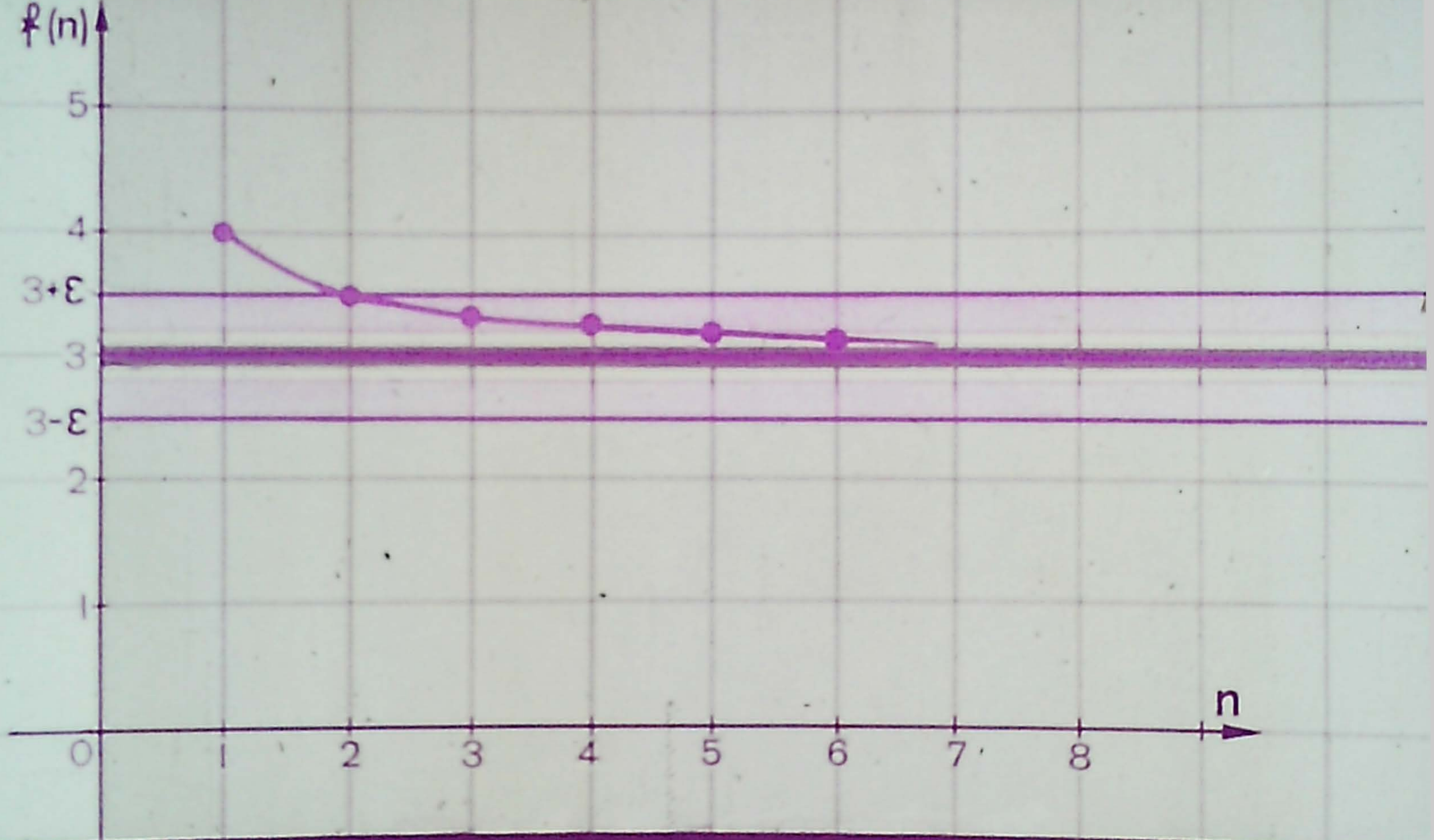


Покажите, что найдутся такие значения n, при которых неравенство $|\sqrt[3]{n} - 2{,}5| < 2$ не выполняется.



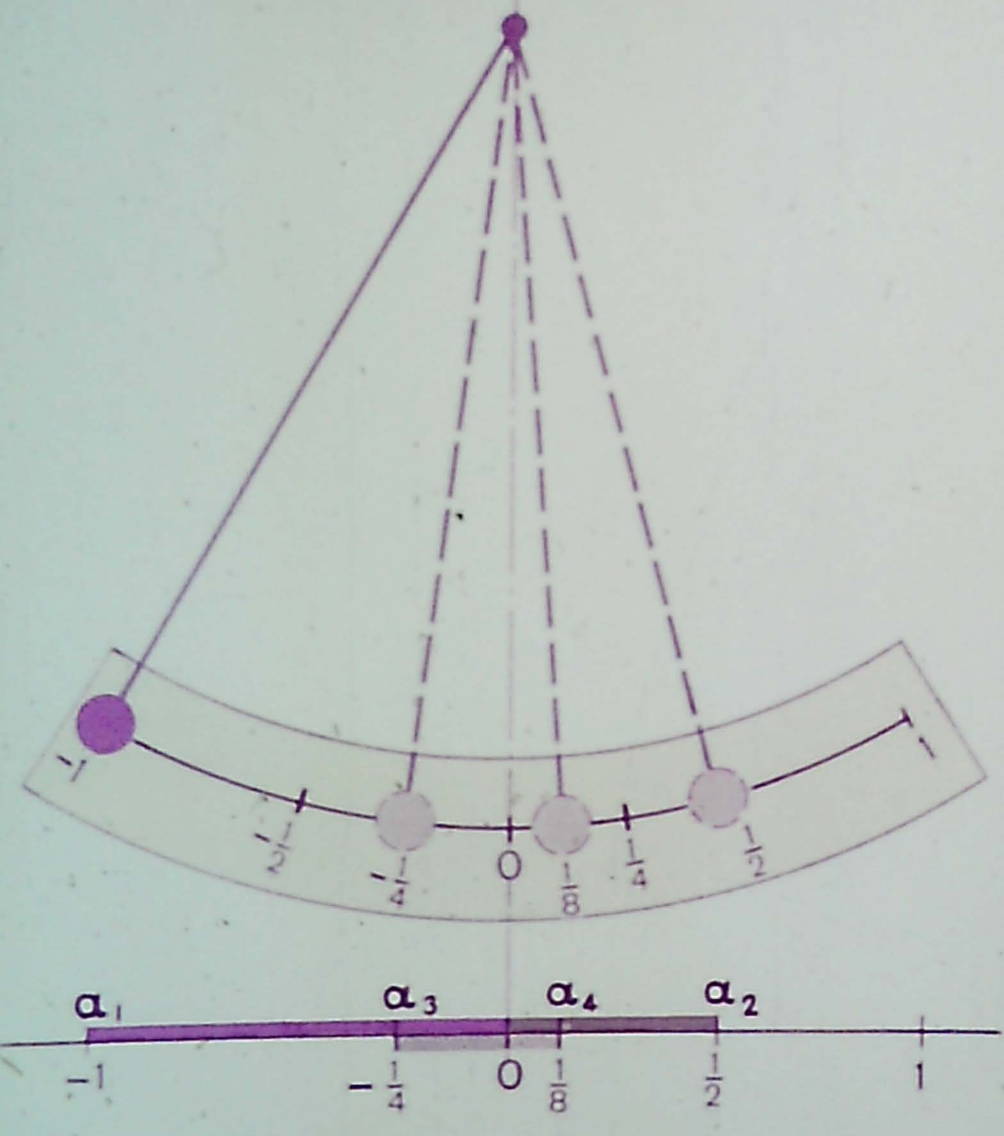
Укажите какое-нибудь значение ε, для которого неравенство $|f(n)-2|<\varepsilon$ выполняется при всех $n>8$.

Известно, что $f(n)=2+\frac{(-1)^n}{n}$.

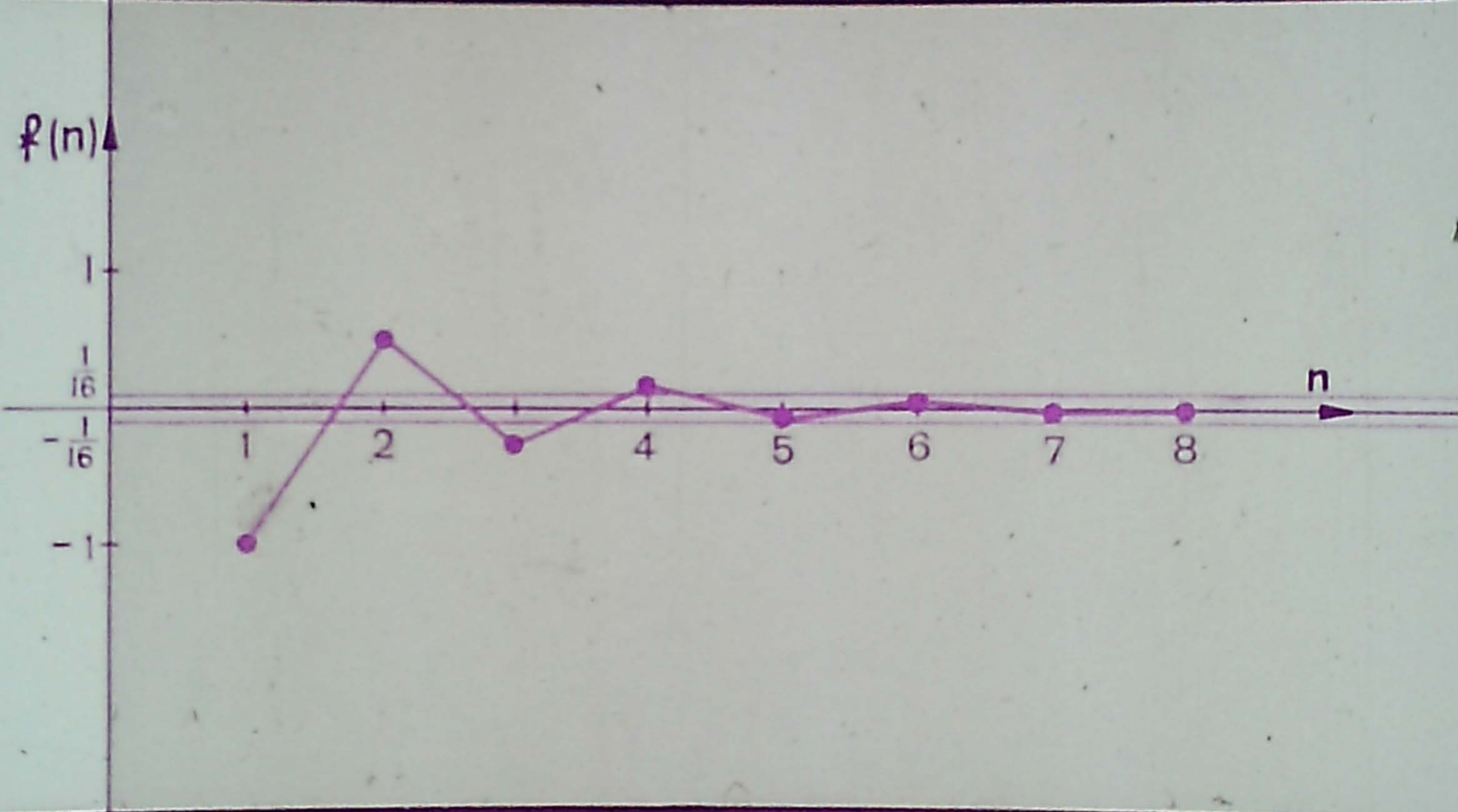


Для каждого значения ε укажите все значения n, для которых не выполняется неравенство $\left|\frac{3n+1}{n}-3\right|<\varepsilon$ если $\varepsilon=\frac{1}{2};\ \frac{1}{5};\ 0{,}01.$

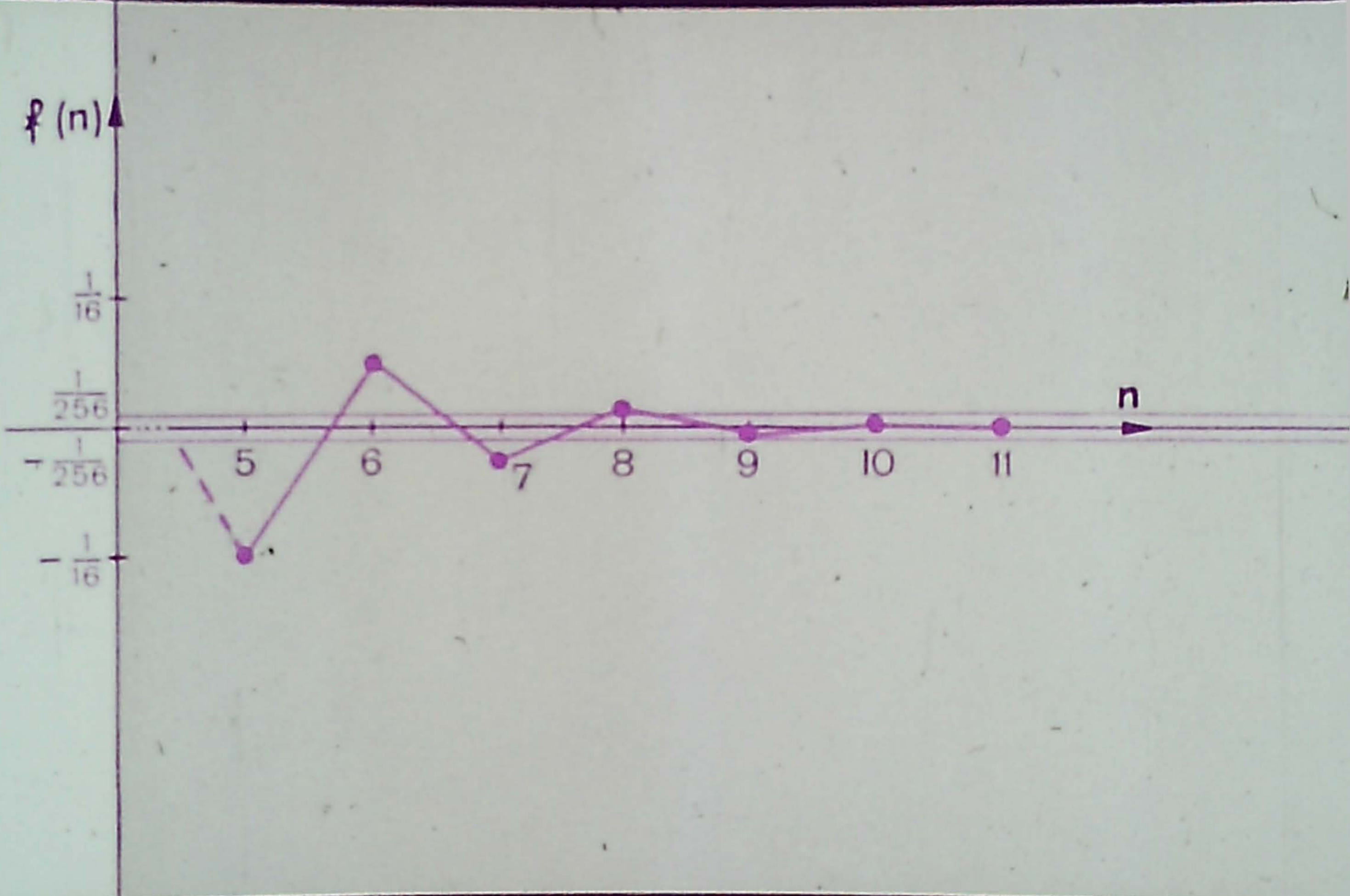
Понятие предела последовательности



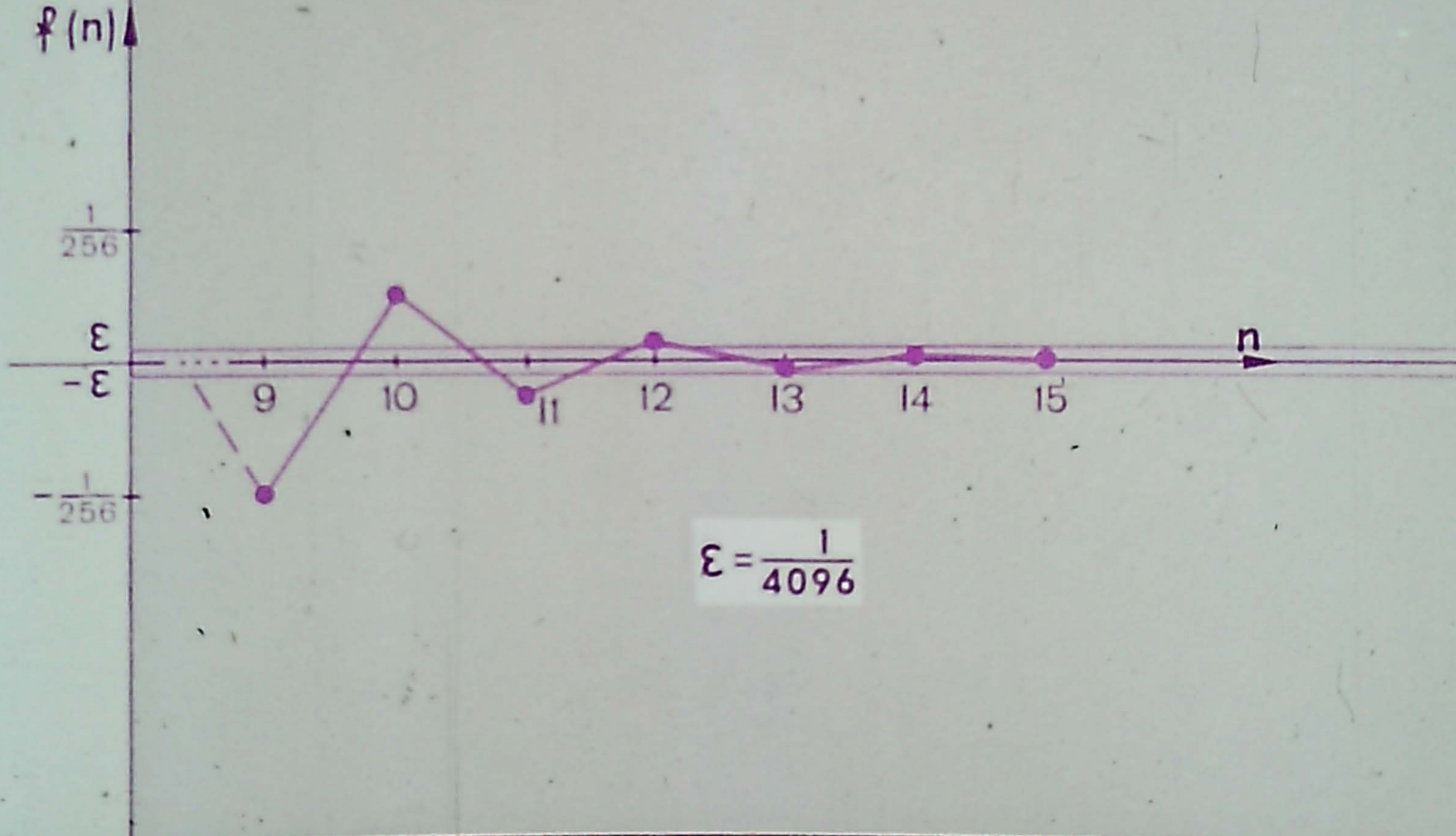
Представим себе такой маятник: сначала он отклоняется от положения равновесия на 1 влево, затем—на $\frac{1}{2}$ вправо, далее—на $\frac{1}{4}$ влево, затем—на $\frac{1}{8}$ вправо и т. д. Через некоторое время мы не сможем различать колебаний маятника.



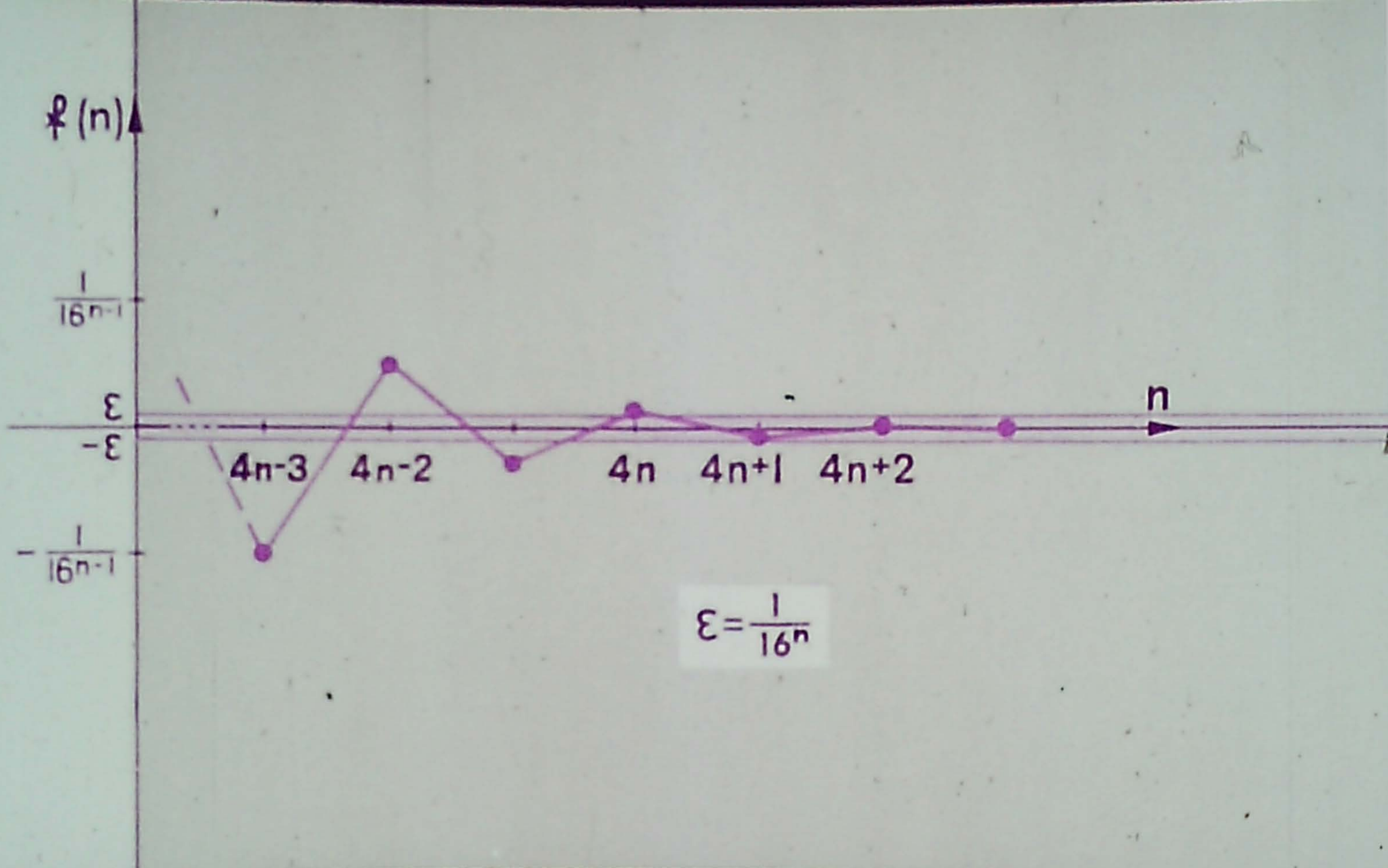
Крайние положения маятника образуют последовательность $-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots; \quad (-1)^n; \frac{1}{2^n}; \ldots$. Наблюдая её график, мы заметим, что с некоторого места он «сливается» с прямой n (пусть точки, отстоящие от прямой n менее, чем на $\frac{1}{16}$ единицы, наш глаз не различает).



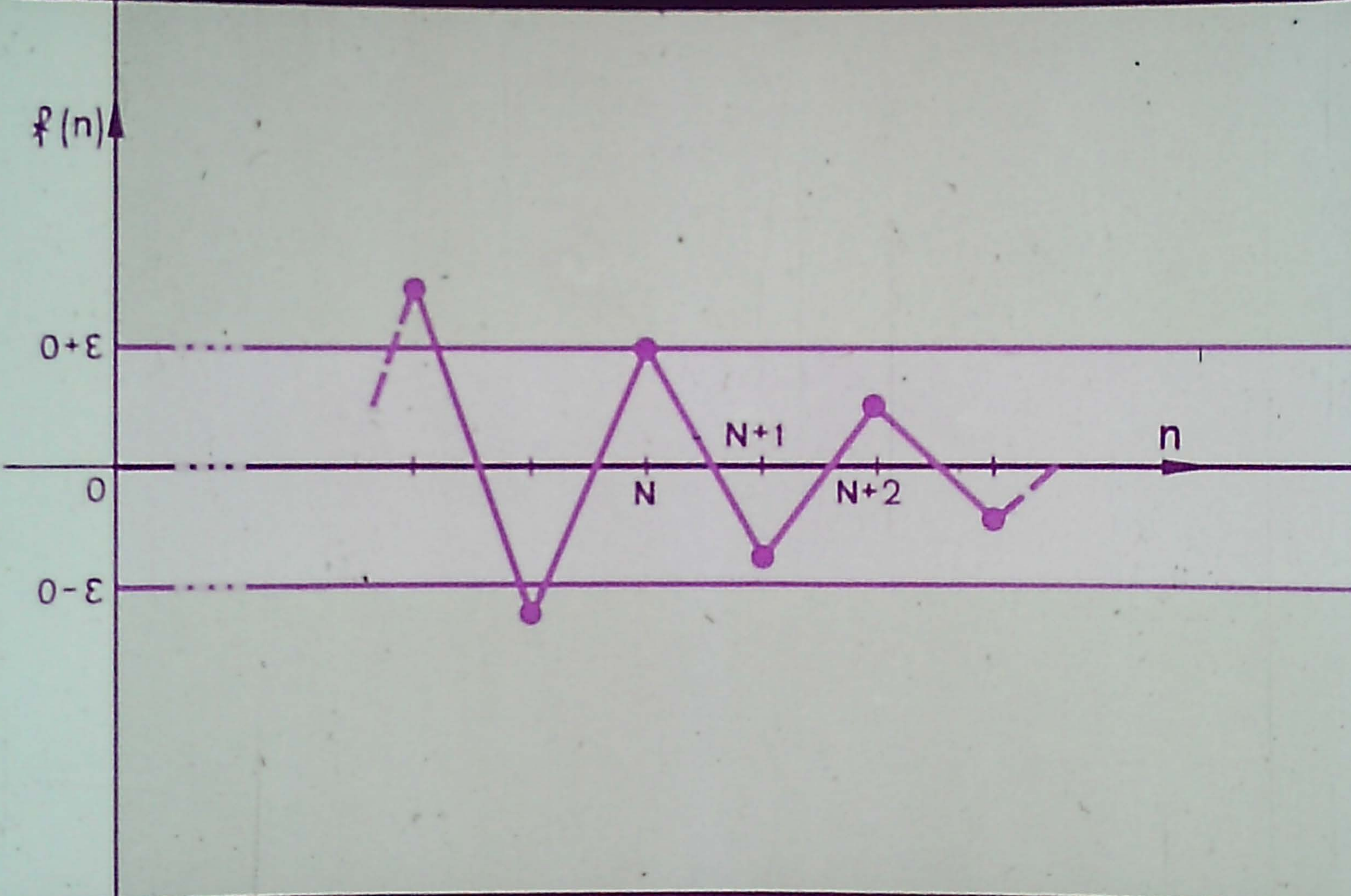
Пусть в нашем распоряжении имеются приборы, которые увеличивают вертикальные размеры фигур в 16 раз, в 16^2 раз, в 16^3 раз и т. д. Посмотрев в первый из них, мы увидим, что при $n > 8$ график начинает «сливаться» с прямой n.



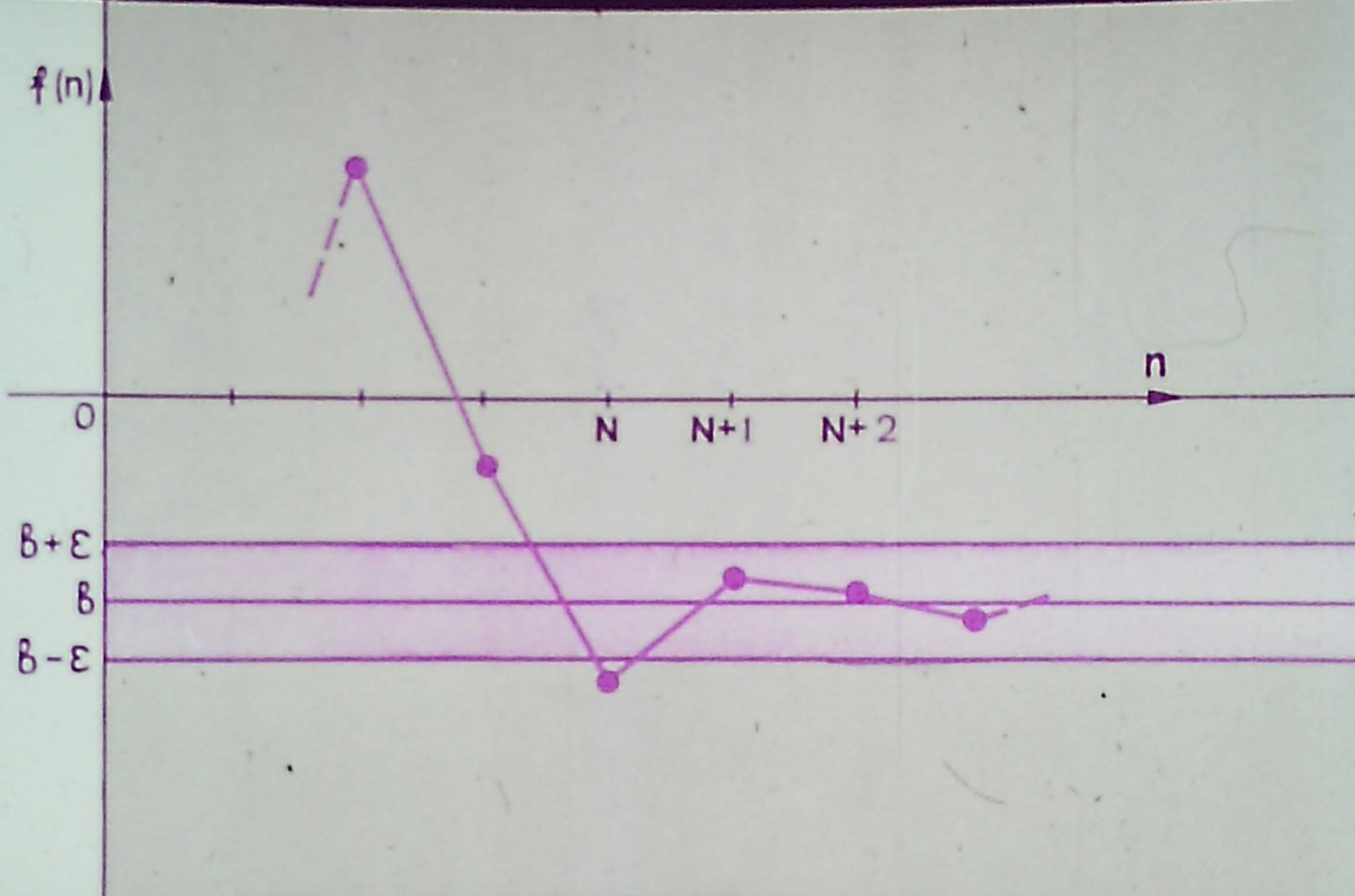
Воспользуемся 16^2—кратным увеличением. При $n > 12$ мы опять не сможем отличить точки графика от прямой n.



Можно сказать, что при любом увеличении график, начиная с некоторого места, «сливается» с прямой n. Говоря иначе, при любом ε, начиная с некоторого места (при $n > N$), все точки графика попадают в ε—полоску прямой n.



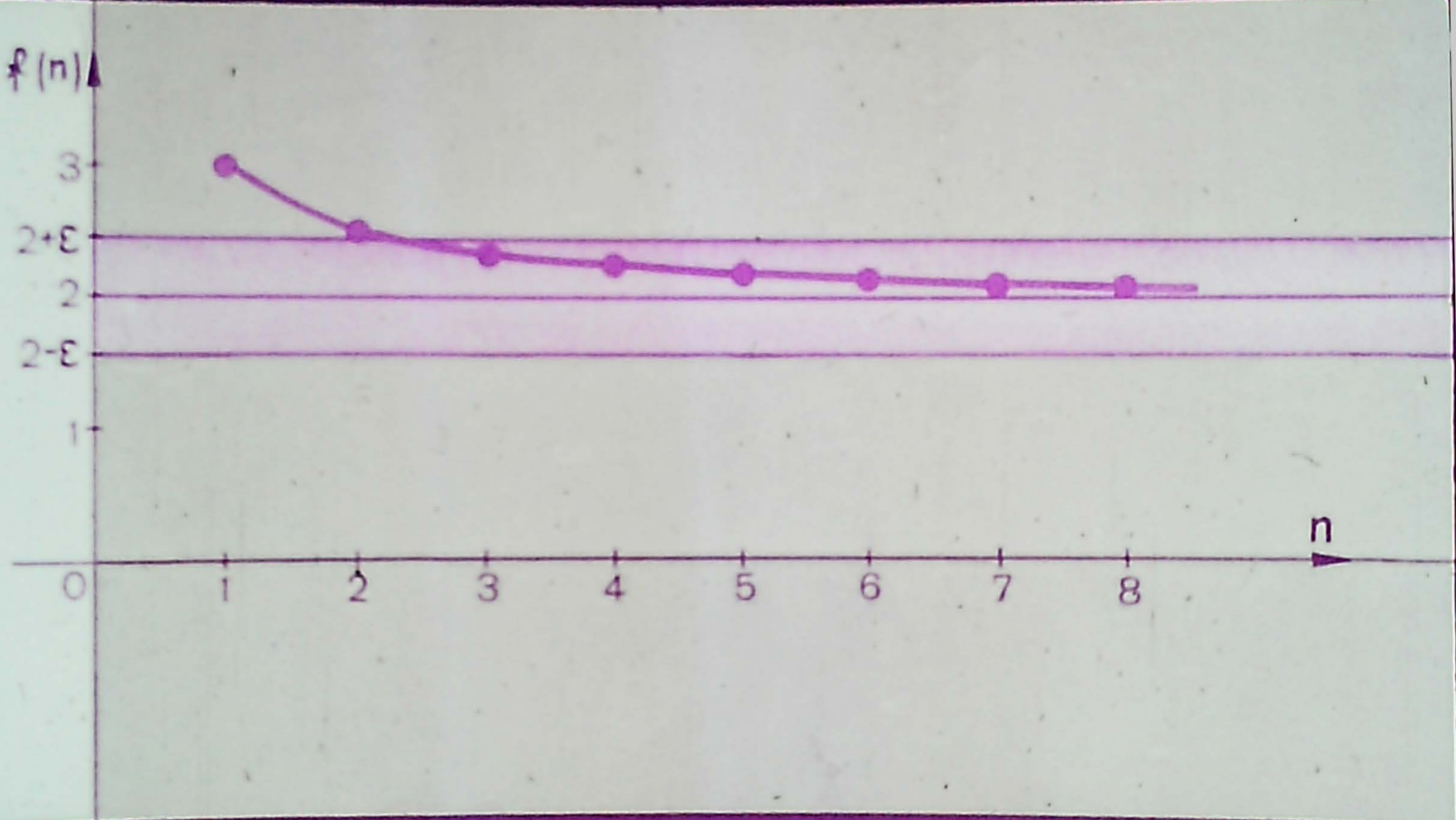
Выразим это аналитически: для любого ε можно найти такое N, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|f(n)-0|<\varepsilon$.



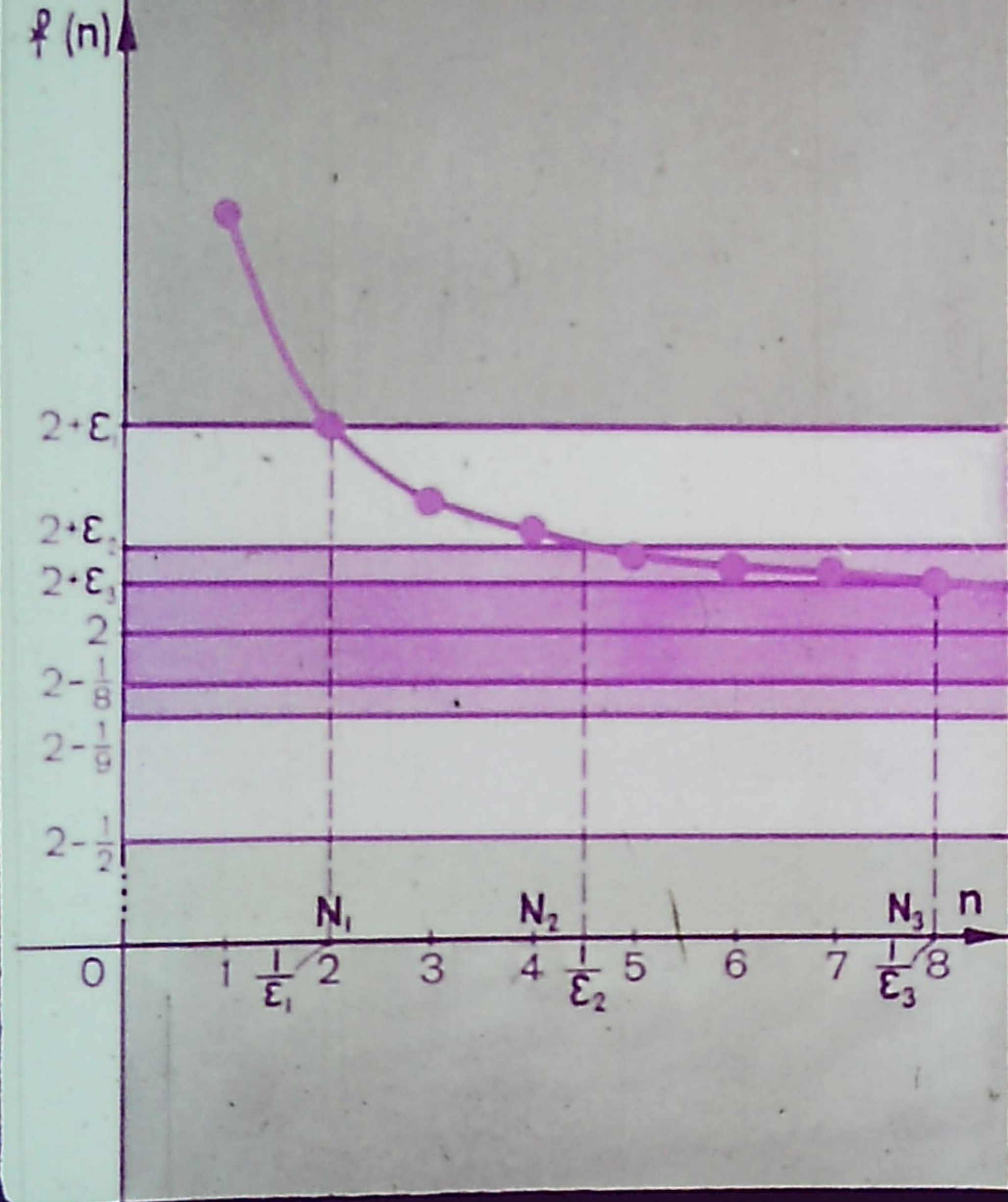
Вообще, последовательность $\{f(n)\}$ может обладать тем свойством, что при любом ε её график, начиная с $n > N$, попадает в ε —полоску прямой B (неравенство $|f(n) - B| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > N$).

В таких случаях говорят, что число b есть предел последовательности $\{f(n)\}$.

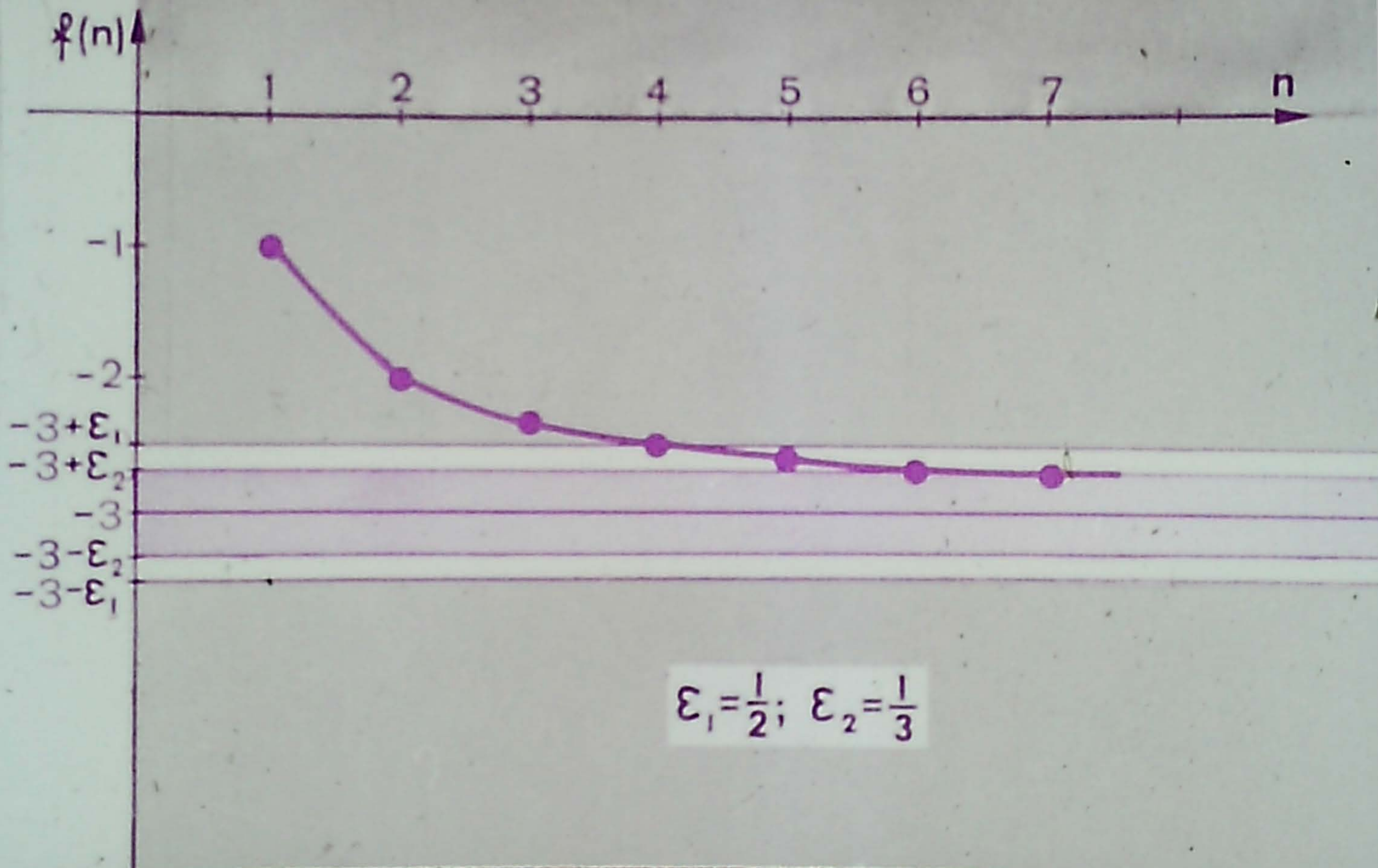
Число b называется пределом последовательности $\{f(n)\}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|f(n) - b| < \varepsilon$.



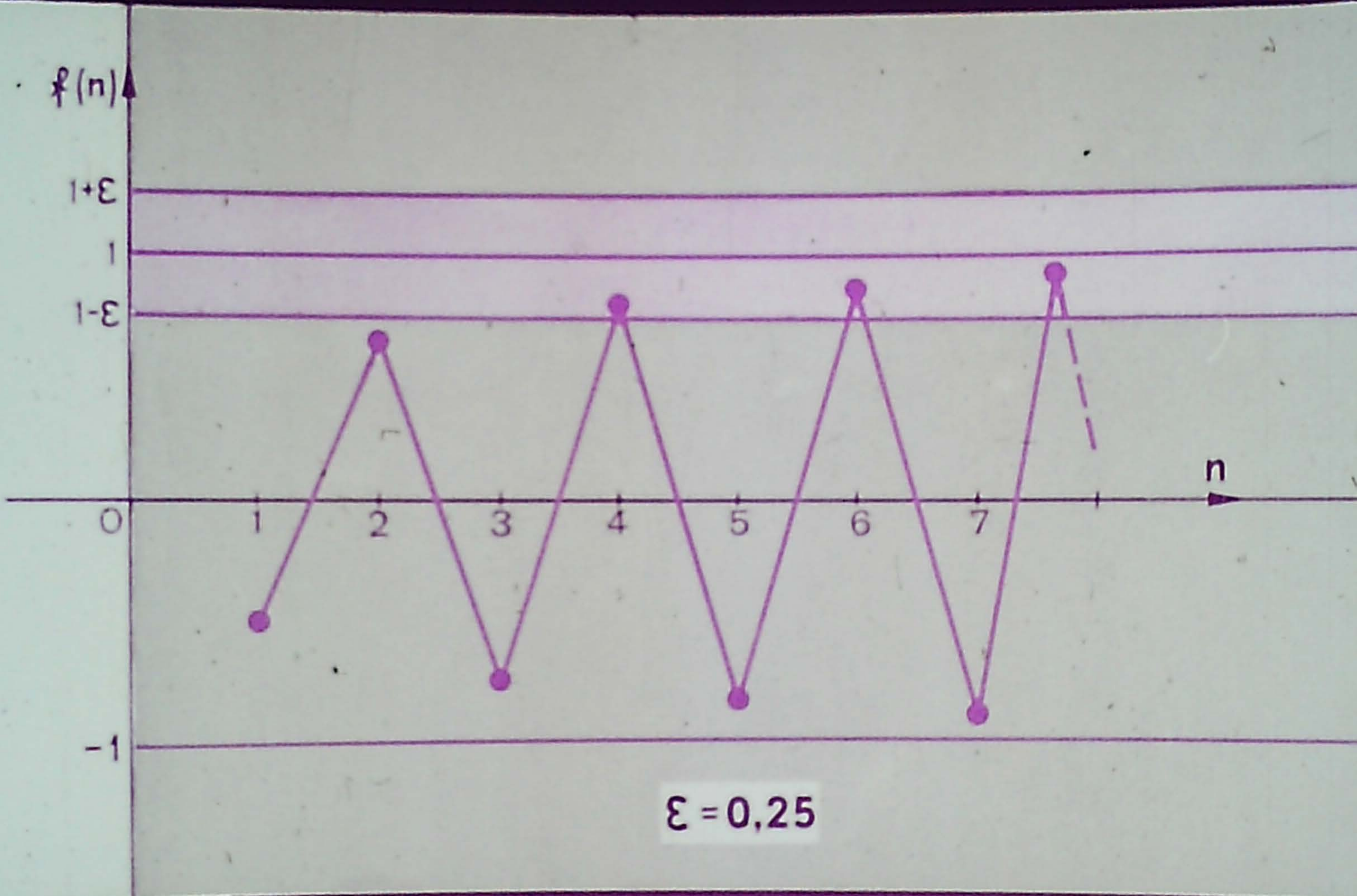
Предел последовательности $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$ равен 2. Чтобы доказать это, нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$.



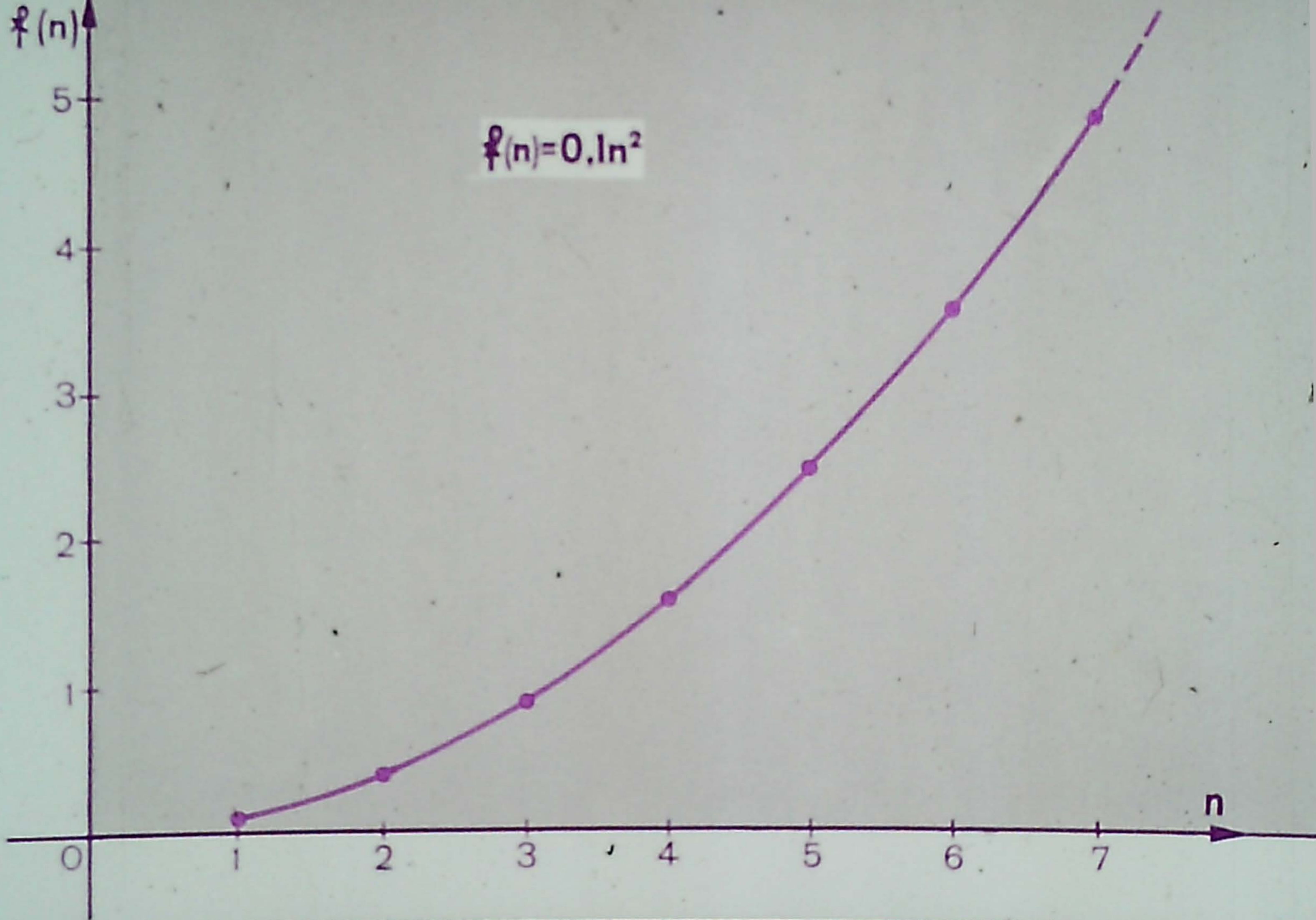
Неравенство $\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|<\varepsilon$ равносильно неравенству $\frac{1}{n}<\varepsilon$ или $n>\frac{1}{\varepsilon}$.
Если $\varepsilon=\frac{1}{2}$, то $N=2$;
если $\varepsilon=\frac{2}{9}$, то $N=4$,
если $\varepsilon=\frac{1}{8}$, то $N=8$.
Вообще $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (целой части числа $\frac{1}{\varepsilon}$).



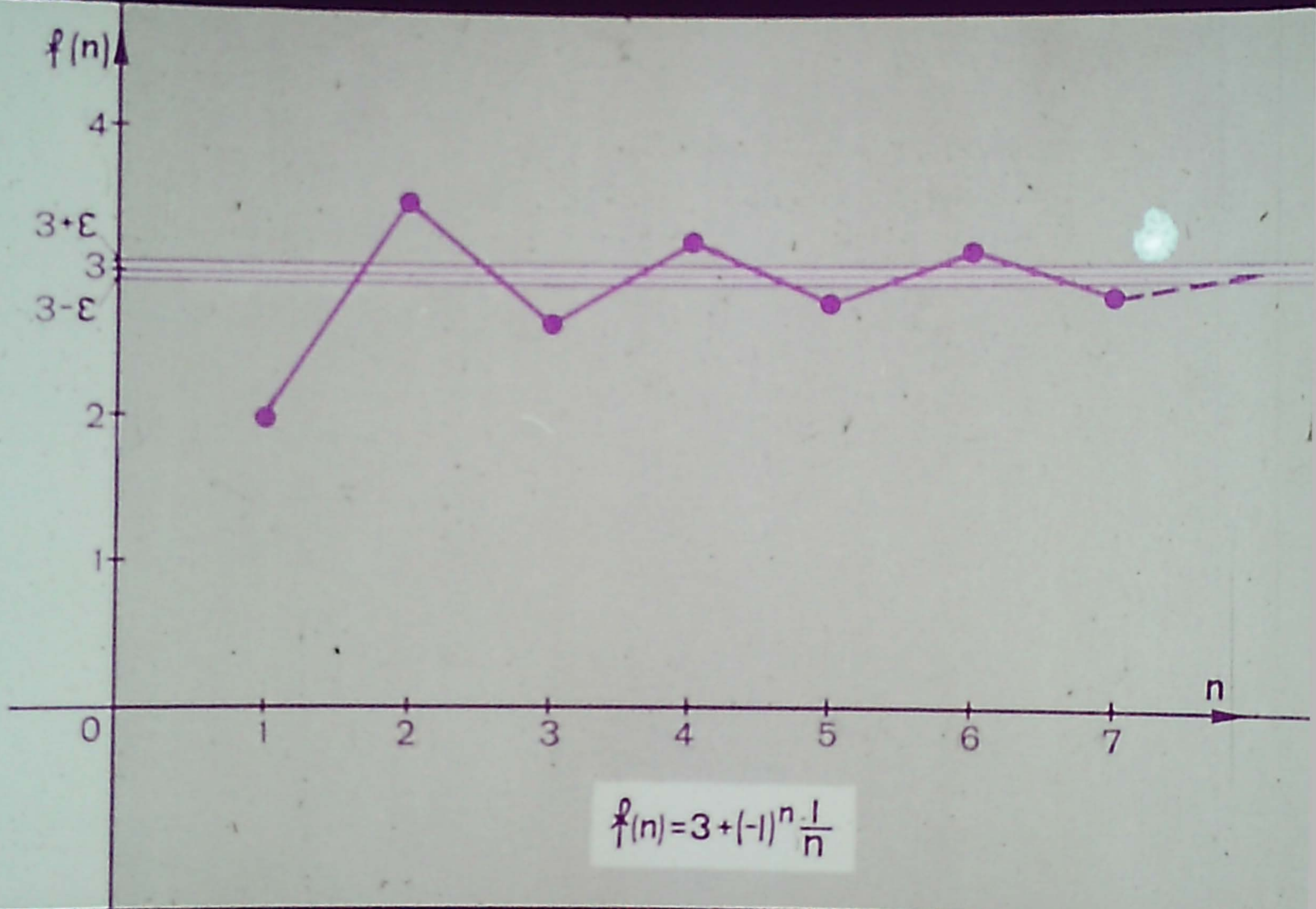
Найдите число N точек, принадлежащих графику последовательности $\left\{-\frac{3n-2}{n}\right\}$, которые не входят в ε — полоску прямой в для $\varepsilon=\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 0{,}01$.



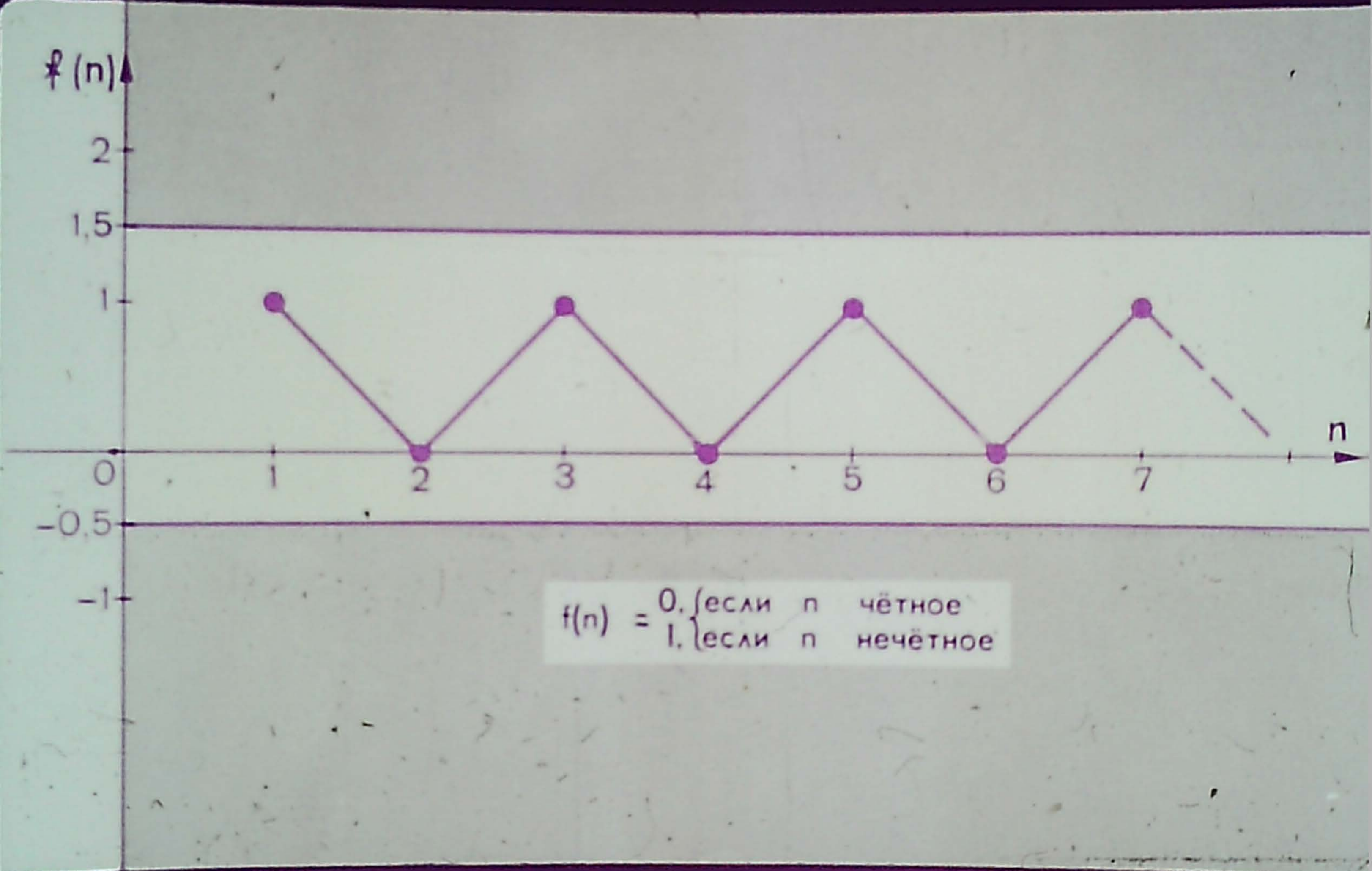
Покажите, что для любых n (как угодно больших) можно найти такое ε (например, ε=0,25), что неравенство $|f(n)-1| < \varepsilon$ не будет выполняться. $f(n) = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.



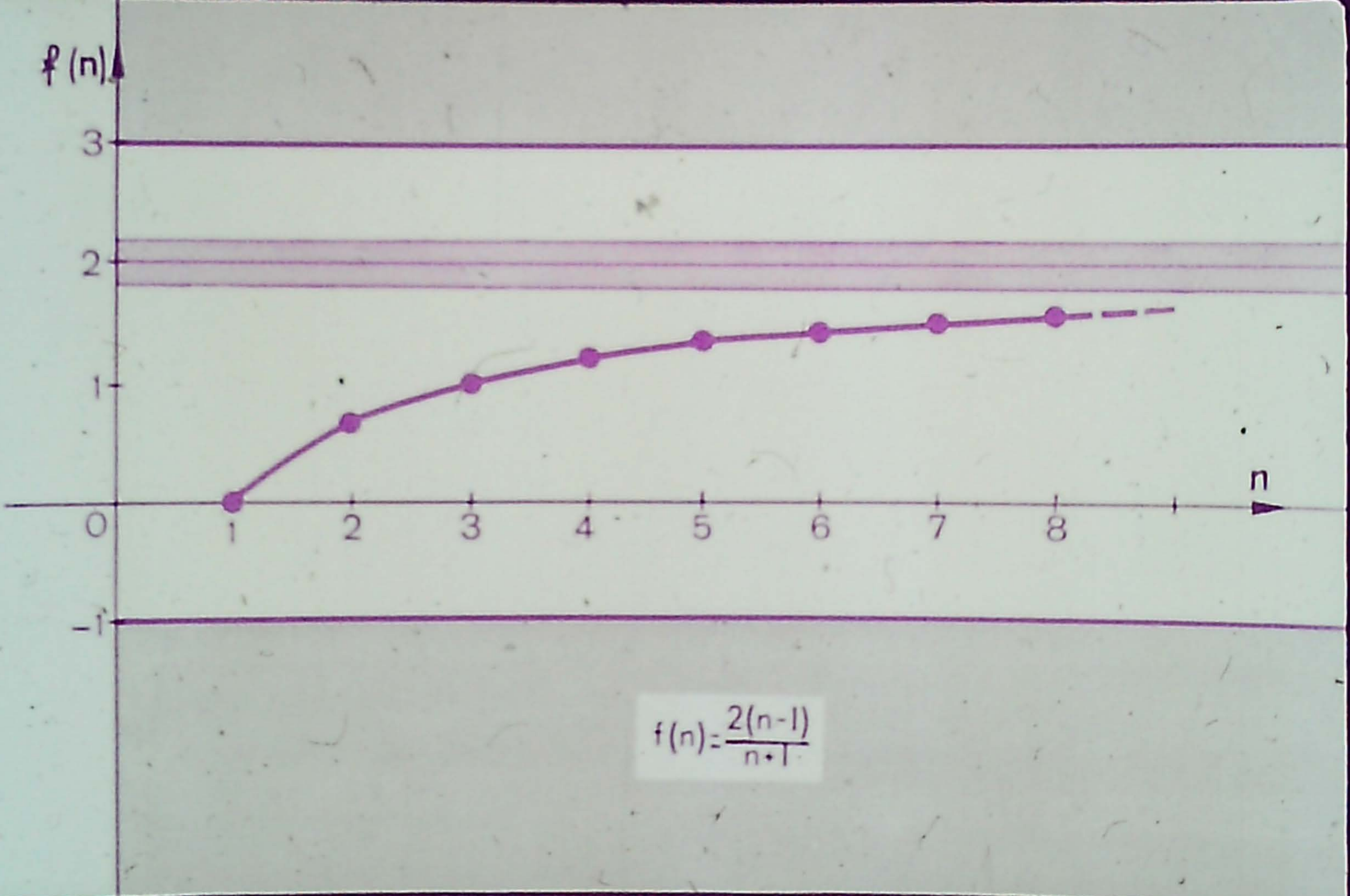
Может ли неограниченная последовательность иметь предел?



Может ли немонотонная последовательность иметь предел?



Объясните, почему последовательность, имеющая предел, должна быть ограниченной. Всякая ли ограниченная последовательность имеет предел?



Всякая ограниченная и монотонная последовательность имеет предел. Объясните это, руководствуясь графиком.

КОНЕЦ

Автор Ю. Н. Макарычев
Редактор Л. Б. Книжникова
Художник-оформитель С. Н. Рогов

Студия «Диафильм», 1969 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Д-227-69

Цветной 0-30