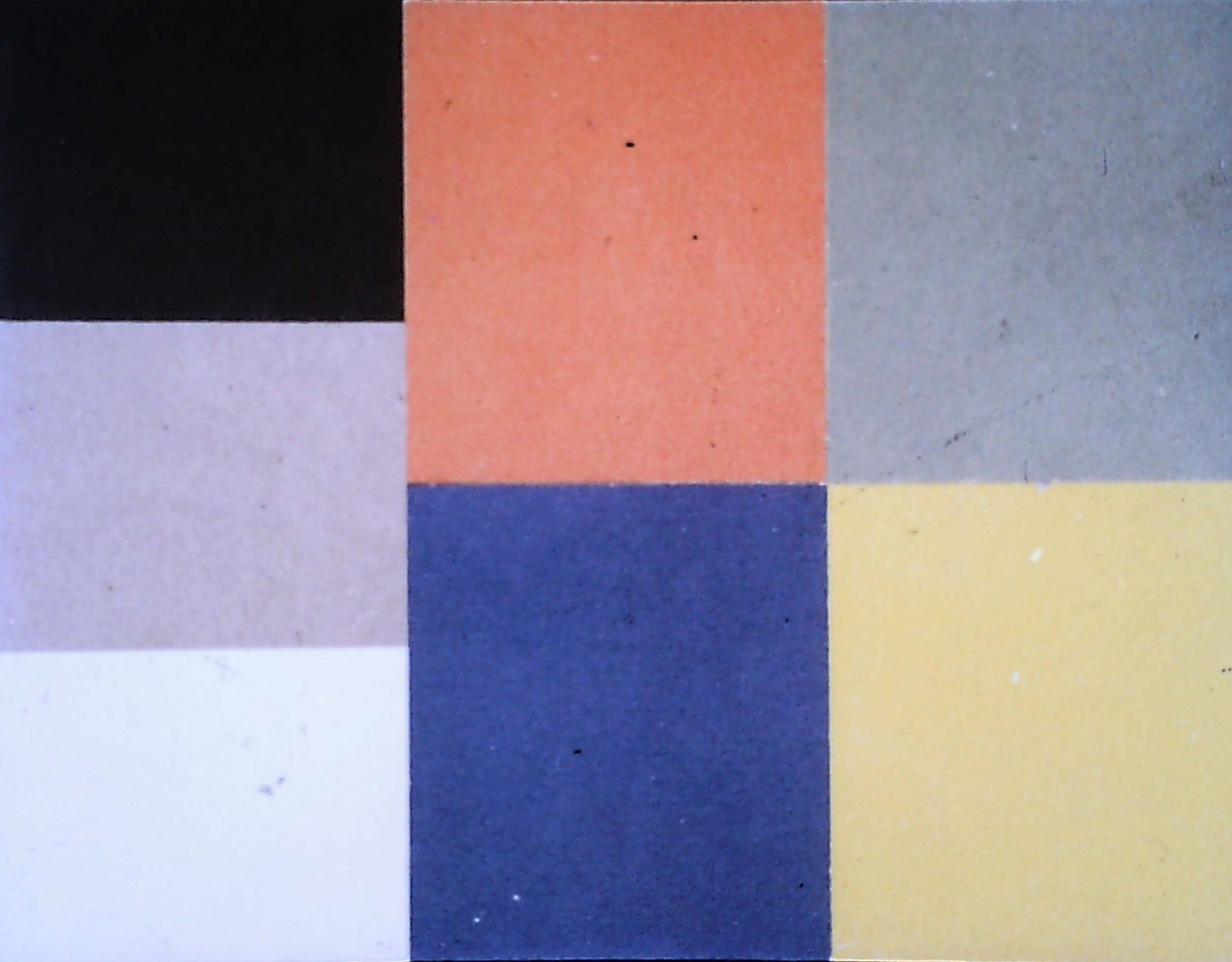


III 1975

5 0 9

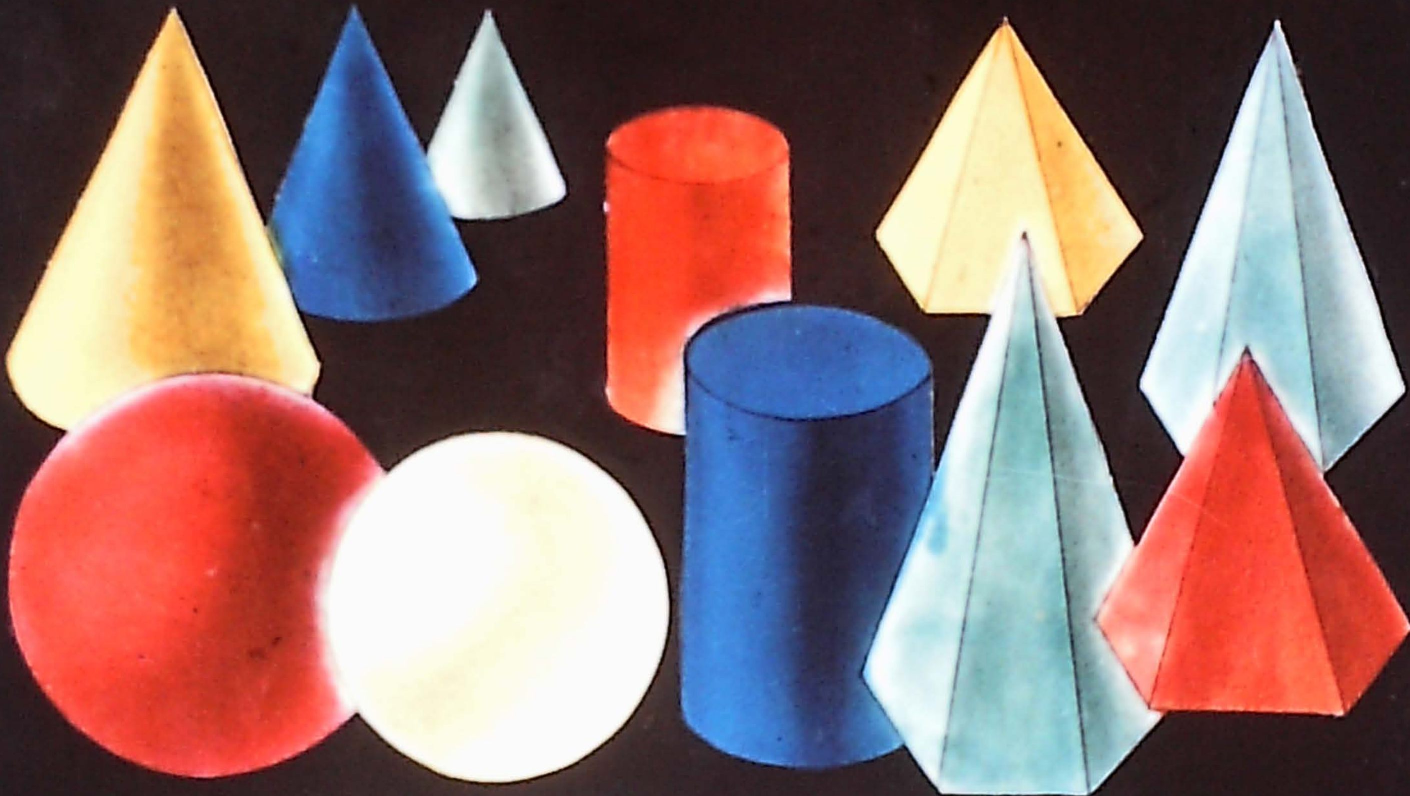
ТУ 19—32—73

8

1

ДИАФИЛЬМ

07-3-197



ПОДОБИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

К СВЕДЕНИЮ УЧИТЕЛЯ.

Диафильм можно использовать при изучении многогранников и тел вращения (фрагментарно) или на повторительно-обобщающем уроке (целиком). Например, начало диафильма (до 16 кадра) можно рассмотреть сразу после теоремы о плоскости, пересекающей пирамиду параллельно её основанию.

Возможны два варианта подхода к понятию подобия в пространстве: а) учитель даёт общее определение этого понятия, и тогда утверждения из кадров 6, 27 и 32 являются теоремами; б) общее определение не даётся, и тогда указанные утверждения служат определениями частных случаев подобия в пространстве.

Отметим важность теоремы I (кадры 7—15). Это теорема существования подобных многогранников.

Ответы.

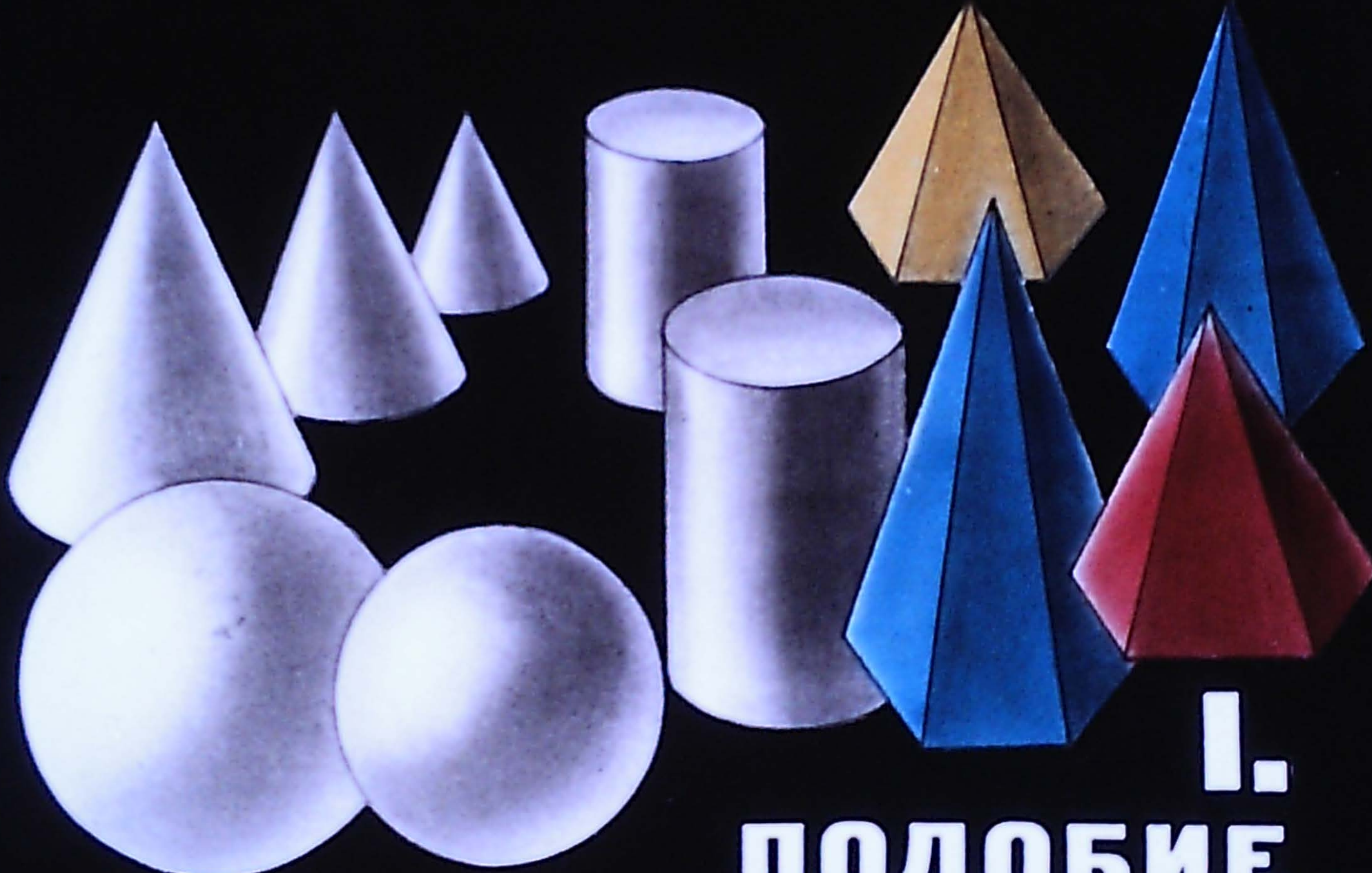
К. 25. Теоремы, обратные теоремам 2 и 3, неверны.

К. 36. 1) в 2 раза,
2) в 4 раза,
3) в 8 раз.

К. 38. 0,1 мм$\cdot 144^3 \approx 300$ м.

К. 39. 0,25 л.

К. 40. $\dfrac{20\text{ см}}{\sqrt[3]{2}}$.

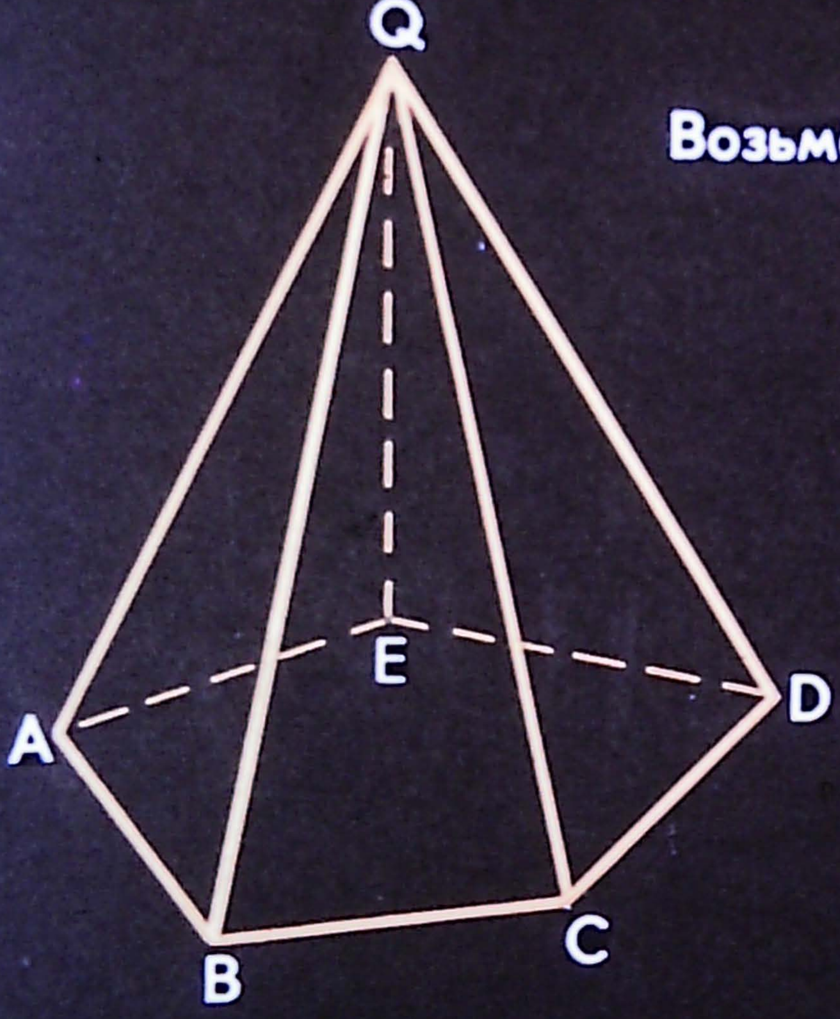


I. ПОДОБИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Два многогранника ПОДОБНЫ, если они имеют:

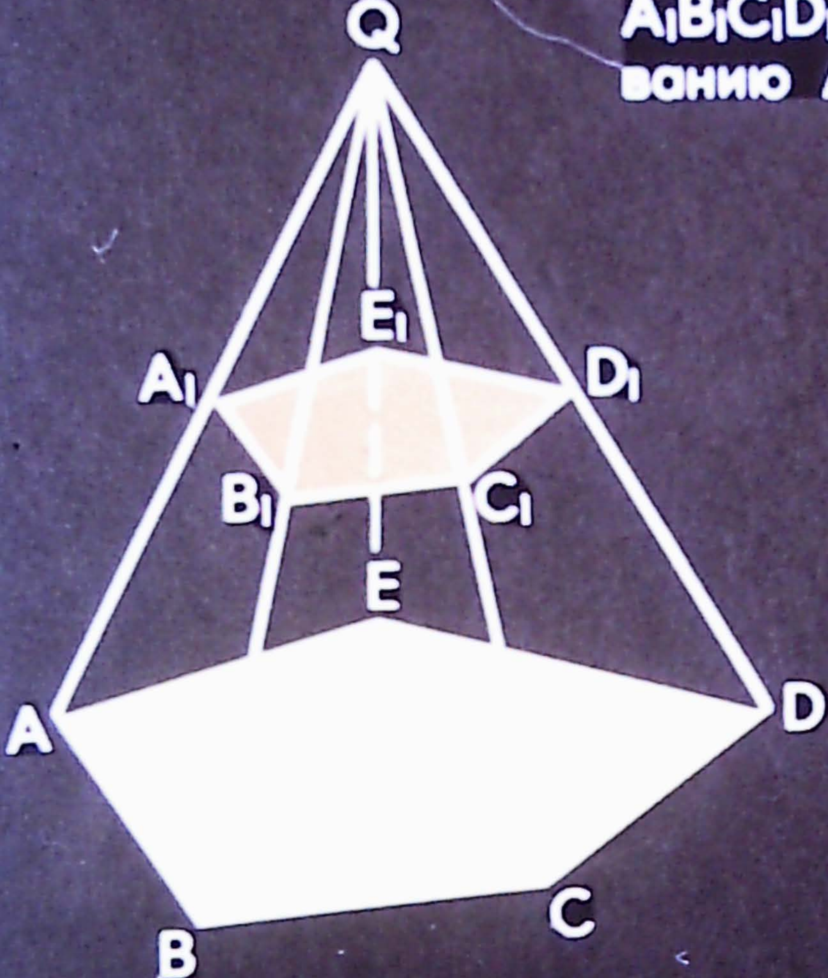
1) соответственно ПОДОБНЫЕ грани,

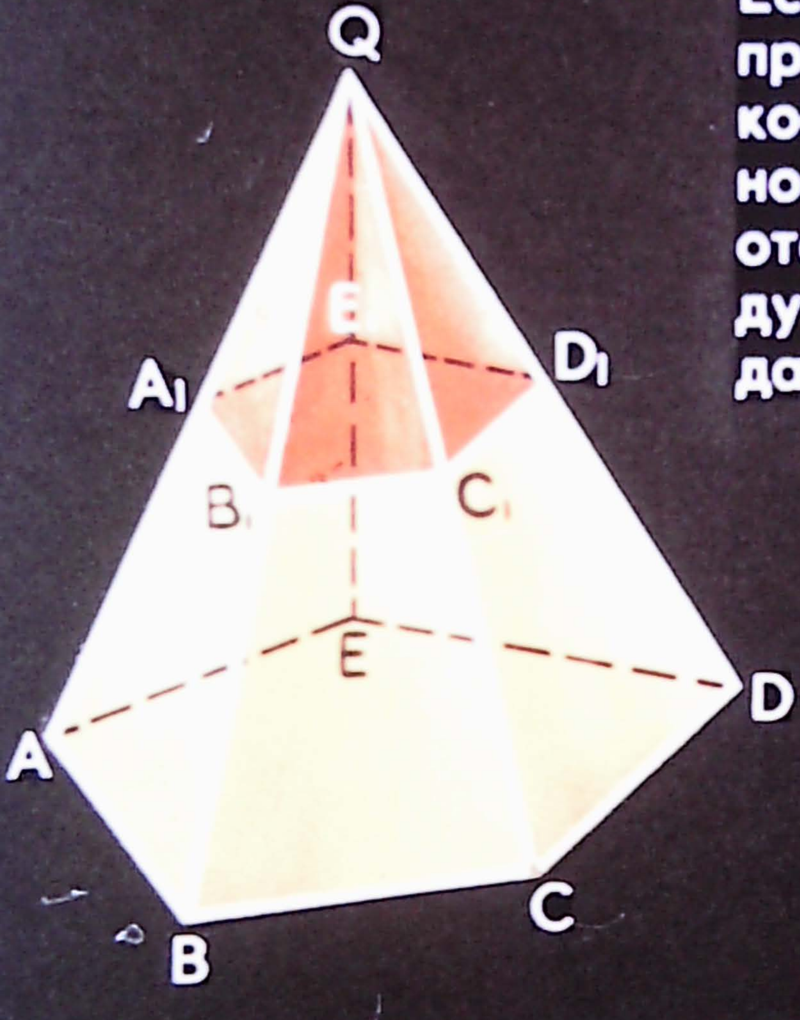
2) соответственно РАВНЫЕ многогранные углы.



Возьмём пирамиду QABCDE.

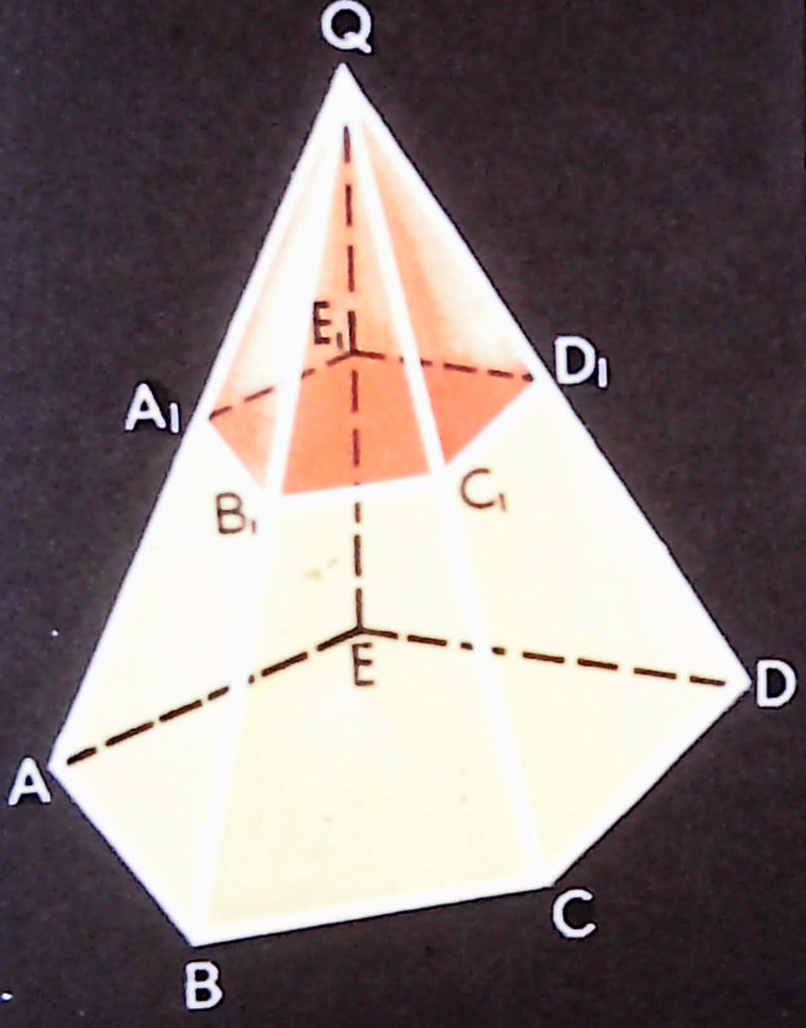
Проведём секущую плоскость $A_1B_1C_1D_1E_1$ параллельно основанию ABCDE.





Теорема 1.

Если в пирамиде QABCDE проведём секущую плоскость $A_1B_1C_1D_1E_1$ параллельно основанию ABCDE, то отсечём от неё пирамиду $QA_1B_1C_1D_1E_1$, подобную данной.



Дано:

$QABCDE$ — пирамида

$A_1B_1C_1D_1E_1$ — секущая плоскость

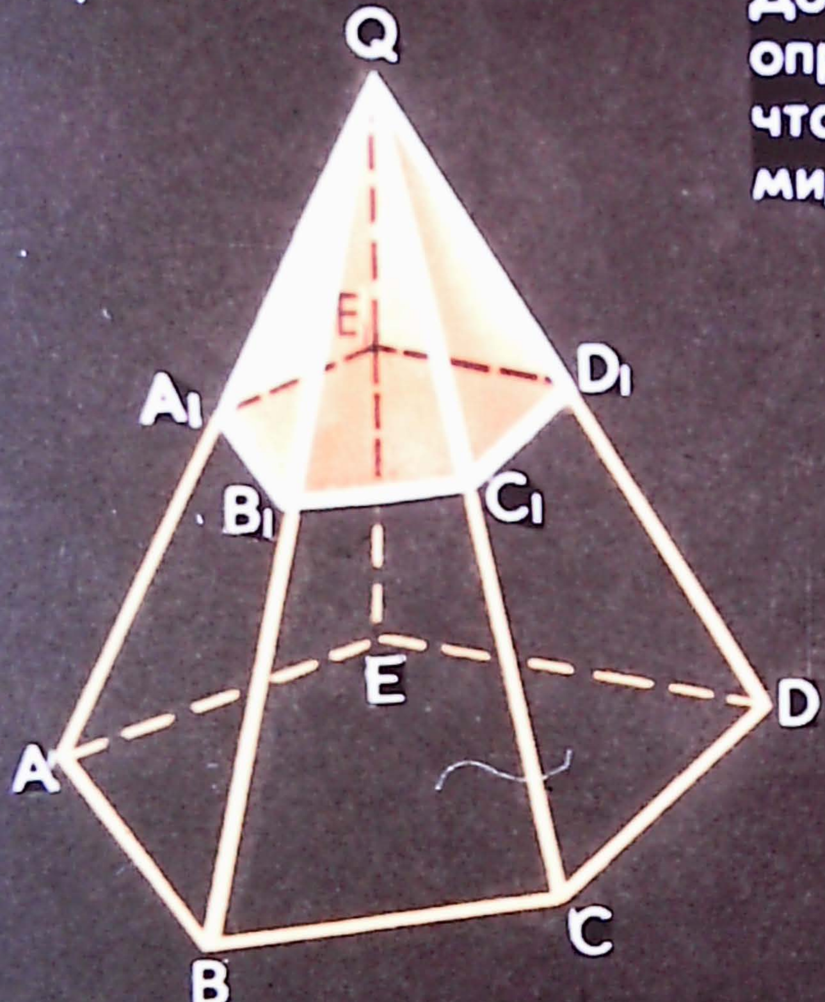
$A_1B_1C_1D_1E_1 \parallel ABCDE$

Требуется доказать:

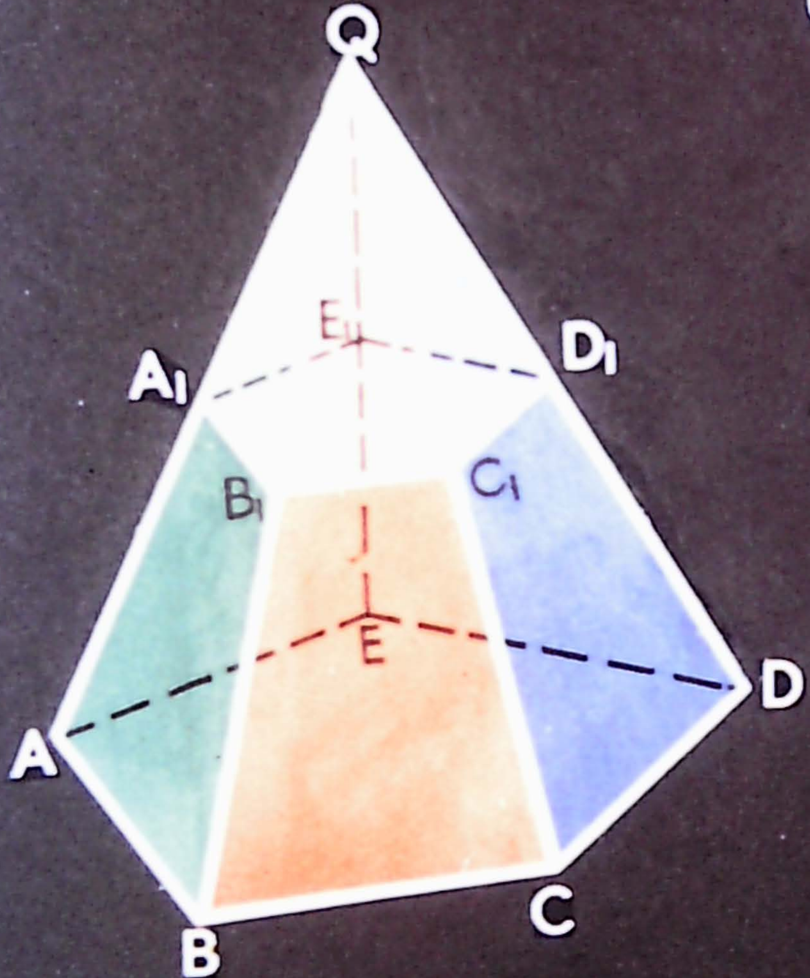
1) $QA_1B_1C_1D_1E_1$ — пирамида

2) $QA_1B_1C_1D_1E_1 \backsim QABCDE$

Знак подобия — $\backsim$ — повёрнутая латинская буква S (латинское similis — подобный).



Докажите на основании определения пирамиды, что $QA_1B_1C_1D_1E_1$ — пирамида.



Теперь докажем, что

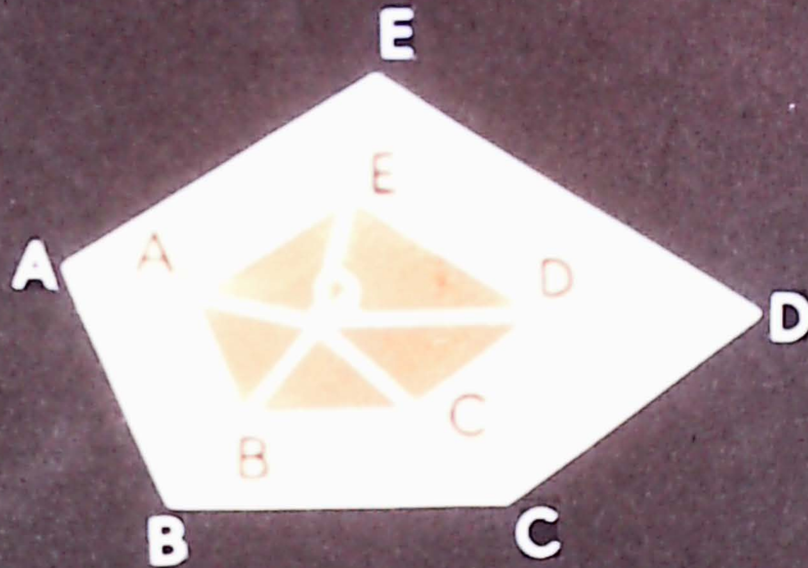
$QA_1B_1C_1D_1E_1 \backsim QABCDE.$

$\Delta A_1QB_1 \backsim \Delta AQB$

$\Delta B_1QC_1 \backsim \Delta BQC$

. . . .

$\Delta E_1QA_1 \backsim \Delta EQA$



$ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1$

$\angle Q$—общий для обеих пирамид.

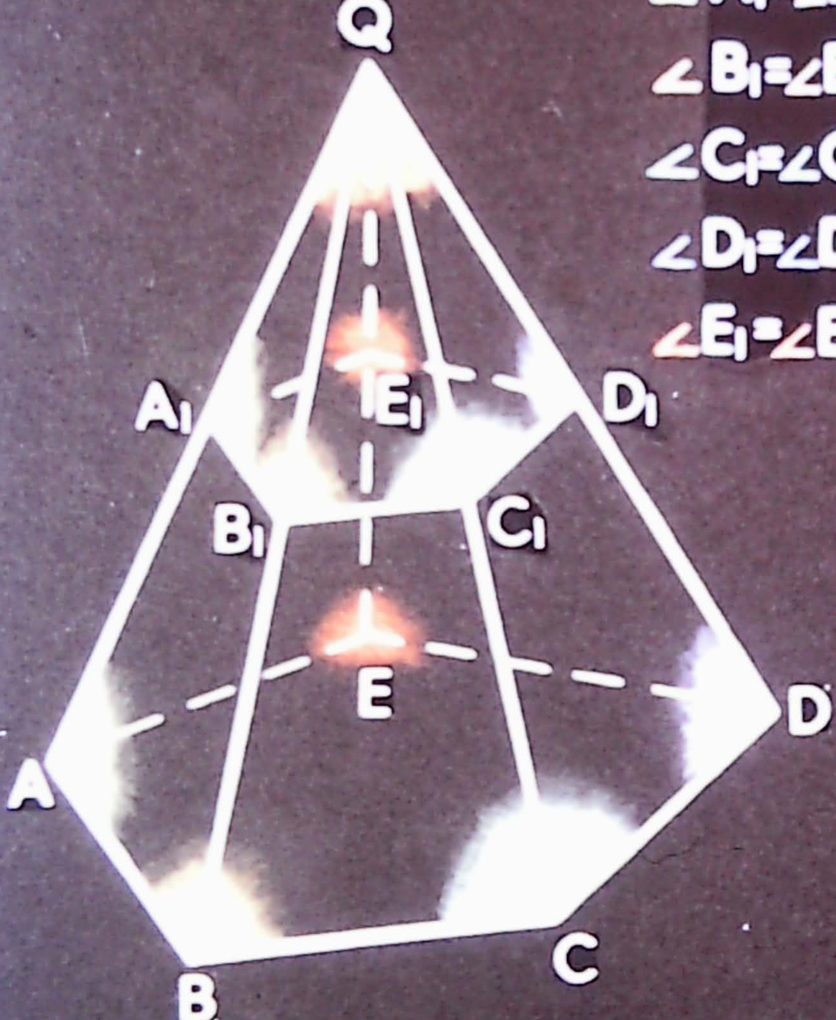
$\angle A_1 = \angle A$

$\angle B_1 = \angle B$

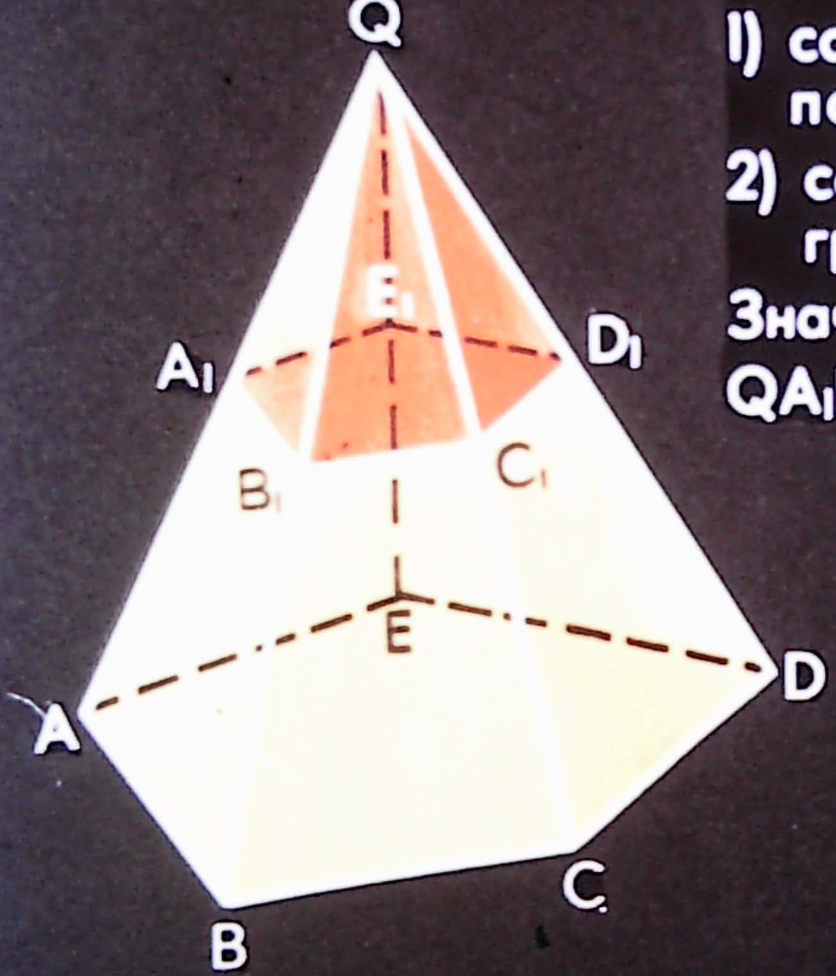
$\angle C_1 = \angle C$

$\angle D_1 = \angle D$

$\angle E_1 = \angle E$



14



Итак, у пирамиды QABCDE и пирамиды $QA_1B_1C_1D_1E_1$

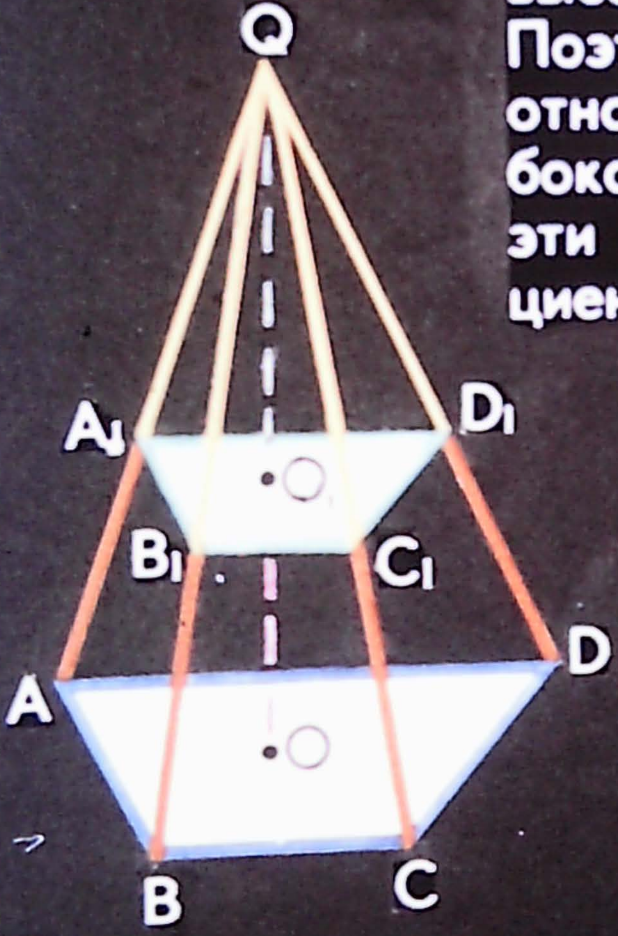
1) соответственные грани подобны,

2) соответственные многогранные углы равны.

Значит,

$QA_1B_1C_1D_1E_1 \backsim QABCDE$

Известно, что плоскость, пересекающая пирамиду параллельно основанию, делит её боковые рёбра и высоту на пропорциональные части. Поэтому у двух подобных пирамид отношения высот и сходственных боковых рёбер равны. Обозначим эти отношения через к (коэффициент подобия).



$$\frac{QO}{QO_1}=\frac{QA}{QA_1}=\frac{QB}{QB_1}=\frac{QC}{QC_1}=\frac{QD}{QD_1}=k$$

Докажите, что

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DA}{D_1A_1}=k$$

Теорема II. У подобных пирамид отношение поверхностей равно квадрату отношения сходственных рёбер (квадрату коэффициента подобия).

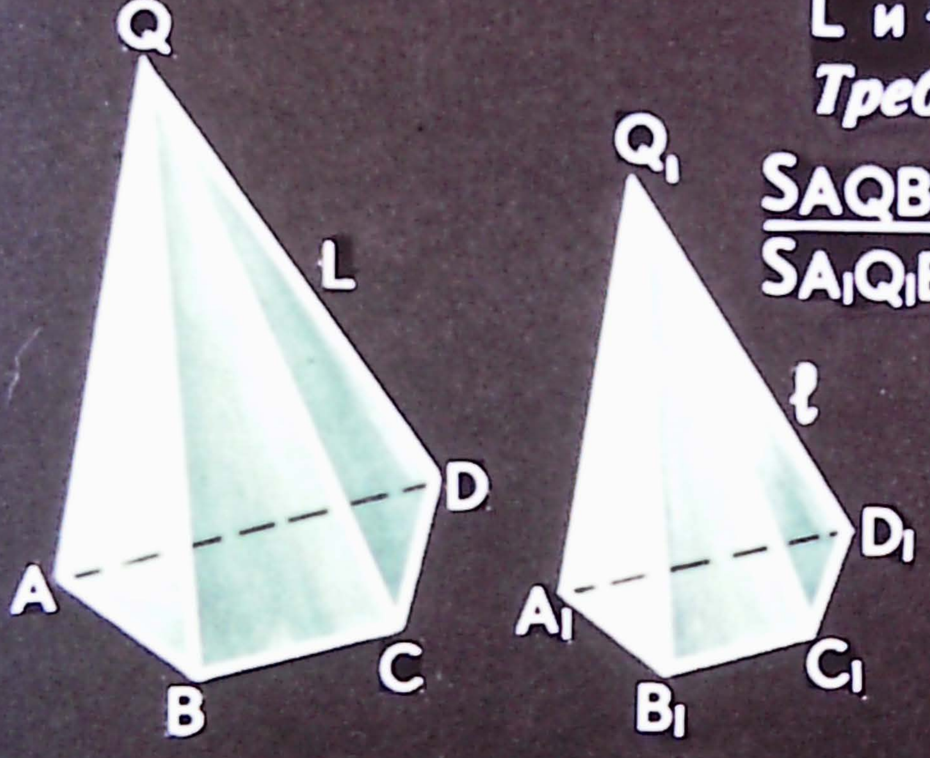
Дано:

$QABCD \sim Q_1A_1B_1C_1D_1$,

L и ℓ — длины двух рёбер.

Требуется доказать:

$$\frac{S_{AQB}+\ldots+S_{ABCD}}{S_{A_1Q_1B_1}+\ldots+S_{A_1B_1C_1D_1}}=\left(\frac{L}{\ell}\right)^2=k^2$$



Доказательство.

Так как по условию $QABCD \backsim Q_1A_1B_1C_1D_1$, то:

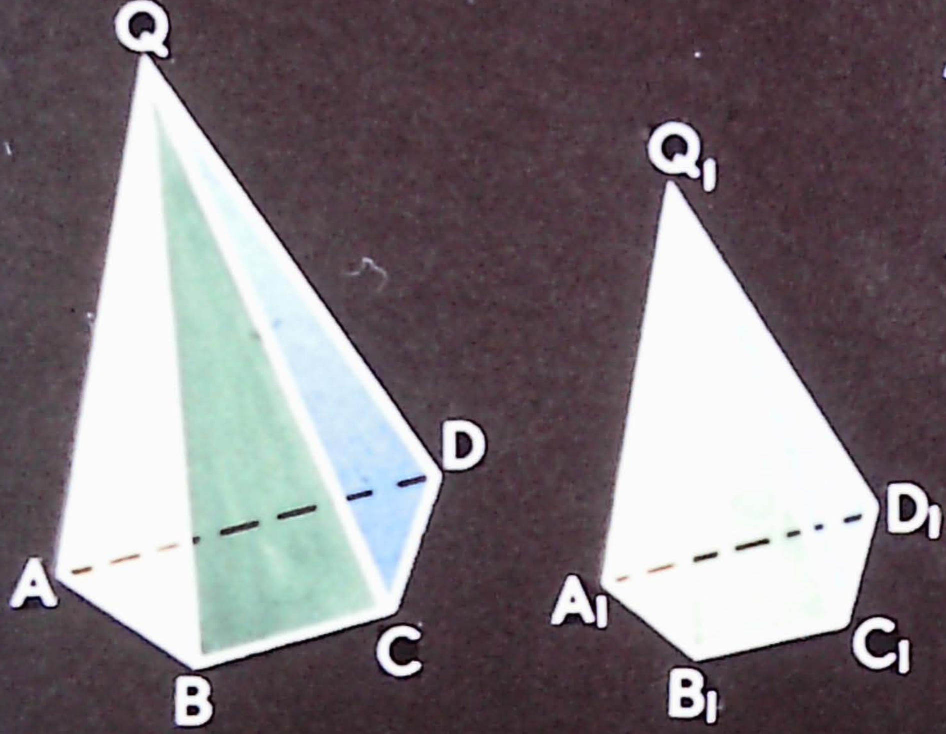
$\triangle AQB \backsim \triangle A_1Q_1B_1$

$\triangle BQC \backsim \triangle B_1Q_1C_1$

$\triangle CQD \backsim \triangle C_1Q_1D_1$

$\triangle DQA \backsim \triangle D_1Q_1A_1$

$ABCD \backsim A_1B_1C_1D_1$

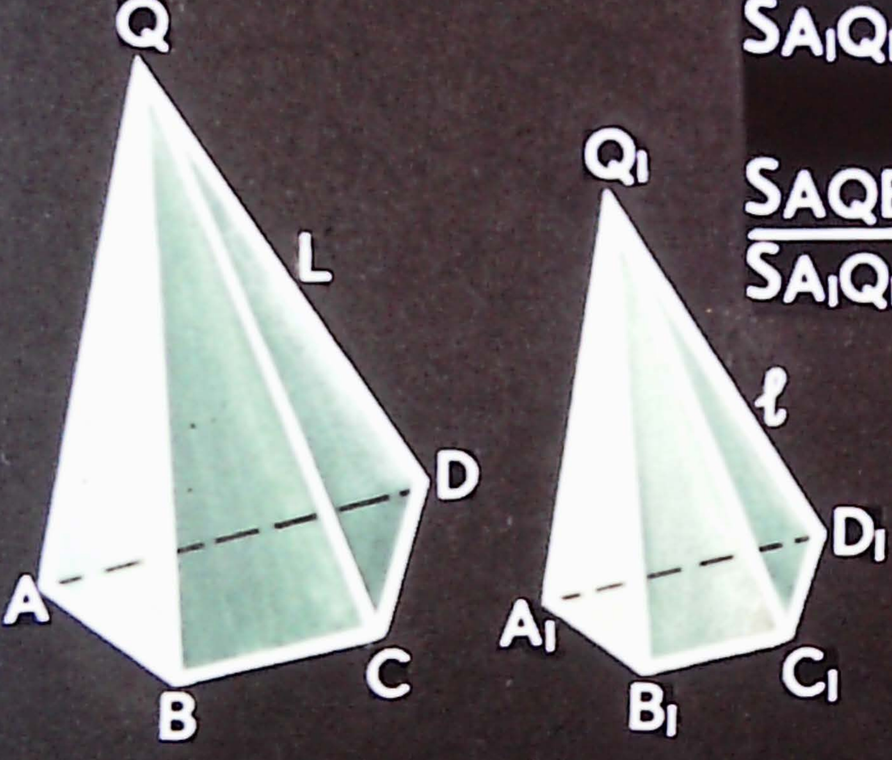


Зная, что отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон или квадрату коэффициента подобия и что у подобных пирамид отношения сходственных сторон равны, получим

$$\frac{S_{AQB}}{S_{A_1Q_1B_1}} = \ldots = \frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = k^2,$$

откуда

$$\frac{S_{AQB} + \ldots + S_{ABCD}}{S_{A_1Q_1B_1} + \ldots + S_{A_1B_1C_1D_1}} = \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = k^2$$



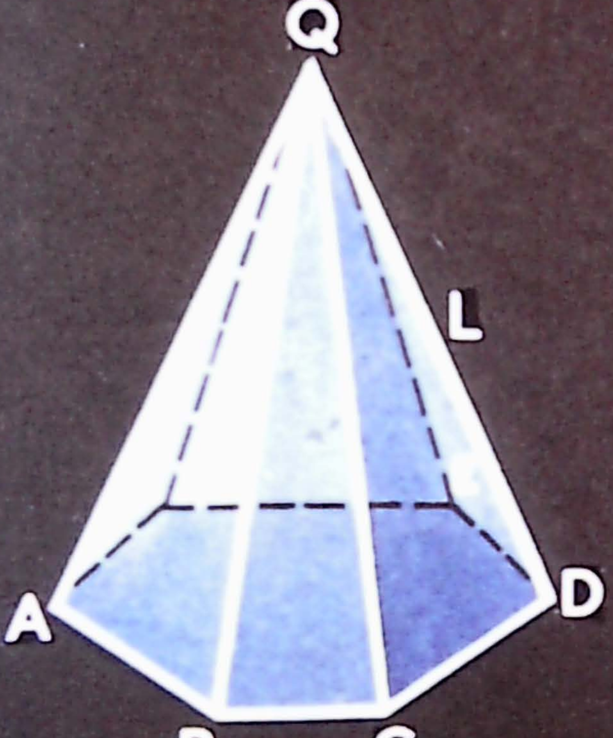
Теорема III. Отношение объёмов подобных пирамид равно кубу отношения сходственных рёбер (кубу коэффициента подобия).

Дано:

$QABCDEF \backsim Q_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1$

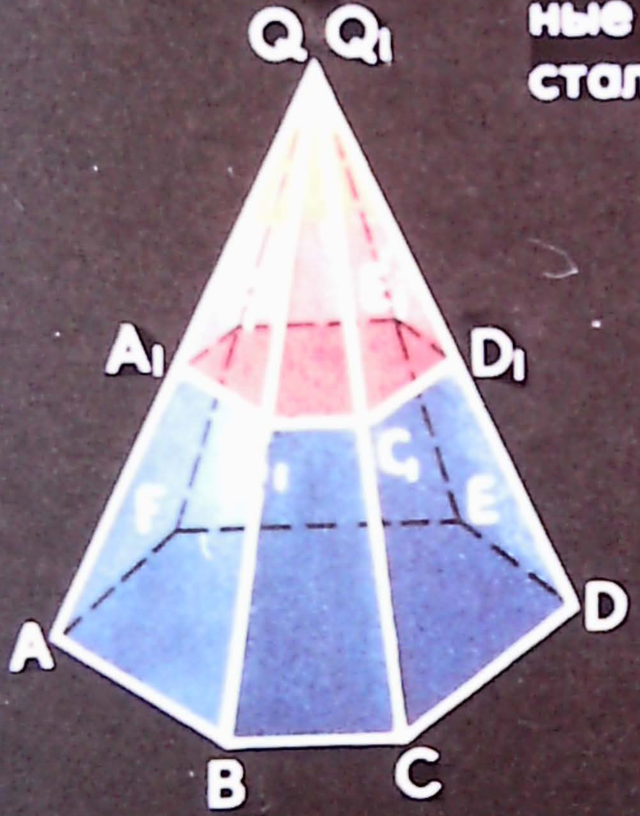
Требуется доказать:

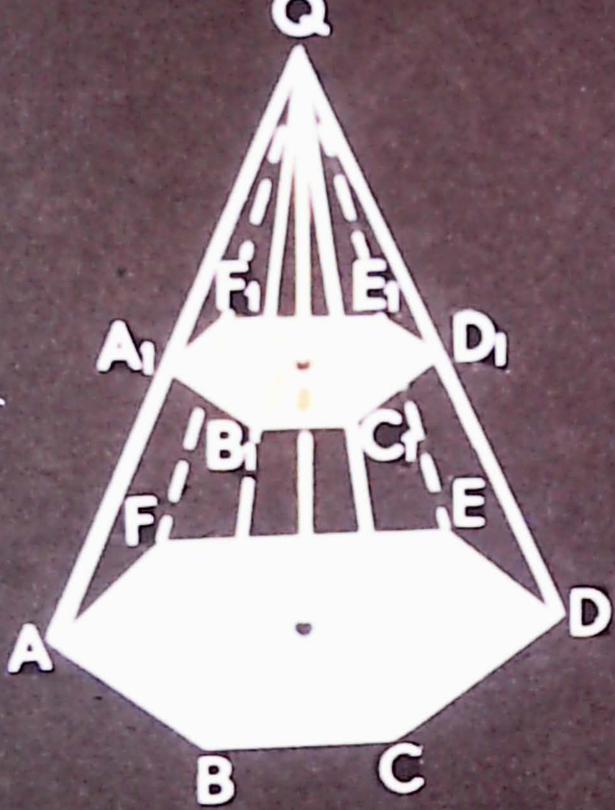
$$\frac{V_{QABCDEF}}{V_{Q_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = \left(\frac{L}{\ell}\right)^3 = k^3$$



Доказательство.

Вложим пирамиду $Q_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ в пирамиду $QABCDEF$ так, чтобы у них совпали равные многогранные углы Q и Q_1 и основания стали бы параллельными.



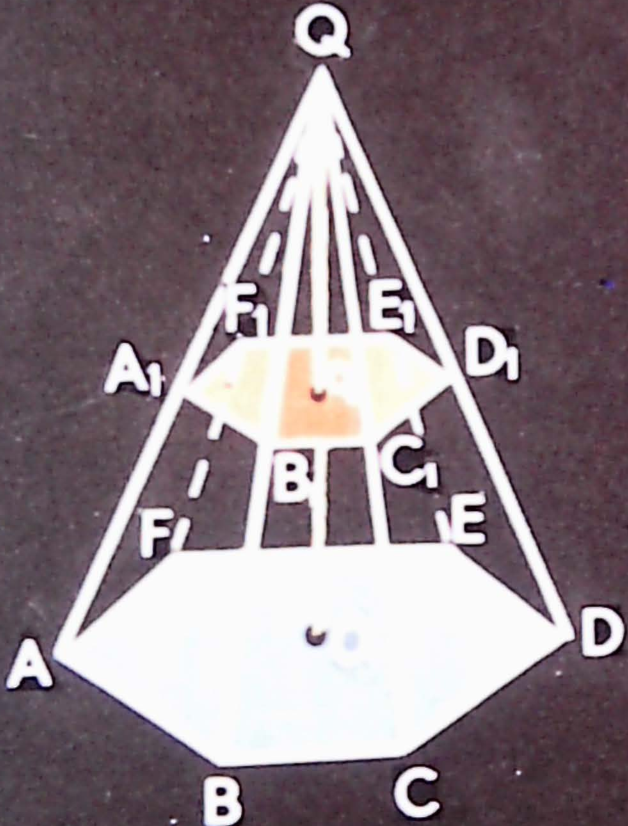


$$\frac{V_{QABCDEF}}{V_{QA_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = \frac{S_{ABCDEF} \cdot \frac{1}{3}QO}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} \cdot \frac{1}{3}QO_1}$$

Следовательно,

$$\frac{V_{QABCDEF}}{V_{QA_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = \frac{S_{ABCDEF}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}} \cdot \frac{QO}{QO_1}$$

Зная, что площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины, т. е.



$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}}=\frac{QO^2}{QO_1^2},$$

получим:

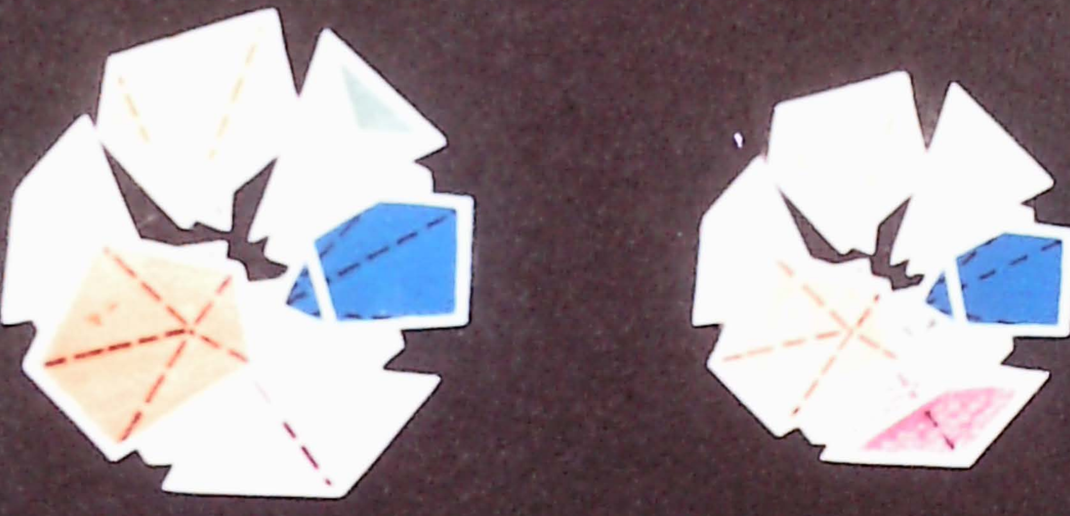
$$\frac{V_{QABCDEF}}{V_{QA_1B_1C_1D_1E_1F_1}}=\frac{QO^3}{QO_1^3}=\left(\frac{QO}{QO_1}\right)^3=\left(\frac{L}{\ell}\right)^3=k^3;$$

а так как

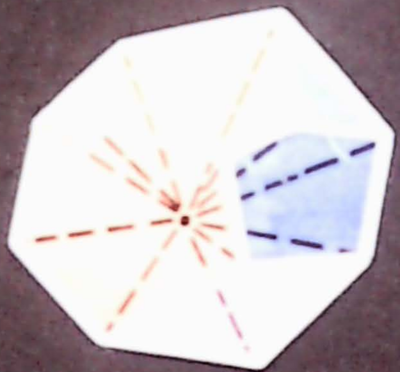
$$V_{QA_1B_1C_1D_1E_1F_1}=V_{Q_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1},$$ то

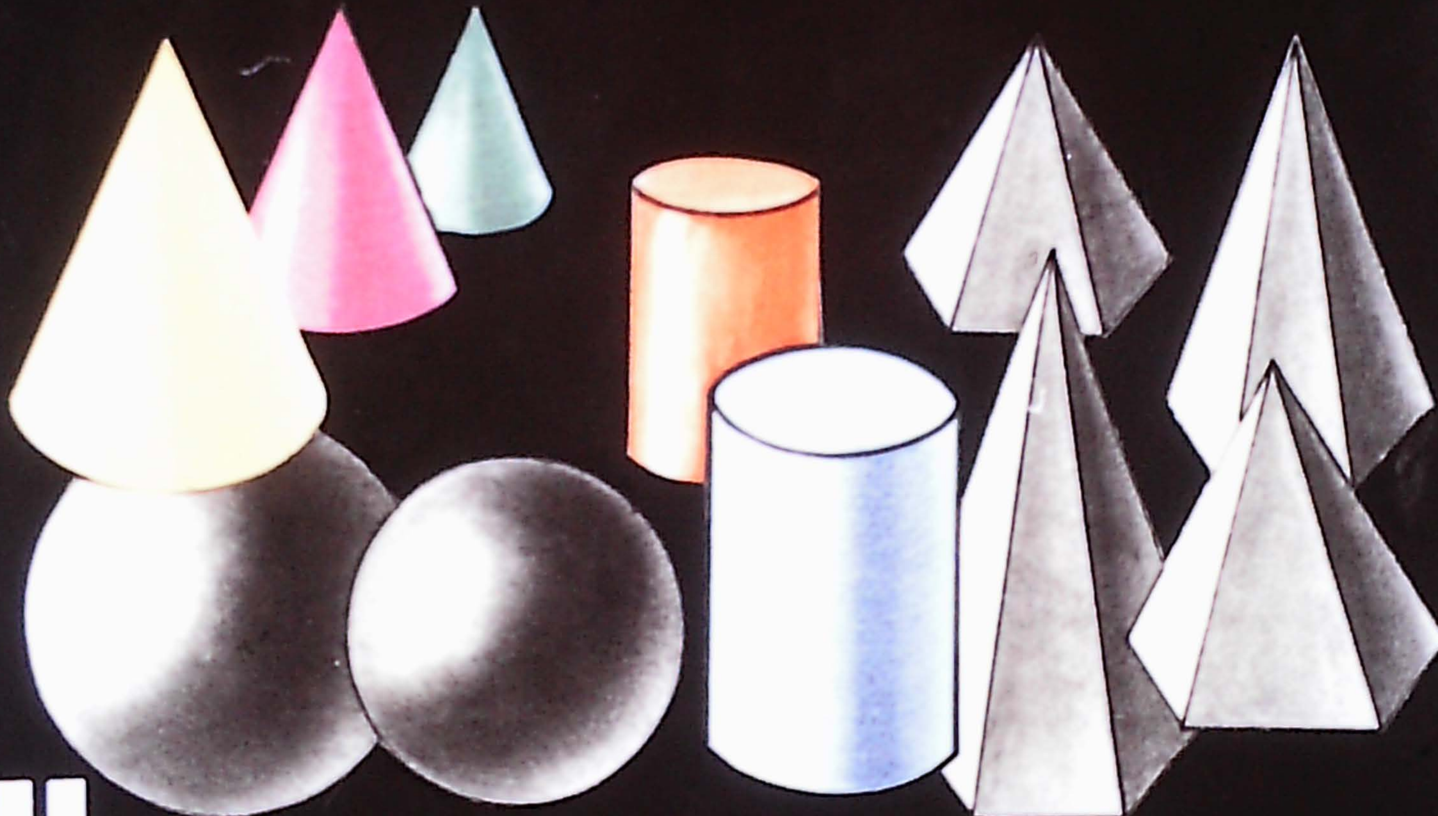
$$\frac{V_{QABCDEF}}{V_{Q_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1}}=\left(\frac{L}{\ell}\right)^3=k^3$$

Справедлива **теорема IV.** Два подобных многогранника могут быть разложены на соответственно подобные пирамиды с одним и тем же коэффициентом подобия.



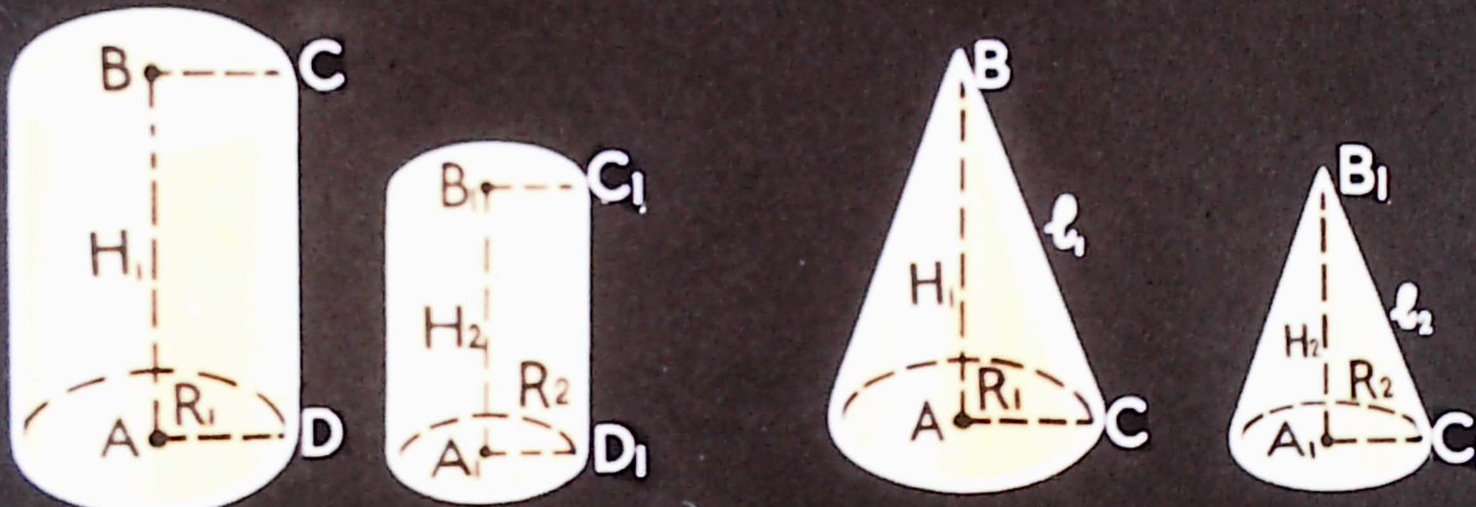
Значит, теоремы II и III справедливы для любых многогранников. Сформулируйте эти теоремы в общем виде. Сформулируйте обратные теоремы. Верны ли они?





II.
ПОДОБИЕ ЦИЛИНДРОВ И КОНУСОВ

Два цилиндра (конуса) подобны, если они произошли от вращения подобных прямоугольников (прямоугольных треугольников) вокруг сходственных сторон.



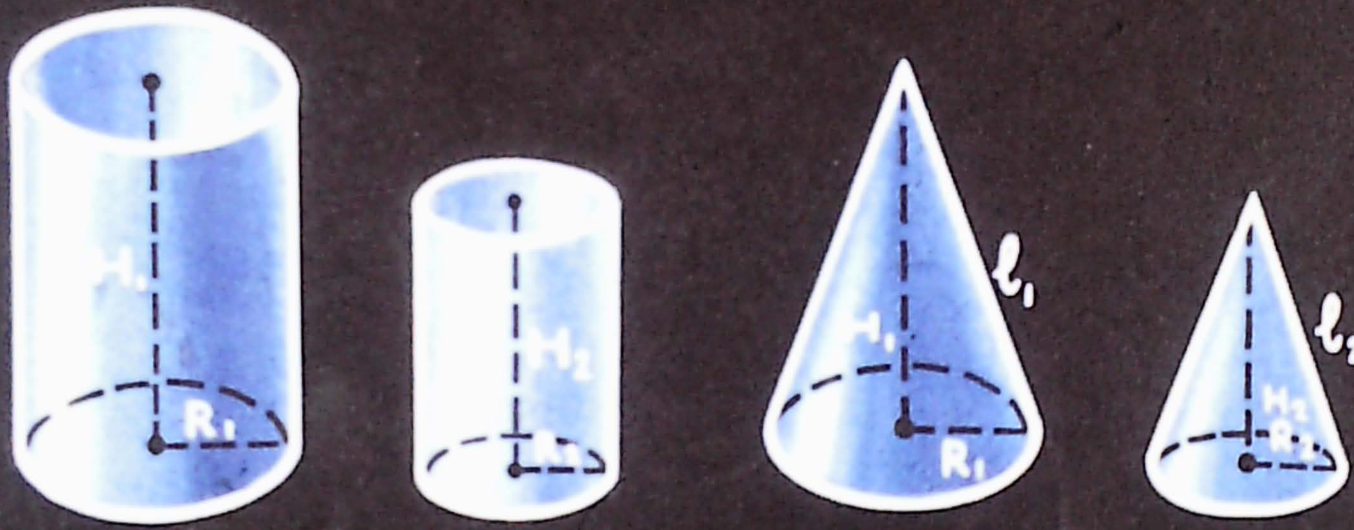
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{H_1}{H_2} = k,$$

т. к. $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} = k,$$

т. к. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

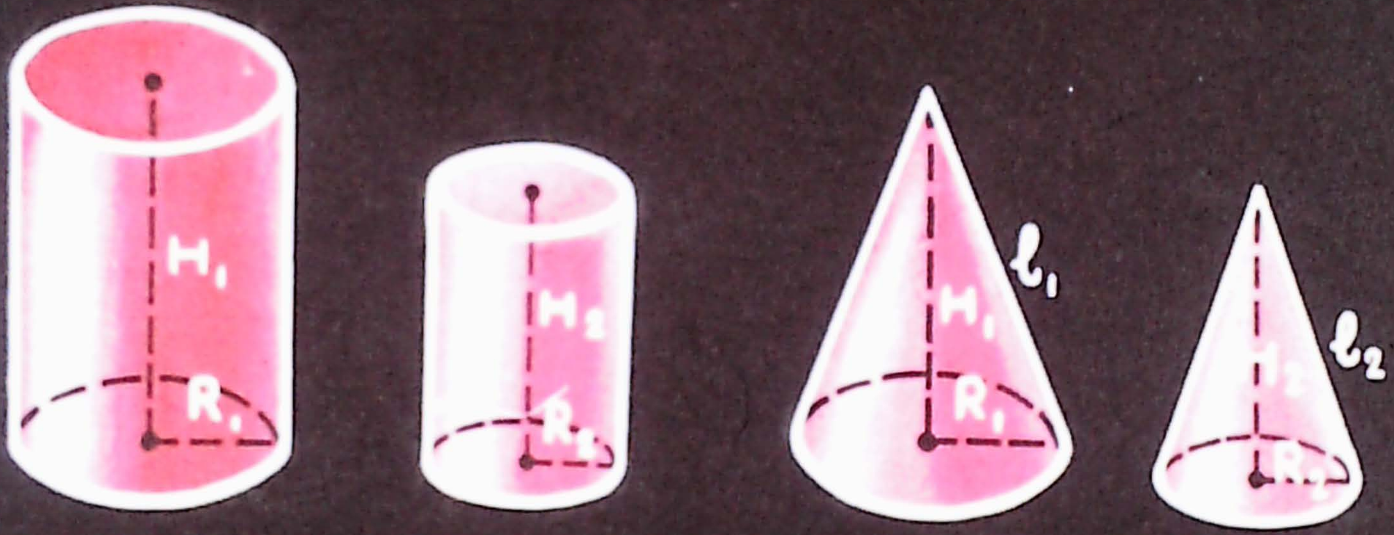
Теорема V. Отношение боковых поверхностей подобных цилиндров (конусов) равно квадрату коэффициента подобия.



$$\frac{S_{б_1}}{S_{б_2}}=\frac{2\pi R_1H_1}{2\pi R_2H_2}=\frac{R_1\cdot H_1}{R_2\cdot H_2}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{H_1}{H_2}=k^2=\frac{R_1^2}{R_2^2}=\ldots$$

Докажите аналогичную теорему для подобных конусов.

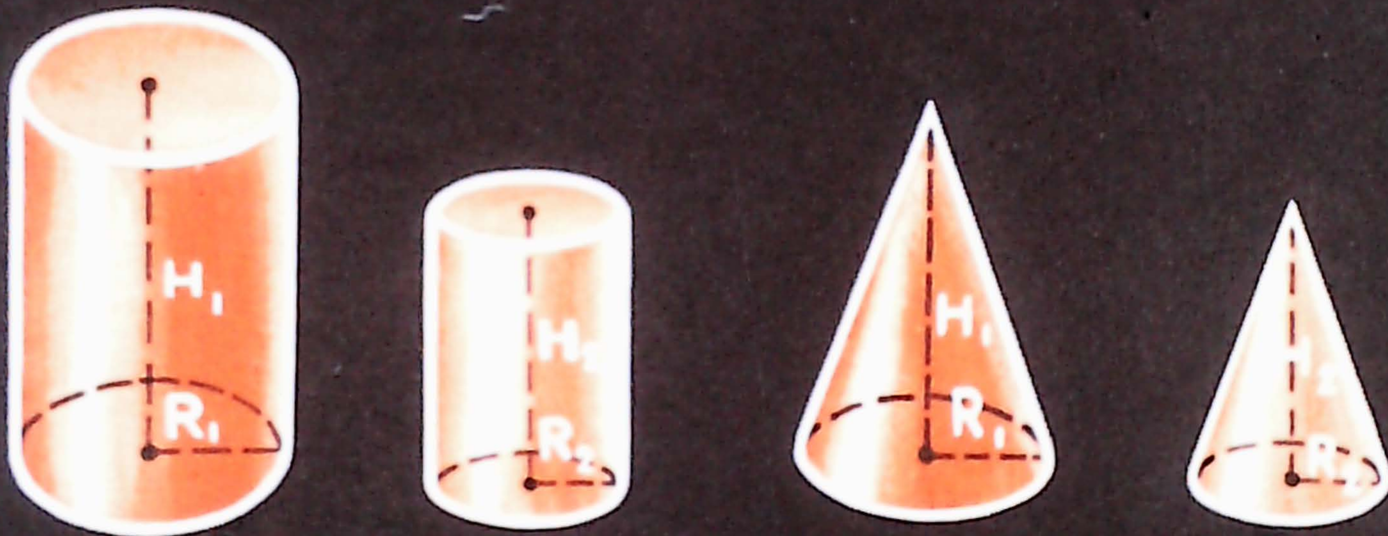
Теорема VI. Отношение полных поверхностей подобных цилиндров (конусов) равно квадрату коэффициента подобия.



$$\frac{S_{n_1}}{S_{n_2}}=\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2}\cdot\frac{(R_1+H_1)}{(R_2+H_2)}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_1+H_1}{R_2+H_2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=k^2$$

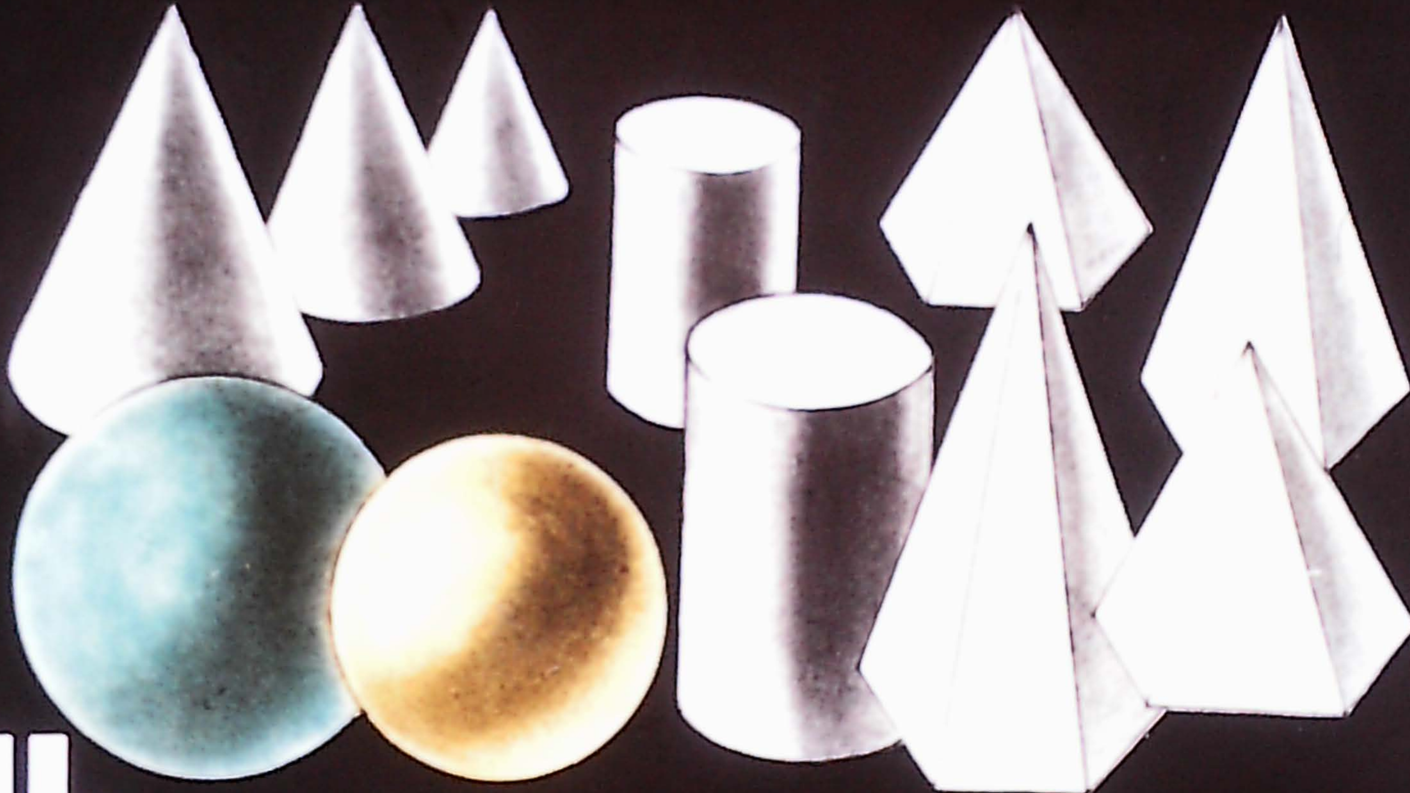
Докажите аналогичную теорему для подобных конусов.

Теорема VII. Отношение объёмов подобных цилиндров (конусов) равно кубу коэффициента подобия.



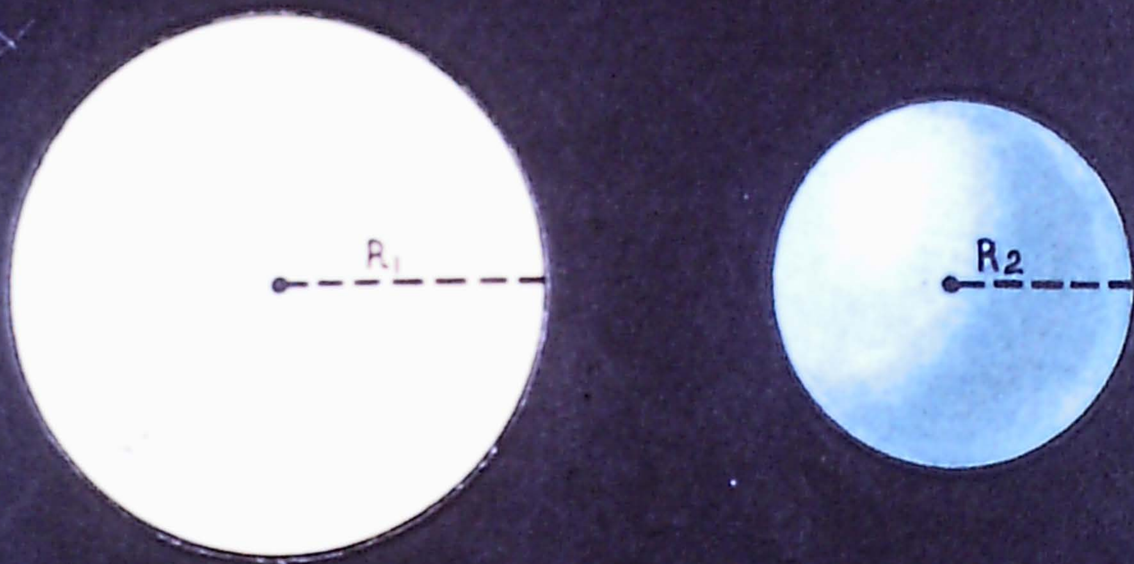
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2 H_1}{\pi R_2^2 H_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{H_1}{H_2} = k^3 = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{H_1^3}{H_2^3}$$

Докажите аналогичную теорему для подобных конусов.



III. ПОДОБИЕ ШАРОВ

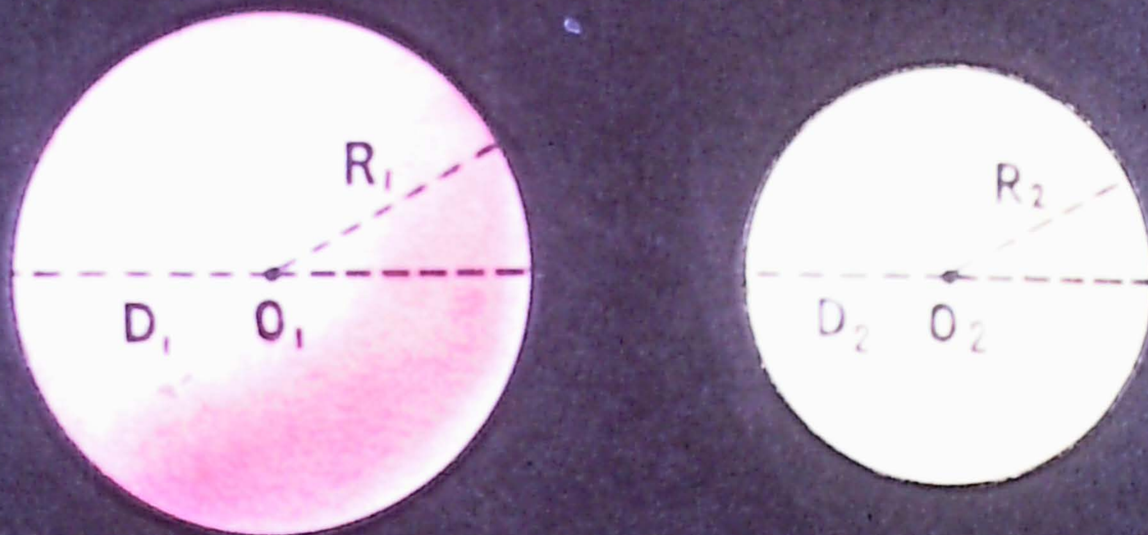
Все шары подобны между собой.



$$\frac{R_1}{R_2} = k$$ (коэффициент подобия)

Теорема VIII.

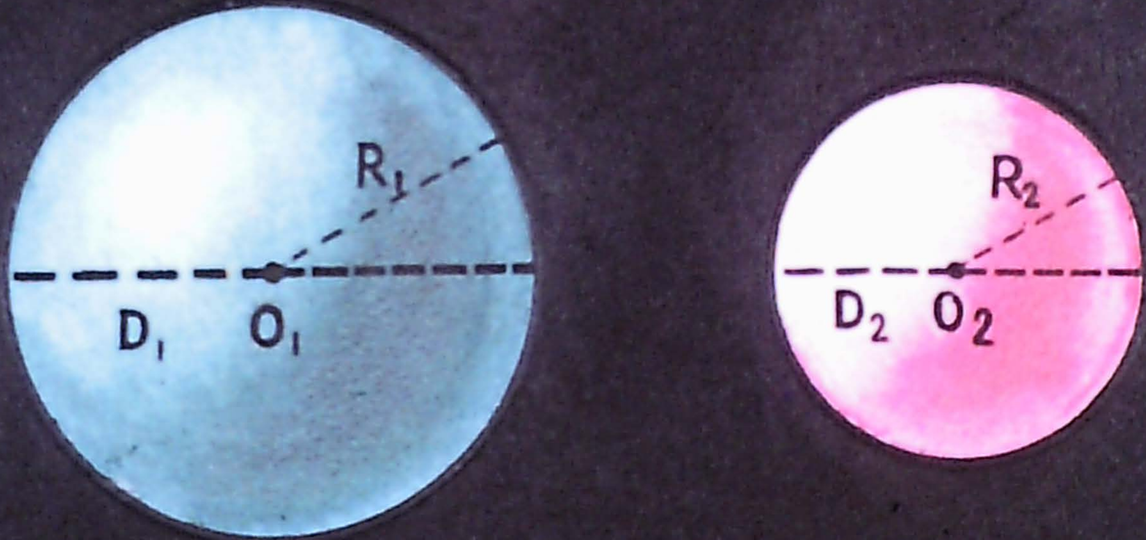
Отношение поверхностей шаров равно квадрату коэффициента подобия.



$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2=k^2$$

Теорема IX.

Отношение объёмов шаров равно кубу коэффициента подобия.



$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=\frac{R_1^3}{R_2^3}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3=\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3=k^3$$

IV.
ЗАДАЧИ

Диаметр одного глобуса 20 см, а диаметр другого—40 см.

1) Во сколько раз длина меридиана большего глобуса больше длины меридиана меньшего глобуса?

2) Во сколько раз площадь острова Гренландия на большом глобусе больше площади этого острова на малом глобусе?

3) Во сколько раз объём большего глобуса больше объёма меньшего глобуса?

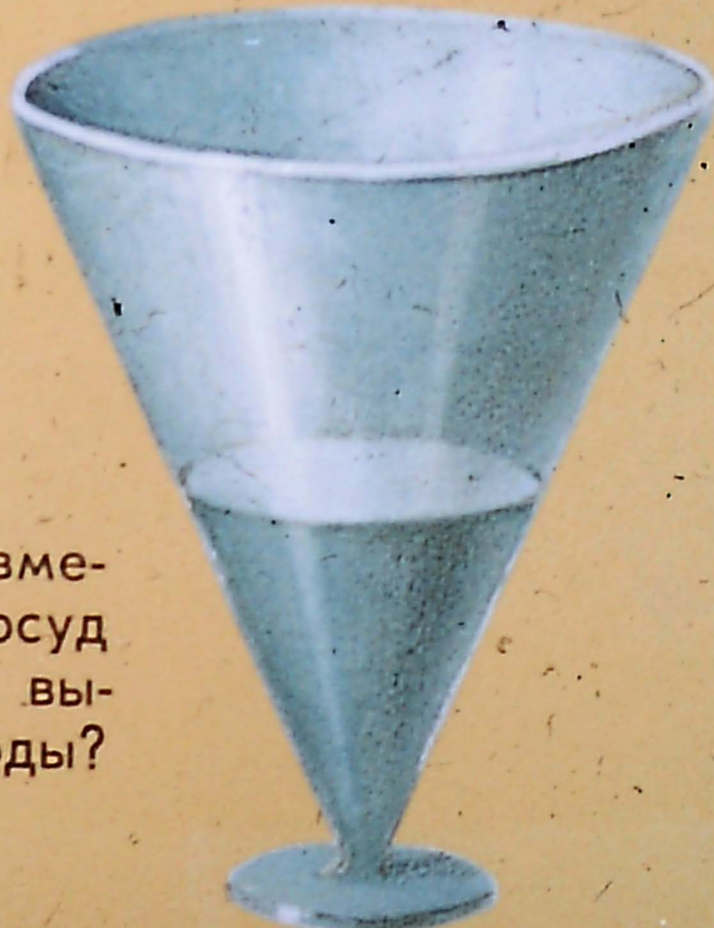
Известно, что Гулливер в 12 раз больше лилипута, но во столько же раз меньше великана и что они подобны.

1). Если Гулливер имел рост 180 см, то каким был рост лилипута и великана?

2). Во сколько раз лилипут меньше великана?

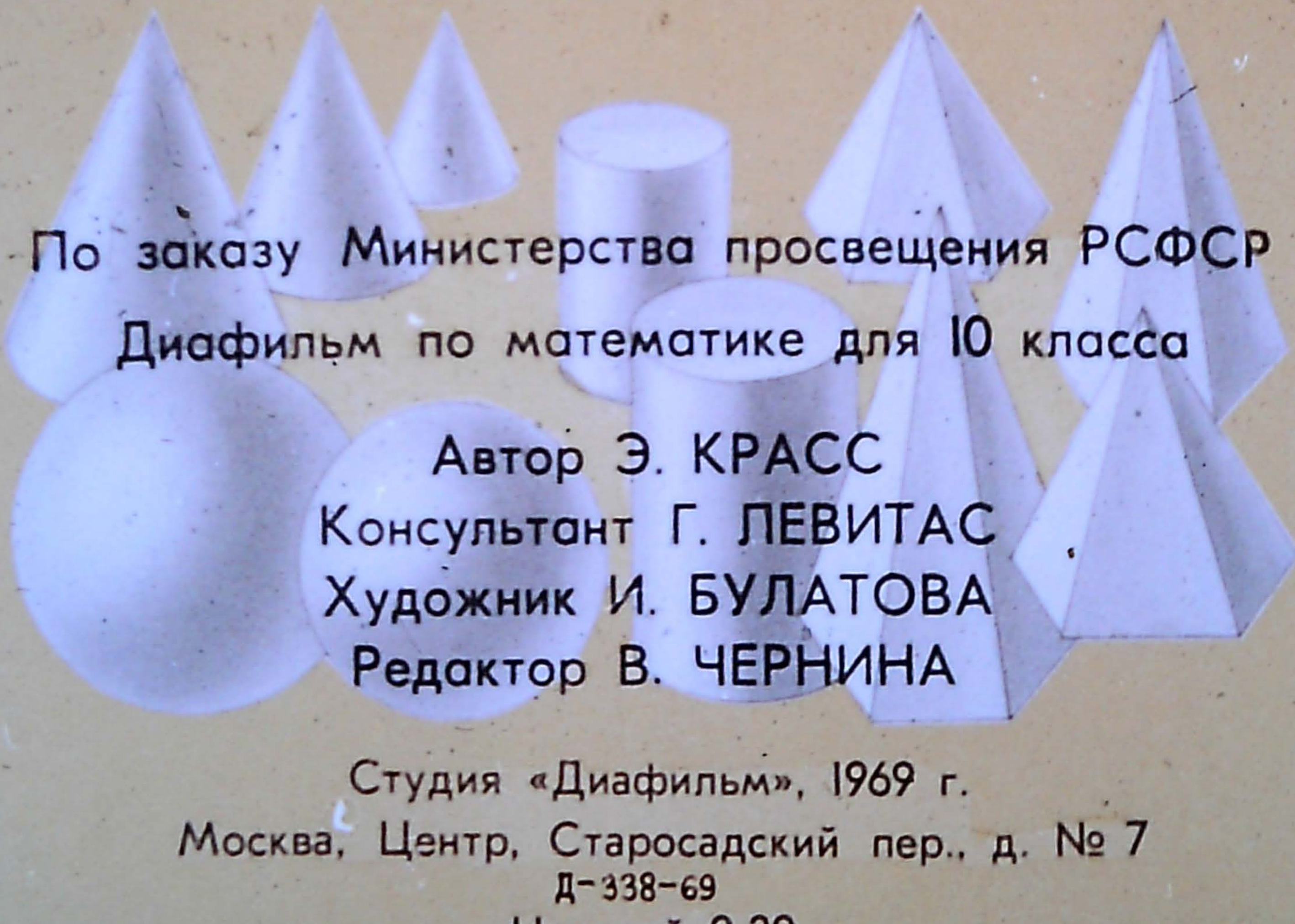
3). Когда лилипут купался, то уровень воды в бассейне поднялся на 0,1 мм. На сколько поднимется уровень воды в этом же бассейне, если будет купаться великан?

В сосуд высотой 20 см вмещается 2 литра воды. Сосуд наполнили до половины высоты. Сколько в нём воды?



В этот же сосуд налили один литр воды. Каков уровень воды?

КОНЕЦ



По заказу Министерства просвещения РСФСР

Диафильм по математике для 10 класса

Автор Э. КРАСС

Консультант Г. ЛЕВИТАС

Художник И. БУЛАТОВА

Редактор В. ЧЕРНИНА

Студия «Диафильм», 1969 г.

Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Д-338-69

Цветной 0-30