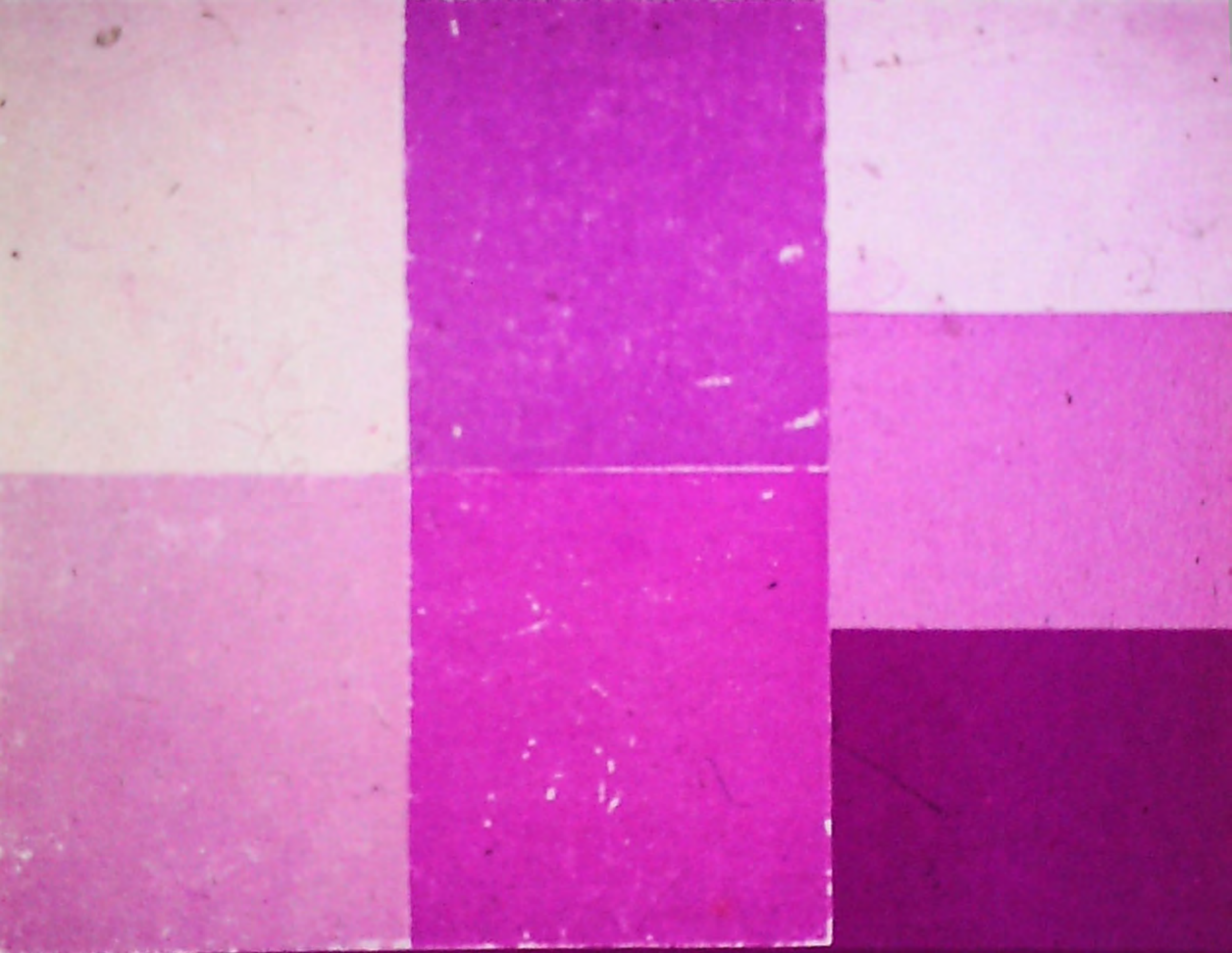


III 1974

5 4 1

ТУ 19—32—73

6

1

ДИАФИЛЬМ

07—3—172

По заказу Министерства просвещения РСФСР

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Диафильм по математике для 10 класса

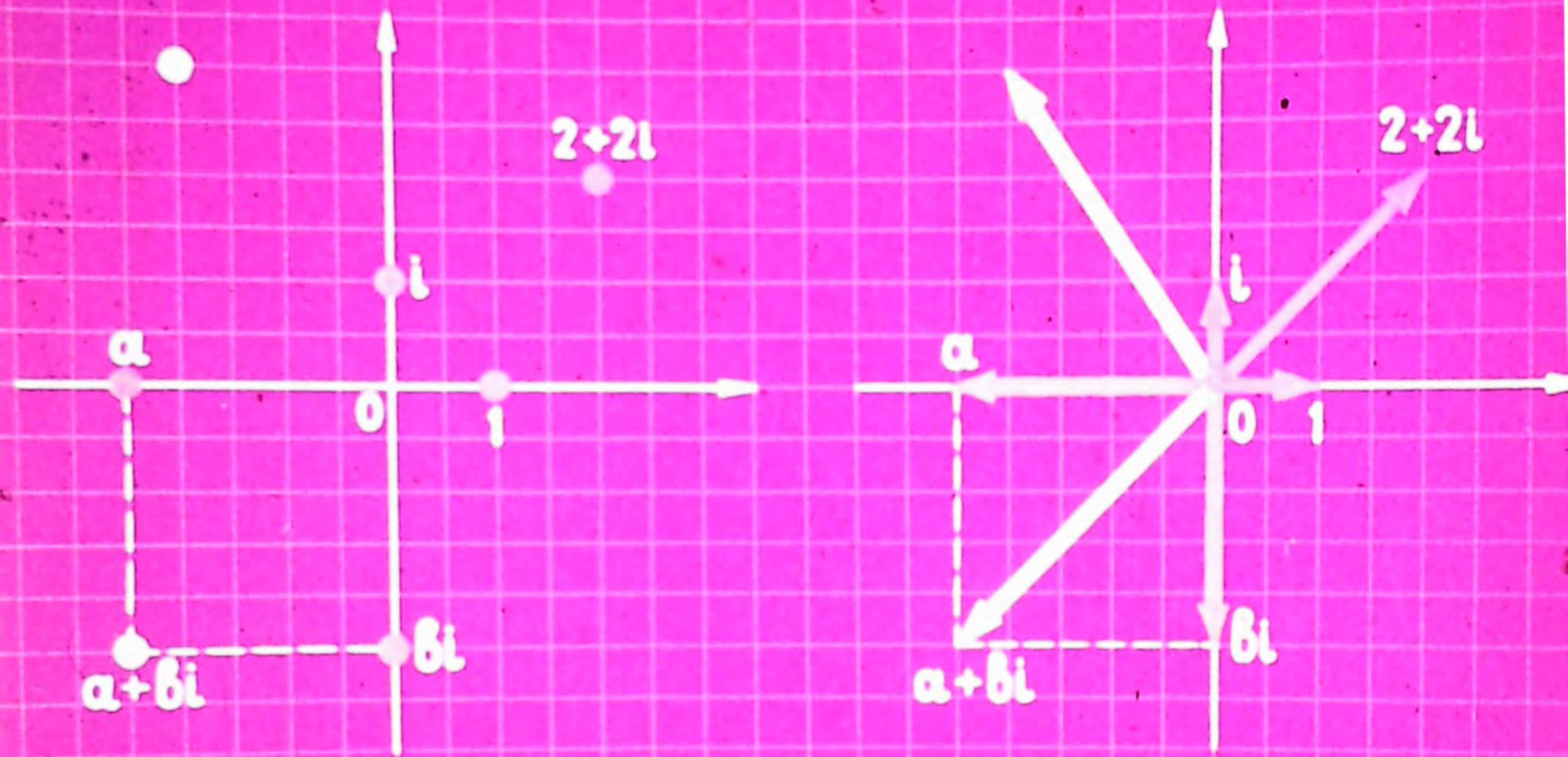
К СВЕДЕНИЮ УЧИТЕЛЯ

Диафильм можно использовать после изучения материала об алгебраической форме комплексных чисел или (кк. 4—14) параллельно с ним. В кк. 15—22 вводится тригонометрическая форма комплексного числа, не равного нулю (нуль тригонометрической формы не имеет, так как у него не определён аргумент). Это облегчает умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел. В кк. 29—37 даётся решение алгебраических уравнений. При этом сознательно не вводится символ $\sqrt[n]{z}$. Этот символ оставлен для обозначения арифметического корня. Обратите особое внимание на кк. 34 и 37.

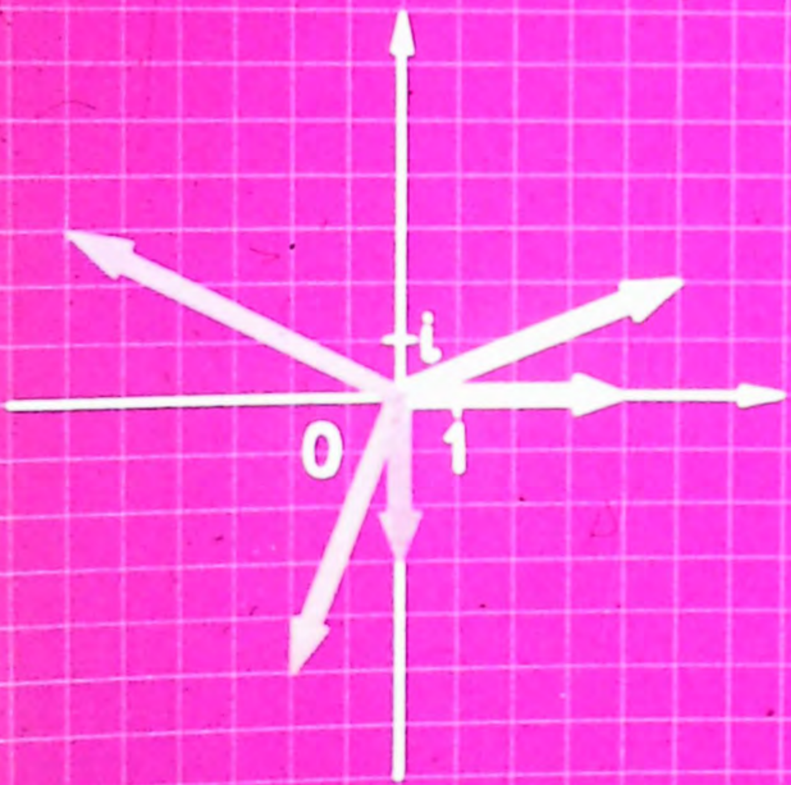
В кк. 12, 16 и других желательно максимально использовать геометрические пути доказательства. В кк. 23 и 24 нужно обратить внимание на использование ассоциативного и дистрибутивного законов.

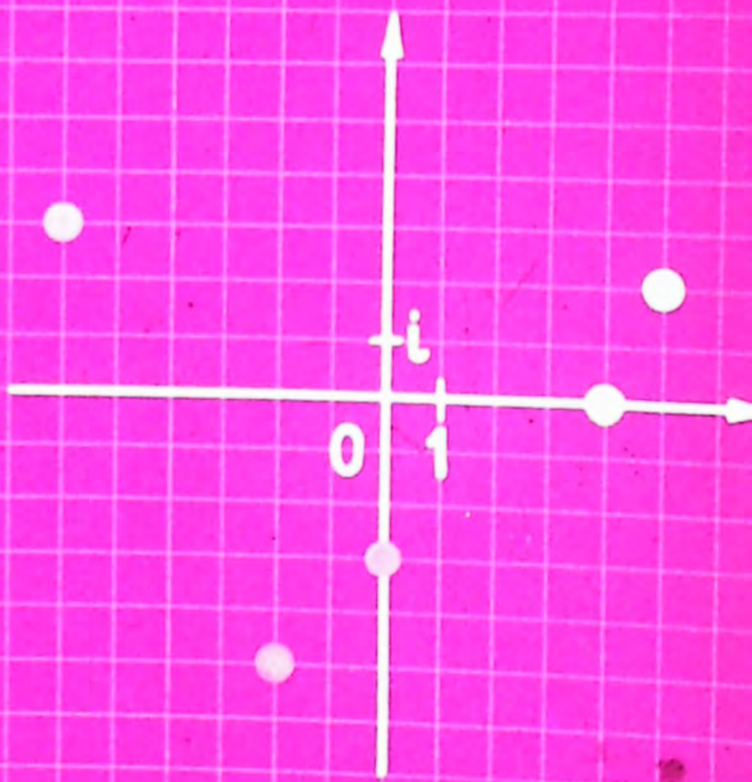
В диафильме вектор и точка, изображающие число Z, так и обозначаются: вектор Z, точка Z. В кк. 13 и 27 нужно сослаться на определение вычитания и деления как действий, обратных сложению и умножению.

Ответы к кадру 35: а) $x^6-(1-8i)x^3-8i=0$; б) $x^4+(9+i)x^2+9i=0$.

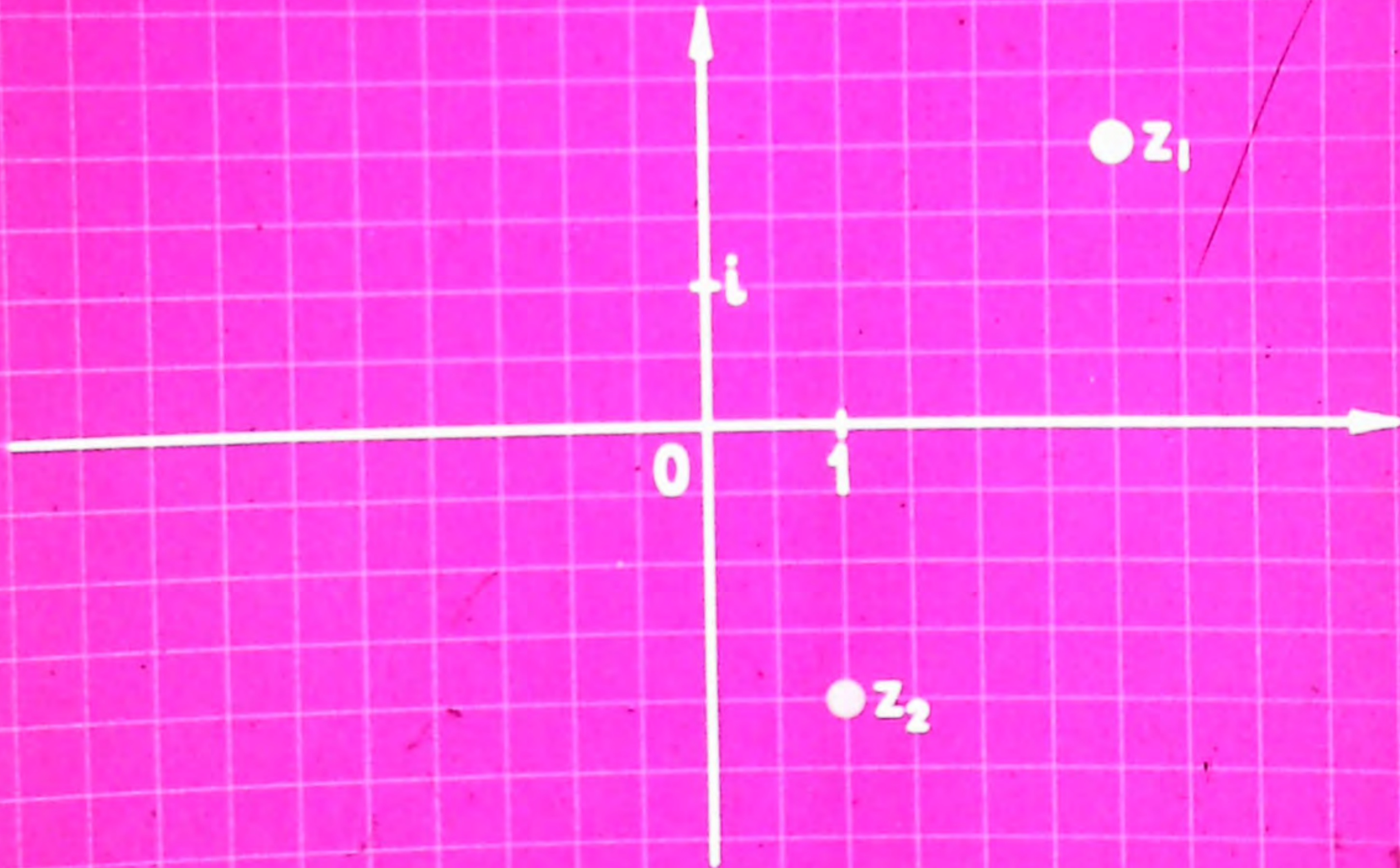


Рассмотрим прямоугольную систему координат. Условимся изображать комплексное число $a+bi$ точкой, имеющей координаты $(a;\ b)$, или вектором, идущим из начала координат к этой точке.

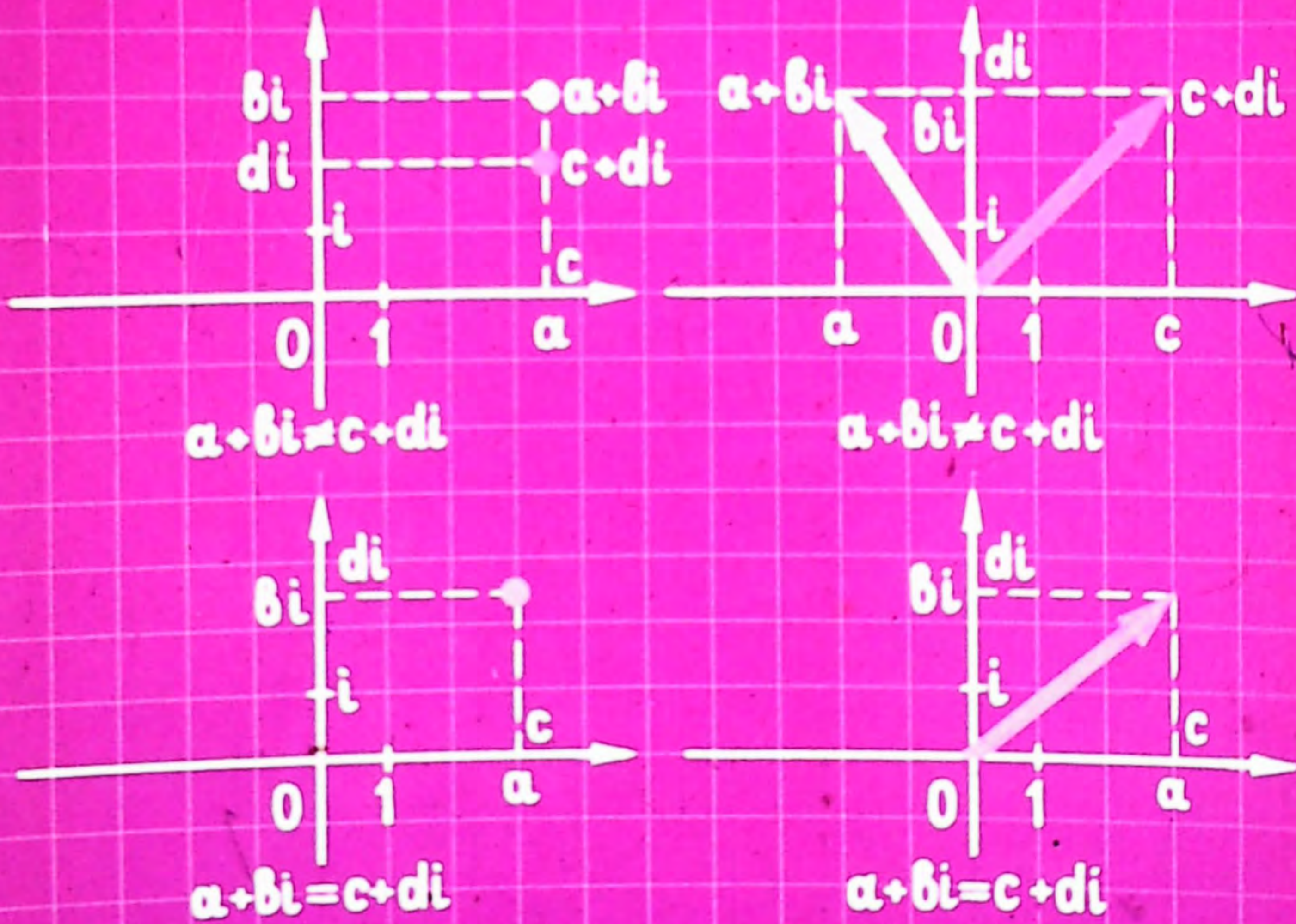




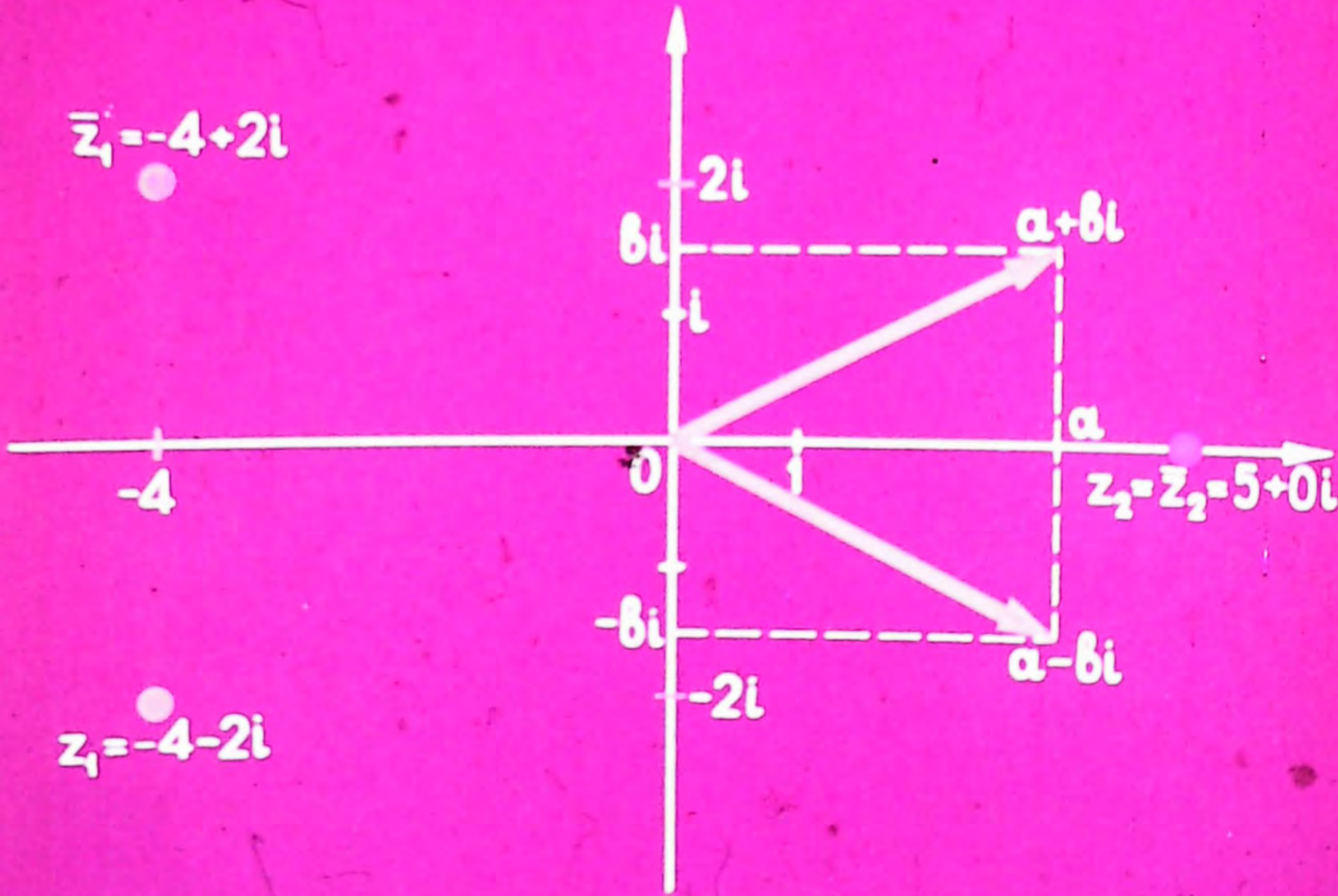
Какие комплексные числа изображены на чертежах?



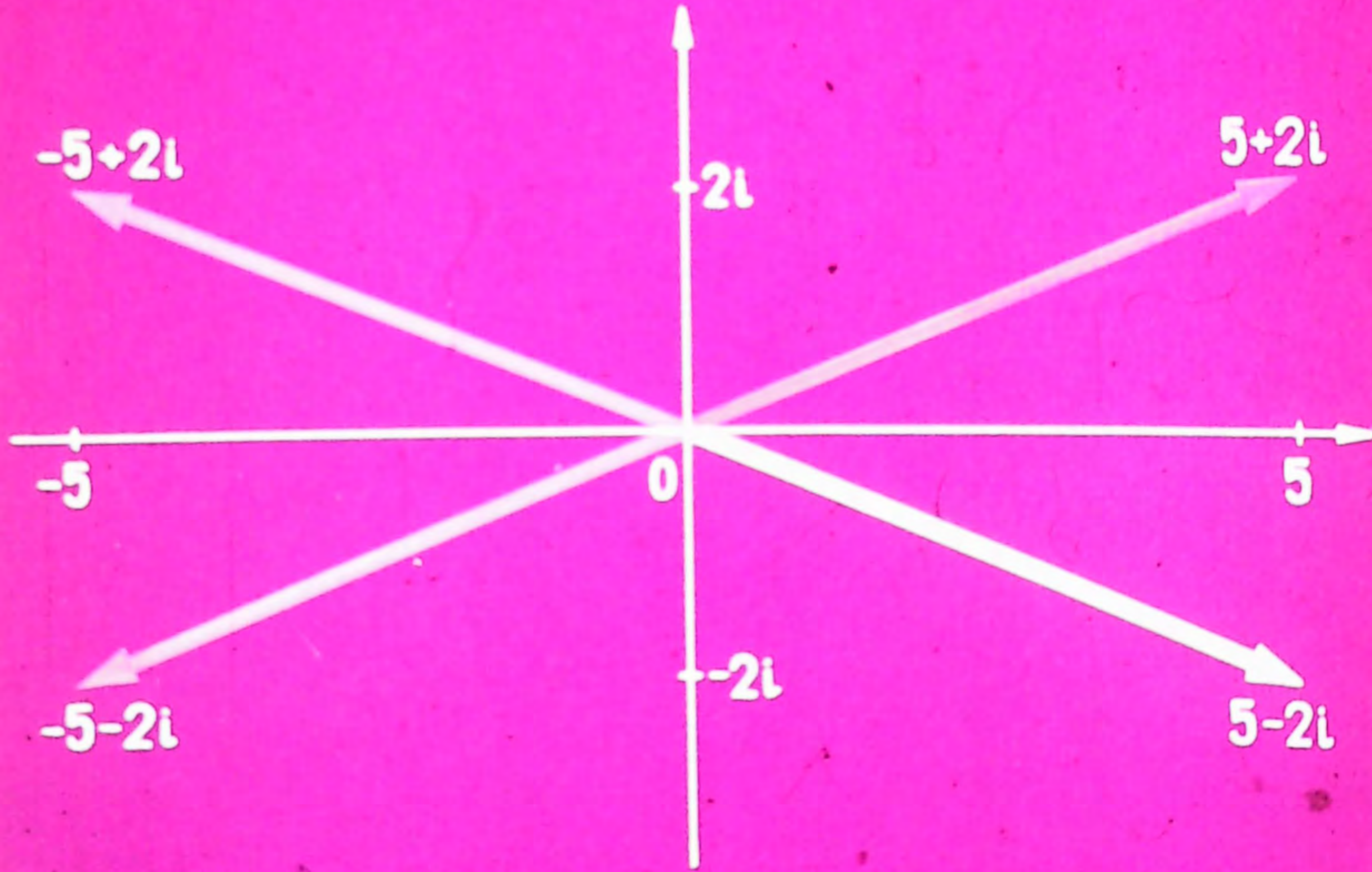
Назовите числа z_1 и z_2. Какие числа изображаются точками, симметричными точкам z_1 и z_2 относительно оси абсцисс? Относительно начала координат? Какое число изображается точкой, симметричной z_1 относительно z_2?



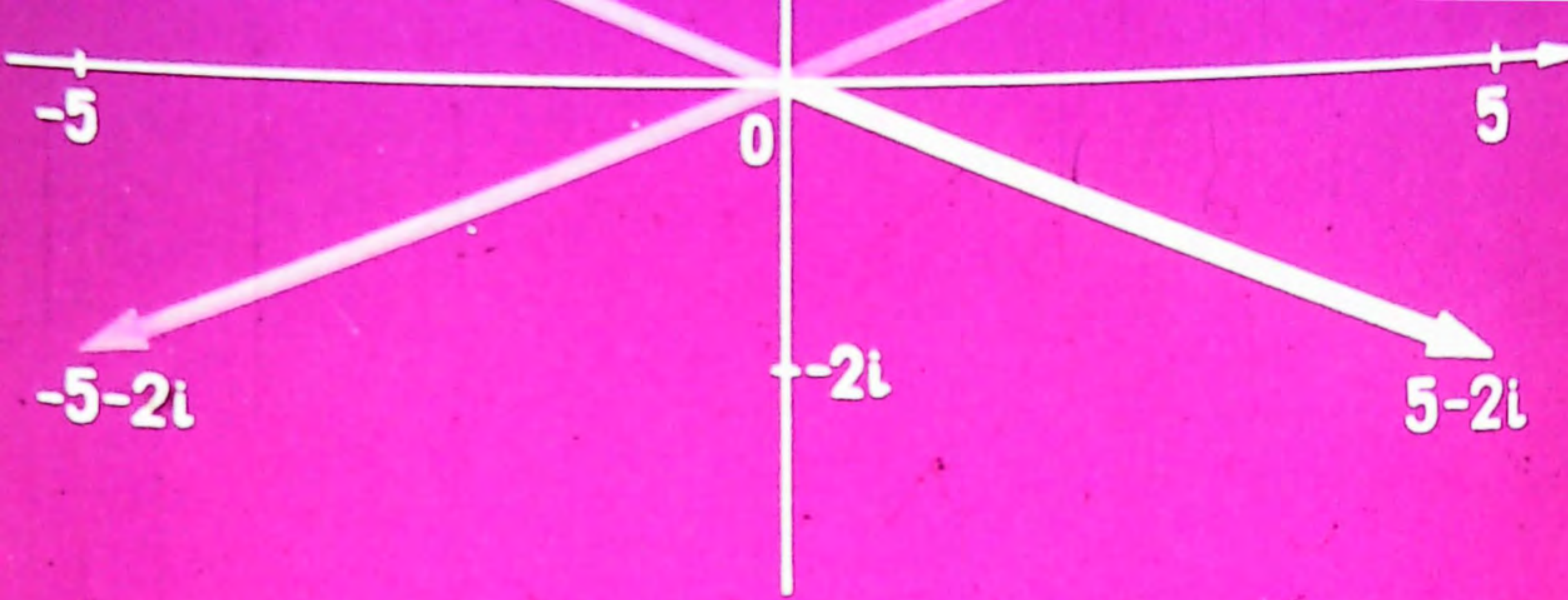
Равные комплексные числа изображаются одной и той же точкой (одним и тем же вектором).



Сопряжённые комплексные числа изображаются точками (векторами), симметричными относительно оси абсцисс. Число, сопряжённое числу z, обозначается $\bar{z}$.

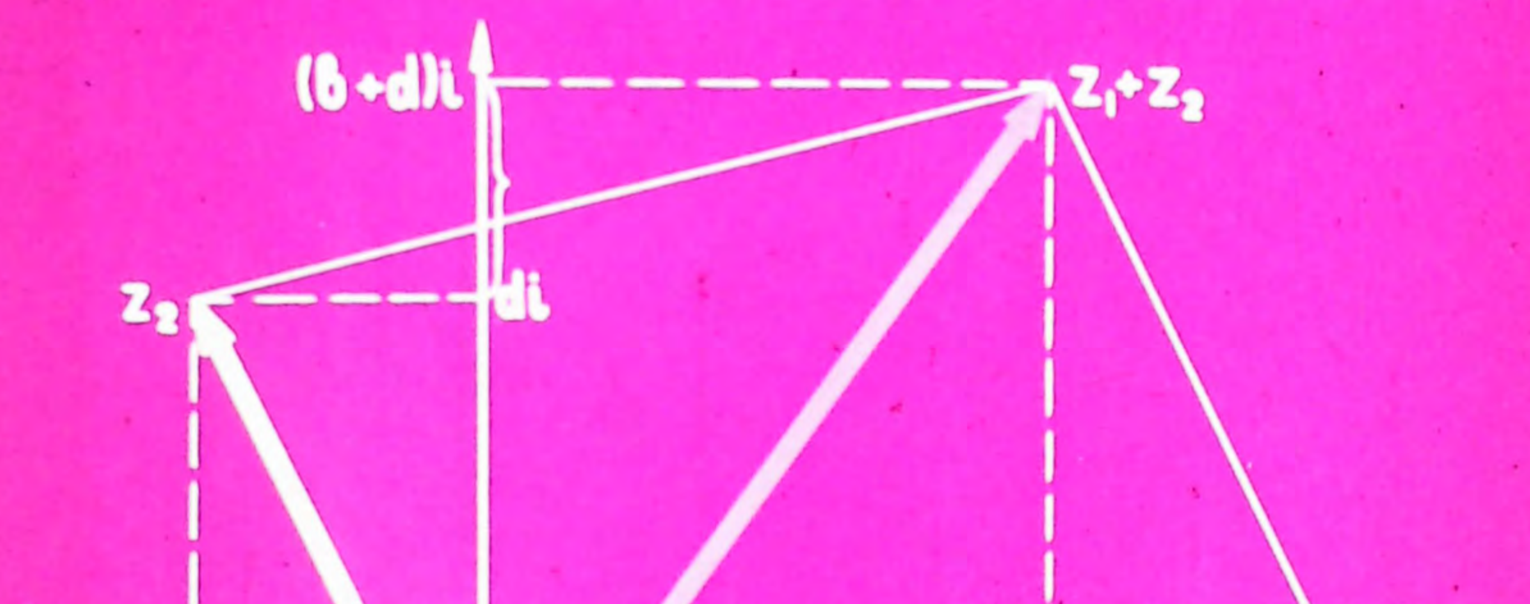


Какие из изображённых здесь чисел сопряжённые?



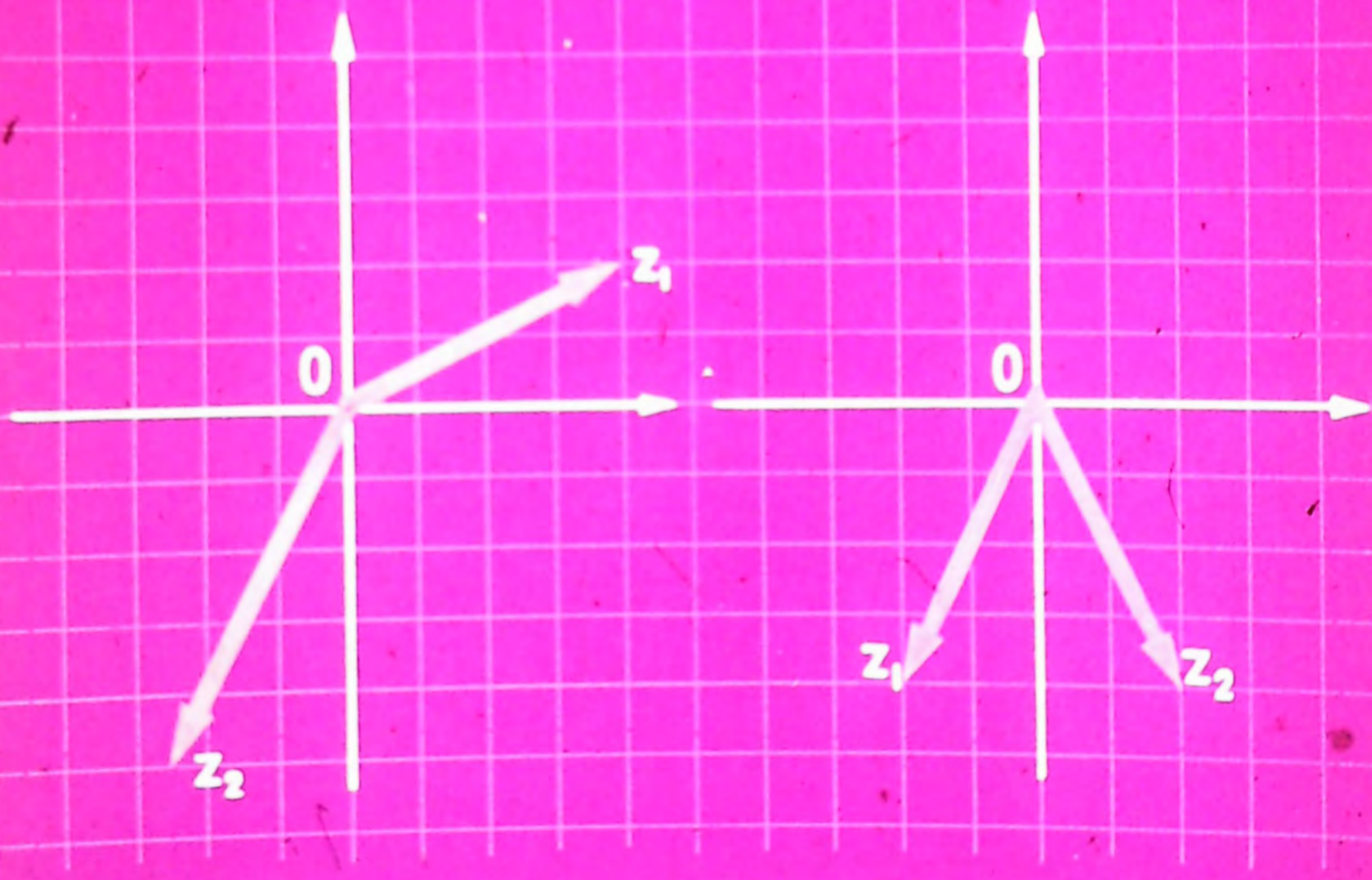
Какие из изображённых здесь чисел сопряжённые?

9

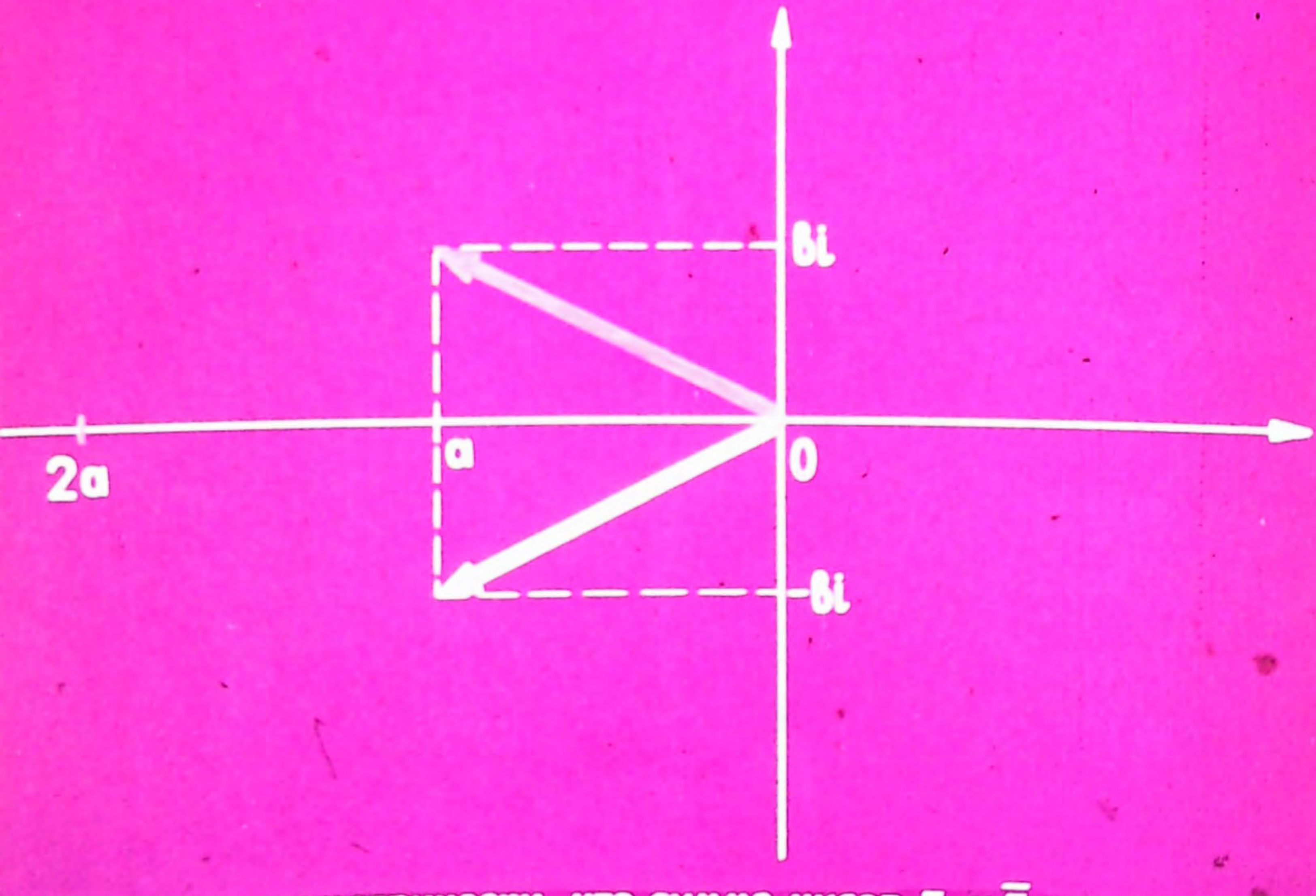


Сумма комплексных чисел Z_1 и Z_2 изображается суммой векторов Z_1 и Z_2. (Докажите!). По этой причине векторное изображение комплексных чисел особенно наглядно.

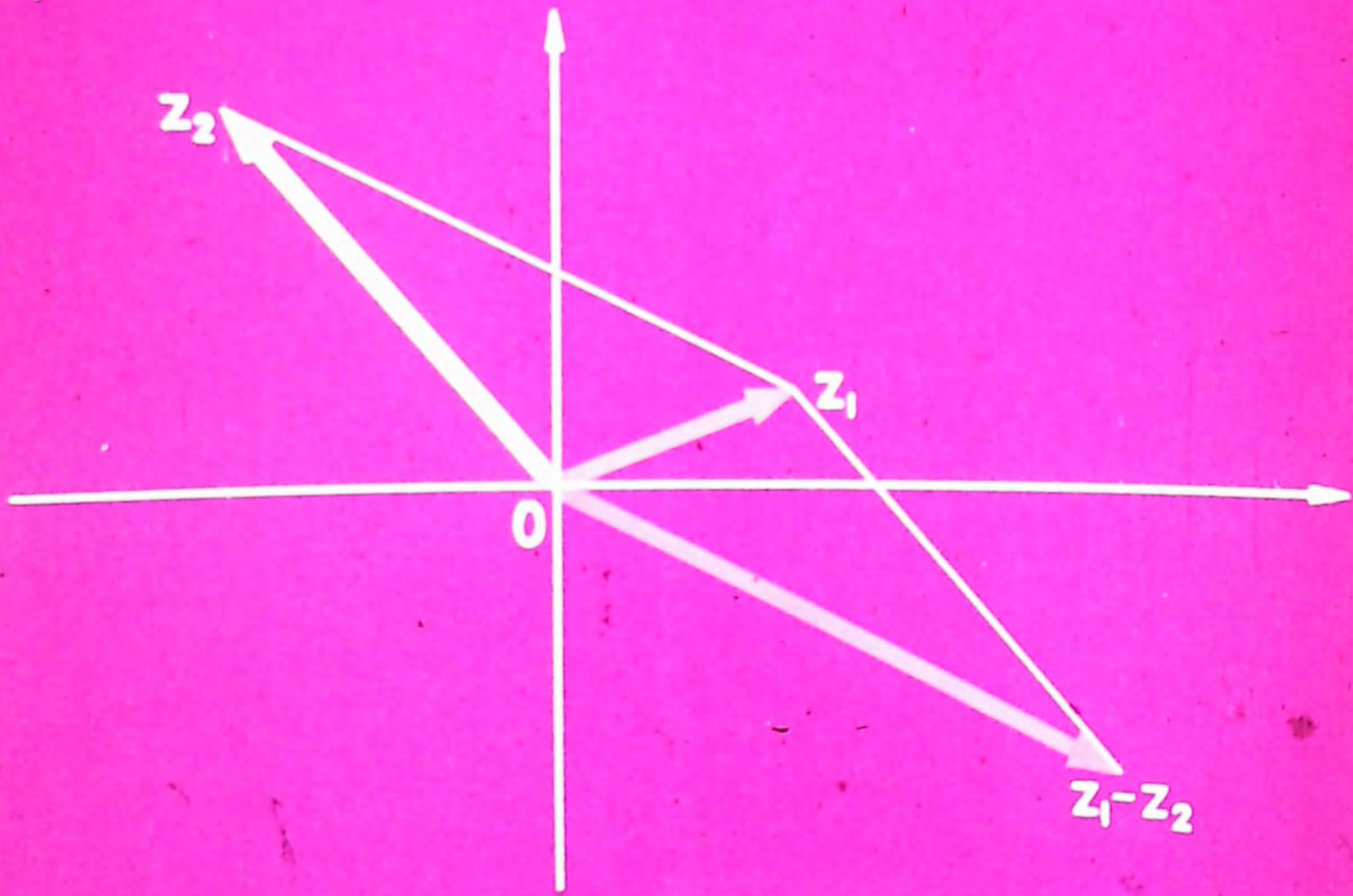
10



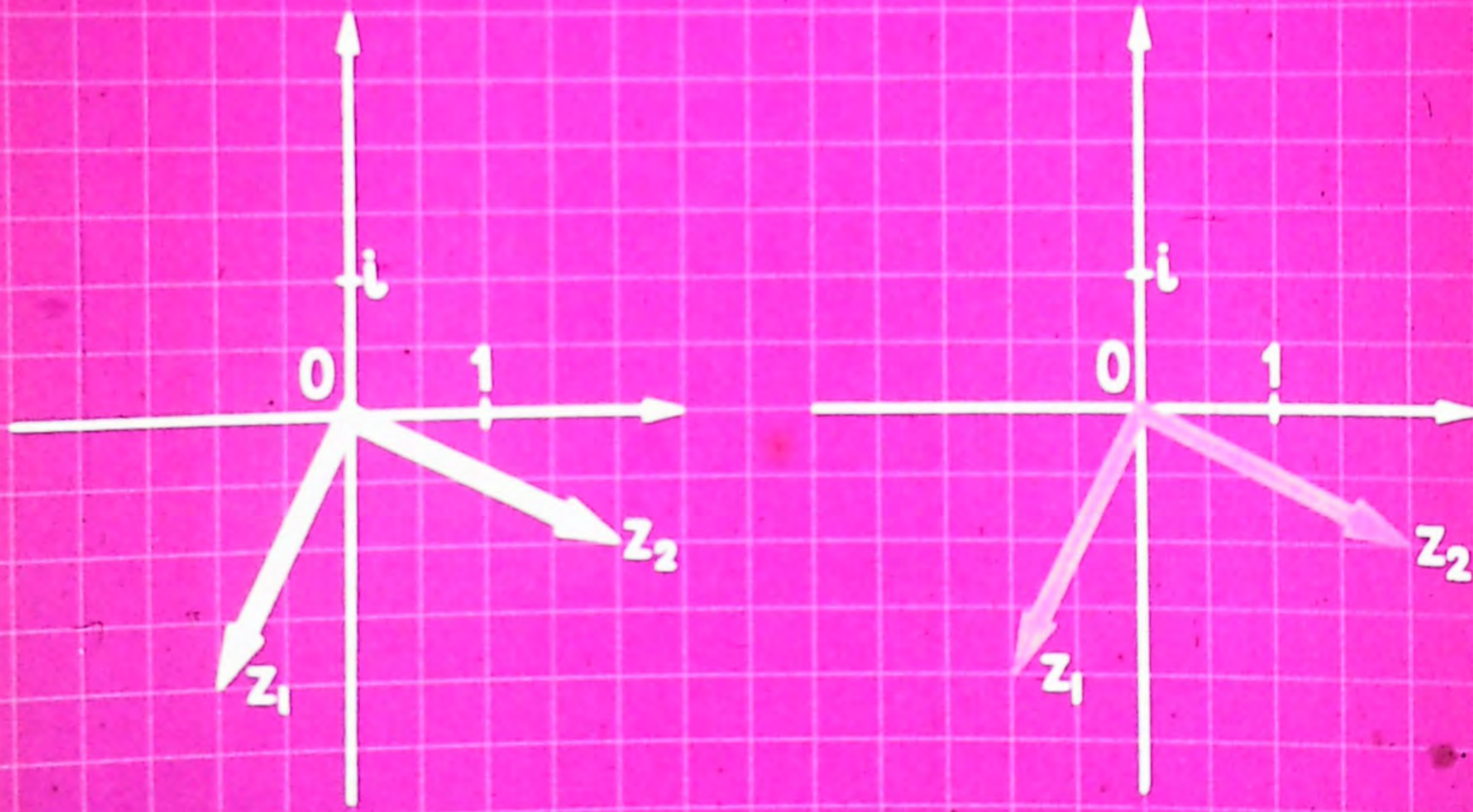
Постройте изображение суммы чисел Z_1 и Z_2.



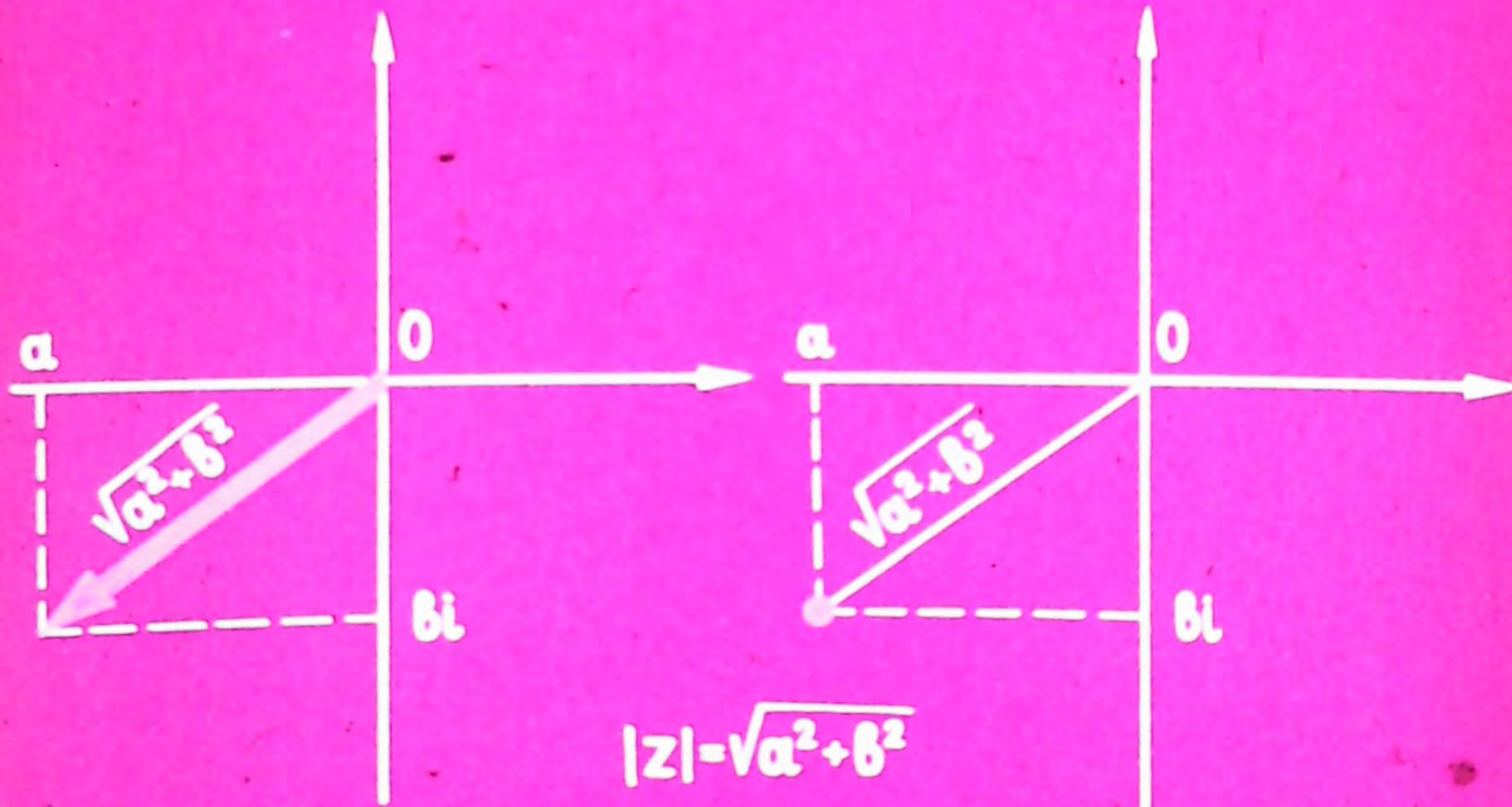
Докажите геометрически, что сумма чисел z и $\bar{z}$ равна удвоенной действительной части числа z.



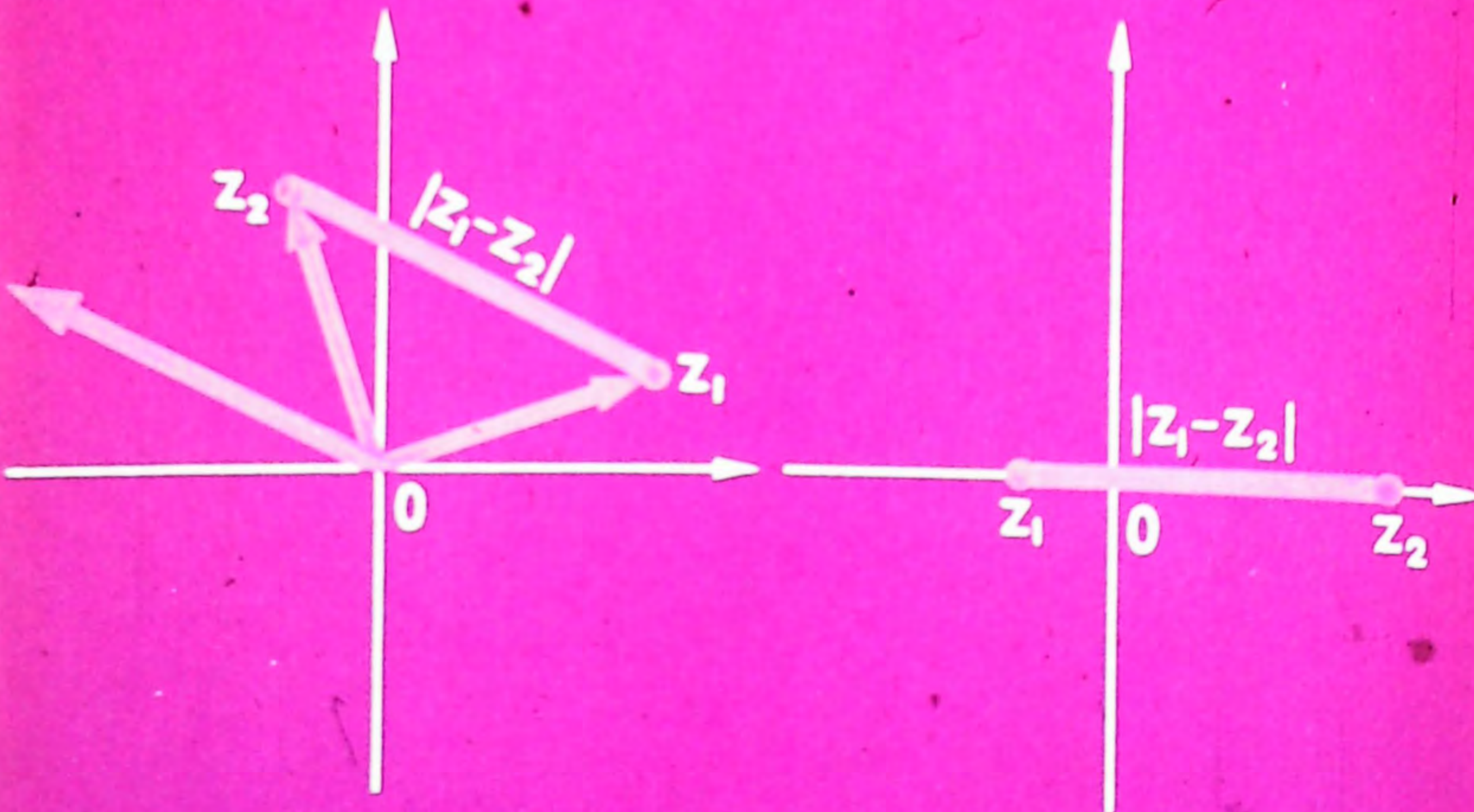
Разность комплексных чисел Z_1 и Z_2 изображается разностью векторов Z_1 и Z_2. (Докажите!). В какой последовательности выполнялись построения на этом чертеже?



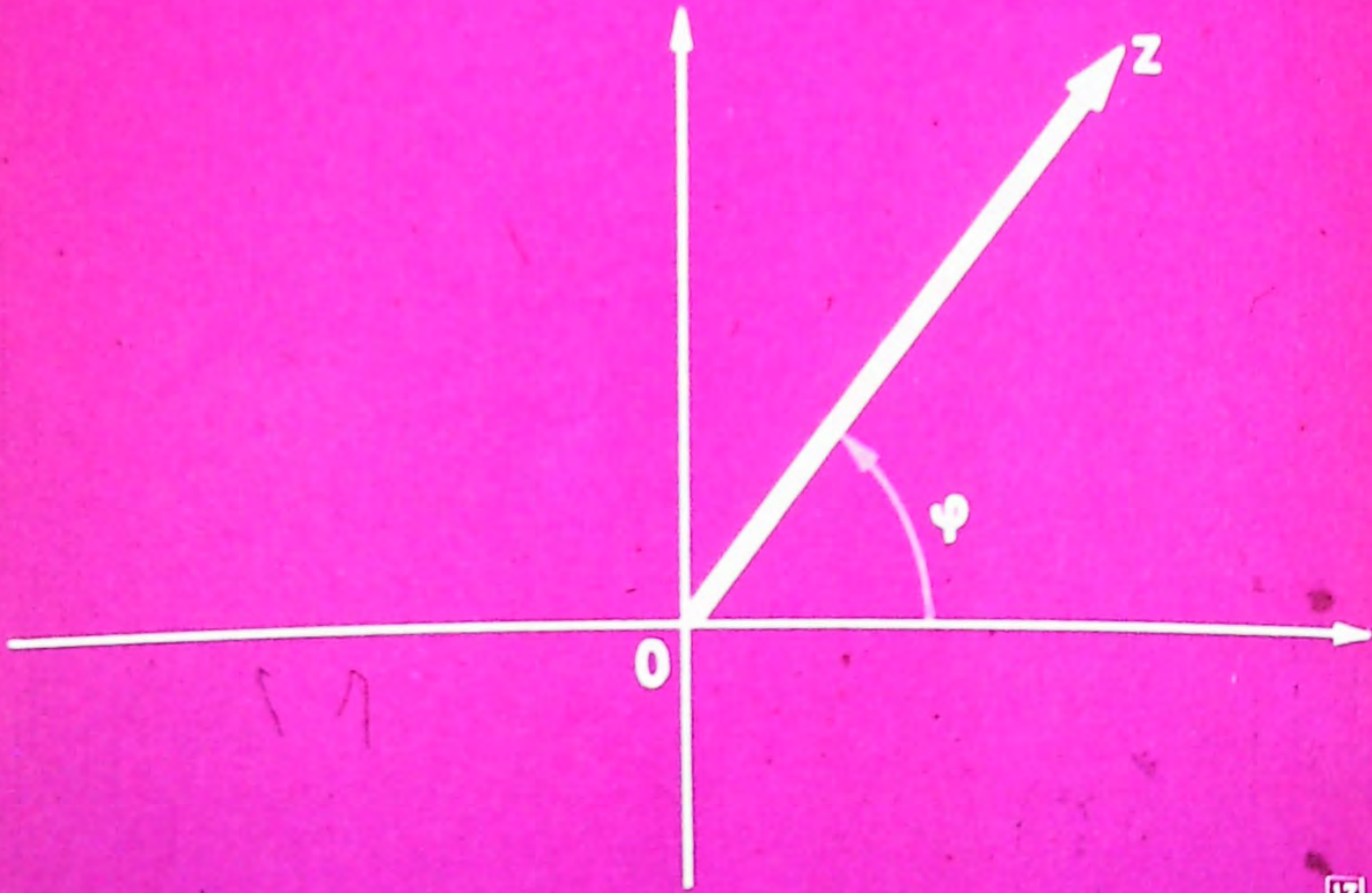
Постройте разность $Z_1 - Z_2$ и разность $Z_2 - Z_1$.



Модуль числа $a+bi$ равен длине вектора, изображающего это число (или расстоянию от начала координат до точки, изображающей это число). Где расположены точки, изображающие комплексные числа с данным модулем ?

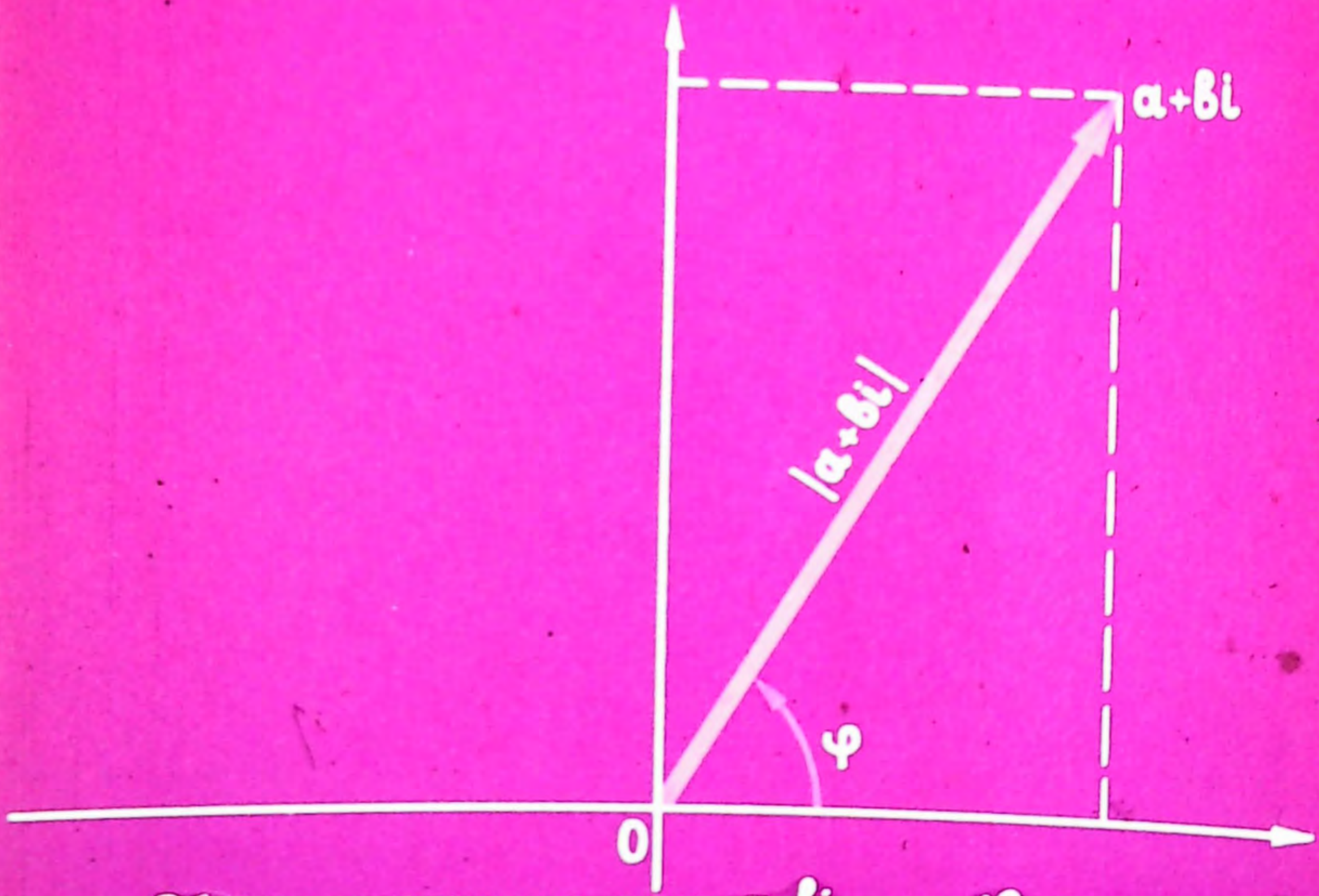


Модуль разности двух комплексных чисел—это расстояние между изображающими их точками. Докажите это.

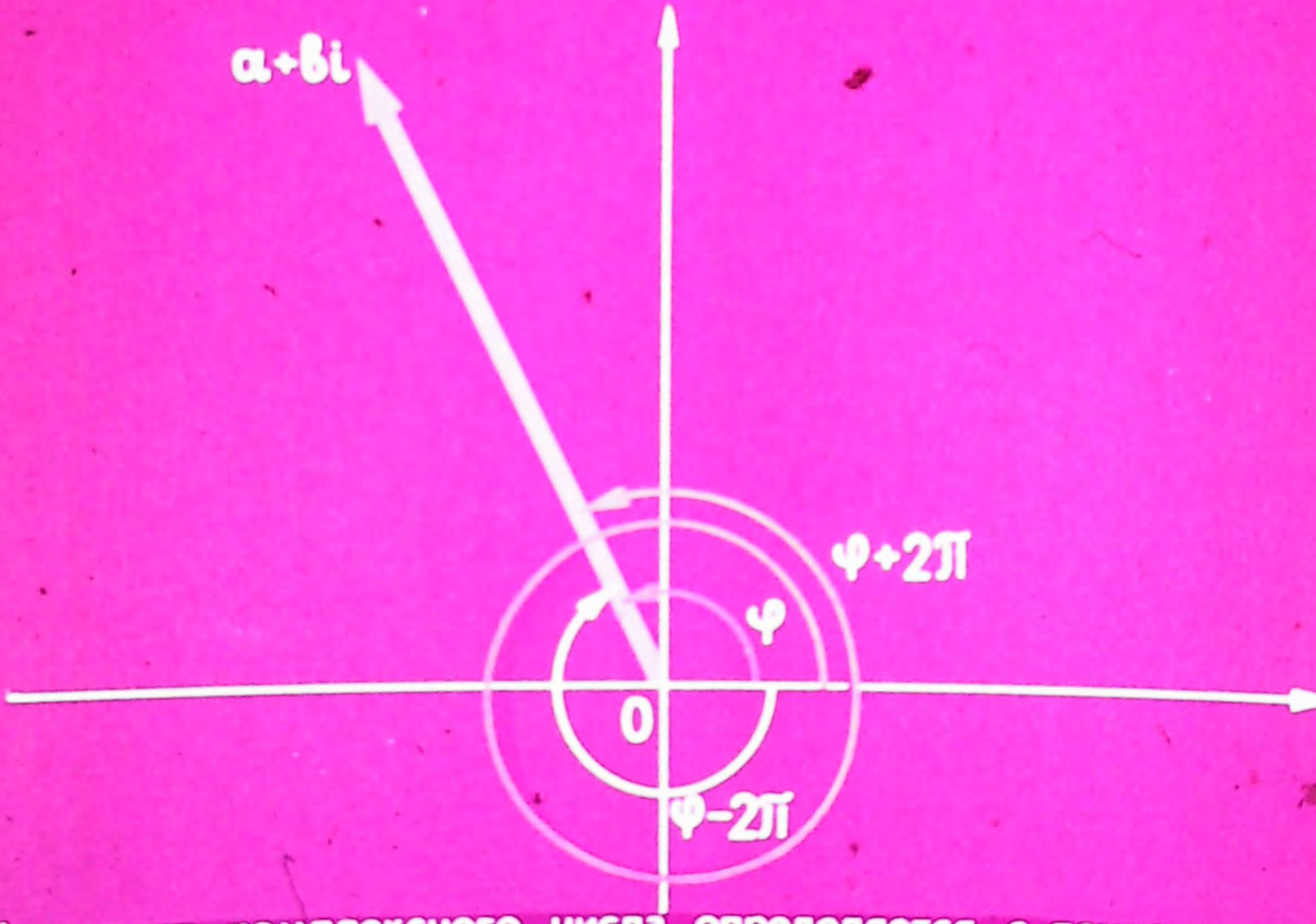


17

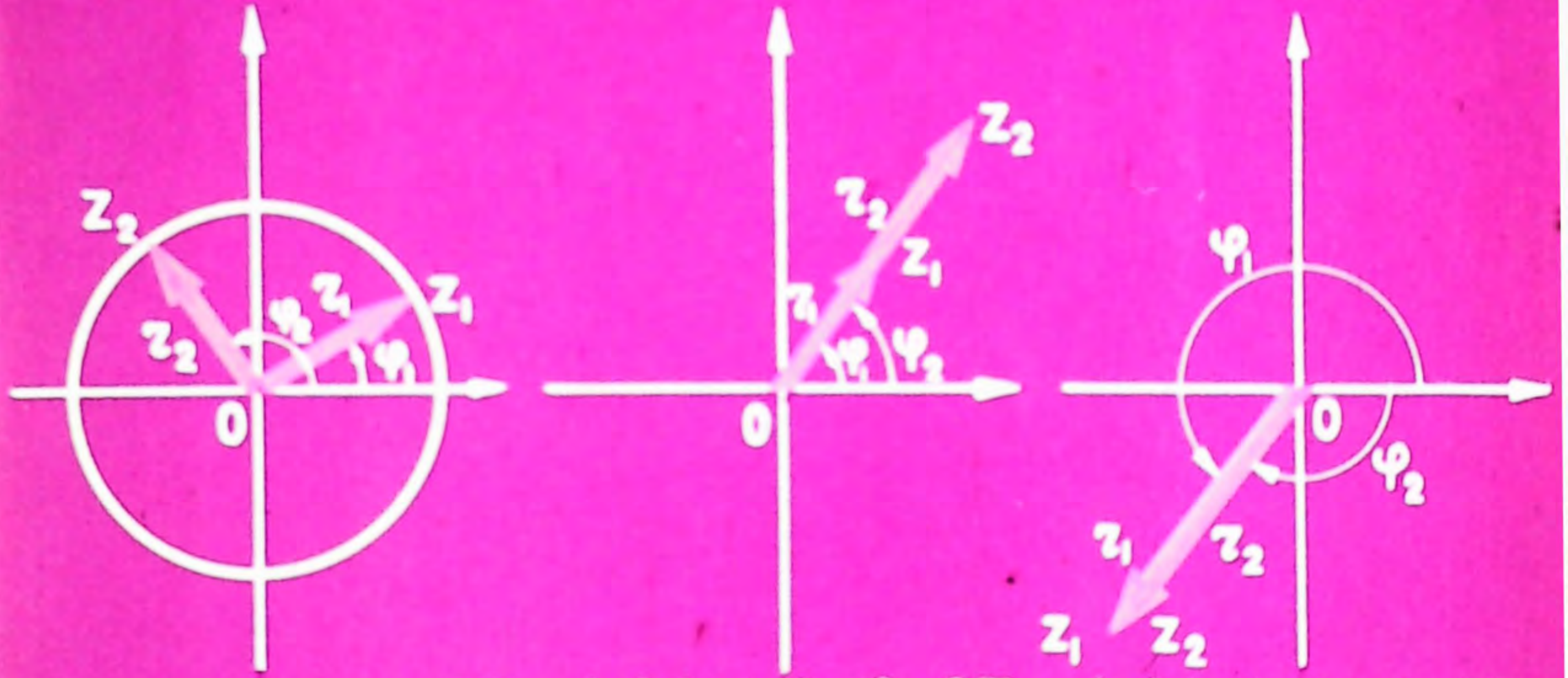
Аргументом комплексного числа (не равного нулю) называется угол наклона к оси абсцисс вектора, изображающего это число.



Обозначим аргумент числа $a+bi$ через φ. Тогда
$\cos\varphi = \frac{a}{|a+bi|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi = \frac{b}{|a+bi|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ (где k — любое целое число), то есть если φ — аргумент числа $a+bi$, то $\varphi+2\pi k$ — аргумент числа $a+bi$.



$|z_2|=|z_1|,\ \varphi_1-\varphi_2\neq 2\pi k$

$z_1\neq z_2$

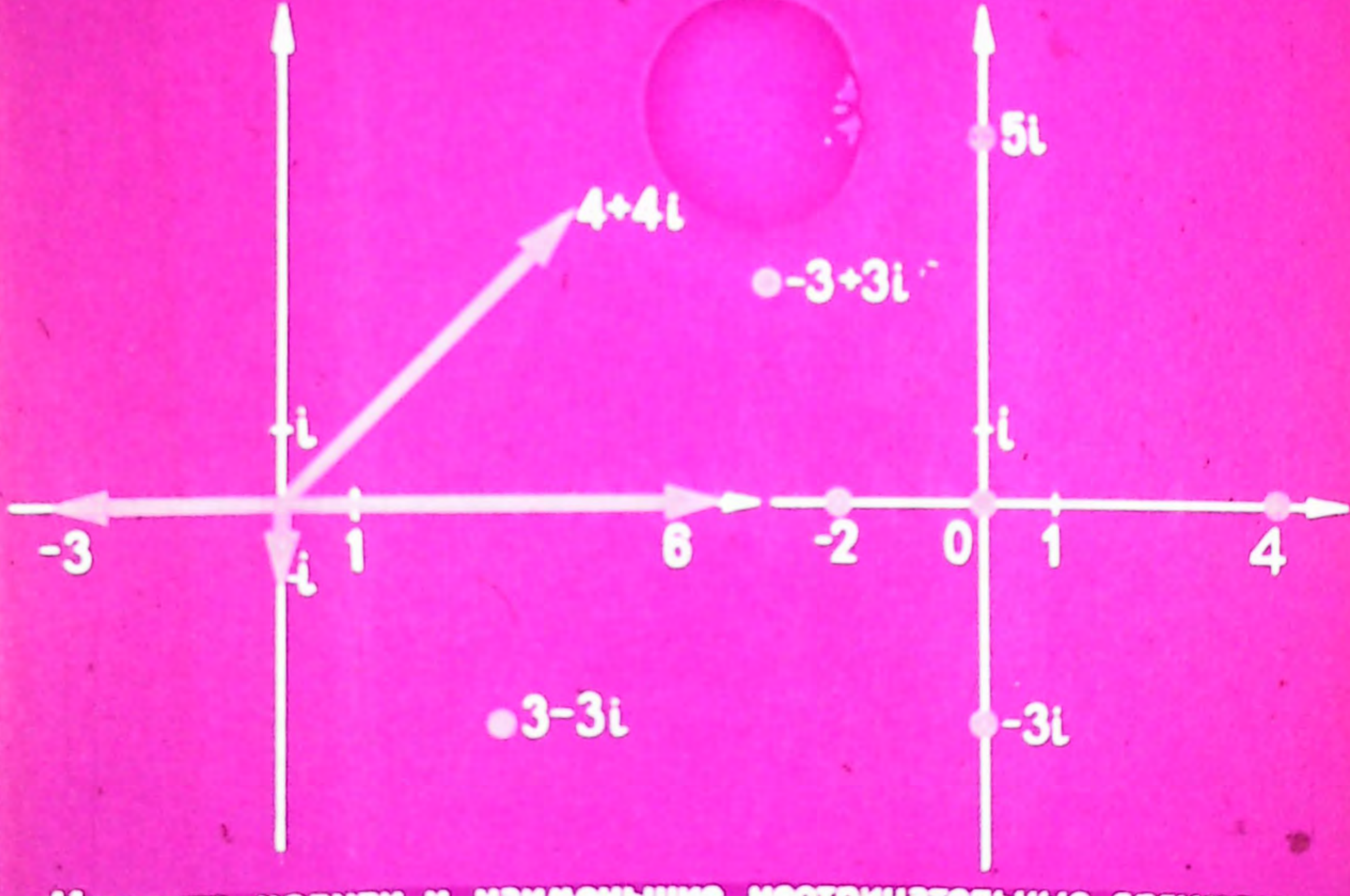
$|z_1|\neq|z_2|,\ \varphi_1-\varphi_2=2\pi k$

$z_1\neq z_2$

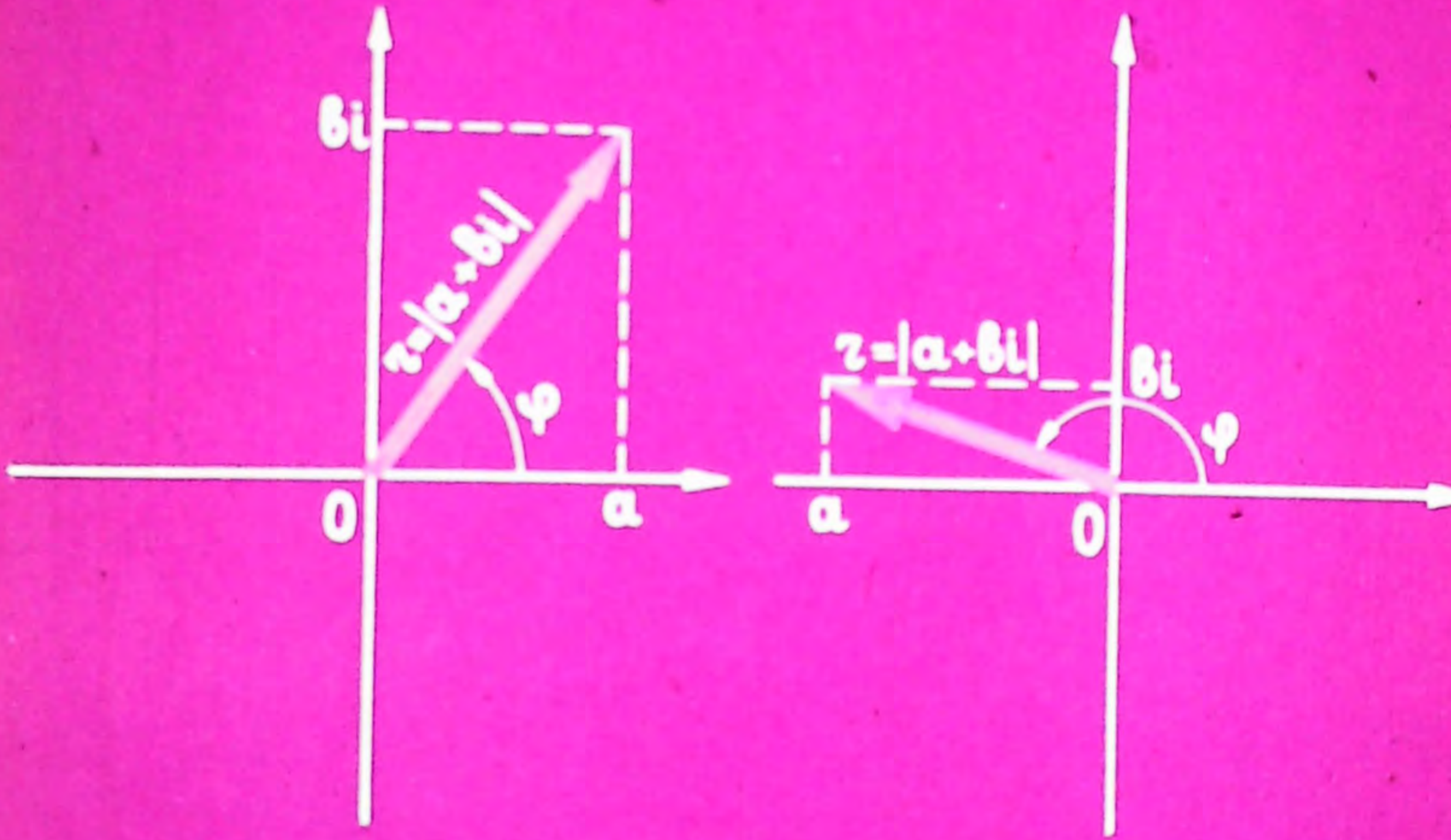
$|z_1|=|z_2|,\ \varphi_1-\varphi_2=2\pi k$

$z_1=z_2$

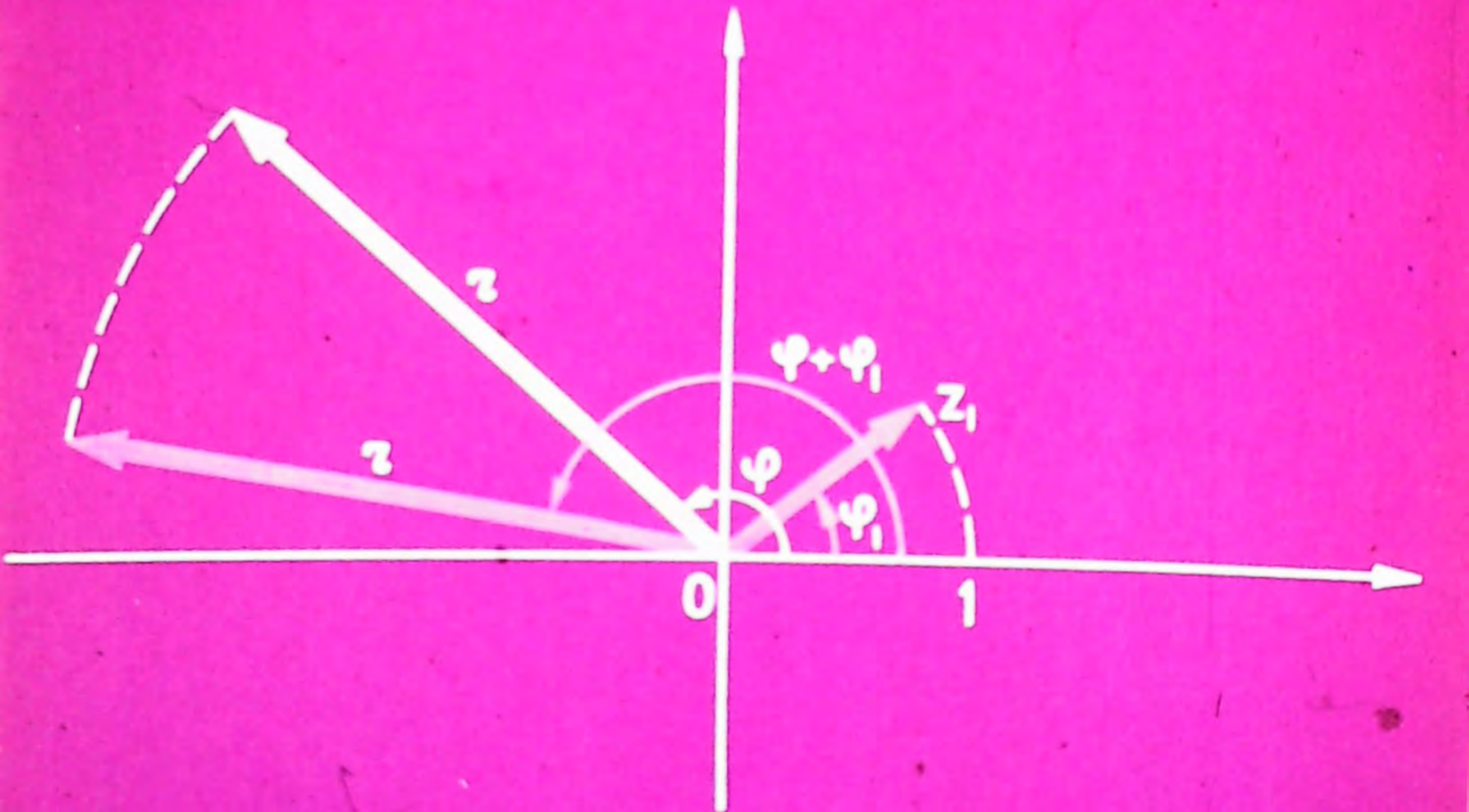
Для того, чтобы два комплексных числа были равны между собой, необходимо и достаточно, чтобы их модули были равны между собой, а разность их аргументов была равна числу $2\pi k$, где k — целое число.



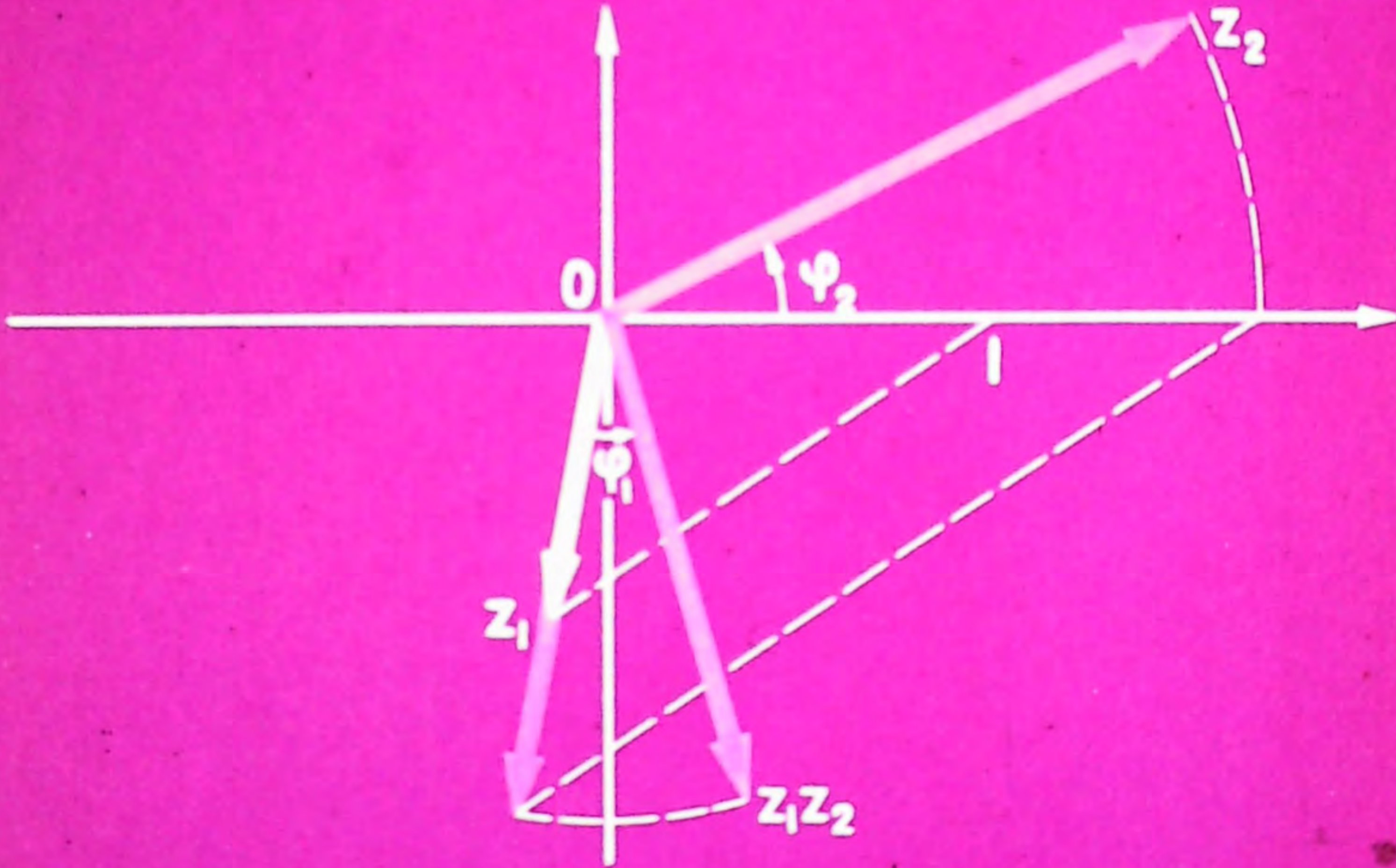
Назовите модули и наименьшие неотрицательные аргументы этих чисел.



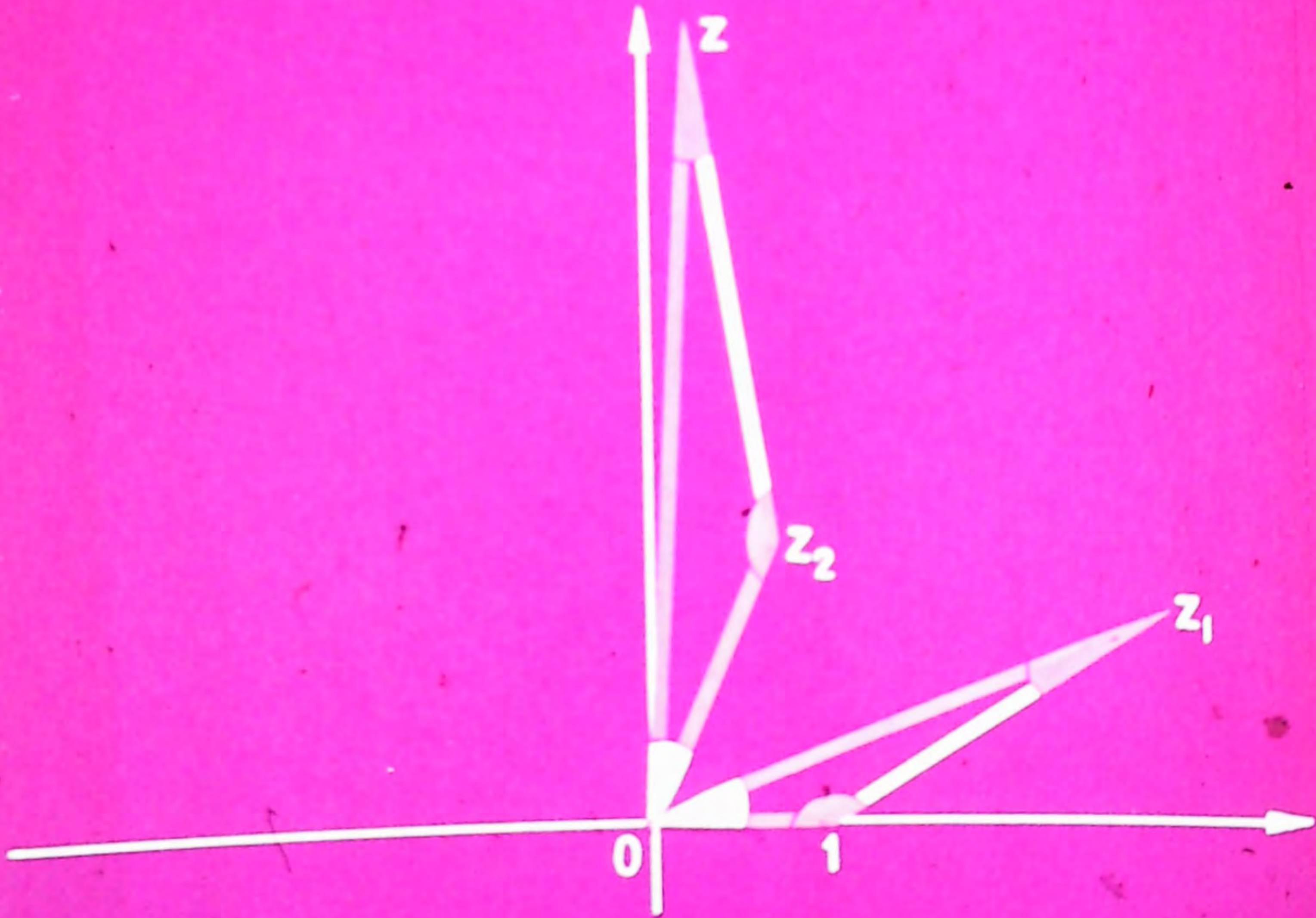
Если r — модуль комплексного числа $a+bi$, а φ — его аргумент, то $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ и, значит, $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Запись комплексного числа $a+bi$ в виде $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой этого числа.



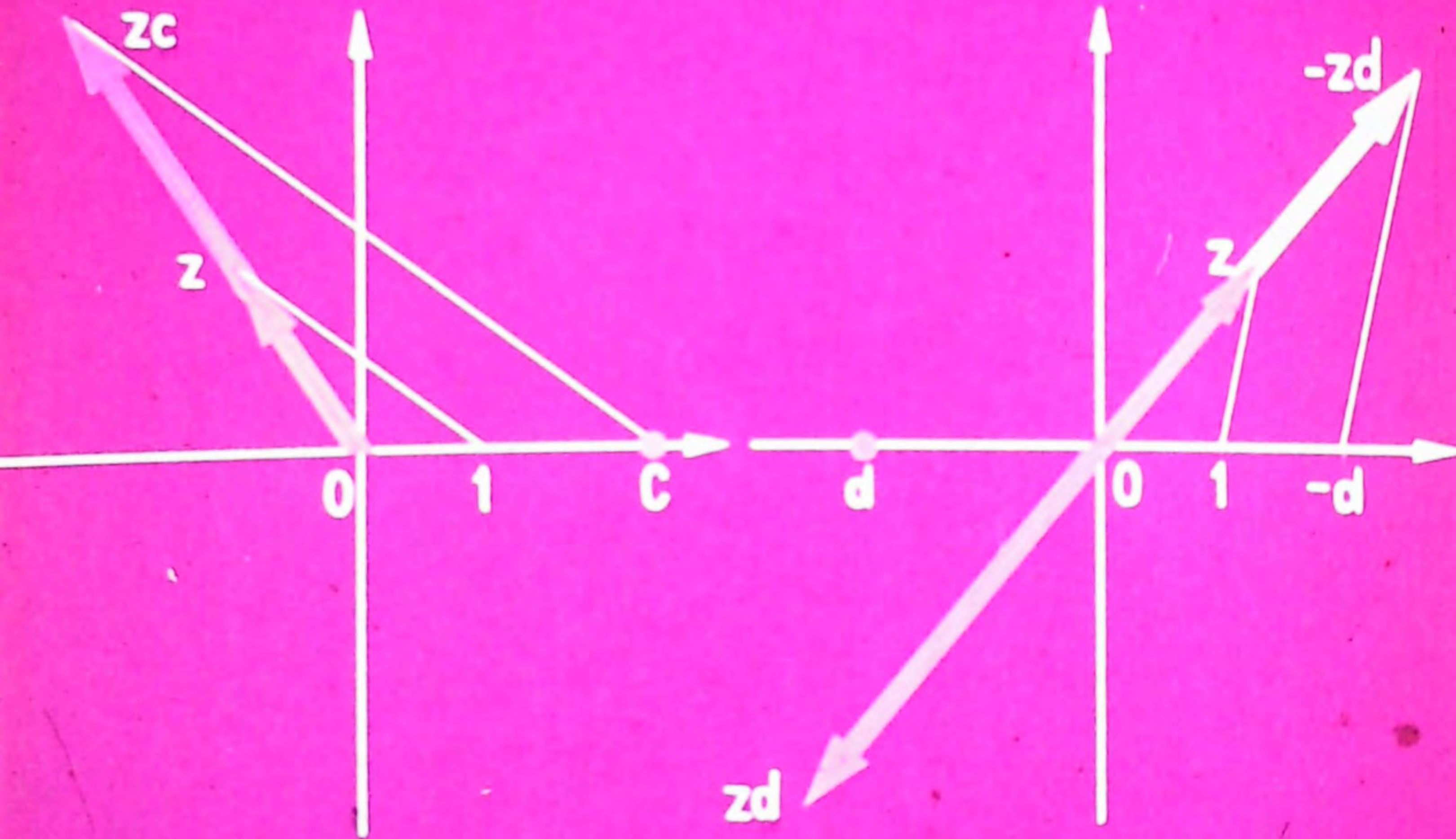
Пусть $z \neq 0$ и $|z_1| = 1$. Тогда умножение z на z_1 изображается поворотом вектора z на аргумент вектора z_1, то есть $[z(\cos\varphi + i\sin\varphi)](\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = z[\cos(\varphi + \varphi_1) + i\sin(\varphi + \varphi_1)]$.
Докажите это аналитически.



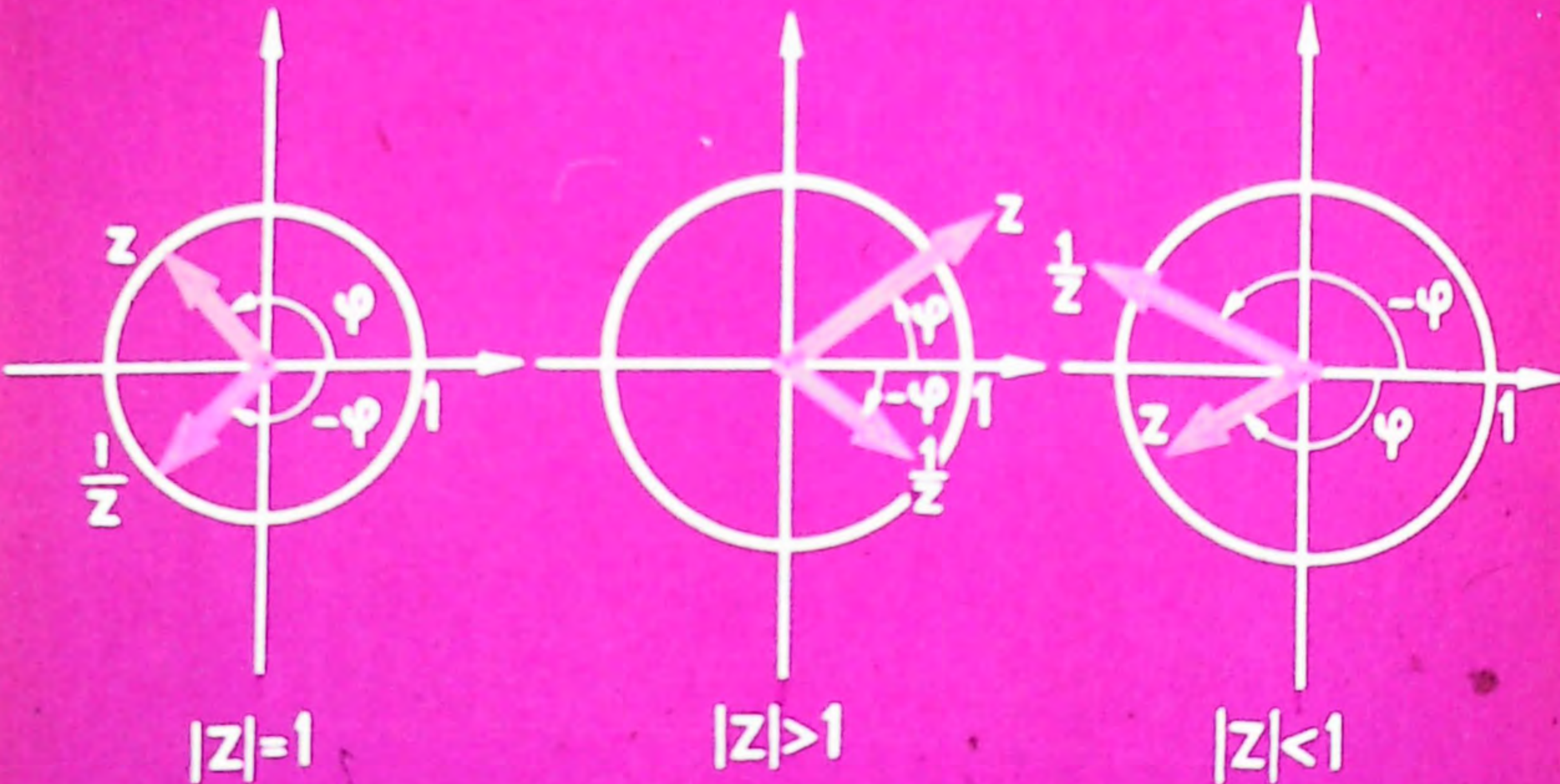
Поэтому, если $Z_1 = z_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $Z_2 = z_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то
$$Z_1Z_2 = z_1z_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$
Объясните, как преобразуется в этом случае вектор Z_1 в вектор Z_1Z_2.



Докажите, что $z = z_1 z_2$. Как изменится чертёж, если z_2 — действительное число?

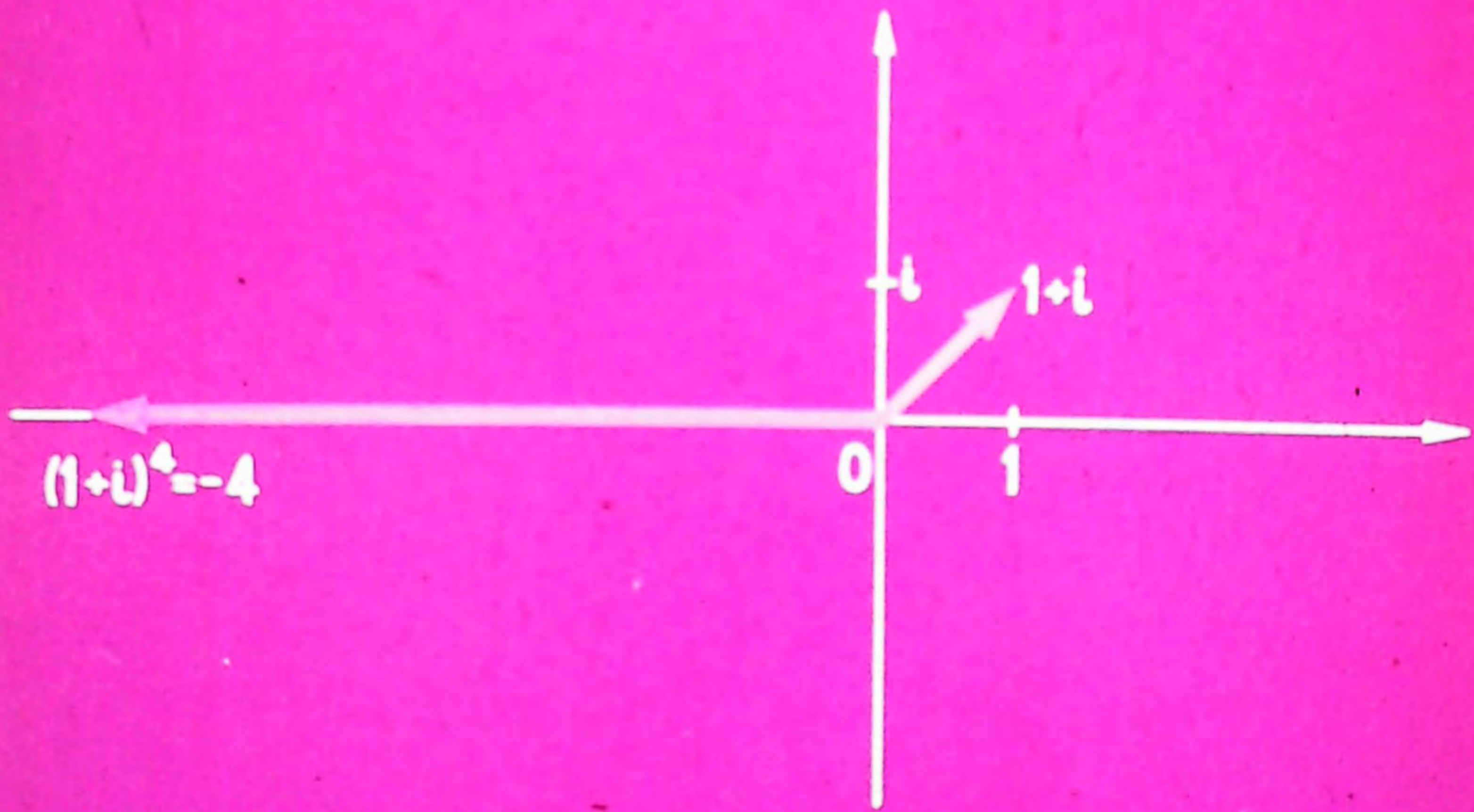


Умножение z на положительное число C изображается растяжением вектора z в C раз. Умножение z на отрицательное число d изображается растяжением вектора z в |d| раз и поворотом его на угол π. Объясните эти построения.

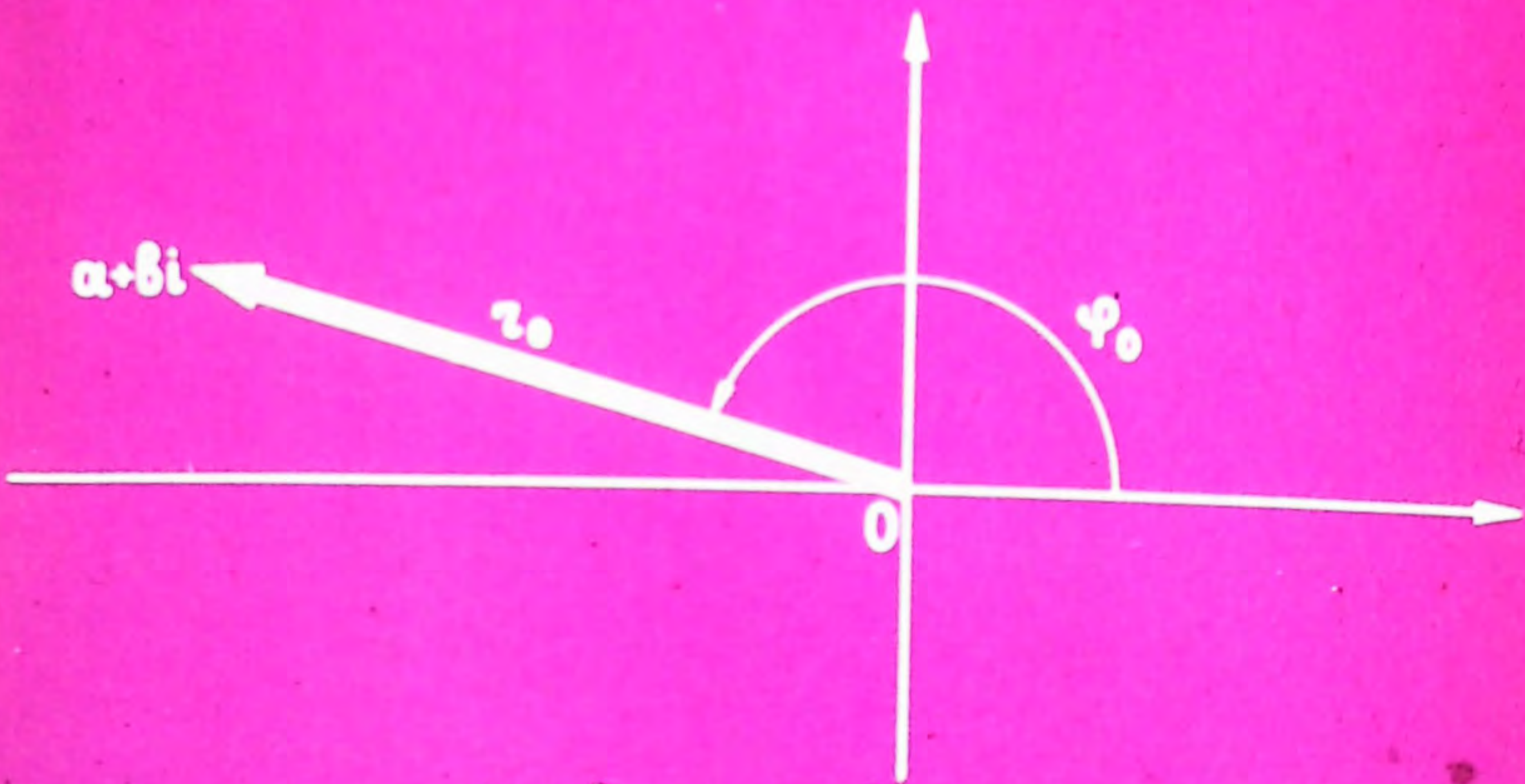


Как изменится модуль и аргумент числа z_1 при делении его на число $z = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$? Объясните построение числа $\frac{1}{z}$, где $z = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Методом математической индукции докажите формулу Муавра: $[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

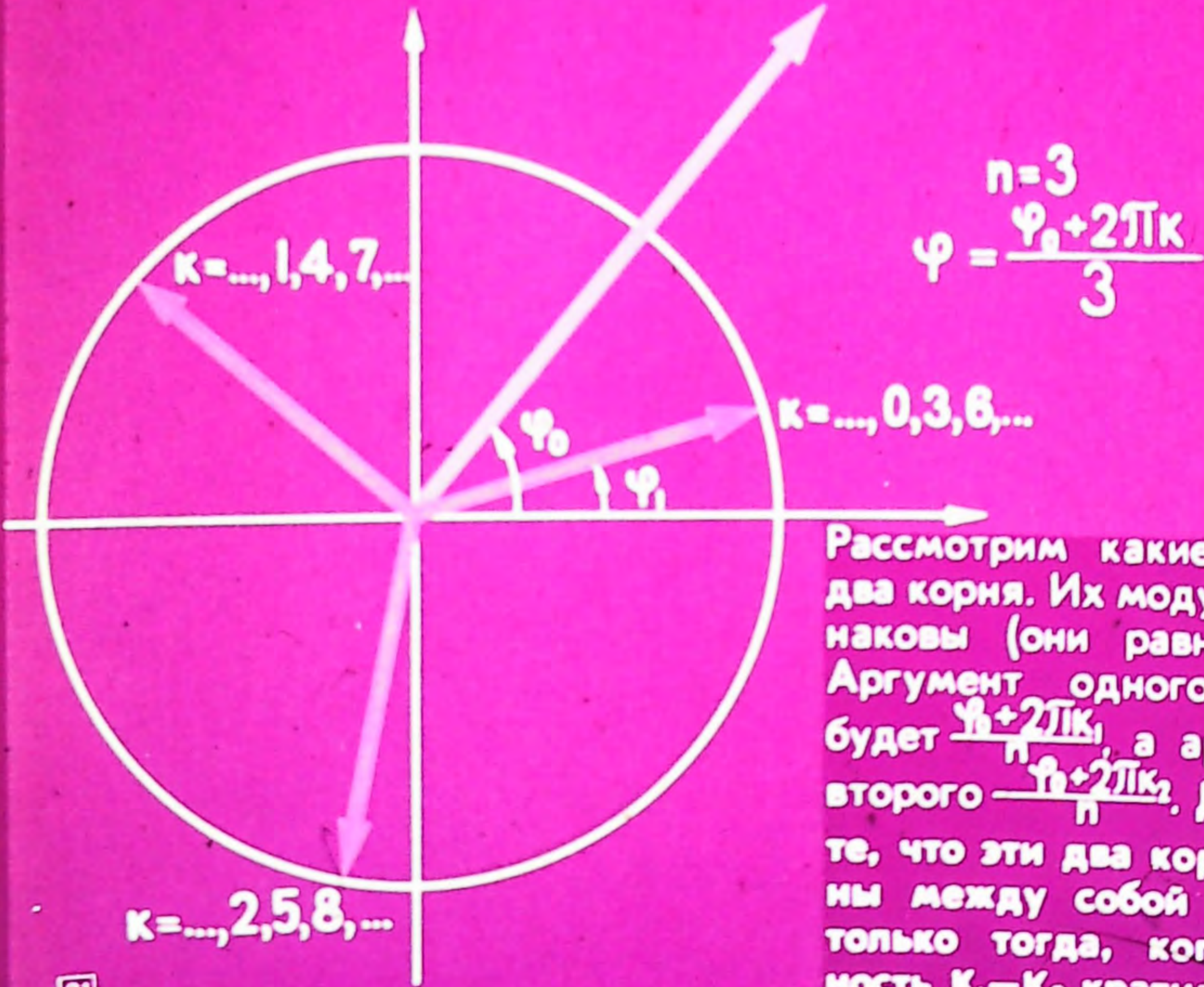


Возведите число $1+i$ в 4-ю степень в алгебраической и в тригонометрической форме.

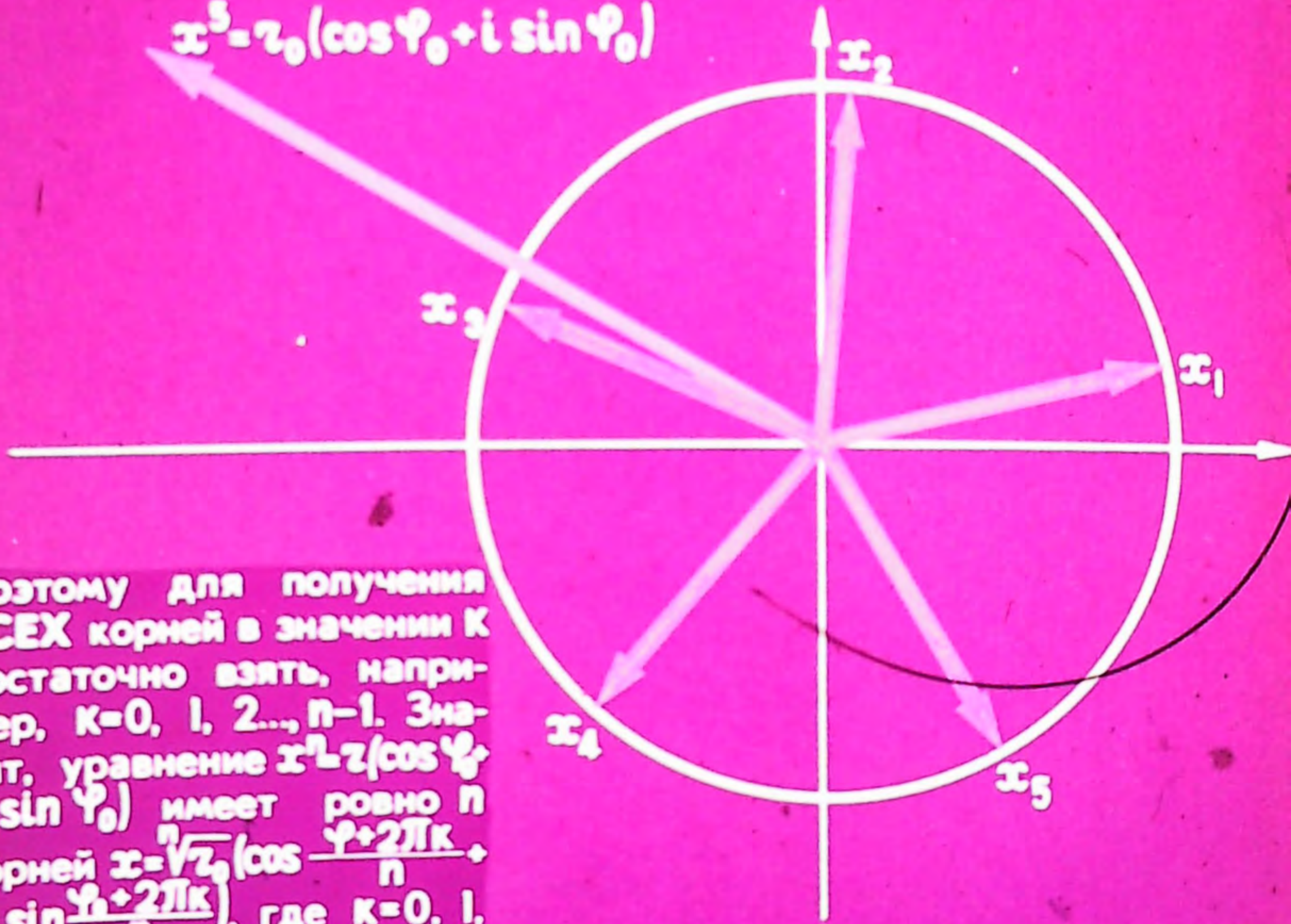


Решим уравнение $x^n = a + bi$. Если $a + bi = 0$, то $x = 0$. Если $a + bi \neq 0$, то его можно записать в тригонометрической форме: $a + bi = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$. Корни уравнения будем искать тоже в тригонометрической форме: $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда уравнение перепишется так: $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$. Чему равны r и φ?

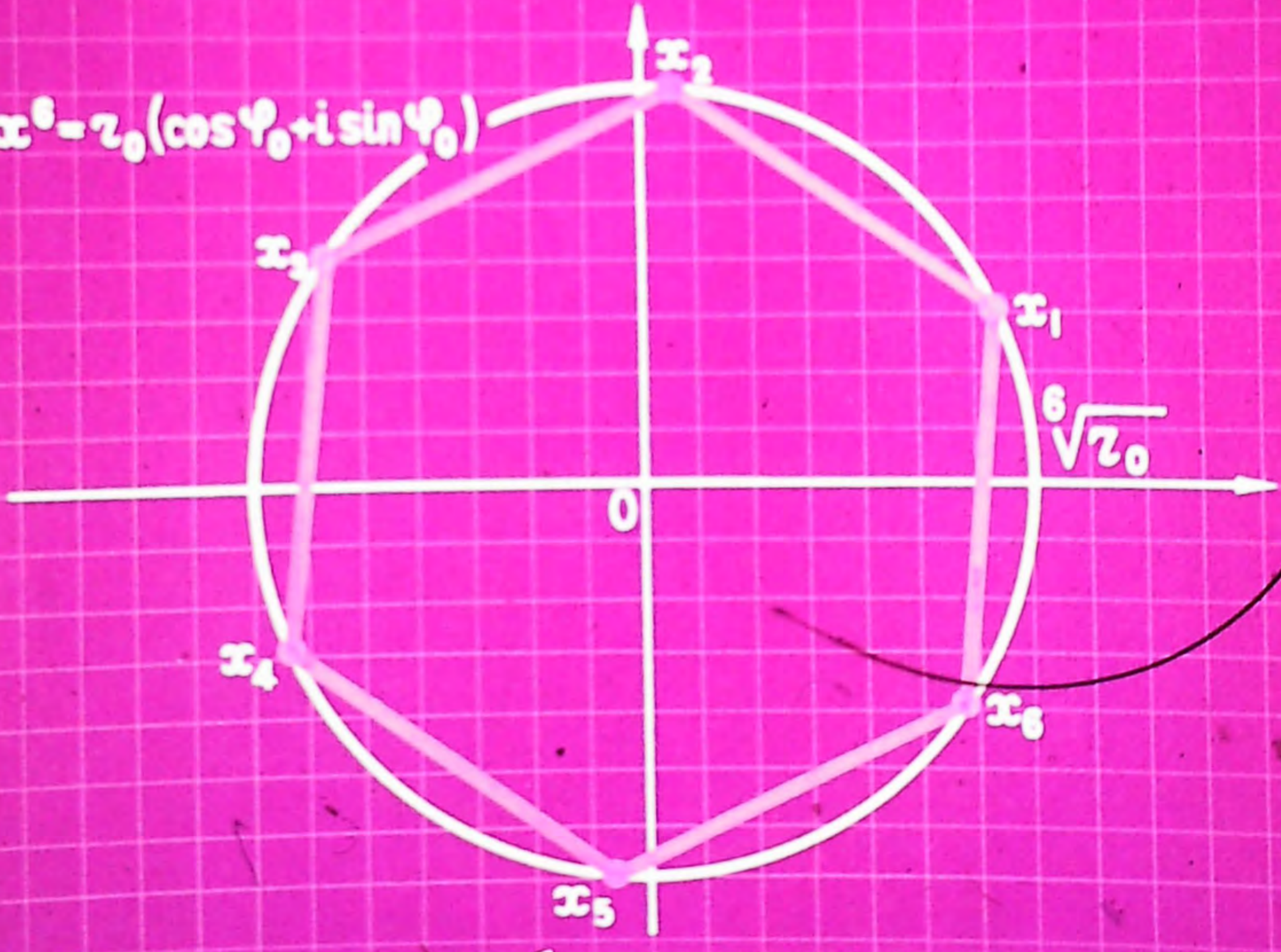
Чтобы решить уравнение $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, применим формулу Муавра: $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$. Отсюда $r^n = r_0$ и $n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, или $r = \sqrt[n]{r_0}$ и $\varphi = \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}$. Все корни изображаются векторами одного и того же модуля $\sqrt[n]{r}$. Сколько различных корней уравнения мы получим?



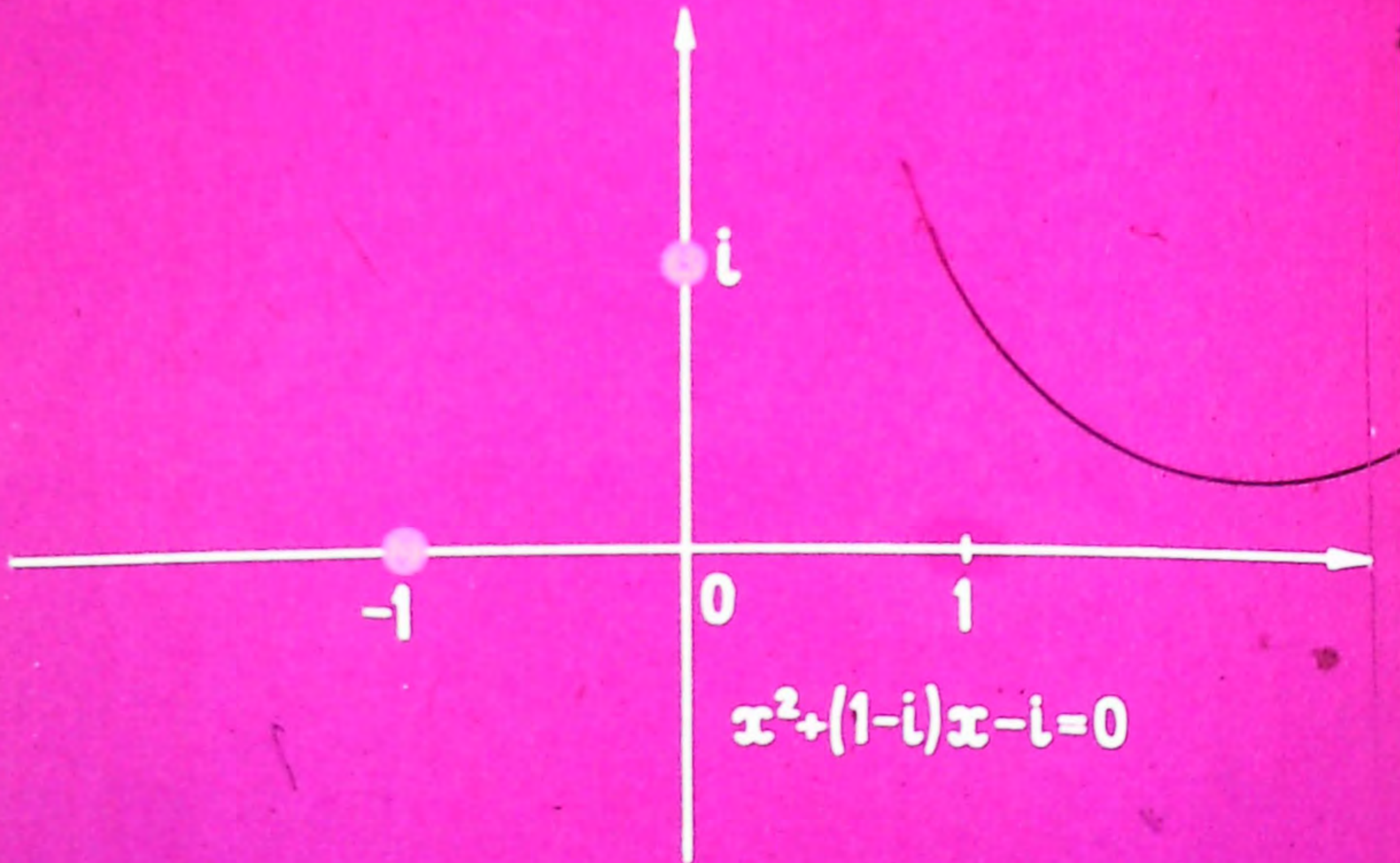
Рассмотрим какие-нибудь два корня. Их модули одинаковы (они равны $\sqrt[n]{r_0}$). Аргумент одного пусть будет $\frac{\varphi_0 + 2\pi k_1}{n}$, а аргумент второго $\frac{\varphi_0 + 2\pi k_2}{n}$. Докажите, что эти два корня равны между собой тогда и только тогда, когда разность $k_1 - k_2$ кратна n.



Поэтому для получения ВСЕХ корней в значении К достаточно взять, например, К=0, 1, 2..., n−1. Значит, уравнение $x^n = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ имеет ровно n корней $x = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}\right)$, где к=0, 1, 2, ..., n−1.



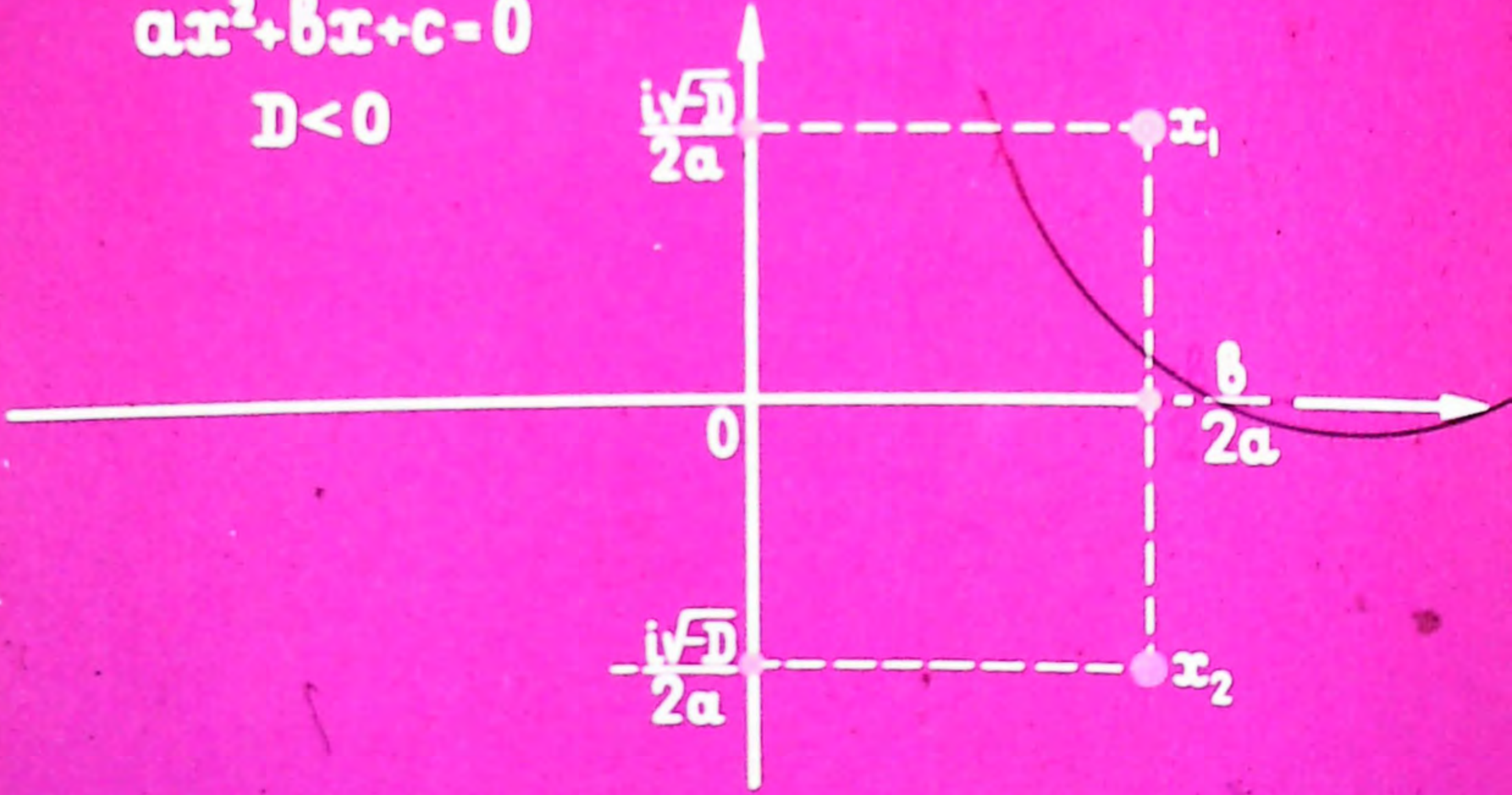
Докажите, что точки, изображающие все эти корни, являются вершинами правильного многоугольника.



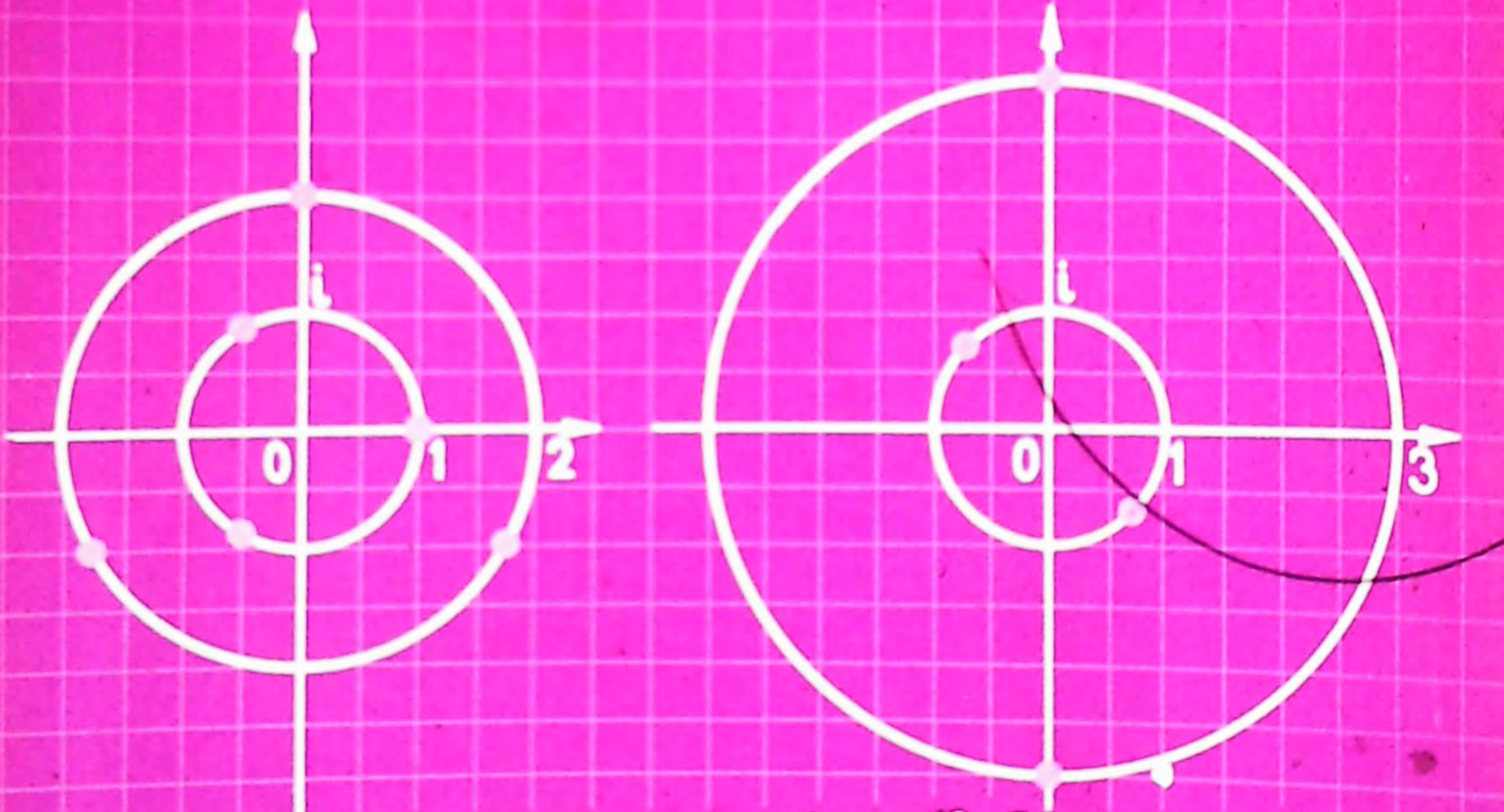
Докажите, что любое квадратное уравнение с комплексными коэффициентами имеет два комплексных корня (различных или совпадающих).

$ax^2+bx+c=0$

$D<0$



Докажите, что корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом—сопряжённые числа.



Докажите, что уравнение вида $x^{2n}+ax^n+b=0$, где a и b — любые комплексные числа, имеет $2n$ комплексных корней (среди них могут быть и совпадающие). Как решается такое уравнение? Напишите уравнения, корни которых изображены на чертежах.

Можно доказать (однако не элементарными средствами), что ЛЮБОЕ УРАВНЕНИЕ n—Й СТЕПЕНИ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИМЕЕТ ХОТЯ БЫ ОДИН КОМПЛЕКСНЫЙ КОРЕНЬ.

Эта теорема называется ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМОЙ АЛГЕБРЫ. Из неё можно вывести, что у любого уравнения n—й степени с комплексными коэффициентами ровно n комплексных корней (некоторые из них могут совпадать).

КОНЕЦ

Автор Г. ЛЕВИТАС
Консультант
доктор физико-математических наук
В. БОЛТЯНСКИЙ
Чертежи и оформление С. РОГОВА
Редактор Л. КНИЖНИКОВА

Д-243-68

Студия «Диафильм», 1968 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7

Цветной 0-30