

П. П. Воробиенко

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Сборник
задач
и упражнений

Учебное
пособие
для высших
учебных
заведений

«Радио и связь»

П.П.Воробиенко

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Сборник задач и упражнений

*Допущено Министерством связи СССР
в качестве учебного пособия
для студентов институтов связи
специальностей: 2305, 2306, 2307*



Москва
«Радио и СВЯЗЬ»
1989

ББК 32.88
В75
УДК 621.3.01

Рецензент М. М. Зелинский

Редакция литературы по электрической связи

Воробиенко П. П.
В75 Теория линейных электрических цепей. Сборник задач и упражнений: Учеб. пособие для вузов.— М.: Радио и связь, 1989.— 328 с.; ил.

ISBN 5-256-00119-1

Рассматриваются методы анализа цепей в установившемся и переходном режимах, методы синтеза пассивных и активных цепей, корректирования линейных искажений. Значительное внимание уделяется решению практических задач. Подробно рассматриваются задачи, относящиеся к спектральному анализу, проектированию фильтров и корректоров линейных искажений.

Для студентов вузов.

В $\frac{2402040000-037}{046(01)-89}$ 113—88

ББК 32.88

ISBN 5-256-00119-1

© Издательство «Радио и связь», 1989.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория линейных электрических цепей (ТЛЭЦ) является важнейшей дисциплиной в системе подготовки инженеров-связистов, а также инженеров по ряду других родственных специальностей. Можно с уверенностью утверждать, что без глубокого усвоения курса ТЛЭЦ невозможно ни дальнейшее обучение в институте, ни успешная работа по специальности. Такое значение теории цепей определяется ее предметом, который заключается в разработке методов анализа и синтеза линейных радиотехнических устройств различного назначения. В соответствии с этим ТЛЭЦ, с одной стороны, является теоретической базой для изучения специальных дисциплин, а с другой — занимается разработкой и исследованием важнейших устройств и систем передачи информации, например устройств, осуществляющих формирование, обработку и селекцию сигналов, различного рода усилителей и т. п.

В связи с быстрым развитием радиотехники, радиоэлектроники, технологии производства больших интегральных схем роль ТЛЭЦ непрерывно возрастает. Так, практикой выдвигаются задачи анализа схем, содержащих десятки и сотни тысяч компонентов. Повышаются требования также к созданным вновь устройствам. Как правило, требуется, чтобы устройства, кроме выполнения целевого назначения, обладали целым рядом технико-экономических показателей: низкой чувствительностью характеристик к изменению параметров компонентов, отсутствием элементов настройки, минимальными массой, габаритами, потребляемой мощностью и, в конечном счете, возможно меньшей стоимостью. Вместе с тем освоение курса ТЛЭЦ вызывает у студентов значительные трудности. Это объясняется целым рядом факторов.

Во-первых, в курсе ТЛЭЦ вводится множество новых понятий и определений, каждое из которых является достаточно простым, но освоение и применение их в совокупности представляет собой сложную задачу.

Во-вторых, при анализе и синтезе схем требуется знание обширного математического аппарата. Вот далеко не полный перечень того, что должен знать студент после изучения курса математики: теорию дифференциального и интегрального исчисления, теорию функций комплексного переменного, численные методы решения алгебраических и дифференциальных систем уравнений, методы аппроксимации, теорию функциональных рядов. Необходимы также глубокие знания по физике, в особенности разделов: электричество, колебания и волны и др.

В-третьих, анализ и синтез современных радиотехнических устройств немалым без применения вычислительной техники, поэтому студенту необходимы определенные навыки по программированию.

В-четвертых, одна из основных трудностей, которую встречают студенты при изучении ТЛЭЦ, связана с необходимостью применения абстрактных математических методов к решению конкретных задач практики. Даже при достаточном уровне подготовки по математике применение полученных знаний является трудной задачей.

Возникающие трудности в методическом плане преодолеваются в основном двумя путями: созданием учебно-методических комплексов дисциплины и совершенствованием методики изложения материала в учебниках и учебных пособиях.

Данное учебное пособие является дополнением к учебнику профессора А. Ф. Белецкого «Теория линейных электрических цепей» [1] и, естественно, написано в соответствии с содержанием и методическими принципами учебника.

В задачниках отсутствуют краткие теоретические сведения и сводки формул, но каждый параграф предваряется списком контрольных вопросов, знание которых

необходимо для решения задач и ответы на которые можно найти в учебнике. Это, по мнению автора, должно активизировать самостоятельную работу студентов над курсом, сделает ее более целенаправленной и глубокой. Данный эффект значительно усилится, если ответы на контрольные вопросы будут обязательно обсуждаться на практических занятиях.

Все задачи по сложности решения делятся на три категории: обыкновенные, повышенной трудности (отмеченные звездочкой) и задачи для учебно-исследовательской работы студентов (УИРС). В конце каждой главы приведены решения типовых задач, разбор которых облегчит работу и предохранит от многих ошибок. Решенные задачи обозначены порядковым номером, с добавлением буквы р. Большинство глав содержит задачи для индивидуальных заданий, решение которых должно быть обязательным. Опыт работы кафедры ТЛЭЦ Одесского электротехнического института связи (ОЭИС) им А. С. Попова показывает, что защита домашних заданий в значительной степени способствует усвоению курса. Исходные данные для выполнения домашних заданий выбираются студентом самостоятельно по двум числам: n — номер, под которым записана фамилия студента в журнале студенческой группы; m — номер группы на потоке. В отдельных случаях преподаватель задает код исходных данных.

В задачнике помещены обширные приложения. Приложение 1 посвящено программному обеспечению машинных методов анализа цепей. Приложения 3 и 4 служат для облегчения решения задач синтеза ARC - и LC -фильтров и линий задержки. Приложения носят и самостоятельный характер, так как могут использоваться студентами старших курсов и инженерами.

При написании задачника автор пытался использовать опыт преподавания курса ТЛЭЦ и ОЭИС им А. С. Попова, а также других институтов связи.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Определение и единицы физических величин тока, напряжения, потенциала, мощности, энергии; мгновенные значения напряжения (тока).
2. Определение электрической цепи.
3. Положительные направления напряжения и тока; согласный и встречный выбор положительных направлений напряжения и тока; энергия и ее связь с мощностью, током и напряжением; колебания напряжения и тока; сигналы.
4. Воздействие на цепь и ее реакция; линейные электрические цепи; принцип наложения.
5. Генераторы и потребители; элемент электрической цепи.
6. Резистивный элемент (обозначение, уравнение¹, мощность, энергия).
7. Индуктивный элемент (обозначение, уравнение, мощность, энергия).
8. Емкостный элемент (обозначение, уравнение, мощность, энергия).
9. Источники напряжения и тока (определения, обозначения).
10. Зависимые источники (определения, обозначения).
11. Дискретные и интегральные цепи; компонентная база.
12. Электрическая цепь, модель, математическая модель, схема.
13. Схемы замещения типовых линейных компонентов (резистора, конденсатора, катушки индуктивности, операционного усилителя).
14. Определение N-полюсника (двухполюсника); примеры.
15. Условия пассивности и активности двухполюсника.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

1.1р. Ток в индуктивности изменяется по синусоидальному закону $i(t) = I_m \sin \omega t$, $t \geq 0$ и равен нулю при $t < 0$. Найти закон

¹ Функциональную зависимость между током и напряжением на элементе электрической цепи называют *уравнением* данного элемента.

изменения напряжения на зажимах индуктивности, мгновенной мощности и энергии при согласном и встречном выборе положительных направлений напряжения и тока. Построить временные зависимости данных величин. Убедиться, что мощность и энергия не зависят от выбора положительных направлений напряжения и тока (согласного или встречного).

1.2р. Ток в резистивном сопротивлении¹ изменяется по закону $i(t) = I_m \sin \omega t$ при $t \geq t_0$ и равен нулю при $t < t_0$. Найти законы изменения напряжения на зажимах резистора, мгновенной мощности и энергии при согласном и встречном выборе положительных направлений напряжения и тока. Построить временные зависимости указанных величин.

1.3. Ток в индуктивности изменяется по закону:

а) $i(t) = I_m \sin^2 \omega t$, $t \geq 0$;

б) $i(t) = I_0 [1 - \exp(-t/\tau_0)]$, $t \geq 0$, $\tau_0 > 0$;

в) $i(t) = \begin{cases} -2I_0(t - 2kt_0)/t_0 + I_0, & 2kt_0 \leq t \leq (2k+1)t_0, \\ 2I_0[t - (2k+1)t_0]/t_0 - I_0, & (2k+1)t_0 \leq t \leq 2(k+1)t_0. \end{cases}$

Найти напряжение на зажимах индуктивности, мгновенную мощность и энергию. Построить график полученных зависимостей. График изменения тока для случая «в» показан на рис. 1.1.

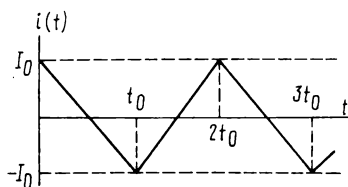


Рис. 1.1

1.4. Ток в резисторе изменяется по законам, приведенным в задаче 1.3. Найти напряжение на его зажимах и мгновенную мощность. Построить графики полученных зависимостей.

1.5. Напряжение на зажимах емкости изменяется по закону:

а) $u(t) = U_m \sin^3 \omega t$, $t \geq 0$; б) $u(t) = U_0 [1 - \exp(-t/2\tau_0)]$, $t \geq 0$, $\tau_0 > 0$.

Найти ток, мгновенную мощность и энергию емкости. Построить графики полученных зависимостей.

1.6. Напряжение на зажимах резистора изменяется по законам, приведенным в задаче 1.5. Найти ток и мгновенную мощность резистора. Построить графики полученных зависимостей.

¹ Вместо «резистивное сопротивление» будем для краткости писать «резистор».

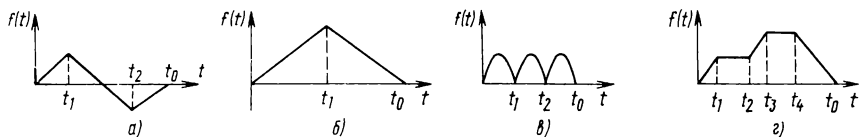


Рис. 1.2

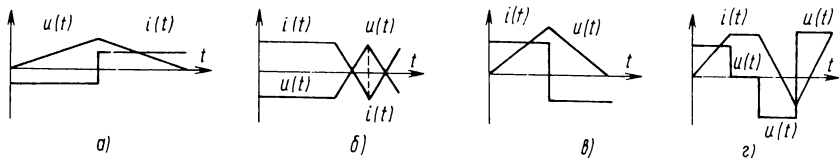
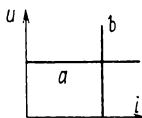


Рис. 1.3

Рис. 1.4



1.7. Считая, что приведенные на рис. 1.2 графики выражают временную зависимость тока резистора $f(t)=i_R(t)$, построить качественно временную зависимость напряжения на его зажимах.

1.8. Считая, что приведенные на рис. 1.2, а...г графики выражают временную зависимость тока индуктивности $f(t)=i_L(t)$, построить качественно временную зависимость напряжения на зажимах индуктивности.

1.9. Считая, что приведенные на рис. 1.2, а...г графики выражают временную зависимость напряжения на зажимах емкости $f(t)=u_C(t)$, построить качественно временную зависимость тока в емкости.

1.10*. Определить, каким элементом электрической цепи и при каком выборе положительных направлений напряжений и токов соответствуют напряжения и токи, временные зависимости которых изображены на рис. 1.3, а...г.

1.11*. Считая, что положительные направления напряжения и тока выбраны согласно, определите, при каких условиях ток емкости имеет положительное значение, если напряжение на ней отрицательно.

1.12. На рис. 1.4 приведены две вольт-амперные характеристики. Каким элементом электрической цепи они соответствуют?

1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Узел электрической цепи; простые и сложные узлы.
2. Ветви цепи, граф цепи, направленные графы.
3. Матрица соединений A_n ; правило составления матрицы соединений.
4. Редуцированная матрица соединений A .
5. Подграф; связный подграф.
6. Путь, контур, сечение.
7. Дерево графа, ветви связи (хорды); число ветвей дерева и число хорд.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

1.13. Для схемы рис. 1.5. изобразите направленный граф. Покажите несколько деревьев графа и несколько сечений. Назовите входящие в схему элементы.

Замечание. Если схема содержит N_y узлов, соединенных по принципу «каждый с каждым», то число деревьев N_d определяется по формуле $N_d = N_y^{N_y - 2}$. В данном случае число различных деревьев равно 16.

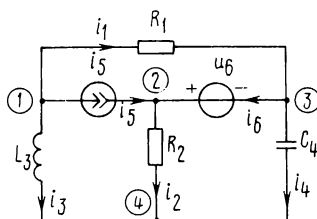


Рис. 1.5

1.14*р. Изобразите направленный граф, соответствующий схеме рис. 1.5, выберите одно из деревьев графа и для него:

а) составьте систему сечений так, чтобы каждое сечение содержало только одну ветвь дерева, а остальными ветвями, образующими сечение, были хорды (в литературе такую систему называют системой главных сечений);

б) составьте систему контуров так, чтобы каждый контур этой системы состоял только из одной хорды, а остальными ветвями, образующими контур, были ветви дерева (в литературе такую систему называют системой главных контуров).

1.15*. Докажите, что для связного графа всегда можно построить системы главных сечений и главных контуров. Найдите,

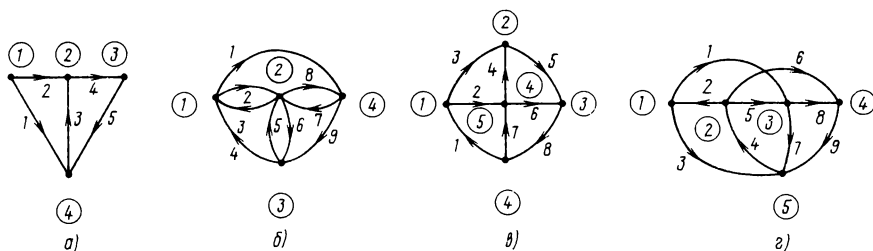


Рис. 1.6

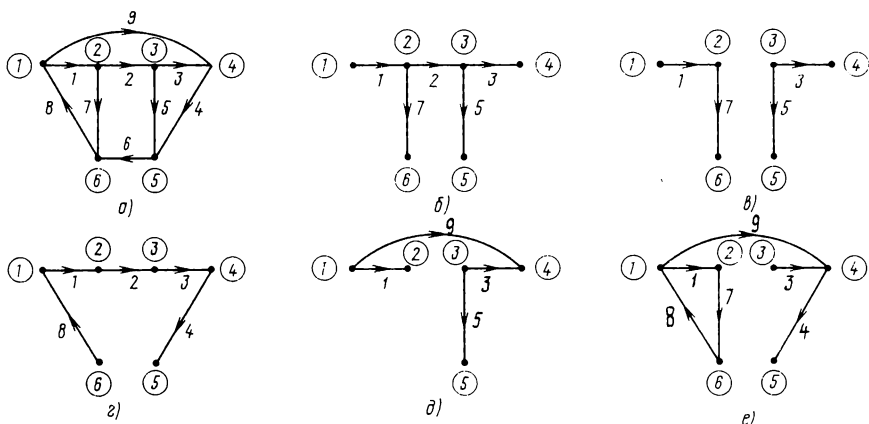


Рис. 1.7

чему равно число контуров в системе главных контуров $N_{г.к}$ и чему равно число сечений в системе главных сечений $N_{г.с}$, если граф содержит N_v узлов и N_b ветвей. При решении задачи примите во внимание, что число ветвей дерева равно $N_v - 1$.

1.16. Для графа, соответствующего схеме рис. 1.5, составьте матрицу соединений A_n и A . Убедитесь, что сумма всех строк матрицы A_n равна нулю, а матрицы A — не равна нулю.

1.17. Для изображенных на рис. 1.6, а...г графов запишите матрицы соединений A_n и A . Убедитесь, что сумма элементов каждого столбца матрицы A_n равна нулю, а матрицы A — не равна нулю.

1.18. На рис. 1.7, а изображен граф. Какие из подграфов рис. 1.7, б...е данного графа являются его деревьями, а какие нет и почему?

1.19. Заданы совокупности ветвей рис. 1.7, а: 1) B2, B6, B9; 2) B2, B5, B6, B7, B9; 3) B1, B8, B9; 4) B4...B6; 5) B4, B5, B7, B8; 6) B3, B4, B5. Какие из этих совокупностей ветвей являются сечениями, а какие нет, и почему?

1.20*. Для изображенного на рис. 1.7, а графа построить систему главных сечений и главных контуров относительно деревьев, состоящих из ветвей: а) B1, B2, B3, B5, B7; б) B1...B4, B8.

1.21. По заданным редуцированным матрицам соединений построить графы:

а) B1 B2 B3 B4 B5

$$\begin{matrix} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \end{matrix} \begin{vmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{vmatrix},$$

б) B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8

$$\begin{matrix} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \\ Y4 \end{matrix} \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

1.22.* Чему равно число ветвей графа, содержащего N_y узлов, каждый из которых связан с любым другим узлом ветвью? Сколько главных контуров, построенных относительно некоторого дерева, насчитывается в таком графе?

Решения.

1.1. При согласном выборе положительных направлений напряжения и тока уравнение индуктивности записывается следующим образом:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Подставив в данную формулу закон изменения тока и продифференцировав его по времени, получим: $u_L(t) = I_m \omega L \cos \omega t$. Мгновенная мощность и зависимость энергии от времени определяются по формулам:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = I_m^2 \omega L \cos \omega t \sin \omega t = 0,5 I_m^2 \omega L \sin 2\omega t, \\ w(t) &= 0,5 L i^2(t) = 0,5 I_m^2 L \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

На рис. 1.8 показаны временные зависимости тока, напряжения, энергии и мгновенной мощности индуктивности. При встречном выборе положительных направлений напряжения и тока уравнения индуктивности отличаются от приведенного выше знаком, а окончательные выражения для мгновенной мощности и энергии не изменяются. К такому заключению приводит сопоставление выражений для $p(t)$ и $w(t)$ при согласном и встречном выборе положительных направлений напряжения и тока.

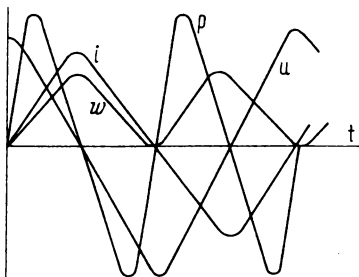


Рис. 1.8

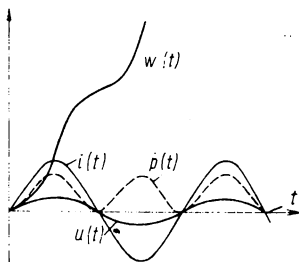


Рис. 1.9

Выводы. 1. Мгновенная мощность и энергия в индуктивности не зависят от выбора положительных направлений напряжения и тока. 2. Мгновенная мощность изменяет знак; это означает, что в определенные промежутки времени индуктивность потребляет энергию из цепи, а в другие отдает энергию в цепь. 3. Энергия $w(t)$ всегда больше или равна нулю. Таким образом, индуктивность является пассивным двухполюсником.

1.2. При согласном выборе направлений напряжения и тока для резистора справедливо соотношение (закон Ома) $u_R(t) = Ri_R(t)$. Поэтому $u_R(t) = I_m R \sin \omega t$ при $t \geq t_0$ и $u(t) = 0$ при $t < t_0$. Мгновенные мощность и энергия определяются по формулам:

$$p(t) = u(t)i(t) = I_m^2 R \sin^2 \omega t, \quad t \geq t_0 \quad \text{и} \quad p(t) = 0, \quad t < t_0;$$

$$w(t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \frac{I_m^2 R}{4\omega} [\sin 2\omega t_0 - \sin 2\omega t + 2\omega(t - t_0)].$$

На рис. 1.9 показаны временные зависимости тока, напряжения, энергии и мгновенной мощности при $t_0 = 0$.

При встречном выборе положительных направлений напряжения и тока изменится только знак в выражении для $u_R(t)$. Остальные величины останутся без изменения.

Выводы. Мгновенная мощность и энергия резистивного сопротивления, как и следовало ожидать, всегда положительны. Это означает, что резистор может потреблять энергию из внешней цепи.

1.14. Граф электрической схемы получим путем замены всех элементов отрезками линий (ветвями). Полученный таким образом граф показан на рис. 1.10, а. Если ветвям сообщить направление, то граф будет направленным (рис. 1.10, б). Здесь и в дальнейшем числами в кружочках будем нумеровать узлы, а числами без кружочков — ветви. На рис. 1.10, в показано одно из возможных деревьев графа. На рис. 1.10, г условно изображена система сечений относительно выбранного дерева. Первое сечение С1 содер-

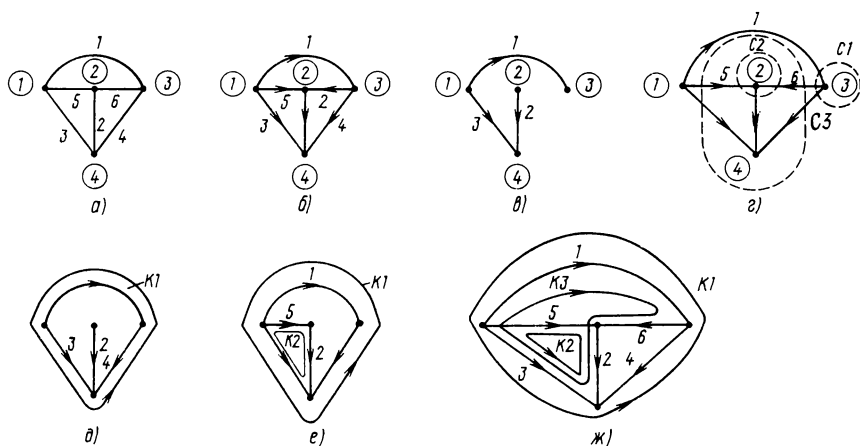


Рис. 1.10

жит только одну, первую, ветвь дерева и две связи — четвертую и шестую. Сечением $C1$ граф разбивается на две части. Одна часть состоит из ветвей $B2$, $B3$ и $B5$ с узлами $У1$, $У2$ и $У4$, а другая — только из узла $У3$. Сечение $C2$ содержит только одну, вторую, ветвь дерева и две связи — пятую и шестую. Этим сечением граф также разбивается на две части. Одна часть состоит из ветвей $B1$, $B3$ и $B4$ с узлами $У1$, $У3$ и $У4$, а другая — только из узла $У2$. Последнее сечение $C3$ из данной системы главных сечений содержит только одну, третью, ветвь дерева и три связи — четвертую, пятую и шестую. Этим сечением граф разбивается на две части. Одна часть состоит из ветви $B1$ с узлами $У1$ и $У3$, а другая — из ветви $B2$ с узлами $У2$ и $У4$. Обратите внимание, что все сечения отличаются друг от друга хотя бы одной ветвью, а именно, ветвью дерева.

Систему контуров относительно выбранного дерева строим следующим образом. К выбранному дереву рис. 1.10, *в* добавляем одну из связей, например четвертую. В результате получается контур $K1$, состоящий из первой и третьей ветвей дерева и четвертой связи (рис. 1.10, *д*). Добавляем следующую связь, например пятую. Полученный в результате такого добавления контур $K2$ состоит из второй и третьей ветвей дерева и данной связи (рис. 1.10, *е*). Последний контур $K3$ из данной системы главных контуров относительно выбранного дерева получим путем добавления шестой связи. Контур образуется первой, второй и третьей ветвями дерева и шестой связью (рис. 1.10, *ж*). Обратите внимание, что все контуры отличаются друг от друга хотя бы одной ветвью. Этой ветвью является одна из хорд.

2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2.1. ЗАКОНЫ КИРХГОФА. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПО ЗАКОНАМ КИРХГОФА

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Формулировка первого закона Кирхгофа (закон Кирхгофа для токов (ЗТК)).
2. Число линейно-независимых уравнений, составляемых по ЗТК.
3. ЗТК для сечений, правило знаков.
4. Способ составления системы линейно-независимых уравнений по ЗТК.
5. Формулировка второго закона Кирхгофа (закон Кирхгофа для напряжений (ЗНК)).
6. Число линейно-независимых уравнений, составляемых по ЗНК.
7. Способ составления системы линейно-независимых уравнений по ЗНК¹.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

2.1 р. На рис. 1.5 изображена схема электрической цепи. Необходимо составить уравнения по первому закону Кирхгофа для всех узлов и по второму закону Кирхгофа для контуров, состоящих из ветвей В1, В5, В6; В3, В5, В2; В2, В6, В4; В5, В6, В4, В3. Используя уравнения элементов, уменьшить число неизвестных в составленных уравнениях².

Внимание! При составлении уравнений необходимо произвольно задаться положительными направлениями неизвестных напряжений и токов. В пассивных двухполюсниках (резистивных сопротивлениях, индуктивностях и емкостях) будем придерживаться согласных направлений напряжений и токов (рис. 2.1). Не забудьте показать положительные направления напряжений на зажимах источников тока и положительные направления токов в источниках напряжения. Необходимо также показать направление обхода каждого контура. Так как знаки в уравнениях, составленных по ЗТК зависят от направления токов, а в уравнениях, составленных по ЗНК,— от направления обхода контуров и направления напряжений, то без предварительного выбора указанных направлений запись законов Кирхгофа лишена смысла.

¹ Кроме указанного в учебнике способа выбора линейно-независимых контуров их можно выбирать как ячейки планарного графа.

² В настоящей главе не ставится задача решения составляемых систем уравнений. Однако следует помнить, что эти системы придется решать. При этом сокращение числа неизвестных является, как правило, полезным.



Рис. 2.1

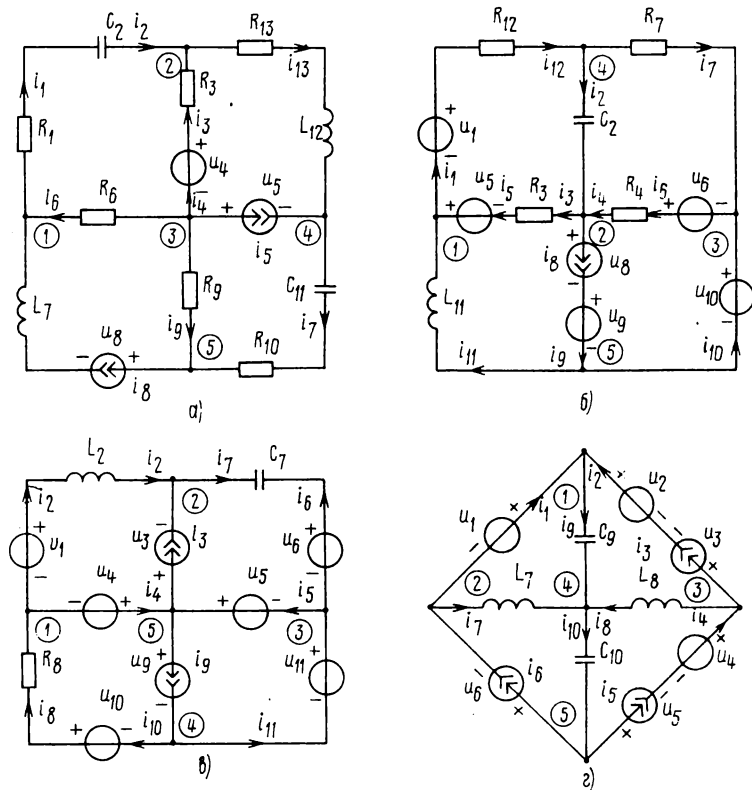


Рис. 2.2

2.2. Составить уравнения по первому закону Кирхгофа для цепей, схемы которых изображены на рис. 2.2, а...г. Убедитесь, что уравнения, составленные для всех узлов любой цепи, являются линейно-зависимыми.

Примечание. Напомним, что если ветвь состоит из последовательного соединения элементов, то токи во всех элементах равны между собой. В данном случае $i_3 = i_4$ (рис. 2.2, а) $i_1 = i_{12}$, $i_3 = i_5$, $i_4 = i_6$, $i_8 = i_9$ (рис. 2.2, б) и т. д.

2.3. Составить уравнения по второму закону Кирхгофа или контуров, состоящих из ветвей:

а) B1...B4, B6; B3...B5, B12, B13; B6...B9; B5, B9...B11 (схема рис. 2.2, а);

б) B1, B12, B2, B3, B5; B1, B12, B7, B6, B4, B3, B5; B4, B6, B10, B9, B8; B5, B3, B4, B6, B10, B11 (схема рис. 2.2, б);

в) B1...B4; B3, B5...B7; B4, B5, B11, B10, B8; B5, B11, B9 (схема рис. 2.2, в);

г) B1...B6; B6, B7, B10; B2, B3, B8, B9; B4, B5, B10, B8 (схема рис. 2.2, г).

2.4. Образуют ли систему главных контуров для каждой схемы контуры, названные в задаче 2.3? Если да, то указать деревья, относительно которых составлены эти системы.

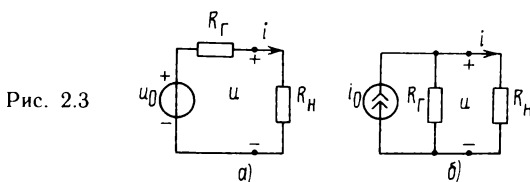
2.5*. Решить задачу 2.3 для других систем главных контуров.

2.6*. Записать ЗТК для некоторых систем главных сечений схем рис. 2.2, а...г.

2.7р. Доказать, что напряжение u_{mn} между узлом m и узлом n любой цепи равно алгебраической сумме напряжений ветвей, образующих путь от узла m к узлу n . При этом знаки напряжений ветвей пишем те, которые первыми встречены при обходе этого пути в направлении от m -го к n -му узлу.

2.8р. Найти напряжение u_{21} между узлами 2 и 1 схемы, изображенной на рис. 1.5.

2.9. Найти напряжения на источниках тока через напряжения на элементах R , L , C и напряжения источников напряжения для схем, изображенных на рис. 2.2, а...г.



2.10. По известным токам источников тока и элементов R , L , C найти токи источников напряжения в цепях, схемы которых изображены на рис. 2.2, а...г.

2.11. Пусть схема замещения реального генератора представляет собой последовательное соединение источника напряжения u_0 и резистивного сопротивления R_r (рис. 2.3, а). Найти и изобразить на графике зависимость напряжения u на зажимах генератора от тока i , протекающего через его зажимы при изменении R_n от 0 до ∞ . Зависимость напряжения от тока на зажимах двухполюсника называют вольт-амперной характеристикой.

2.12. Пусть схема замещения реального генератора представляет собой параллельное соединение источника тока i_0 и резистивного сопротивления R_r . Найти и изобразить на графике вольт-амперную характеристику такого генератора.

2.13. Как по измеренным напряжению и току на зажимах реального генератора с резистивным внутренним сопротивлением определить параметры его схем замещения (рис. 2.3, а, б)?

2.14*. Граф цепи содержит четыре узла ($N_y=4$), каждый из которых связан с любым другим узлом ветвью. Какое минимальное число токов ветвей должно быть известным, чтобы с помощью ЗТК рассчитать токи остальных ветвей цепи? Приведите примеры. Решите эту же задачу для $N_y=5$ и для общего случая.

2.2. ЗАКОНЫ КИРХГОФА. ЗАВИСИМЫЕ ИСТОЧНИКИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Определение зависимых источников, обозначение их на схемах.
2. Схема замещения операционного усилителя.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

2.15р. В цепи со схемой рис. 2.4 операционный усилитель (ОУ) заменить его схемой замещения. Записать систему линейно-независимых уравнений по ЗТК и ЗНК.

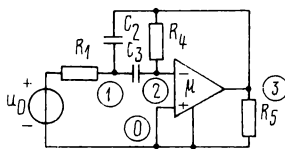


Рис. 2.4

2.16. Заменить ОУ их схемой замещения и составить системы линейно-независимых уравнений по законам Кирхгофа для цепей, схемы которых изображены на рис. 2.5.

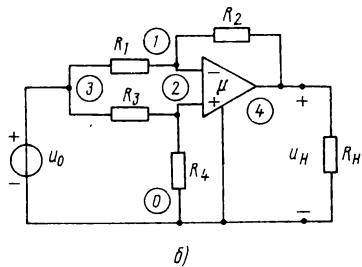
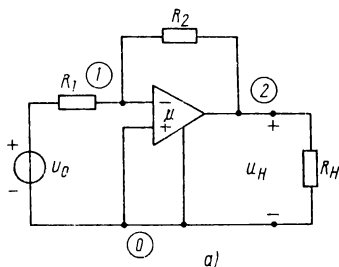


Рис. 2.5

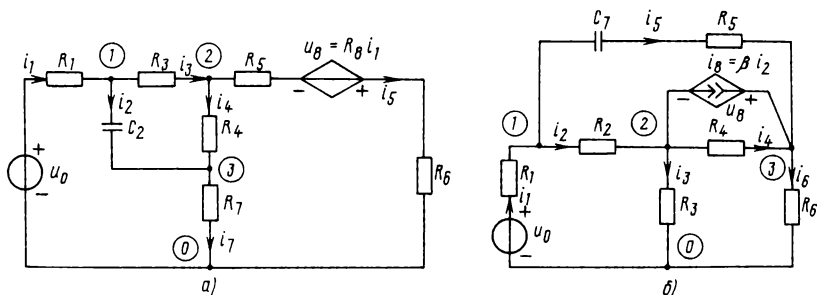


Рис. 2.6

2.17. Составить системы линейно-независимых уравнений по законам Кирхгофа для цепей, схемы которых показаны на рис. 2.6. Назвать вид используемых здесь источников.

2.3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ПРИНЦИПЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Принцип дуальности.
2. Принцип наложения.
3. Теорема замещения.
4. Теорема об эквивалентном генераторе.
5. Теорема о балансе мощности.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

2.18*. Показать, что последовательному (параллельному) соединению элементов соответствует параллельное (последовательное) соединение дуальных элементов в дуальной электрической цепи.

2.19. Считая, что понятия сечения и контура являются дуальными, сформулируйте закон, дуальный второму закону Кирхгофа.

2.20. Существует правило определения сопротивления при последовательном соединении резисторов, а именно: при последовательном соединении резисторов общее сопротивление равно сумме сопротивлений резисторов, составляющих это соединение, т. е.

$$R_s = \sum_{i=1}^n R_i \quad (\text{доказательство этого правила приведено в гл. 3 учебника}).$$

Сформулировать правило, дуальное данному.

2.21. Существуют две формулировки теоремы замещения. Дайте одну формулировку. Применяя принцип дуальности, получите вторую формулировку теоремы. Прделайте то же самое для теоремы об эквивалентном генераторе.

2.22. Запишите формулы, дуальные приведенным ниже:

$$u_L = L di_L / dt, \quad i_C = C du_C / dt, \quad u = Ri.$$

2.23р. На рис. 2.7 приведена схема, содержащая источники тока и напряжения. Как надо преобразовать схемы при расчете цепи по принципу наложения?

2.24. Решить задачу 2.23 применительно к схемам рис. 2.2, а, б.

2.25*. Упростить схемы рис. 2.2, а, б, г путем замены по теореме об эквивалентном генераторе ветвей, состоящих из последовательного соединения источника тока и какого-либо элемента.

2.26¹. Почему в цепи со схемой рис. 2.8, а изменение задающего тока источника тока не сказывается на величине тока, протекающего через резистивный элемент? Чему равен ток, проходящий через источник напряжения?

2.27¹. Почему в цепи со схемой рис. 2.8, б изменение задающего напряжения источника напряжения не сказывается на значении напряжения на резистивном элементе? Чему равно напряжение на зажимах источника тока?

2.28¹. Найти напряжение на внешних зажимах цепей, схемы которых изображены на рис. 2.8, в, г.

2.29. Воспользовавшись теоремой об эквивалентном генераторе, преобразовать схемы рис. 2.8, в, г.

2.30р. Для схемы рис. 2.7 составить уравнение баланса мощности. Записать теорему Теллегена.

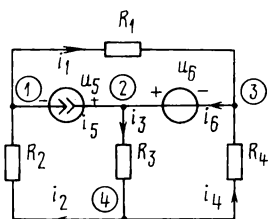


Рис. 2.7

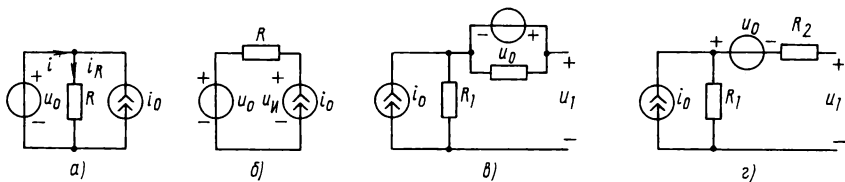


Рис. 2.8

¹ При решении задач следует воспользоваться принципом наложения.

2.31. Применив законы Ома и Кирхгофа, показать справедливость теоремы о балансе мощности для цепей, схемы которых изображены на рис. 2.8, а, б.

2.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. АНОМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Кроме введенных ранее элементов (независимых и зависимых источников, R -, L - и C -элементов) при анализе электронных схем иногда используются так называемые *аномальные элементы*. К ним относятся нуллятор, норатор и нулмор. Их условные изображения показаны на рис. 2.9, а, б, в соответственно. *Нуллатором* (рис. 2.9, а) называется двухполюсник, напряжение и ток которого при подключении к активному двухполюснику равны нулю¹. *Норатором* (рис. 2.9, б) называется двухполюсник, у которого напряжения и токи могут принимать любые значения и между собой не связаны, а определяются внешними цепями. *Нулмором* (рис. 2.9, в) называется четырехполюсник, у которого входные ток и напряжение равны нулю ($u_1=0$, $i_1=0$), а выходные ток и напряжение принимают любые, не связанные между собой значения (u_2 — любое, i_2 — любой). Из определения аномальных элементов следует, что напряжение и ток на нуллаторе и нораторе не связаны законом Ома. Для цепей, содержащих аномальные элементы, законы Кирхгофа, естественно, выполняются. Нулмор можно представить сочетанием

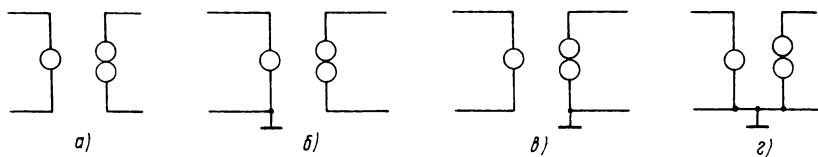
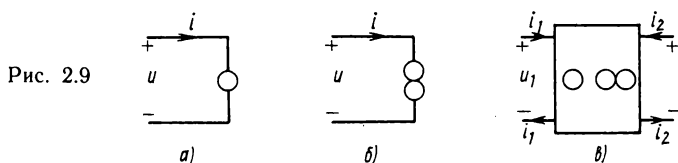


Рис. 2.10

¹ Не допускается включение нуллора к идеализированным источникам, точно так же, как не допускается параллельное соединение источников напряжения с разными задающими напряжениями и последовательное соединение источников тока с различными задающими токами, как противоречащие законам Кирхгофа.

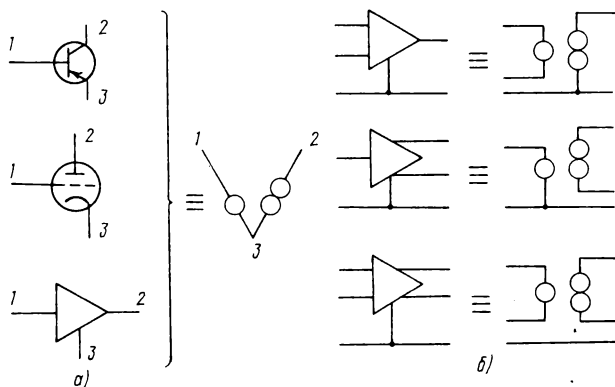


Рис. 2.11

нуллатора и норатора (рис. 2.10, а). При этом один из зажимов нуллатора или норатора или оба вместе могут соединяться с «землей» (рис. 2.10, б, в, г). Нулор может служить схемой замещения ОУ с бесконечно большим коэффициентом усиления $\mu \rightarrow \infty$. Действительно, входные напряжение и ток ОУ равны нулю, а в силу бесконечного усиления выходные напряжение и ток могут быть любые. В первом приближении нулором можно заменить и высококачественные полупроводниковые и ламповые триоды (рис. 2.11, а). Схемы замещения различных типов ОУ показаны на рис. 2.11, б.

Пример. Найти напряжение u_2 на выходе однотранзисторного усилителя, изображенного на рис. 2.12, а. Номиналы всех элементов и u известны. Транзистор является высококачественным, поэтому его можно заменить нулором согласно рис. 2.11, а. В результате замены получим схему, показанную на рис. 2.12, б. Зададимся положительными направлениями токов (рис. 2.12, б). Положительные направления напряжений и токов выбраны согласно. По определению нуллатора $i_5 = 0$ и $u_5 = 0$. Тогда очевидно, что $i_0 = i_1$, а напряжение $u_1 = u_3$. Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для первого контура

$$-u + u_0 + u_1 = 0.$$

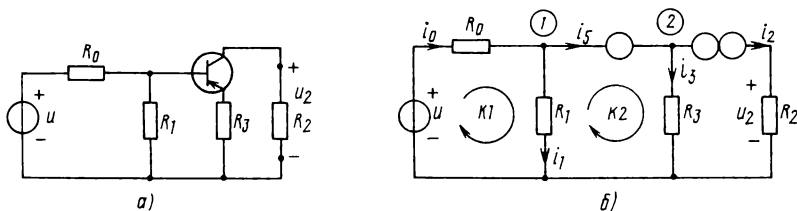


Рис. 2.12

Подставив в эту формулу уравнения ветвей

$$u_0 = i_0 R_0 \text{ и } u_1 = R_1 i_1$$

и учтя, что $i_0 = i_1$, получим одно уравнение с одним неизвестным током i_1 . Решив это уравнение, получим значение тока $i_1 = u / (R_0 + R_1)$, а затем значение напряжения $u_1 = u R_1 / (R_0 + R_1)$. Так как $u_1 = u_3$, то по закону Ома находим ток i_3 : $i_3 = u_3 / R_3 = u_1 / R_3 = u R_1 / R_3 (R_0 + R_1)$.

Рис. 2.13

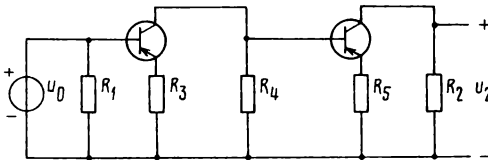
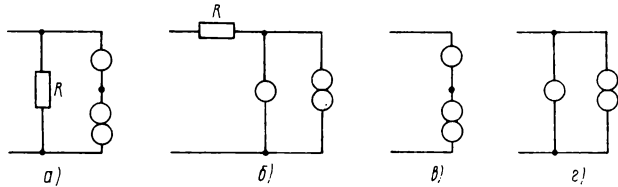


Рис. 2.14

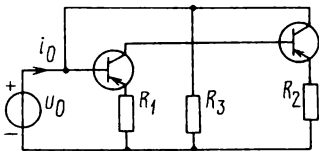


Рис. 2.15

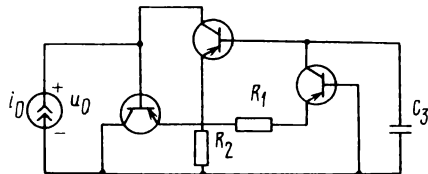


Рис. 2.16

Из первого закона Кирхгофа для второго узла следует, что при $i_5 = 0$ ток i_2 равен току i_3 с противоположным знаком, т. е. $i_2 = -i_3$. И, наконец, по закону Ома:

$$u_2 = R_2 i_2 = -R_1 R_2 u / R_3 (R_0 + R_1).$$

При $u > 0$ напряжение $u_2 < 0$. Это говорит о том, что положительные направления напряжения u_2 и тока i_2 выбраны неверно и их надо изменить на противоположные.

2.32. Найти, каким двухполюсником (без аномальных элементов) эквивалентны схемы, изображенные на рис. 2.13.

2.33¹. Найти напряжение на выходе двухтранзисторного усилителя, изображенного на рис. 2.14.

2.34¹. Найти входное сопротивление $R_{вх} = u_0/i_0$ схемы, изображенной на рис. 2.15. Проанализировать полученный результат.

2.35¹. Установить связь между напряжением и током $u_0 = f(i_0)$ на входе схемы рис. 2.16. Проанализировать полученный результат. Уравнение какого элемента получено?

2.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 2.1. Составление уравнений по законам Кирхгофа.

Таблица 2.1

Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код
1	1 2 4 5 6 3	28	6 4 7 2 3 5	55	1 2 3 4 6 5	82	5 6 7 2 3 4
2	2 4 5 6 3 1	29	4 7 2 3 5 6	56	2 3 4 6 5 1	83	6 7 2 3 4 5
3	4 5 6 3 1 2	30	7 2 3 5 6 4	57	3 4 6 5 1 2	84	7 2 3 4 5 6
4	5 6 3 1 2 4	31	3 5 6 4 7 8	58	4 6 5 1 2 3	85	3 4 5 6 7 8
5	6 3 1 2 4 5	32	5 6 4 7 8 3	59	6 5 1 2 3 4	86	4 5 6 7 8 3
6	3 1 2 4 5 6	33	6 4 7 8 3 5	60	5 1 2 3 4 6	87	5 6 7 8 3 4
7	2 4 5 6 3 7	34	4 7 8 3 5 6	61	2 3 4 6 5 7	88	6 7 8 3 4 5
8	4 5 6 3 7 2	35	7 8 3 5 6 4	62	3 4 6 5 7 2	89	7 8 3 4 5 6
9	5 6 3 7 2 4	36	8 3 5 6 4 7	63	4 6 5 7 2 3	90	8 3 4 5 6 7
10	6 3 7 2 4 5	37	1 2 3 4 5 6	64	6 5 7 2 3 4	91	1 3 4 5 6 2
11	3 7 2 4 5 6	38	2 3 4 6 5 1	65	5 7 2 3 4 6	92	3 4 5 6 2 1
12	7 2 4 5 6 3	39	3 4 6 5 1 2	66	7 2 3 4 6 5	93	4 5 6 2 1 3
13	4 5 6 3 7 8	40	4 6 5 1 2 3	67	3 4 6 5 7 8	94	5 6 2 1 3 4
14	5 6 3 7 8 4	41	6 5 1 2 3 4	68	4 6 5 7 8 3	95	6 2 1 3 4 5
15	6 3 7 8 4 5	42	5 1 2 3 4 6	69	6 5 7 8 3 4	96	2 1 3 4 5 6
16	3 7 8 4 5 6	43	2 3 4 6 5 7	70	5 7 8 3 4 6	97	3 4 5 6 2 7
17	7 8 4 5 6 3	44	3 4 6 5 7 2	71	7 8 3 4 6 5	98	4 5 6 2 7 3
18	8 4 5 6 3 7	45	6 5 7 2 3 4	72	8 3 4 6 5 7	99	5 6 2 7 3 4
19	1 2 3 5 6 4	46	4 6 5 7 2 3	73	1 2 3 4 5 6	100	6 2 7 3 4 5
20	2 3 5 6 4 1	47	5 7 2 3 4 6	74	2 3 4 5 6 1	101	2 7 3 4 5 6
21	3 5 6 4 1 2	48	7 2 3 4 6 5	75	3 4 5 6 1 2	102	7 3 4 5 6 2
22	5 6 4 1 2 3	49	3 4 6 5 7 8	76	4 5 6 1 2 3	103	4 5 6 2 7 8
23	6 4 1 2 3 5	50	4 6 5 7 8 3	77	5 6 1 2 3 4	104	5 6 2 7 8 4
24	4 1 2 3 5 6	51	6 5 7 8 3 4	78	6 1 2 3 4 5	105	6 2 7 8 4 5
25	2 3 5 6 4 7	52	5 7 8 3 4 6	79	2 3 4 5 6 7	106	2 7 8 4 5 6
26	3 5 6 4 7 2	53	7 8 3 4 6 5	80	3 4 5 6 7 2	107	7 8 4 5 6 2
27	5 6 4 7 2 3	54	8 3 4 6 5 7	81	4 5 6 7 2 3	108	8 4 5 6 2 7

Анализируемая схема выбирается каждым студентом самостоятельно в соответствии с графом рис. 2.17 и кодом, который задается преподавателем из табл. 2.1. Первая цифра кода указывает номер

¹ При решении задач следует считать, что транзисторы являются высококачественными, а значения параметров элементов и задающего напряжения известны.

ветви, в которую включен источник напряжения; вторая — номер ветви, в которую включен источник тока; третья и четвертая — номера ветвей, в которые включены индуктивности; пятая и шестая — номера ветвей, в которые включены емкости. В остальные ветви включены резисторы. Ориентация источников выбирается самостоятельно. В качестве примера на рис. 2.18 изображена схема, соответствующая варианту 108.

Необходимо:

1. Вычертить анализируемую схему и обозначить элементы.
2. Выбрать произвольно три дерева и относительно них записать уравнения ЗНК. С помощью уравнений элементов исключить напряжения на резисторах и индуктивностях.
3. Записать уравнения ЗТК для всех узлов. Убедиться, что они являются линейно-зависимыми. С помощью уравнений элементов исключить токи резисторов и емкостей.
4. Записать баланс мощности.
5. Найти напряжения на источниках тока, выразив их через напряжения на источниках напряжения и элементах R , L и C .

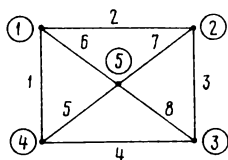


Рис. 2.17

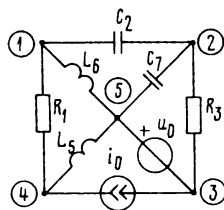


Рис. 2.18

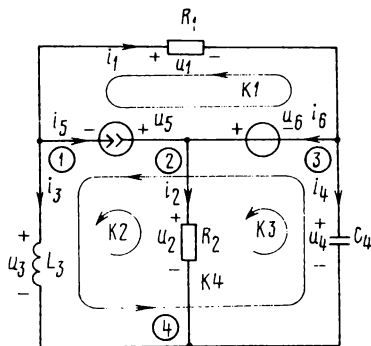


Рис. 2.19

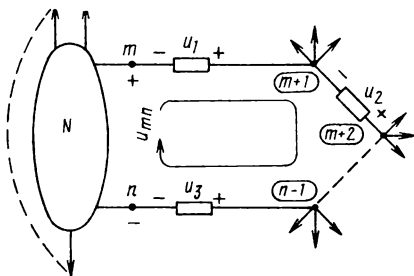


Рис. 2.20

Решения.

2.1. Задаемся произвольно направлениями напряжений и токов и направлением обхода контуров, например так, как показано на рис. 2.19. Уравнения по первому закону Кирхгофа имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для узла 1} \quad i_1 + i_3 + i_5 = 0, \\ \text{для узла 2} \quad i_2 - i_5 - i_6 = 0, \\ \text{для узла 3} \quad -i_1 + i_4 + i_6 = 0, \\ \text{для узла 4} \quad -i_2 - i_3 - i_4 = 0. \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Убедиться самостоятельно, что уравнения являются линейно-зависимыми. Уравнения по второму закону Кирхгофа для выбранных контуров имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для контура K1} \quad -u_1 - u_5 + u_6 = 0, \\ \text{для контура K2} \quad -u_2 + u_3 + u_5 = 0, \\ \text{для контура K3} \quad u_2 - u_6 - u_4 = 0, \\ \text{для контура K4} \quad u_3 + u_5 - u_6 - u_4 = 0. \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Убедиться самостоятельно, что уравнения являются линейно-зависимыми.

В составленных уравнениях неизвестными являются пять напряжений $u_1 \dots u_5$ и пять токов $i_1 \dots i_4, i_6$, т. е. всего десять неизвестных. На элементах R , L и C напряжение и ток связаны следующими соотношениями:

$$u_R = Ri_R, u_L = L di_L/dt, i_C = C du_C/dt.$$

Напряжения и токи источников между собой не связаны. Таким образом, можно исключить только напряжения u_1 и u_2 на резисторах R_1 и R_2 , напряжение u_3 на индуктивности L_3 и ток i_4 через емкость C_4 . В результате такого исключения уравнения (2.1) и (2.3) примут вид:

$$\left. \begin{array}{ll} i_1 + i_3 + i_5 = 0, & -R_1 i_1 - u_5 + u_6 = 0, \\ i_2 - i_5 - i_6 = 0, & -R_2 i_2 + L_3 di_3/dt + u_5 = 0, \\ -i_1 + i_6 + C_4 du_4/dt = 0, & R_2 i_2 - u_6 - u_4 = 0, \\ -i_2 - i_3 - C_4 du_4/dt = 0, & L_3 di_3/dt + u_5 - u_6 - u_4 = 0. \end{array} \right.$$

Как видим, число неизвестных уменьшилось с десяти до шести.

2.7. В заданной цепи выделим любой путь, соединяющий m -й и n -й узлы. Остальную схему представим в виде многополюсника (рис. 2.20). Направленные от узлов $m+1, \dots, n-1$ стрелки означают, что данные узлы могут соединяться как между собой, так и с полюсами многополюсника N . Выбрав контур и направление его обхода так, как показано на рис. 2.20, запишем второй закон Кирхгофа

$$-u_{mn} + \sum_{k=1}^s \beta_k u_k = 0. \quad (2.3)$$

Согласно правилу знаков $\beta_k = +1$ при совпадении направления

обхода контура с направлением напряжения, $\beta_k = -1$ в противном случае. Из уравнения (2.3) следует, что

$$u_{nn} = \sum_{k=1}^s \beta_k u_k.$$

Из последнего равенства вытекает вышеприведенное утверждение.

2.8. Из узла 2 в узел 1 схемы рис. 2.19 можно попасть различными путями. Рассмотрим пути, состоящие из ветвей В6, В4, В3 (I путь); В2, В3 (II); В6, В1 (III). Если использовать первый путь, то согласно доказанному выше, напряжение u_{21} можно вычислить по формуле $u_{21} = u_6 + u_4 - u_3$. Обратим внимание на знаки в данном уравнении. При движении по первому пути на ветвях В6 и В4 первым встречаем знак «+», а на ветви В3 первым встречаем знак «-». С этими знаками данные напряжения входят в уравнение. Если использовать второй и третий пути, то получим еще две формулы для расчета искомого напряжения: $u_{21} = u_2 - u_3$ и $u_{21} = u_6 - u_1$.

2.15. После замены ОУ его схемой замещения согласно рис. 2.21, а исходная схема преобразится к виду, показанному на рис. 2.21, б. При этом было учтено, что $u_{вх2} = u_{20}$. Как видим из рисунка, узел 2 является простым и для него нет смысла записывать ЗТК. Остается два независимых узла. Выбрав и обозначив положительные направления токов ветвей, запишем систему линейно-независимых уравнений по ЗТК для узлов 1 и 3:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0, \quad -i_2 - i_3 + i_5 + i_6 = 0.$$

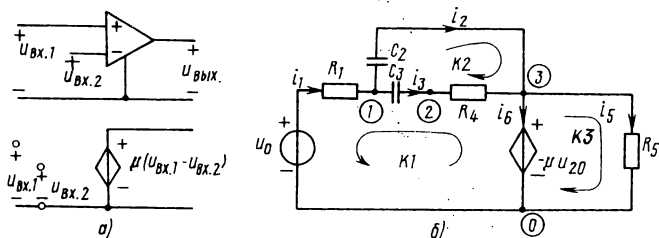
Для получения линейно-независимых уравнений в качестве контуров выберем ячейки, как показано на рис. 2.21, б. Будем считать, что на R -, C -элементах положительные направления напряжений и токов выбраны согласно (см. рис. 2.1): Обозначив напряжения буквой u с индексами, которые соответственно совпадают с индексами элементов, запишем уравнения по ЗНК:

$$\text{для контура К1 } u_0 - u_1 - u_3 - u_4 + \mu u_{20} = 0,$$

$$\text{для контура К2 } u_2 - u_3 - u_4 = 0,$$

$$\text{для контура К3 } u_5 + \mu u_{20} = 0.$$

Рис. 2.21



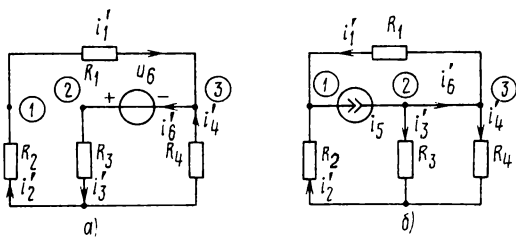


Рис. 2.22

2.23. Согласно принципу наложения ток (напряжение) любой ветви, вызванный действием нескольких источников, равен алгебраической сумме токов (напряжений), вызванных каждым источником в отдельности. Поэтому необходимо изобразить столько схем, сколько источников имеется в схеме, каждый раз полагая тождественно равным нулю все задающие напряжения и токи источников, кроме одного. Источник напряжения с нулевым задающим напряжением эквивалентен короткому замыканию его зажимов, а источник тока с нулевым задающим током эквивалентен обрыву ветви. Преобразованные схемы показаны на рис. 2.22, а, б. Первая схема получилась в результате приравнивания нулю задающего тока источника тока (U_1 и U_2 не связаны между собой), вторая — в результате приравнивания нулю задающего напряжения источника напряжения (U_2 и U_3 замкнуты). В соответствии с принципом наложения токи исходной схемы рис. 2.7 рассчитываются по формулам:

$$i_1 = i'_1 - i''_1, i'_2 = i'_2 + i''_2, i_3 = i'_3 + i''_3, i_4 = i'_4 - i''_4, i_6 = i'_6 - i''_6.$$

Поясним выбор знаков в этих формулах. Так, i'_1 выбран со знаком «+», так как он направлен так же, как и ток i_1 . Ток i''_1 записан со знаком «—», потому что он направлен против тока i_1 . Таким же образом выбраны знаки и в остальных формулах.

2.30. В общем виде баланс мощности записывается для согласного выбора положительных направлений напряжения и тока сле-

дующим образом: $\sum_{k=1}^{N_n} u_k i_k = 0$. При составлении баланса мощности

надо учесть, что не во всех элементах соблюдается согласный выбор положительных направлений напряжения и тока. Очевидно, что для таких элементов произведение $u_k i_k$ должно входить в сумму со знаком «минус». Это как раз соответствует изменению выбранного положительного направления тока или напряжения. Таким образом, уравнение баланса мощности может быть записано в следующем виде:

$$\sum \gamma_k u_k i_k = 0,$$

где $\gamma_k = 1$ при согласном выборе положительных направлений напряжений u_k и тока i_k , $\gamma_k = -1$ при встречном. В данном случае напряжения и токи источников направлены встречно, а потребителей согласно, поэтому уравнение баланса мощности имеет вид:

$$i_1 u_1 + i_2 u_2 + i_3 u_3 + i_4 u_4 - i_5 u_5 - i_6 u_6 = 0.$$

3. КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

3.1. ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ОДНИМ ИСТОЧНИКОМ И ИХ РАСЧЕТ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Последовательное и параллельное соединения двухполюсников.
2. Эквивалентное сопротивление последовательного и параллельного соединений резистивных элементов.
3. Уравнение резистивного элемента (закон Ома).
4. Вычисление напряжения на одном из двух последовательно соединенных резисторах, если известно общее напряжение.
5. Вычисление тока в одном из двух параллельно соединенных резисторах, если известен общий ток.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

3.1. Найти сопротивления трехэлементных двухполюсников, изображенных на рис. 3.1. Значения параметров элементов следующие: $R_1 = 1000 \text{ Ом}$, $R_2 = 1600 \text{ Ом}$, $R_3 = 2000 \text{ Ом}$.

3.2. Найти сопротивление четырехэлементных двухполюсников, изображенных на рис. 3.2. Параметры элементов имеют следующие значения: $R_1 = 800 \text{ Ом}$, $R_2 = 1200 \text{ Ом}$, $R_3 = 1600 \text{ Ом}$, $R_4 = 2000 \text{ Ом}$.

3.3*. Сколько и каких резистивных сопротивлений можно образовать путем того или иного соединения части или всех резисторов с параметрами $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$.

3.4р. Для изображенного на рис. 3.3. четырехполюсника найти сопротивление со стороны: а) зажимов $1-1'$ (входное сопротивление), если зажимы $2-2'$ разомкнуты или замкнуты; б) зажимов $2-2'$ (выходное сопротивление), если зажимы $1-1'$ разомкнуты или замкнуты при следующих значениях параметров элементов: $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$.

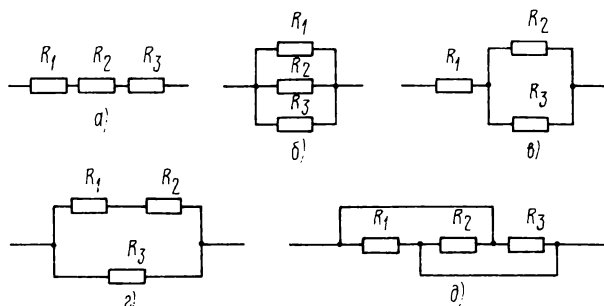


Рис. 3.1

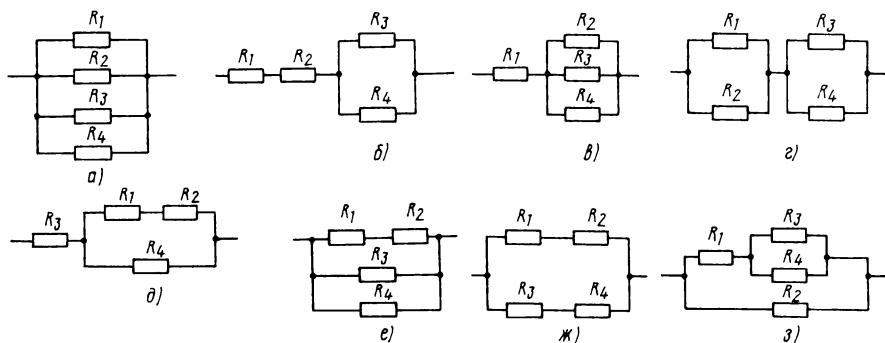


Рис. 3.2

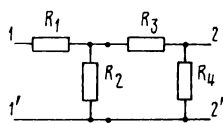


Рис. 3.3

3.5. Найти входные и выходные сопротивления при замкнутых или разомкнутых зажимах на противоположном конце четырехполюсников, схемы которых изображены на рис. 3.4. Параметры элементов имеют следующие значения: $R_1 = 2500 \text{ Ом}$, $R_2 = 800 \text{ Ом}$, $R_3 = 1200 \text{ Ом}$, $R_4 = 200 \text{ Ом}$, $R_5 = 1800 \text{ Ом}$.

3.6. Найти входное сопротивление резистивной цепи, схема которой приведена на рис. 3.5, если сопротивление одного из ее резисторов равно нулю ($R_k = 0$ при $k = 1, 2, 3, 4, 5$), а сопротивления остальных резисторов одинаковы и равны $R_l = R = 10 \text{ Ом}$ ($l \neq k$).

3.7. Найти токи и напряжения элементов в простейших последовательных и параллельных цепях, схемы которых приведены на рис. 3.6.

3.8р. Определить напряжения и токи всех резисторов цепи со схемой, изображенной на рис. 3.7, если $u = 1,1 \text{ В}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 200 \text{ Ом}$, $R_3 = 300 \text{ Ом}$.

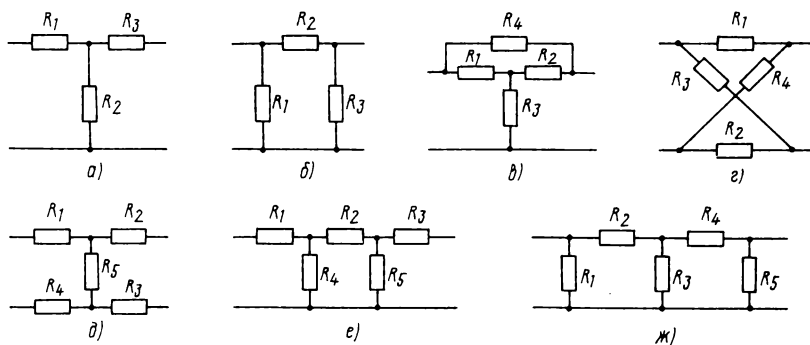


Рис. 3.4

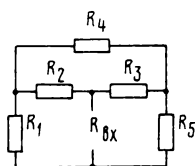


Рис. 3.5

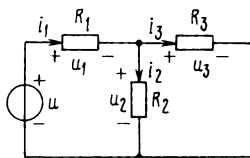


Рис. 3.7

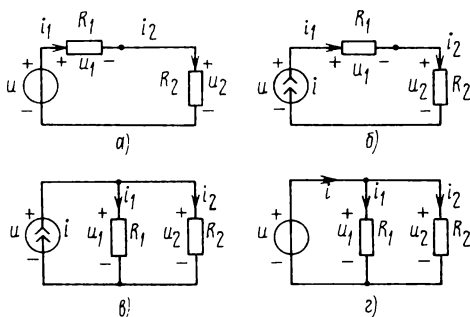


Рис. 3.6

3.9. Как изменятся токи и напряжения всех элементов в цепи со схемой рис. 3.6, а, если дополнительно включить резистор R_3 : а) последовательно с R_2 ; б) параллельно с R_2 ?

3.10. Решить задачу 3.9. применительно к схеме рис. 3.6, б.

3.11. Решить задачу 3.9 применительно к схеме рис. 3.6, в.

3.12. Решить задачу 3.9 применительно к схеме рис. 3.6, г.

3.13. К делителю напряжения (рис. 3.8) подводится напряжение $u = 160$ В. Делитель нагружен на электронную лампу, входное сопротивление которой примем бесконечно большим. Найти сопротивления R_1 и R_2 делителя, если напряжение u_2 должно равняться 1 В, а сопротивление делителя $R_1 + R_2 = 1$ МОм.

3.14 *. Необходимо рассчитать регулируемый делитель напряжения (рис. 3.9) так, чтобы его входное сопротивление равнялось

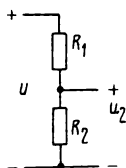


Рис. 3.8

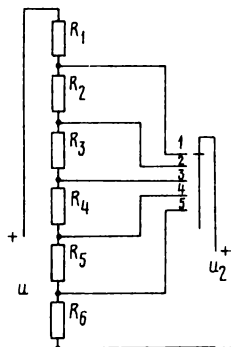


Рис. 3.9

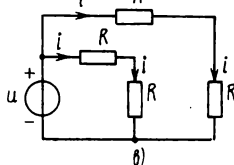
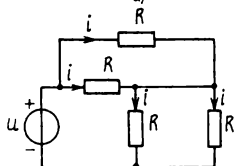
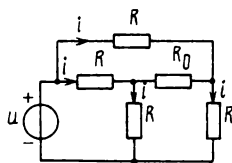


Рис. 3.10

500 кОм и напряжение на его выходе при разомкнутых зажимах могло принимать значения 12,5 В, 25 В, 40 В, 50 В, 75 В при входном напряжении 100 В.

3.15 *. Расширение пределов измерения вольтметров достигается путем не только применения делителей напряжения, но и включения последовательно с измерительным прибором дополнительного резистора. Рассчитать величины дополнительных сопротивлений резисторов, которые необходимо включить, чтобы измерить напряжение 100 В, 50 В, 25 В, при максимально возможном отклонении стрелки, если без дополнительного резистора такое отклонение достигается при токе 0,01 мА и напряжении 0,1 В.

3.16 *. Рассчитать величину сопротивления резистора, подключенного параллельно к прибору с сопротивлением 750 Ом для измерения тока 0,1; 0,5; 1 А при максимальном отклонении стрелки, если без дополнительного резистора резистора максимальное отклонение стрелки достигается при токе 0,1 мА.

3.17. Почему во всех трех цепях, схемы которых приведены на рис. 3.10, токи через резисторы с сопротивлением R одинаковы?

3.18 *. Найти значения сопротивлений резисторов R_1 и R_2 , при которых входное сопротивление цепи со схемой рис. 3.11 равно $R_0 = 100$ Ом, а $u_2/u_1 = 0,5$.

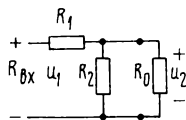


Рис. 3.11

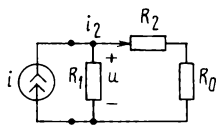


Рис. 3.12

3.19 *. Найти значения сопротивлений резисторов R_1 , R_2 и R_0 , при которых входное сопротивление цепи со схемой рис. 3.12 равно R_0 , если напряжение $u=1$ В, а токи $i=1$ мА, $i_2=0,2$ мА.

3.20. Доказать, что при последовательном соединении резисторов эквивалентное сопротивление, а при параллельном — эквивалентная проводимость вычисляются по формулам $R_{\text{эк}} = \sum R_i$, $G_{\text{эк}} = \sum G_i$ соответственно.

3.2. ПРОСТЕЙШИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕПЕЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Определение эквивалентных цепей.
2. Эквивалентные преобразования реальных источников (преобразование цепи, состоящей из источника напряжения с последовательно включенным резистором в цепь, состоящую из источника тока с параллельно включенным резистором, и наоборот).
3. Сущность метода свертывания.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

3.21р. Найти входное сопротивление цепи, схема которой изображена на рис. 3.13.

3.22р. Используя эквивалентное преобразование источников, проанализировать схему рис. 3.14 методом свертывания.

3.23*. Найти все токи в цепи со схемой рис. 3.13 методом преобразования «треугольника» в «звезду» и «звезды» в «треуголь-

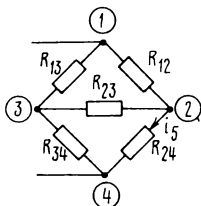


Рис. 3.13

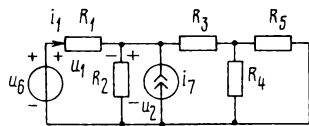


Рис. 3.14

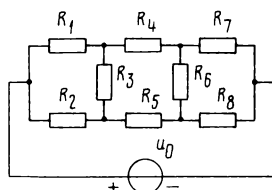


Рис. 3.15

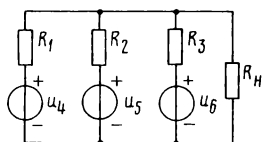


Рис. 3.16

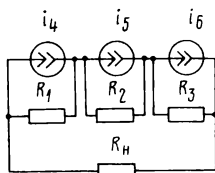


Рис. 3.17

ник», если к зажимам 1 и 4 подключен источник напряжения $u_0 = 3$ В. Сравнить полученные результаты. Параметры элементов имеют следующие значения: $R_{13} = 360$ Ом, $R_{12} = 120$ Ом, $R_{24} = R_{23} = 240$ Ом, $R_{34} = 160$ Ом.

3.24*. Применяв преобразование «треугольника» сопротивлений в «звезду», найти токи всех ветвей цепи со схемой рис. 3.15, если $U_0 = 11,4$ В, $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = R_3 = R_6 = 20$ Ом, $R_4 = 52$ Ом, $R_5 = 22$ Ом, $R_7 = 80$ Ом, $R_8 = 100$ Ом.

3.25*. Используя преобразования источников, определить ток в резисторе R_n цепи со схемой рис. 3.16, если $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 160$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, $R_n = 60$ Ом, $u_4 = 0,5$ В, $u_5 = 3,2$ В, $u_6 = 1$ В.

3.26. Используя преобразование источников, определить ток в резисторе R_n цепи со схемой рис. 3.17, если $i_4 = 10$ мА, $i_5 = 15$ мА, $i_6 = 8$ мА, $R_1 = 1000$ Ом, $R_2 = 2000$ Ом, $R_3 = 5000$ Ом, $R_n = 2000$ Ом.

3.3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Число линейно-независимых уравнений, составляемых по первому и по второму законам Кирхгофа.
2. Сущность метода токов ветвей.
3. Сущность метода напряжений ветвей.
4. Собственная проводимость узла и взаимные проводимости между узлами.
5. Порядок расчета цепей методом узловых напряжений; число линейно-независимых уравнений, составляемых по методу узловых напряжений.
6. Собственное сопротивление контура и взаимное сопротивление между контурами.
7. Порядок расчета цепей методом контурных токов: число линейно-независимых уравнений, составляемых по методу контурных токов.
8. Расчет напряжений и токов ветвей по известным узловым напряжениям.

9. Расчет токов и напряжений ветвей по известным контурным токам.
10. Методы решения систем алгебраических уравнений (метод Гаусса, метод Крамера).

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

3.27р. Найти напряжения и токи ветвей цепи со схемой рис. 3.18 двумя методами: методом токов и методом напряжений ветвей.

3.28. Методом токов или напряжений ветвей рассчитать напряжения и токи в цепях, схемы которых изображены на рис. 3.19. Параметры элементов (сопротивления (Ом), напряжение (В), ток (мА)) имеют следующие значения:

Схема а: $R_1=120$, $R_2=80$, $R_3=180$, $R_4=200$, $R_5=220$, $u_6=1,5$, $u_7=2$, $i_8=50$.

Схема б: $R_1=150$, $R_2=300$, $R_3=100$, $R_4=50$, $u_5=u_6=1$, $u_7=3$, $i_8=80$.

Схема в: $R_1=70$, $R_2=100$, $R_3=130$, $u_4=6$, $u_5=2$, $i_7=40$, $i_6=50$.

Схема г: $R_1=R_2=100$, $R_3=R_4=200$, $u_6=2$, $u_7=3$, $i_8=30$, $i_9=10$.

Примечание. При соответствующем выборе контуров и узлов задача сводится к совместному решению не более двух уравнений.

3.29. Определить, каким из методов (токов или напряжений ветвей) проще рассчитать напряжения и токи в цепях, схемы которых показаны на рис. 3.20. Рассчитать напряжения и токи при заданных параметрах элементов (сопротивление (кОм), ток (мА),

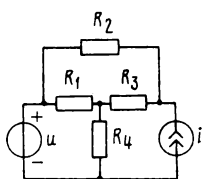
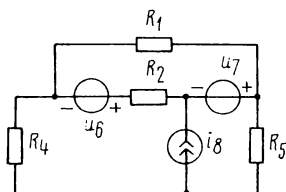
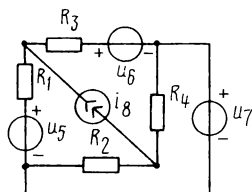


Рис. 3.18



а)



б)

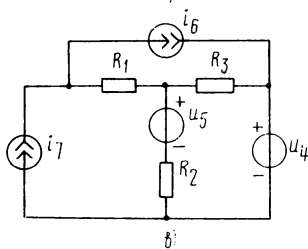
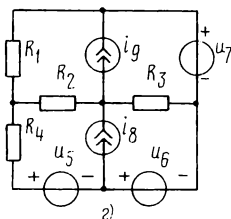


Рис. 3.19



г)

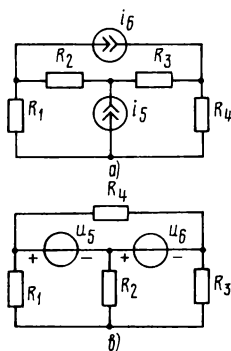


Рис. 3.20

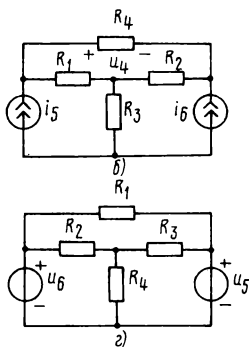


Рис. 3.21

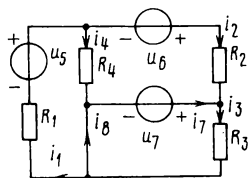
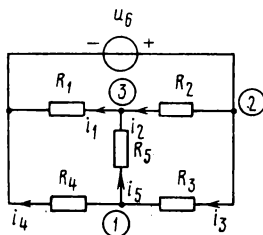


Рис. 3.22

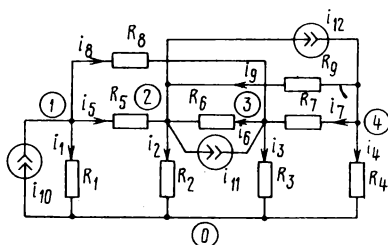


Рис. 3.23

напряжение (В)): $R_1=1$, $R_2=2$, $R_3=3$, $R_4=4$, $i_5=5$, $i_6=10$, $u_5=10$, $u_6=5$.

3.30. В цепи со схемой рис. 3.21: $R_1=5$ кОм, $R_2=5$ кОм, $R_3=4$ кОм, $R_4=1$ кОм, $R_5=1,2$ кОм, $i_4=19$ мА. Рассчитать напряжения и токи всех элементов, в том числе ток и задающее напряжение источника напряжения.

3.31*. В цепи со схемой рис. 3.22: $R_1=R_3=0,5$ кОм, $R_2=R_4=1$ кОм, $u_5=80$ В, $u_6=60$ В, $u_7=60$ В. Определить напряжения и токи всех ветвей, а также ток i_8 .

3.32р. Для цепи, схема которой изображена на рис. 3.23, составить систему уравнений по методу узловых напряжений.

3.33. Методом узловых напряжений найти напряжения и токи в ветвях цепей, схемы которых показаны на рис. 3.20, а, б. Параметры элементов такие же, как и в задаче 3.29.

3.34. Изобразить граф цепи, система узловых уравнений которой имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} 8u_1 - 3u_2 - 2u_3 &= 2, \\ -3u_1 + 12u_2 - 5u_3 &= 0, \\ -2u_1 - 5u_2 + 8u_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Пронумеруйте узлы графа, обозначив цифрой «ноль» базисный узел. Укажите, между какими узлами включены источники.

3.35*. Задана система уравнений узловых напряжений:

$$\left. \begin{aligned} 3u_1 - 2u_2 &= -10, \\ -2u_1 + 5u_2 - 3u_3 &= 25, \\ -3u_2 + 13u_3 - 4u_4 &= 1, \\ -4u_3 + 9u_4 &= -9. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Необходимо восстановить граф цепи и рассчитать задающие токи источников тока для нескольких вариантов их включения в цепи.

3.36*. По заданной системе уравнений узловых напряжений:

$$\left. \begin{aligned} 8u_1 - u_2 - 4u_3 &= 0, \\ -u_1 + 3u_2 - 2u_3 &= 1, \\ -4u_1 - 2u_2 + 11u_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

восстановить резистивную цепь с источником тока, рассчитать параметры проводимостей ветвей и задающий ток источника. Собственные проводимости узлов и взаимные проводимости между узлами даны в миллисименсах, а ток — в миллиамперах.

3.37*. Решить задачу 3.36 для систем уравнений (3.1) и (3.2).

3.38р. Для цепи со схемой, изображенной на рис. 3.24, составить систему уравнений по методу контурных токов. Выразить токи ветвей через контурные токи.

3.39. Методом контурных токов рассчитать токи и напряжения ветвей со схемами рис. 3.20, в, г. Параметры элементов приведены в задаче 3.29.

3.40. Методом контурных токов рассчитать напряжения и токи в цепи, схема которой изображена на рис. 3.25, а. Параметры элементов (сопротивление (кОм), ток (мА), напряжение (В)) имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1$, $u_7 = u_8 = u_9 = 2$, $u_{10} = 4$.

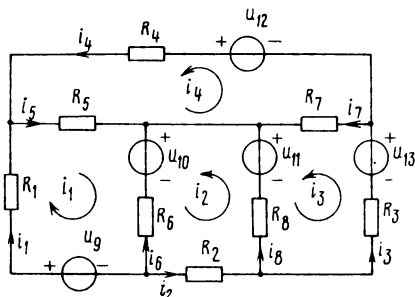


Рис. 3.24

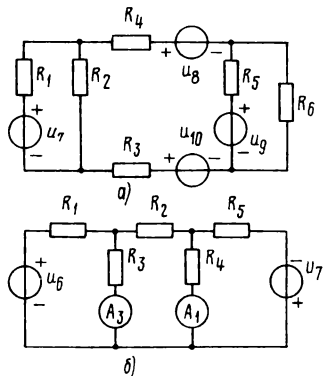


Рис. 3.25

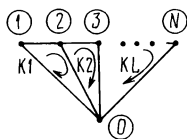


Рис. 3.26

3.41. Определить показания амперметров в цепи со схемой рис. 3.25, б, если $R_1 = R_3 = 1$ кОм, $R_2 = R_4 = 2$ кОм, $R_5 = 3$ кОм, $u_6 = 8$ В, $u_7 = 12$ В.

3.42*. Составить и решить задачи с применением контурных уравнений, аналогичные задачам 3.34...3.37.

3.43*. На рис. 3.26 приведен граф лестничной цепи. Установить относительно числа тождественно равных нулю элементов определителей систем узловых и контурных уравнений.

3.44*. Найти дерево графа, относительно которого выбраны показанные на рис. 3.26 контуры.

3.4*. РАСЧЕТ СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Принцип наложения.
2. Теорема об эквивалентном генераторе.
3. Теорема взаимности.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

3.45р. Методом эквивалентного генератора найти ток в сопротивлении R_{24} цепи, схема которой показана на рис. 3.13. Параметры элементов такие же, как и в задаче 3.20.

3.46р. Методом эквивалентного генератора найти ток в резисторе R_7 цепи со схемой рис. 3.27. Параметры элементов (сопротивления (Ом), напряжение (В), ток (мА)) имеют следующие значения: $R_1 = 30$, $R_2 = 50$, $R_3 = 20$, $R_4 = 200$, $R_5 = 175$, $R_6 = 25$, $R_7 = 110$, $u_8 = 1,2$, $i_9 = 160$.

3.47. Используя две возможности представления цепи в виде эквивалентного генератора, определить ток в резисторе R_5 цепи со схемой рис. 3.28, если $u_6 = u_7 = 2$ В, $R_1 = R_2 = 400$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $R_4 = 1600$ Ом, $R_5 = 200$ Ом.

3.48. Условие задачи 3.47, определить ток в резисторе R_3 .

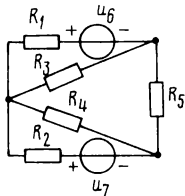


Рис. 3.27

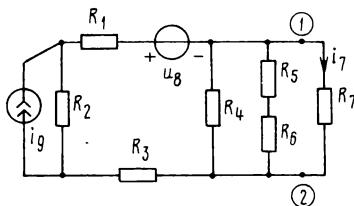


Рис. 3.28

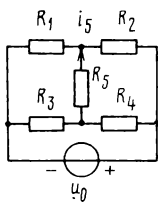


Рис. 3.29

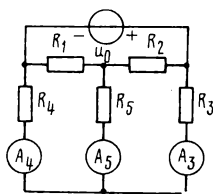


Рис. 3.30

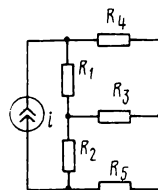


Рис. 3.31

3.49. Методом эквивалентного генератора определить ток в резисторе R_{23} цепи со схемой рис. 3.13. Параметры элементов такие же, как и в задаче 3.23.

3.50*. Напряжение холостого хода на зажимах некоторого резистивного активного двухполюсника равно 6 В, а ток короткого замыкания 10 мА. Чему будет равняться напряжение на зажимах этого двухполюсника при подключении сопротивления $R_1 = 1$ кОм?

3.51. По данным двух измерений напряжения и тока активного двухполюсника определить параметры эквивалентного генератора напряжения $u_{\text{эк}}$ и $R_{\text{эк}}$ и генератора тока $i_{\text{эк}}$ и $R_{\text{эк}}$, если данные измерений следующие: 1) $i_1 = 1$ мА, $u_1 = 10$ В; 2) $i_2 = 2$ мА, $u_2 = 5$ В.

3.52*. В цепи со схемой рис. 3.20, б известно, что $u_4 = 0,8$ В, $i_5 = 12$ мА, $i_6 = 8$ мА, $R_1 = 4$ кОм, $R_2 = 2$ кОм. Определить сопротивление R_4 . При решении задачи желательно воспользоваться теоремой об эквивалентном генераторе.

3.53. Найти напряжение и ток на выходе четырехполюсников рис. 3.4, если к их входу подключается источник напряжения с задающим напряжением $u = 1,5$ В или источник тока с задающим током $i = 8$ мА, а к выходу подключен резистор R_n с сопротивлением 1000 Ом. Параметры остальных элементов такие же, как и в задаче 3.5.

3.54р. Используя теорему (принцип) взаимности (обратимости), рассчитать ток в резистивном сопротивлении R_5 цепи, схемы которой показаны на рис. 3.29. Параметры элементов (сопротивления (Ом), напряжение (В)) имеют следующие значения: $R_1 = 60$, $R_2 = 140$, $R_3 = 120$, $R_4 = 80$, $R_5 = 10$, $u_0 = 20$.

3.55. Воспользовавшись теоремой взаимности, определить показания амперметров в цепи со схемой рис. 3.30, если $u_0 = 6$ В, $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 3$ кОм, $R_3 = 4$ кОм, $R_4 = R_5 = 1$ кОм.

3.56. Воспользовавшись теоремой взаимности, определить напряжения на резисторах R_1 , R_2 и R_4 цепи, схема которой показана на рис. 3.31, если $i = 10$ мА, $R_1 = R_4 = 20$ кОм, $R_2 = 12$ кОм, $R_3 = 10$ кОм, $R_5 = 16$ кОм.

3.5.* ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И КОНТУРНЫХ ТОКОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Последовательность расчета цепи методами узловых напряжений и контурных токов.
2. Особенности выбора базисного узла при наличии в цепи источников напряжения.
3. Особенности выбора контуров при наличии в цепи источников тока.
4. Расчет напряжений и токов ветвей по известным узловым напряжениям: расчет токов в источниках напряжения.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

3.57р. Составить систему узловых уравнений для цепи, схема которой изображена на рис. 3.29.

3.58р. Методом узловых напряжений рассчитать напряжения ветвей цепи со схемой рис. 3.32, если $R_2 = 1$ кОм, $R_1 = R_3 = 0,8$ кОм, $R_4 = 0,4$ кОм, $u_5 = 17$ В, $u_6 = 8$ В. Проверить баланс мощности.

3.59. Решить задачу 3.57 для цепи со схемой рис. 3.33.

3.60р. Найти токи в цепи, схема которой показана на рис. 3.34.

3.61. Используя исходные данные задачи 3.47, рассчитать ток в резисторе R_5 методом узловых напряжений.

3.62. Составить систему узловых уравнений для цепей, схемы которых показаны на рис. 3.25, а и б.

3.63. Некоторая цепь описывается одним узловым уравнением:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_n} \right) u_1 = \frac{1}{R_1} u_4 + \frac{1}{R_2} u_5 + \frac{1}{R_2} u_6.$$

Изобразить схему цепи.

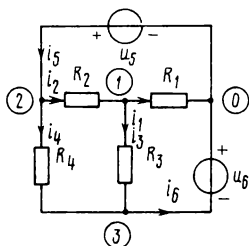


Рис. 3.32

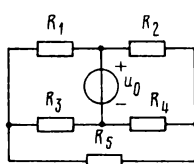


Рис. 3.33

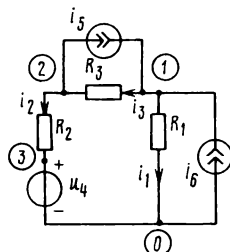


Рис. 3.34

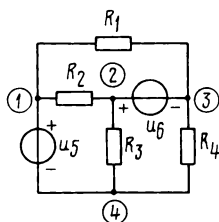


Рис. 3.35

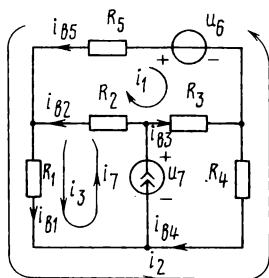


Рис. 3.36

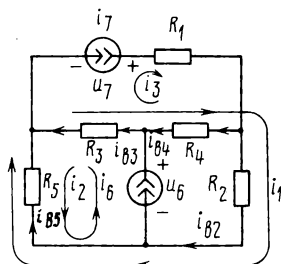


Рис. 3.37

3.64. Как изменится система узловых уравнений, если между узлами k и l включить ветвь, состоящую из последовательного соединения источника напряжения u_0 и резистора R_0 ? Источник напряжения соединен с узлом k зажимом, обозначенным знаком «+».

3.65*. Как изменится система узловых уравнений, если между узлами k и l включить ветвь, состоящую из последовательного соединения источника тока i_0 и резистора R_0 ?

3.66. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 3.19, составить системы узловых уравнений.

3.67р. Методом узловых напряжений определить напряжения ветвей цепи со схемой рис. 3.35, если $R_1=0,8$ кОм, $R_2=1,0$ кОм, $R_3=0,4$ кОм, $R_4=0,5$ кОм, $u_5=u_6=6,75$ В.

3.68р. Методом контурных токов рассчитать токи ветвей и напряжение на источнике тока в цепи со схемой рис. 3.36, если $R_1=5$ кОм, $R_2=4$ кОм, $R_3=6$ кОм, $R_4=R_5=2$ кОм, $u_6=50$ В, $i_7=10$ мА.

3.69р. Методом контурных токов найти токи ветвей цепи, схема которой показана на рис. 3.37, если $i_6=10$ мА, $i_7=20$ мА, $R_1=5$ кОм, $R_2=R_3=4$ кОм, $R_4=6$ кОм, $R_5=2$ кОм.

3.70. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 3.19, составить систему уравнений по методу контурных токов.

3.6. ЦЕПИ С ЗАВИСИМЫМИ ИСТОЧНИКАМИ И ОПЕРАЦИОННЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Виды зависимых источников, их определение и обозначение в схемах.
2. Схемы замещения операционных усилителей.
3. Порядок расчета цепей с зависимыми источниками.

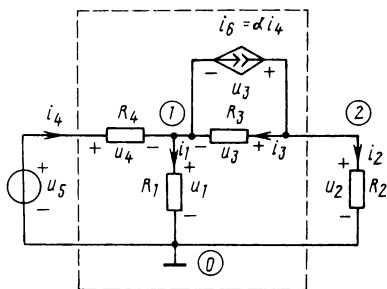


Рис. 3.38

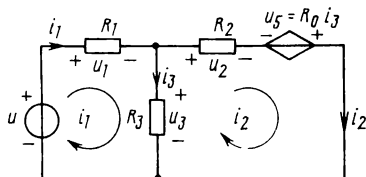


Рис. 3.39

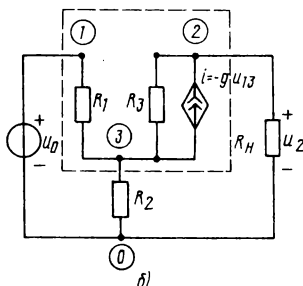
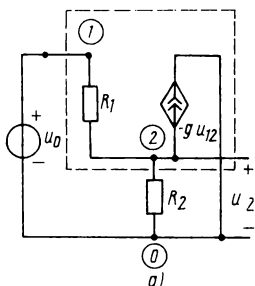


Рис. 3.40

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

3.71р. Рассчитать напряжения и токи в цепи ¹, схема которой изображена на рис. 3.38, если $R_4 = 4 \text{ кОм}$, $R_1 = 8 \text{ кОм}$, $R_3 = 2 \text{ кОм}$, $R_2 = 1,6 \text{ кОм}$, $u_5 = 13,5 \text{ В}$, $\alpha = 2$.

3.72. Рассчитать напряжения и токи в цепи, схема которой изображена на рис. 3.39, если $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 2 \text{ кОм}$, $R_3 = 0,8 \text{ кОм}$, $R_0 = 1,2 \text{ кОм}$, $u_4 = 11,2 \text{ В}$.

3.73р. Найти входное сопротивление, коэффициент передачи по напряжению, а также выходное сопротивление при замкнутых входных зажимах цепи, схема которой показана на рис. 3.38.

3.74. На рис. 3.40, а изображена схема по переменному току эмиттерного повторителя. Штриховыми линиями на рисунке выделена простейшая схема замещения транзистора. Составить систему узловых уравнений для данной цепи.

3.75. Решить задачу 3.74 для однотранзисторного усилителя, схема которого изображена на рис. 3.40, б.

¹ Цепь, обведенная штриховой линией, является одной из возможных схем замещения транзистора в области низких частот.

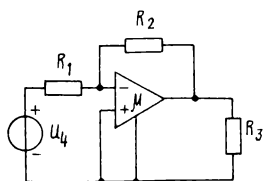


Рис. 3.41

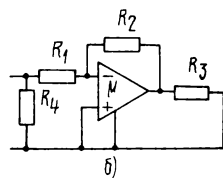
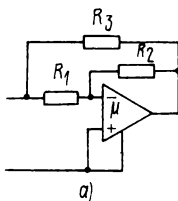


Рис. 3.42

3.76*. Для эмиттерного повторителя, схема которого показана на рис. 3.40, а, найти формулы входного сопротивления $R_{вх}$, коэффициента передачи по напряжению u_2/u_0 при разомкнутых выходных зажимах, а также выходное сопротивление при замкнутых входных зажимах. Найти данные величины при $g \rightarrow \infty$.

3.77*. Найти формулу коэффициента передачи по напряжению усилителя, схема которого показана на рис. 3.40, б. Исследовать зависимость коэффициента передачи усилителя от параметра транзистора g .

3.78. Найти в общем виде напряжения и токи в цепи со схемой рис. 3.41.

3.79. В общем виде найти напряжения и токи в цепи со схемой рис. 2.5, б.

3.80*. Найти входное сопротивление и коэффициент передачи по напряжению цепи со схемой рис. 3.41, если $\mu \rightarrow \infty$.

3.81*. Найти входные сопротивления цепей, схемы которых показаны на рис. 3.42, если $\mu \rightarrow \infty$.

3.82. Рассчитать элементы сумматора, построенного на ОУ с $\mu \rightarrow \infty$ (рис. 3.31, а учебника), если необходимо просуммировать напряжения u_1, u_2, u_3, u_4 с коэффициентами $a_1=1, a_2=0,5, a_3=1,2, a_4=0,8$, а сопротивление R_0 в цепи обратной связи ОУ равно 10 кОм.

3.7. МАШИННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Признаки, характеризующие пассивные одноэлементные ветви.
2. Признаки, характеризующие независимые источники.
3. Признаки, характеризующие зависимые источники.
4. Представление ветвей при машинном анализе цепей.
5. Правило составления матрицы проводимостей $G_{в}$.
6. Матричное уравнение, выражающее связь между напряжениями ветвей и узловыми напряжениями.
7. Матричная форма записи узловых уравнений (через матрицы $A, G_{в}$ и i_0).

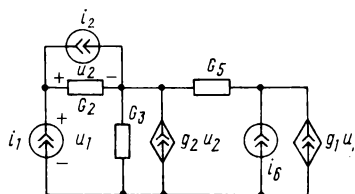


Рис. 3.43

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

3.84р. Для цепи, схема которой изображена на рис. 3.43, составить матрицу узлов \mathbf{A} и матрицу проводимостей \mathbf{G}_b . Записать через эти матрицы узловые уравнения.

3.85. Решить задачу 3.84 для цепей со схемами рис. 3.20, а, б и 3.31.

3.86р. Цепь со схемой рис. 3.38 содержит зависимый источник тока, управляемый током, и независимый источник напряжения. Выполнив преобразование источников, составить систему узловых напряжений в виде $\mathbf{AG}_b\mathbf{A}^T\mathbf{u}=\mathbf{A}\mathbf{i}_0$.

3.87. Составить формализованную систему узловых уравнений для цепи со схемой рис. 3.41.

3.88. Решить задачу 3.87 для цепи, схема которой показана на рис. 2.5, б.

3.89. Решить задачу 3.86 для цепи со схемой рис. 3.39.

3.90р. Используя программы, приведенные в Приложении 1, для эмиттерного повторителя (рис. 3.40, а) найти зависимость входного сопротивления, а также коэффициента передачи по напряжению от величины параметра транзистора g , если $R_1=1$ кОм, $R_2=2$ кОм.

3.91*. Используя программы, приведенные в Приложении 1, для однотранзисторного усилителя (рис. 3.40, б) найти зависимость коэффициента передачи по напряжению от величины параметра транзистора g , если $R_1=1$ кОм, $R_2=2$ кОм, $R_3=50$ кОм, $R_n=10$ кОм.

3.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 3.1. Эквивалентные преобразования цепей.

Изобразить схему в соответствии с одним из графов, показанных на рис. 3.44. Граф и типы элементов выбираются из табл. 3.1. по заданному варианту задания. Параметры элементов имеют следующие значения: $R_1=(n+m)$ Ом; $R_2=n$ Ом; $R_3=m$ Ом; $R_4=(m+0,5n)$ Ом; $R_5=(0,25n+2m)$ Ом; $R_6=\infty$; $R_7=0$; $E=n$ В; $J=0,25$ мА, где n соответствует номеру, под которым записана фамилия студента в журнале группы, m — соответствует номеру группы на факультете.

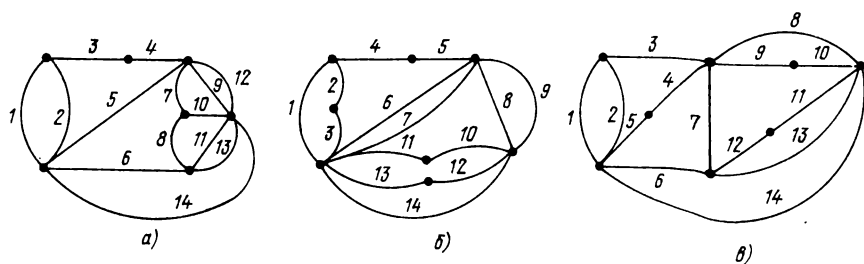


Рис. 3.44

Таблица 3.1

Вариант	Рис. 3.44	Элементы ветвей													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	a	E	R ₆	L ₁	R ₁	C ₁	L ₂	R ₂	R ₃	R ₄	C ₂	J	R ₆	R ₅	R ₆
2	a	E	R ₆	R ₁	L ₁	C ₁	L ₂	R ₂	R ₃	J	C ₂	R ₄	R ₅	R ₆	R ₆
3	a	E	R ₁	L ₁	R ₇	C ₁	L ₂	R ₂	R ₃	R ₄	C ₂	R ₄	R ₅	R ₆	R ₆
4	б	J	R ₆	R ₆	R ₁	L ₁	R ₂	C ₁	C ₂	R ₃	L ₂	R ₄	R ₅	R ₆	R ₆
5	б	E	R ₆	R ₆	R ₁	L ₁	R ₂	C ₁	J	R ₃	L ₂	R ₄	R ₅	R ₆	R ₆
6	б	E	R ₆	R ₆	R ₁	L ₁	J	R ₂	C ₁	R ₃	L ₂	R ₄	R ₅	R ₆	R ₆
7	б	J	R ₁	R ₆	R ₂	R ₃	C ₁	R ₆	L ₂	R ₆	R ₄	R ₅	R ₆	R ₆	R ₆
8	б	J	R ₅	L ₁	R ₄	E	C ₁	R ₆	R ₆	R ₃	R ₂	L ₂	R ₁	R ₇	C ₂
9	б	J	R ₁	R ₆	R ₂	R ₅	R ₆	C ₁	R ₆	L ₃	R ₄	L ₁	R ₃	L ₂	C ₂
10	в	E	R ₆	R ₃	L ₁	J	R ₂	R ₁	C ₁	R ₇	R ₄	L ₂	R ₅	R ₆	C ₂
11	в	E	R ₆	R ₄	R ₇	C ₁	R ₂	R ₃	J	L ₁	R ₁	L ₂	R ₅	R ₆	C ₂
12	в	E	R ₆	L ₁	L ₂	C ₁	R ₄	R ₂	C ₂	R ₇	R ₃	R ₁	R ₇	R ₅	J
13	в	E	R ₆	R ₅	R ₇	C ₁	R ₂	J	C ₂	R ₃	L ₁	L ₂	R ₄	R ₁	R ₆
14	в	E	R ₆	R ₁	J	R ₇	R ₃	R ₄	R ₂	R ₅	L ₁	L ₂	R ₇	C ₁	C ₂
15	в	J	R ₂	R ₁	E	R ₃	R ₇	C ₁	R ₅	L ₁	R ₄	L ₂	R ₇	R ₆	C ₂
16	в	J	R ₃	R ₂	C ₁	R ₇	R ₁	C ₂	L ₂	R ₆	R ₃	L ₂	R ₄	R ₅	C ₃
17	в	J	R ₄	L ₁	R ₇	C ₁	R ₂	C ₂	R ₆	R ₃	L ₂	R ₇	R ₁	R ₅	E
18	в	J	R ₆	R ₁	C ₁	L ₁	L ₂	C ₂	R ₂	R ₃	L ₂	R ₇	R ₄	R ₅	R ₅
19	в	J	R ₃	L ₁	R ₇	C ₁	L ₂	R ₆	R ₂	R ₇	R ₁	E	R ₄	R ₅	C ₂
20	в	J	R ₂	L ₁	C ₁	R ₇	R ₇	R ₆	R ₁	E	R ₃	R ₄	L ₂	R ₅	C ₂
21	a	J	R ₄	R ₇	L ₁	R ₇	L ₂	R ₂	R ₃	R ₁	E	R ₅	C ₁	R ₆	C ₂
22	a	E	R ₆	R ₅	L ₁	C ₁	L ₂	R ₄	R ₃	R ₂	C ₂	J	R ₆	R ₁	R ₆
23	a	E	R ₆	R ₅	L ₁	R ₆	L ₂	R ₃	R ₂	J	C ₂	R ₄	R ₁	R ₆	C ₂
24	a	J	R ₂	L ₁	R ₇	C ₁	L ₂	R ₁	R ₃	R ₄	E	R ₅	R ₆	R ₅	C ₂
25	a	J	R ₆	R ₃	L ₁	R ₆	L ₂	R ₂	R ₁	R ₄	C ₁	R ₃	R ₅	R ₆	C ₂
26	б	E	R ₆	R ₆	R ₂	R ₇	R ₁	C ₁	C ₂	R ₄	L ₁	L ₂	R ₅	L ₂	J
27	б	E	R ₆	R ₆	R ₁	R ₇	R ₃	C ₁	J	R ₂	L ₁	R ₅	L ₂	R ₄	C ₂
28	б	E	R ₆	R ₆	R ₅	R ₇	J	R ₄	C ₁	R ₃	L ₁	R ₂	R ₁	L ₂	C ₂
29	б	J	L ₁	R ₅	R ₄	R ₃	C ₁	R ₆	R ₇	R ₆	R ₂	E	R ₁	L ₂	C ₂
30	б	J	R ₁	E	R ₂	L ₂	C ₁	R ₆	C ₂	R ₃	R ₄	R ₇	R ₅	L ₁	R ₆
31	б	J	R ₁	E	R ₂	R ₃	C ₁	R ₆	R ₆	C ₂	L ₁	R ₄	R ₅	C ₇	C ₂
32	в	E	R ₆	R ₁	J	L ₁	R ₂	R ₃	C ₁	R ₄	R ₇	L ₂	R ₅	R ₇	R ₆
33	в	E	R ₆	L ₁	R ₇	C ₁	R ₂	R ₃	J	R ₄	L ₁	R ₅	L ₂	C ₂	R ₆
34	в	E	R ₆	R ₁	R ₇	C ₁	R ₂	R ₃	C ₁	R ₄	L ₁	R ₅	L ₂	C ₂	R ₆
35	в	E	R ₆	R ₁	C ₁	R ₇	R ₂	J	R ₆	R ₃	L ₁	R ₄	R ₅	J	C ₂
36	в	E	R ₆	R ₁	J	R ₇	R ₂	J	R ₆	R ₃	L ₁	L ₂	R ₄	R ₅	C ₂
37	в	J	R ₁	R ₂	E	R ₃	L ₁	C ₁	R ₄	L ₂	R ₅	R ₇	R ₆	C ₂	C ₂

Вариант	Рис. 3.44	Элементы ветвей													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
38	<i>в</i>	<i>J</i>	R_1	R_2	C_1	L_1	R_7	R_6	L_2	C_2	R_7	E	R_4	R_5	R_3
39	<i>в</i>	<i>J</i>	R_1	E	C_1	R_7	L_1	R_6	C_2	R_3	R_2	L_2	R_4	R_5	R_6
40	<i>в</i>	E	R_6	R_1	C_1	L_1	R_7	R_6	R_2	R_3	L_2	R_7	J	R_4	R_5
41	<i>в</i>	<i>J</i>	R_1	L_1	R_7	R_6	L_2	C_2	R_2	R_7	R_3	E	R_4	R_5	C_1
42	<i>в</i>	<i>J</i>	R_1	L_1	C_1	R_7	L_2	C_2	R_2	E	R_3	R_4	R_7	R_5	R_6

Необходимо:

1. Определить эквивалентное сопротивление цепи в установившемся режиме относительно зажимов идеального источника напряжения, считая задающий ток идеального источника тока равным нулю.

2. Определить эквивалентное сопротивление цепи в установившемся режиме относительно зажимов идеального источника тока, считая задающее напряжение идеального источника напряжения равным нулю.

Задание 3.2. Расчет цепей с одним источником.

Методом наложения для цепи, полученной в задании 3.1, найти ток, протекающий через источник напряжения и напряжение на источнике тока.

Задание 3.3. Расчет цепей методом узловых напряжений.

Методом узловых напряжений найти напряжения и токи ветвей цепи, полученной в задании 3.1.

Для этого необходимо:

1. Составить и решить систему узловых уравнений для сложных (неустраняемых) узлов.

2. Определить токи и напряжения всех элементов, включая токи индуктивностей и напряжения на емкостях.

3. Проверить правильность расчета путем составления ЗТК для всех узлов цепи.

Задание 3.4. Цепи с зависимыми источниками.

В соответствии с кодом табл. 3.2 изобразить схему электрической цепи, содержащей четырехполюсник (табл. 3.3), источник и нагрузку (табл. 3.4). Первая цифра кода указывает номер четырехполюсника (усилителя) из табл. 3.3, вторая — тип источника, третья — нагрузку, четвертая — тип подлежащей определению передаточной (входной) функции (см. табл. 3.4).

Необходимо найти указанную в задании входную или передаточную функцию четырехполюсника при следующих значениях коэффициентов управления: $\mu=2$, $r=R_1$, $g=\frac{1}{R_2}$, $\alpha=2$, где $R_1=R_2=(2m+n)$ Ом, $R_r=R_n=(2n+m)$ Ом, $R_0=(10+n)$ Ом.

Таблица 3.2

Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код
1	1 2 1 1	11	3 3 1 5	21	5 1 1 1	31	5 4 2 4
2	2 2 1 1	12	4 3 1 5	22	6 1 1 1	32	6 4 2 4
3	3 2 1 1	13	1 3 1 2	23	7 1 1 1	33	7 4 2 5
4	4 2 1 1	14	2 3 1 2	24	8 1 1 1	34	8 4 2 5
5	1 2 1 3	15	3 3 1 2	25	5 1 1 3	35	9 1 1 3
6	2 2 1 3	16	4 3 1 2	26	6 1 1 3	36	0 1 1 3
7	3 2 1 3	17	1 3 1 4	27	7 1 1 3	37	9 1 1 1
8	4 2 1 3	18	2 3 1 4	28	8 1 1 3	38	0 1 1 1
9	1 3 1 5	19	3 3 1 4	29	5 4 2 5		
10	2 3 1 5	20	4 3 1 4	30	6 4 2 5		

Задачу желательно решить с помощью метода узловых напряжений.

Решения.

3.4. Найдем R_{x1} — входное сопротивление слева (со стороны зажимов $1-1'$) при разомкнутых зажимах $2-2'$. В этом случае резисторы R_3 и R_4 соединены последовательно, поэтому их можно заменить эквивалентным сопротивлением $R_{эк1} = R_3 + R_4$. Схема цепи с учетом данной замены показана на рис. 3.45, а. Резистор R_2 и двухполюсник $R_{эк1}$ оказываются включенными параллельно, и их сопротивление вычисляется по формуле $R_{эк2} = R_{эк1} R_2 / (R_2 + R_{эк1})$. Схема цепи с учетом такой замены показана на рис. 3.45, б. Из данного рисунка и приведенных рассуждений следует, что

$$R_{x1} = R_1 + R_{эк2} = R_1 + \frac{R_2 R_{эк2}}{R_2 + R_{эк2}} = R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}. \quad (3.3)$$

В последнюю формулу подставим численные значения элементов:

$$R_{x1} = 5 + \frac{10(20+20)}{10+20+20} = 13 \text{ Ом.}$$

Найдем входное сопротивление со стороны зажимов $1-1'$ при коротком замыкании на выходе четырехполюсника (рис. 3.46, а). Обозначим это сопротивление $R_{к1}$. Из рисунка видно, что R_4 соединено параллельно с двухполюсником, сопротивление которого равно нулю, поэтому общее сопротивление этого соединения равно нулю. Чтобы в этом случае найти входное сопротивление, достаточно в формуле (3.3) положить $R_4 = 0$:

$$R_{к1} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 5 + \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = 11,67 \text{ Ом.}$$

Найдем теперь входное сопротивление справа, т. е. со стороны зажимов $2-2'$. Вначале замкнем зажимы $1-1'$ (рис. 3.46, б). Входное сопротивление в этом случае обозначим $R_{к2}$. Из рисунка видно,

Таблица 3.3

№ схемы	Четырехполюсник	№ схемы	Четырехполюсник
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		0	

что резисторы R_1 и R_2 включены параллельно. Их эквивалентное сопротивление рассчитывается по формуле

$$R_{\text{экз}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad (3.4)$$

и схема преобразуется к виду, показанному на рис. 3.46, в. Из рисунка видно, что R_3 и $R_{\text{экз}}$ соединены последовательно. Их эквива-

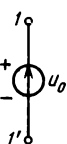

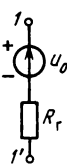



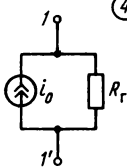
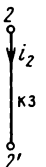
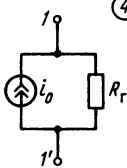
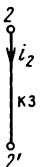
лентное сопротивление равно $R_{\text{эк4}} = R_3 + R_{\text{эк3}}$, и схема приведена к параллельному соединению R_4 и $R_{\text{эк4}}$. Таким образом, сопротивление $R_{\text{к2}}$ определяется по формуле

$$R_{\text{к2}} = \frac{R_4 \cdot R_{\text{эк4}}}{R_4 + R_{\text{эк4}}} = \frac{R_4(R_3 + R_{\text{эк3}})}{R_3 + R_4 + R_{\text{эк3}}}. \quad (3.5)$$

Подстановка в данную формулу выражения (3.4) и численных значений параметров элементов дает окончательное выражение для сопротивления короткого замыкания и его численное значение

$$R_{\text{к2}} = R_4 \frac{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)} \approx 10,77 \text{ Ом.}$$

Таблица 3.4

Источник	Нагрузка	Тип функции
 <p>①</p>	 <p>①</p>	<p>①</p> $H = \frac{u_2}{u_0}$
 <p>②</p>	 <p>②</p>	<p>②</p> $H = \frac{u_2}{i_0}$
 <p>③</p>	 <p>②</p>	<p>③</p> $H = \frac{i_2}{u_0}$
 <p>④</p>	 <p>②</p>	<p>④</p> $H = \frac{i_2}{i_0}$
 <p>④</p>	 <p>②</p>	<p>⑤</p> $R = \frac{u_1}{i_0}$

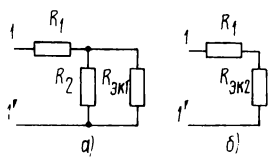


Рис. 3.45

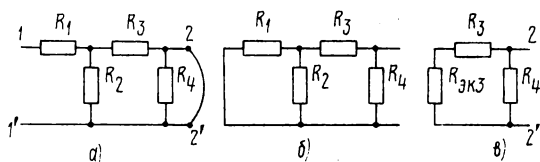


Рис. 3.46

Наконец найдем сопротивление со стороны зажимов 2—2' при разомкнутых зажимах 1—1', которое обозначим R_{x2} . В этом случае сопротивление R_1 не участвует в токораспределении, и эквивалентная схема для определения R_{x2} совпадает со схемой рис. 3.46, б при условии, что $R_{эк3} = R_2$. Очевидно, что исходное сопротивление R_{x2} вычисляется по формуле (3.5), если положить $R_{эк3} = R_2$:

$$R_{x2} = \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} = 12 \text{ Ом.}$$

3.8. Заданная цепь является последовательно-параллельной с одним источником, поэтому ее можно рассчитать методом свертывания. Резисторы R_2 и R_3 соединены параллельно. Заменим их одним эквивалентным резистором с сопротивлением $R_{эк}$:

$$R_{эк} = \frac{200 \cdot 300}{200 + 300} = 120 \text{ Ом.}$$

После такой замены получим одноконтурную цепь, состоящую из резисторов R_1 , $R_{эк}$ и источника напряжения. Ток и напряжение в такой цепи вычисляются по формулам:

$$i_1 = \frac{u}{R_1 + R_{эк}} = \frac{1,1}{100 + 120} = 5 \text{ мА,}$$

$$u_1 = i_1 \cdot R_1 = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,5 \text{ В,}$$

$$u_2 = i_1 \cdot R_{эк} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 120 = 0,6 \text{ В.}$$

Так как известно напряжение на параллельно включенных резисторах R_2 и R_3 , то ток в каждом из них определим по закону Ома: $i_2 = u_2 / R_2 = 0,6 / 200 = 3 \text{ мА}$, $i_3 = u_2 / R_3 = 0,6 / 300 = 2 \text{ мА}$. Для проверки найдем токи i_2 и i_3 по методу «чужого сопротивления»:

$$i_2 = \frac{i_1 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{5 \cdot 300}{200 + 300} = 3 \text{ мА, } i_3 = \frac{i_1 \cdot R_2}{R_2 + R_3} = \frac{5 \cdot 200}{200 + 300} = 2 \text{ мА.}$$

3.21. Данная цепь не является последовательно-параллельной. Это так называемая *мостовая* цепь. Один из возможных путей решения задачи заключается в эквивалентном преобразовании «звезды» в «треугольник» и наоборот. Так, резисторы R_{12} , R_{31} и R_{23} образуют треугольник (рис. 3.47, а). «Треугольник» сопротивлений можно заменить эквивалентной «звездой» (рис. 3.47, б), при этом

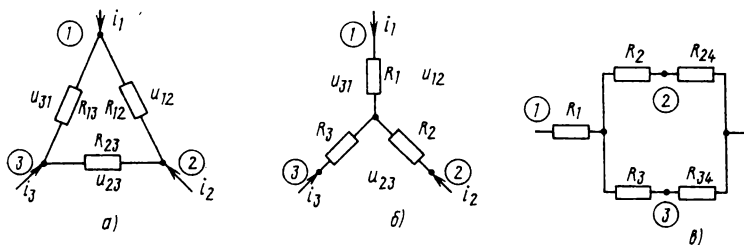


Рис. 3.47

напряжения и токи на внешних зажимах не изменятся. Расчетные формулы при замене «треугольника» «звездой» имеют вид:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{31} + R_{23}}, \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Решив совместно данные уравнения, получим расчетные формулы при замене «звезды» «треугольником»:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}, \quad R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}.$$

Итак, заменив «треугольник» «звездой», получим схему, изображенную на рис. 3.47, в. Определить входное сопротивление данной схемы уже не представляет труда.

3.22. Заменяем последовательное соединение резистора R_1 и источника напряжения с задающим напряжением u_6 параллельным соединением источника тока с задающим током $i'_6 = u_6/R_1$ и резистора R_1 (рис. 3.48). Из ЗТК следует, что два параллельно включенных источника можно заменить одним источником с задающим током $i_0 = i'_6 + i_7$. Теперь цепь содержит один источник, и расчет ее методом свертывания не представляет труда.

3.27. Зададимся положительными направлениями тока и напряжения так, как показано на рис. 3.49. Поскольку схема содержит четыре узла и шесть ветвей,

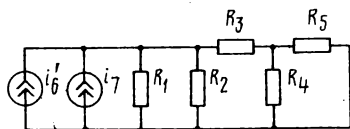


Рис. 3.48

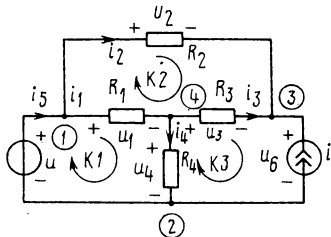


Рис. 3.49

по первому и по второму законам Кирхгофа можно составить по три линейно-независимых уравнения. Второй закон Кирхгофа будем составлять для контуров, показанных на рис. 3.49.

Метод токов ветвей заключается в том, что составленная обычным образом система уравнений по ЗТК дополняется уравнениями ЗНК, при этом напряжения на каждом резисторе заменяются согласно закону Ома произведением тока на сопротивление резистора. Общее число уравнений равно числу ветвей. В качестве неизвестных, очевидно, будут выступать токи источников напряжения и резисторов и напряжения на источниках токов. Для цепи рис. 3.49 эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_5 &= 0, \\ -i_4 + i_5 + i &= 0, \\ -i_2 - i_3 - i &= 0, \\ i_1 R_1 + i_4 R_4 &= u, \\ -i_1 R_1 - i_3 R_3 + i_2 R_2 &= 0, \\ i_3 R_3 - i_4 R_4 + u_6 &= 0. \end{aligned}$$

Первый закон Кирхгофа записан для первого, второго и третьего узлов. Как видим, в этой системе неизвестными являются токи $i_1 \dots i_5$ и напряжение u_6 .

Путем подстановки исключим часть неизвестных (сокращение числа неизвестных особенно желательно при ручных расчетах). В данном случае целесообразен следующий путь. Из первого уравнения находим i_1 , из второго — i_4 , из третьего — i_3 :

$$i_1 = i_5 - i_2, \quad i_4 = i + i_5, \quad i_3 = -(i + i_2) \quad (3.6)$$

и подставляем в оставшиеся три уравнения. После приведения подобных членов, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_4) i_5 - R_1 i_2 &= u - R_4 i, \\ -R_1 i_5 + (R_1 + R_2 + R_3) i_2 &= -R_3 i, \\ R_4 i_5 + R_3 i_2 - u_6 &= -(R_3 + R_4) i. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Из первых двух уравнений можно найти токи i_2 и i_5 , например по методу Крамера:

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_4 & u - R_4 i \\ -R_1 & -R_3 i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_4 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_3 \end{vmatrix}},$$

$$i_5 = \frac{\begin{vmatrix} u - R_4 i & -R_1 \\ -R_3 i & R_1 + R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_4 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_3 \end{vmatrix}}.$$

Напряжение на источнике тока найдем из последнего уравнения системы (3.7), а остальные токи — по формулам (3.6). Напряжения на ветвях рассчитываем по закону Ома.

Таким образом, сущность метода токов ветвей состоит в составлении уравнений цепи относительно неизвестных токов резисторов и напряжений на источниках тока. Подчеркнем особенность со-

ставления системы уравнений по методу токов ветвей. Из примера видно, что после исключения токов i_1 , i_3 и i_4 получилась система трех уравнений с тремя неизвестными. Однако совместно необходимо было решать не три, а два уравнения, что проще. Оказывается, что число совместно решаемых уравнений можно сократить на число источников тока, если контуры выбрать так, чтобы источник тока входил только в один контур.

Метод напряжений ветвей заключается в том, что к составленным обычным образом уравнениям по второму закону Кирхгофа дописываются уравнения первого закона Кирхгофа, при этом ток каждого резистора заменяется согласно закону Ома произведением напряжений на проводимость. Общее число уравнений (как и в методе токов ветвей) равно числу ветвей. В качестве неизвестных будут выступать напряжения источников тока и резисторов и токи источников напряжения. Для цепи рис. 3.49 эта система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} -u + u_1 + u_4 &= 0, \\ -u_1 - u_3 + u_2 &= 0, \\ -u_4 + u_3 + u_6 &= 0, \\ -G_1 u_1 + G_3 u_3 + G_4 u_4 &= 0, \\ -G_2 u_2 - G_3 u_3 &= i, \\ -i_5 + G_2 u_2 + G_1 u_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Первый закон Кирхгофа записан для четвертого, третьего и первого узлов. Исключим ряд неизвестных. Для этого из первого уравнения системы (3.8) найдем u_4 , а из второго — u_2 :

$$u_4 = u - u_1, \quad u_2 = u_1 + u_3. \quad (3.9)$$

После подстановки u_2 и u_4 в четвертое и пятое уравнения системы и приведения подобных членов получим два уравнения с двумя неизвестными напряжениями:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_4) u_1 - G_3 u_3 &= G_4 u, \\ G_2 u_1 + (G_2 + G_3) u_3 &= -i. \end{aligned}$$

После решения данной системы уравнений найдем напряжения u_4 и u_2 по (3.9), а напряжение u_6 и ток i_5 — из третьего и шестого уравнений системы (3.8).

Таким образом, сущность метода напряжений ветвей состоит в составлении уравнений цепи относительно неизвестных напряжений резисторов и токов источников напряжений. Здесь, как и в предыдущем примере, число совместно решаемых уравнений равно двум, а не трем. Это получилось так потому, что в схеме имеется источник напряжения без последовательного сопротивления и при составлении уравнений по первому закону Кирхгофа в качестве базисного узла выбран узел, к которому подсоединен источник напряжения. Если в схеме имеется один источник напряжения, то это всегда можно сделать, а если больше, то лишь в том случае, когда все источники имеют общий узел. Этот узел и принимают за базисный.

3.32. Решение аналогичных задач рекомендуется выполнять (особенно на первых порах, когда нет определенного навыка) в такой последовательности.

Записываем общий вид системы уравнений узловых напряжений¹ для произвольной цепи:

$$\begin{aligned} G_{11}u_1 - G_{12}u_2 - \dots - G_{1n}u_n &= i_1, \\ -G_{21}u_1 + G_{22}u_2 - \dots - G_{2n}u_n &= i_2, \\ \dots &\dots \\ -G_{n1}u_1 - G_{n2}u_2 - \dots + G_{nn}u_n &= i_n \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{vmatrix} G_{11} & -G_{12} & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} & \dots & -G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & +G_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{vmatrix}.$$

Проводимости с одинаковыми индексами $G_{11}, G_{22}, \dots, G_{nn}$ называются *собственными проводимостями* 1, 2, ..., n -го узлов. Собственная проводимость узла равна сумме проводимостей ветвей, сходящихся к данному узлу; проводимости с разными индексами $G_{kl} (k \neq l)$ называются *взаимными проводимостями* между узлами k и l . Взаимная проводимость между узлами равна сумме проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы.

Внимание! Если между узлами включена ветвь, состоящая из последовательного соединения источника тока и любых других двухполюсников, то проводимость данной ветви равна нулю.

Токи i_1, i_2, \dots, i_n называют *задающими токами* или *узловыми токами* соответственно 1, 2, ..., n -го узлов. Узловой ток равен алгебраической сумме токов источников тока, подключенных к данному узлу.

Рассматриваемая схема имеет пять узлов, поэтому число уравнений будет 4. Пронумеровав, начиная с нуля, узлы и выбрав нулевой узел за базисный, запишем уравнения по методу узловых напряжений в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & -G_{14} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} & -G_{34} \\ -G_{41} & -G_{42} & -G_{43} & G_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{11} &= 1/R_1 + 1/R_5 + 1/R_8, & G_{22} &= 1/R_2 + 1/R_5 + 1/R_6 + 1/R_9, \\ G_{33} &= 1/R_3 + 1/R_6 + 1/R_7 + 1/R_8, & G_{44} &= 1/R_4 + 1/R_7 + 1/R_9, \\ G_{12} &= G_{21} = 1/R_5, & G_{13} &= G_{31} = 1/R_8, & G_{34} &= G_{43} = 1/R_7, \\ G_{23} &= G_{32} = 1/R_6, & G_{24} &= G_{42} = 1/R_9, & G_{14} &= G_{41} = 0, \\ i_1 &= i_{10}, & i_2 &= -i_{11} - i_{12}, & i_3 &= i_{11}, & i_4 &= i_{12}. \end{aligned}$$

¹ В задачнике, как и в учебнике, принято переменные, относительно которых составляется система уравнений (основные переменные), обозначать без дополнительных индексов. Поэтому в случае необходимости, буквенные обозначения напряжений и токов ветвей будем снабжать дополнительным индексом «в» или R_i .

Решив уравнение (3.10), найдем узловые напряжения, а зная их,—напряжения и токи ветвей. Зададимся произвольно положительными направлениями тока в резисторах (рис. 3.23). Тем самым заданы положительные направления напряжений резисторов, поскольку было условлено в пассивных элементах применять согласный выбор положительных направлений напряжений и тока. Как видим из схемы, напряжения на резисторах R_1 , R_2 , R_3 и R_4 равны соответственно узловым напряжениям u_1 , u_2 , u_3 и u_4 . Напряжения остальных ветвей найдем через узловые напряжения по формулам

Токи резисторов рассчитываются по закону Ома: $i_k = u_k / R_k$, $k = 1, \dots, 9$.

$$\begin{aligned} R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + \dots + R_{1n}i_n &= u_1, \\ R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + \dots + R_{2n}i_n &= u_2, \\ &\vdots \\ R_{n1}i_1 + R_{n2}i_2 + \dots + R_{nn}i_n &= u_n \end{aligned}$$

или в матричной форме

Здесь сопротивления с одинаковыми индексами $R_{11}, R_{22}, \dots, R_{nn}$ — *собственные сопротивления* 1, 2, ..., n -го контуров, которые равны сумме сопротивлений всех резисторов, входящих в данный контур. При положительных сопротивлениях собственное сопротивление всегда положительно. Сопротивление с разными индексами R_{kl} ($l \neq k$) называют *взаимными сопротивлениями* между контурами k и l . Взаимное сопротивление равно сумме сопротивлений резисторов, которые входят как в k -й, так и в l -й контуры, т. е. они являются общими для этих контуров. Взаимные сопротивления берутся со знаком «+», если контурные токи k -го и l -го контуров направлены в этих сопротивлениях одинаково, и со знаком «—», если контурные токи в этих сопротивлениях направлены навстречу друг другу.

¹ Как и раньше, основные переменные обозначены буквой с одним индексом.

u_1, u_2, \dots, u_n называют контурными напряжениями 1, 2, ..., n -го контура. Контурные напряжения равны алгебраической сумме задающих напряжений источников напряжения, входящих в данный контур. Если при обходе контура по контурному току первым «встречаем» знак «+» на источнике, то напряжение этого источника входит в правую часть уравнения со знаком «-», и наоборот, если первым встречаем знак «-» на источнике, то напряжение этого источника входит в правую часть уравнения со знаком «+».

Рассматриваемая схема имеет 8 ветвей ($N_b=8$) и 5 узлов ($N_y=5$). Число уравнений, составленных по методу контурных токов,

$$N = N_b - N_y + 1 = 4.$$

Задавшись контурными токами так, как показано на рис. 3.24, запишем уравнения по методу контурных токов в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_5 + R_6, & R_{22} &= R_2 + R_6 + R_8, & R_{33} &= R_3 + R_7 + R_8, & R_{44} &= \\ &= R_4 + R_5 + R_7, & R_{12} &= R_{21} = R_6, & R_{13} &= R_{31} = 0, & R_{14} &= R_{41} = R_5, \\ R_{23} &= R_{32} = -R_8, & R_{24} &= R_{42} = 0, & R_{34} &= R_{43} = -R_7, & u_1 &= u_9 - u_{10}, \\ u_2 &= u_{11} - u_{10}, & u_3 &= u_{13} - u_{11}, & u_4 &= u_{12}. \end{aligned}$$

Еще раз обратим внимание на знаки взаимных сопротивлений. Так, взаимное сопротивление R_{12} равно R_6 со знаком «+», потому что контурные токи i_1 и i_2 в резисторе R_6 направлены одинаково (на рис. 3.24 сверху вниз). Взаимное сопротивление R_{23} равно R_8 со знаком «-», потому что в этом резисторе контурные токи i_2 и i_3 направлены навстречу друг другу (на рис. 3.24 i_2 направлен снизу вверх, а i_3 — сверху вниз). Проверим знаки слагаемых контурных напряжений. При обходе первого контура по контурному току i_1 на источнике u_9 первым «встречаем» знак «-», поэтому данное напряжение входит в контурное напряжение u_1 со знаком «+». На источнике u_{10} первым встречаем знак «+», поэтому u_{10} входит в сумму со знаком «-». Отметим также, что матрица сопротивлений симметрична относительно главной диагонали. Это свойство сохраняется для любой, состоящей из двухполюсников цепи.

Решив уравнение (3.11), определим контурные токи. Найдем далее токи ветвей. Для этого зададимся положительными направлениями токов, например, как показано на рис. 3.24. Ток ветви равен алгебраической сумме контурных токов, проходящих через данную ветвь. Если направление контурного тока совпадает с направлением тока ветви, то такой ток входит в сумму со знаком

«+», в противном случае — со знаком «-». В данном случае токи через резисторы R_1 , R_2 , R_3 и R_4 совпадают с контурными токами i_1 , i_2 , i_3 и i_4 соответственно. В резисторе R_5 протекают два контурных тока i_1 и i_4 , совпадающие по направлению с током ветви, и поэтому $i_5 = i_1 + i_4$. Ток i_6 равен сумме контурных токов i_1 и i_2 , т. е. $i_6 = i_1 + i_2$. Аналогично находим остальные токи: $i_7 = i_3 - i_4$, $i_8 = i_2 - i_3$. Напряжения на резисторах находятся по закону Ома.

Внимание! 1. После решения задачи расчета напряжений и токов в цепи обязательно выполните проверку. Например, выполнение законов Кирхгофа, или выполнение баланса мощности. 2. Перед расчетом цепи полезно, если это возможно, выполнить простейшее преобразование схемы. Например, последовательно и параллельно соединенные резисторы заменить одним. 3. Для решения систем линейных алгебраических уравнений можно воспользоваться программами, приведенными в Приложении 1.

3.45. Зададимся положительным направлением тока в резисторе R_{24} , например, так, как показано на рис. 3.13. Отключим от цепи этот резистор. Оставшаяся схема изображена на рис. 3.50, а. Найдем напряжение $u_{24} = u_x$, а не u_{42} , поскольку такое направление напряжения соответствует выбранному ранее положительному направлению тока i_5 . Решим задачу по расчету $u_{24} = u_x$ методом свертывания. Сопротивление цепи со стороны зажимов 1—4

$$R_{14} = R_{34} + \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} = 160 + \frac{360(120 + 240)}{360 + 120 + 240} = 340 \text{ Ом.}$$

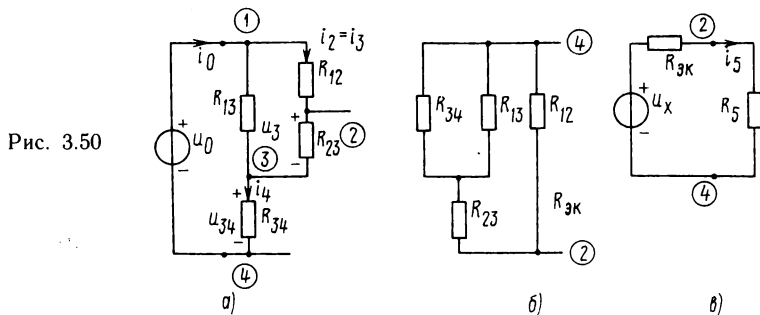
Общий ток i_0 , равный i_4 , определяется по закону Ома:

$$i_0 = i_4 = u_0 / R_{14} = 3 / 340 \text{ А.}$$

Ток i_2 найден по правилу «чужого сопротивления»:

$$i_2 = i_0 \frac{R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} = \frac{3}{340} \frac{360}{360 + 120 + 240} = \frac{3}{680} \text{ А.}$$

Ток i_2 можно найти еще проще, так как сопротивления $R_{13} = R_{12} + R_{23}$ и общий ток i_0 делится на два, т. е. $i_2 = i_3 = i_0 / 2 = 3 / 680 \text{ А.}$



Наконец, определим напряжение холостого хода

$$u_x = u_{23} + u_{34} = i_3 R_{23} + i_4 R_{34} = \frac{3}{680} \cdot 240 + \frac{3}{340} \cdot 160 = \frac{42}{17} \text{ В.}$$

Найдем внутреннее сопротивление эквивалентного генератора. Оно определяется как эквивалентное сопротивление со стороны зажимов 2—4 при $u_0 = 0$. Равенство нулю u_0 означает замыкание зажимов 1—4. Схема для определения эквивалентного сопротивления имеет вид, изображенный на рис. 3.50, б. Используя правила расчета сопротивления последовательно-параллельных двухполюсников, легко определить эквивалентное сопротивление

$$R_{\text{эк}} = 5600/17 \text{ Ом.}$$

Ток в резисторе R_{24} находим по схеме рис. 3.50, в:

$$i_5 = \frac{u_x}{R_{\text{эк}} + R_5} = \frac{\frac{42}{17}}{17 \left(\frac{5600}{17} + 240 \right)} = 7,5 \text{ мА.}$$

Сформулируем порядок расчета цепи методом эквивалентного генератора.

1. Задаемся положительным направлением искомого тока.

2. Нумеруем узлы, к которым подключен резистор R с искомым током и отключаем этот резистор от цепи.

3. Определяем напряжение холостого хода u_x относительно обозначенных зажимов. Положительное направление напряжения холостого хода должно совпадать с положительным направлением напряжения на резисторе, в котором ищем ток, до отключения этого резистора от цепи.

4. Полагаем задающие напряжения и задающие токи всех независимых источников равными нулю, и относительно пронумерованных зажимов находим эквивалентное сопротивление.

5. Искомый ток находим по формуле: $i = u_x / (R_{\text{эк}} + R)$.

3.46. Зададимся положительным направлением искомого тока в резисторе R_7 и цифрами 1 и 2 обозначим узлы, к которым этот резистор присоединяется. Отключим данный резистор от цепи и определим эквивалентное сопротивление относительно обозначенных зажимов, положив равными нулю задающие напряжения и токи независимых источников. Схема для расчета эквивалентного сопротивления изображена на рис. 3.51, а. Пользуясь правилами расчета последовательно-параллельного соединения двухполюсников, легко рассчитать эквивалентное сопротивление $R_{\text{эк}} = 50 \text{ Ом}$. Замкнем зажимы 1—2 и найдем ток короткого замыкания i_k . Из схемы рис. 3.27 видно, что при замыкании зажимов 1 и 2 резисторы R_4 , R_5 и R_6 не влияют на токораспределение в цепи. Поэтому схема для определения i_k не содержит этих резисторов (рис. 3.51, б). Обратите внимание, что ток i_k направлен так, как и ток i_7 . Для расчета i_k воспользуемся принципом наложения. Положим задающий ток источника i_9 равным нулю. Получим одноконтурную

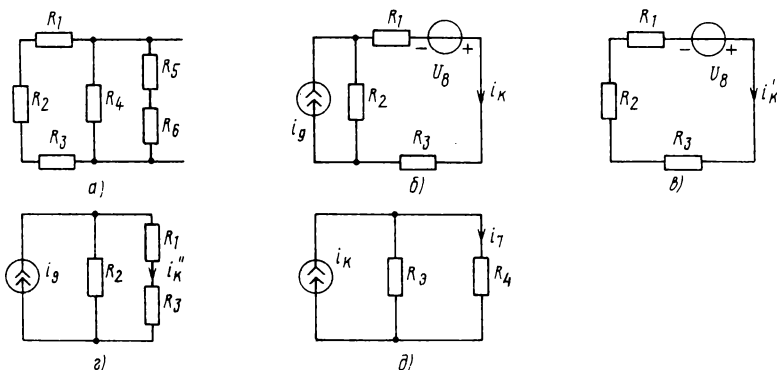


Рис. 3.51

цепь с источником напряжения (рис. 3.51, в). Ток в такой цепи определяется по формуле:

$$i'_k = \frac{u_8}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1,2}{30 + 50 + 20} = 120 \text{ мА.}$$

Положим задающее напряжение источника u_8 равным нулю (рис. 3.51, г). Ток i''_k можно найти по методу чужого сопротивления:

$$i''_k = \frac{i_g R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{160 \cdot 50}{50 + 30 + 20} = 80 \text{ мА.}$$

Согласно принципу наложения

$$i_k = i'_k + i''_k = 12 + 8 = 20 \text{ мА.}$$

Искомый ток в резисторе R_7 находим по схеме рис. 3.51, д, используя правило чужого сопротивления:

$$i_7 = \frac{i_k \cdot R_{эк}}{R_{эк} + R_7} = \frac{200 \cdot 50}{160} = 62,5 \text{ мА.}$$

Сформулируем порядок расчета цепи методом эквивалентного генератора.

1. Задаемся положительным направлением искомого тока.

2. Обозначаем узлы, к которым подключен резистор R с искомым током, полагаем равными нулю задающие токи и напряжения источников и относительно обозначенных зажимов находим эквивалентное сопротивление $R_{эк}$ при отключенном резисторе R .

3. Замыкаем обозначенные узлы и любым методом расчета находим ток короткого замыкания i_k .

4. Искомый ток определяется по формуле $i = i_k R_{эк} / (R_{эк} + R)$.

3.54. Зададимся положительным направлением искомого тока. Перенесем источник в пятую ветвь (рис. 3.52, а). Обратите внима-

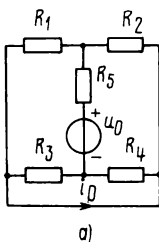


Рис. 3.52

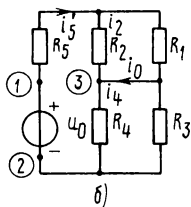
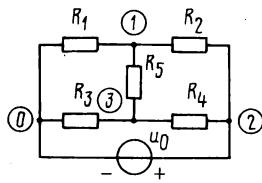


Рис. 3.53



ние на полярность источника напряжения. Он включается так, чтобы искомый ток был направлен от зажима «+» источника во внешнюю цепь, тогда ток ветви, где раньше был источник, также направлен от зажима «+» источника (рис. 3.52, а). Согласно теореме взаимности $i_5 = i_0$. Для удобства расчета начертание схемы изменено (рис. 3.52, б). Как видим, для расчета тока i_5 по исходной схеме рис. 3.29 необходимо применение общих методов расчета, в то время как ток i_0 в схеме рис. 3.52, б можно найти методом свертывания. Действительно, эквивалентное сопротивление схемы относительно зажимов источника

$$R_{\text{эк}} = R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 10 + \frac{60 \cdot 140}{60 + 140} + \frac{120 \cdot 80}{120 + 80} = 100 \text{ Ом.}$$

Ток в общей ветви i'_5 определяется по закону Ома:

$$i'_5 = \frac{u_0}{R_{\text{эк}}} = \frac{20}{100} = 200 \text{ мА.}$$

Методом чужого сопротивления рассчитаем токи i_2 и i_4 :

$$i_2 = \frac{i'_5 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = \frac{200 \cdot 60}{60 + 140} = 60 \text{ мА,}$$

$$i_4 = \frac{i'_5 \cdot R_3}{R_3 + R_4} = \frac{200 \cdot 120}{120 + 80} = 120 \text{ мА.}$$

Из первого закона Кирхгофа для третьего узла следует, что

$$i_0 = i_4 - i_2 = 120 - 60 = 60 \text{ мА.}$$

Согласно принципу взаимности $i_0 = i_5$. Определите самостоятельно ток i_0 через токи i_1 и i_3 .

3.57. Одна из ветвей анализируемой цепи представляет собой источник напряжения. Проводимость такой ветви является бесконечно большой (внутреннее сопротивление источника напряжения равно нулю). Поэтому в уравнениях, составляемых по методу узловых напряжений, часть их коэффициентов будет равна бесконечности, что затрудняет решение системы. Существует простой способ

избавиться от данных затруднений и даже извлечь пользу. Этот способ заключается в следующем. Один из узлов, к которым подсоединен источник напряжения, выбираем в качестве базисного узла. Тогда узловое напряжение другого узла (к которому подсоединен источник) равно задающему напряжению источника напряжения с соответствующим знаком. Поэтому нет необходимости составлять уравнение для данного узла. При этом не только избегаем уравнения с бесконечно большими коэффициентами, но и сокращаем число уравнений, что полезно. Обозначим узлы так, как показано на рис. 3.53. Узловое напряжение второго узла равно u_0 , т. е. $u_2 = u_0$, и узловое уравнение для второго узла не составляем. Обычным образом записываем узловые уравнения для первого и третьего узлов:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right)u_1 - \frac{1}{R_2}u_2 - \frac{1}{R_5}u_3 &= 0, \\ -\frac{1}{R_5}u_1 - \frac{1}{R_4}u_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что сокращается число уравнений, а не число слагаемых в уравнении. В схеме имеется три независимых узла, поэтому в уравнениях должно быть по три слагаемых. Так как $u_2 = u_0$, то, перенеся известные слагаемые в правую часть, запишем систему узловых напряжений для данной цепи в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right)u_1 - \frac{1}{R_5}u_3 &= \frac{1}{R_2}u_0; \\ -\frac{1}{R_5}u_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)u_3 &= \frac{1}{R_4}u_0. \end{aligned}$$

3.58. Цепь содержит два источника напряжения без последовательно включенных резисторов. При этом оба источника имеют общий узел. Общий узел источников необходимо выбирать в качестве базисного узла. Число независимых узлов равно трем. К двум из этих узлов подключены источники напряжения. Таким образом, узловые напряжения данных узлов известны и уравнения для этих узлов не составляются. Напряжение каждого узла, к которому подключен источник напряжения, равно напряжению источника со знаком «+», если источник подключен к узлу зажимом, обозначенным знаком «+», и со знаком «-» в противном случае. Нумерацию узлов удобно выполнять так, чтобы напряжения узлов, к которым подключены источники напряжения, обозначались старшими индексами. В данной задаче этим напряжениям присвоены индексы 2 и 3. Таким образом, необходимо составить только одно уравнение, так как $u_2 = u_5$, а $u_3 = -u_6$. Уравнение записывается обычным образом и имеет вид:

$$G_{11}u_1 - G_{12}u_2 - G_{13}u_3 = i_1$$

или

$$u_1 = \frac{i_1 + G_{12}u_2 + G_{13}u_3}{G_{11}}, \quad (3.12)$$

где

$$G_{11} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 3,5 \text{ мСм},$$

$$G_{12} = 1/R_2 = 1 \text{ мСм}, G_{13} = 1/R_3 = 1,25 \text{ мСм}, i_1 = 0.$$

Подставим численные значения в (3.12), получим

$$u_1 = \frac{1 \cdot 17 - 1,25 \cdot 8}{3,5} = 2 \text{ В}.$$

Определим напряжения и токи в резисторах:

$$i_1 = u_1/R_1 = 2,5 \text{ мА}, u_{21} = u_2 - u_1 = 15 \text{ В},$$

$$i_2 = \frac{u_{21}}{R_2} = 15 \text{ мА}, u_{13} = u_1 - u_3 = 10 \text{ В},$$

$$i_3 = \frac{u_{13}}{R_3} = 12,5 \text{ мА}, u_4 = u_2 - u_3 = 25 \text{ В},$$

$$i_4 = \frac{u_4}{R_4} = 62,5 \text{ мА}.$$

Токи источников определим по первому закону Кирхгофа:

$$i_5 = i_2 + i_4 = 77,5 \text{ мА}; i_6 = i_3 + i_4 = 75 \text{ мА}.$$

3.60. Заданная в задаче цепь, кроме источников тока, содержит источник напряжения u_4 . Методика решения такой задачи изложена при решении задачи 3.57. Обозначим узлы так, как показано на рис. 3.34, с учетом, что узловое напряжение третьего узла u_3 равно задающему напряжению источника напряжения u_4 , запишем систему узловых уравнений в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)u_1 - \frac{1}{R_3}u_2 &= i_5 + i_6, \\ -\frac{1}{R_3}u_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)u_2 &= -i_5 + \frac{1}{R_2}u_4. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Представляет интерес и другой путь решения данной задачи. Он обусловлен тем, что в данной цепи последовательно с источником напряжения включено резистивное сопротивление R_2 . Используя теорему об эквивалентном генераторе, заменим это соединение параллельным соединением источника тока с задающим током u_4/R_2 и резистивного сопротивления R_2 (рис. 3.54). Теперь цепь содержит только источники тока, и составление системы узловых уравнений не представляет труда. Легко убедиться, что эта система совпадает с (3.13).

Сформулируем общее правило записи системы узловых уравнений при наличии в цепи источников напряжения с последовательно включенным резистором. Так, если к некоторому узлу подключена

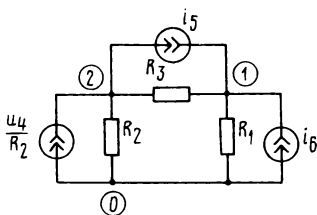


Рис. 3.54

ветвь, состоящая из последовательного соединения резистора R и источника u , то в правую часть уравнения, составленного для данного узла, входит слагаемое $\pm u/R$. Знак «+» ставится тогда, когда источник напряжения подключен к узлу зажимом, обозначенным знаком «+». В противном случае ставится знак «-».

После нахождения узловых напряжений рассчитываются токи ветвей:

$$i_1 = u_1/R_1, \quad i_2 = (u_2 - u_4)/R_2, \quad i_3 = (u_1 - u_2)/R_3.$$

3.67. В рассматриваемой цепи содержится два источника напряжения без последовательно включенных резисторов и не имеющие общего узла, поэтому используемые в задачах 3.57...3.64 методы неприменимы к решению данной задачи. Выполним эквивалентное преобразование схемы путем переноса источника напряжения через узел. Согласно известной теореме схемы рис. 3.55, *а* и *б* являются эквивалентными. Перенесем, например, через узел 1 источник u_5 . Эквивалентная схема изображена на рис. 3.55, *в*. Как видим, в цепи имеется только один источник напряжения без последовательно включенных резисторов, а узлы У1 и У4 оказались совмещенными. За счет этого число независимых узлов сократилось до двух. Выбрав третий узел в качестве базисного узла и учтя, что напряжение второго узла u_2 относительно базисного равно u_6 , запишем одно уравнение относительно напряжения первого узла

$$G_{11}u_1 - G_{12}u_2 = i_1$$

или

$$u_1 = \frac{i_1 + G_{12}u_2}{G_{11}}, \quad (3.14)$$

где

$$i_1 = -\frac{u_5}{R_1} - \frac{u_5}{R_2} = -15,1875 \text{ мА}, \quad G_{12} = 1/R_2 + 1/R_3 = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}, \\ G_{11} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4 = 6,75 \cdot 10^{-3} \text{ См}, \quad u_2 = u_6 = 6,75 \text{ В}.$$

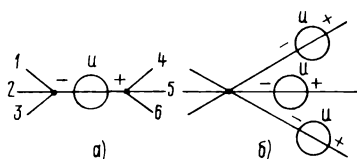


Рис. 3.55

Подставив найденные численные значения в (3.14), получим:

$$u_1 = \frac{-15,1875 + 23,625}{6,75} = 1,25 \text{ В.}$$

Напряжения ветвей найдем по формулам:

$$\begin{aligned} u_{в1} &= u_5 + u_1 = 8,0 \text{ В}; & u_{в2} &= u_6 - u_1 - u_5 = -1,25 \text{ В}; \\ u_{в3} &= u_6 - u_1 = 5,50 \text{ В}; & u_{в4} &= u_1 = 1,25 \text{ В.} \end{aligned}$$

В заключение отметим, что для решения подобных задач можно использовать метод напряжения сечений, основанный на применении ЗТК для сечения. При этом дерево, относительно которого записывается уравнение напряжений сечений, надо выбирать так, чтобы все источники напряжения являлись ветвями дерева. Тогда часть напряжений сечений будет известна и число уравнений сократится на число источников напряжения.

3.68. Цепь содержит четыре узла и шесть ветвей, поэтому число независимых (главных) контуров равно трем. Так как в цепи имеется источник тока, то контуры необходимо выбирать так, чтобы через источник тока проходил только один контурный ток, желательно совпадающий по направлению с током источника. При таком выборе контуров проходящий через источник тока контурный ток будет равен задающему току источника, т. е. он будет известен. В силу этого уравнение для данного контура не составляется. Выберем контуры так, как показано на рис. 3.36. Нумерация контуров, вообще говоря, может быть произвольной. Однако для удобства записи уравнений контурный ток, проходящий через источник тока, нумеруется старшим индексом. В данном случае i_3 . Тогда система уравнений записывается обычным образом только без последнего уравнения:

$$\left. \begin{aligned} R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3 &= u_1, \\ R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3 &= u_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

где $R_{11} = R_2 + R_3 + R_5 = 4 + 6 + 2 = 12 \text{ кОм}$, $R_{22} = R_1 + R_4 + R_5 = 5 + 2 + 2 = 9 \text{ кОм}$, $R_{12} = R_{21} = -R_5 = -2 \text{ кОм}$, $R_{13} = R_2 = 4 \text{ кОм}$, $R_{23} = R_1 = 5 \text{ кОм}$, $u_1 = -u_6 = -50 \text{ В}$, $u_2 = u_6 = 50 \text{ В}$, $i_3 = i_7 = 10 \text{ мА}$.

Заметим, что сокращается только число уравнений. Число слагаемых в каждом уравнении определяется числом контуров и не зависит от того, имеются ли в цепи источники тока или нет. Обратите на это внимание, так как здесь часто допускаются ошибки.

Перенесем в системе (3.15) известные слагаемые $R_{13}i_3$ и $R_{23}i_3$ вправо и учтем, что $i_3 = i_7$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} R_{11}i_1 + R_{12}i_2 &= u_1 - R_{13}i_7, \\ R_{21}i_1 + R_{22}i_2 &= u_2 - R_{23}i_7. \end{aligned}$$

Решение данной системы уравнений дает следующие результаты:

$$i_1 = -7,788 \text{ мА}, i_2 = -1,731 \text{ мА}.$$

Рассчитаем токи ветвей, предварительно задавшись их положительными направлениями: $i_{в1} = i_2 + i_3 = 8,269 \text{ мА}$, $i_{в2} = i_1 + i_3 = 2,212 \text{ мА}$, $i_{в3} = -i_1 = 7,788 \text{ мА}$, $i_{в4} = -i_2 = 1,731 \text{ мА}$, $i_{в5} = -i_1 + i_2 = 6,057 \text{ мА}$. Напряжение на источнике тока найдем, обойдя один из контуров, в который входит источник тока (например, третий контур):

$$u_7 = R_2 i_{в2} + R_1 i_{в1} = 50,197 \text{ В}.$$

3.69. По числу ветвей и узлов определяем, что число главных контуров равно трем. Выбираем контуры так, чтобы через каждый источник тока проходил только один контурный ток. Поскольку цепь содержит два источника тока, определению подлежит один контурный ток i_1 . Для первого контура составляем одно уравнение

$$R_{11} i_1 + R_{12} i_2 + R_{13} i_3 = u_1$$

или

$$i_1 = \frac{u_1 - R_{12} i_2 - R_{13} i_3}{R_{11}}, \quad (3.16)$$

где $R_{11} = R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 4 + 4 + 6 + 2 = 16 \text{ кОм}$, $u_1 = 0$, $R_{12} = -R_3 - R_5 = -4 - 2 = -6 \text{ кОм}$, $R_{13} = -R_3 - R_4 = -4 - 6 = -10 \text{ кОм}$, $i_2 = i_6 = 10 \text{ мА}$, $i_3 = i_7 = 20 \text{ мА}$.

Подставив найденные числовые значения в (3.16), получим:

$$i_1 = \frac{6 \cdot 10 + 20 \cdot 10}{16} = 16,25 \text{ мА}.$$

Задавшись положительными направлениями токов ветвей, как показано на рис. 3.37, рассчитаем их численные значения:

$$i_{в2} = i_1 = 16,25 \text{ мА}, i_{в3} = i_6 + i_7 - i_1 = 13,75 \text{ мА},$$

$$i_{в4} = i_7 - i_1 = 3,75 \text{ мА}, i_{в5} = i_1 - i_6 = 6,25 \text{ мА}.$$

Напряжения на источниках тока будут следующими:

$$u_6 = -i_{в4} R_4 + i_{в2} R_2 = -3,75 \cdot 6 + 16,25 \cdot 4 = 42,5 \text{ В},$$

$$u_7 = i_7 R_1 + i_{в4} R_4 + i_{в3} R_3 = 20 \cdot 5 + 3,75 \cdot 6 + 13,75 \cdot 4 = 177,5 \text{ В}.$$

3.71. Данная цепь содержит зависимый источник тока i_6 , управляемый током i_4 . Поэтому перед решением задачи напомним порядок (алгоритм) анализа цепей, содержащих зависимые источники.

1. Любым известным методом анализа электрических цепей составляется система уравнений, при этом все источники считаются независимыми.

2. Задающие напряжения и токи зависимых источников заменяются через уравнения этих источников.

3. Пользуясь законами Ома и Кирхгофа, входящие в уравнения зависимых источников напряжения или токи выражаются через напряжения и токи независимых источников и неизвестные величины, относительно которых составлена система уравнений цепи.

4. Полученная система уравнений решается обычным образом.

Применим метод узловых напряжений (с таким же успехом можно применить любой другой метод). Так как схема содержит три узла, то по методу узловых напряжений обычным образом составляются два уравнения:

$$\begin{aligned} G_{11}u_1 - G_{12}u_2 &= u_5/R_4 - i_6, \\ -G_{21}u_1 + G_{22}u_2 &= i_6, \end{aligned}$$

где $G_{11} = 1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4 = 0,875 \text{ мСм}$, $G_{22} = 1/R_2 + 1/R_3 = 1,125 \cdot 10^{-3} \text{ См}$, $G_{12} = G_{21} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}$. В данной системе уравнений ток i_6 заменим согласно уравнению зависимого источника αi_4 :

$$\left. \begin{aligned} G_{11}u_1 - G_{12}u_2 &= u_5/R_4 - \alpha i_4, \\ -G_{21}u_1 + G_{22}u_2 &= \alpha i_4. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Выразим ток i_4 через узловые напряжения. Из схемы рис. 3.38 видно, что $u_4 = u_5 - u_1$. Согласно закону Ома $i_4 = u_4/R_4 = (u_5 - u_1)/R_4$. Подставим выражение для тока i_4 в систему уравнений (3.17) и содержащие неизвестные слагаемые перенесем в левую часть. В результате получим:

$$\begin{aligned} (G_{11} - \alpha/R_4)u_1 - G_{12}u_2 &= (1 - \alpha)u_5/R_4, \\ -(G_{21} - \alpha/R_4)u_1 + G_{22}u_2 &= \alpha u_5/R_4. \end{aligned}$$

Данная система уравнений записывается в виде одного матричного уравнения:

$$\begin{vmatrix} G_{11} - \alpha/R_4 & -G_{12} \\ -(G_{21} - \alpha/R_4) & G_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1 - \alpha)u_5/R_4 \\ \alpha u_5/R_4 \end{vmatrix}.$$

Обратите внимание, что матрица проводимостей несимметрична относительно главной диагонали, в то время как для цепей без зависимых источников она симметрична. Решение данного уравнения дает следующие численные значения узловых напряжений: $u_1 = -1 \text{ В}$, $u_2 = 6 \text{ В}$. Зная узловые напряжения и задавшись положительными направлениями напряжений и токов ветвей, найдем их значения:

$$\begin{aligned} u_4 &= u_5 - u_1 = 13,5 - (-1) = 14,5 \text{ В}; \\ u_3 &= u_2 - u_1 = 6 - (-1) = 7 \text{ В}; \\ i_3 &= u_3/R_3 = 3,5 \text{ мА}; \quad i_4 = \frac{u_4}{R_4} = \frac{14,5}{4} = 3,625 \text{ мА}; \\ i_6 &= \alpha \cdot i_4 = 2 \cdot 3,625 = 7,25 \text{ мА}; \quad i_1 = u_1/R_1 = -0,125 \text{ мА}; \\ i_2 &= u_2/R_2 = 3,75 \text{ мА}. \end{aligned}$$

Полученных данных достаточно для определения баланса мощности. Так как в схеме имеется зависимый источник, то проверку баланса мощности поясним более подробно. Уравнение баланса мощностей для согласного выбора положительных направлений напряжений и тока имеет вид $\sum_k u_k i_k = 0$ или $-u_5 i_4 + u_4 i_4 + u_1 i_1 + u_3 i_3 - u_3 i_6 + u_2 i_2 = 0$. В уравнении баланса мощностей входят два слагаемых со знаком «-», поскольку они относятся к элементам, на которых положительные направления напряжения и тока выбраны встречно. Как видим, наличие зависимых источников не вносит особенностей в составление уравнения баланса мощностей.

3.72. Цепь содержит зависимый источник напряжения u_5 , управляемый током i_3 . Для ее анализа применим, например, метод контурных токов и воспользуемся порядком анализа цепи при наличии зависимых источников, изложенном при решении задачи 3.71.

Зададимся контурными токами i_1 и i_2 и обычным образом составим систему из двух уравнений по методу контурных токов

$$\left. \begin{aligned} R_{11}i_1 + R_{12}i_2 &= u, \\ R_{21}i_1 + R_{22}i_2 &= u_5 = R_0 i_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Выразим ток i_3 через искомые контурные токи. Так как контурные токи в резисторе R_3 направлены навстречу друг другу, а ток i_3 выбран совпадающим по направлению с током i_1 , то $i_3 = i_1 - i_2$. Подставив полученное выражение для тока i_3 во второе уравнение системы (3.18) и приведя подобные, запишем рассматриваемую систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_{11}i_1 + R_{12}i_2 &= u, \\ (R_{21} - R_0)i_1 + (R_{22} + R_0)i_2 &= 0. \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} - R_0 & R_{22} + R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Как и в задаче 3.71, матрица коэффициентов оказалась несимметричной относительно главной диагонали. Применение правила Крамера дает следующие выражения для расчета контурных токов:

$$i_1 = \frac{u(R_{22} + R_0)}{\Delta}, \quad i_2 = \frac{-u(R_{21} - R_0)}{\Delta},$$

где

$$\Delta = R_{11}(R_{22} + R_0) - R_{12}(R_{21} - R_0).$$

Найдем численные значения контурных токов:

$$R_{11} = R_1 + R_3 = 1 + 0,8 = 1,8 \text{ кОм}; \quad R_{22} = R_2 + R_3 = 0,8 + 2 =$$

$$= 2,8 \text{ кОм}; R_{12} = R_{21} = -R_3 = -0,8 \text{ кОм}; \Delta = R_{11} \times (R_{22} + R_0) - \\ - R_{12} (R_{21} - R_0) = [1,8(2,8 + 1,2) - 0,8(0,8 + 1,2)] \times 10^6 = 5,6 \cdot 10^6; \\ i_1 = 8 \text{ мА}; i_2 = 4 \text{ мА}.$$

Зная контурные токи, определим токи ветвей и напряжений зависимого источника:

$$i_1 = 8 \text{ мА}; i_3 = i_1 - i_2 = 8 - 4 = 4 \text{ мА}; i_2 = 4 \text{ мА}; u_5 = R_0 i_2 = 1,2 \times \\ \times 4 = 4,8 \text{ В}.$$

3.73. Из схемы рис. 3.38 следует, что входное сопротивление равно u_5/i_4 , а коэффициент передачи по напряжению u_2/u_5 . Искомое выходное сопротивление также можно выразить через токи и напряжения. Для этого в схеме рис. 3.38 необходимо замкнуть входные зажимы (так требуется по условию задачи), а вместо резистора R_2 включить источник (например, источник тока) (рис. 3.56). Тогда выходное сопротивление определяется как u'_2/i_0 .

Из рассмотренного становится ясной стратегия решения подобных задач. Любым методом находят необходимые токи и напряжения (в данном случае i_4 , u_2 , u'_2), а затем берутся их отношения.

Воспользуемся результатами решения задачи 3.71. Так, ток i_4 и напряжение u_2 уже найдены: $i_4 = 3,625 \text{ мА}$; $u_2 = 6 \text{ В}$. Тогда $R_{\text{вх}} = u_5/i_4 = 3,72 \text{ кОм}$, $u_2/u_5 = 0,44$. Для определения напряжения u'_2 (см. рис. 3.56) воспользуемся методом узловых напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u'_1 - \frac{1}{R_3} u'_2 &= -\alpha i'_4, \\ -\frac{1}{R_3} u'_1 + \frac{1}{R_3} u'_2 &= \alpha i'_4 + i_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Из схемы рис. 3.56 видно, что $i'_4 = -u'_1/R_4$. Подстановка в систему (3.19) этого выражения для i'_4 дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} - \frac{\alpha}{R_4} \right) u'_1 - \frac{1}{R_3} u'_2 &= 0, \\ \left(-\frac{1}{R_3} + \frac{\alpha}{R_4} \right) u'_1 + \frac{1}{R_3} u'_2 &= i_0. \end{aligned}$$

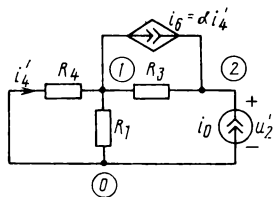


Рис. 3.56

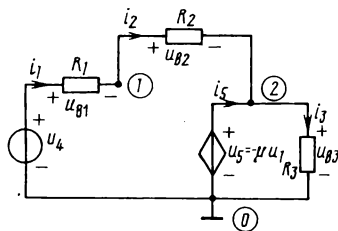


Рис. 3.57

Решив полученную систему, найдем напряжение u'_2 , а затем и выходное сопротивление $u'_2 = 2 \cdot 10^3 i_0$, $R_{\text{вых}} = 2$ кОм.

3.80. Заменим операционный усилитель его схемой замещения как показано на рис. 3.57. Полученная схема содержит зависимый источник напряжения u_5 , управляемый напряжением u_1 . Решим задачу, например, методом узловых напряжений. Ко второму узлу подключен источник напряжения без последовательного сопротивления, поэтому составляется уравнение только для первого узла:

$$G_{11}u_1 - G_{12}u_2 = i_1,$$

где

$$G_{11} = 1/R_1 + 1/R_2, \quad G_{12} = 1/R_2, \quad i_1 = u_4/R_1.$$

Из схемы рис. 3.57 следует, что $u_2 = u_5 = -\mu u_1$. Выполнив подстановку $u_2 = -\mu u_1$, перепишем последнее уравнение:

$$G_{11}u_1 + G_{12}\mu u_1 = i_1.$$

Решение данного уравнения уже не представляет труда:

$$u_1 = i_1 / (G_{11} + \mu G_{12}).$$

Зная узловые напряжения, находим напряжения ветвей

$$u_{в1} = u_4 - u_1, \quad u_{в2} = u_1 - u_2, \quad u_{в3} = u_2.$$

Токи резисторов рассчитаем по закону Ома:

$$i_1 = \frac{u_{в1}}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_{в2}}{R_2}, \quad i_3 = \frac{u_{в3}}{R_3}.$$

Наконец, ток зависимого источника определяем из первого закона Кирхгофа для второго узла: $i_5 = i_3 - i_2$.

3.84. Задачу будем решать изложенным в учебнике методом. Согласно данному методу решение состоит из следующих этапов.

1. Эквивалентное преобразование исходной цепи с тем, чтобы получить цепь, содержащую R -элементы, источники тока, управляемые напряжением и независимые источники тока.

2. Выбор ветвей и их направления. Нумерация ветвей и узлов.

3. Составление графа.

4. Составление матрицы узлов \mathbf{A} .

5. Составление матрицы проводимостей \mathbf{G}_b .

6. Составление матрицы-столбца задающих токов независимых источников тока \mathbf{i}_0 .

Результатом решения задачи является матричное уравнение $\mathbf{A}\mathbf{G}_b\mathbf{A}^T\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{i}_0$, где \mathbf{u} — матрица-столбец узловых напряжений.

1. В данном случае выполнять эквивалентные преобразования не требуется, так как схема состоит только из R элементов, независимых источников тока и источников тока, управляемых напряжением.

2. Выбор ветвей и их направления является важнейшим этапом, поскольку метод предполагает только определенный (разрешенный) вид ветвей, а именно:

а) параллельное соединение резистивного элемента и независимого источника тока (рис. 3.58, а);

б) параллельное соединение зависимого и независимого источников тока (рис. 3.58, б), здесь задающий ток зависимого источника пропорционален напряжению i -й ветви;

в) резистивный элемент;

г) независимый источник тока;

д) зависимый источник тока.

Очевидно, варианты в), г) и д) являются частными случаями первых двух вариантов.

Особо подчеркнем, что регламентируется не только вид ветвей, но и направления токов и напряжений в ветвях (см. рис. 3.58 а, б). Направления тока i_{bk} ветвей вида «а» (рис. 3.58, а), «б» (рис. 3.58, б) и «г» (независимый источник тока) выбирается навстречу задающему току независимого источника. Если ветвь состоит только из резистивного элемента (ветвь вида «в»), то направление тока выбирается произвольно, если ветвь состоит только из зависимого источника, то ток i_{bk} направляется по току источника. Направления ветвей совпадают с током ветвей.

В данном примере в качестве первой ветви выберем независимый источник тока i_1 . Это частный случай ветви рис. 3.58, а, когда $G_k=0$ или частный случай ветви рис. 3.58, б, когда ток зависимого источника $g_i u_i$ равен нулю. Ток ветви i_{b1} направлен против тока источника (рис. 3.59, а). В качестве второй ветви выберем параллельное соединение резистивного элемента G_2 и источника тока i_2 . Ток второй ветви i_{b2} направим против тока источника (рис. 3.59, а). Третьей ветвью будет резистивный элемент. Ток третьей ветви выберем произвольно. Четвертой ветвью будет зависимый источник $g_2 u_2$. Если ветвь состоит только из зависимого источника тока, то направление тока ветви должно совпадать с направлением тока зависимого источника, как показано на рис. 3.59, а. Пятой ветвью будет резистивный элемент G_5 , а шестой — параллельное соединение независимого i_6 и зависимого $g_1 u_1$ источников тока. Обратите внимание, что взаимные направления токов зависимого и независимого источников в исходной

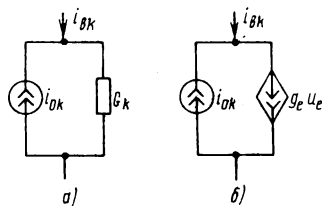


Рис. 3.58

цепи (рис. 3.43) не соответствуют направлениям разрешенной ветви рис. 3.58, б. Поэтому изменим направление зависимого источника, поставив перед задающим током источника знак «—», как показано на рис. 3.59, а.

3. Заменяя ветви направленными отрезками линий, направление которых совпадает с направлением токов ветвей, получаем граф цепи (рис. 3.59, б).

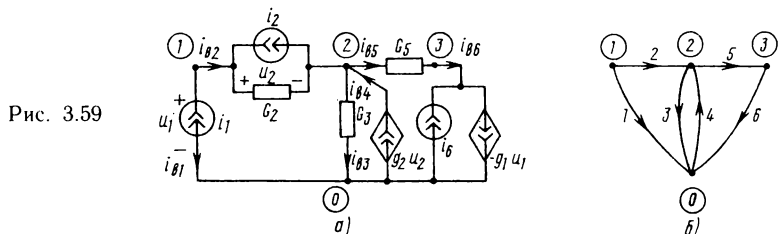
4. По графу рис. 3.59, б составляем матрицу узлов. Напомним, что столбцы матрицы **A** соответствуют ветвям, а строки узлам, т. е. матрица **A** имеет столько строк, сколько независимых узлов, и столько столбцов, сколько ветвей. В данном примере размер матрицы будет 3×6 . Элементами матрицы **A** являются 0, -1 и $+1$, если l -я ветвь соединена с k -м узлом и направлена от узла, то на пересечении k -й строки и l -го столбца пишется $+1$, а если ветвь направлена к узлу, то -1 . Если ветвь не связана с узлом, то пишется нуль. Матрица **A**, составленная по данному правилу, имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{У1} \\ \text{У2} \\ \text{У3} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} \text{В1} & \text{В2} & \text{В3} & \text{В4} & \text{В5} & \text{В6} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right| \end{array}.$$

5. Матрица проводимостей является квадратной размера $N_b \times N_b$ (N_b — число ветвей). По главной диагонали записываются проводимости ветвей $G_{ii} = G_i$ ($i = 1, N_b$), если в k -й ветви включен источник тока $i_k = g_i u_i$, управляемый напряжением l -й ветви, то на пересечении k -й строки и l -го столбца пишется элемент g_l . Остальные элементы матрицы равняются нулю. Заметим, что если в цепи отсутствуют зависимые источники, то матрица G_b является диагональной. Для данного примера матрица G_b имеет вид:

$$\mathbf{G}_b = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Действительно, первая ветвь состоит только из независимого источника, поэтому ее проводимость равняется нулю, т. е. $G_{11} = G_1 = 0$. Проводимости второй и третьей ветвей равны соответственно



G_2 и G_3 , поэтому $G_{22}=G_2$ и $G_{33}=G_3$. Четвертая ветвь представляет собой зависимый источник тока, управляемый напряжением второй ветви $i_4=g_2u_2$, поэтому на пересечении четвертой строки и второго столбца пишем g_2 . Проводимость пятой ветви равна G_5 , а в шестой ветви имеется источник тока, управляемый напряжением первой ветви $i_6=-g_1u_1$. Поэтому на пересечении шестой строки и первого столбца пишем $-g_1u_1$.

6. Элементами матрицы i_0 являются задающие токи независимых источников тока. В данном случае

$$i_0 = [i_1, i_2, 0, 0, 0, i_6]^T.$$

Нули в матрицах задающих токов соответствуют ветвям, в которых отсутствуют независимые источники. В схеме рис. 3.59, б такие источники отсутствуют в третьей, четвертой и пятой ветвях. Этот факт отражается нулями в матрице задающих токов. Итак, составлены все необходимые матрицы для формализованной записи системы уравнений узловых напряжений.

3.90. Для решения данной задачи необходимо воспользоваться подпрограммой *AFCH* (см. Приложение 1). Исходные данные: $R_1=1$ кОм, $R_2=2$ кОм, $g=10^{-3}$; $5 \cdot 10^{-3}$; 10^{-2} ; $5 \cdot 10^{-2}$; 10^{-1} ; 0,5; 1 См. Соответствие между параметрами схемы и ее элементов и программы приведено в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Параметры схемы	R_1	R_2	ИТУН	i_0	$R_{вх}$	U_2/U_0
Параметры программы	$TE(1)$ $HE(1)$	$TE(2)$ $HE(2)$	$PZIT(1)$ $RZIT(2)$ $PZIT(3)$	$PNIT(1)$ $PNIT(2)$	$ZBXM(1)$	$ACH(1)$

Обратим внимание, что при использовании данной программы входным воздействием должен быть ток, поэтому в схеме вместо u_0 необходимо включить источник тока i_0 .

Исходные данные задачи следующие: число узлов $KU=2$; число RLC -элементов $KE=2$; число частот $KF=1$; код типа передаточной функции $KT=2$; типы элементов $TE(1)=1$, $TE(2)=1$; номиналы элементов $HE(1)=1 \text{ } \emptyset \text{ } \emptyset \text{ } \emptyset$; $NE(2)=2 \text{ } \emptyset \text{ } \emptyset \text{ } \emptyset$; номера узлов элементов $NUE(1)=(1, 2)$, $NUE(2)=(2, \emptyset)$; номера узлов входа $NUBX=(1., \emptyset)$ номера узлов нагрузки $NUH=(2., \emptyset.)$; частота $F(1)=1$; число ИТУН $KZIT=1$; параметры ИТУН; узлы включения $PZIT(1)=(2., \emptyset.)$, узлы управления $PZIT(2)=(1., 2)$, значение $PZIT(3)=(-g, \emptyset.)$, (значения параметра g см. выше), параметры источника тока i_0 : узлы включения $PNIT(1)=(1. \emptyset.)$, значение $RNIT(2)=(1., \emptyset.)$.

Головной модуль Фортран-программы решения данной задачи имеет следующий вид:

<< TAF4X >>

РАСЧЕТ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ И ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
РЕЗУЛЬТАТЫ: ЗНАЧЕНИЯ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ВХОДНОГО СОПРО-
ТИВЛЕНИЯ В МАССИВАХ ZBXH, ZBXA; АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ
И ФАЗО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В МАССИВАХ A4X, F4X.

```

INTEGER TE(50),TE8(50)
REAL HE(50),HE8(50),NAME*8(4)
REAL F(64),ZBXH(64),ZBXA(64),A4X(64),F4X(64)
COMPLEX A(400),B(20),NUE(50),NUE8(50),PZIT(15),
* PZIT8(15),PNIT(10),PNIT8(10),NUH,NUH8,GH
COMMON A,B,NUE,PZIT,PNIT,NUH,GH,
* HE,TE,KU,KE,KZIT,KNIT

```

МЕСТО КОРРЕКЦИИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
< ФИО И ГРУППУ ЗАДАВАТЬ 4-МЯ ЭЛЕМЕНТАМИ ПО 8 СИМВОЛОВ >

```

DATA NAME/'ИВАНОВ ','И.И. ','ГРУППА ','А-23 '/
DATA KU8,KE8,KF,KTT/2,2,1,2/,F0,HF/1.0,1000./
DATA TE8/1,1,48*0/
DATA HE8/1000.,2000.,48*0./
DATA NUE8/(1.,2.),(2.,0.),48*(0.,0.)/
DATA PZIT8/(2.,0.),(1.,2.),(-1.E-3,0.),12*(0.,0.)/
DATA PNIT8/(1.,0.),(1.,0.),8*(0.,0.)/
DATA NUH8/(2.,0.)/
KZIT=1
KNIT=1
KZIT3=KZIT*3
KNIT2=KNIT*2
TYPE *, ' ВВЕДИТЕ КОЭФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ G'
ACCEPT *, G
PZIT(3)=G
DO 8 K=1,15
8 PZIT(K)=PZIT8(K)
DO 9 K=1,10
9 PNIT(K)=PNIT8(K)
KU=KU8
KE=KE8
NUH=NUH8
DO 10 K=1,KE
TE(K)=TE8(K)
HE(K)=HE8(K)
10 NUE(K)=NUE8(K)
DO 11 K=1,KF
11 F(K)=F0+(K-1)*HF
TYPE *, ' ИДЕТ СЧЕТ! ОЖИДАЙТЕ ПРИМЕРНО 5 МИНУТ!'
CALL AF4X(KF,F,KTT,ZBXH,ZBXA,A4X,F4X,IER)
WRITE (1,13) NAME
WRITE (1,14)
WRITE (1,15) KU,KE,KF,KTT,F0,HF
WRITE (1,16) (TE(K),K=1,KE)
WRITE (1,17) (HE(K),K=1,KE)
WRITE (1,18) (NUE(K),K=1,KE)
IF (KZIT.LE.0) GO TO 30
WRITE (1,24) (PZIT(K),K=1,KZIT3)
30 WRITE (1,25) (PNIT(K),K=1,KNIT2)
WRITE (1,19) NUH
WRITE (1,20)
WRITE (1,21) IER
WRITE (5,21) IER
TYPE *, ' РЕЗУЛЬТАТЫ В ФАЙЛЕ FOR001.DAT'
IF (IER.NE.0) GO TO 12

```



```

WRITE (1,22) (F(K),ZBXM(K),ZBXA(K),A4X(K),F4X(K),K=1,KE)
WRITE (1,23)
12 STOP
13 FORMAT (///15X,4A8)
14 FORMAT(///10X,'ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ЗАДАЧИ')
15 FORMAT (/3X,'KU =',I2,3X,'KE =',I3,3X,'KF =',I3,3X,'KTT =',

* I2//3X,'F0 =',E10.3,3X,'HF =',E10.3)
16 FORMAT (/3X,'TE = ',10I3/(8X,10I3))
17 FORMAT (/3X,'HE = ',5E11.3/ ( 8X,5E11.3))
18 FORMAT (/3X,'NUE = ',10(5(' ',F3.0,' ',',',F3.0,' '))/9X:))
19 FORMAT (/3X,'NUH = ', ' (' ',F3.0,' ',',',F3.0,' '))
20 FORMAT (///10X,'РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА')
21 FORMAT (/3X,'КОД ЗАВЕРШЕНИЯ =',I3)
22 FORMAT(/3X,'ЗНАЧЕНИЯ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ',
* 'И ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ'//1X,61('-')/' I',2X,
* 'F, ГЦ',2X,'I',4X,'ZBXM, ОМ',4X,'ZBXA, РАД',3X,
* 'A4X, РАЗ',4X,'F4X, РАД', ' I'/1X,61('-')/
* (' I',F8.0,' I',2(E14.5,F10.5),' I'))
23 FORMAT (1X,61('-'),3(/))
24 FORMAT (/3X,'PZIT = ',5(2(' ',F3.0,' ',',',F3.0,' ')),
* ' (' ',E13.5,' ',',',E13.5,' ')/10X:))
25 FORMAT (/3X,'PNIT = ',5(1(' ',F3.0,' ',',',F3.0,' ')),
* ' (' ',E13.5,' ',',',E13.5,' ')/10X:))
END

```

Результаты счета приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

$g, \text{ См}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	0,5	1
U_2/U_1	0,8	0,923	0,952	0,990	0,995	0,999	0,9995
$R_{вх}, \text{ КОм}$	5	13	23	103	203	1003	2003

4. КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

4.1 *. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Установившиеся и не установившиеся (переходные) колебания.
2. Переменные состояния.
3. Метод расчета тока и напряжения любого элемента цепи при известных переменных состояния.

4. Нормальная форма записи системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
5. Однородная и неоднородная система дифференциальных уравнений.
6. Матричная форма записи уравнений переменных состояния.
7. Запись общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений.
8. Составление характеристического уравнения по известной системе дифференциальных уравнений.
9. Общее решение однородной системы уравнений при простых и кратных корнях характеристического уравнения.
10. Физическое содержание общего решения однородной и частного решения неоднородной систем дифференциальных уравнений линейной электрической цепи; устойчивые электрические цепи.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

4.1. Для цепи, схема которой изображена на рис. 4.1, составить систему уравнений переменных состояния.

Решение. Для составления системы уравнений воспользуемся законами Кирхгофа. Задавшись положительными направлениями тока в элементах и направлениями обхода контуров, запишем уравнения по ЗТК для узла 1 и по ЗНК для контуров K1 и K2:

$$\left. \begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_3 &= 0, \\ u_1 + u_2 + u_4 &= u(t), \\ -u_2 + u_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Переменными состояниями являются ток i_1 индуктивности L_1 и напряжения u_2 емкости C_2 , поэтому необходимо исключить остальные напряжения и токи, кроме заданного напряжения $u(t)$. Для этой цели привлечены уравнения ветвей. Из схемы видно, что $u_4 = R_4 i_1$, $u_1 = L_1 di_1/dt$, $i_2 = C_2 du_2/dt$, $i_3 = u_2/R_3$. Подставим данные уравнения ветвей в первое и второе уравнения системы (4.1). В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} -i_1 + C_2 du_2/dt + u_2/R_3 &= 0, \\ i_1 R_4 + L_1 di_1/dt + u_2 &= u(t). \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения находим du_2/dt , а из второго — di_1/dt :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_2}{dt} &= -\frac{1}{R_3 C_2} u_2 + \frac{1}{C_2} i_1, \\ \frac{di_1}{dt} &= -\frac{1}{L_1} u_2 - \frac{R_4}{L_1} i_1 + \frac{1}{L_1} u(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.2a)$$

Третье уравнение системы (4.1) оказалось алгебраическим и в уравнения переменных состояния не включено. Обратите внимание на порядок записи слагаемых в уравнениях. Первое уравнение раз-

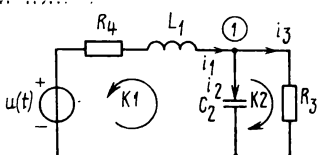


Рис. 4.1

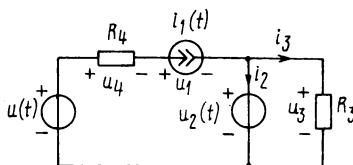


Рис. 4.2

решено относительно производной напряжения u_2 , поэтому первым как в первом, так и во втором уравнениях будет слагаемое, содержащее u_2 . Второе уравнение разрешено относительно производной тока i_1 , поэтому слагаемые, содержащие i_1 , записаны в уравнениях на втором месте. Известное задающее напряжение всегда записывается последним. Если уравнения поменять местами, то необходимо поменять порядок следования слагаемых в правой части. При этом уравнения примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_4}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} u_2 + \frac{1}{L_1} u(t), \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} i_1 - \frac{1}{R_3 C_2} u_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

4.2. Известно, что частное решение системы (4.2) при $u(t) = U_0 = \text{const}$ представляет собой также постоянные во времени величины $i_1^{(p)} = I_1 = \text{const}$ и $u_2^{(p)} = U_2 = \text{const}$. Убедиться, что в данном случае решением является набор величин $I_1 = U_0 / (R_3 + R_4)$ и $u_2 = U_0 R_3 / (R_3 + R_4)$.

Решение. Напомним, что решением системы дифференциальных уравнений является любой набор функций, при подстановке которых в систему она превращается в тождество. Подставим в систему (4.2) следующие величины: $u(t) = U_0$, $i_1 = U_0 / (R_3 + R_4)$ и $u_2 = U_0 R_3 / (R_3 + R_4)$. Так как i_1 и u_2 являются постоянными, то производные i_1' и u_2' равны нулю и система (4.26) после сокращения на $1/L_1$ первого уравнения и $1/C_2$ второго примет вид:

$$\left. \begin{aligned} R_4 i_1 + u_2 &= U_0, \\ -i_1 + u_2 / R_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Подставим в эти уравнения приведенные выше выражения для тока i_1 и напряжения u_2 :

$$\begin{aligned} \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_0 + \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_0 &= U_0, \\ -\frac{U_0}{R_3 + R_4} + \frac{1}{R_3} \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_0 &= 0, \end{aligned}$$

или $U_0 = U_0$ и $0 = 0$, что и требовалось доказать, т. е. при постоянном во времени воздействии частное решение также является набором постоянных во времени величин. Таким образом, частное решение повторяет в данном случае форму воздействия.

4.3. Пусть в результате решения системы уравнения (4.2) найдены значения переменных состояния $i_1(t)$ и $u_2(t)$. Определить остальные неизвестные напряжения и токи.

Решение. Согласно теореме замещения в схеме рис. 4.1 заменим индуктивность L_1 , по которой протекает ток $i_1(t)$ источником тока с задающим током $i_1(t)$, а емкость C_2 — источником напряжения с задающим напряжением $u_2(t)$. В результате такой замены получим цепь, схема которой изображена на рис. 4.2. Данная цепь содержит только резисторы и источники и может быть рассчитана любым из методов анализа резистивных цепей. В силу простоты цепи напряжения и токи в ней можно рассчитать, не прибегая к составлению системы уравнений. Действительно, $u_3 = u_2$, $i_3 = u_2/R_3$, $u_4 = i_1 R_4$, $u_1 = L_1 di_1/dt = u(t) - u_2(t) - u_4$, $i_2 = C_2 du_2/dt = i_1(t) - i_3(t)$.

4.4. Записать систему уравнений (4.2а) в матричной форме, найти характеристическое уравнение, привести в общем виде решение данной системы и с точностью до постоянных интегрирования общее решение однородной системы уравнений.

Решение. В матричной форме система уравнений (4.2а) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_2 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_3 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_4}{L_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ i_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{L_1} \end{pmatrix}.$$

Зная матрицу коэффициентов, запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_3 C_2} - p & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_4}{L_1} - p \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрыв определитель:

$$p^2 + (R_4/L_1 + 1/R_3 C_2)p + (1 + R_4/R_3)/L_1 C_1 = 0.$$

Данное уравнение должно иметь два корня p_1 и p_2 . Каждая из искомых функций $u_2(t)$ и $i_1(t)$ представляются в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_2^{(')} (t) + u_2^{(''')} (t), \\ i_1(t) &= i_1^{(')} (t) + i_1^{(''')} (t). \end{aligned}$$

Первое слагаемое представляет собой общее решение однородной (когда $u(t) = 0$), а второе — частное решение неоднородной си-

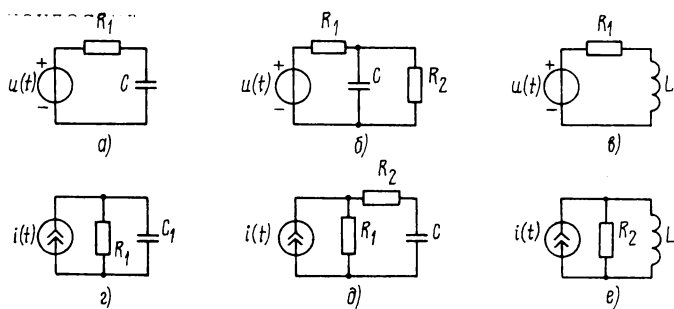


Рис. 4.3

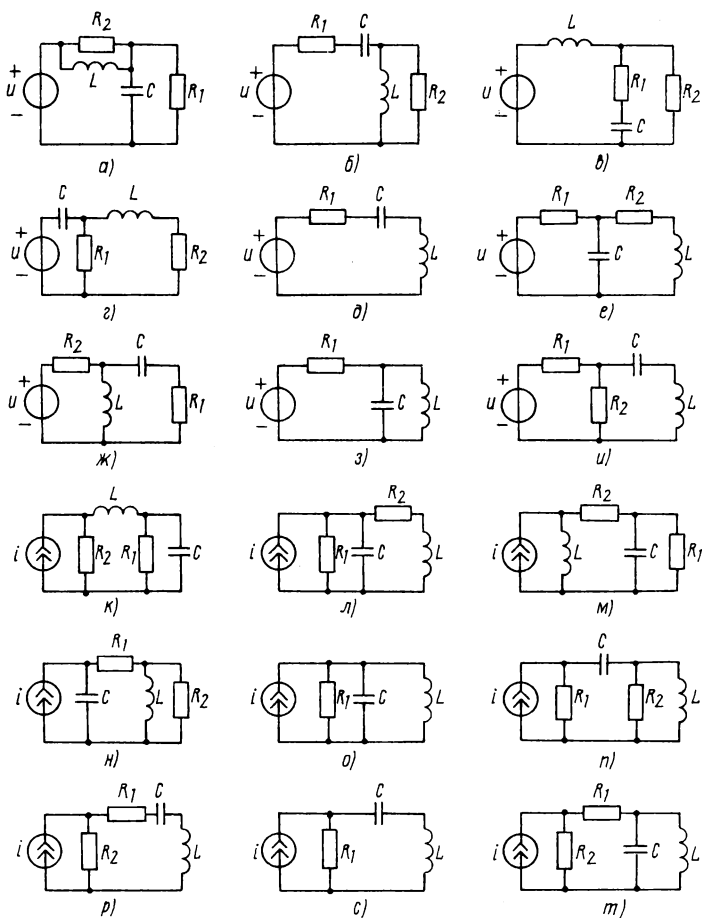


Рис. 4.4

системы уравнений. Если $p_1 \neq p_2$, то общее решение однородной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} u_2^{(h)}(t) &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \\ i_1^{(h)}(t) &= A_1 \beta_1 e^{p_1 t} + A_2 \beta_2 e^{p_2 t}, \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, A_1 \beta_1, A_2 \beta_2$ — постоянные интегрирования.

4.5. Для цепей с одним реактивным элементом (рис. 4.3) составить дифференциальное уравнение, найти характеристическое уравнение, записать в общем виде решение полученного дифференциального уравнения и, с точностью до постоянного множителя, — общее решение соответствующего однородного уравнения.

4.6. Для цепей с двумя реактивными элементами (рис. 4.4) составить систему дифференциальных уравнений, найти характеристическое уравнение и записать в общем виде решение полученного дифференциального уравнения.

4.2. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПРИ ПОСТОЯННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Режим постоянного тока в электрической цепи и условие его возникновения.
2. Индуктивность в режиме постоянного тока.
3. Емкость в режиме постоянного тока.
4. Порядок расчета RLC -цепей в режиме постоянного тока.

4.7. В режиме постоянного тока найти токи и напряжения в цепи, схема которой изображена на рис. 4.1. Полученный результат сравнить с решением задачи 4.2.

Решение. Так как рассматривается режим постоянного тока, то предполагается, что воздействие $u(t) = U_0 = \text{const}$ и подключено к цепи настолько давно, что в цепи установился режим постоянного тока. В этом режиме индуктивность замыкает зажимы, к которым она подсоединена, а емкость обрывает ветвь, в которую она включена последовательно. Учтя данную эквивалентность, перерисуем схему рис. 4.1 так, как показано на рис. 4.5. Как видим, цепь значительно упростилась: ток i_1 в индуктивности и напряжение u_2 на емкости определим по закону Ома:

$$i_1 = U_0 / (R_3 + R_4), \quad u_2 = i_1 R_3 = U_0 R_3 / (R_3 + R_4).$$

Сравнивая полученный результат с решением задачи 4.2, отметим интересный факт, что *частное решение системы уравнений пере-*

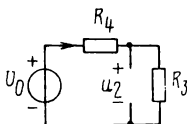


Рис. 4.5

менных состояния совпадает с результатом расчета цепи в установившемся режиме, т. е. для отыскания частного решения нет необходимости составлять и решать систему дифференциальных уравнений, а достаточно выполнить анализ цепи в установившемся режиме. Как станет известно из дальнейшего изучения курса ТЛЭЦ, этот вывод справедлив для произвольной цепи и произвольного периодического воздействия.

4.8. Составить простейшую цепь, в которой можно зарядить емкость до напряжения 4 В, если в распоряжении имеется источник напряжения 6 В.

4.9. Рассчитать токи резисторов и индуктивностей и напряжения на емкостях в установившемся режиме для цепей, схемы которых изображены на рис. 4.3 при условии, что воздействие является постоянным.

4.10. Решить задачу 4.9 для схем, изображенных на рис. 4.4.

5. РЕЖИМ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

5.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Гармоническое колебание и его параметры.
2. Сопоставление амплитуд и фаз гармонических колебаний одинаковых частот.
3. Представление гармонических колебаний с помощью векторов.
4. Сложение гармонических колебаний одинаковых частот.
5. Результирующая амплитуда суммы двух наложенных гармонических колебаний, находящихся в квадратуре.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

5.1. На рис. 5.1 изображены графики гармонических колебаний. Записать математическое выражение этих колебаний в косинусной и синусной формах.

5.2. Заданы два колебания одинаковых частот:

$$s_1(t) = S_m \cos(\omega t + \pi/4) \text{ и } s_2(t) = 2S_m \cos(\omega t + \pi/2).$$

Какое из этих колебаний отстает по фазе от другого и на какой угол? Построить векторы, характеризующие эти колебания.

5.3. Изобразить графики двух гармонических колебаний одинаковых частот, находящихся в фазе, противофазе и квадратуре.

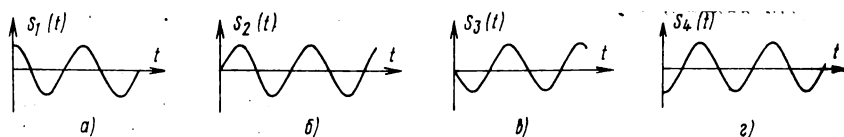


Рис. 5.1

Таблица 5.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_{m1}	1,2	0,6	1,0	0,8	$\sqrt{3,0}$	$\sqrt{3,0}$	2,0	2,0	$\sqrt{3,0}$	1,0
ψ_1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
S_{m2}	0,8	0,6	$\sqrt{3,0}$	0,8	1,0	1,0	2,0	1,0	2,0	2,0
ψ_2	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$

Продолжение табл. 5.1

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S_{m1}	1,0	$\sqrt{3,0}$	1,5	$\sqrt{3,0}$	1,0	0,8	1,0	2,0	1,0	1,0
ψ_1	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
S_{m2}	$\sqrt{3,0}$	$\sqrt{3,0}$	0,5	$\sqrt{3,0}$	1,0	0,8	$\sqrt{3,0}$	1,0	1,0	1,0
ψ_2	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$

Окончание табл. 5.1

Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
S_{m1}	$\sqrt{2,0}$	$\sqrt{2,0}$	1,0	$\sqrt{2,0}$	2,0	1,0	1,6	1,0	$\sqrt{2,0}$	1,0
ψ_1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
S_{m2}	$\sqrt{2,0}$	$\sqrt{3-1}$	$\sqrt{2,0}$	$\sqrt{2,0}$	2,5	$\sqrt{2,0}$	1,0	$\sqrt{2,0}$	$\sqrt{2,0}$	$\sqrt{2,0}$
ψ_2	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	π	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	π

5.4. Задано гармоническое косинусное колебание частоты f_1 с амплитудой S_{m1} . Запишите математическое выражение (формулу) для данного колебания, а также колебаний удвоенной частоты и частоты в 2 раза меньшей. Постройте графики этих колебаний. Начальные фазы колебаний принимаются равными нулю, а амплитуды одинаковыми.

5.5р. Найти результат наложения двух гармонических колебаний одинаковых частот:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= S_{m1} \cos(\omega t + \psi_0), \\ s_2(t) &= -S_{m2} \sin(\omega t + \psi_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

5.6. В табл. 5.1 приведены амплитуды и начальные фазы пар косинусных колебаний одинаковых частот. Изобразите эти колебания в виде векторной диаграммы и найдите результат наложения каждой пары колебаний.

5.7р. Составить дифференциальное уравнение цепи, схема которой показана на рис. 5.2, и убедиться, что при гармоническом воздействии $u(t) = U_m \cos \omega t$ частное решение также описывать будет гармоническое колебание.

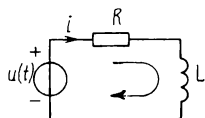


Рис. 5.2

5.8. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 4.3, составить уравнения состояния и убедиться, что при гармоническом воздействии $u(t) = U_m \cos \omega t$ или $i(t) = I_m \cos \omega t$ напряжения и токи во всех элементах в установившемся режиме являются гармоническими колебаниями. Найти амплитуды и начальные фазы токов в индуктивностях и напряжений на емкостях.

5.2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. МГНОВЕННАЯ И СРЕДНЯЯ МОЩНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Соотношения между амплитудами и начальными фазами гармонических колебаний тока и напряжения на зажимах R -, L - и C -элементов.
2. Соотношение между амплитудами и начальными фазами гармонических колебаний токов и напряжение в последовательных и параллельных RL -, RC - и RLC -цепях.
3. Мгновенная и средняя мощности гармонических колебаний.

4. Определение среднеквадратических напряжений и токов.
5. Средняя мощность колебаний в индуктивности и емкости.
6. Формулы решения прямоугольного треугольника (по материалам школьного курса математики).

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ

5.9р. На рис. 5.1, *а* и *б* изображены графики двух гармонических колебаний. Одно из этих колебаний является напряжением, а второе — током. В каких элементах электрических цепей возможны такие колебания?

5.10. На рис. 5.3 показаны векторные диаграммы напряжения и тока в некотором элементе электрической цепи. Что это за элементы?

5.11р. Найти напряжение на зажимах двухполюсника, состоящего из последовательного соединения резистора и индуктивности (рис. 5.4), если через двухполюсник проходит ток $i(t) = I_m \cos \omega t$. Построить векторную диаграмму напряжений.

5.12р. Используя векторное представление колебаний, найти ток через входные зажимы двухполюсника, состоящего из параллельного соединения резистора и индуктивности (рис. 5.5), если к нему подведено напряжение $u(t) = U_m \cos \omega t$.

5.13р. На входных зажимах некоторого двухполюсника напряжение и ток выражаются формулами:

$$u(t) = U_m \cos \omega t, \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi),$$

где $U_m = 1$ В, $I_m = 1$ мА, $\psi = \pi/4$, $\omega = 10^4$ с⁻¹. Найти простейший двухполюсник, на котором могут быть такие токи и напряжения.

5.14р. На зажимах некоторого двухполюсника напряжение и ток изменяются по следующим законам:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u), \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i),$$

где $U_m = 4$ В, $I_m = 0,02$ А, $\psi_u = \frac{2}{3}\pi$, $\psi_i = \frac{1}{3}\pi$. Найти схему простей-

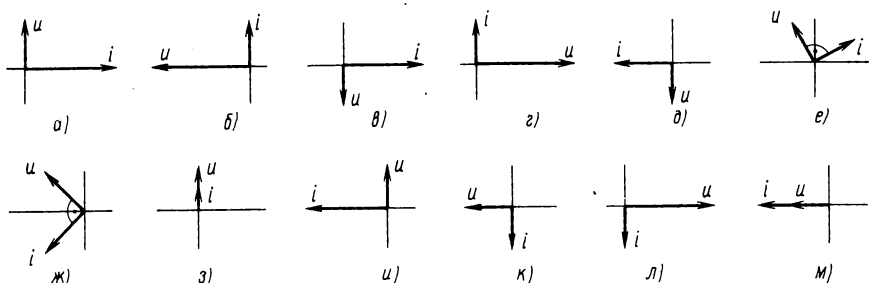


Рис. 5.3

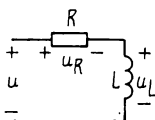


Рис. 5.4

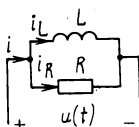


Рис. 5.5

шего двухполюсника и рассчитать действующие значения напряжения и тока, а также мгновенную и среднюю мощности.

5.15. У каких элементов электрической цепи напряжение и ток на внешних зажимах могут описываться функциями:

- 1) $u(t) = U_m \cos(\omega t + \pi/3)$, 2) $u(t) = U_m \cos(\omega t + \pi)$,
 $i(t) = I_m \sin(\omega t + \pi/3)$; $i(t) = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$;
- 3) $u(t) = U_m \sin \omega t$, 4) $u(t) = U_m \cos(\omega t + 3\pi/4)$,
 $i(t) = I_m \sin \omega t$; $i(t) = I_m \cos(\omega t + \pi/4)$

5.16. На внешних зажимах некоторых двухполюсников напряжение и ток описываются функциями:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi_u) \text{ и } i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i).$$

Для представленных в табл. 5.2 значений U_m , I_m , ψ_u , ψ_i и $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$ найти параметры элементов простейшего двухполюсника, если элементы соединены последовательно, а также потребляемую двухполюсником среднюю мощность.

5.17. Решить задачу 5.16, если в искомом двухполюснике элементы соединены параллельно.

5.18. На рис. 5.6 приведены векторные диаграммы. Считая S_{m1} , S_{m2} и S_m амплитудами напряжений, определить, какому простейшему двухполюснику соответствует каждая векторная диаграмма (на векторных диаграммах дугой и точкой обозначен пря-

Таблица 5.2

Вариант	U_m , В	I_m , мА	ψ_u , рад	ψ_i , рад	Вариант	U_m , В	I_m , мА	ψ_u , рад	ψ_i , рад
1	0,2	0,3	$-14\pi/15$	$-1,4\pi$	16	1,7	3,3	$\pi/15$	$0,1\pi$
2	0,3	0,5	$-13\pi/15$	$-1,3\pi$	17	1,8	3,5	$2\pi/15$	$0,2\pi$
3	0,4	0,7	$-11\pi/15$	$-1,2\pi$	18	1,9	3,7	$\pi/15$	$0,3\pi$
4	0,5	0,9	$-11\pi/15$	$-1,1\pi$	19	2,0	3,9	$4\pi/15$	$0,4\pi$
5		1,1	$-2\pi/3$	$-1,0\pi$	20	2,1	4,1	$\pi/3$	$0,5\pi$
6	0,7	1,3	$-3\pi/5$	$-0,9\pi$	21	2,2	4,3	$2\pi/5$	$0,6\pi$
7	0,8	1,5	$-8\pi/15$	$-0,8\pi$	22	2,3	4,5	$7\pi/15$	$0,7\pi$
8	0,9	1,7	$-7\pi/15$	$-0,7\pi$	23	2,4	4,7	$8\pi/15$	$0,8\pi$
9	1,0	1,9	$-2\pi/5$	$-0,6\pi$	24	2,5	4,9	$3\pi/5$	$0,9\pi$
10	1,1	2,1	$-\pi/3$	$-0,5\pi$	25	2,6	5,1	$2\pi/3$	π
11	1,2	2,3	$-4\pi/15$	$-0,4\pi$	26	2,7	5,3	$11\pi/15$	$1,1\pi$
12	1,3	2,5	$-\pi/15$	$-0,3\pi$	27	2,8	5,5	$4\pi/5$	$1,2\pi$
13	1,4	2,7	$-2\pi/15$	$-0,2\pi$	28	2,9	5,7	$13\pi/15$	$1,3\pi$
14	1,5	2,9	$-\pi/15$	$-0,1\pi$	29	3,0	5,9	$14\pi/15$	$1,4\pi$
15	1,6	3,1	0	0					

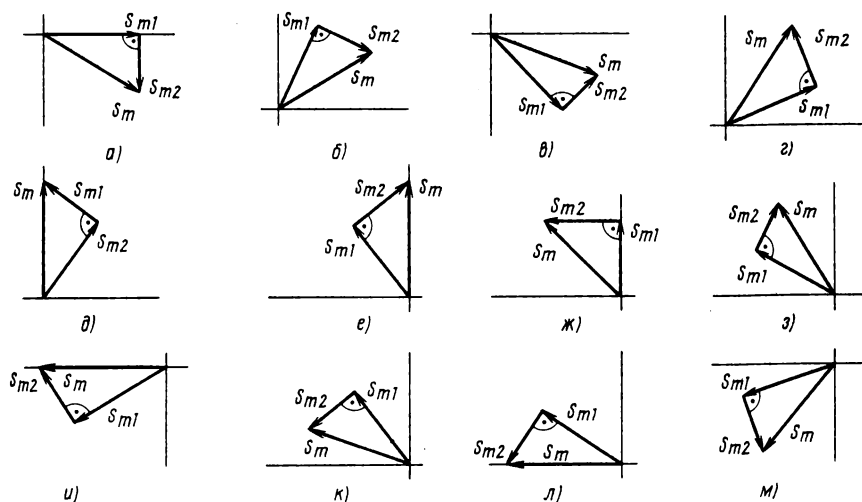


Рис. 5.6

мой угол). Амплитуда S_{m1} относится к резистору, а S_{m2} к индуктивности или емкости.

5.19. Решить задачу 5.18, если S_{m1} , S_{m2} и S_m являются амплитудами токов.

Решения.

5.5. Как известно, сумма двух гармонических колебаний одинаковых частот является также гармоническим колебанием. В учебнике приведены формулы для вычисления амплитуды и начальной фазы суммы двух колебаний:

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= S_{m1} \cos(\omega t + \psi_1), \\ s_2(t) &= S_{m2} \cos(\omega t + \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Данные формулы имеют следующий вид:

$$S_m = \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2 + 2S_{m1}S_{m2} \cos(\psi_1 - \psi_2)}, \quad (5.3)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{S_{m1} \sin \psi_1 + S_{m2} \sin \psi_2}{S_{m1} \cos \psi_1 + S_{m2} \cos \psi_2}. \quad (5.4)$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо второе колебание привести к косинусной форме. Согласно формулам приведения тригонометрических функций имеем: $-\sin \alpha = \cos(\alpha + \pi/2)$, тогда

$$s_2(t) = S_{m2} \cos(\omega t + \psi_0 + \pi/2). \quad (5.5)$$

Из формул (5.1), (5.2), (5.5) видно, что $\psi_1 = \psi_0$, $\psi_2 = \psi_0 + \pi/2$, $\psi_2 - \psi_1 = \pi/2$, т. е. колебания $s_1(t)$ и $s_2(t)$ находятся в квадратуре.

Амплитуда результирующего колебания определяется по (5.3) с учетом того, что колебания находятся в квадратуре:

$$S_m = \sqrt{S_{m1}^2 + S_{m2}^2}.$$

Подставим, далее, ψ_1 и ψ_2 в (5.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{S_{m1} \sin \psi_0 + S_{m2} \sin (\psi_0 + \pi/2)}{S_{m1} \cos \psi_0 + S_{m2} \cos (\psi_0 + \pi/2)} = \\ &= \frac{S_{m1} \sin \psi_0 + S_{m2} \cos \psi_0}{S_{m1} \cos \psi_0 - S_{m2} \sin \psi_0}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Таким образом, результирующее колебание имеет вид:

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \psi).$$

5.7. Задавшись положительным направлением тока и направлением обхода контура, составим по второму закону Кирхгофа уравнение

$$Ri(t) + L di(t)/dt = u(t). \quad (5.7)$$

Это уравнение является неоднородным, поэтому существует отличное от нуля частное решение. Предположим, что решением является функция $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_0)$. Предположение будет верным, если найдем такие значения I_m и ψ_0 , при которых подстановка $i(t)$ в уравнение (5.7) превращает его в тождество. Выполним эту подстановку:

$$RI_m \cos(\omega t + \psi_0) - I_m \omega L \sin(\omega t + \psi_0) = U_m \cos \omega t. \quad (5.8)$$

Сопоставив данные уравнения с (5.1), имеем: $S_{m1} = RI_m$ и $S_{m2} = -\omega LI_m$. Сумма этих колебаний уже найдена в задаче 5.5. Воспользуемся результатом решения данной задачи и заменим сумму двух гармонических колебаний в уравнении (5.8) одним колебанием:

$$I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cos(\omega t + \psi) = U_m \cos \omega t.$$

Равенство превращается в тождество тогда, когда равны амплитуды и начальные фазы колебаний в левой и правой частях этого равенства, т. е.

$$I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = U_m \text{ или } I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \text{ и } \psi = 0.$$

Если $\psi = 0$, то и $\operatorname{tg} \psi = 0$. При этом из равенства (5.6) следует, что

$$S_{m1} \sin \psi_0 + S_{m2} \cos \psi_0 = 0$$

или

$$\operatorname{tg} \psi_0 = -S_{m2}/S_{m1} = -\omega L/R; \quad \psi_0 = -\operatorname{arctg}(\omega L/R).$$

Таким образом, найдены значения I_m и ψ_0 , которые превращают равенство (5.7) в тождество.

Выводы. Как известно из материала курса, частное решение уравнений состояния описывает напряжения и токи в установившемся режиме. Данная задача демонстрирует тот важнейший факт, что при гармоническом воздействии в устойчивой цепи устанавливаются гармонические колебания с частотой, равной частоте воздействия.

5.9. Математические выражения для данных колебаний имеют вид:

$$s_1(t) = S_{m1} \cos \omega t \text{ и } s_2(t) = S_{m2} \cos (\omega t - \pi/2).$$

Пусть первое колебание является током $s_1(t) = i(t)$, а второе напряжением $s_2(t) = u(t)$. В этом случае ток опережает по фазе напряжение на угол $\pi/2$. Это возможно в емкости. Если же примем $s_1(t) = u(t)$, а $s_2(t) = i(t)$, то получится, что напряжение опережает по фазе ток на угол $\pi/2$. Такое соотношение между фазами тока и напряжения характерно для индуктивности.

5.11. При известном токе напряжения на резисторе и индуктивности определяются формулами:

$$u_R = RI_m \cos \omega t = U_{mR} \cos \omega t, \quad (5.9)$$

$$U_L(t) = I_m \omega L \cos (\omega t + \pi/2) = U_{mL} \cos (\omega t + \pi/2), \quad (5.10)$$

где $U_{mR} = I_m R$, $U_{mL} = I_m \omega L$.

Общее напряжение равно сумме напряжений на каждом элементе, т. е.

$$u(t) = U_{mR} \cos \omega t + U_{mL} \cos (\omega t + \pi/2) = U_m \cos (\omega t + \psi_u).$$

Таким образом, необходимо найти амплитуду и фазу результирующего колебания, состоящего из суммы двух колебаний. Первое колебание имеет амплитуду $S_{m1} = U_{mR}$ и начальную фазу $\psi_1 = 0$, а второе — амплитуду $S_{m2} = U_{mL}$ и начальную фазу $\psi_2 = \pi/2$. Так как колебания находятся в квадратуре ($\psi_2 - \psi_1 = \pi/2$), то амплитуда и начальная фаза определяются по формулам:

$$U_m = \sqrt{U_{mR}^2 + U_{mL}^2} = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad (5.11)$$

$$\operatorname{tg} \psi_u = \frac{U_{mL}}{U_{mR}} = \frac{\omega L}{R} \quad (5.12)$$

или $\psi_u = \operatorname{arctg} (\omega L/R) = \operatorname{arctg} (U_{mL}/U_{mR})$.

При изменении соотношения между R и ωL ($0 \leq \omega L/R \leq \infty$) начальная фаза напряжения будет изменяться в пределах $0 \dots \pi/2$. При $\omega L = 0$ (в цепи отсутствует индуктивность) начальная фаза получается равной нулю, что и следовало ожидать, т. е. двухполюсник представляет собой резистор. При $R = 0$ (в цепи отсутствует ре-

зистор) начальная фаза напряжения равна $\pi/2$, что и следовало ожидать, поскольку на индуктивности напряжение опережает по фазе ток на $\pi/2$. При $\omega L \neq 0$ и $R \neq 0$ напряжение опережает ток на угол $\psi_u = \arctg(\omega L/R) < \pi/2$. Напряжение на зажимах рассматриваемого RL -двухполюсника будет изменяться по следующему закону:

$$u(t) = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cos[\omega t + \arctg(\omega L/R)].$$

Построим векторную диаграмму напряжений. Согласно (5.9) напряжение на резисторе имеет нулевую начальную фазу, и поэтому направление вектора U_{mR} совпадает с положительным направлением оси абсцисс. Как следует из (5.10), напряжение на индуктивности имеет начальную фазу $\pi/2$, поэтому направление вектора U_{mL} совпадает с положительным направлением оси ординат (рис. 5.7). Так как амплитуда напряжения на рассматриваемом RL -двухполюснике вычисляется по формуле (5.11), то в векторном представлении она изображается как сумма двух векторов U_{mR} и U_{mL} . Длина этого вектора равна гипотенузе прямоугольного треугольника, построенного на данных векторах как на катетах. Согласно (5.12) сдвиг фаз между напряжением и током ($\psi_i = 0$, поэтому этот сдвиг является начальной фазой напряжения) определяется углом ψ_u (см. рис. 5.7). Как видим, векторная диаграмма связывает четыре величины U_{mR} , U_{mL} , U_m и ψ_u . Используя формулы решения прямоугольного треугольника, всегда можно по двум заданным величинам определить две другие. Например, пусть задано U_{mR} и U_m .

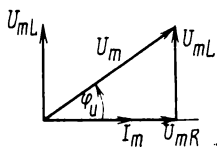


Рис. 5.7

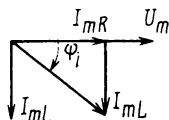


Рис. 5.8

Тогда из прямоугольного треугольника $\cos \psi = U_{mR}/U_m$ или $\psi = \arccos U_{mR}/U_m$. Значение U_{mL} можно найти по одной из формул $U_{mL} = U_m \sin \psi_u$ или $U_{mL} = \sqrt{U_m^2 - U_{mR}^2}$.

5.12. Так как элементы R и L соединены параллельно, то на каждом из этих элементов напряжение равно подводимому напряжению $u(t)$. Ток в каждом из элементов R и L вычисляется по формулам:

$$i_R(t) = (U_m/R) \cos \omega t = I_{mR} \cos \omega t, \quad (5.13)$$

$$i_L(t) = (U_m/\omega L) \cos(\omega t - \pi/2) = I_{mL} \cos(\omega t - \pi/2), \quad (5.14)$$

где

$$I_{mR} = U_m/R, \quad I_{mL} = U_m/\omega L. \quad (5.15)$$

По первому закону Кирхгофа ток в общей ветви равен сумме данных токов:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i).$$

Здесь неизвестными являются I_m и ψ_i . Представим в виде векторов колебания $i_R(t)$ и $i_L(t)$. Согласно (5.13) и (5.14) колебанию $i_R(t)$ соответствует вектор с нулевой начальной фазой, а колебанию $i_L(t)$ — с начальной фазой, равной $-\pi/2$. Длина этих векторов соответственно равна I_{mR} и I_{mL} (рис. 5.8). Результирующий вектор, соответствующий общему току, находится как сумма данных векторов. Его длина вычисляется по формуле

$$I_m = \sqrt{I_{mR}^2 + I_{mL}^2}$$

или с учетом (5.15)

$$I_m = U_m \sqrt{1/R^2 + 1/(\omega L)^2}.$$

Угол этого вектора, отсчитываемый от оси абсцисс против часовой стрелки, будет отрицательным и, очевидно, равным

$$\psi_i = -\arctg(I_{mL}/I_{mR}) = -\arctg(R/\omega L).$$

Так как $\psi_u = 0$, то ток отстает по фазе от напряжения на угол ψ_i . Ток в рассматриваемом RL -двухполюснике изменяется по закону

$$i(t) = U_m \sqrt{1/R^2 + 1/(\omega L)^2} \cos[\omega t - \arctg(R/\omega L)].$$

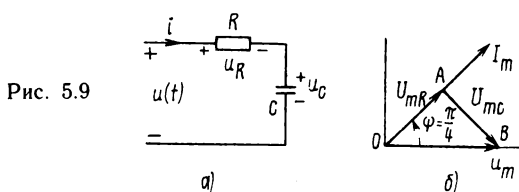


Рис. 5.9

5.13. По условиям задачи колебания тока опережают по фазе колебания напряжения. Такое соотношение может быть, например, в RC -двухполюснике, показанном на рис. 5.9, а. На рис. 5.9, б изображены векторы U_m и I_m , отвечающие данным колебаниям. Поскольку в резисторе напряжение совпадает с током, вектор U_{mR} , соответствующий напряжению на резисторе, совпадает по направлению с вектором тока I_m . Вектор напряжения на конденсаторе повернут относительно него на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Длины векторов U_{mC} и U_{mR} должны быть такими, чтобы их сумма дала вектор U_m (см. рис. 5.9, б). Из треугольника OAB находим эти длины:

$$U_{mC} = U_m \sin \psi = 1/\sqrt{2}, \quad U_{mR} = U_m \cos \psi = 1/\sqrt{2}.$$

Амплитуды напряжения и тока в сопротивлении и емкости связаны соотношениями:

$$U_{mC} = I_m / \omega C, \quad U_{mR} = I_m R.$$

Отсюда

$$R = U_{mR} / I_m = 1 / \sqrt{2} 10^{-3} = 707 \text{ Ом}, \\ 1 / \omega C = U_{mC} / I_m = 1 / \sqrt{2} 10^{-3} = 707 \text{ Ом},$$

а значение параметра емкости будет:

$$C = \frac{1}{707 \cdot 10^4} = 0,141 \text{ мкФ}.$$

Заданные напряжения и токи могут существовать и в параллельном RC -двухполюснике. Параметры элементов R и C найти самостоятельно.

5.14. Так как $\psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{3} > 0$, то напряжение опережает ток. Такое соотношение между начальными фазами может наблюдаться в RL -двухполюснике при последовательном или параллельном соединении элементов.

Действующее значение тока и напряжения вычисляются по формулам:

$$I = I_m / \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ А}, \quad U = U_m / \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ В}.$$

Мгновенная мощность в двухполюснике

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \psi_i) \cos(\omega t + \psi_u).$$

По формулам тригонометрии заменим произведение косинусов их суммой

$$p(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i),$$

где

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \pi/3.$$

Подстановка численных значений дает следующий результат:

$$p(t) = 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-2} \cos(2\omega t + \pi) \text{ Вт}.$$

Первое слагаемое будет средней мощностью.

6. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

6.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА АНАЛИЗА КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЕЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Цель введения в теорию цепей символического метода.
2. Представление комплексных чисел в различных формах и изображение их на комплексной плоскости; сопряженные комплексные числа; формула Эйлера.
3. Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение и деление).
4. Формальное (с помощью математических операций) определение символического изображения косинусоидальной функции.
5. Законы Кирхгофа и уравнения ветвей (закон Ома) для комплексных амплитуд напряжений и токов.
6. Комплексные сопротивления и проводимости двухполюсников: индуктивный и емкостный характер сопротивлений и проводимостей двухполюсников.
7. Последовательность расчета простейших цепей символическим методом.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

6.1. Для приведенных ниже гармонических колебаний записать их символическое изображение в виде комплексных амплитуд и комплексных действующих значений. Изобразить полученные амплитуды и комплексные действующие значения на комплексной плоскости:

$s(t) = 0,1 \cos(\omega t + \pi/6),$	$s(t) = 0,2 \cos \omega t,$
$s(t) = 0,3 \cos(\omega t + \pi/4),$	$s(t) = 0,25 \cos(\omega t + \pi/2),$
$s(t) = 0,5 \cos(\omega t + 3\pi/4),$	$s(t) = 0,15 \cos(\omega t + \pi),$
$s(t) = 0,35 \cos(\omega t + 5\pi/4),$	$s(t) = 0,4 \cos(\omega t + 3\pi/2),$
$s(t) = 0,45 \cos(\omega t + 11\pi/6),$	$s(t) = 0,55 \cos(\omega t + 2\pi),$
$s(t) = \cos(\omega t - 2\pi/3),$	$s(t) = 1,1 \cos(\omega t - \pi/6),$
$s(t) = 1,25 \cos(\omega t - \pi/2),$	$s(t) = 1,2 \cos(\omega t - 3\pi/4),$
$s(t) = 1,4 \cos(\omega t - \pi),$	$s(t) = 1,3 \cos(\omega t - 3\pi/2).$

6.2. По заданным в табл. 6.1 значениям модуля и аргумента комплексной амплитуды колебания записать закон изменения во времени самого колебания.

Таблица 6.1

S_m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ψ	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{-3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{-\pi}{8}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{-2}{5}\pi$

6.3. В табл. 6.2. даны вещественные (a) и коэффициенты при мнимых (b) частях комплексных чисел. Представить эти числа в показательной форме записи. Считая полученные числа комплексными амплитудами, записать соответствующие им гармонические колебания.

Таблица 6.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	0,2	-0,25	0,4	-0,5	0,7	-0,2	0,3	-0,4	10
b	0,3	0,35	-0,3	-0,6	0,7	0,8	-0,9	-0,9	0

Продолжение табл. 6.2.

Вариант	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	1	100	0	0	1,5	-1,5	1,5	-1,5	8
b	-1	-200	500	-300	2	2	-2	-1,5	-3

Окончание табл. 6.2.

Вариант	19	20	21	22	23	24	25	26	27
a	-7	-8	12	-13	-18	2	-2	0	0
b	-4	3	6	4	-27	0	0	-5	+6

6.4. Заданные в показательной форме (т. е. модулем и аргументом) комплексные числа табл. 6.1 представить в алгебраической форме.

6.5. Вычислить результирующие комплексные числа:

$$\text{а) } A_1 = 6e^{-j\frac{\pi}{4}} + 4 + j3; \quad \text{б) } A_2 = (4 + j2)(6 + j3);$$

$$\text{в) } A_3 = \frac{8 + j10}{-6 + j3}; \quad \text{г) } A_4 = \frac{10e^{-j\frac{3\pi}{4}} + 8e^{j\frac{\pi}{4}}}{(5 - j5)\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}(\sqrt{3} + j).$$

6.6. Доказать следующие равенства:

$$\text{а) } C + C^* = 2\operatorname{Re}C; \quad \text{б) } C - C^* = j2\operatorname{Im}C; \quad \text{в) } (C^*)^* = C; \quad \text{г) } |C^*| = |C|; \quad \text{д) } (C_1 + C_2)^* = C_1^* + C_2^*; \quad \text{е) } (C_1 C_2)^* = C_1^* C_2^*; \quad \text{ж) } (C_1/C_2)^* = C_1^*/C_2^*; \quad \text{з) } CC^* = |C|^2.$$

6.7. Вычислить:

$$\text{а) } C_1 C_2^* \text{ и } (C_1^*/C_2)^2, \text{ если } C_1 = 1 + j\sqrt{3}, C_2 = \sqrt{3} + j; \\ \text{б) } C_1 C_2^* \text{ и } C_1^{*2}/C_2, \text{ если } C_1 = 3 + j2, C_2 = 2 + j2.$$

6.8. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

$$\text{а) } (7 + j24)/5; \quad \text{б) } (15 - j15)/\sqrt{2}; \quad \text{в) } (-0,8 - j1,6)/1,79; \\ \text{г) } -(171 + j265) \cdot 2; \quad \text{д) } (0,3 + j0,02) \cdot 10; \quad \text{е) } (15 - j1,5) \cdot 0,5.$$

6.9. Уравнение ЗТК для некоторого узла цепи имеет вид $i_1 + i_2 - i_3 = 0$, где $i_1 = 3 \cos(1000t + \pi/6)$, $i_2 = 4 \cos(1000t + 2\pi/3)$. Символическим методом получить выражение i_3 в виде одной косинусной функции времени, построить векторную диаграмму токов на комплексной плоскости. Определить период T , частоту f и угол фазового сдвига $\Delta\phi$ между токами i_1 и i_2 .

6.10. Уравнение ЗНК для некоторого контура цепи имеет вид: $u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0$; $u_1 = 5 \cos \omega t$; $u_2 = 10 \cos(\omega t + \pi/6)$; $u_3 = 10 \cos(\omega t - \pi/3)$. Получить выражение u_4 в виде одной косинусной функции времени, построить векторную диаграмму напряжений на комплексной плоскости.

6.11. На участке цепи $u = u_1 + u_2$; $u_1 = 30 \cos(\omega t + \pi/4)$; $u_2 = 40 \cos(\omega t + \psi_2)$. Определить ψ_2 для случаев: а) u_1 и u_2 совпадают по фазе; б) u_1 и u_2 находятся в противофазе; в) u_1 опережает u_2 по фазе на $\pi/4$; г) u_1 отстает от u_2 по фазе на $\pi/2$. Для всех случаев получить выражения $u(t)$ символическим методом; построить векторные диаграммы напряжений.

6.12р. Определить характер (индуктивный, емкостный) сопротивления $Z = 100e^{j\frac{\pi}{6}}$ и проводимости $Y = 0,1e^{j\frac{\pi}{3}}$ двухполюсников. Построить возможные простейшие схемы двухполюсников. Вычислить значения параметров элементов, если частота $\omega = 10^3 \text{ с}^{-1}$.

6.13. В табл. 6.3 приведены модули и аргументы комплексного сопротивления. Определить характер сопротивления, построить простейшие схемы двухполюсников и рассчитать их элементы при заданной частоте $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$.

Таблица 6.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$ Z $	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800
φ_z	$-\frac{15\pi}{32}$	$-\frac{4\pi}{16}$	$-\frac{13\pi}{32}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{11\pi}{32}$	$-\frac{5\pi}{16}$	$-\frac{9\pi}{32}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{32}$

Продолжение табл. 6.3

Вариант	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$ Z $	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700
φ_z	$-\frac{3\pi}{16}$	$-\frac{5\pi}{32}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{32}$	$-\frac{3\pi}{16}$	$-\frac{3\pi}{32}$	0	$\frac{\pi}{32}$	$\frac{\pi}{16}$

Окончание табл. 6.3

Вариант	19	20	21	22	23	24	25	26
$ Z $	2800	2900	3000	3100	3200	3300	3400	3500
φ_z	$\frac{3\pi}{32}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{9\pi}{32}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{8}$

6.14р. Символическим методом рассчитать напряжения и токи в цепи, схема которой изображена на рис. 6.1, если $u_0(t) = 6 \cos(10^6 t + \pi/4)$, $R_1 = 1000$ Ом, $R_2 = 2000$ Ом, $L_2 = 2$ мГн. Ответ представить в виде функций времени. Для первого узла и первого контура K_1 построить векторную диаграмму токов и напряжений соответственно.

6.15. Построить векторную диаграмму для второго контура (см. задачу 6.14).

6.16. Найти комплексные сопротивления и проводимости двухполюсников со схемами рис. 6.2 при следующих исходных данных: $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $L_1 = 0,1$ мГн, $C = 0,05$ нФ, $\omega = 10^7$ с⁻¹.

6.17. На рис. 6.3 изображена схема двухполюсника, а в табл. 6.4 даны параметры элементов, входящих в этот двухполюсник. Найти комплексное сопротивление двухполюсника и указать его характер (индуктивный, емкостный, резистивный), если $\omega = 10^6$ с⁻¹.

6.18. Пользуясь данными табл. 6.4, определить мгновенные значения напряжений и токов во всех элементах схемы 6.4, а, б, если $u = \sqrt{2} \cos \omega t$, В; $i = \sqrt{2} \cos \omega t$, мА.

6.19*. В последовательном RLC -контуре действующие значения напряжения и тока имеют следующие значения $I = 1$ мА, $U_R = 3$ В, $U_L = 9$ В, $U_C = 5$ В.

Таблица 6.4

Вариант	Виды элементов				Значения параметров элементов		
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	R , кОм	L , мГн	C , нФ
1	R	L	0	C	1	2	0,05
2	L	R	0	C	2	4	0,04
3	C	L	0	R	3	6	0,03
4	0	R	L	C	4	8	0,02
5	0	R	C	L	5	10	0,01
6	0	L	C	R	6	12	0,009
7	R	0	C	L	7	14	0,008
8	L	0	C	R	8	16	0,007
9	C	0	L	R	9	18	0,006
10	0	L	R	C	2	2	0,005
11	0	C	R	L	2	1	0,04
12	0	L	C	R	3	3	0,03
13	R	L	0	C	4	5	0,02
14	L	C	0	R	5	7	0,01
15	C	L	0	R	6	9	0,009
16	0	R	L	C	7	11	0,008
17	0	R	C	L	8	13	0,007
18	0	L	C	R	9	15	0,006
19	R	0	L	C	10	17	0,005
20	L	0	R	C	5	19	0,004
21	C	0	L	R	2	1	0,05
22	R	L	0	C	3	2	0,04
23	L	R	0	C	4	3	0,03
24	C	R	0	L	5	4	0,025
25	0	R	L	C	6	5	0,02
26	0	C	R	L	7	6	0,015
27	0	C	L	R	8	7	0,012
28	R	0	C	L	9	8	0,010
29	L	0	C	R	10	9	0,008
30	C	0	L	R	5	10	0,045

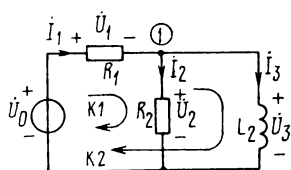


Рис. 6.1

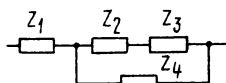
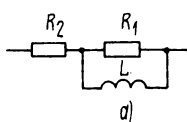
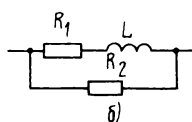


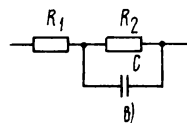
Рис. 6.3



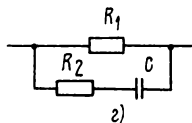
а)



б)



в)



г)

Рис. 6.2

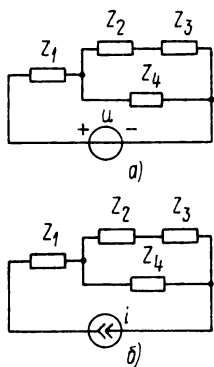


Рис. 6.4

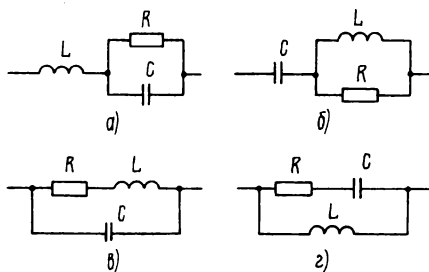


Рис. 6.5

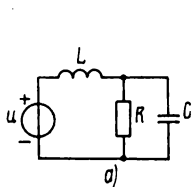


Рис. 6.6

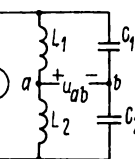
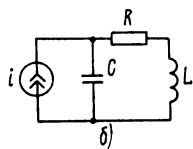


Рис. 6.7

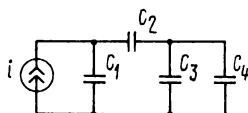


Рис. 6.8

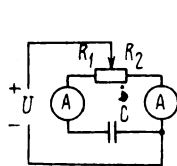


Рис. 6.9

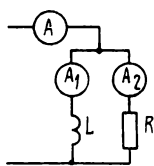


Рис. 6.10

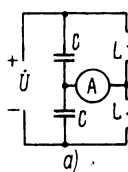


Рис. 6.11

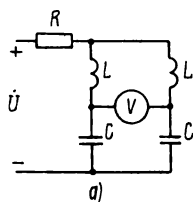
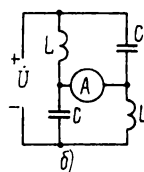


Рис. 6.12

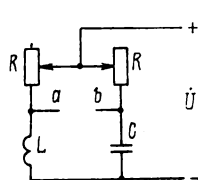
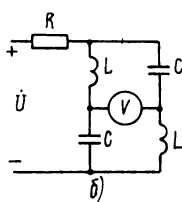


Рис. 6.13

Необходимо найти действующие значения напряжений: а) на зажимах двухполюсника; б) на зажимах двухполюсника и всех элементов, если при том же действующем значении тока частота изменится (увеличится, уменьшится) в 2 раза.

6.20*. Для каждого из изображенных на рис. 6.5 двухполюсников найти условия, при которых сопротивления будут иметь индуктивный, емкостный или резистивный характер.

6.21*. К источнику гармонического напряжения с амплитудой $U_m = 3$ В и частотой $\omega = 10^8$ с⁻¹ подключен двухполюсник, изображенный на рис. 6.5, а, где $R = 2,5$ кОм, $L = 0,2$ мГн. Найти значение емкости, при котором действующее значение тока источника будет максимальным и рассчитать это значение тока.

6.22*. К источнику гармонического тока с амплитудой $I_m = 2$ мА и частотой $\omega = 10^8$ с⁻¹ подключен двухполюсник, изображенный на рис. 6.5, в, где $R = 50$ Ом, $L = 0,1$ мГн. Найти значение емкости, при котором действующее значение напряжения на зажимах источника будет максимальным и рассчитать значение напряжения.

6.23. В цепях, схемы которых изображены на рис. 6.6, известны параметры элементов: $R = 10$ кОм; $L = 0,05$ Гн, $C = 0,01$ мкФ, а также $\dot{U}_R = 10e^{j\pi/6}$. Найти токи и напряжения всех элементов, включая источники, если $\omega = 10^4$ с⁻¹.

6.24. Найти напряжение $u_{ab}(t)$ (рис. 6.7), если $u(t) = 220 \cos 10^3 t$, В; $C_1 = 0,06$ мкФ, $C_2 = 0,03$ мкФ, $L_1 = 10$ мГн, $L_2 = 12$ мГн.

6.25. Найти ток в емкости C_2 (рис. 6.8), если $i(t) = 4 \cos(10^4 t + \pi/6)$, мА; $C_1 = 0,015$ мкФ; $C_2 = 0,05$ мкФ; $C_3 = 0,01$ мкФ, $C_4 = 0,04$ мкФ.

6.26. Для резистивных цепей установлено, что при последовательном соединении резисторов общее сопротивление больше наибольшего, а при параллельном — меньше наименьшего сопротивления резистора. Всегда ли это правило соблюдается для модулей комплексных сопротивлений RLC -цепей? Приведите примеры, когда эти правила соблюдаются, а когда нет.

6.27*. В двухполюсной цепи, схема которой изображена на рис. 6.9, подключен источник гармонического напряжения частоты ω . При каком соотношении между резисторами R_1 и R_2 показания приборов, регистрирующих действующие значения протекающих через них токов, будут одинаковы, если $R_1 + R_2 = 2/(\omega C)$.

6.28. К двухполюснику рис. 6.10 подключен источник гармонического напряжения. Включенные в цепь приборы регистрируют действующие значения тока. Почему сумма показаний A_1 и A_2 не равна показанию прибора A ?

6.29*. Найти показания приборов в цепях со схемами рис. 6.11, если $\omega L = 1/\omega C = 10$ Ом, $U = 20$ В.

6.30. Найти показания вольтметров (рис. 6.12), если $R = \omega L = 1/\omega C = 20$ Ом, $U = 20$ В.

6.31*. Чему равны комплексные сопротивления двухполюсников Z_1 и Z_2 , если при их последовательном соединении общее сопротивление равно 4 Ом, а при параллельном — 3,25 Ом?

6.32. Изменится ли амплитуда и начальная фаза напряжения U_{ab} при одновременном перемещении вниз движков переменных резисторов (рис. 6.13), если $\omega L = 1/(\omega C)$?

6.33. Чему равно входное сопротивление цепей, схемы которых изображены на рис. 6.10 ... 6.12, при: а) $\omega \rightarrow 0$ и б) $\omega \rightarrow \infty$?

6.2. АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ СИМВОЛИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Методы анализа цепей:
токов и напряжений ветвей,
узловых напряжений,
контурных токов,
эквивалентного генератора,
наложения.
2. Число линейно-независимых уравнений, составленных по методам узловых напряжений и контурных токов.
3. Особенности составления узловых уравнений при наличии источников напряжения и контурных уравнений при наличии источников тока.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

6.34р. Для резистивной (рис. 6.14, а) и RLC -цепей (рис. 6.14, б) составить уравнения по методу узловых напряжений (контурных токов). Считая, что RLC -цепь находится в режиме гармонических колебаний, проследить за аналогиями между уравнениями.

6.35. Для комплексных токов и напряжений составить узловые уравнения цепей, схемы которых изображены на рис. 6.15 и 6.16, а, б.

6.36. Для комплексных токов и напряжений составить контурные уравнения цепей, схемы которых изображены на рис. 6.15 и 6.16, а, б.

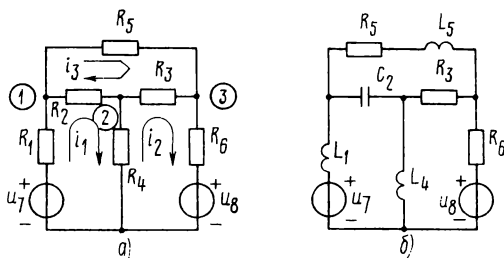


Рис. 6.14

6.37*. Используя особенности составления узловых (контурных) уравнений при наличии в цепи соответственно источников напряжений (тока), составить для комплексных токов и напряжений узловые (контурные) уравнения цепей, схемы которых изображены на рис. 2.5, *a... в*.

6.38. Методом узловых напряжений (контурных токов) рассчитать напряжения и токи ветвей цепи, схема которой изображена на рис. 6.15, если $Z_1 = Z_2 = (50 + j30)$ Ом, $Z_3 = 100$ Ом, $\dot{U} = 100$ В, $\dot{U}_2 = 100e^{j\frac{\pi}{6}}$ В.

6.39. Для цепи, схема которой изображена на рис. 6.16, *a*, рассчитать токи ветвей и напряжения узлов относительно базисного узла, обозначенного на рисунке цифрой «0». Задачу решить методом узловых напряжений (контурных токов). Параметры элементов имеют следующие значения: $R_1 = R_2 = R_4 = 1/\omega C = 100$ Ом, $R_3 = 25$ Ом, $\dot{U}_1 = 25$ В, $\dot{U}_2 = 20$ В.

6.40. Решить задачу 6.39 для цепи со схемой рис. 6.16, *б*, при следующих значениях параметров элементов: $R_2 = 50$ Ом, $R_3 = R_4 = 1/\omega C = 100$ Ом, $R_5 = 20$ Ом, $\dot{U}_1 = 50$ В, $\dot{U}_2 = 20$ В.

6.41р. Рассчитать гармонические напряжения u_n и ток i_n на выходе цепи, содержащей ОУ, схема которой показана на рис. 6.17. Параметры элементов имеют следующие значения: $R_1 = 10$ кОм, $R_2 = 20$ кОм, $C = 1000$ пФ, $R_n = 2$ кОм, $\mu \rightarrow \infty$, $u_0 = 10\sqrt{2} \cos(5 \times 10^4 t - \pi/4)$ В.

6.42. Для цепей со схемами рис. 6.18, *a ... в* найти отношения комплексных напряжений \dot{U}_n/\dot{U}_0 при конечном значении параметра μ и при $\mu \rightarrow \infty$.

6.43. В табл. П4.1...П4.3 приведены схемы четырехполюсников, содержащие операционные усилители. Подключив ко входу цепи источник гармонического напряжения или тока, составить узловые (контурные) уравнения для комплексных напряжений и токов.

6.44р. Рассчитать напряжение $u_n(t)$ на выходе четырехполюсника, схема которого показана на рис. 6.17, если к его входу подключен источник гармонического напряжения $u_0 = 10\sqrt{2} \times \cos(10^7 t - \pi/4)$ В, а параметры RC -элементов и ОУ имеют следующие

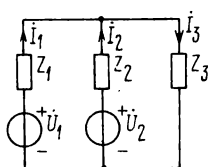


Рис. 6.15

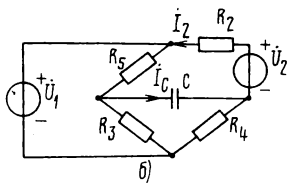
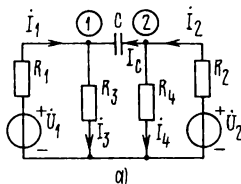


Рис. 6.16

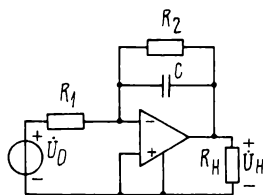


Рис. 6.17

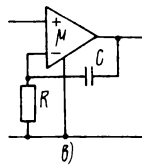
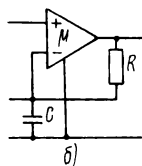
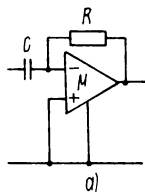


Рис. 6.18

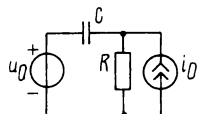


Рис. 6.19

шие значения: $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $C = 1000 \text{ пФ}$, $R_H = 1 \text{ кОм}$, $R_{вх} = 10 \text{ кОм}$, $R_{вых} = 1 \text{ кОм}$, $\mu = 100$. Решить задачу при $\mu \rightarrow \infty$.

6.45*. Используя исходные данные и результаты решения задачи 6.44, найти, при каком значении μ действующее значение U_H на резисторе R_H будет отличаться не более чем на 1% от действующего значения напряжения на том же резисторе, но при $\mu \rightarrow \infty$. Что можно сказать о степени зависимости напряжения U_H от параметра μ ?

6.46*. Методом эквивалентного генератора в общем виде найти комплексные токи и напряжения пассивных элементов цепей со схемами, изображенными на рис. 2,5, а, б.

6.47. Методом эквивалентного генератора найти ток в ветви с сопротивлением Z_2 (рис. 6.15), используя исходные данные задачи 6.38.

6.48. Методом эквивалентного генератора найти ток в емкости для цепей, схемы которых изображены на рис. 6.16, а и б. Параметры элементов даны соответственно в задачах 6.38 и 6.40.

6.49. При каком значении параметра резистивного сопротивления R_5 ток в емкости будет равным нулю (рис. 6.16, б), если параметры остальных элементов такие же, как и в задаче 6.40?

6.50. Решить задачу 6.38 методом наложения.

6.51. В цепи, схема которой приведена на рис. 6.19, источник тока предназначен для компенсации гармонического напряжения, создаваемого на резисторе с сопротивлением R источником напряжения $u_0 = U_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$. Чему должен равняться задающий ток $i_0(t)$ источника?

6.3. РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ С ИНДУКТИВНЫМИ СВЯЗЯМИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Уравнения, устанавливающие связь между напряжениями и токами двух связанных индуктивностей во временной и комплексной формах; согласный и встречный выбор положительных направлений направлений токов.
2. Взаимная индуктивность, коэффициент связи, пределы изменения коэффициента связи и взаимной индуктивности.
3. Схемы замещения связанных индуктивностей.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

6.52р. Найти напряжения и токи в цепи, схема которой изображена на рис. 6.20.

6.53. Найти эквивалентную индуктивность двух последовательно включенных связанных индуктивностей (рис. 6.21).

6.54*. В цепи со схемой рис. 6.20 связанные индуктивности заменить с помощью ИНУТ схемой замещения и составить уравнения по методу контурных токов. Сравнить полученный результат с ответом задачи 6.52.

6.55. К цепи со схемой рис. 6.22 приложено напряжение $\dot{U} = 10$ В. Вычислить ток и напряжения между точками a и b , если $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $\omega L_1 = 4$ Ом, $\omega L_2 = 2$ Ом, $\omega M = 2$ Ом, $1/\omega C = 4$ Ом.

6.56*. Действующее значение напряжения и тока частоты $f = 50$ кГц в цепи со схемой рис. 6.22 равны 88 мВ и 2,2 мА. Чему равна емкость C , если $R_1 = 9,5$ Ом, $\omega L_1 = 14,6$ Ом, $R_2 = 11,6$ Ом, $\omega L_2 = 17$ Ом, $\omega M = 3,2$ Ом?

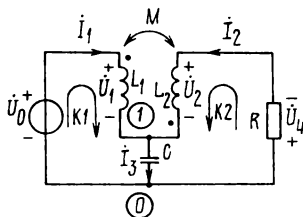


Рис. 6.20

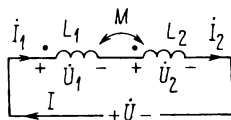


Рис. 6.21

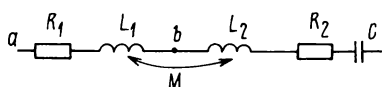


Рис. 6.22

6.4. СРЕДНЯЯ (АКТИВНАЯ), РЕАКТИВНАЯ, ПОЛНАЯ И КОМПЛЕКСНАЯ МОЩНОСТИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Мгновенная мощность; средняя мощность при гармоническом воздействии.
2. Полная и комплексная мощности.
3. Формулы вычисления мощности, единицы мощности.
4. Баланс мощности в комплексной форме.
5. Условие передачи от генератора в нагрузку максимальной мощности, коэффициент полезного действия генератора.
6. Согласованная нагрузка.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

6.57р. Цепь состоит из последовательного соединения резистивного и индуктивного элементов $R=10$ Ом и $L=0,05$ Гн. Цепь подключена к источнику гармонических колебаний с действующим напряжением $U=120$ В и частотой $f=50$ Гц. Вычислить среднюю, реактивную, полную и комплексную мощности.

6.58. К последовательно соединенным резистивному ($R=1$ кОм) и емкостному ($C=3,18$ мкФ) элементам подведено напряжение $u=311 \cos 314t$ В. Вычислить все виды мощностей.

6.59*. Путем измерений установлено, что при гармоническом воздействии с частотой $f=50$ Гц действующие значения тока в катушке индуктивности равно 5 А, напряжения 65 В, а средняя мощность 128 Вт. Вычислить параметры резистивного и индуктивного элементов при последовательной схеме замещения катушки.

6.60. По показаниям трех вольтметров, включенных в цепь (рис. 6.23), найти среднюю мощность, расходуемую в резисторе с сопротивлением R , если $R_1=20$ Ом, а показания вольтметров: $U=120$ В, $U_1=80$ В, $U_2=60$ В соответствуют действующему значению напряжения.

6.61. Генератор с внутренним сопротивлением R_0+jX_0 нагружен на резистор с сопротивлением $R-jX_0$. Рассчитать и изобразить на графике зависимость активной мощности, выделяемой в резисторе R и КПД генератора при изменении R от 0 до ∞ .

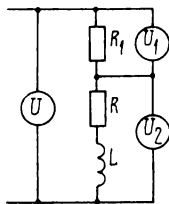


Рис. 6.23

6.62. Известны напряжения холостого хода $u_x = 1,2 \cos(10^6 t + \pi/3)$ В и ток короткого замыкания $i_k = 0,6 \cdot 10^{-3} \cos(10^6 t + \pi/6)$ А генератора. Чему равна максимальная активная мощность, которую способен развить этот генератор? Чему равно соответствующее такой мощности сопротивление нагрузки?

6.63*. Генератор промышленной частоты $f = 50$ Гц с внутренним сопротивлением $R_r = 10$ Ом и действующим напряжением холостого хода $U = 220$ В работает на нагрузку с индуктивным характером сопротивления $Z = 20 + j100$ Ом. Чему равен $\cos \varphi$ и КПД генератора? Конденсатор какой емкости необходимо подключить параллельно нагрузке, чтобы $\cos \varphi$ равнялся бы единице? На сколько уменьшится суточное потребление энергии при повышении до единицы $\cos \varphi$?

6.64*. Генератор промышленной частоты $f = 50$ Гц с внутренним сопротивлением $R_r = 10$ Ом работает на переменную нагрузку. Подсчитано, что в общей сложности генератор работает на нагрузку $Z_1 = 20 + j100$ Ом в течение 10 ч, а на нагрузку $Z_2 = 20 + j20$ Ом в течение 14 ч. Конденсатор какой емкости следует подключить к нагрузке, чтобы суточное потребление энергии было минимальным?

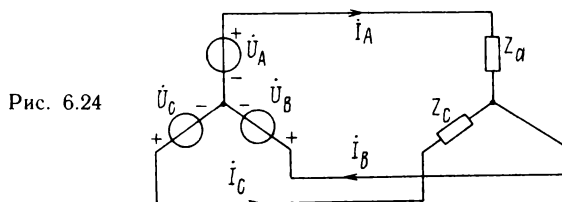
6.5. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Фазные напряжения трехфазной системы, графики их мгновенных значений и векторные диаграммы.
2. Способы соединения обмоток генератора, соотношения между линейными и фазными напряжениями.
3. Напряжения, токи и средняя мощность при соединении обмоток генератора и сопротивлений нагрузки «звездой».
4. Напряжения и токи при соединении обмоток генератора «звездой», а сопротивлений нагрузок — «треугольником».
5. Техническая эффективность трехфазных систем передачи энергии.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

6.65. Обмотки генератора и сопротивления нагрузок соединены «звездой» без нейтрального провода. Определить токи и потреб-



ляемую мощность, если нагрузка является симметричной $Z_a = Z_b = Z_c = 20e^{-j\pi/3}$ Ом, а линейное напряжение $U_L = 100\sqrt{3}$ В.

6.66р. Решить задачу 6.65 при коротком замыкании фазы «В» ($Z_b = 0$) (рис. 6.24).

6.67. Решить задачу 6.65 при условии, что фаза «В» оборвана.

6.68*. В трехфазной цепи, соединенной «звездой», $Z_a = 10e^{j\pi/6}$ Ом, $Z_b = j10$ Ом, $Z_c = -j10$ Ом, $U_L = 100\sqrt{3}$ В. Определить токи цепи и потребляемую мощность при: а) включенном и б) выключенном нейтральном проводе.

6.69*. Решить задачу 6.68 для двух режимов: 1) обрыв фазы «С» при включенном и отключенном нейтральном проводе; 2) короткое замыкание фазы «В» при отсутствии нейтрального провода.

6.70. В трехфазной цепи, соединенной треугольником, $U_L = 100\sqrt{3}$ В, $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_\phi = 20e^{j\pi/6}$ Ом. Определить линейные и фазные токи и потребляемую мощность.

6.6. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 6.1. Методы анализа цепей при гармоническом воздействии.

Для схемы, полученной при выполнении индивидуального задания гл. 2 (задание 2.1), составить узловые и контурные уравнения.

Задание 6.2. Метод комплексных амплитуд.

Вариант А. В соответствии с кодом (табл. 6.5) нарисуйте схему двухполюсника (рис. 6.25) с соответствующими элементами. Первая, вторая и третья цифры кода указывают соответственно номера двухполюсников Z_1 , Z_2 и Z_3 (табл. 6.6). Четвертая цифра кода указывает заданную функцию времени из четырех возможных (табл. 6.7).

Заданная функция имеет вид

$$f(t) = (m+n)\sqrt{2}\cos[(m+n)10^6t + 2(-1)^n\pi m/n],$$

а параметры элементов

$$L = \frac{n}{m+n} \text{ мкГн}, \quad C = \frac{1}{2n(m+n)}, \text{ мкФ}, \quad R = 2n, \text{ Ом}.$$

Необходимо:

1. Рассчитать эквивалентное комплексное сопротивление двухполюсника.

2. Найти три неизвестные функции времени.

3. Рассчитать полную среднюю и реактивную мощности, потребляемые всей цепью.

Вариант Б. Нарисовать схему, граф которой изображен на рис. 6.26, в соответствии с кодовым числом (табл. 6.8). Первая

Таблица 6.5

Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код
1	1 2 3 1	7	6 3 4 3	13	3 2 6 2	19	1 1 7 3	25	6 7 4 1
2	3 1 2 2	8	8 2 4 4	14	5 8 9 1	20	7 1 2 4	26	8 7 4 4
3	2 3 1 3	9	1 7 1 1	15	2 0 1 4	21	1 7 3 4	27	2 0 4 1
4	1 1 7 4	10	6 7 4 2	16	1 2 3 3	22	6 3 4 2	28	3 2 6 3
5	7 1 2 1	11	8 7 4 3	17	3 1 2 1	23	8 2 4 3	29	5 8 9 4
6	1 7 3 2	12	2 0 4 4	18	2 3 1 2	24	1 7 1 3	30	2 0 1 2

Таблица 6.6

Номер двухполюсника	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Схема двухполюсника	R	L	C	κ	x	R, L	L, C	R, C	L, C	R, C
						Последовательно			Параллельно	

Таблица 6.7

Функция $f(t)$	$u(t)$, В	$i_1(t)$, мА	$i_2(t)$, мА	$i_3(t)$, мА
Четвертая цифра кода	1	2	3	4

цифра кода указывает номер ветви с независимым источником гармонического напряжения или тока, вторая — номер ветви с индуктивностью, третья — номер ветви с емкостью.

В оставшихся ветвях включены резисторы с одинаковыми сопротивлениями. Если n — четное, то в цепи включен источник напряжения, если n — нечетное, то источник тока.

Параметры элементов цепи определяются из соотношений:

$$R = \omega L = 1/\omega C = m + n, \text{ Ом}$$

$$u_0(t) = 10\sqrt{2}(m+n) \cos(\omega t + \pi/2), \text{ В,}$$

$$i_0(t) = n\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/2), \text{ мА.}$$

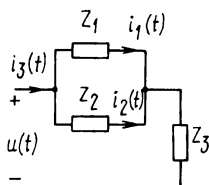


Рис. 6.25

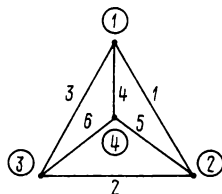


Рис. 6.26

Таблица 6.8

Вариант	I	II	III	IV	V	VI
1	123	213	312	412	512	612
2	124	214	314	413	513	613
3	125	215	315	415	514	614
4	126	216	316	416	516	615
5	132	231	321	421	521	621
6	134	234	324	423	523	623
7	135	235	325	425	524	624
8	136	236	326	426	526	625
9	142	241	341	431	531	631
10	143	243	342	432	532	632
11	145	245	345	435	534	634
12	146	246	346	436	536	635
13	152	251	351	451	541	641
14	153	253	352	452	542	642
15	154	254	354	453	543	643
16	156	256	356	456	546	645
17	162	261	361	461	561	651
18	163	263	362	462	562	652
19	164	264	364	463	563	653
20	165	265	365	465	564	654

Необходимо:

1. Рассчитать токи ветвей. При расчете использовать систему либо контурных, либо узловых уравнений.
2. Проверить баланс средней мощности.
3. С помощью метода эквивалентного генератора определить ток в ветви с индуктивностью либо емкостью.
4. Определить на основе предыдущего расчета эквивалентное комплексное сопротивление пассивной части цепи, подключенной к источнику.

Решения.

6.12. Так как $\varphi_z = \pi/6 > 0$, то сопротивление носит индуктивный характер. Представим комплексное число Z в алгебраической форме $Z = 100e^{j\pi/6} = 100 \cos \frac{\pi}{6} + j100 \sin \frac{\pi}{6} = 50\sqrt{3} + j50$ Ом. Отсюда следует, что активная составляющая $R_1 = 50\sqrt{3} = 86,5$ Ом, а реактивная $X = \omega L_1 = 50$ Ом. Значение индуктивности

$$L_1 = X/\omega = 50 \cdot 10^{-3} = 0,05 \text{ Гн.}$$

Таким образом, одна из возможных схем двухполюсника представляет собой последовательное соединение резистора $R_1 = 86,5$ Ом и индуктивности $L_1 = 0,05$ Гн.

Легко построить еще одну схему двухполюсника, обладающего заданным сопротивлением. Для этого найдем его комплексную проводимость

$$Y = 1/Z = 0,01e^{-j\frac{\pi}{6}} = 0,01\cos(\pi/6) - j0,01 \times \\ \times \sin(\pi/6) = 0,005\sqrt{3} - j0,005 \text{ См.}$$

Активная составляющая проводимости $G = 0,005\sqrt{3} = 0,00865 \text{ См}$, а реактивная составляющая $B = -1/\omega L_2 = -0,005 \text{ См}$. Отсюда, $L_2 = \frac{1}{\omega B} = \frac{1}{10^3 \cdot 0,005} = 0,2 \text{ Гн}$.

Таким образом, вторая простейшая схема двухполюсника представляет собой параллельные соединения резистора с проводимостью $G_2 = 0,00865 \text{ См}$ ($R_2 = 1/G_2 = 115,3 \text{ Ом}$) и индуктивностью $L_2 = 0,2 \text{ Гн}$.

Внимание! Полученные схемы двухполюсников эквивалентны (т. е. имеют одно и то же сопротивление или проводимость) *только на одной частоте*. При изменении частоты эквивалентность нарушается.

Рассмотрим теперь двухполюсник с проводимостью $Y = 0,1e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ См}$. Аргумент заданной комплексной проводимости $\varphi_y = \pi/3 > 0$, поэтому характер двухполюсника емкостной. Представим проводимость в алгебраической форме

$$Y = 0,1e^{j\frac{\pi}{3}} = 0,1\cos(\pi/3) + j0,1\sin(\pi/3) = 0,05 + \\ + j0,05\sqrt{3} \text{ См.}$$

Активная проводимость $G = 0,05 \text{ См}$ ($R_1 = 20 \text{ Ом}$), а реактивная $B = \omega C = 0,05\sqrt{3} = 0,0865 \text{ См}$. Отсюда $C_1 = \frac{0,0865}{\omega} = 86,5 \text{ мкФ}$. Таким образом, простейший двухполюсник, обладающий заданной проводимостью, представляет собой параллельное соединение резистора R_1 с сопротивлением 20 Ом и емкости C_1 равной 86,5 мкФ. Рассмотрев сопротивление $Z = 1/Y$, получим вторую простейшую схему двухполюсника.

6.14. Применим символический метод. Комплексное действующее значение гармонического колебания $u_0(t)$ равно $(6/\sqrt{2})e^{j\frac{\pi}{4}}$. Зададимся положительными направлениями напряжений и токов, как показано на рис. 6.1. Поскольку схема содержит только один источник, а элементы образуют последовательно-параллельное соединение, то для расчета цепи достаточно применить метод свертывания. Сопротивление двухполюсника относительно зажимов подсоединения источника выражается формулой

$$Z = R_1 + jR_2\omega L_2 / (R_2 + j\omega L_2).$$

По закону Ома $I_1 = \dot{U}/Z$, а $U_1 = R_1 \dot{I}_1$. Пользуясь правилом чужого сопротивления, определим токи \dot{I}_2 и \dot{I}_3 :

$$\dot{I}_2 = I_1 j\omega L_2 / (R_2 + j\omega L_2); \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_1 R_2 / (R_2 + j\omega L_2).$$

Оставшиеся неизвестные напряжения определим по закону Ома:

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_2, \quad \dot{U}_3 = j\omega L_2 \dot{I}_3.$$

Выполним вычисления: $\omega L_2 = 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2000 \text{ Ом}$,

$$\begin{aligned} Z &= R_1 + R_2 j\omega L_2 / (R_2 + j\omega L_2) = 1000 + \\ &+ j2000 \cdot 2000 / (2000 + j2000) = 1000 + \frac{j}{1+j} \\ &+ j2000 / (1+j) = 1000 + (2000/\sqrt{2}) e^{j\frac{\pi}{4}} = 2000 + \\ &+ j1000 = 10^3 \sqrt{5} e^{j0.464} \text{ Ом}, \end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_0 / Z = 1,9 \cdot 10^{-3} e^{j0.321} \text{ А},$$

$$\dot{U}_1 = R_1 \cdot \dot{I}_1 = 1,9 e^{j0.321} \text{ В},$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 j\omega L / (R_2 + j\omega L) = 1,34 \cdot 10^{-3} e^{j1.11} \text{ А},$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 R_2 / (R_2 + j\omega L) = 1,34 \cdot 10^{-3} e^{-j0.464} \text{ А},$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_2 = 2,68 e^{j1.11} \text{ В},$$

$$\dot{U}_3 = j\omega L \dot{I}_3 = 2,68 e^{j1.11} \text{ В}.$$

Выполним проверку правильности решения, составив уравнения по законам Кирхгофа. Для первого узла ЗТК имеет вид:

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0.$$

Подставив значения токов, получим

$$\begin{aligned} &-1,9 \cdot 10^{-3} e^{j0.321} + 1,34 \cdot 10^{-3} e^{j1.11} + 1,34 \cdot 10^{-3} e^{-j0.464} = \\ &= (-1,8 - j0,6 + 0,6 + j1,2 + 1,2 - j0,6) \cdot 10^{-3} = 0. \end{aligned}$$

Подставив значения напряжений в уравнение ЗНК $-\dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0$, получим

$$\begin{aligned} &-\frac{6}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} + 1,9 e^{j0.321} + 2,68 e^{j1.11} = -3 - j3 + 1,8 + \\ &+ j0,6 + 1,2 + j2,4 = 0. \end{aligned}$$

Зная комплексные значения напряжений и токов, запишем их выражения как функции времени:

$$i_1(t) = 1,9 \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos(\omega t + 0,321), \text{ А},$$

$$i_2(t) = 1,34 \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos(\omega t + 1,11), \text{ А},$$

$$i_3(t) = 1,34 \sqrt{2} \cdot 10^{-3} \cos(\omega t - 0,464), \text{ А},$$

$$u_1(t) = 1,9 \sqrt{2} \cos(\omega t + 0,321), \text{ В},$$

$$u_2(t) = u_3(t) = 2,68 \sqrt{2} \cos(\omega t + 1,11), \text{ В}.$$

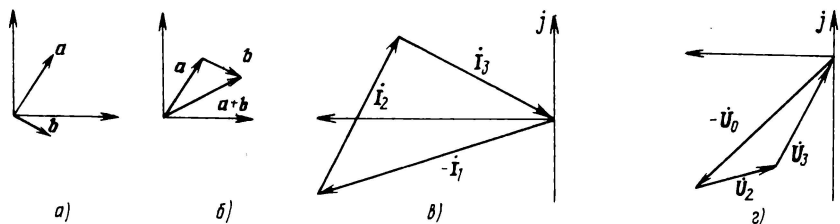


Рис. 6.27

При построении векторных диаграмм используется правило сложения векторов. Например, необходимо сложить векторы a и b (рис. 6.27, а). С конца вектора a путем параллельного переноса строим вектор b . Вектор $a+b$ получим, если проведем вектор из начала координат к концу вектора b (рис. 6.27, б). Пользуясь этим правилом, найдем сумму трех векторов $-I_1 + I_2 + I_3$. Построение диаграммы можно начинать с любого вектора. В данном случае вначале строим $-I_1$, затем с его конца строим вектор I_2 и, наконец, с конца I_2 строим вектор I_3 . Как и следовало ожидать, конец вектора I_3 совпадает с началом первого вектора, так как сумма токов в узле равна нулю. Векторная диаграмма токов показана на рис. 6.27, в. Аналогично строим векторную диаграмму напряжений (рис. 6.27, г). Заметим, что, по существу, векторные диаграммы токов и напряжений являются графическим изображением законов Кирхгофа.

6.34. В §3.3 подробно проиллюстрирован порядок составления уравнений по методам узловых напряжений и контурных токов резистивных цепей, поэтому запишем эти уравнения для резистивной цепи схемы (рис. 6.14, а) без дополнительных пояснений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) u_1 - \frac{1}{R_2} u_2 - \frac{1}{R_5} u_3 &= \frac{u_7}{R_1}, \\ -\frac{1}{R_2} u_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_2 - \frac{1}{R_3} u_3 &= 0, \\ -\frac{1}{R_5} u_1 - \frac{1}{R_3} u_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) u_3 &= \frac{u_8}{R_6}. \end{aligned}$$

Выбрав в качестве контуров ячейки, запишем уравнения по методу контурных токов:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4) i_1 - R_4 i_2 - R_2 i_3 &= u_7, \\ -R_4 i_1 + (R_3 + R_4 + R_6) i_2 - R_3 i_3 &= -u_8, \\ -R_2 i_1 + R_3 i_2 + (R_2 + R_3 + R_5) i_3 &= 0. \end{aligned}$$

Для записи узловых и контурных уравнений RLC -цепи (схема рис. 6.14, б) воспользуемся символическим методом. Для этого заменим гармонические задающие напряжения u_7 и u_8 их симво-

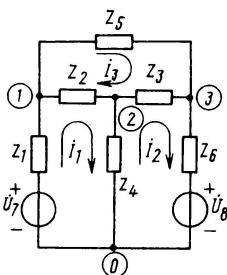


Рис. 6.28

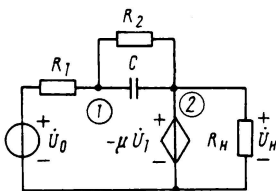


Рис. 6.29

лическими изображениями \dot{U}_7 и \dot{U}_8 . Комплексные сопротивления ветвей таковы:

$$Z_1 = j\omega L_1, \quad Z_2 = 1/j\omega C_2, \quad Z_3 = R_3, \quad Z_4 = j\omega L_4, \\ Z_5 = R_5 + j\omega L_5, \quad Z_6 = R_6.$$

С учетом данных обозначений перерисуем схему цепи так, как показано на рис. 6.28. Как видим, схемы рис. 6.14, а и 6.28 совпадают с точностью до обозначений. Поэтому уравнения состояния цепи, составленные для RLC -цепей при гармонических воздействиях, получаются из уравнений резистивных цепей, если произвести замену R_i на Z_i , $u(t)$ на U и $i(t)$ на I . В рассматриваемом примере узловые уравнения имеют вид:

$$\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_5}\right)\dot{U}_1 - \frac{1}{Z_2}\dot{U}_2 - \frac{1}{Z_5}\dot{U}_3 = \frac{\dot{U}_7}{Z_1}, \\ -\frac{1}{Z_2}\dot{U}_1 + \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}\right)\dot{U}_2 - \frac{1}{Z_3}\dot{U}_3 = 0, \\ -\frac{1}{Z_5}\dot{U}_1 - \frac{1}{Z_3}\dot{U}_2 + \left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6}\right)\dot{U}_3 = \frac{\dot{U}_8}{Z_6}.$$

Контурные уравнения записываются следующим образом:

$$(Z_1 + Z_2 + Z_4)\dot{I}_1 - Z_4\dot{I}_2 - Z_2\dot{I}_3 = \dot{U}_7, \\ -Z_4\dot{I}_1 + (Z_3 + Z_4 + Z_6)\dot{I}_2 - Z_3\dot{I}_3 = -\dot{U}_8, \\ -Z_2\dot{I}_1 - Z_3\dot{I}_2 + (Z_2 + Z_3 + Z_5)\dot{I}_3 = 0.$$

Как видим, существует полная аналогия между уравнениями и правилами их составления для резистивных и RLC -цепей, если для последних использовать символический метод.

6.41. Законы Ома и Кирхгофа справедливы для комплексных токов и напряжений, поэтому анализ RLC -цепей символическим методом выполняется по тому же алгоритму, что и анализ резистивных цепей. Прежде всего перерисуем схему заданной цепи с учетом замены ОУ зависимым источником, а гармонические колебания напряжений и токов заменим их комплексными действующи-

ми значениями (рис. 6.29). Обозначив на схеме узлы и учтя, что $U_2 = -\mu U_1$, запишем узловое управление:

$$Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\mu\dot{U}_1 = \dot{U}_0/R_1, \text{ где } Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C;$$

$$Y_{12} = \frac{1}{R_2} + j\omega C; \dot{U}_0 = 10e^{-j\pi/4}.$$

Решим данное уравнение относительно напряжения первого узла:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_0/R_1(Y_{11} + \mu Y_{12}).$$

Напряжение на резисторе R_n равно задающему напряжению зависимого источника (см. рис. 6.29) и выражается формулой

$$\dot{U}_n = \dot{U}_2 = -\mu\dot{U}_0/R_1(Y_{11} + \mu Y_{12}).$$

По условию задачи $\mu \rightarrow \infty$. Раскрыв неопределенность типа ∞/∞ , получим

$$\dot{U}_n = \dot{U}_2 = -\dot{U}_0/R_1 Y_{12}.$$

В последнюю формулу подставим численные значения параметров элементов и выполним вычисления: $\dot{U}_n = \dot{U}_2 = -\dot{U}_0/R_1\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) =$
 $= (100/\sqrt{2})e^{j\frac{\pi}{4}}$ В. Комплексное действующее значение тока резистора R_n рассчитываем по закону Ома $\dot{I}_n = \dot{U}_n/R_n = (50/\sqrt{2})e^{j\pi/4}$, мА. Временные зависимости искомых величин имеют вид:

$$u_n(t) = 100 \cos(5 \cdot 10^4 t + \pi/4) \text{ В},$$

$$i_n(t) = 50 \cos(5 \cdot 10^4 t + \pi/4) \text{ мА}.$$

6.44. Рассматриваемая задача отличается от задачи 6.41 принципиально тем, что в ОУ учитываются входное и выходное сопротивления. На рис. 6.30 приведена схема замещения исследуемой цепи с учетом данных сопротивлений. Система узловых уравнений имеет вид:

$$Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 = \dot{U}_0/R_1,$$

$$(-Y_{21} + \mu/R_{\text{вых}})\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = 0.$$

где $Y_{11} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_{\text{вх}} + j\omega C$,

$Y_{12} = 1/R_2 + 1/R_{\text{вых}} + 1/R_4 + j\omega C$, $Y_{12} = 1/R_2 + j\omega C$.

Решение данной системы относительно \dot{U}_2 имеет вид:

$$U_2 = \frac{-\dot{U}_0(\mu/R_{\text{вых}} - Y_{21})}{R_1[Y_{11}Y_{22} - Y_{12}(Y_{21} - \mu/R_{\text{вых}})]}. \quad (6.1)$$

Подставив численные значения параметров элементов и выполнив вычисления, найдем $U_2 = 0,621 e^{j1,46}$ В. При $\mu \rightarrow \infty$ формула (6.1) примет вид:

$$\dot{U}_2 \approx \frac{\dot{U}_0}{R_1(1/R_2 + j\omega C)} = 0,707 e^{j1,57} \text{ В}.$$

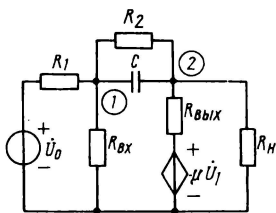


Рис. 6.30

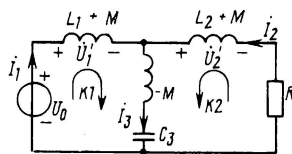


Рис. 6.31

Сравнивая результаты решения задачи при разных μ , видим, что при достаточно большом μ значение U_2 , не зависит ни от μ , ни от паразитных параметров ОУ — входного и выходного сопротивлений.

6.52. Первый способ. Одним из универсальных способов решения задачи анализа при наличии связанных индуктивностей заключается в применении законов Кирхгофа, которые записываются обычным образом, а затем все напряжения заменяются уравнениями ветвей. В данном случае необходимо записать одно уравнение для узла 1 по первому закону и два уравнения для контуров К1 и К2 по второму закону. Эти уравнения имеют вид (см. рис. 6.20):

$$\left. \begin{aligned} -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0, \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_3 &= \dot{U}_0, \\ \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dot{U}_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Поскольку положительные направления токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 выбраны встречными, уравнения связанных индуктивностей записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= -j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

К этим формулам добавим уравнения резистивного и емкостного элементов $\dot{U}_4 = R \dot{I}_2$ и $\dot{U}_3 = \dot{I}_3 / j\omega C_3$. Из системы уравнений (6.2) путем подстановки исключим напряжения на пассивных элементах. В результате получим три уравнения с тремя неизвестными токами \dot{I}_1 , \dot{I}_2 и \dot{I}_3 :

$$\left. \begin{aligned} -\dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0, \\ j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 + \dot{I}_3 / j\omega C_3 &= \dot{U}_0, \\ -j\omega M \dot{I}_1 + (R + j\omega L_2) \dot{I}_2 + \dot{I}_3 / j\omega C_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решить данную систему уравнений можно множеством методов и, вообще говоря, несоставляет труда. Здесь поступим следующим образом. Из первого уравнения выразим ток $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ и подставим

его в остальные два уравнения. После приведения подобных членов получим:

$$\left. \begin{aligned} (j\omega L_1 + 1/j\omega C_3)\dot{I}_1 + (1/j\omega C_3 - j\omega M)\dot{I}_2 &= \dot{U}_0, \\ (1/j\omega C_3 - j\omega M)\dot{I}_1 + (R + j\omega L_2 + 1/j\omega C_3)\dot{I}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Для дальнейшего решения используем правило Крамера:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_0 \frac{R + j\omega L_2 + 1/j\omega C_3}{\Delta}, \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_0 \times \frac{j\omega M - 1/j\omega C_3}{\Delta}, \quad \text{где } \Delta = (j\omega L_1 + 1/j\omega C_3)(R + j\omega L_2 + 1/j\omega C_3) - (j\omega M - 1/j\omega C_3)^2.$$

Определение остальных неизвестных \dot{I}_3 , \dot{U}_1 , \dot{U}_2 , \dot{U}_3 и \dot{U}_4 уже не требует решения системы уравнений, а достигается путем соответствующих подстановок токов \dot{I}_1 и \dot{I}_2 .

Второй способ. Заменим связанные индуктивности Т-образной схемой замещения, как показано на рис. 6.31. Обратите внимание, как выбраны знаки элементов схемы замещения. В исходной схеме связанные индуктивности соединены зажимами, один из которых обозначен точкой, а второй нет. Это значит, что в элементах схемы замещения $L_1 \mp M$, $L_2 \mp M$, $\pm M$ выбираются нижние знаки.

По методу токов ветвей имеем:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0, \\ j\omega(L_1 + M)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_3 + \dot{I}_3/j\omega C_3 &= \dot{U}_0, \\ j\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 + (1/j\omega C_3 - j\omega M)\dot{I}_3 + R\dot{I}_2 &= 0. \end{aligned}$$

С помощью первого уравнения исключим ток \dot{I}_3 из оставшихся двух. После приведения подобных членов, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (j\omega L_1 + 1/j\omega C_3)\dot{I}_1 + (1/j\omega C_3 - j\omega M)\dot{I}_2 &= \dot{U}_0, \\ (1/j\omega C_3 - j\omega M)\dot{I}_1 + (R + j\omega L_2 + 1/j\omega C_3)\dot{I}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, данная система совпадает с уравнением (6.4).

6.53. Согласно второму закону Кирхгофа имеем одно уравнение (см. рис. 6.21):

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U}_0. \quad (6.5)$$

Уравнения связанных индуктивностей приведены под номером (6.3). Напомним, что верхний знак относится к согласному включению индуктивностей, а нижний — к встречному. В данном случае $\dot{I} = \dot{I}_1 = \dot{I}_2$, а индуктивности включены согласнo. Учтя это обстоятельство и подставив в (6.5) уравнения (6.3), получим

$$j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} = \dot{U}$$

или

$$Z = \dot{U}/\dot{I} = j\omega(L_1 + L_2 + 2M).$$

Таким сопротивлением обладает индуктивность

$$L_{\text{эк}} = L_1 + L_2 + 2M.$$

При последовательном встречном включении связанных индуктивностей, эквивалентная индуктивность будет определяться по формуле

$$L_{\text{эк}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

Таким образом, при согласном включении связанных индуктивностей, эквивалентная индуктивность увеличивается, а при встречном — уменьшается на $2M$. Это обстоятельство используется на практике. Так, бывают случаи, когда необходимо преобразовать неуравновешенные схемы (т. е. не имеющие горизонтальной оси симметрии) в схемы уравновешенные (т. е. имеющие такую ось). Например, схема, изображена на рис. 6.32, а¹, не имеет горизонтальной оси симметрии. Нетрудно показать (попробуйте это сделать самостоятельно), что напряжения и токи на входе и выходе цепи со схемой рис. 6.32, б будут такими же, как и в исходной схеме, однако здесь уже существует горизонтальная ось симметрии. Такое преобразование приводит к увеличению числа элементов. Этого недостатка можно избежать, если применить связанные индуктивности с жесткой связью (коэффициент связи $k=1$) при согласном включении индуктивностей (рис. 6.32, в). При этом каждая из индуктивностей будет в 4 раза меньше исходной.

6.57. Сопротивление заданного двухполюсника вычисляется по формуле

$$Z = R + j\omega L = 10 + j2\pi \cdot 50 \cdot 0,05 = 10 + j15,7 = 18,6 e^{j^1} \text{ Ом.}$$

Действующее значение тока

$$I = U / |Z| = 120 / 18,6 = 6,45 \text{ А.}$$

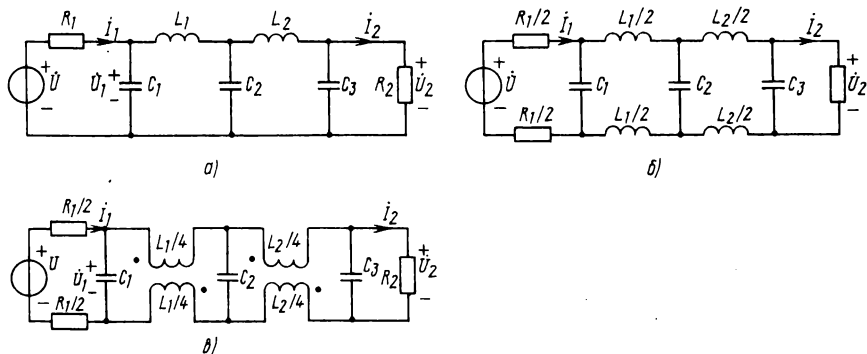


Рис. 6.32

¹ Приведенная схема является полиномиальным фильтром нижних частот пятого порядка.

Мощности вычисляются по формулам:

средняя $P = UI \cos \varphi = I^2 R = 416$ Вт,

реактивная $Q = UI \sin \varphi = I^2 \omega L = 653$ В·А,

полная $S = UI = I^2 |Z| = \sqrt{P^2 + Q^2} = 773$ В·А,

комплексная $S = P + jQ = 416 + j653$.

6.66. Так как по условию задачи $Z_a = 0$ (см. рис. 6.24), то нагрузка Z_a находится под линейным напряжением $\dot{U}_1 = \dot{U}_A - \dot{U}_B$. По закону Ома $\dot{I}_A = \dot{U}_1 / Z_a$. Аналогично находим ток $\dot{I}_C = \dot{U}_2 / Z_c$, где $\dot{U}_2 = \dot{U}_C - \dot{U}_B$ определяем из ЗТК $\dot{I}_B = \dot{I}_A + \dot{I}_C$. Выполним вычисления. Обмотки генератора соединены «звездой», поэтому $U_\phi = U_n / \sqrt{3} = 100$ В. Примем, что $\dot{U}_A = U_\phi$, $\dot{U}_B = U_\phi e^{-j3\pi/2}$, $\dot{U}_C = U_\phi e^{j3\pi/2}$, тогда $\dot{U}_1 = 100\sqrt{3} e^{j\pi/6}$ В, а $U_2 = 100\sqrt{3} e^{j\pi/2}$ В. Зная напряжение, находим токи каждой из нагрузок $\dot{I}_A = 5\sqrt{3}$ А, $\dot{I}_C = 5\sqrt{3} e^{j5\pi/6}$ А, $\dot{I}_B = 15 e^{j2\pi/3}$ А. Средняя мощность $P = 2U_n I_A \cos \varphi_Z = 1500$ Вт.

7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

7.1. АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ И ФАЗО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ОДНИМ РЕАКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) цепи.
2. Факторы, определяющие фундаментальность понятий АЧХ и ФЧХ цепей.
3. Комплексные передаточные функции.
4. Комплексные входные функции.
5. Годографы комплексных функций.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

7.1р. По схеме рис. 7.1 найти комплексную¹ передаточную функцию \dot{U}_2 / \dot{U}_1 (коэффициент передачи по напряжению). Построить графики АЧХ и ФЧХ.

7.2.² Найти выражения для передаточной функции \dot{U}_2 / \dot{U}_1 при холостом ходе на выходе для цепей, схемы которых изображены

¹ Для краткости вместо «комплексная передаточная функция» будем писать «передаточная функция».

² При решении задачи рекомендуется вначале приближенно построить графики АЧХ.

на рис. 7.2, а...г. Построить графики АЧХ и ФЧХ. Назвать схемы, с помощью которых можно подавить колебания высоких частот.

7.3¹. Найти выражения для передаточных функций i_2/i_1 цепей, схемы которых показаны на рис. 7.3, а...г. Построить их АЧХ и ФЧХ. Назвать схемы, которые позволяют подавить колебания высоких частот.

7.4¹. По схемам рис. 7.2, а...г, найти выражения входного сопротивления, его модуля (АЧХ) и угла (ФЧХ). Построить графики АЧХ и ФЧХ.

7.5¹. По схемам рис. 7.3, а...г найти выражения входной проводимости, ее модуля (АЧХ) и угла (ФЧХ). Построить графики АЧХ и ФЧХ.

7.6¹. По схемам рис. 7.4, а...г найти передаточные функции U_2/U_1 и i_2/U_1 , а также их модули (АЧХ) и аргументы (ФЧХ).

7.7*р. Найти возможные схемы простейших электрических цепей с одним реактивным элементом, АЧХ которых соответствует графику рис. 7.5, если $H(0)=0,8$; $H(\infty)=0,2$; $|H(j\omega_1)|=H_1=0,4$; $\omega=10\,000\text{ с}^{-1}$. Рассчитайте параметры элементов этих цепей.

7.8. Решить задачу 7.7 для двух случаев: 1) $H(0)=1$, $1 > H(\infty) > 0$; 2) $1 > H(0)$, $H(\infty)=0$.

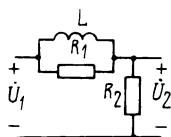


Рис. 7.1

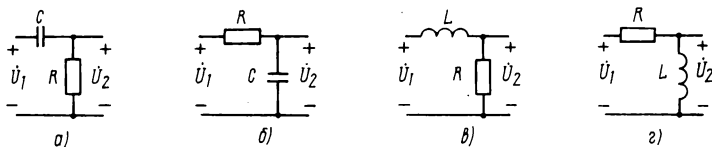


Рис. 7.2

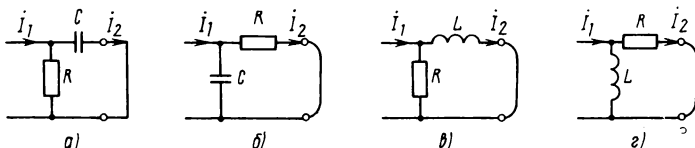


Рис. 7.3

¹ При решении задачи рекомендуется вначале приближенно построить графики АЧХ.

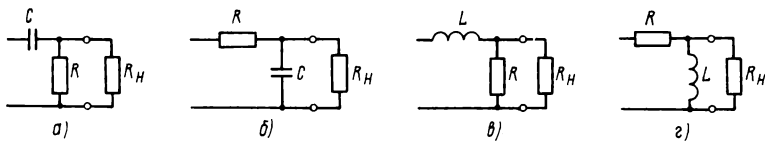


Рис. 7.4

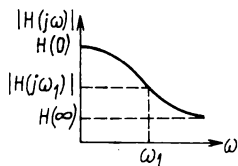


Рис. 7.5

7.9*. Найти возможные схемы простейших электрических цепей с одним реактивным элементом, АЧХ которых представляет собой монотонно возрастающую функцию и при этом $0 \leq H(0) < H(\infty) \leq 1$.

7.10*. Для условий задачи 7.9 определить величины элементов, если $H(\infty)=0,8$; $H(0)=0,2$; $H(\omega_1)=H_1=0,4$; $\omega=10^4 \text{ с}^{-1}$, $R_3=1000 \text{ Ом}$.

7.11. Используя понятие комплексной передаточной функции, на частотах $\omega_k=10\,000k \text{ с}^{-1}$ ($k=1,10$) рассчитать напряжение на выходе четырехполюсников со схемами рис. 7.2 при условии, что напряжение на входе $\dot{U}(k)=2\frac{k+1}{k+2}e^{jk\frac{\pi}{8}}\text{ В}$ и $R=1000 \text{ Ом}$, $C=0,02 \text{ мкФ}$, $L=50 \text{ мГн}$.

7.12. Решить задачу 7.11 для схем рис. 7.3, если в качестве входных и выходных величин рассматривается ток

$$I_1 = 10 \frac{k+1}{k+2} e^{jk\frac{\pi}{8}}, \text{ мА.}$$

7.13. Найти выражения для комплексной передаточной функции \dot{U}_H/\dot{U}_0 , а также входного и выходного сопротивлений цепи со схемой рис. 6.17. Построить примерный график АЧХ и ФЧХ.

7.14. Построить семейства АЧХ и ФЧХ для каждой из цепей со схемами рис. 6.18 при $\mu=5, 10$ и 100 , если $R=10 \text{ кОм}$, $C=1000 \text{ пФ}$, а входное и выходное сопротивления ОУ соответственно равны $R_{вх}=10 \text{ кОм}$, $R_{вых}=1 \text{ кОм}$. Сопротивление R_H в схеме рис. 6.18, а равно ∞ .

Указание. При решении задачи использовать схему замещения ОУ, изображенную на рис. 1.16, а учебника. В качестве комплексной передаточной функции принять коэффициент передачи по напряжению.

7.15. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 7.2, рассчитать и построить графики логарифмической амплитудно-частотной характеристики и характеристики ослабления. Параметры элементов имеют следующие значения: $R=1$ кОм, $C=0,01$ мкФ, $L=0,01$ Гн.

Указание. В качестве АЧХ взять U_2/U_1 , расчет выполнять на частотах $\omega=0; 0,25\omega_c; 0,5\omega_c; 0,75\omega_c; \omega_c; 1,5\omega_c; 2\omega_c; 3\omega_c$, где $\omega_c=1/RC$ для RC -цепи и $\omega_c=R/L$ для RL -цепи.

7.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Условия резонанса напряжения и тока.
2. Резонансная характеристика параллельного контура.
3. Резонансная характеристика последовательного контура.
4. Добротность контура (последовательного, параллельного).
5. Полоса пропускания контура и ее связь с добротностью.
6. Абсолютная и относительная расстройка.
7. Логарифмические частотные характеристики.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

7.16. Параллельный RLC -контур находится в режиме гармонических колебаний; действующее значение тока в общей ветви $I=1$ мА. Чему равна добротность контура, если токи в реактивных элементах при резонансе равны 100 мА?

7.17. Условие задачи 7.16. Чему равны резонансная частота и емкость контура, а также полоса пропускания $\omega_1-\omega_{-1}$ и граничные частоты этой полосы, если $L=1$ мГн, $R=10^4$ Ом?

7.18. Определить емкость C , которую необходимо включить последовательно с индуктивностью $L=158$ мкГн и резистором $R=16$ Ом, для того чтобы цепь была настроена в резонанс на частоте $f_0=1$ МГц. Рассчитать также ток, напряжение на реактивных элементах и выделяемую в цепи среднюю мощность при резонансе, если к цепи подключен источник гармонического напряжения с действующим значением 0,8 В.

7.19. Рассчитать добротность последовательных контуров, если известно, что при резонансе:

а) общее напряжение равно 1 В, а на реактивном элементе — 100 В; б) общее напряжение 0,1 В, ток 100 мА, резонансная частота 5000 с^{-1} и индуктивность 10 мГн; в) общее напряжение 0,1 В, ток 100 мА, индуктивность 0,1 мГн, емкость 10^4 пФ.

7.20*. Цепь состоит из последовательного соединения катушки индуктивности (R, L) и конденсатора C с пренебрежимо малыми потерями. К цепи приложено гармоническое напряжение $U=35$ В. Определить напряжение на катушке при резонансе, если напряже-

ние на конденсаторе равно 120 В. Чему равна добротность контура?

7.21р. Рассчитать элементы параллельного колебательного контура (рис. 7.6) с полосой пропускания $f_1 - f_{-1} = 25$ кГц, средней частотой полосы пропускания (резонансной частотой) $f_0 = 1$ МГц и волновым сопротивлением контура $\rho = \sqrt{L/C} = 75$ Ом.

7.22. Рассчитать добротность и остальные элементы высокодобротного параллельного RLC -контура при: а) последовательной и б) параллельной схемах замещения катушки индуктивности, если резонансная частота $f_0 = 1$ МГц, полоса пропускания $S_A = 20$ кГц и $C = 100$ пФ.

7.23*. Электронная лампа с крутизной $g = 10^{-2}$ А/В нагружена на параллельный RLC -контур (рис. 7.6) с параметрами: $L = 10$ мкГн, $C = 10^3$ пФ, $R = 5000$ Ом. Приняв в качестве комплексной передаточной функции U_2/U_1 , рассчитать АЧХ и ФЧХ четырехполюсника.

Указание. Использовать схему замещения электронной лампы в виде ИТУН (область низких частот). Для расчета применить приближенную формулу. Относительную расстройку принимать равной $\pm 0,0$; $\pm 0,02$; $\pm 0,04$; $\pm 0,06$; $\pm 0,08$.

7.24. Чему равна полоса пропускания контура, если ее установить на уровне $1/\sqrt{1,64}$ от максимального значения АЧХ контура?

7.25. Решить задачу 7.24 для общего случая, когда полоса пропускания устанавливается на уровне $1/n$.

7.26р. Показать, что цепь, схема которой показана на рис. 7.7, может служить резонансным усилителем. При решении задачи принять $\mu \rightarrow \infty$.

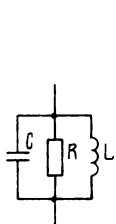


Рис. 7.6

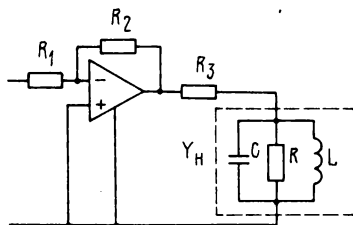


Рис. 7.7

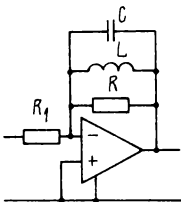


Рис. 7.8

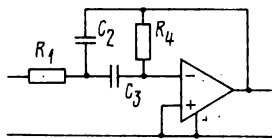


Рис. 7.9

7.27р. Рассчитать элементы усилителя с резонансной характеристикой собранного по схеме рис. 7.7, если полоса пропускания $f_1 - f_{-1} = 50$ кГц, резонансная частота $f_0 = 2$ МГц, волновое сопротивление контура $\rho = 75$ Ом и модуль передаточной функции на частоте f_0 равен единице.

7.28. Показать, что цепь, схема которой показана на рис. 7.8, может являться резонансным усилителем. При решении задачи принять $\mu \rightarrow \infty$.

7.29. Решить задачу 7.27 при условии, что исследуемая схема изображена на рис. 7.8.

7.30р. На рис. 7.9 показана схема цепи, содержащая две емкости, два резистивных сопротивления и ОУ. Показать, что данная цепь может быть резонансным усилителем. При доказательстве предположить, что $\mu \rightarrow \infty$.

7.31*. Показать, что цепи, схемы которых приведены в Приложении 4 (табл. П4.1 номера 2, 3 и 8), являются резонансными усилителями. Коэффициент усиления μ ОУ принять равным бесконечности, а емкости одинаковыми.

7.32. Используя результаты решения задачи 7.30, найти параметры элементов резонансного усилителя схемы рис. 7.9, если полоса пропускания равна 10 кГц, а средняя частота $f_0 = 100$ кГц. *Указание.* При расчетах необходимо задаться параметрами двух элементов, положив, например, $C_2 = C_3 = 1000$ пФ.

7.33*. Используя результаты решения задач 7.31 и 7.32, вывести формулы для расчета параметров RC -элементов цепей, схемы которых приведены в Приложении 4 (табл. П4.1, номера 2, 3 и 8).

7.3*. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ С ТРАНЗИСТОРАМИ И ОПЕРАЦИОННЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Схема замещения биполярных и униполярных транзисторов для области нижних и верхних частот.
2. Схемы замещения цепей с транзисторами для режима малого сигнала.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

7.34. Изобразить схемы замещения цепей (рис. 7.10, а, б) для режима малого сигнала в области низких и высоких частот.

7.35. Пользуясь программой анализа цепей АФЧХ, приведенной в Приложении 1, рассчитать АЧХ и ФЧХ цепи, схема которой показана на рис. 7.10, а, если в качестве передаточной функции принять коэффициент передачи по напряжению. Параметры эле-

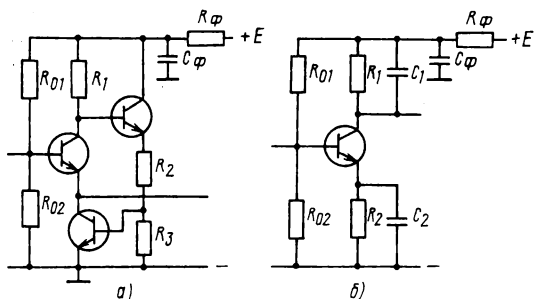


Рис. 7.10

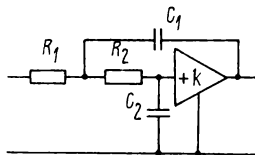


Рис. 7.11

ментов имеют следующие значения: $R_{01}=R_{02}=20$ кОм, $R_1=1,5$ кОм, $R_2=4,5$ кОм, $R_3=100$ Ом. Параметры всех транзисторов одинаковы и равны:

$r'_e=10$ Ом, $R_{б.э}=0,5$ кОм, $C_{б.э}=20$ пФ, $C_{б.к}=100$ пФ, $g=0,1$ А/В (см. табл. 7.1 учебника).

7.36. Решить задачу 7.35 для схемы рис. 7.10, б. Параметры элементов такие же, как и в задаче 7.35, за исключением $R_2=3$ кОм, $C_1=1000$ пФ, $C_2=500$ пФ.

7.37р. По схеме, изображенной на рис. 7.11, найти комплексную передаточную функцию \dot{U}_2/\dot{U}_1 , а также соответствующие АЧХ и ФЧХ. Выполнить исследование АЧХ и ФЧХ.

7.38. По схемам, изображенным в Приложении 4, найти комплексную передаточную функцию \dot{U}_2/\dot{U}_1 , а также соответствующие АЧХ и ФЧХ. Выполнить исследование АЧХ и ФЧХ.

7.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАЗИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ АКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО РАЗБРОСА ПАРАМЕТРОВ ПАССИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим две из множества проблем, требующие для своего решения применения ЭВМ.

Первая проблема связана с тем, что анализ цепей, содержащих ОУ или транзисторы, часто выполняют в два этапа. На первом этапе предполагают, что коэффициент усиления ОУ стремится к бесконечности, а транзисторы заменяют их схемами замещения в области нижних частот (см. табл. 7.1 учебника). Передаточную функцию в этом случае будем обозначать $H_u(j\omega)$. На втором этапе путем выполнения расчетов на ЭВМ учитывают влияние паразитных параметров, прежде всего конечное значение μ , его зависи-

мость от частоты и полную схему замещения транзистора в области верхних частот. Передаточную функцию при этом будем обозначать $H_p(j\omega)$. Влияние паразитных параметров будем оценивать погрешностью модуля (АЧХ) и аргумента (ФЧХ) передаточной функции:

$$\Delta_{|H|} = [|H_n(j\omega)| - |H_p(j\omega)|] / |H_n(j\omega)|, \quad (7.1)$$

$$\Delta_\theta = \Theta_n(\omega) - \Theta_p(\omega); \quad (7.2)$$

Вторая проблема связана с тем, что при практической реализации цепей применяют элементы с конечной точностью значений их параметров, т. е. параметры элементов несколько отличаются от расчетных значений, в связи с чем в процессе производства настраиваются собранные цепи. При применении интегральной технологии настройка чаще всего осуществляется только с помощью резисторов. Подбор новых параметров резисторов также требует применения ЭВМ.

7.39. Необходимо исследовать в зависимости от частоты погрешности (7.1) и (7.2) реализации АЧХ и ФЧХ цепи со схемой рис. 7.10, а. Исследования провести для различных значений g ; остальные параметры элементов такие же, как и в задаче 7.35. Для каждого значения g указать диапазон частоты, где $|\Delta_{|H|}| \leq 1\%$ и $|\Delta_\theta| \leq 1^\circ$.

7.40. Необходимо исследовать частотные зависимости погрешностей реализации АЧХ и ФЧХ цепей, схемы которых показаны на рис. 6.17 и 6.18, если $\mu = \bar{\mu}/(1 + j\omega a)$. Исследование выполнить для различных значений $\bar{\mu}$, a , R_1 , R_2 , R , C , $R_{вх}$, $R_{вых}$, где $R_{вх}$, $R_{вых}$ — входное и выходное сопротивление ОУ. Для каждого набора параметров указать диапазон частот, где $|\Delta_{|H|}| \leq 1\%$ и $|\Delta_\theta| \leq 1^\circ$.

7.41. Усилитель с резонансной характеристикой, собранный по схеме рис. 7.9, при расчетных значениях параметров элементов обладает заданной АЧХ $|H_1(j\omega)|$. Пусть параметры емкостей C_2 и C_3 отличаются от расчетных на некоторые величины ΔC_2 и ΔC_3 . Получаемая при этом АЧХ $|H_2(j\omega)|$ будет отклоняться от $|H_1(j\omega)|$. Составить алгоритм численной минимизации отклонения между данными АЧХ путем изменения параметров R_1 и R_4 .

7.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 7.1. Частотные характеристики электрических цепей.

Вариант А. Исследуемая схема выбирается в соответствии с графом рис. 7.12. Номер графа соответствует номеру группы на потоке. Включенные в схему элементы выбираются в соответствии с n по данным табл. 7.1.

Параметры элементов имеют следующие значения:

$$R_1 = (n + m) \text{ Ом}, R_2 = (n + m) \cdot 10^3, \text{ Ом}, R_3 = n, \text{ Ом}, \\ R_4 = n \cdot 10^4, \text{ Ом}, R_5 = 2(n + m), \text{ Ом}, \\ L = 10 n / m, \text{ мГн}, C = n \cdot m \cdot 10^{-2}, \text{ мкФ}, R_n = (n + m) 10^3, \text{ Ом}.$$

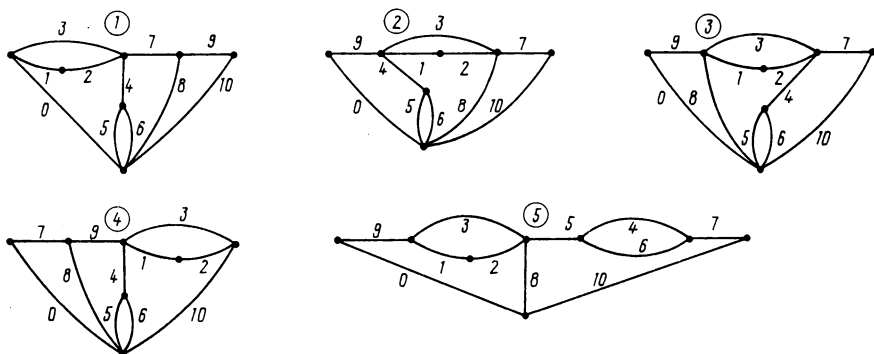


Рис. 7.12

Таблица 7.1

Вариант	Элементы ветвей								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	L	∞	0	R_5	∞	R_1	R_2	R_3
2	L	L	L	0	R_4	∞	R_3	R_4	R_1
3	L	L	∞	R_4	0	∞	R_1	R_2	R_1
4	R_1	L	∞	∞	0	0	R_1	R_4	R_1
5	0	L	R_5	∞	0	0	R_1	R_2	R_3
6	R_3	L	R_5	∞	0	0	R_1	∞	R_3
7	L	0	R_5	∞	0	0	R_3	∞	R_1
8	C	0	∞	0	R_4	∞	R_3	R_2	R_1
9	C	C	C	0	R_2	∞	R_1	R_2	R_3
10	C	C	∞	R_2	0	∞	R_1	R_4	R_3
11	R_1	C	R_5	∞	0	0	R_3	R_2	R_3
12	0	C	R_5	∞	0	0	R_3	R_4	R_1
13	R_3	C	R_5	∞	0	0	R_3	∞	R_1
14	C	0	R_5	∞	0	0	R_1	∞	R_3
15	R_1	0	∞	L	0	0	R_2	R_4	R_1
16	R_1	R_1	R_1	L	L	0	R_3	R_2	R_1
17	R_3	R_1	R_3	L	L	L	R_1	R_2	R_3
18	0	R_1	∞	L	R_1	∞	R_1	∞	R_3
19	0	R_1	R_3	0	L	R_5	R_3	∞	R_1
20	0	R_3	∞	R_1	R_5	L	R_1	∞	R_3
21	R_1	R_3	∞	R_1	L	∞	0	R_4	0
22	R_3	0	∞	C	0	0	R_3	R_4	R_1
23	R_1	R_1	R_1	C	C	0	R_1	R_4	R_1
24	R_1	R_3	R_1	C	C	C	R_1	R_4	R_1
25	0	R_1	∞	C	R_3	∞	R_3	∞	R_1
26	0	R_3	R_1	0	C	R_5	R_1	∞	R_1
27	0	R_1	∞	R_1	R_5	C	R_3	∞	R_1
28	R_3	R_1	∞	R_3	C	∞	0	R_2	R_2

В нулевую ветвь включается источник, а в десятую — нагрузка.
Необходимо:

1. Найти входное сопротивление и входную проводимость цепи относительно зажимов источника. Рассчитать их не менее чем на десяти частотах, включая 0 и ∞ .

2. Построить примерный график АЧХ U_2/U_1 .

3. Найти комплексную передаточную функцию U_2/U_1 , АЧХ и ФЧХ. Рассчитать их на десяти частотах, включая 0 и ∞ . Проверить совпадение характера качественно и точно построенной АЧХ.

Вариант Б. Для схемы варианта А выполнить исследование зависимости АЧХ и ФЧХ от изменения параметров элементов. Исследование провести вначале качественно, а затем выполняя соответствующие расчеты.

Задание 7.2. Анализ последовательной RLC- резонансной цепи.

Исследуемая цепь показана на рис. 7.13. Будем характеризовать ее десятью параметрами (табл. 7.2). В этой таблице I_0 — действующее значение тока на резонансной частоте, ρ — волновое сопротивление контура $\rho = \sqrt{L/C} = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$, $2\Delta f$ — абсолютная полоса пропускания, U_0 — действующее значение входного напряжения, U_{0c} — действующее напряжение емкости в режиме резонанса.

Варианты задания выбираются по четырехзначному коду (табл. 7.3). Цифры кода указывают номера четырех известных параметров из десяти в соответствии с табл. 7.2. В этой же таблице даны значения известных параметров, выраженные через параметр $l = m + n$.

Необходимо:

1. Рассчитать оставшиеся шесть параметров.

2. Рассчитать резонансную кривую I/I_0 (при добротности $Q > 10$ воспользоваться приближенной формулой). Построить рассчитанную кривую в функции абсолютной расстройки Δf . Максимальную расстройку взять равной двум полосам пропускания. Шаг изменения переменной выбрать так, чтобы слева и справа от f_0 было не менее десяти точек.

Дополнительное задание.

По приближенным формулам рассчитать добротность и полосу пропускания резонансной цепи при подключении сопротивления $R = 50 \rho$, Ом, параллельно емкости (n — четное) или параллельно индуктивности (n — нечетное). Для нового значения добротности рассчитать полосу пропускания и напряжение на реактивных элементах на резонансной частоте.

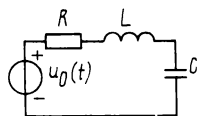


Рис. 7.13

Таблица 7.2

Вариант	Параметр	Вариант	Параметр
0	$I_0 = 0,1 (l + 10)/(l + 12)$, А	5	$\rho = 600 (l + 10)/(l + 12)$, Ом
1	$L = 10 (l + 10)$, мкГ	6	$Q = 600/(l + 10)$
2	$C = 25/(l + 10)$, пФ	7	$S_A = 15 (l + 10)/(l + 12)$, кГц
3	$f_0 = 10/(l + 10)$, МГц	8	$U_0 = 0,1 (l + 10)$, В
4	$R = l + 10$, Ом	9	$U_{co} = 60 (l + 10)/(l + 12)$, В

Таблица 7.3

Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код
1	1 3 4 8	9	3 4 5 8	17	3 4 5 9	25	1 5 8 9
2	2 5 7 9	10	0 2 7 6	18	0 1 3 4	26	0 3 4 5
3	0 3 4 9	11	0 1 3 6	19	1 3 6 8	27	2 4 8 9
4	4 5 7 8	12	0 4 5 7	20	2 3 4 9	28	0 2 5 7
5	1 3 4 9	13	2 5 8 9	21	0 1 2 4	29	1 4 8 9
6	2 3 4 8	14	4 5 7 9	22	2 3 6 8	30	2 3 6 0
7	3 5 8 9	15	0 1 3 7	23	0 2 3 4	31	1 3 7 9
8	1 3 6 9	16	2 5 7 8	24	0 2 7 9	32	

Задание 7.3. Расчет резонансного усилителя.

Рассчитать элементы резонансного усилителя, схема которого приведена на рис. 7.9, а также коэффициент передачи по напряжению на средней частоте ω_0 , если $\omega_0 = (100 + n)$, кГц, $S_A = (m + 6)$, кГц. По пяти частотам $\omega = 0$, $\omega = \omega_0 = \pm 0,5S_A$, $\omega = \omega_0$ и $\omega = \infty$ построить график АЧХ усилителя.

Указание. При расчете использовать результаты решения задачи 7.30.

Решения.

7.1. Для того чтобы найти комплексную передаточную функцию необходимо: 1) ко входу четырехполюсника подключить источник гармонического тока или напряжения; 2) любым методом анализа электрических цепей найти необходимые комплексные напряжения или токи на входе и выходе четырехполюсника; 3) взяв отношения комплексных напряжений или токов на выходе и входе четырехполюсника, получить искомую передаточную функцию.

Пусть ко входу цепи подключается источник гармонического тока с комплексной амплитудой \dot{I} . По условию задачи необходимо найти передаточную функцию \dot{U}_2/\dot{U}_1 , поэтому в результате анализа цепи необходимо определить \dot{U}_2 и \dot{U}_1 . Очевидно, что

$$\dot{U}_1 = \dot{I}Z, \quad \dot{U}_2 = \dot{I}R_2,$$

где

$$Z = R_2 + \frac{j\omega LR_1}{R_1 + j\omega L} = \frac{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}{R_1 + j\omega L}.$$

Разделив \dot{U}_2 на \dot{U}_1 , найдем выражение для передаточной функции

$$H(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{R_2(R_1 + j\omega L)}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}.$$

Модуль передаточной функции определяет АЧХ, аргумент — ФЧХ четырехполюсника, которые в данном случае записываются так:

$$|H(j\omega)| = R_2 \sqrt{\frac{R_1^2 + (\omega L)^2}{(R_1 R_2)^2 + [\omega L(R_1 + R_2)]^2}},$$

$$\Theta(\omega) = \text{arctg } (\omega L/R_1) - \text{arctg } [\omega L(R_1 + R_2)/R_1 R_2].$$

Элементарные исследования показывают, что АЧХ представляет собой монотонно убывающую функцию частоты от $H(0) = 1$ до $H(\infty) = R_2/(R_1 + R_2)$, а ФЧХ принимает только отрицательные значения и имеет минимум

$$\Theta_m = \text{arctg } |R_2/(R_1 + R_2)| - \text{arctg } |(R_1 + R_2)/R_2| \quad \text{при} \quad \omega L = R_1 \sqrt{R_2/(R_1 + R_2)}.$$

На крайних частотах $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ значения ФЧХ равны нулю. Графики АЧХ и ФЧХ показаны на рис. 7.14, а и б. Заметим, что инженеру следует уметь для простых цепей строить примерные графики АЧХ. В данном случае можно рассуждать так. На нулевой частоте (режим постоянного тока) сопротивление индуктивности ωL равно нулю, что эквивалентно ее короткому замыканию, и напряжение на входе и выходе четырехполюсника равны между собой, т. е. $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = 1$. С ростом частоты сопротивление индуктивности увеличивается, что приводит к снижению напряжения на выходе, т. е. $|H(j\omega)|$ уменьшается. При $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление индуктивности становится бесконечно большим, ток в ней равен нулю, а цепь

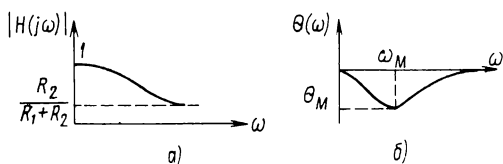


Рис. 7.14

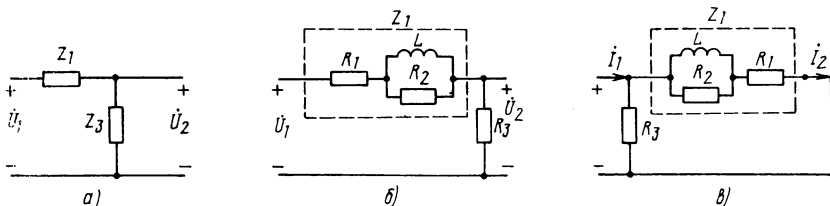


Рис. 7.15

становится резистивным делителем напряжения с передаточной функцией $R_2/(R_1 + R_2)$.

7.7. Так как АЧХ является безразмерной, то соответствующая передаточная функция может представлять собой отношение либо напряжений \dot{U}_2/\dot{U}_1 , либо токов I_2/I_1 . Пусть передаточная функция представляет собой \dot{U}_2/\dot{U}_1 . Попытаемся построить цепь с заданными требованиями к АЧХ в виде Г-образного четырехполюсника (рис. 7.15, а), и в качестве реактивного элемента применим индуктивность. Передаточная функция рассматриваемого четырехполюсника

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3}.$$

По условию задачи АЧХ является убывающей функцией. Поскольку в качестве реактивного элемента применяется индуктивность, сопротивление которой растет с ростом частоты, для получения убывающей АЧХ индуктивность должна содержаться в двухполюснике Z_1 , двухполюсник Z_3 должен представлять собой резистор R_3 . Для возможности регулировки АЧХ в двухполюснике Z_1 кроме индуктивности включим еще два резистора R_1 и R_2 . С учетом сказанного схема искомого четырехполюсника имеет вид, показанный на рис. 7.15, б. Нетрудно видеть, что передаточная функция данного четырехполюсника записывается следующим образом:

$$H(j\omega) = \frac{R_3}{Z + R_3} = \frac{R_3(R_2 + j\omega L)}{(R_1 + R_3)R_2 + j\omega L(R_1 + R_2 + R_3)}. \quad (7.3)$$

Введем обозначения $a_1 = R_2 R_3$, $b_0 = (R_1 + R_3)R_2$, $b_1 = R_1 + R_2 + R_3$. С учетом этих обозначений АЧХ примет вид:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{a_1^2 + (\omega L R_3)^2}{b_0^2 + (b_1 \omega L)^2}}. \quad (7.4)$$

При $\omega = 0$, $H(0) = R_3/(R_1 + R_3)$, а при $\omega = \infty$ $H(\infty) = R_3/(R_1 + R_2 + R_3)$. Так как $H(0) > H(\infty)$, то данная АЧХ по своему характеру соответствует заданной зависимости. Задавшись, например, сопротивлением R_3 , найдем R_1 и R_2 : $R_1 = R_3(1 - H(0))/H(0)$, $R_2 = R_3[H(0) - H(\infty)]/H(0)H(\infty)$. Параметр L найдем из условия равенства АЧХ (7.4) на частоте ω_1 , заданному значению H_1 :

$$L = \sqrt{\frac{a_1^2 - H_1^2 b_0^2}{\omega_1^2 (H_1^2 b_1^2 - R_3^2)}} = R_2 \frac{H(\infty)}{\omega_1 H(0)} \sqrt{\frac{H^2(0) - H_1^2}{H_1^2 - H^2(\infty)}}.$$

Выполним вычисления. Пусть $R_3 = 10^3$ Ом, тогда $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 3750$ Ом, $L = 187,5$ мГн.

Нетрудно видеть, что передаточная функция по току цепи со схемой рис. 7.15, в совпадает с выражением (7.3), поэтому данная цепь обладает заданной АЧХ при тех же значениях элементов.

Пусть цепь содержит одну емкость. Для того чтобы обеспечить уменьшение АЧХ с ростом частоты, необходимо емкость включить в поперечную ветвь, например так, как показано на рис. 7.16, а. Передаточная функция по напряжению данной цепи имеет вид:

$$H(j\omega) = \frac{Z}{R_3 + Z} = \frac{R_1 + R_2 + j\omega CR_1R_2}{b_1 + j\omega Cb_0}. \quad (7.5)$$

Коэффициенты b_1 и b_0 такие же, как и в RL -схеме. Выражение для АЧХ записывается следующим образом:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega CR_1R_2)^2}{b_1^2 + (\omega Cb_0)^2}}.$$

При $\omega = 0$, $H(0) = (R_1 + R_2)/b_1$, а при $\omega = \infty$, $H(\infty) = R_1/(R_1 + R_3)$. Так как $H(0) > H(\infty)$, то данная АЧХ по своему характеру также соответствует заданной зависимости. Задавшись, например, R_1 , определим R_2 и R_3 :

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 |H(0) - H(\infty)| / |H(\infty) (1 - H(0))|; \\ R_3 &= R_1 (1 - H(\infty)) / H(\infty). \end{aligned}$$

Емкость C найдем из условия $|H(j\omega)| = H_1$:

$$C = \frac{(R_1 + R_2)H(\infty)}{\omega_1 R_1 R_2 H_0} \sqrt{\frac{H^2(0) - H_1^2}{H_1^2 - H^2(\infty)}}.$$

Выполним вычисления. Пусть $R_1 = 1000$ Ом, тогда $R_3 = 4$ кОм, $R_2 = 15$ кОм, $C = 0,0267$ мкФ.

Нетрудно видеть, что передаточная функция по току цепи со схемой рис. 7.16, б определяется формулой (7.5).

В заключение заметим, что найденные четырехполюсники не являются единственно возможными. Так, двухполюсник Z в схеме рис. 7.15 может представлять собой последовательное соединение индуктивности и резистора, параллельно которым включен другой резистор. Аналогичная схема двухполюсника Z_1 существует и для рис. 7.16, б.

7.21. Резонансная частота и волновое сопротивление параллельного колебательного контура (см. рис. 7.6) связаны с элементами следующими равенствами:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad \text{и} \quad \rho = \sqrt{L/C}.$$

Умножив почленно данные равенства, найдем формулу для расчета емкости, а разделив их, формулу для расчета индуктивности:

$$C = 1/2\pi f_0 \rho; \quad L = \rho/2\pi f_0. \quad (7.6)$$

Добротность контура связана с полосой пропускания и резонансной частотой известным соотношением

$$Q = \omega_0/(\omega_1 - \omega_{-1}) = f_0/(f_1 - f_{-1}). \quad (7.7)$$

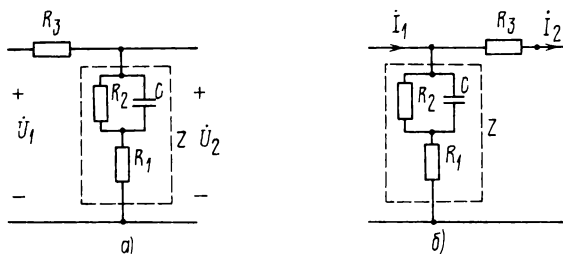


Рис. 7.16

Подстановка в полученные формулы численных значений резонансной частоты, волнового сопротивления и полосы пропускания дает следующие результаты:

$$C = 2,12 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 2,19 \text{ нФ}; \quad L = 11,9 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 11,9 \text{ мкГн}, \\ Q = 40.$$

7.26. Используя методы анализа цепей с ОУ (см., например, задачу 6.41), можно показать, что передаточная функция U_2/U_0 заданной цепи при $\mu \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\dot{U}_2/\dot{U}_0 = -R_2/[R_1 R_3 (G_3 + Y_n)],$$

где $G_3 = 1/R_3$; Y_n — проводимость параллельного контура. Учитывая, что проводимость $Y_n = G + j\omega_0 C\nu$, [$\nu = (\omega^2 - \omega_0^2)/\omega_0\omega$], перепишем найденную комплексную передаточную функцию в следующем виде:

$$U_2/U_0 = H(j\omega) = -R_2/[R_1 R_3 (G_3 + G)(1 + jQ\nu)], \quad (7.8)$$

где $Q = \omega_0 C/(G + G_3)$.

Таким образом, получена передаточная функция резонансного усилителя. Обратим внимание, что добротность резонансного усилителя меньше добротности колебательного контура.

7.27. Параметры LC -элементов колебательного контура находим по (7.6): $L = 5,95 \text{ мкГн}$; $C = 1,06 \text{ нФ}$, а добротность по (7.7) $Q = 40$. Параметры остальных элементов R_1 , R_2 , R_3 и R найдем, исходя из двух условий. Первое условие получается из требования задачи обеспечить модуль передаточной функции на частоте f_0 равным единице. Из (7.8) следует, что при $\omega = \omega_0$, $\nu = 0$ и

$$|H(j\omega_0)| = \frac{R_2}{R_1 R_3 (G_3 + G)} = 1. \quad (7.9)$$

Второе условие вытекает из требования обеспечения рассчитанной добротности

$$Q = \frac{\omega_0 C}{(G_3 + G)} = 40. \quad (7.10)$$

Так как для определения четырех параметров имеется лишь два уравнения, то у задачи бесчисленное множество решений. Положим $R_1 = 10 \text{ кОм}$, $R_2 = 50 \text{ кОм}$, тогда из совместного решения уравнений (7.9) и (7.10) следует, что $R_3 = 15 \text{ кОм}$, $R = 3,75 \text{ кОм}$.

7.30. Перерисуем схему с учетом замены ОУ источником напряжения, управляемым напряжением (рис. 7.17). Найдем передаточную функцию цепи \dot{U}_3/\dot{U}_0 . Для этого воспользуемся методом узловых напряжений. Схема содержит три независимых узла. Поскольку к узлу 3 подключается источник напряжения без последовательного сопротивления, составляем не три, а два уравнения:

$$\begin{aligned} [G_1 + j\omega(C_2 + C_3)] \dot{U}_1 - j\omega C_3 \dot{U}_2 - j\omega C_2 \dot{U}_3 &= G_1 \dot{U}_0, \\ -j\omega C_3 \dot{U}_1 + (G_4 + j\omega C_3) \dot{U}_2 - G_4 \dot{U}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Учтя, что $\dot{U}_3 = -\mu \dot{U}_2$, после громоздких выкладок найдем искомую передаточную функцию:

$$\frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_0} = \frac{j\omega C_2 G_1}{-\omega^2 C_2 C_3 + j\omega C_3 (C_2 C_3^{-1} + 1) G_4 + G_1 G_4}.$$

Преобразуем данную функцию так, чтобы она совпадала с выражением (7.9) учебника. Для этого разделим числитель и знаменатель на $j\omega C_2 G_1$ и учтем, что $G_1 = 1/R_1$ и $G_4 = 1/R_4$:

$$\frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_0} = \frac{1}{j\omega C_3 R_1 + [(C_2 C_3^{-1} + 1) R_1 C_3] / C_2 R_4 + 1/j\omega C_2 R_1}.$$

Вынесем постоянный множитель $\kappa_0 = [R_1 C_3 (C_2 C_3^{-1} + 1)] / C_2 R_4$ за скобки и выполним несложные преобразования. В результате получим передаточную функцию, отличающуюся от (7.9) лишь постоянным множителем:

$$\frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_0} = \frac{1}{\kappa_0 \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)},$$

где $Q = \sqrt{R_1 C_2 / R_1 C_3} / (1 + C_2 C_3^{-1})$, $\omega_0^2 = 1 / R_1 C_2 C_3 R_4$.

7.37. Данная цепь содержит активный элемент, который представляет собой источник напряжения, управляемый напряжением. Перерисуем схему с учетом обозначения ИНУН (рис. 7.18) и ко входу цепи подключим независимый источник напряжения. Составим систему уравнений по методу узловых напряжений. Так как к

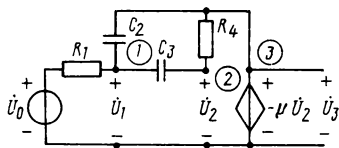


Рис. 7.17

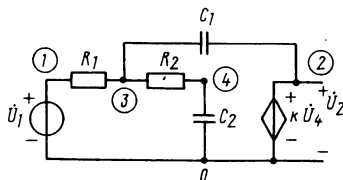


Рис. 7.18

узлам 1 и 2 подключены соответственно источники \dot{U}_1 и $\kappa\dot{U}_4$, то уравнения составляются только для узлов 3 и 4:

$$-Y_{31}\dot{U}_1 - Y_{32}\dot{U}_2 + Y_{33}\dot{U}_3 - Y_{34}\dot{U}_4 = 0,$$

$$-Y_{41}\dot{U}_1 - Y_{42}\dot{U}_2 - Y_{43}\dot{U}_3 + Y_{44}\dot{U}_4 = 0,$$

где

$$Y_{31} = 1/R_1, Y_{32} = j\omega C_1, Y_{33} = 1/R_1 + 1/R_2 + j\omega C_1,$$

$$Y_{34} = Y_{43} = 1/R_2, Y_{41} = 0, Y_{42} = 0, Y_{44} = 1/R_2 + j\omega C_2.$$

Выразим из второго уравнения системы $U_3 = Y_{44}U_4/Y_{43}$, подставим в первое уравнение и учтем, что $U_4 = U_2/\kappa$. В результате получим первое уравнение в следующем виде:

$$-Y_{31}\dot{U}_1 + (Y_{33}Y_{44}/\kappa Y_{34} - Y_{32} - Y_{34}/\kappa)\dot{U}_2 = 0.$$

Отсюда легко получается передаточная функция

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Y_{31}Y_{34}\kappa}{Y_{33}Y_{44} - \kappa Y_{32}Y_{34} - Y_{34}^2}.$$

Подставим в данную формулу выражения для Y_{ij} и, выполнив простейшие алгебраические преобразования, получим комплексную передаточную функцию

$$H(j\omega) = \frac{\kappa}{-b_2\omega^2 + 1 + jb_1\omega},$$

где

$$b_1 = C_2(R_1 + R_2) + C_1R_1(1 - \kappa), \quad b_2 = C_1C_2R_1R_2.$$

Соответствующие данной комплексной функции АЧХ и ФЧХ выражаются формулами

$$|H(j\omega)| = \kappa / \sqrt{(1 - b_2\omega^2)^2 + b_1^2\omega^2},$$

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\arctg [b_1\omega/(1 - b_2\omega^2)] & \text{при } \omega^2 < 1/b_2, \\ -\pi + \arctg [b_1\omega/(b_2\omega^2 - 1)] & \text{при } \omega^2 > 1/b_2. \end{cases} \quad (7.17)$$

Выполним исследование АЧХ. Найдем точку экстремума. Эта точка получается из решения уравнения $d|H(j\omega)|/d\omega = 0$. Частота экстремума $\omega_s = \sqrt{b_2 - 0,5b_1^2/b_2}$ и существует при выполнении условия $b_2 \geq 0,5b_1^2$. Величина максимума может быть вычислена по формуле $\max |H(j\omega)| = kb_2/b_1\sqrt{b_2 - 0,25b_1^2}$. Напомним, что данная формула справедлива, если $b_2 > 0,5b_1^2$. На крайних частотах 0 и ∞ , $H(j\omega)$ не зависит от b_1 и b_2 и соответственно равна κ и 0.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $b_2 = 1$. В табл. 7.4 приведены результаты расчета ω_s и $\max |H(j\omega)|/\kappa$ при различных значениях b_1 . В табл. 7.5 даны значения нормированной АЧХ $|H(j\omega)|/\kappa$ на некоторых частотах и тех же значениях b_1 . График АЧХ показан на рис. 7.19,а.

Таблица 7.4

b_1	$\sqrt{2}$	1	0,5	0,25
$\omega_{\max} H /\kappa$	0	0,707	0,935	0,983
	1	1,154	2,064	4,43

Таблица 7.5

ω	$ H(j\omega) /K$			
	$b_1 = 2$	$b_1 = 1$	$b_1 = 0,5$	$b_1 = 0,25$
1	0,707	1	2	4
2	0,243	0,277	0,317	0,329
3	0,111	0,117	0,123	0,1255

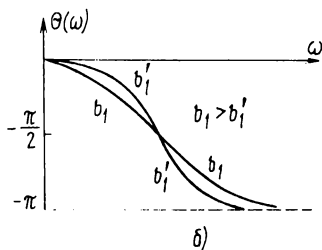
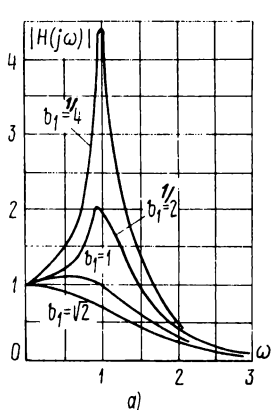


Рис. 7.19

Из графиков видно, что данный четырехполюсник при определенном выборе b_1 (например, в пределах $\sqrt{2} \dots 1$) в диапазоне частот $0 \dots 1$ пропускает колебания с незначительным изменением амплитуды. При дальнейшем росте частоты амплитуда колебаний будет уменьшаться и при $\omega = 3$ амплитуда колебаний на выходе будет приблизительно в 10 раз меньше, чем на входе, и практически не зависит от b_1 . Фазо-частотная характеристика представляет собой убывающую функцию и принимает значения 0 при $\omega = 0$; $-\pi/2$ при $\omega = 1/\sqrt{b_2}$ и $-\pi$ при $\omega \rightarrow \infty$. График ФЧХ для двух значений b_1 показан на рис. 7.19, б.

8. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

8.1. ПЕРЕХОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЦЕПЯХ С ОДНИМ РЕАКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

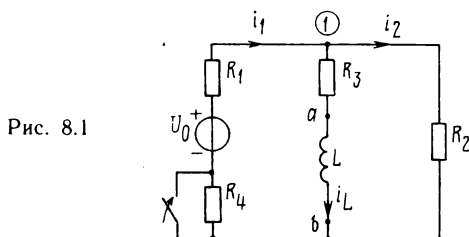
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Причины возникновения переходных колебаний в электрических цепях.
2. Законы коммутации.
3. Нулевые и ненулевые начальные условия.
4. Вид собственной составляющей переходных колебаний.
5. Вид вынужденной составляющей переходных колебаний.
6. Расчет вынужденной составляющей переходного процесса.
7. Расчет постоянной интегрирования.
8. Общая формула расчета переходных колебаний.
9. Теорема об эквивалентном генераторе.
10. Постоянная времени цепи.
11. Ступенчатое воздействие.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

8.1р¹. Цепь, схема которой изображена на рис. 8.1, находится в режиме постоянного тока. В момент $t = 0$ замыкается ключ. Приблизненно (без расчетов) построить графики изменения тока во времени во всех элементах цепи.

8.2. Построить приближенно графики изменения тока индуктивности в цепях, схемы которых изображены на рис. 8.2, а...м, если при $t = 0$ происходит коммутация.



¹ В задачах анализа переходных колебаний будем предполагать, что до коммутации цепь находилась в установившемся режиме.

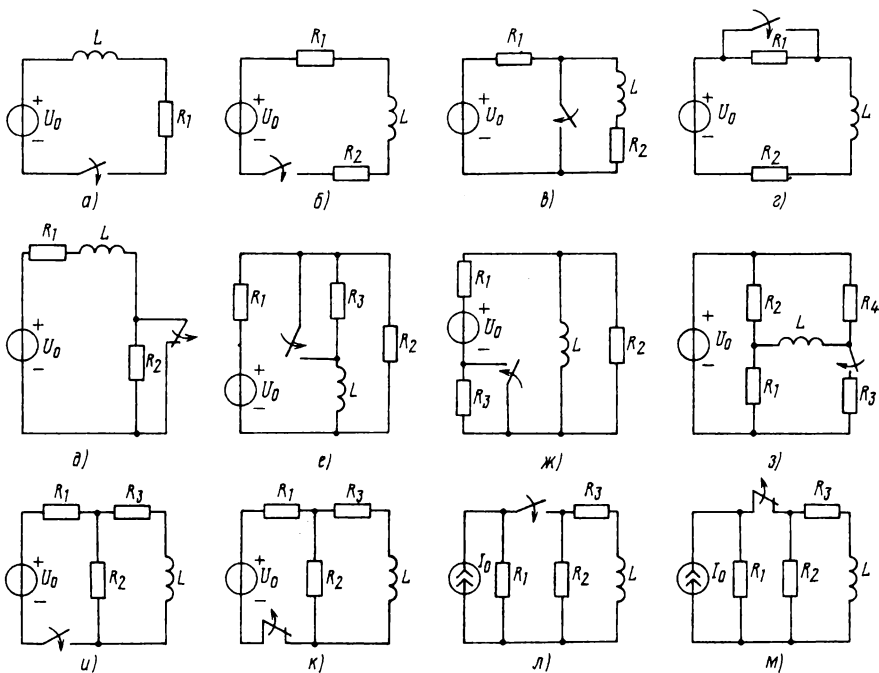


Рис. 8.2

8.3. Построить приближенно графики изменения напряжения на емкости в цепях, схемы которых изображены на рис. 8.3, *a*...*л*, если при $t = 0$ происходит коммутация.

8.4 *. Рассчитать токи в резистивных элементах при $t = 0_-$ и $t = 0_+$, построить качественно графики изменения тока резистивных элементов в цепях, схемы которых изображены на рис. 8.2, если $U_0 = 2$ В, $I_0 = 10$ мА, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ кОм. Рассчитать также величину скачков токов в резистивных элементах и скачка напряжения на индуктивности.

8.5. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 8.3, рассчитать токи в резистивных элементах при $t = 0_-$ и $t = 0_+$, а также скачки этих токов и скачок тока в емкости, если $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ кОм, $U_0 = 2$ В, $I_0 = 10$ мА.

8.6р. Рассчитать напряжения и токи всех элементов после коммутации в цепи со схемой рис. 8.1. Параметры элементов имеют следующие значения: $R_1 = R_4 = 0,5$ кОм, $R_2 = R_3 = 2$ кОм, $L = 120$ мГн, $U_0 = 1,5$ В.

8.7. Рассчитать напряжения и токи всех элементов после коммутации в цепях со схемами рис. 8.2, если $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ кОм, $L = 10$ мГн, $U_0 = 2$ В, $I_0 = 10$ мА.

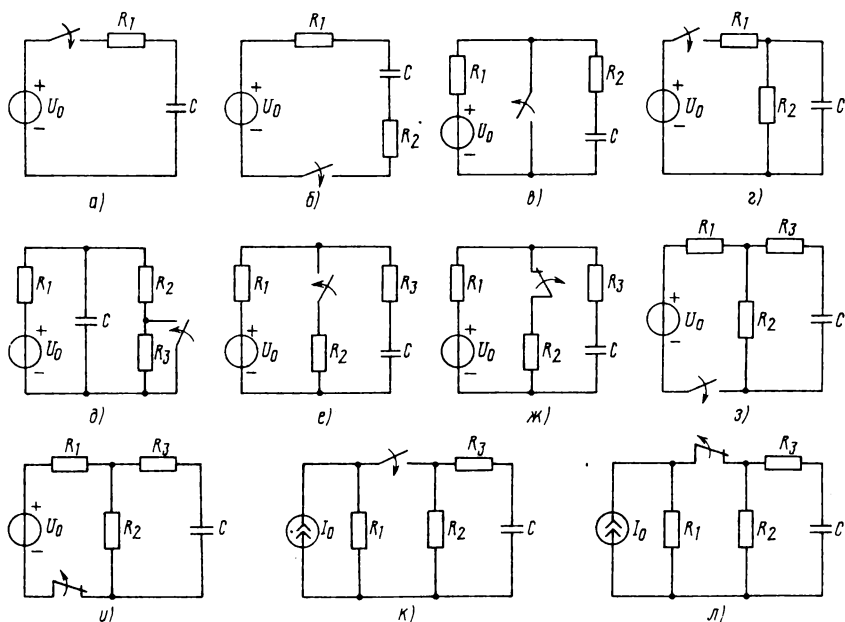


Рис. 8.3

8.8. Рассчитать напряжения и токи всех элементов после коммутации в цепях со схемами рис. 8.3, если $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ кОм}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $U_0 = 2 \text{ В}$, $I_0 = 10 \text{ мА}$.

8.9 *. Ко входу четырехполюсника, представляющего собой RC -цепь (рис. 8.4) с незаряженной емкостью, в момент $t=0$ подключается источник напряжения, задающее напряжение которого представляет собой периодическую последовательность П-образных импульсов длительности t_1 с периодом T и амплитудой U . При какой постоянной времени цепи напряжение в конце первого импульса достигнет величины, равной 0,80 своего максимального значения? При каком периоде T напряжение, вызванное первым импульсом в конце второго импульса, будет равным 0,1 своего максимального значения?

Указание. При решении задачи рекомендуется воспользоваться понятием ступенчатого воздействия и принципом наложения.

8.10р. Рассчитать емкость C , если известно, что в цепи со схемой рис. 8.3, а $U_0 = 10 \text{ В}$, $\tau = 20 \text{ мс}$, $i(0_+) = 2 \text{ мА}$ и цепь находилась при нулевых начальных условиях.

8.11р. В цепи со схемой рис. 8.2 а $U_0 = 4 \text{ В}$, $\tau = 0,2 \text{ мс}$, $i(\infty) = 2 \text{ мА}$. Рассчитать индуктивность L .

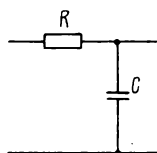


Рис. 8.4

Т а б л и ц а 8.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_0 , В	1	1,5	2,5	2	15,6	13,5	12	4,6	1,44	24
τ , мс	2	1	4	3	10,4	1,8	4,2	3,2	1,32	16
$i(0+)$ мА	2	1,5	5	1	3	9	4	2,3	1,2	7,5

Продолжение табл. 8.1

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
τ , мс	48,6	18,9	23,04	5,76	9,24	6,8	23,4	24	13,2	8,64
$i(0+)$, мА	1,8	2,5	4,5	8,8	8,0	8,5	8,6	5,5	6	2,6
R , кОм	5,4	4,2	4,8	1,6	2,2	1,8	2,6	4,0	6	3,6

Окончание табл. 8.1

Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
τ , мс	22,04	16,12	16,24	13,2	16	19,04	4,48	27,28	29,64	3,5
$i(0+)$, мА	3,6	3,2	3,5	7	4,4	4,6	6,5	6,3	2,4	1,4
C , мкФ	5,8	2,6	2,8	3	3,2	3,4	5,6	4,4	5,2	2,5

Т а б л и ц а 8.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_0 , В	10	20	24	36	63	8	21	18	16	25
τ , мс	5	1	9	3	2	4	6	10	8	7
$i(\infty)$, мА	10	2	8	6	7	1	3	9	4	5

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
τ , мс	7,5	0,5	4,5	1,5	4,5	2,5	5,5	6,5	3,5	8,5
$i(\infty)$, мА	1,5	9,5	2,5	8,5	3,5	7,5	4,5	5,5	6,5	0,5
L , мГн	16,5	1,2	19,8	6,3	23,4	13,5	18,7	20,8	25,2	10,2

8.12. Для цепи со схемой рис. 8.3, *a* в табл. 8.1 заданы три из пяти параметров U_0 , τ , $i(0_+)$, R , C . Рассчитать остальные два.

8.13. Для цепи со схемой рис. 8.2, *a* в табл. 8.2 заданы три из пяти параметров U_0 , τ , $i(\infty)$, R , L . Рассчитать остальные два.

8.14. Для цепей со схемами рис. 8.2 рассчитать постоянные времени после коммутации, если $R_1=R_2=R_3=R_4=2$ кОм, $L=10$ мГн.

8.15. Для цепей со схемами рис. 8.3 рассчитать постоянные времени, если $R_1=R_2=R_3=1$ кОм, $C=1$ мкФ.

8.2. ПЕРЕХОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ И ПАРАЛЛЕЛЬНОМ RLC -КОНТУРАХ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Зависимость характера свободных колебаний в RLC -контурах от расположения на комплексной плоскости корней характеристического уравнения.
2. Частота собственных затухающих колебаний в RLC -контурах и ее связь с резонансной частотой.
3. Последовательность анализа переходных колебаний в линейных цепях.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

8.16. В последовательном колебательном контуре с параметрами элементов $L=10$ мГн и $C=0,04$ мкФ сопротивление может принимать следующие значения: 1) $R=1$ кОм; 2) $R=2$ кОм; 3) $R=0,8$ кОм; 4) $R=0,6$ кОм. Какой характер свободных колебаний соответствует каждому из сопротивлений? Чему равна частота собственных затухающих колебаний в колебательном режиме? Рассчитайте время t_3 , по истечении которого огибающая напряжения на емкости уменьшится в 3 раза по сравнению с ее значением при $t=0$.

8.17. В момент $t=0$ ключ размыкает контакт 1 и замыкает контакт 2, образуя последовательный RLC -контур (рис. 8.5, *a*) с

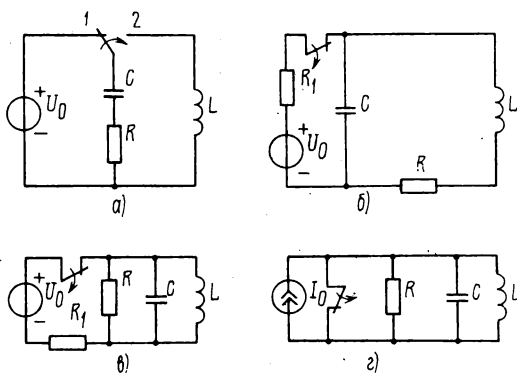


Рис. 8.5

индуктивностью $L = 10$ мГн и емкостью $C = 1$ нФ. Рассчитать параметры сопротивления R для трех режимов: а) аperiodического при условии, что разность между корнями характеристического уравнения $p_1 - p_2 = 2\sqrt{3}\omega_0$; б) критического; в) колебательного, при условии, что частота собственных затухающих колебаний будет в 2 раза меньше резонансной частоты.

8.18. Для условий задачи 8.17 изобразить приближенно графики свободных колебаний: напряжений на емкости и индуктивности и тока в контуре.

8.19*. В момент $t = 0$ ключ размыкает контакт 1 и замыкает контакт 2, образуя последовательный RLC -контур (рис. 8.5, а). Индуктивность $L = 10$ мГн и емкость $C = 0,01$ мкФ. Найти выражение для напряжений элементов и тока в контуре для трех случаев: 1) $R = 4000$ Ом; 2) $R = 2000$ Ом; 3) $R = 1500$ Ом, если $U_0 = 10$ В.

8.20*. К RLC -контур с параметрами $L = 1$ мГн, $C = 0,01$ мкФ, $R = 300$ Ом подключили источник напряжения $U_0 = 10$ В с внутренним сопротивлением R_1 (рис. 8.5, б). В момент $t_0 = 0$, когда цепь уже находилась в режиме постоянного тока, ключ размыкается. Необходимо: 1) рассчитать параметр R_1 , при котором напряжение на емкости до коммутации равнялось бы 4 В; 2) рассчитать напряжения и токи элементов в переходном режиме.

8.21*. Решить задачу 8.20 для двух случаев: 1) $R = 200$ Ом; 2) $R = 150$ Ом.

8.22. В параллельном колебательном контуре с параметрами элементов $L = 10$ мГн, $C = 0,04$ мкФ сопротивление может принимать следующие значения: 1) $R = 125$ Ом; 2) $R = 250$ Ом; 3) $R = 312,5$ Ом; 4) $R = 416$ Ом. Какой характер собственных колебаний соответствует каждому из сопротивлений? Чему равна частота собственных колебаний в колебательном режиме?

8.23. При каком соотношении между сопротивлениями последовательного $R_{\text{пос}}$ и параллельного $R_{\text{пар}}$ RLC -контуров с одинаковыми значениями параметров L и C частоты собственных колебаний в колебательном режиме будут одинаковы?

8.24*. В цепи со схемой рис. 8.5, *в* в момент $t=0$ размыкается ключ. Найти параметры RLC -контура так, чтобы режим свободных колебаний был критическим, экстремум напряжения на контуре достигался в момент $t=t_3=10$ мкс, величина экстремума $U_3=U(t_3)=2$ В, если $U_0=1$ В и $R_1=100$ Ом.

8.25*. В цепи со схемой рис. 8.5, *г* при $t=0$ размыкается ключ и к параллельному RLC -контур с параметрами $L=10$ мГн, $C=0,04$ мкФ подключается источник тока $I_0=10$ мА. Найти напряжения и токи элементов для трех случаев: 1) $R=125$ Ом; 2) $R=250$ Ом; 3) $R=312,5$ Ом.

8.3.* КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СЛОЖНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Методы составления уравнений переменных состояний.
2. Решение обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений, представленных в нормальной форме; определение постоянных интегрирования.
3. Порядок цепи.
4. Понятие об алгоритмах численного интегрирования систем дифференциальных уравнений: Эйлера, Рунге—Кутта, Адамса—Башфорта.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

8.26р. Составить уравнения переменных состояния для цепи, схема которой показана на рис. 8.6.

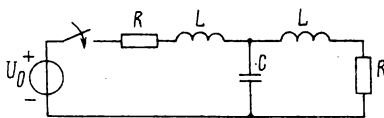
8.27. Для цепей с двумя реактивными элементами, схемы которых показаны на рис. 8.7, *а...г*, составить уравнения переменных состояния.

8.28. Составить уравнения переменных состояния для цепей с тремя реактивными элементами, схемы которых показаны на рис. 8.8, *а—г*.

8.29. Используя результаты решения задачи 8.27, найти переменные состояния, если $R=1$ кОм, $C=1$ нФ, $L=1$ мГн.

8.30р. Используя программу численного интегрирования дифференциальных уравнений и результаты решения задачи 8.26, найти при нулевых начальных условиях переменные состояния, если $R=1000$ Ом, $L=0,01$ Гн, $C=10^{-9}$ Ф, $U_0=2$ В.

Рис. 8.6



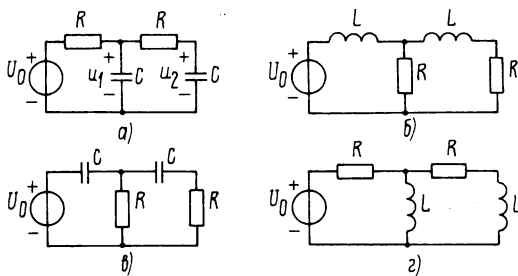
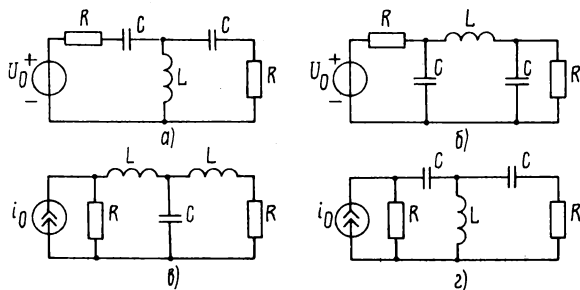


Рис. 8.7

Рис. 8.8



8.31. Используя результаты решения задачи 8.28 численным методом (см. задачу 8.30), найти переменные состояния, если $R=1$ кОм, $U_0=4$ В, $i_0=10$ мА, а параметры остальных элементов цепей со схемами рис. 8.8, а...г имеют следующие значения: а) $C=1$ нФ, $L=0,05$ мГн; б) $C=0,5$ нФ, $L=1$ мГн; в) $C=0,4$ нФ, $L=0,2$ мГн; г) $C=0,1$ нФ, $L=0,05$ мГн.

8.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

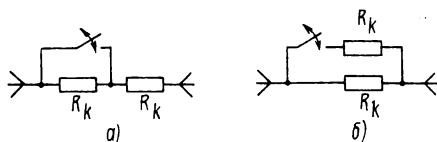
8.32. С помощью программы численного интегрирования, приведенной в Приложении 1, исследовать зависимость переходного процесса от параметра R в цепях, схемы которых показаны на рис. 8.8. Оценить погрешность, возникшую при численном интегрировании по сравнению с аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от шага интегрирования.

8.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 8.1. Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом.

В а р и а н т А. Исследуемые схемы выбираются в соответствии с графом (рис. 6.26) по трехзначному коду (табл. 6.8). Первая цифра кода указывает номер ветви, в которую включен источник напряжения или тока, вторая — номер ветви, в которую включен

Рис. 8.9



реактивный элемент индуктивность или емкость, третья — номер ветви, в которой выполняется коммутация. В остальных ветвях включены резисторы. Схемы ветвей, в которых выполняется коммутация, показаны на рис. 8.9, а, б. Ключи работают как на замыкание, так и на размыкание, т. е. возможно четыре варианта коммутируемой ветви. Рассматриваются следующие случаи, когда в схеме, кроме резисторов, имеются:

1) источник напряжения и индуктивности; 2) источник напряжения и емкость; 3) источник тока и индуктивность; 4) источник тока и емкость. Параметры элементов имеют следующие значения:

$$R_k = (m + n + k), \text{ Ом}; \quad L = (m + n), \text{ мГн}; \quad C = \text{целая часть } [n/m + 1], \text{ нФ}; \quad U_0 = n, \text{ В}; \quad I_0 = \text{целая часть } [n/m + k], \text{ мА}.$$

Ориентация источников выбирается самостоятельно или задается преподавателем.

Необходимо:¹

1. Рассчитать напряжения и токи в старом и новом стационарных (установившихся) режимах. Записать законы коммутации. Построить приближенно график изменения тока индуктивности или напряжения на емкости.

2. Рассчитать параметры эквивалентного генератора, построенного относительно зажимов реактивного элемента.

3. Рассчитать переходные колебания тока индуктивности и напряжения на емкости.

4. Рассчитать токи и напряжения резисторов.

Дополнительное задание. Решить задачу варианта А, если задающие напряжения и токи источников не заданы, а известна энергия емкости $w_C = 10^{-4}$ Дж и индуктивности $w_L = 5 \cdot 10^{-5}$ Дж до коммутации или в новом стационарном (установившемся) режиме.

Вариант Б. Решить задачу варианта А, если задающие напряжения и токи являются гармоническими $u_0(t) = n \cos(10^5 t/n)$, В,

$$i_0(t) = n \cos(10^5 t/n), \text{ мА}.$$

Задание 8.2. Переходные процессы в цепях с двумя реактивными элементами.

Вариант А. Исследуемые схемы выбираются в соответствии с графом (рис. 6.26) по четырехзначному коду (табл. 8.3). Первая

¹ Сочетая перечисленные варианты схем и четыре варианта коммутации (рис. 8.9), получится 16 схем. Число рассматриваемых схем по каждому пункту задания устанавливается преподавателем.

Таблица 8.3

Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код
1	1 2 3 4	31	3 2 1 4	61	3 4 1 2	91	5 2 1 3
2	1 2 3 5	32	3 2 1 5	62	3 4 1 5	92	5 2 1 4
3	1 2 3 6	33	3 2 1 6	63	3 4 1 6	93	5 2 1 6
4	1 2 4 5	34	3 2 4 5	64	3 4 2 5	94	5 2 3 4
5	1 2 4 6	35	3 2 4 6	65	3 4 2 6	95	5 2 3 5
6	1 2 5 6	36	3 2 5 6	66	3 4 5 6	96	5 2 4 6
7	2 1 3 4	37	1 4 2 3	67	4 3 1 2	97	3 5 1 2
8	2 1 3 5	38	2 4 5 6	68	4 3 1 5	98	3 5 1 4
9	2 1 3 6	39	1 4 2 5	69	4 3 1 6	99	3 5 1 6
10	2 1 4 6	40	1 4 2 6	70	4 3 2 5	100	3 5 2 4
11	2 1 4 6	41	1 4 3 5	71	4 3 2 6	101	3 5 2 6
12	2 1 5 6	42	1 4 3 6	72	4 3 5 6	102	3 5 4 6
13	1 3 2 4	43	4 1 2 3	73	1 5 2 3	103	5 3 1 2
14	1 3 2 5	44	4 1 5 6	74	1 5 2 4	104	5 3 1 4
15	1 3 2 6	45	4 1 2 5	75	1 5 2 6	105	5 3 1 6
16	1 3 4 5	46	4 1 2 6	76	1 5 3 4	106	5 3 2 4
17	1 3 4 6	47	4 1 3 5	77	1 5 3 6	107	5 3 2 6
18	1 3 5 6	48	4 1 3 6	78	1 5 4 6	108	5 3 4 6
19	3 1 2 4	49	4 2 1 3	79	5 1 2 3	109	4 5 1 2
20	3 1 2 5	50	4 2 1 5	80	5 1 2 4	110	4 5 1 3
21	3 1 2 6	51	4 2 1 6	81	5 1 2 6	111	4 5 1 6
22	3 1 4 5	52	4 2 3 5	82	5 1 3 4	112	4 5 2 3
23	3 1 4 6	53	4 2 3 6	83	5 1 3 6	113	4 5 2 6
24	3 1 5 6	54	4 2 5 6	84	5 1 4 6	114	4 5 3 6
25	2 3 1 4	55	2 4 1 3	85	2 5 1 3	115	5 4 1 2
26	2 3 1 5	56	2 4 1 5	86	2 5 1 4	116	5 4 1 3
27	2 3 1 6	57	2 4 1 6	87	2 5 1 5	117	5 4 1 6
28	2 3 4 5	58	2 4 3 5	88	2 5 3 4	118	5 4 2 3
29	2 3 4 6	59	2 4 3 6	89	2 5 3 6	119	5 4 2 6
30	2 3 5 6	60	2 4 5 6	90	2 5 4 6	120	5 4 3 6

цифра кода указывает номер ветви, в которую включен источник напряжения или тока, вторая и третья — номера ветвей, в которые включены реактивные элементы (однотипные), четвертая — номер ветви, в которой выполняется коммутация. В остальных ветвях включены резисторы. Возможные схемы ветвей, в которых выполняется коммутация, показаны на рис. 8.9, а, б. Число возможных схем по каждому варианту равно 16. Параметры элементов такие же, как и в задании 8.1.

Необходимо:¹

1. Рассчитать напряжения и токи в старом и новом стационарных (установившихся) режимах. Записать законы коммутации.
2. Рассчитать переходные колебания тока индуктивностей напряжения емкостей.
3. Рассчитать переходные колебания тока и напряжения резисторов.

¹ См. сноску на предыдущей странице.

В а р и а н т Б. Решить вариант А, если в схему включены раз-
нотипные элементы.

Решения.

8.1. При решении таких задач всегда следует начать с опреде-
ления характера изменения тока в индуктивности RL -цепи и на-
пряжения на емкости RC -цепи. Рассмотрим цепь до коммутации.
Так как в цепи имеется источник постоянного напряжения, то будем
считать, что до коммутации цепь находилась в режиме постоянного
тока (установившийся режим до коммутации часто называют ста-
рым установившимся (стационарным) режимом (СУР)). Напом-
ним, что в режиме постоянного тока индуктивность эквивалентна
короткому замыканию зажимов, к которым она подключена, а
емкость — разрыву ветви, в которую она включена. Схема цепи
в СУР приведена на рис. 8.10, а. Ток в индуктивности обозначим
через $i_L(0_-)$. После коммутации из цепи удаляется R_4 . Согласно
законам коммутации при $t=0_+$ ток в индуктивности остается таким
же, как и до коммутации, т. е. $i_L(0_+)=i_L(0_-)=i_L(0)$. В новом уста-
новившемся (стационарном) режиме (НУР) индуктивность также
будет эквивалентна короткому замыканию зажимов (рис. 8.10, б).
Строго говоря, НУР наступит в цепи при $t \rightarrow \infty$, поэтому ток в
индуктивности в НУР обозначим $i_L(\infty)$. Этот ток будет больше
тока $i_L(0)$ вследствие того, что в результате коммутации уменьша-
ется сопротивление, включенное последовательно с источником
напряжения. Таким образом, ток в переходном режиме увеличи-
вается от $i_L(0)$ до $i_L(\infty)$. График изменения тока показан на рис.
8.10, в. Напряжение на индуктивности пропорционально производ-
ной тока, поэтому в момент коммутации напряжение претерпевает
скачок, а затем убывает по экспоненциальному закону.

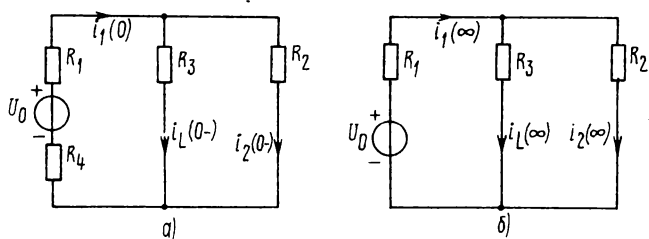
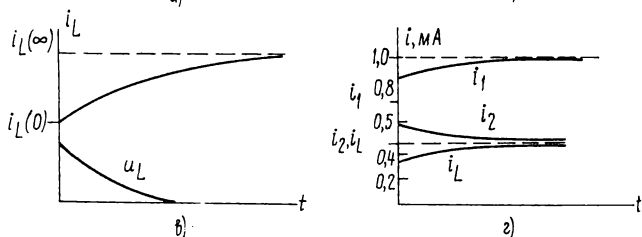


Рис. 8.10



Несколько сложнее проанализировать характер изменения напряжений и токов в резистивных элементах, так как в момент коммутации могут возникать скачки напряжений и токов. Однако это можно сделать и даже рассчитать значения скачков, не прибегая к решению дифференциального уравнения. В данном случае токи до коммутации согласно схеме рис. 8.10, *а* вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} i_1(0-) &= U_0 / [R_1 + R_4 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)], \\ i_L(0-) &= i_1(0-) R_2 / (R_2 + R_3), \quad i_2(0-) = i_1(0-) R_3 / (R_2 + R_3). \end{aligned}$$

Умножив токи на соответствующие сопротивления, получим напряжения на резистивных элементах. Определим токи в первый момент после коммутации, т. е. при $t=0+$. Еще раз напомним, что согласно закону коммутации $i_L(0-) = i_L(0+) = i_L(0)$. Для расчета остальных токов составим уравнение ЗНК для внешнего контура схемы (рис. 8.10, *а*) и уравнения ЗТК для первого узла при $t = 0+(R_4 - \text{короткозамкнуто})$:

$$\left. \begin{aligned} i_1(0+)R_1 + i_2(0+)R_2 &= U_0, \\ i_1(0+) - i_2(0+) &= i_L(0+). \end{aligned} \right\}$$

Совместное решение данной системы дает следующие результаты:

$$i_1(0+) = (U_0 + i_L(0) R_2) / (R_2 + R_3),$$

$$i_2(0+) = (U_0 - i_L(0) R_1) / (R_1 + R_2).$$

Токи i_1 , i_2 и i_L при $t \rightarrow \infty$ вычисляются путем анализа схемы рис. 8.10, *б* по формулам: $i_1(\infty) = U_0 / [R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3)]$,

$$i_2(\infty) = i_1(\infty) R_3 / (R_2 + R_3), \quad i_L(\infty) = i_1(\infty) R_2 / (R_2 + R_3).$$

Вычислим указанные токи для конкретных параметров цепи. Пусть $R_1 = R_4 = 0,5$ кОм, $R_2 = R_3 = 2$ кОм, $U_0 = 1,5$ В, тогда $i_1(0-) = 0,75$ мА; $i_2(0-) = i_L(0-) = 0,375$ мА; $i_1(0+) = 0,9$ мА; $i_2(0+) = 0,525$ мА; $i_1(\infty) = 1$ мА; $i_2(\infty) = i_L(\infty) = 0,5$ мА. Графики изменения тока показаны на рис. 8.10, *з*. Как видим, в момент коммутации токи i_1 и i_2 претерпевают скачки.

8.6. При решении задачи анализа переходных колебаний в цепях с одним реактивным элементом проще всего воспользоваться формулой (8.17) учебника, которую приведем для случая $t_0=0$:

$$f(t) = f(\infty) + [f(0) - f(\infty)] e^{-t/\tau}, \quad (8.1)$$

где $f(t)$, $f(\infty)$, $f(0)$ — ток в индуктивности или напряжение на емкости в соответствующие моменты; $\tau = R_f C$ для цепи с емкостью и $\tau = L/R_f$ для цепи с индуктивностью; R_f — сопротивление эквивалентного генератора, найденное для цепи после коммутации относительно зажимов, к которым подключен реактивный элемент.

В данной задаче $f(t)=i_L(t)$, $f(\infty)=i_L(\infty)$ и $f(0-)=i_L(0-)$. Токи $i_L(0-)$ и $i_L(\infty)$ уже найдены в процессе решения задачи 8.1: $i_L(0-)=0,375$ мА, $i_L(\infty)=0,5$ мА. Для расчета сопротивления R_r резистивную цепь, получившуюся после коммутации, заменяем эквивалентным генератором относительно зажимов реактивного элемента (рис. 8.11, а). Из схемы следует, что искомое сопротивление $R_r = R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 2,4$ кОм. Теперь определим постоянную времени цепи $\tau = L/R_r = 50$ мкс. Подставив найденные значения $i_L(0-)$, $i_L(\infty)$ и τ в (8.1), запишем окончательное выражение для искомого тока следующим образом:

$$i_L(t) = -0,125 e^{-t/50 \cdot 10^{-6}} + 0,5, \text{ мА.} \quad (8.2)$$

Продифференцировав последнее выражение и умножив его на L , получим закон изменения напряжения на индуктивности:

$$u_L(t) = L di_L/dt = 0,3 e^{-t/50 \cdot 10^{-6}}, \text{ В.}$$

Расчет остальных напряжений и токов сводится к анализу резистивных цепей. Для этого достаточно заменить индуктивность согласно теореме замещения источником тока с задающим током $i_L(t)$ (рис. 8.11, б). Применим метод узловых напряжений. В схеме имеется один независимый узел, поэтому составляем одно уравнение относительно напряжения u_1 :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_1 = \frac{U_0}{R_1} - i_L.$$

Обратите внимание, что в уравнение не входит резистор R_3 , включенный последовательно с источником тока. Решив уравнение относительно u_1 , получим:

$$u_1 = \frac{U_0/R_1 - i_L}{1/R_1 + 1/R_2}.$$

Токи i_1 и i_2 вычисляются по очевидным формулам:

$$i_1(t) = \frac{U_0 - u_1}{R_1} = \frac{U_0 + i_L R_2}{R_1 + R_2} = 1 - 0,1 e^{-t/50 \cdot 10^{-6}}, \text{ мА,}$$

$$i_2(t) = u_1/R_2 = (U_0 - i_L R_1)/(R_1 + R_2) = 0,5 + 0,025 e^{-t/50 \cdot 10^{-6}}, \text{ мА,}$$

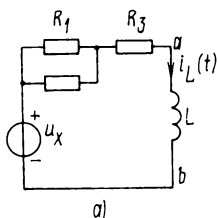


Рис. 8.11

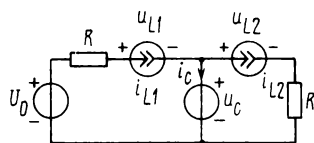
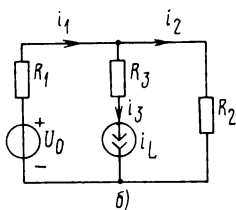


Рис. 8.12

а ток $i_3 = i_L$. Напряжения на резистивных элементах находятся по закону Ома $u_{R1} = i_1 R_1$, $u_2 = i_2 R_2$ и $u_3 = i_3 R_3$.

8.10. Поскольку цепь находилась в режиме покоя (нулевые начальные условия), в первый момент после коммутации емкость эквивалентна короткому замыканию (ток через емкость не равен нулю, а напряжение на ее зажимах равно нулю). Поэтому $i(0+) = U_0/R_1$ или $R_1 = U_0/i(0+) = 10/2 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ кОм}$. Зная постоянную времени τ и R_1 , находим $C = \tau/R_1 = 10 \cdot 10^{-3} / 5 \cdot 10^3 = 4 \text{ мкФ}$.

8.11. В режиме постоянного тока индуктивность эквивалентна короткому замыканию, поэтому $R = U_0/i(\infty) = 4/2 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ кОм}$. Зная τ , определим $L = 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 0,4 \text{ Гн}$.

8.26. Для составления уравнений переменных состояний (системы дифференциальных уравнений цепи) воспользуемся описанным в учебнике методом (см. стр. 215), который ориентирован на применение ЭВМ.

Первый этап данного метода заключается в замене согласно теореме замещения всех индуктивностей источниками тока, задающие токи которых равны соответственно токам индуктивностей и всех емкостей источниками напряжения с задающими напряжениями, равными напряжениям на емкостях. Схема исследуемой цепи (см. рис. 8.6) после указанных преобразований показана на рис. 8.12.

На втором этапе в полученной резистивной цепи рассчитываются напряжения u_{Lk} на источниках тока и токи i_{Ck} источников напряжения. Для этой цели можно применить принцип наложения. Напомним, что согласно ему напряжение или ток любой ветви находится как алгебраическая сумма напряжений или токов, вызванных каждым источником в отдельности, т. е. для того чтобы рассчитать напряжения и токи, необходимо проанализировать столько цепей, сколько имеется в исходной цепи источников. В данном случае в цепи со схемой рис. 8.12 имеется четыре источника. Перенумеруем источники следующим образом: i_{L1} — первый источник, i_{L2} — второй, u_C — третий, U_0 — четвертый. На рис. 8.13, а...г показаны схемы, в каждой из которых содержится только один источ-

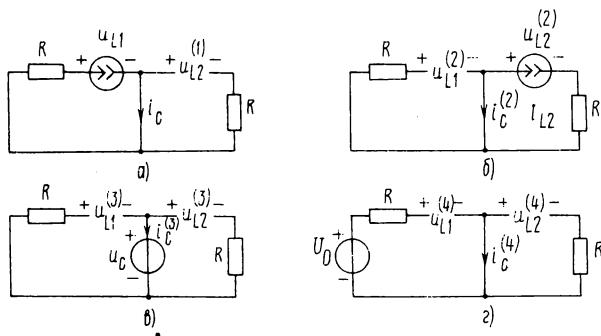


Рис. 8.13

ник. Искомые напряжения и токи, вызванные первым источником i_{L1} , обозначим $u_{L1}^{(1)}$, $u_{L2}^{(1)}$, $i_C^{(1)}$. Они находятся по схеме рис. 8.13, а:

$$u_{L1}^{(1)} = -Ri_{L1}, u_{L2}^{(1)} = 0, i_C^{(1)} = i_{L1}.$$

Аналогично обозначим искомые напряжения и ток, вызванные действием остальных источников i_{L2} , u_C и U_0 , и по схемам рис. 8.13, б — г соответственно найдем их значения:

а) при действии второго источника i_{L2}

$$u_{L1}^{(2)} = 0, u_{L2}^{(2)} = -Ri_{L2}, i_C^{(2)} = -i_{L2};$$

б) при действии третьего источника u_C

$$u_{L1}^{(3)} = -u_C, u_{L2}^{(3)} = u_C, i_C^{(3)} = 0;$$

в) при действии четвертого источника

$$u_{L1}^{(4)} = U_0, u_{L2}^{(4)} = 0, i_C^{(4)} = 0.$$

Согласно принципу наложения:

$$u_{L1} = -Ri_{L1} + 0 \cdot i_{L2} - u_C + U_0,$$

$$u_{L2} = 0 \cdot i_{L1} - R \cdot i_{L2} + u_C + 0 \cdot U_0.$$

$$i_C = i_{L1} - i_{L2} + 0 \cdot u_C + 0 \cdot U_0.$$

Чтобы найти искомую систему уравнений переменных состояния, достаточно в полученной системе выполнить подстановку

$$u_{L1} = L \frac{di_{L1}}{dt}, u_{L2} = L \frac{di_{L2}}{dt}, i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

и разделить первые два уравнения на L , а последнее на C :

$$di_{L1}/dt = -(R/L) \cdot i_{L1} + 0 \cdot i_{L2} - (1/L)u_C + (1/L)U_0,$$

$$di_{L2}/dt = 0 \cdot i_{L1} - (R/L)i_{L2} + (1/L)u_C + 0 \cdot U_0,$$

$$du_C/dt = (1/C)i_{L1} - (1/C)i_{L2} + 0 \cdot u_C + 0 \cdot U_0.$$

В матричной форме данная система имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_C \end{Bmatrix} = A \cdot \begin{Bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_C \end{Bmatrix} + B, \text{ где}$$

$$A = \begin{Bmatrix} -R/L & 0 & -1/L \\ 0 & -(R/L) & 1/L \\ 1/C & -1/C & 0 \end{Bmatrix}, B = \begin{Bmatrix} U_0/L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Т а б л и ц а 8.4

Физические величины	t	i_{L1}	i_{L2}	u_C	t'	i'_{L1}	i'_{L2}	u'_C
Параметры программы	$Y(1)$	$Y(2)$	$Y(3)$	$Y(4)$	$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$

8.30. Исследуемая цепь описывается системой дифференциальных уравнений (8.3), составленной относительно физических величин: токов индуктивностей i_{L1} , i_{L2} и напряжения емкости u_C . Соответствие между физическими величинами и параметрами подпрограммы *RKM* (см. Приложение 1) приведено в табл. 8.4.

Начальные условия: время $Y(1)=0$; токи индуктивностей $Y(2)=0$, $Y(3)=0$; напряжение емкости $Y(4)=0$.

Значения других величин: порядок системы $N=5$; шаг выдачи результатов счета $H1=10^{-5}$ с; погрешность интегрирования $E=10^{-5}$.

Головной модуль Фортран-программы решения данной задачи имеет следующий вид:

```

      REAL Y(4)
      DATA H1,E/1.E-5,1.E-5/
      DATA Y/0.,0.,0.,0./
      N=4
      GO TO 4
1     CALL RKM(N,Y,H1,E,IER)
4     WRITE (1,2) (Y(K),K=1,N)
2     FORMAT (5X,4E18.5)
      IF (ABS(Y(1))-2.E-4) 1,3,3
3     WRITE (1,6) IER
6     FORMAT (//5X,'IER =' ,I2//)
      STOP
      END
      SUBROUTINE SP(Y,A)
      DIMENSION Y(1),A(1)
      R=1000.
      RL=0.01
      C=5.E-9
      U0=2.
      A(1)=1
      A(2)=-R/RL*Y(2)-Y(4)/RL+U0/RL
      A(3)=-R/RL*Y(3)+Y(4)/RL
      A(4)=Y(2)/C-Y(3)/C
      RETURN
      END

```

Результаты счета приведены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

t , мкс	i_{L1} , мА	i_{L2} , мА	u_C , В	t , мкс	i_{L1} , мА	i_{L2} , мА	u_C , В
0,0	0,0	0,0	0,0	60	0,977	1,020	0,981
10	0,925	0,340	1,070	70	1,010	0,986	0,977
20	0,738	0,992	1,340	100	1,000	0,998	0,993
30	0,898	1,000	0,828	150	1,000	1,000	1,000
40	1,050	0,912	0,951	200	1,000	1,000	1,000
50	0,982	1,000	1,080				

9. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

9.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Прямое и обратное преобразование Лапласа; оригинал и изображение.
2. Свойства единственности и линейности преобразования Лапласа.
3. Дифференцирование, интегрирование и смещение оригинала (теорема смещения).
4. Произведения изображений.
5. Теорема запаздывания.
6. Операторные сопротивления и проводимости R -, L -, C -элементов.
7. Операторные схемы замещения реактивных элементов.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

9.1. Доказать свойство линейности преобразования Лапласа.

9.2 *. Доказать, что если $F(p) \doteq f(t)$, то

$$df(t)/dt \doteq pF(p) - f(0+) \text{ и } \int_0^t f(t) dt \doteq F(p)/p.$$

9.3 *. Доказать теоремы смещения и запаздывания.

9.4. Найти изображения следующих функций (оригиналов):

а) $f(t) = A$; б) $f(t) = Ae^{-\alpha t}$.

9.5 *. Применяя свойства преобразования Лапласа, а также теоремы смещения и запаздывания, найти изображения следующих функций:

а) At ; б) $Ate^{-\alpha t}$; в) $A(\sin \omega t)/\omega$;
г) $A \cos \omega t$; д) $Ae^{-\alpha t/2}(\sin \omega_1 t)/\omega_1$.

9.6. Для некоторого двухполюсника с нулевыми начальными условиями $u(t)$ и $i(t)$ равны нулю для $t < 0$. Для $t > 0$ их значения заданы в табл. 9.1. Определить операторное сопротивление двухполюсника $Z(p)$, а также схемы двухполюсников.

Таблица 9.1

Вариант	$u(t)$, В	$i(t)$, мА
1	10	$10 \cdot e^{-250t}$
2	10	$5(1 - e^{-500t})$
3	$2 \cdot 10^3 t$	$8e^{-250t} + 2 \cdot 10^3 t - 8$
4	5	$0,5 + 50t$
5	$4 \cdot e^{-100t}$	$(4 - 400t)e^{-100t}$
6	$8te^{-200t}$	$(4 - 800t)e^{-200t}$
7	20	$10e^{-100t} \sin 100t$

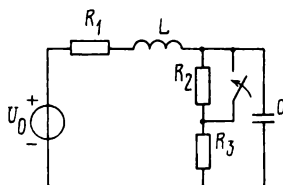


Рис. 9.1

9.7 *. С двухполюсной цепью без запаса энергии были проведены два опыта: 1) на цепь действовало напряжение в виде единичной ступенчатой функции, которое вызвало ток $i(t) = A_1 e^{-2t} \cdot \cos(2t + \varphi_1)$; 2) на цепь действовал ток той же формы, который вызвал напряжение $u(t) = A_2 e^{-t} \cos(3t + \varphi_2) + A_3 e^{-2t}$. Найти входное сопротивление цепи, если на постоянном токе $Z(0) = 0,5$ Ом.

9.8р. Для цепи со схемой рис. 9.1 составить операторную схему замещения.

9.9. Для схем, изображенных на рис. 8.2, составить операторные схемы замещения. Параметры элементов: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$ кОм, $U_0 = 2$ В, $I_0 = 10$ мА, $L = 10$ мГн.

9.10. Составить операторные схемы замещения для схем, изображенных на рис. 8.3. Параметры элементов $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ кОм; $U_0 = 2$ В; $I_0 = 10$ мА; $C = 1$ мкФ.

9.2. РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ. ОПЕРАТОРНЫЕ ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Последовательность расчета переходных процессов операторным методом.
2. Определение операторных входных и передаточных функций.
3. Переход от операторных входных и передаточных функций к комплексным.
4. Теорема разложения.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

9.11р. Рассчитать напряжение $u_2(t)$ и токи $i_2(t)$, возникающие после коммутации в цепи, схема которой изображена на рис. 8.1,а. Параметры элементов такие же, как и в зад. 8.6.

9.12. Операторным методом найти токи в цепях, схемы которых изображены на рис. 8.2, д, е и рис. 8.3, д, е, параметры элементов даны в задачах 9.9 и 9.10.

9.13. Найти операторные входное сопротивление и передаточную функцию $U_2(p)/U_1(p)$ цепей, схемы которых показаны на рис. 7.2.

9.14. Для цепей со схемами рис. 7.3 найти операторные входную проводимость и передаточную функцию $I_2(p)/I_1(p)$.

9.15. Для цепей со схемами рис. 7.4 найти операторные передаточные функции $U_2(p)/U_1(p)$ и $I_2(p)/U_1(p)$.

9.16. Используя понятие операторной передаточной функции, найти напряжение $u_2(t)$ на выходе цепей со схемами рис. 7.2, находящихся при нулевых начальных условиях, если к их входу в момент $t=0$ подводятся воздействия: а) $u_1(t)=U_m \cos \omega t$; б) $u_1(t)=U_m e^{-\alpha t}$; в) $u_1(t)=U_m \sin \omega t$; г) $u_1(t)=U_m \cos(2\pi k t/t_n)$ при $0 < t < t_n$ и $u_1(t)=0$ при $t > t_n$, $k=1,2,\dots$

9.17. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 9.2, определить $U_2(p)/U_1(p)$, а также $U_2(p)$ и $u_2(t)$, если ко входу цепи подводится единичное ступенчатое воздействие.

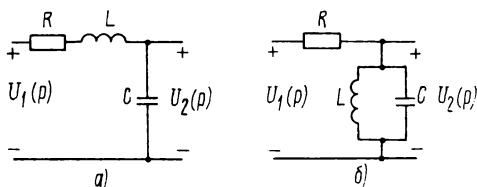


Рис. 9.2

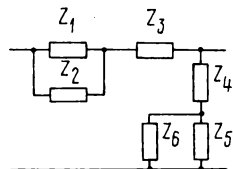


Рис. 9.3

Таблица 9.2

Вариант	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
1	R_1	∞	pL	0	$1/pC$	R_2
2	0	0	pL	0	$1/pC$	R_2
3	0	0	$1/pC$	0	pL	R_2
4	R_1	∞	$1/pC$	pL	0	0
5	R_1	∞	$1/pC$	0	pL	R_2
6	R_1	∞	pL	$1/pC$	∞	R_2
7	0	0	pL	$1/pC$	R_2	∞
8	R_1	pL	0	$1/pC$	R_2	∞
9	R_1	pL	0	$1/pC$	0	0
10	R_1	$1/pC$	0	pL	R_2	∞
11	0	0	$1/pC$	pL	R_2	∞
12	R_1	pL	0	0	$1/pC$	R_2
13	$1/pC$	∞	R_1	R_2	pL	∞
14	R_1	$1/pC$	0	pL	0	0
15	pL	$1/pC$	R_1	R_2	0	0
16	R_1	$1/pC$	pL	R_2	0	0
17	R_1	pL	$1/pC$	R_2	0	0
18	R_1	$1/pC$	R_2	pL	0	0
19	R_1	pL	R_2	$1/pC$	0	0
20	0	0	R_1	R_2	pL	$1/pC$
21	0	0	R_1	pL	R_2	$1/pC$
22	0	0	R_1	$1/pC$	R_2	pL
23	0	0	pL	R_1	R_2	$1/pC$
24	0	0	$1/pC$	R_1	R_2	pL
25	$1/pC$	R_1	$1/pC$	R_2	0	0
26	pL_1	R_1	pL_2	R_2	0	0
27	0	0	R_1	pL_1	R_2	pL_2
28	0	0	R_1	$1/pC_1$	R_2	$1/pC_2$

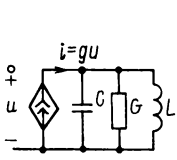


Рис. 9.4

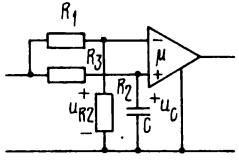


Рис. 9.5

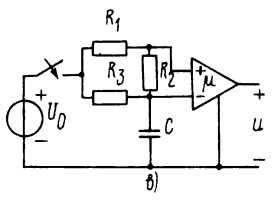
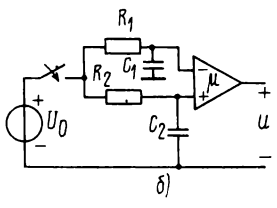
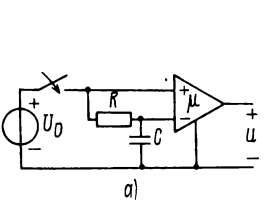


Рис. 9.6

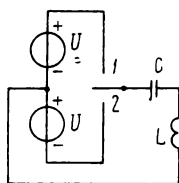
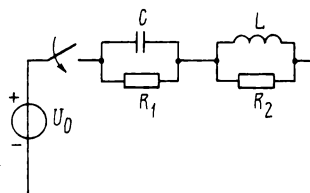
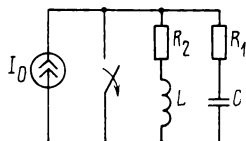


Рис. 9.7



а)



б)

Рис. 9.8

9.18. Для цепи со схемой, изображенной на рис. 9.3, определить операторную передаточную функцию $U_2(p)/U_1(p)$. Выражения для сопротивлений $Z_1 \dots Z_6$ даны в табл. 9.2.

9.19. На рис. 9.4. приведена схема замещения каскада резонансного усилителя. Ко входу усилителя в момент $t=0$ при нулевых начальных условиях подводится видеопульс прямоугольной формы длительностью 1 мс и высотой 0,2 В. Найти закон изменения напряжения $u_2(t)$ на зажимах контура, если $i = -0,005 \mu\text{A}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ нФ}$, $G = 2 \cdot 10^{-5} \text{ См}$.

9.20р. В какой момент после подключения источника постоянного напряжения на выходе усилителя (см. рис. 9.5) изменится знак?

9.21. Найти закон изменения напряжения на выходе ОУ в цепях, схемы которых показаны на рис. 9.6, если к их входу в момент $t=0$ подключается источник напряжения. До подключения источника цепь находилась при нулевых начальных условиях.

9.22. Дана цепь с источниками постоянного напряжения (рис. 9.7) без начального запаса энергии в L - и C -элементах. В момент $t=0$ ключ становится в положение 1, а спустя $t = \pi\sqrt{LC}$ — в положение 2. До какого напряжения будет заряжен C -элемент, если ключ в положении 2 будет находиться в течение $\pi\sqrt{LC}$, с?

9.23*. К цепи со схемой рис. 9.8,а при нулевых начальных условиях подключается источник постоянного напряжения U_0 . Найти, при каких условиях колебания напряжения на емкости и тока в индуктивности будут такими же, как в цепях первого порядка.

9.24*. Решить задачу 9.23 для цепи со схемой 9.8,б.

9.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Устойчивые и неустойчивые цепи.
2. Положение на комплексной плоскости полюсов передаточной функции цепи.
3. Полиномы Гурвица и их свойства.

4. Связь между комплексной и операторной передаточными функциями.
5. Критерии устойчивости.
6. Критерий Гурвица.
7. Критерий Михайлова.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

9.25. Знаменатель L -изображения тока имеет следующие нули: $-\delta_1$, $-\delta_2$, $-\delta_3 + j\omega_1$, $-\delta_3 - j\omega_1$. Из каких слагаемых состоит функция тока? Является ли данная цепь устойчивой? Какой режим установится в цепи, если $t \rightarrow \infty$?

9.26. Знаменатель операторной передаточной функции определяется выражением: а) $p^2 + 0,5p + 1$; б) $p^2 + 3p + 1$; в) $p^2 - p + 1$; г) $p^2 + 3p + 3$; д) $p^2 + 0,1p + 1$. Показать положение нулей полинома знаменателя (полюсов передаточной функции) на комплексной плоскости. Какие из полиномов описывают устойчивые цепи, а какие нет?

9.27*. Полиномы знаменателя операторных передаточных функций некоторых цепей зависят от параметра « κ » и записываются следующим образом: а) $(5 + \kappa)p^2 + p + 1$; б) $3p^2 + (1 - \kappa)p + 2$; в) $4p^2 + 4p + \kappa$; г) $(2 + \kappa)p^2 + (1 - \kappa)p + 1$. Для каждого полинома определить пределы κ , в которых полином описывает устойчивую цепь. Построить на комплексной плоскости траекторию движения полюсов при изменении параметра κ в заданных пределах.

9.28. Проверить на устойчивость цепи, полиномы знаменателей которых имеют вид: а) $p^3 + 2p^2 + 2p + 1$; б) $p^3 + 3p^2 + 1$; в) $p^3 - 5p^2 + 4p + 3$; г) $p^3 + p^2 + p + 6$; д) $p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 8p + 12$; е) $p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 5p + 2$; ж) $p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 11p^2 + 7p + 2$.

9.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОПЕРАЦИОННЫЕ УСИЛИТЕЛИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Аномальные элементы электрических цепей (нуллаторы и нораторы).
2. Схемы замещения ОУ с помощью нуллаторов и нораторов.
3. Правила составления уравнений по методу узловых напряжений.

Операторные передаточные функции находятся для цепей с нулевыми начальными условиями, поэтому остаются справедливыми рассмотренные выше правила (алгоритмы) нахождения комплексных передаточных функций. Достаточно лишь в выражениях для сопротивлений (проводимостей) реактивных элементов $j\omega$ заменить на p . Таким образом, для того чтобы найти операторную

передаточную функцию цепей, содержащих идеальные операционные усилители с $\mu \rightarrow \infty$, необходимо:

ко входу цепи подключить какой-либо источник;

заменить все ОУ их схемами замещения (зависимыми источниками) с конечным μ ;

любым методом анализа цепей определить изображения по Лапласу воздействия ($U_1(p)$ или $I_1(p)$) и реакции цепи ($U_2(p)$ или $I_2(p)$);

взять отношение изображений реакции и воздействия, и в этом отношении сделать предельный переход при $\mu \rightarrow \infty$.

Рассмотрим другой алгоритм определения передаточных функций с ОУ, основанный на применении метода узловых напряжений. Как известно, система узловых уравнений записывается следующим образом:

$$YU = I, \quad (9.1)$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & \dots & -Y_{1n} \\ -Y_{21} & Y_{22} & \dots & -Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Y_{n1} & -Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Предлагаемый алгоритм справедлив для ОУ с двумя или одним входом и одним выходом и состоит из следующих шагов.

1. Подключить ко входу цепи источник тока и удалить из схемы ОУ.

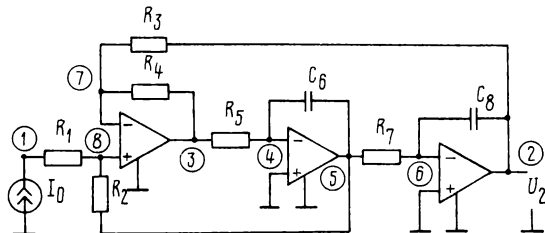
2. Для схемы без ОУ обычным образом составить систему узловых уравнений.

3. Если между узлами m и n включен вход ОУ, то столбец m заменить суммой столбцов m и n , а столбец n вычеркнуть. Вычеркнуть также напряжение U_n из матрицы U . Можно сделать наоборот — к столбцу n прибавить столбец m , а столбец m и узловое напряжение U_m вычеркнуть. Если же один из входных зажимов усилителя соединен с базисным узлом (ОУ с одним входом), а другой с узлом q , то из матрицы Y вычеркнуть столбец q , а из матрицы U — напряжение U_q .

4. Если выход ОУ подсоединен к узлу p , то из матрицы Y вычеркнуть строку p , а из матрицы I — ток I_p .

5. Решая полученную систему уравнений относительно изображений воздействия и реакции и беря их отношение, получить операторную передаточную функцию.

Рис. 9.9



Пример. Найти операторную функцию по напряжению цепи со схемой, показанной на рис. 9.9. Задачу будем решать в такой последовательности.

1. Пронумеруем узлы в произвольном порядке, например так, как показано на рис. 9.9.
2. Составляем систему узловых уравнений без учета ОУ:

G_1	0	0	0	0	0	0	G_1	U_1	I_0
0	G_3+pG_8	0	0	0	$-pG_8$	$-G_3$	0	U_2	0
0	0	G_4+G_5	G_7	0	0	G_4	0	U_3	0
0	0	$-G_5$	G_5+pG_6	$-pG_6$	0	0	0	U_4	0
0	0	0	$-pG_6$	$G_2+G_7+pG_8$	G_7	0	$-G_2$	U_5	0
0	$-pG_8$	0	0	$-G_7$	G_7+pG_8	0	0	U_6	0
0	$-G_3$	$-G_4$	0	0	0	G_3+G_4	0	U_7	0
$-G_1$	0	0	0	$-G_2$	0	0	G_1+G_2	U_8	0

где $G_i = 1/R_i$.

3. Вход первого ОУ подключен к зажимам 7 и 8, поэтому сложим столбцы 7 и 8, вычеркнем затем U_8 . Второй ОУ имеет один вход, соединенный своим зажимом с узлом 4, поэтому вычеркиваем четвертый столбец и напряжение U_4 . Третий ОУ также имеет один вход, соединенный своим зажимом с узлом 6, поэтому вычеркиваем столбец 6 и напряжение U_6 .

4. Выходы ОУ подключены своими зажимами к узлам 3, 5 и 2, поэтому вычеркиваем строки 3, 5 и 2. Система уравнений с уменьшенной размерностью имеет вид:

$$\begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & G_1 \\ 0 & 0 & -G_5 & -pG_6 & 0 \\ 0 & -pG_8 & 0 & -G_7 & 0 \\ 0 & -G_3 & -G_4 & 0 & G_3+G_4 \\ -G_1 & 0 & 0 & -G_2 & G_1+G_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_5 \\ U_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Решим полученную систему уравнений относительно U_2 и U_1 . По методу Крамера имеем $U_1 = \Delta_{11}/\Delta$, $U_2 = \Delta_{12}/\Delta$. Разделив второе уравнение на первое, получим передаточную функцию:

$$H_{uu}(p) = \Delta_{12}/\Delta_{11}.$$

Раскрыв алгебраические дополнения Δ_{12} и Δ_{11} и выполнив преобразования, получим передаточную функцию в следующей форме:

$$H_{uu}(p) = \frac{G_1 G_5 G_7 (G_3 + G_4)}{G_6 G_8 G_4 (G_1 + G_2) p^2 + G_2 G_5 G_8 (G_3 + G_4) p + G_3 G_5 G_7 (G_1 + G_2)}.$$

Правильность приведенного алгоритма легко доказать, если воспользоваться нулляторно-нораторной схемой замещения ОУ (см. рис. 2.11, *б* верхняя схема). Напомним, что входу ОУ соответствует нуллятор, а выходу — норатор. Действительно, поскольку ток нуллатора и напряжение на нем равны нулю, то собственная и взаимная проводимости ветвей не изменяются при подключении нуллатора, а напряжения узлов, между которыми он включен, будут одинаковы. При этом рассматриваются два случая: 1) один из узлов является базисным, узловое напряжение которого равно нулю, поэтому узловое напряжение второго узла также будет равняться нулю. Это означает, что обратятся в нуль соответствующие этому узловому напряжению слагаемые в системе узловых уравнений; 2) оба узла, к которым подключен нуллятор, не являются базисными. В силу равенства между собой напряжений этих узлов сгруппируем соответствующие слагаемые в системе узловых напряжений. Это означает, что складываются соответствующие столбцы матрицы.

В любом из этих случаев число неизвестных (узловых напряжений) уменьшается на число нуллаторов. Для рассматриваемого ОУ норатор, имитирующий выход ОУ, всегда одним замыком соединен с базисным узлом. Так как напряжение и ток норатора не определены, то не определена и его проводимость, что делает невозможной запись уравнения для узла, к которому подключен норатор. Наличие нуллатора привело к сокращению числа неизвестных, поэтому число необходимых уравнений может быть сокращено на число нуллаторов. Сокращение числа уравнений приводит к удалению строк матрицы.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

9.29. Найти операторные передаточные функции для схем с ОУ, приведенных в Приложении 4.

9.30. Найти алгоритм составления системы уравнений по методу узловых напряжений для схем, содержащих ОУ с симметричным выходом (см. рис. 2.11, *б*).

9.31. Записать все виды операторных передаточных функций U_2/U_1 , I_2/U_1 , I_2/I_1 , U_2/I_1 через определитель и алгебраические дополнения матрицы Y системы (9.1), если входными и выходными зажимами являются произвольные узлы m , n и p , q соответственно.

9.32. Найти алгоритм составления системы уравнений по методу контурных токов для схем, содержащих ОУ.

9.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 9.1. Переходные процессы в цепях с одним реактивным элементом.

Решить задачу анализа переходных процессов операторным методом для схем, описанных в задании 8.1.

Задание 9.2. Переходные процессы в цепях с двумя реактивными элементами.

Решить задачу анализа переходных процессов операторным методом для схем, описанных в задании 8.2. Сравнить результаты решения заданий 8.1, 8.2 и 9.1, 9.2.

Решения.

9.8. Для составления операторной схемы замещения необходимо все воздействия заменить их изображениями по Лапласу, а все реактивные элементы — их схемами замещения. Каждый реактивный элемент можно заменить одной из двух возможных схем замещения. На рис. 9.10, а показаны схемы замещения емкости, а на рис. 9.10, б — индуктивности. Как видим, для построения схем замещения реактивных элементов необходимо предварительно рассчитать напряжения на емкостях и токи в индуктивностях для момента $t=0$. Учитывая, что рассматриваемая в данном примере цепь находилась до коммутации в режиме постоянного тока, эквивалентная схема для расчета $u_C(0)$ и $i_L(0)$ будет иметь вид, показанный на рис. 9.11. Легко видеть, что $i_L(0) = U_0 / (R_1 + R_2 + R_3)$, а $u_C(0) = U_0(R_2 + R_3) / (R_1 + R_2 + R_3)$. Одна из возможных операторных схем замещения данной цепи показана на рис. 9.12. При построении данной схемы замещения принято во внимание, что изображение постоянной U_0 равно U_0/p .

9.11. При решении задачи выделяются четыре этапа¹.

1. Расчет токов индуктивностей и напряжений емкостей до коммутации (расчет цепи в СУР).

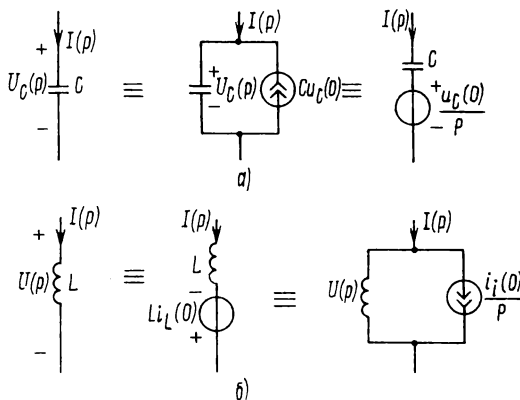


Рис. 9.10

¹ Цель задачи заключается в иллюстрации этапов операторного метода на простых примерах, хотя подобные задачи проще решать классическим методом.

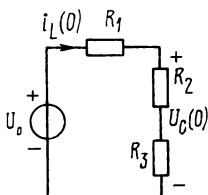


Рис. 9.11

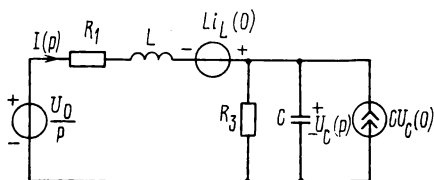


Рис. 9.12

2. Составление операторной схемы замещения.
3. Расчет L -изображений искомых величин (напряжений и (или) токов ветвей).
4. Переход от изображений к оригиналам.

Данную задачу будем решать в соответствии с перечисленными этапами.

1. Расчет данной цепи в СУР выполнен в процессе решения задачи 8.6, где найдено $i_L(0) = 375$ мА.

2. Операторная схема замещения показана на рис. 9.13.

3. Для определения L -изображений напряжений и токов ветвей воспользуемся, например, методом узловых напряжений. В схеме имеется один независимый узел, поэтому она описывается одним узловым уравнением

$$Y_{11}(p) U_1(p) = I_{11}(p), \quad (9.2)$$

где

$$Y_{11}(p) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + pL} + \frac{1}{R_2} = \frac{pL(R_1 + R_2) + R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_1R_2(pL + R_3)},$$

$$I_1(p) = \frac{U_0}{pR_1} - \frac{Li_L(0)}{pL + R_3} = \frac{pL(U_0 - R_1i_L(0)) + U_0R_3}{pR_1(pL + R_3)}.$$

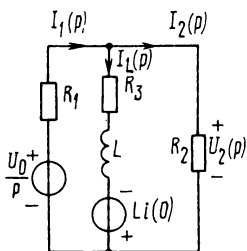


Рис. 9.13

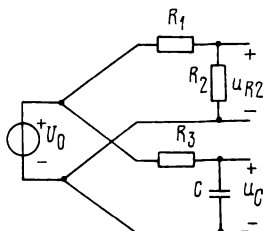


Рис. 9.14

Введем обозначения: $a_0 = (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3) / L(R_1 + R_2)$, $a_1 = R_3 / L$, $k = U_0 - R_1 i_L(0)$, $b_0 = U_0 R_3 / Lk$, тогда $Y_{11}(p)$ и $I_{11}(p)$ примут вид:

$$Y_{11} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{p + a_0}{p + a_1}, \quad I_{11}(p) = \frac{k}{R_1} \cdot \frac{p + b_0}{p(p + a_1)}.$$

Из уравнения (9.2) легко найти изображение для узлового напряжения:

$$U_1(p) = \frac{I_{11}(p)}{Y_{11}(p)} = \frac{k R_2 (p + b_0)}{(R_1 + R_2) p (p + a_0)}, \quad (9.3)$$

которое равно $U_2(p)$. Ток $I_2(p)$ находим по закону Ома:

$$I_2(p) = U_2(p) / R_2.$$

4. Переход от изображения к оригиналу выполняется с использованием теоремы разложения. В данном случае

$$M(p) = [k R_2 / (R_1 + R_2)] (p + b_0), \quad N(p) = p(p + a_0) \quad \text{и} \quad N'(p) = 2p + a_0.$$

Полином знаменателя содержит два корня: $p_1 = 0$ и $p_2 = -a_0$. Согласно теореме разложения

$$u_2(t) = \frac{M(p_1)}{N'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{M(p_2)}{N'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{k R_2 b_0}{a_0 (R_1 + R_2)} - \frac{k R (b_0 - a_0)}{a_0 (R_1 + R_2)} e^{-a_0 t}.$$

Подстановка численных значений параметров элементов дает закон изменения напряжения $u_2(t)$, который (как следовало ожидать) совпадает с результатами решения задачи 8.6. Очевидно, что $i_2(t) = u_2(t) / R_2$.

9.20. Входное сопротивление ОУ принимается равным бесконечности, поэтому напряжения u_{R_2} и u_C рассчитываются независимо друг от друга согласно схеме рис. 9.14, из которой видно, что $u_{R_2} = U_0 R_2 / (R_1 + R_2)$, $u_C = U_0 (1 - e^{-t_0/\tau})$, где $\tau = R_3 C$. По определению ОУ напряжение на его выходе записывается так: $u_2 = \mu(u_C - u_{R_2})$. Момент изменения знака находится из уравнения $\mu(u_C - u_{R_2}) = 0$ или $U_0 (1 - e^{-t_0/\tau}) = U_0 R_2 / (R_1 + R_2)$. В результате решения данного уравнения имеем:

$$t_0 = \tau \ln(1 + R_2 / R_1).$$

10. ВРЕМЕННОЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

10.1. ПЕРЕХОДНЫЕ И ИМПУЛЬСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Единичная импульсная функция (δ -функция, функция Дирака).
2. Импульсная характеристика цепи.
3. Связь между импульсной характеристикой цепи и операторной передаточной функцией.
4. Определение устойчивости цепи по ее импульсной характеристике.
5. Переходная характеристика цепи.
6. Связь между переходной характеристикой цепи и операторной передаточной функцией.
7. Связь между импульсными и переходными характеристиками.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

10.1р. Определить импульсную характеристику цепи¹, схема которой изображена на рис. 10.1 для следующих случаев: а) воздействие — напряжение, реакция — напряжение $u_2(t)$; б) воздействие — напряжение, реакция — ток $i_2(t)$.

10.2р. Определить переходную характеристику цепи, схема которой изображена на рис. 10.1, если воздействие и реакция являются напряжениями.

10.3р. Найти переходную и импульсную характеристики $h_u(t)$ и $g_u(t)$ цепи, схема которой приведена на рис. 10.2.

10.4. Доказать, что если полином знаменателя правильной дробной рациональной операторной передаточной функции $H(p) = M(p)/N(p)$ имеет простой нуль $p=0$, то оригинал вычисляется по формуле:

$$f(t) = \frac{M(0)}{N_1(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{p_k N_1'(p_k)} e^{p_k t},$$

¹ Напомним, что в зависимости от того, какая величина (напряжение или ток) рассматриваются в качестве воздействия в реакции, импульсные и переходные характеристики могут быть четырех типов. Чтобы их различать будем применять соответствующие индексы. Индекс « u », когда реакция и воздействие — напряжение, индекс « i », когда реакция и воздействие — ток; индекс « y » когда воздействие — напряжение, а реакция — ток; индекс « z », когда воздействие — ток, а реакция — напряжение.

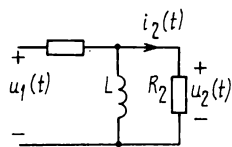


Рис. 10.1

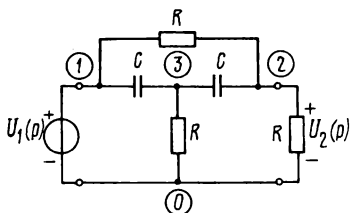


Рис. 10.2

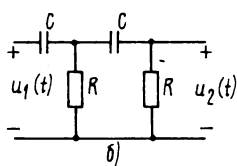
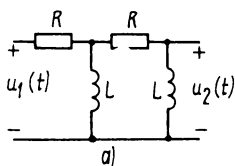


Рис. 10.3

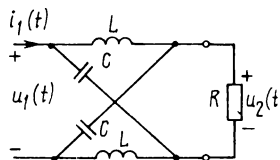


Рис. 10.4

где $N_1(p) = N(p)/p$, n — степень полинома $N_1(p)$.

10.5. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 7.2, найти $g_u(t)$ и $h_u(t)$, если $R=1$ кОм, $C=1$ мкФ, $L=1$ Гн.

10.6. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 7.3, найти $g_i(t)$ и $h_i(t)$, если $R=2$ кОм, $C=2$ мкФ, $L=0,5$ Гн.

10.7. Для цепей, схемы которых изображены на рис. 7.4, найти $g_u(t)$, $g_y(t)$, $h_u(t)$ и $h_y(t)$, если $R=R_n=0,5$ кОм, $C=4$ мкФ, $L=0,25$ Гн.

10.8. На рис. 9.3. приведена схема некоторой цепи. Выражения для сопротивлений даны в табл. 9.2. Найти переходные $h_u(t)$ и импульсные $g_u(t)$ характеристики данной цепи, если нормированные параметры элементов следующие: $R_1=R_2=1$, $L=1$, $C=C_1=C_2=1$.

10.9. Для RL - и RC -цепей, схемы которых изображены на рис. 10.3, найти переходную $h_u(t)$ и импульсную $g_u(t)$ характеристики. Параметры элементов цепи: $R=1$ кОм, $L=1$ Гн, $C=2$ мкФ.

10.10. На вход некоторой цепи при нулевых начальных условиях в момент $t=0$ подается экспоненциально убывающее напряжение $u_1(t)=2e^{-500t}$, В. Выходное напряжение $u_2(t)=4e^{-500t}-4e^{-1000t}$, В. Найти переходную характеристику цепи.

10.11. Решить предыдущую задачу, если $u_2(t)=4e^{-500t}-2e^{-50t}$, В.

10.12. Определить переходную $h_u(t)$ и импульсную $g_u(t)$ характеристики RLC -цепи, изображенной на рис. 9.2, б при $R>0,5\sqrt{L/C}$.

10.13*. Решить предыдущую задачу, если $R=0,5\sqrt{L/C}$. Найти момент t_3 , соответствующий максимуму переходной характеристики и значение этого максимума.

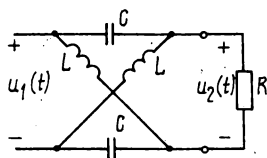


Рис. 10.5

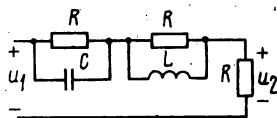


Рис. 10.6

10.14. Симметричная мостовая цепь нагружена на сопротивление $R = \sqrt{L/C}$ (рис. 10.4). Определить переходную $h(t)$ и импульсную $g(t)$ характеристики цепей для следующих случаев: а) воздействие — u_1 , реакция — i_1 ; б) воздействие — u_1 , реакция — i_2 . Дать физическую интерпретацию полученным результатам.

10.15. Решить задачу 10.14 для цепи, схема которой изображена на рис. 10.5.

10.16. Найти импульсную $g_u(t)$ и переходную $h_u(t)$ характеристики цепи, схема которой изображена на рис. 6.17, если $\mu \rightarrow \infty$.

10.17*. Найти импульсную $g_u(t)$ и переходную $h_u(t)$ характеристики цепей, схемы которых приведены в Приложении 4.

10.18. На вход цепи с переходной характеристикой $h(t) = e^{-200t}$ в момент $t_1 \neq 0$ подается единичное ступенчатое воздействие. Чему равна реакция? Построить графики реакции цепи, если: а) $t_1 = 0,5$ мс; б) $t_1 = -1$ мс.

10.19. Решить задачу 10.18 для переходных характеристик $h(t)$, определяемых выражениями: а) $2 - e^{-100t}$; б) $1 - e^{-100t} - e^{-200t}$; в) $3e^{-200t} \sin 400t$.

10.20р*. Вычислить интеграл $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x-x_0)dx$, если $f(x)$ ограничена на интервале $[x_1, x_2]$ и непрерывна в точке $x = x_0$, а x_0 лежит внутри интервала интегрирования.

10.21. При каком соотношении между параметрами L и C в цепи со схемой рис. 10.6 ее импульсная характеристика $g(t) = 0,5\delta(t)$, а переходная $h(t) = 0,5$?

10.2. ВРЕМЕННОЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Интегралы наложения.
2. Интегралы Дюамеля¹.
3. Дифференцирующие и интегрирующие цепи.

¹ В литературе часто интегралы Дюамеля также называют интегралами наложения.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

10.22р. В цепи (рис. 10.1) при $t > 0$ действует напряжение $u_1(t) = Ae^{-\alpha t}$. Используя понятия переходной и импульсной характеристик, найти $u_2(t)$.

10.23р. Переходная характеристика некоторой цепи имеет вид $h(t) = Ae^{-\alpha t}$ при $t \geq 0$ и $h(t) = 0$ при $t < 0$. Определить реакцию на видеопульс прямоугольной формы, амплитуда которого равна B , а время существования $0 \dots t_0$.

10.24р. Найти реакцию цепи с переходной характеристикой $h(t)$ на воздействие, показанное на рис. 10.7.

10.25. Определить отклики цепи на воздействия, показанные на рис. 10.8, а, б, если переходная характеристика имеет вид $h(t) = 2e^{-t}$. Построить графики откликов.

10.26. Найти отклики цепи на воздействия, показанные на рис. 10.8, а, б, если переходная характеристика имеет вид: $h(t) = 2 - e^{-t}$. Построить графики откликов.

10.27. Определить входную реакцию последовательного RC -контура при воздействии с момента $t = 0$ напряжения $u(t) = at$. Решить задачу для последовательного RL -контура.

10.28. В последовательном контуре $R = 2$ Ом, $L = 1$ Гн с момента $t = 0$ действует напряжение: а) $u(t) = 4e^{-4t}$; б) $u(t) = 4 - 4e^{-4t}$. Определить для каждого воздействия ток в контуре, используя понятия импульсной и переходной характеристик.

10.29. Найти, используя интеграл наложения, реакцию цепи с импульсной характеристикой

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 < t < \tau; \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

на воздействия

$$\text{а) } u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_m \cos(2\pi t/T), & t > 0; \end{cases} \quad \text{б) } u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E = \text{const}, & t > 0. \end{cases}$$

10.30. Рассчитать реакцию $u_2(t)$ цепей со схемами рис. 10.9, а, б на воздействия $u_1(t) = f_1(t)$, изображенные на рис. 10.10, а...в, если $R = 4$ Ом, $C = 0,5$ мкФ, $\mu = \infty$.

10.31*. Условие задачи 10.30. Расчитать погрешность интегрирования и дифференцирования, осуществляемые цепями, схемы ко-

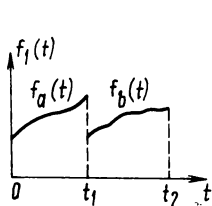


Рис. 10.7

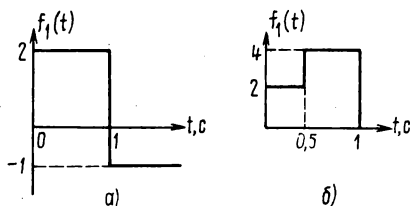


Рис. 10.8

Рис. 10.9

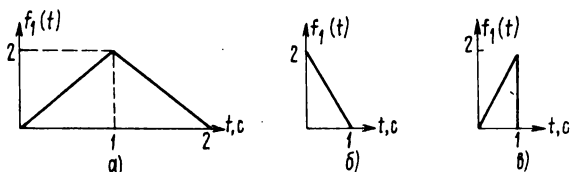
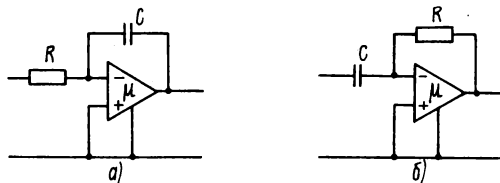


Рис. 10.10

торых показаны на рис. 10.9, если $\mu = 10, 100, 10\,000$. Под погрешностью следует понимать разность между откликами при реальном и идеальном интегрировании и дифференцировании $\Delta(t) = |\mu_{2p}(t) - \mu_{2u}(t)|$.

10.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ¹

Применяемые в теории цепей воздействия, а также переходные и импульсные характеристики имеют скачки (разрывы непрерывности). Такие функции в классическом математическом анализе не являются дифференцируемыми, что обедняет возможности их анализа и порождает ряд неудобств. Поэтому была развита теория обобщенных функций, допускающая дифференцирование некоторых разрывных функций. Рассмотрим, например, последовательность функций

$$f_{\sigma}(t) = 1/(1 + e^{-\sigma t}), \quad \sigma = 0, 1, 2, \dots$$

Каждая из этих функций является дифференцируемой. Графики функций $f_{\sigma}(t)$ при различных σ показаны на рис. 10.11. Нетрудно видеть, что $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_{\sigma}(t) = 1(t)$. Тогда

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f'_{\sigma}(t) = 1'(t), \quad (10.1)$$

т. е. определена операция дифференцирования единичной ступенчатой функции. Рассмотрим подробнее, чему же равна производная $1'(t)$. Для этого найдем производную от функции $f_{\sigma}(t)$:

$$f'_{\sigma}(t) = \frac{-\sigma e^{-\sigma t}}{(1 + e^{-\sigma t})^2}. \quad (10.2)$$

¹ См. А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон. Переходные процессы и обобщенные функции. — М.: «Наука», 1966.

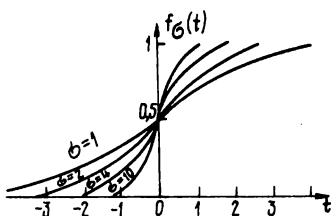


Рис. 10.11

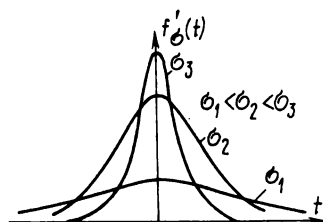


Рис. 10.12

Интересным свойством этой производной является то, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'_\sigma(t) dt = 1 \quad (10.3)$$

и не зависит от σ . График производной (10.3) показан на рис. 10.12. Из формул (10.1) и (10.2) следует, что

$$l'(t) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f'_\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Данное равенство вместе с выражением (10.3) является определением δ -функции¹. Таким образом, производная от единичной ступенчатой функции есть δ -функция:

$$l'(t) = \delta(t).$$

В силу линейности операции дифференцирования

$$[a \cdot l(t)]' = a \cdot l'(t) = a\delta(t).$$

Кроме того, очевидным является также равенство

$$l'(t - t_0) = \delta(t - t_0).$$

Рассмотренные выше положения позволяют установить связь между переходной и импульсной характеристиками:

$$g(t) = dh(t) / dt. \quad (10.5)$$

Поскольку соответствующие воздействия связаны соотношением (10.4), в линейной цепи реакции также должны быть связаны этим же соотношением. Если $h(t)$ имеет скачок в точке $t=0$, то выражение (10.5) примет вид

¹ В данном параграфе рассматривается δ -функция, симметричная относительно оси ординат.

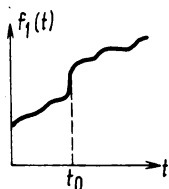


Рис. 10.13

$$g(t) = h'(t) = [h_1(t) + h(0)1(t)]' = h_1'(t) + h(0)\delta(t),$$

где $h_1'(t)$ определена для $t \geq 0+$ и является производной в классическом смысле. Проинтегрировав выражение (10.5), получим формулу для определения переходной характеристики

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Данная формула, полученная другим методом, приведена в учебнике под номером 10.16.

10.32. На рис. 10.13 изображен график воздействия. Определить реакцию цепи с помощью интегралов Дюамеля (10.16), (10.17) (см. решение задачи 10.22) и понятия производной разрывной функции.

10.33. Доказать, что реакция цепи $f_2(t)$ на воздействие $f_1(t)$ может быть определена по формулам

$$f_2(t) = f_1(t)h(0) + \int_{0+}^t f_1(t-x)h'(x)dx,$$

или

$$f_2(t) = f_1(t)h(0) + \int_{0+}^t f_1(x)h'(t-x)dx.$$

10.34. Решить задачи 10.23 ... 10.26, используя интегралы наложения (10.12) или (10.13) (см. решение задачи 10.22).

10.35. Переходные характеристики некоторых цепей имеют вид:

$$\text{а) } Ae^{-\alpha t}, \quad \text{б) } A_1 + Be^{-\beta t}.$$

Найти схемы этих цепей и рассчитать параметры элементов.

10.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 10.1. Импульсные и переходные характеристики.

В а р и а н т А. Для схем варианта А задания 7.1 найти переходные $h_u(t)$ и импульсные $g_u(t)$ характеристики и построить их графики.

В а р и а н т Б. На рис. 10.14 приведена общая схема. Варианты задания выбираются по двузначному коду. Первая цифра кода указывает номер ветви с емкостью, а вторая — номер ветви, которая удаляется из схемы. В остальные ветви включаются резисторы. Коды заданий приведены в табл. 10.1.

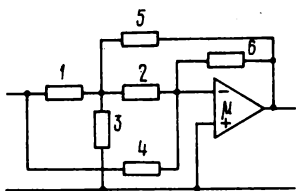


Рис. 10.14

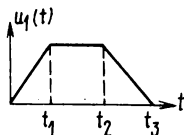


Рис. 10.15

Таблица 10.1

Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код
1	21	7	24	13	35	19	46	25	63
2	31	8	34	14	45	20	56	26	12
3	41	9	54	15	65	21	13	27	32
4	51	10	64	16	16	22	23	28	42
5	61	11	15	17	26	23	43	29	52
6	14	12	25	18	36	24	53	30	62

Значение параметров элементов вычисляется по формулам $R_k = m \cdot n \cdot k$, Ом, $C = (m + n)$, мкФ. Найти переходную $h_u(t)$ и импульсную $g_u(t)$ характеристики и построить графики.

Задание 10.2. Временной метод анализа переходных процессов.

Используя найденные в задании 10.1 переходные и импульсные характеристики, найти реакцию цепи на импульс (рис. 10.15), применяя различные формы интегралов наложения. Максимальное значение напряжения воздействия равно $(m + n) / 4$, В, $t_1 = 0,25\tau$, $t_2 = 0,5\tau$, $t_3 = \tau$, где τ — постоянная времени исследуемой цепи, численно равная модулю обратной величины полюса передаточной функции.

Решения.

10.1. Как известно, импульсная характеристика цепи численно равна ее реакции на единичное импульсное воздействие (δ -функцию). Поэтому задача нахождения импульсной характеристики сводится к расчету переходного процесса при единичном импульсном воздействии. Проще всего такой расчет выполнить операторным методом. Действительно, L -изображение реакции цепи $F_2(p)$ связано с L -изображением воздействия $F_1(p)$ посредством передаточной функции $H(p)$:

$$F_2(p) = H(p) F_1(p). \quad (10.6)$$

Так как $F_1(p) = L[\delta(t)] = 1$, то получаем замечательный результат: *L -изображением импульсной характеристики является операторная передаточная функция, и чтобы найти импульсную характеристику, достаточно взять обратное преобразование Лапласа от операторной передаточной функции, т. е. $g(t) = L^{-1}[H(p)]$.* Заметим, что для схем, содержащих конечное число элементов, $H(p)$ будет дроб-

но-рациональной функцией, и для получения обратного преобразования Лапласа можно применить теорему разложения или соответствующие таблицы.

Таким образом, для определения импульсной характеристики необходимо найти: 1) операторную передаточную функцию; 2) обратное преобразование Лапласа от операторной передаточной функции. В данном случае операторная функция $U_2(p) / U_1(p)$ имеет вид:

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = H_u(p) = \frac{R_2 L p}{(R_1 + R_2) L p + R_1 R_2}. \quad (10.7)$$

Так как $U_2(p) = R_2 I_2(p)$, то

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = H_y(p) = \frac{L p}{(R_1 + R_2) L p + R_1 R_2}. \quad (10.8)$$

Найдем обратное преобразование Лапласа от операторных передаточных функций (10.7) и (10.8). Выражения $H_u(p)$ и $H_y(p)$ являются неправильными дробно-рациональными функциями, так как степени полиномов числителя и знаменателя одинаковы. Разделив числитель на знаменатель выражения (10.7), получим:

$$H_u(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2^2 / L(R_1 + R_2)^2}{p + 1/\tau},$$

где

$$\tau = L(R_1 + R_2) / R_1 R_2. \quad (10.9)$$

Первому слагаемому соответствует δ -функция, а второму — экспонента, поэтому импульсная характеристика будет иметь вид:

$$g_u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t) - \frac{R_1 R_2^2}{L(R_1 + R_2)^2} e^{-t/\tau}.$$

Аналогично находится импульсная характеристика, если в качестве реакции рассматривается ток:

$$g_y(t) = \frac{\delta(t)}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)^2} e^{-t/\tau}.$$

10.2. Задача расчета переходной характеристики сводится к расчету переходного процесса классическим или операторным методом. Здесь воспользуемся операторным методом. Если в качестве воздействия выбрать единичную ступенчатую функцию $1(t)$, то реакция цепи численно определяет переходную характеристику

этой цепи. Учитывая, что L -изображение единичной функции равно $1/p$, т. е. $F_1 = 1/p$, на основании (10.6) имеем $F_2(p) = H(p)/p$. Чтобы найти переходную характеристику, достаточно взять обратное преобразование Лапласа от $H(p)/p$, т. е. $h(t) = L^{-1}[H(p)/p]$.

Таким образом, для определения переходной характеристики необходимо найти: 1) операторную передаточную функцию; 2) обратное преобразование Лапласа от операторной передаточной функции, деленной на p . В данном случае $H_u(p)$ найдена в процессе решения задачи 10.1 и определяется выражением (10.7). Обратное преобразование Лапласа от $H_u(p)/p$ представляет собой экспоненту:

$$h_u(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau},$$

где τ вычисляется по формуле (10.9).

10.3. Найдем вначале операторную передаточную функцию. Воспользуемся методом узловых напряжений. Перенумеруем узлы, как показано на рис. 10.2, и ко входу цепи подключим источник напряжения $u_1(t)$. Изображение задающего напряжения обозначим $U_1(p)$. Так как между базисным и первым узлами включен источник напряжения, то неизвестными оказываются напряжения второго U_2 и третьего U_3 узлов. Для этих узлов и составим узловые уравнения:

$$-Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 - Y_{23} U_3 = 0,$$

$$-Y_{31} U_1 - Y_{32} U_2 + Y_{33} U_3 = 0.$$

Учитывая данные цепи и перенеся известные величины в правую часть, запишем систему уравнений узловых напряжений в следующем виде:

$$(2G + pC) U_2 - pC U_3 = G U_1,$$

$$-pC U_2 + (2pC + G) U_3 = pC U_1.$$

Из заданной системы легко найти искомую операторную функцию

$$H(p) = \frac{U_2}{U_1} = (p^2 + 2pG/C + G^2/C^2)/(p^2 + 5pG/C + 2G^2/C^2). \quad (10.10)$$

Найдем переходную характеристику, равную обратному преобразованию Лапласа от $H(p)/p$. Определим вначале нули полинома знаменателя $H(p)$:

$$p_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{17})G/2C.$$

Обозначим $\alpha_1 = (5 - \sqrt{17})G/2C$; $\alpha_2 = (5 + \sqrt{17})G/2C$.

Таким образом, полюсы функции $H(p)/p$ будут 0, $-\alpha_1$ и $-\alpha_2$. Согласно теореме разложения переходная характеристика записывается следующим образом:

$$h(t) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_1^2 - 2G\alpha_1/C + G^2/C^2}{-\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_2^2 - 2G\alpha_2/C + G^2/C^2}{-\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)} e^{-\alpha_2 t}.$$

После вычислений запишем $h(t)$ в окончательном виде:

$$h(t) = 0,5 - 0,175 e^{-\alpha_1 t} + 0,675 e^{-\alpha_2 t}.$$

Найдем импульсную характеристику как обратное преобразование Лапласа функции $H(p)$ (10.10). Так как $H(p)$ представляет собой неправильную дробь, то путем деления числителя на знаменатель выделим целую часть:

$$H(p) = 1 - \frac{3pG/C + G^2/C^2}{(p + \alpha_1)(p + \alpha_2)}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа, найдем отдельно оригинал первого и второго слагаемого, а затем их сумму. В результате получим:

$$g_u(t) = \delta(t) - (0,815G/C) e^{-\alpha_1 t} - (5,185G/C) e^{-\alpha_2 t}.$$

10.20. Рассмотрим произведение $f(x)\delta(x-x_0)$. Поскольку $f(x)$ ограничена, а $\delta(x-x_0)$ равна нулю везде, за исключением точки $x=x_0$, рассматриваемое произведение равно нулю везде, кроме точки $x=x_0$. По условию задачи $f(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, поэтому $f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)$ и вычисляемый интеграл примет вид:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x_0) \delta(x-x_0) dx.$$

Так как $f(x_0)$ представляет собой число, то его можно вывести за знак интеграла, а интеграл от δ -функции равен единице. Таким образом,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0). \quad (10.11)$$

Полученное равенство выражает известное *фильтрующее свойство* δ -функции.

10.22. Переходная $h_u(t)$ и импульсная $g_u(t)$ характеристики найдены в задаче 10.1 и имеют вид:

$$h_u(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad g_u(t) = A_0 \delta(t) + A_1 e^{-\beta t},$$

где

$$A_0 = R_2 / (R_1 + R_2), \quad A_1 = A_0 \beta, \quad \beta = R_1 R_2 / L(R_1 + R_2).$$

При заданной импульсной характеристике отклик $f_2(t)$ при воздействии $f_1(t)$ может быть найден по одной из формул:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(x) g(t-x) dx, \quad (10.12)$$

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(t-x) g(x) dx. \quad (10.13)$$

Применим последовательно обе формулы. Вначале воспользуемся формулой (10.12). Для этого: 1) в выражении для воздействия $u_1(t)$ переобозначим переменную, вместо буквы t напомним x , т. е. $f_1(x) = u_1(x) = Ae^{-\alpha x}$; 2) в выражении для импульсной характеристики переменную t заменим на $t-x$, т. е. $g(x, t) = A_0 \delta(t-x) - A_1 e^{-(t-x)\beta}$; 3) вычислим интеграл (10.12):

$$u_2(t) = \int_0^t AA_0 e^{-\alpha x} \delta(t-x) dx - \int_0^t AA_1 e^{-\alpha x} e^{-\beta(t-x)} dx.$$

На основании фильтрующего свойства δ -функции первый интеграл равен $AA_0 e^{-\alpha t}$. Находящееся под знаком второго интеграла выражение преобразуем следующим образом: $AA_1 e^{-\beta t} e^{(\beta-\alpha)x}$. Сомножитель $AA_1 e^{-\beta t}$, как не зависящий от переменной интегрирования x , выносится за знак интеграла, а интеграл от оставшегося выражения равен $e^{(\beta-\alpha)x} / (\beta-\alpha)$. После двойной подстановки пределов интегрирования имеем:

$$u_2(t) = AA_0 e^{-\alpha t} - [AA_1 e^{-\beta t} / (\beta-\alpha)] (e^{(\beta-\alpha)t} - 1). \quad (10.14)$$

Группируем слагаемые относительно экспонент, учтя, что $A_1 = A_0\beta$:

$$u_2(t) = \frac{AA_0}{\alpha - \beta} (\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}). \quad (10.15)$$

Воспользуемся теперь формулой (10.13). Ее применение аналогично применению формулы (10.12), поэтому сразу запишем результат:

$$u_2(t) = AA_0 e^{-\alpha t} - [AA_1 / (\alpha - \beta)] (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}).$$

Чтобы данная формула совпадала с выражением (10.15), достаточно сгруппировать слагаемые относительно экспонент и учесть,

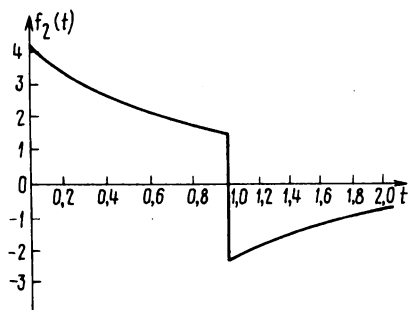


Рис. 10.16

что $A_1 = A_0\beta$. В результате таких преобразований получится выражение (10.15).

Отклик $f_2(t)$ на воздействие $f_1(t)$ можно найти, зная переходную характеристику, по одной из следующих формул:

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(x)h(t-x)dx, \quad (10.16)$$

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(t-x)h(x)dx. \quad (10.17)$$

Применение формулы (10.16) заключается в следующем: 1) в выражении для $f_1(t)$ подставляем $t=0$ и получаем $f_1(0) = u_1(0) = A$; 2) выполняем дифференцирование по t функции $f_1(t)$, т. е. находим $f_1'(t) = u_1'(t) = -\alpha A e^{-\alpha t}$; 3) в выражение для производной $f_1'(t)$ вместо переменной t подставляем x ; 4) в выражении для переходной характеристики вместо t подставляем $x-t$. В результате получим следующее выражение для отклика:

$$u_2(t) = AA_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t -\alpha A e^{-\alpha x} A_0 e^{-\beta(t-x)} dx.$$

Взяв интеграл, получим

$$u_2(t) = AA_0 e^{-\alpha t} - [AA_0 \alpha e^{-\alpha t} / (\beta - \alpha)] (e^{(\beta - \alpha)t} - 1).$$

После приведения подобных членов относительно экспонент получим выражение (10.15), что и следовало ожидать. Применение формулы (10.17) аналогично изложенному и дает тот же результат. Следует убедиться в этом самостоятельно.

Выводы. Если воздействие является дифференцируемой функцией, т. е. не содержит скачков (разрывов непрерывности) за исключением точки $t=0$, то приемлемы все формы интегралов наложения и при этом объем вычислений практически одинаков. Если же воздействие имеет разрывы первого рода, то применение интегралов Дюамеля (10.16) и 10.17) имеет особенности, заключающиеся в предварительном представлении воздействия в виде суммы непрерывных воздействий и ступенчатых функций. Применение интегралов наложения (10.12) или (10.13) таких особенностей не имеет.

10.23. В данном случае нет необходимости в применении интегралов Дюамеля, поскольку воздействие можно представить в виде суммы двух ступенчатых функций, реакции на которые просто определяются по известной переходной характеристике. Действительно, $f_1(t) = B \cdot 1(t) - B \cdot 1(t - t_0)$. Отклик на первое воздействие равняется $Bh(t)$, а второе $Bh(t - t_0)$. Таким образом, $f_2(t) = Bh(t) = AB e^{-\alpha t}$ при $0 \leq t \leq t_0$ и $f_2(t) = AB e^{-\alpha t} - AB e^{-\alpha(t - t_0)}$ при $t \geq t_0$. Выполним расчеты для некоторых конкретных данных. Пусть $A = B = 2$, $t_0 = 1$, $\alpha = 1$. Тогда $f_2(t) = 4e^{-t}$ при $0 \leq t < t_0$, $f_2(t) = 4e^{-t}(1 - e)$ при $t \geq t_0$. График отклика показан на рис. 10.16.

10.24. Данная задача имеет ту особенность, что в моменты t_1 и t_2 функция воздействия претерпевает скачок, а значит, не является дифференцируемой. Как и в предыдущей задаче, воспользуемся принципом наложения, отображая скачки в виде ступенчатой функции. При этом в расчете выделяется три интервала времени. Так, в интервале $0 \dots t_1$ отклик рассчитывается по обычной форме, например (10.16)

$$f_2(t) = f_a(0) h(t) + \int_0^t f'_a(x) h(t-x) dx, \quad 0 < t < t_1.$$

В момент t_1 действие $f_a(t)$ оканчивается и происходит скачок $f_b(t_1) - f_a(t_1) = \Delta_1$. Поэтому для интервала $[t_1, t_2]$ имеем:

$$f_2(t) = f_a(0) h(t) + \int_0^{t_1} f'_a(x) h(t-x) + \Delta_1 h(t-t_1) + \int_0^t f'_b(x) h(t-x) dx. \quad (10.18)$$

В момент t_2 действие $f_b(t)$ заканчивается и происходит скачок $-f_b(t_2)$, поэтому для интервала $[t_2, \infty]$ в состав отклика должно входить в качестве слагаемого выражение $-f_b(t_2) h(t-t_2)$ и $f_2(t)$, вычисляемое по (10.18), если в последнем интеграле верхний предел интегрирования заменить на t_2 .

11. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

11.1. АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Периодические колебания.
2. Условия Дирихле.
3. Ряд Фурье.
4. Формулы для вычисления амплитуд и начальных фаз гармонических составляющих периодической функции.
5. Спектры амплитуд периодических колебаний; дискретные спектры.
6. Связь между периодом колебания и расстояниями между спектральными линиями.
7. Средняя мощность периодического колебания (равенство Парсеваля).
8. Спектры сдвинутых на t_0 колебаний.

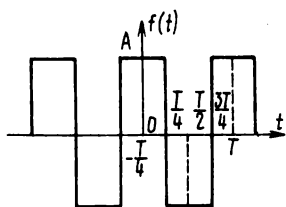


Рис. 11.1

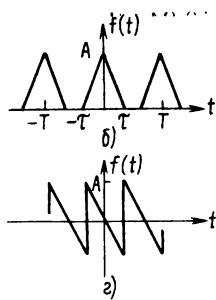
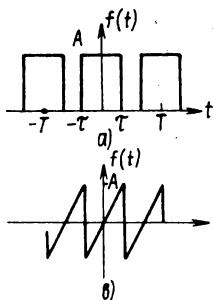


Рис. 11.2

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

11.1р. Представить в виде ряда Фурье функцию, график которой показан на рис. 11.1.

11.2р. Ко входу идеального фильтра нижних частот с входным сопротивлением 1 Ом подводится напряжение $u_1(t)$, равное функции $f(t)$, график которой показан на рис. 11.1. Используя результаты решения предыдущей задачи, определить минимальную граничную частоту полосы пропускания идеального фильтра нижних частот, при которой будет передаваться не менее чем: а) 90%, б) 95%, в) 96% средней мощности при сопротивлении нагрузки $R=1$ Ом.

11.3. Для периодических последовательностей сигналов с периодом T (рис. 11, 2, а б) требуется: 1) найти коэффициенты разложения в ряд Фурье (см. табл. П2.1); 2) построить амплитудные и фазовые спектры; 3) записать сигналы в виде ряда Фурье с конечным числом членов (усеченный ряд), которые содержат не менее 98% мощности; 4) построить графики сигналов по усеченному ряду Фурье.

11.4*. Доказать равенство Парсеваля.

11.5*. Вывести формулу для расчета действующего значения периодического напряжения или тока, выраженную через амплитуды гармонических составляющих.

11.2. АНАЛИЗ РЕЖИМА ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ¹

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Вычисление амплитуды k -й гармоники реакции при известной АЧХ цепи.
2. Вычисление начальной фазы k -й гармоники реакции при известной ФЧХ цепи.
3. Представление реакции цепи на периодическое воздействие.

¹ В данном параграфе рассматривается установившийся режим.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

11.6р. Рассчитать реакцию $u_{\text{вых}}(t)$ цепи (рис. 11.3) на периодическое воздействие $f(t)=u_{\text{вх}}(t)$, показанное на рис. 11.1. Параметры цепи и воздействия следующие: $R=10^3$ Ом, $L=0,1$ мГн, $A=U=2$ В, $\omega_1=10^4$ с $^{-1}$.

11.7. Рассчитать реакцию $i_{\text{вых}}(t)$ цепи (рис. 11.4) на периодическое воздействие $f(t)=i_{\text{вх}}(t)$, показанное на рис. 11.1. Параметры цепи и воздействия следующие: $R=10^3$ Ом, $L=0,1$ мГн, $A=2$ мА, $\omega_1=10^7$ с $^{-1}$. При решении задачи пояснить применение принципа наложения и привести соответствующие схемы аналогично задаче 11.6 (см. решение задачи 11.6 в конце главы).

11.8. Решить задачу 11.6 для воздействий, показанных на рис. 11.2.

11.9. Решить задачу 11.7 для воздействий, показанных на рис. 11.2.

11.10. На вход резонансного усилителя (см. рис. 9.4) с комплексной передаточной функцией $H(j\omega)=j\omega/[(\omega^2-b_2)+jb_1\omega]$ подается воздействие $f(t)$, показанное на рис. 11.2, а. Рассчитать отклик $f_2(t)$, если $a=10$, $b_1=0,5$, $b_2=1$, $\omega_1=1$, $A=1$, $\tau=T/4$. Построить спектры амплитуд и фаз воздействия и отклика.

11.11. Решить задачу 11.10 для остальных воздействий рис. 11.2, приняв $\tau=0,2 T$, $A=1$, $\omega_1=1$.

11.12*. На входе цепи (рис. 11.5) действует напряжение $u_{\text{вх}}(t)=f(t)$, показанное на рис. 11.2, б. Определить параметры L и C контура так, чтобы амплитуда третьей гармоники отклика была максимально возможной, а амплитуда первой гармоники отклика была бы в 10 раз меньше амплитуды третьей гармоники. При этом известно, что $\omega_1=10^5$ с $^{-1}$, $R=10$ Ом, $\tau=T/4$.

11.13*. Решить задачу 11.12 для остальных воздействий, показанных на рис. 10.2.

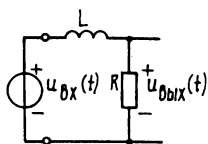


Рис. 11.3

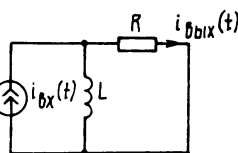


Рис. 11.4

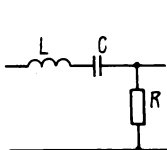
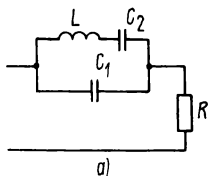
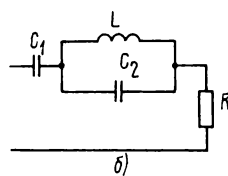


Рис. 11.5



а)



б)

Рис. 11.6

11.14*. Построить простейшую цепь, позволяющую полностью подавить заданную гармонику воздействия.

11.15. Найти параметры емкостей C_1 и C_2 (см. рис. 11.6, а), при которых напряжение первой гармоники на резисторе R было бы максимальным, а напряжение k -й гармоники равнялось бы нулю, если $L=0,1$ Гн, $\omega_1=100$ π с $^{-1}$.

11.16. Решить задачу 11.15 для цепи, схема которой показана на рис. 11.6, б.

11.17. По известной комплексной передаточной функции некоторой цепи

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2 - a_1 j\omega + a_2}{-\omega^2 + a_1 j\omega + a_2}$$

найти выражение для импульсной характеристики этой цепи, если $a_1^2=4a_2$. При решении задачи воспользоваться табл. 9.1 учебника.

11.3. АНАЛИЗ РЕЖИМА НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Прямое и обратное преобразование Фурье.
2. Отличие между спектрами периодического и непериодического сигнала; комплексная спектральная плотность.
3. Свойства преобразования Фурье; линейность, четность спектральной плотности амплитуд и нечетность спектральной плотности фаз, теорема запаздывания.
4. Спектры типичных элементов сигналов: видео П-импульса δ -функции, радиоимпульса с прямоугольной огибающей.
5. Теорема (формула) Рэлея, спектральная плотность энергии.
6. Одностороннее преобразование Фурье и его связь с преобразованием Лапласа.
7. Последовательность операций при частотном методе анализа переходных процессов.
8. Условия безыскаженной передачи.
9. Реакция идеального фильтра на импульсное $\delta(t)$ и ступенчатое воздействия.
10. Связь между временными и частотными характеристиками электрической цепи.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

11.18. Для элементов сигнала, изображенных на рис. 11.7, а...е, найти спектральные плотности амплитуд, спектры фаз, спектральные плотности энергии.

11.19. Найти спектральную плотность амплитуд и спектр фаз колоколообразного импульса $f(t) = Ae^{-\beta t^2}$ (импульс Гаусса).

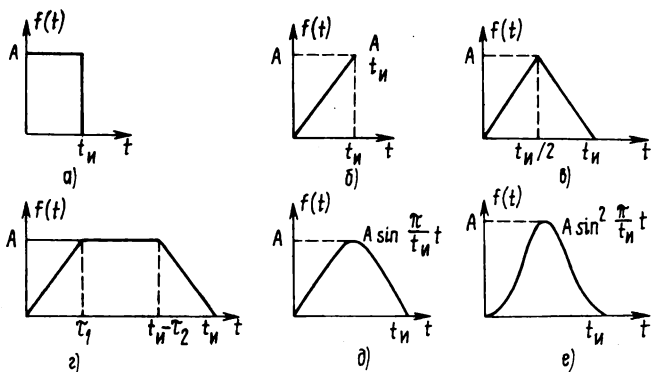


Рис. 11.7

Указание. При решении задачи полезно использовать табличный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

11.20р. Найти комплексную передаточную функцию цепи, которая сигнал $f_1(t)$ превращает в сигнал $f_2(t)$, если

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}/\alpha, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} te^{-\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

11.21р.* Для рассматриваемого в задаче 11.20 импульса $f_1(t)$ найти произведение длительности импульса на ширину его спектра.

11.22.* Решить задачу 11.20, если входным воздействием является треугольный импульс длительности t_n (рис. 11.7, в), а выходным — П-импульс той же длительности (рис. 11.7, а).

11.23.* Решить задачу 11.20, если входным воздействием является П-импульс длительностью t_n (рис. 11.7, а), а выходным — треугольный импульс той же длительности.

11.24. Для импульсов, приведенных в табл. П2.2, найти произведение ширины спектров на длительность импульсов (см. решение зад. 11.21).

11.25.* Пусть канал связи представляет собой идеальный ФНЧ с частотой среза ω_c . Передача ведется δ -импульсами. Прием осуществляется с помощью однократного отсчета в моменты (отсчетные), когда реакция на δ -импульс достигает своего максимального значения. С каким минимальным периодом могут следовать δ -функции, чтобы их реакции в отсчетные моменты не влияли друг на друга?

11.26. По заданным импульсным характеристикам найти комплексные передаточные функции: а) $g(t) = \delta(t) + e^{-2t}$, б) $g(t) = e^{-2t} - e^{-4t}$, в) $g(t) = \frac{A}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$.

11.27.* Доказать, что если $F(j\omega)$ является преобразованием Фурье функции $f(t)$, то преобразование Фурье функции $f_1(t) = f(t)e^{\pm j\omega_0 t}$ будет $F_1(j\omega) = F(j\omega \mp j\omega_0)$.

11.28.* Используя теорему смещения (задача 11.27), найти спектр радиоимпульса $f(t) \cos \omega_0 t$, $0 \leq t < t_n$, где $f(t)$ — огибающая радиоимпульса, имеющая комплексную спектральную плотность $F(j\omega)$.

11.29.* Решить задачу 11.28, если $f(t)$ представляет собой прямоугольный импульс, а длительность импульса $t_n = 2\pi/\omega_0$.

11.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС¹. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАНИЙ

11.30. Пусть $F(j\omega)$ является комплексной спектральной плотностью функции $f(t)$. Чему равна спектральная плотность производной этой функции?

11.31. Пусть $F(j\omega)$ является комплексной спектральной плотностью функции $f(t)$. Чему равна спектральная плотность интеграла от функции, взятого в пределах $-\infty \dots t$?

11.32. Как выражается спектральная плотность произведения сигналов по известным спектральным плотностям каждого из них?

11.33. Как выражается спектральная плотность свертки двух

сигналов $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x)f_2(x)dx$ через спектральную плотность каждого из них?

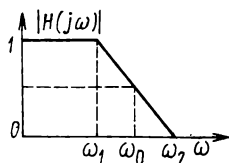
11.34. Найти спектральную плотность единичной ступенчатой функции.

11.35. Найти спектральную плотность постоянного во времени воздействия A_0 при $-\infty \leq t \leq \infty$.

11.36. Найти спектральную плотность функции $s(t) = e^{j\omega_0 t}$.

11.37. Найти спектральную плотность гармонического колебания $s(t) = S_m \cos \omega_0 t$, если $-\infty \leq t \leq \infty$.

Рис. 11.8



¹ При решении задач данного раздела можно воспользоваться учебником С. Н. Баскаков. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 1983.

11.38. Найти спектральную плотность радиоимпульса с огибающей прямоугольной формы, пользуясь результатами решения задачи 11.32.

11.39. Показать, что для цепи с АЧХ (рис. 11.8) и линейной ФЧХ- ωt_0 отклик на δ -функцию имеет нули при $t = t_0 \pm k/2f_0$ ($k \neq 0$), т. е. в те же моменты, что и на выходе ФНЧ с частотой среза $\omega_0 = 0,5 (\omega_2 - \omega_1)$.

11.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 11.1. Прохождение периодических колебаний через идеальный фильтр нижних частот.

Для заданного из табл. П2.1 периодического воздействия построить спектр амплитуд и спектр фаз. Рассчитать и построить графики сигнала и его спектра на выходе идеального ФНЧ, если частота среза ω_c фильтра принимает следующие значения:

- 1) $\omega_1 < \omega_c < 2\omega_1$; 2) $3\omega_1 < \omega_c < 4\omega_1$; 3) $5\omega_1 < \omega_c < 6\omega_1$;
- 4) $7\omega_1 < \omega_c < 8\omega_1$.

Параметры воздействия выбираются следующим образом:

$U_0 = (n + m)$, В; $\omega_1 = (m + n)$, кГц, $\tau_1 = \alpha_1(m + n)T$, $\tau_2 = \alpha_2(n + m)T$, где $\alpha_1 = 0,02$, $\alpha_2 = 0,04$ при $m + n < 10$, $\alpha_1 = 0,01$, $\alpha_2 = 0,02$ при $10 < m + n < 25$; $\alpha_1 = 0,05$, $\alpha_2 = 0,01$ при $25 \leq m + n \leq 50$.

Задание 11.2. Прохождение периодических колебаний через цепь первого порядка.

Исследуемая схема выбирается так же, как и в задании 7.1 (вариант А), а воздействие — как в задании 11.1. Рассчитать и построить графики сигнала и его спектра на выходе цепи, ограничившись семью гармоническими составляющими.

Решения.

11.1. Как известно, периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(t) = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (11.1)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$, T — период колебания.

Значения A_k и φ_k можно найти из уравнения

$$A_k e^{j\varphi_k} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (11.2)$$

Выбрав $t_0 = -T/4$, представим выражение (11.2) в виде суммы двух интегралов:

$$A_k e^{j\varphi_k} = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A e^{-jk\omega_1 t} dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} (-A) e^{-jk\omega_1 t} dt \right] = \frac{2A}{jk\omega_1 T} \times \\ \times \left(-e^{jk\omega_1 t} \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + e^{-jk\omega_1 t} \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right).$$

Подставив пределы интегрирования и учтя, что $\omega_1 = 2\pi/T$, получим

$$A_k e^{j\varphi_k} = \frac{A}{jk\pi} \left(-e^{jk\pi/2} + e^{-jk\pi/2} + e^{-j3k\pi/2} - e^{-j3k\pi/2} \right).$$

Каждую из экспонент с мнимым показателем представим в виде суммы косинуса и синуса. Учитывая, что $\cos(k\pi/2) = \cos(3k\pi/2)$, а $\sin(k\pi/2) = -\sin(3k\pi/2)$, окончательно имеем

$$A_k e^{j\varphi_k} = \frac{4A}{k\pi} \sin(k\pi/2). \quad (11.3)$$

Коэффициент A_0 вычисляется по формуле (11.2) при $k=0$, т. е.

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \quad (11.4)$$

Легко убедиться, что в данном примере $A_0 = 0$.

Проанализируем полученное выражение. В разложении данной функции отсутствует постоянная составляющая. Из (11.4) следует, что *любая симметричная относительно оси абсцисс функция не имеет постоянной составляющей*. Из формулы (11.3) следует, что в разложении имеются только нечетные гармонические составляющие. Если k принимает значения 1, 5, 9, ..., то $A_k e^{j\varphi_k}$ является положительным числом, т. е. $\varphi_k = 0$. Если же $k = 3, 7, 11, \dots$, то $A_k e^{j\varphi_k}$ — отрицательное число, т. е. $\varphi_k = \pm\pi$. Таким образом,

$$A_k = \begin{cases} 4A/k\pi, & k=1, 3, 5, \dots \\ 0, & k=0, 2, 4, \dots \end{cases} \\ \varphi_k = \begin{cases} 0, & k=1, 5, 9, \dots \\ \pm\pi, & k=3, 7, 11. \end{cases}$$

На рис. 11.9, а и б показаны спектры амплитуд и фаз заданного колебания.

11.2. Для решения задачи воспользуемся равенством Парсеваля

$$P = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k}{\sqrt{2}}\right)^2. \quad (11.5)$$

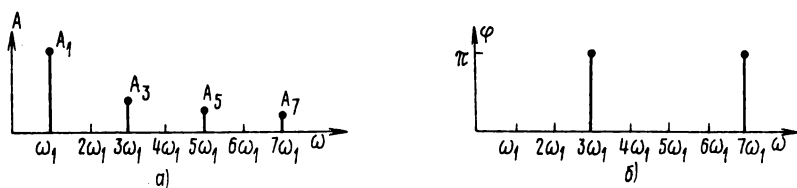


Рис. 11.9

Задача сводится к определению минимального числа членов ряда, при котором выполняется неравенство

$$\left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{A_k}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \eta P.$$

Для данного случая $P = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = A^2$.

Зная амплитуды гармонических составляющих A_k [см. 11.5)], составим таблицу (табл. 11.1), в которой отразим зависимость мощности сигнала на выходе идеального ФНЧ от его граничной частоты полосы пропускания.

Как видим, 90% мощности заключается в двух (первой и третьей) гармониках.

Таблица 11.1

ω_c	ω_1	$3\omega_1$	$5\omega_1$	$7\omega_1$	$9\omega_1$	$11\omega_1$
$P_{\text{вых}}$	$0,81A^2$	$0,9A^2$	$0,93A^2$	$0,949A^2$	$0,959A^2$	$0,966A^2$

11.6. Анализ цепей при периодическом негармоническом воздействии основывается на: а) представлении воздействия в виде ряда Фурье; б) принципе наложения. Заданное воздействие разложено в ряд Фурье при решении задачи 11.1. Запишем это разложение, конкретизировав обозначения: вместо $f(t)$ будем писать $u_{\text{вх}}(t)$; вместо $A_k - U_{\text{мвх}k}$; вместо $\varphi_k - \varphi_{\text{вх}k}$. Итак,

$$U_{\text{мвх}k} = \begin{cases} 4U/k\pi, & k=1, 3, 5, \dots \\ 0, & k=0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{вх}k} = \begin{cases} 0, & k=1, 5, 9, \dots \\ \pm\pi, & k=3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Для наглядности ряд Фурье представим в развернутом виде:

$$u_{\text{вх}}(t) = (4U/\pi) \cos \omega_1 t + (4U/3\pi) \cos(3\omega_1 t \pm \pi) + (4U/5\pi) \times \\ \times \cos 5\omega_1 t + (4U/7\pi) \cos(7\omega_1 t \pm \pi) + \dots$$

Рис. 11.10

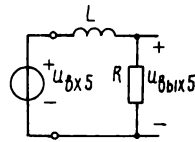
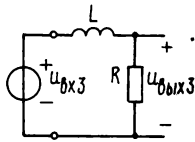
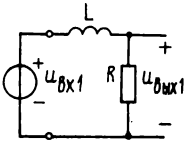
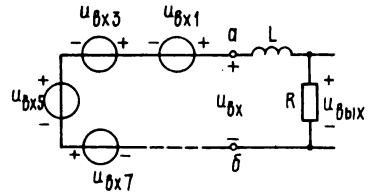


Рис. 11.11

Для краткости развернутой записи введем обозначение

$$(4U/k\pi) \cos(k\omega_1 t + \varphi_{bxk}) = u_{bxk}(t).$$

С учетом данного обозначения входное воздействие примет вид:

$$u_{bx}(t) = u_{bx1}(t) + u_{bx3}(t) + u_{bx5}(t) + \dots \quad (11.6)$$

Представленное таким образом воздействие можно реализовать в виде последовательного соединения источников напряжения с задающими гармоническими напряжениями $u_{bx1}(t)$, $u_{bx3}(t)$, $u_{bx5}(t)$, ... как показано на рис. 11.10. Действительно, напряжение между точками a и b равно сумме напряжений на элементах, составляющих путь от точки a к точке b . Эта сумма совпадает с выражением (11.6). Воспользуемся далее принципом наложения, согласно которому необходимо найти реакции на гармонические воздействия последовательности цепей, схемы которых изображены на рис. 11.11. Применение разложения в ряд Фурье и принципа наложения позволило свести задачу анализа линейных цепей при периодическом воздействии к известной задаче анализа цепей при гармоническом воздействии, так как каждое из задающих напряжений u_{bx1} , u_{bx3} , ... является гармоническим. Для заданной цепи АЧХ и ФЧХ вычисляются по формулам

$$|H_n(j\omega)| = R/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \Theta(\omega) = -\arctg(\omega L/R).$$

Если на входе данной цепи действует напряжение

$$u_{bxk} = (4U/k\pi) \cos(k\omega_1 t + \varphi_{bxk}),$$

то выходное напряжение вычисляется по формуле

$$u_{bixk} = (4U|H_n(jk\omega_1)|/k\pi) \cos[k\omega_1 t + \varphi_{bxk} + \Theta(k\omega_1)].$$

Сумма реакций на каждое гармоническое воздействие дает искомую реакцию на заданное воздействие:

$$u_{bix}(t) = u_{bix1} + u_{bix3} + u_{bix5} + \dots$$

Результаты расчетов приведены в табл. 11.2. Выходное напряжение, представленное в виде ряда, записывается следующим образом:

$$u_{\text{вых}}(t) = 1,8 \cos(10^4 t - 0,25\pi) + 0,268 \cos(3 \cdot 10^4 t + 0,898\pi) + \dots$$

Таблица 11.2

ω	ωL	$R^2 + (\omega L)^2$	$ H(j\omega) $	$\omega L/R$	$\Theta(\omega)$, рад	$U_{\text{выхк}}$	$\varphi_{\text{выхк}}$
ω_1	10^3	$2 \cdot 10^6$	$1/\sqrt{2}$	1	$-0,25\pi$	1,8	$-0,25\pi$
$3\omega_1$	310^3	$10 \cdot 10^6$	$1/\sqrt{10}$	1/3	$-0,102\pi$	0,268	$-0,898\pi$
$5\omega_1$	510^3	$26 \cdot 10^6$	$1/\sqrt{26}$	1/5	$-0,069\pi$	0,1	$-0,069\pi$
$7\omega_1$	710^3	$50 \cdot 10^6$	$1/\sqrt{50}$	1/7	$-0,045\pi$	0,051	$0,955\pi$

Выводы. Данная цепь изменяет спектр амплитуд воздействия, уменьшая все амплитуды. Это уменьшение непропорционально. Так, амплитуда первой гармоники уменьшается $\approx 1,4$ раза, амплитуда третьей гармоники в $\approx 3,2$ раза, пятой — в ≈ 5 раз и т. д. Таким образом, данная цепь подавляет высокочастотные составляющие колебания.

11.20. Из таблицы П2.2 находим спектры сигналов:

$$\begin{aligned} f_1(t) &\div F_1(j\omega) = 1/\alpha (\alpha + j\omega), \\ f_2(t) &\div F_2(j\omega) = 1/(\alpha + j\omega)^2. \end{aligned}$$

Разделив второе выражение на первое, получим искомую передаточную функцию

$$H(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{F_1(j\omega)} = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}.$$

Такую передаточную функцию легко реализовать в виде RL -цепи (рис. 11.3), нормированные элементы которой $R=\alpha$, $L=1$, если воздействие $f_1(t)$ и отклик $f_2(t)$ представляют собой напряжения.

11.21. Понятие длительности импульса и ширины спектра являются условными. Импульсы могут быть бесконечной длительности, а спектральная плотность занимать всю ось частот. Однако с увеличением t и ω значение импульсного сигнала и спектральной плотности должны стремиться к нулю, так как сигналы и спектры должны удовлетворять условиям абсолютной интегрируемости, поэтому есть возможность условно установить длительность импульсов и ширину спектра. Так, длительностью неограниченного во времени импульса будем считать промежуток времени, по истечении которого значение импульсного сигнала уменьшится в

10 раз по сравнению с его максимальным значением. В данной задаче $t_n = (\ln 10)/\alpha = 2,3/\alpha$. Также условимся, что на верхней частоте спектральная плотность уменьшится в 10 раз по отношению к максимальному значению. В данной задаче $\omega_b = 0,995\alpha$. Искомое произведение равно $\omega_b t_n = 2,29$ и не зависит от α .

Замечание. Рассматриваемое произведение $\omega_b t_n$ является важной характеристикой элементов сигнала. Чем меньше это произведение, тем уже требуется полоса канала для передачи импульсного сигнала одной и той же длительности.

12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

12.1. УРАВНЕНИЯ И ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Определение проходного четырехполюсника (2×2 -полюсника); выбор положительных направлений напряжений и токов на внешних зажимах четырехполюсников.
2. Классификация четырехполюсников: пассивные и активные, автономные и неавтономные, обратимые и необратимые, симметричные и несимметричные; уравновешенные и неуравновешенные четырехполюсники, трехполюсники.
3. Уравнения передачи, параметры четырехполюсников и их смысл.
4. Взаимосвязи между параметрами четырехполюсника.
5. Идеальный трансформатор.
6. Параметры управляемых источников как четырехполюсников.
7. Соединения четырехполюсников и их расчет.
8. Условия регулярности соединения.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.


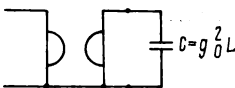

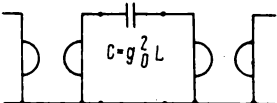
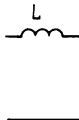
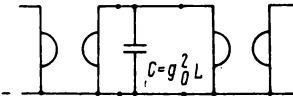
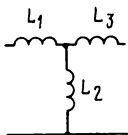
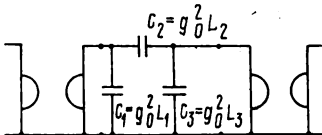
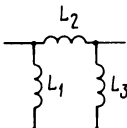
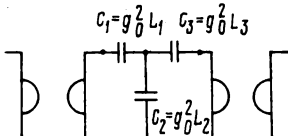
12.1. Получить табл. 12.1, приведенную в учебнике на стр. 313.

12.2р. Найти Y -параметры T -образного четырехполюсника (рис. 12.1)

12.3. Найти матрицы всех параметров для T - и Π -образных четырехполюсников. Убедиться, что оба четырехполюсника обратимые.

12.4. Найти матрицы всех параметров симметричного мостового четырехполюсника (рис. 12.2, а).

Таблица 12.1

	Индуктивная цепь	Гираторная цепь
1		
2		
3		
4		
5		

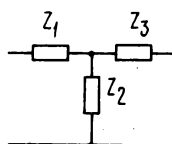


Рис. 12.1

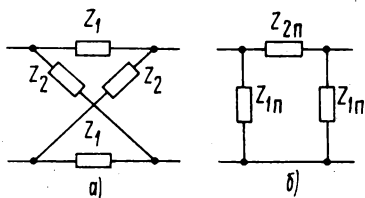


Рис. 12.2

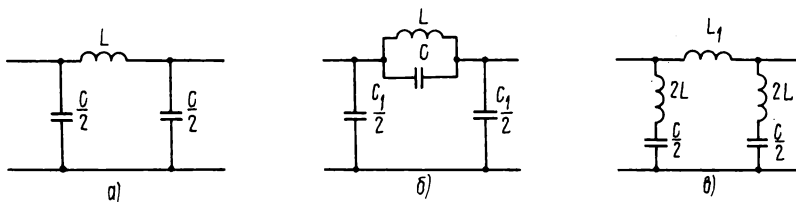


Рис. 12.3

Рис. 12.4

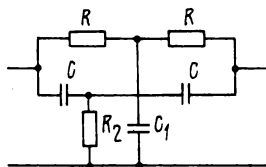
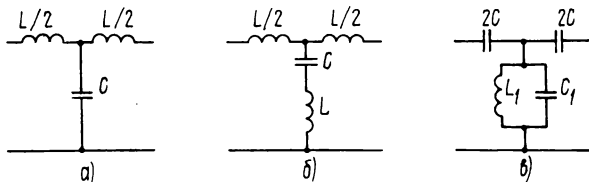


Рис. 12.5

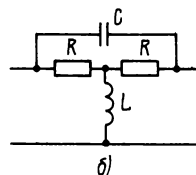
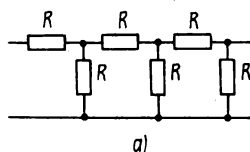


Рис. 12.6

12.5р. Найти проводимости Y_{1n} и Y_{2n} П-образного четырехполюсника (рис. 12.2, б), при которых он будет эквивалентен симметричному мостовому четырехполюснику. Найти проводимости Y_1 и Y_2 мостового четырехполюсника, при которых он будет эквивалентен П-образному четырехполюснику.

12.6. Найти мостовые четырехполюсники, эквивалентные приведенным на рис. 12.3, а ... в П-образным четырехполюсникам.

12.7. Решить задачу 12.5 для Т-образного и мостового четырехполюсника.

12.8. Найти мостовые четырехполюсники, эквивалентные четырехполюсникам, схемы которых приведены на рис. 12.4, а ... в.

12.9. Найти матрицу Y двойного Т-образного четырехполюсника (рис. 12.5) при условии, что $C_1 = 2C$, $R_2 = R/2$.

12.10. Определить А-параметры четырехполюсника, схема которого представлена на рис. 12.6, а; $R = 1$ Ом. Найти параметры резисторов, которые образуют эквивалентные Т- и П-структуры.

12.11. Определить Y параметры перекрытого Т-образного четырехполюсника (рис. 12.6, б) при $R = 100$ Ом, $L = 0,1$ Гн, $C = 10^{-5}$ Ф, $\omega = 1000$ с $^{-1}$.

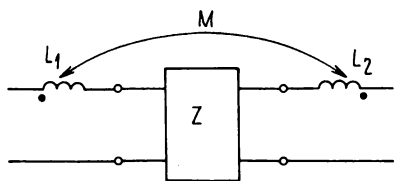


Рис. 12.7

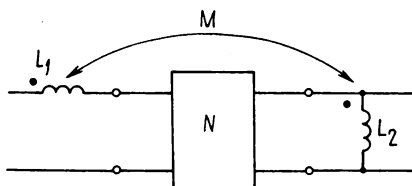


Рис. 12.8

12.12. Показать, что четырехполюсники, схемы которых изображены на рис. 3.40, не являются обратимыми.

12.13.* A -параметры четырехполюсника на частоте ω имеют следующие значения: $A_{11}=A_{22}=1$, $A_{12}=1$, $A_{21}=1$. Является ли данный четырехполюсник симметричным?

12.14.* A -параметры некоторого четырехполюсника выражаются формулами $A_{11}=j\omega+1$; $A_{12}=2$; $A_{21}=0,5j\omega$; $A_{22}=1$. Какие A -параметры должен иметь другой четырехполюсник, чтобы, будучи включенным каскадно после первого, он вместе с ним образовал симметричную структуру?

12.15.* При каком соотношении между A -параметрами двух симметричных четырехполюсников их каскадное соединение образует симметричный четырехполюсник?

12.16.* Доказать, что входное сопротивление резистивной цепи любой структуры не может уменьшаться при увеличении сопротивления любой из ее ветвей.

12.17.* К обратимому четырехполюснику, Z -параметры которого известны, подключены связанные индуктивности (рис. 12.7). Найти Z -параметры полученного четырехполюсника.

12.18.* Найти какие-либо параметры четырехполюсника со схемой рис. 12.8, полагая известными параметры четырехполюсника N .

12.19.* Показать, что любой обратимый четырехполюсник эквивалентен T - и Π -образным четырехполюсникам (в общем случае физически нереализуемым). Найти сопротивления (проводимости) T - и Π -образных четырехполюсников, при которых эта эквивалентность достигается.

Указание. При нахождении сопротивлений четырехполюсника с T -образной схемой рекомендуется исходить из Z -параметров, а четырехполюсники с Π -образной схемой — из Y -параметров.

12.20. Доказать, что при регулярном соединении четырехполюсников складываются матрицы Z -параметров (если соединение последовательное), матрицы H -параметров (если соединение последовательно-параллельное), матрицы F -параметров (если соединение параллельно-последовательное).

12.2. ВНЕШНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА. ИДЕАЛЬНЫЕ АКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ СОПРОТИВЛЕНИЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Внешние характеристики четырехполюсника.
2. Входные сопротивления четырехполюсника.
3. Передаточные функции односторонне нагруженного четырехполюсника.
4. Передаточные функции двусторонне нагруженного четырехполюсника.
5. Рабочая амплитудно-частотная характеристика.
6. Рабочее усиление и рабочее ослабление.
7. Рабочая передаточная функция.
8. Конверторы сопротивления, идеальный трансформатор.
9. Инверторы сопротивления, гиратор.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

12.21р. Найти передаточную функцию \dot{U}_2/\dot{U}_1 нагруженного справа на R_n четырехполюсника, схема которого показана на рис. 12.5. При каких соотношениях между параметрами элементов данная передаточная функция равна нулю на частоте $\omega_0 = G/C$?

12.22р. Определить передаточную функцию $H_u(j\omega)$ двусторонне нагруженного четырехполюсника (рис. 12.9). Резистор R_5 является нагрузкой на входе, R_4 — на выходе.

12.23. Найти передаточную функцию $H_u(j\omega)$ при нагрузке справа $R_n = R$ четырехполюсника, схема которого показана на рис. 12.6, б, если $L/C = R^2$. Построить примерный график АЧХ.

12.24. Найти рабочую передаточную функцию, а также рабочее усиление и рабочее ослабление цепи со схемой рис. 12.3, а. Сопротивления нагрузок одинаковы и равны $\sqrt{L/C}$. Построить примерный график рабочего ослабления.

Рис. 12.9

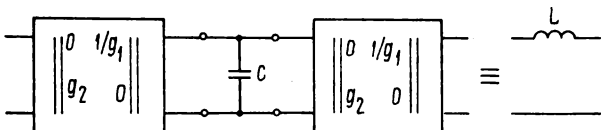
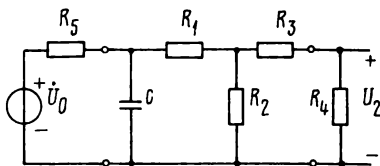


Рис. 12.10

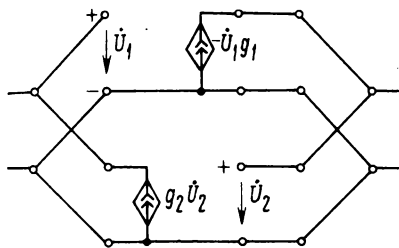


Рис. 12.11

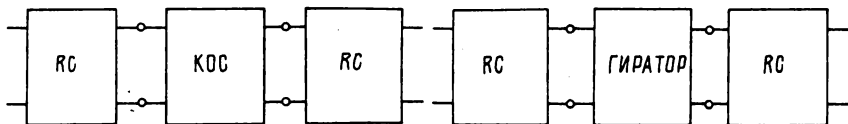


Рис. 12.12

Рис. 12.13

12.25. Решить задачу 12.24 для схемы рис. 12.4, а.

12.26. Найти, при каких условиях четырехполюсники со схемами, приведенными на рис. 12.10, будут эквивалентны. Чему при этом равно значение индуктивности?

12.27. Параметры A конвертора отрицательного сопротивления (КОС) следующие: $A_{11} = \pm k_1$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = \mp k_2$. Найти остальные существующие матрицы параметров КОС.

12.28. Параметры A гиратора следующие: $A_{11} = A_{22} = 0$, $A_{12} = \pm R_1$, $A_{21} = \pm g_2$. Найти остальные существующие матрицы параметров гиратора.

12.29. Найти матрицу A четырехполюсника, схема которого показана на рис. 12.11. Что это за четырехполюсник?

12.30. Найти передаточную функцию $H_u(j\omega)$ цепи со схемой, показанной на рис. 12.12, если известны любые параметры RC -четырёхполюсников и КОС.

12.31. Найти передаточную функцию $H_u(j\omega)$ цепи со схемой, показанной на рис. 12.13, если известны любые параметры RC -четырёхполюсников и гиратора.

12.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. АНАЛИЗ RC -ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ГИРАТОР

Как известно, катушка индуктивности по сравнению с резисторами и конденсаторами является дорогостоящим элементом и, главное, не поддается микроминиатюризации. Поэтому получили развитие активные RC -цепи, позволяющие получить те же характеристики, что и RLC -цепи, но при гораздо меньшем объеме и массе устройства. Одним из классов активных RC -цепей является

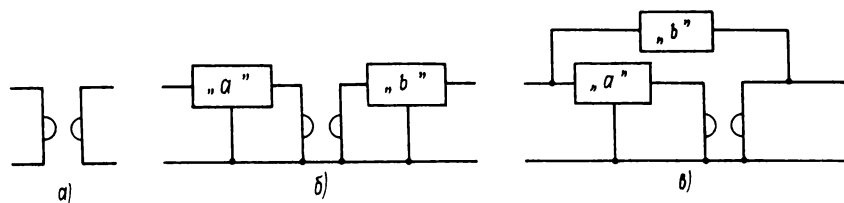


Рис. 12.14

гираторные RC -цепи, где в качестве активного элемента используется гиратор. Условное обозначение гиратора показано на рис. 12.14, а. Гиратор используют как для непосредственной реализации индуктивностей путем инверсии сопротивления емкости или в сочетании с RC -четыреполюсниками. В последнем случае рассматривают две так называемые модели: каскадную (рис. 12.14, б) и каскадно-параллельную (рис. 12.14, в). На этих рисунках буквами «а» и «б» показаны RC -четыреполюсники.

12.32. Доказать эквивалентность схем, приведенных в левой и правой колонках табл. 12.1, если $g_1 = g_2 = g_0$.

12.33. Для каскадной модели (рис. 12.14, б), найти все четыре вида операторных передаточных функций U_2/U_1 , I_2/I_1 , I_2/U_1 , U_2/I_1 , считая известными параметры четырехполюсников «а» и «б».

Таблица 12.2

№	Функция	Четыреполюсник			
		a	b	a	b
1	$\frac{U_2}{U_1}$				
2	$\frac{I_2}{I_1}$				
3	$\frac{I_2}{U_1}$				
4	$\frac{U_2}{I_1}$				

12.34. Решить задачу 12.33 для каскадно-параллельной модели.

12.35. В табл. 12.2 даны схемы четырехполюсников «а» и «б». Найти указанные в табл. 12.2 передаточные функции каскадной модели.

Решения.

12.2. Можно предложить, по крайней мере, три способа решения задачи.

Способ 1. Применение какого-либо известного метода анализа цепи. В данном случае применим метод узловых напряжений. К входным и выходным зажимам подключим источники тока и пронумеруем узлы, как показано на рис. 12.15. Запишем систему уравнений по методу узловых напряжений:

$$\begin{aligned} Y_1 \dot{U}_2 - Y_1 \dot{U}_3 &= \dot{I}_1, \\ Y_3 \dot{U}_2 - Y_3 \dot{U}_3 &= \dot{I}_2, \\ -Y_1 \dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2 + (Y_1 + Y_2 + Y_3) \dot{U}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Выразим из последнего уравнения \dot{U}_3 и подставим в первые два уравнения. После преобразования получим:

$$\begin{aligned} \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \dot{U}_1 + \frac{-Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \dot{U}_2 &= \dot{I}_1, \\ -\frac{Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \dot{U}_1 + \frac{Y_3(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \dot{U}_2 &= \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Так как полученные уравнения выражают связь токов на входе и выходе с соответствующими напряжениями, то они являются уравнениями четырехполюсника. Параметры Y , очевидно, будут следующими:

$$Y_{11} = \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \quad Y_{12} = Y_{21} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}; \quad Y_{22} = \frac{Y_3(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3}.$$

Иногда удобно иметь Y -параметры, выраженные не через проводимости, а через сопротивления ветвей:

$$Y_{11} = \frac{Z_2 + Z_3}{s}; \quad Y_{12} = Y_{21} = \frac{Z_2}{s}; \quad Y_{22} = \frac{Z_1 + Z_2}{s}, \quad (12.1)$$

где $s = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$.

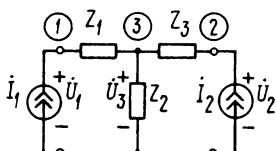


Рис. 12.15

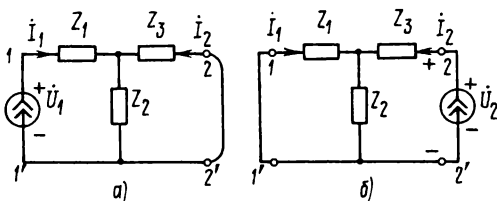


Рис. 12.16

Способ 2. Использование режимов холостого хода и короткого замыкания. При использовании таких режимов уравнения четырехполюсника упрощаются. Осуществим короткое замыкание на выходе четырехполюсника, а слева подключим источник энергии, например источник тока (рис. 12.16, а). Тогда U_2 станет равным нулю и уравнения четырехполюсника примут вид:

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1; \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1.$$

Отсюда имеем $Y_{11} = \dot{I}_1/\dot{U}_1$ при $\dot{U}_2 = 0$, т. е. Y_{11} представляет собой входную проводимость со стороны зажимов 1—1' при коротком замыкании зажимов 2—2'; $Y_{21} = \dot{I}_2/\dot{U}_1$ при $\dot{U}_2 = 0$, т. е. Y_{21} представляет собой комплексную передаточную функцию. Так как рассматриваемая цепь является последовательно-параллельной, то найти входное сопротивление не представляет труда:

$$Z_{вх} = 1/Y_{11} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{s}{Z_2 + Z_3}.$$

Для определения Y_{21} необходимо любым методом рассчитать \dot{I}_2 и \dot{U}_1 и взять их отношение: $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{вх} = \dot{I}_1 s / (Z_2 + Z_3)$,

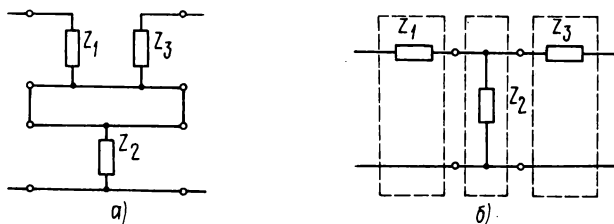
$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}, \quad Y_{21} = -\frac{Z_2}{s}.$$

Остальные параметры находятся аналогично по схеме рис. 12.16, б, где осуществлено короткое замыкание зажимов 1—1', а источник тока \dot{I}_2 подключен к зажимам 2—2'.

Способ 3. Данный способ заключается в разбиении четырехполюсника на регулярное соединение более простых четырехполюсников, параметры которых известны, и определении по ним параметров исходного четырехполюсника. Представим Т-образный четырехполюсник в виде последовательного регулярного соединения двух простых четырехполюсников (рис. 12.17, а). Пусть известны Z-параметры каждого из этих четырехполюсников:

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{Bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_2 = \begin{Bmatrix} Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{Bmatrix}.$$

Рис. 12.17



Сложив данные матрицы, получим матрицу четырехполюсника

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}. \quad (12.2)$$

Используя связь между Z - и Y -параметрами, находим Y -параметры (см. табл. 12.1 учебника):

$$Y_{11} = \frac{Z_{22}}{D_z} = \frac{Z_2 + Z_3}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - Z_2^2} = \frac{Z_2 + Z_3}{s},$$

$$Y_{21} = Y_{12} = -\frac{Z_2}{D_z} = -\frac{Z_2}{s}, \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{D_z} = \frac{Z_1 + Z_2}{s},$$

где D_z — определитель матрицы \mathbf{Z} .

Заметим, что предложенное разбиение четырехполюсника является далеко не единственным. Так, его можно представить как каскадное соединение элементарных четырехполюсников (рис. 12.17, б). В этом случае находится матрица A -параметров как произведение A -матриц элементарных четырехполюсников.

12.5 Из решения предыдущих задач известно, что матрицы Y мостовой и Π -образной схем имеют вид:

$$\mathbf{Y}_m = \begin{vmatrix} 0,5(Y_1 + Y_2) & 0,5(Y_2 - Y_1) \\ 0,5(Y_2 - Y_1) & 0,5(Y_1 + Y_2) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Y}_\pi = \begin{vmatrix} Y_{1\pi} + Y_{2\pi} & -Y_{2\pi} \\ -Y_{2\pi} & Y_{1\pi} + Y_{2\pi} \end{vmatrix}.$$

Эквивалентность четырехполюсников обуславливается равенством их матриц \mathbf{Y}_m и \mathbf{Y}_π , из которого следуют два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} Y_{1\pi} + Y_{2\pi} &= 0,5(Y_1 + Y_2), \\ -Y_{2\pi} &= 0,5(Y_2 - Y_1). \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Решив данные уравнения относительно $Y_{1\pi}$ и $Y_{2\pi}$, имеем

$$Y_{1\pi} = Y_2; \quad Y_{2\pi} = 0,5(Y_1 - Y_2).$$

Как видим, $Y_{2\pi}$ представляет собой разность двух проводимостей, а значит, не всегда реализуется пассивной цепью.

Решим уравнения (12.3) относительно Y_1 и Y_2 :

$$Y_1 = Y_{1\pi} + 2Y_{2\pi}, \quad Y_2 = Y_{2\pi}.$$

В данном случае Y_1 и Y_2 всегда реализуемы.

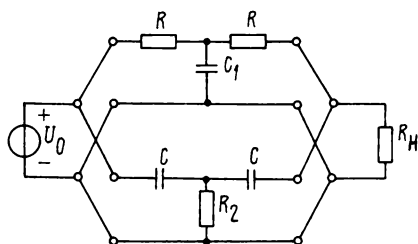


Рис. 12.18

12.21. Анализ цепей (определение входных и передаточных функций) методом четырехполюсника состоит из следующих этапов: а) заданный четырехполюсник разбивают на регулярное соединение более простых четырехполюсников, параметры которых известны или легко определяются; б) пользуясь правилами расчета регулярного соединения четырехполюсников, находят какие-либо параметры заданного четырехполюсника; в) используя известные соотношения, связывающие входные и выходные напряжения и токи через параметры четырехполюсника и нагрузки, находят искомые входные и передаточные функции.

Представим четырехполюсник в виде параллельного соединения двух Т-образных четырехполюсников (рис. 12.18.). Получилось параллельное регулярное соединение четырехполюсников, поэтому удобно пользоваться Y -параметрами. Для общего случая параметры Т-схемы найдены при решении задачи 12.2. Здесь надо учесть, что четырехполюсники являются симметричными, т. е. $Z_1 = Z_3$. Это приводит к равенству Y_{11} и Y_{22} . Все величины, относящиеся к верхнему четырехполюснику, будем обозначать с дополнительным индексом «а», к нижнему — «б», а к общему — без дополнительного индекса. На основании изложенного имеем:

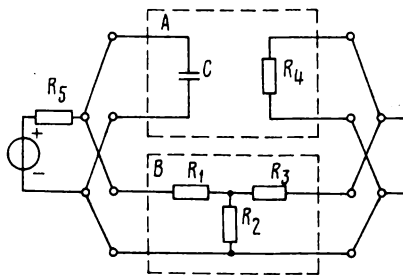
$$Y_a = \begin{vmatrix} \frac{Y_{1a}(Y_{1a} + Y_{2a})}{2Y_{1a} + Y_{2a}} & \frac{-Y_{1a}^2}{2Y_{1a} + Y_{2a}} \\ \frac{-Y_{1a}^2}{2Y_{1a} + Y_{2a}} & \frac{Y_{1a}(Y_{1a} + Y_{2a})}{2Y_{1a} + Y_{2a}} \end{vmatrix};$$

$$Y_b = \begin{vmatrix} \frac{Y_{1b}(Y_{1b} + Y_{2b})}{2Y_{1b} + Y_{2b}} & \frac{-Y_{1b}^2}{2Y_{1b} + Y_{2b}} \\ \frac{-Y_{1b}^2}{2Y_{1b} + Y_{2b}} & \frac{Y_{1b}(Y_{1b} + Y_{2b})}{2Y_{1b} + Y_{2b}} \end{vmatrix},$$

где $Y_{1a} = G = 1/R$, $Y_{2a} = j\omega C_1$, $Y_{1b} = j\omega C$, $Y_{2b} = G_2 = 1/R_2$. Сложив данные матрицы, получим параметры исходного четырехполюсника:

$$Y_{11} = Y_{22} = \frac{Y_{1a}(Y_{1a} + Y_{2a})}{2Y_{1a} + Y_{2a}} + \frac{Y_{1b}(Y_{1b} + Y_{2b})}{2Y_{1b} + Y_{2b}},$$

Рис. 12.19



$$Y_{12}=Y_{21}=-\frac{Y_{1a}^2}{2Y_{1a}+Y_{2a}}-\frac{Y_{1b}^2}{2Y_{1b}+Y_{2b}}.$$

Передаточная функция при односторонней нагрузке четырехполюсника справа

$$H_u(j\omega)=-Y_{21}/(Y_{22}+Y_n).$$

Найдем соотношения между параметрами элементов, при которых $H_u(j\omega)=0$, если $\omega=\omega_0=G/C$. Очевидно, что условие нуля коэффициента передачи представляется в виде уравнения $Y_{21}=0$ или $Y_{1a}^2(2Y_{1b}+Y_{2b})+Y_{1b}^2(2Y_{1a}+Y_{2a})=0$. Подставив выражения для проводимостей плеч четырехполюсников, запишем условие нуля коэффициента передачи в следующем виде:

$$(GG_2-2\omega_0^2C^2)G+j\omega C(2G^2-\omega_0^2CC_1)=0.$$

Из равенства нулю вещественной и мнимой частей уравнения следует, что $G_2=2\omega_0^2C^2/G=2G$, $C_1=2G^2/\omega_0^2C=2C$. С учетом данных соотношений передаточная функция может быть представлена следующим образом:

$$H_u(j\omega)=\frac{(G^2-2\omega^2C^2)(G+j\omega C)}{2G[G(G+G_n)-\omega^2C^2(5G+G_n)]+j\omega C[5G(2G+G_n)-2\omega^2C^2]}.$$

12.22. Заданную цепь представим в виде параллельного регулярного соединения двух четырехполюсников, как показано на рис. 12.19. Здесь нагрузка R_4 включена в состав четырехполюсника A , и схема оказалась нагруженной только слева. Параметры четырехполюсника A следующие: $Y_{11a}=j\omega C$, $Y_{22a}=G_4=1/R_4$, $Y_{12a}=0$. Параметры четырехполюсника B найдены при решении задачи 12.2. Так как четырехполюсник B состоит только из резисторов, то Y -параметры являются вещественными числами. Поэтому обозначим их буквой G с соответствующими индексами G_{11} , $G_{12}=G_{21}$, G_{22} . Они вычисляются по формулам (12.1) при условии, что $Z_i=R_i$, $i=1, 2, 3$. Так как четырехполюсники рис. 12.19 соединены параллельно, то матрицы проводимостей складываются:

$$Y_{11}=G_{11}+j\omega C, \quad Y_{12}=Y_{21}=G_{12}, \quad Y_{22}=G_4+G_{22}.$$

Искомая передаточная функция находится по формуле

$$H_u(j\omega)=\frac{-Y_{21}}{Y_{22}+R_5D_y},$$

где $D_y=Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}$.

После подстановки Y -параметров окончательно имеем

$$H_u(j\omega)=\frac{-G_{12}}{j\omega CR_5(G_4+G_{22})+(G_4+G_{22})(1+R_5G_{11})-G_{12}^2R_5}.$$

13. КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

13.1. ПАРАМЕТРЫ ЛИНИЙ. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Однородные линии и их основные отличия от цепей с сосредоточенными элементами.
2. Примеры применения длинных линий.
3. Первичные параметры однородных линий, их частотные зависимости и единицы измерения.
4. Телеграфные уравнения и их решения.
5. Падающие и отраженные волны, волновое сопротивление, коэффициент распространения, коэффициент ослабления, коэффициент фазы¹.
6. Длина волны, фазовая скорость.
7. Уравнения передачи длинной линии.
8. Уравнения передачи согласованной линии.
9. Собственное (волновое) ослабление, собственная (волновая) фаза.
10. Определение параметров линий по методу холостого хода и короткого замыкания.
11. Групповая скорость, групповое время.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

13.1. Рассчитать и построить графики первичных параметров R_0 , L_0 , C_0 и G_0 коаксиального кабеля² 2,6/9,4 мм в диапазоне частот 812 ... 17 569 кГц.

Указание: а) при расчетах принять $\epsilon = 1,1$; $\operatorname{tg} \delta = 0,6 \cdot 10^{-4}$; б) ответ представить для длины $l = 1$ км.

13.2. Показать, что для расчета коэффициентов ослабления α и фазы β рассматриваемого в задаче 13.1 кабеля и диапазона частот применимы приближенные формулы (13.21) учебника. Вычислить эти коэффициенты для десяти частот и построить их графики.

13.3. Используя данные задачи 13.1, рассчитать волновое сопротивление $Z_b = |Z_b|e^{i\varphi}$, длину волны λ , фазовую и групповую скорости V_ϕ , V_g .

¹ Волновое сопротивление и коэффициент распространения $\gamma = \alpha + j\beta$ в литературе называют вторичными параметрами.

² Кабель с такими параметрами используется для уплотнения системами передачи К-3600 и К-1920.

13.4. Распределение напряжений и токов в линии для режима гармонических колебаний описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= A_1 e^{-jx} + A_2 e^{jx}, \\ I &= \frac{A_1}{Z_0} e^{-jx} - \frac{A_2}{Z_0} e^{jx},\end{aligned}$$

где A_1 , A_2 — постоянные интегрирования, $\gamma = \alpha + j\beta$, x — расстояние от начала линии [см. (13.7) учебника]. Найти постоянные интегрирования, если заданы напряжения и токи в начале линии I_0 и U_0 .

13.5. Первичные параметры линий на частоте $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$ имеют следующие значения: $R_0 = 10 \text{ Ом/км}$, $L_0 = 0,5 \text{ мГн/км}$, $C_0 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/км}$, $G_0 = 10^{-6} \text{ См/км}$. Рассчитать волновое сопротивление, коэффициент распространения, фазовую скорость и длину волны.

13.6. Найти коэффициент отражения ρ , если линия имеет первичные параметры такие же, как и в задаче 13.5, а нагрузка линии представляет собой последовательное соединение R_0 и C_0 .

13.7. Линия с первичными параметрами $R_0 = 5 \text{ Ом/км}$, $L_0 = 1 \text{ мГн/км}$, $C_0 = 50 \text{ пФ/км}$, $G_0 = 10^{-8} \text{ См/км}$ нагружена согласованно. Рассчитать и построить годографы $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$, если на вход линии подано напряжение $u_0(t) = 10 \cos(10^4 t + \pi/3)$.

Построить зависимость действующих значений напряжения $U(x)$ и тока $I(x)$ от длины линии.

Указание. Годограф представляет собой геометрическое место точек конца вектора (в данном случае $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$).

13.8. Для условий задачи 13.7 рассчитать и построить график падающей волны для моментов $t_0 = 0$, $t_1 = 0,02$, $t_2 = 0,04$, $t_3 = 0,06$, $t_4 = 0,1 \text{ мкс}$.

13.9.* Считая известными первичные параметры линии, найти формулы для расчетов коэффициентов ослабления α и фазы β .

13.10.* Найти формулы, позволяющие рассчитать первичные параметры линии по ее вторичным параметрам.

13.11. В табл. 13.1 даны вторичные параметры кабеля типа ТП¹ с диаметром жил 0,32 мм (α и β даны для длины 1 км). Используя результаты решения задачи 13.10, определить первичные параметры и построить графики их частотных зависимостей.

13.12. В табл. 13.2 даны вторичные параметры кабеля типа ТП с диаметром жил 0,5 мм (α и β даны для длины 1 км). Используя результаты решения задачи 13.10, определить первичные параметры.

13.13. Рассчитать амплитуду отраженной волны напряжения, возникающей в конце кабельных линий длиной $l = 1,5 \text{ км}$, если вторичные параметры заданы табл. 13.1 и 13.2, а нагрузка равна

¹ Аббревиатура ТП означает телефонный с полиэтиленовой изоляцией жил.

Таблица 13.1

$f, \text{кГц}$	$ Z_0 , \text{Ом}$	$-\varphi$	α	β
0,8	1385	44°45	0,221	0,222
3,0	709	44°30	0,423	0,429
5,0	557	44°02	0,530	0,552
10	395	42°48	0,630	0,781
20	281	40°05	1,010	1,110
50	185	32°46	1,430	2,137
100	148	22°54	1,700	3,620
150	137	17°20	1,830	5,120
200	130	13°40	1,900	6,640

Таблица 13.2

$f, \text{кГц}$	$ Z_0 , \text{Ом}$	$-\varphi$	α	β
0,8	892,5	44°33	0,141	0,144
3,0	461,0	43°15	0,374	0,291
5,0	356,5	42°05	0,339	0,376
10	255,5	39°14	0,455	0,558
20	185,5	33°55	0,585	0,869
50	135,3	22°28	0,733	1,770
100	121,8	13°45	0,822	3,32
150	117,4	10°07	0,879	4,91
200	116,4	8°22	0,963	6,40

600 Ом. Сравнить полученные результаты для рассматриваемых типов кабеля.

13.14. Вывести формулу, устанавливающую связь между рабочим и волновым ослаблением однородной линии, если сопротивления генератора и нагрузки являются резистивными и равны между собой, т. е. $Z_1 = Z_l = R$.

Решение. Рассмотрим величину, обратную рабочей передаточной функции:

$$\frac{1}{\hat{H}(j\omega)} = \frac{R_2 A_{11} + A_{12} + R_1 R_2 A_{21} + R_1 A_{22}}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \quad (13.1)$$

[см. (12.26) учебника].

Для ее вычисления необходимо (кроме нагрузок) знать A -параметры четырехполюсника. Связь между напряжениями и токами в начале и конце линии выражается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{U}_0 &= \text{ch} \gamma l \dot{U}_l + Z_b \text{sh} \gamma l \dot{I}_l, \\ \dot{I}_0 &= \frac{\text{sh} \gamma l}{Z_n} \dot{U}_l + \text{ch} \gamma l \dot{I}_l, \end{aligned}$$

которые представляют собой уравнения четырехполюсника в A -параметрах:

$$A_{11} = A_{22} = \text{ch} \gamma l, \quad A_{12} = Z_b \text{sh} \gamma l, \quad A_{21} = \text{sh} \gamma l / Z_b.$$

Подстановка A -параметров и нагрузок $R_1 = R_2 = R$ в (13.1) дает

$$\frac{1}{\hat{H}(j\omega)} = \text{ch} \gamma l + 0,5 \text{sh} \gamma l \left(\frac{R}{Z_b} + \frac{Z_b}{R} \right).$$

Выразим гиперболические функции через экспоненты и вынесем за скобки $\exp(\gamma l)$. В результате получим

$$\frac{1}{\hat{H}(j\omega)} = e^{\gamma l} \left[\frac{(R + Z_b)^2}{4 Z_b R} - \frac{(R - Z_b)^2}{4 Z_b R} e^{-2\gamma l} \right].$$

Вынесем, далее, за скобки первое слагаемое и учтем, что $(R - Z_b)/(R + Z_b) = p$ — коэффициент отражения:

$$\frac{1}{\hat{H}(j\omega)} = e^{\gamma l} \frac{(R+Z_b)^2}{4Z_b R} [1 - p^2 e^{-2\gamma l}].$$

Прологарифмировав модули левой и правой частей, окончательно имеем

$$a_p = 20 \lg \frac{1}{|\hat{H}(j\omega)|} = a_b + 10 \lg \left| \frac{R+Z_b}{2\sqrt{RZ_b}} \right| + 20 \lg |1 - p^2 e^{-2\gamma l}|,$$

где $a_b = 8,69\alpha l$ — волновое ослабление.

13.15. Рассчитать частотную зависимость рабочего и собственного ослабления кабельных линий, данные о которых приведены в задаче 13.13. Построить их графики. Проанализировать разность между рассматриваемыми видами ослабления $\Delta a = a_p - a_b$. От чего эта разность зависит?

13.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 13.1. Параметры однородных линий.

Первичные параметры на частоте $\omega = 10^6/(n+m)$, с^{-1} имеют следующие значения $R_0 = n$, Ом/км, $L_0 = 0,5$ н, мГн/км, $C_0 = (n/m)10^{-8}$, Ф/км, $G_0 = m \cdot 10^{-6}$ См/км.

Необходимо:

1. Рассчитать волновое сопротивление, коэффициент распространения, фазовую скорость, длину волны и фазовое время при $l = m + n$, км.

2. Найти коэффициент отражения, если нагрузка представляет: а) последовательное соединение R_0 и C_0 ; б) параллельное соединение R_0 и C_0 .

3. Рассчитать и построить график падающей волны, которая возникает при согласованной нагрузке, если амплитуда напряжения на входе линии равна $0,1(n+m)$, В, а начальная фаза $0,1$ м, рад.

Задание 13.2. Частотные зависимости параметров однородных линий.

Вторичные параметры линии аппроксимируются выражениями:

$$\alpha = \alpha_0 + a_1 \sqrt{f}, \beta = b_1 \sqrt{f} + b_2 f, Z_b = Z_\infty + d(1-j)/\sqrt{f},$$

где $\alpha_0 = 0,1 \sqrt[3]{m+n}$, $a_1 = \sqrt[4]{m \cdot n} \cdot 10^{-2}$, $b_1 = 3,5 \sqrt{m+n} \cdot 10^{-3}$, $b_2 = \sqrt[3]{m+n} \cdot 10^{-6}$, $Z_\infty = \frac{m+n}{m} 10^2$, $d = 2 \cdot 10^4$. Здесь α и β даны на длину $l = 1$ км; размерности сопротивлений — Ом, частоты — Гц, углов — рад. Необходимо для диапазона частот 0...200 кГц (не менее десяти точек) рассчитать и построить графики частотных зависимостей:

- 1) вторичных параметров α , β , $|Z_b|$, Φ_b ;
- 2) первичных параметров R_0 , L_0 , C_0 , G_0 ;

- 3) волнового (собственного) ослабления a_v и волновой (собственной) фазы b_v при длине линии 2 км;
- 4) рабочего ослабления a_p и рабочей фазы b_p ;
- 5) $\Delta = a_p - a_v$.

14. КОЛЕБАНИЯ В ЛИНИЯХ БЕЗ ПОТЕРЬ

14.1. ПАРАМЕТРЫ ЛИНИЙ. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Первичные и вторичные параметры и уравнения линий без потерь.
2. Особенность изменения амплитуд напряжения и тока, а также входного сопротивления вдоль линий без потерь.
3. Режим бегущих волн: условия возникновения, уравнения, графики.
4. Режим стоячих волн: условия возникновения, уравнения, графики.
5. Режим смешанных волн, коэффициент бегущей волны.
6. Входное сопротивление линий без потерь в режиме короткого замыкания (холостого хода) и его зависимости от длины линии и частоты гармонических колебаний.
7. Примеры применения линий с малыми потерями: измерительная линия, четвертьволновой трансформатор, линейный вольтметр, согласование линии с нагрузкой.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

14.1. Для некоторого момента t изобразить графики напряжений и токов вдоль согласованно нагруженной линии¹.

14.2. Изобразить графики напряжений и токов в некотором сечении согласованно нагруженной линии. Чем отличаются напряжения и токи в различных сечениях линии.

14.3. На рис. 14.1 показаны графики распределения амплитуд напряжения вдоль линии. Какому характеру нагрузок соответствует каждый из графиков? Записать закон изменения напряжения в линии на расстояниях l_1 и l_2 от конца линии.

14.4. Найти, при каких нагрузках модуль коэффициента отражения равен единице.

¹ В данной главе без дополнительного напоминания будем считать, что линии не обладают потерями.

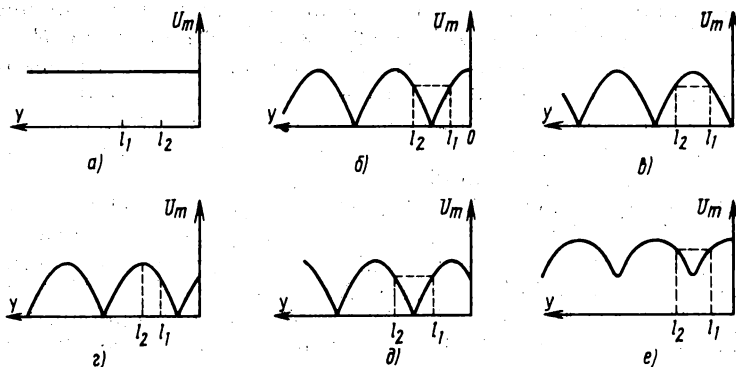


Рис. 14.1

14.5. Показать, что если модуль коэффициента отражения равен единице и напряжение падающей волны определяется выражением $u_{\text{пад}} = U_m \cos(\omega t + \beta y)$, то уравнение отраженной волны вычисляется по формуле $u_{\text{отр}} = U_m \cos(\omega t - \beta y + \varphi_r)$, где φ_r — аргумент коэффициента отражения.

14.6. Линия с первичными параметрами $L_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, $C_0 = 5 \cdot 10^{-12}$ Ф/м нагружена на сопротивление $R_l = 500$ Ом. Определить коэффициент отражения в конце линии и коэффициент бегущей волны.

14.7. Линия с волновым сопротивлением $\rho = 90$ Ом нагружена на сопротивление $R_l < \rho$. Коэффициент бегущей волны равен 0,6. Определить сопротивление R_l .

14.8. Решить задачу 14.7 при условии, что $R_l > \rho$.

14.9р. Линия длиной $l = 15$ м нагружена на сопротивление $R_l = 100$ Ом. Погонные параметры линии: $L_0 = 0,48$ мкГн/м; $C_0 = 75$ пФ/м. Частота внешнего гармонического воздействия $f = 100$ МГц. Найти распределение действующих значений напряжения $U(y)$ и тока $I(y)$ вдоль линии, если напряжение в начале линии U_0 равно 1 В.

14.10. Решить задачу 14.9 при условии, что $R_l = 40$ Ом.

14.11. Найти комплексные напряжение и ток на выходе нагруженной линии без потерь длиной $l = 3\lambda/4$ и комплексные напряжение и ток на ее входе при подключении к линии в качестве нагрузки: а) емкости C_n ; б) индуктивности L_n ; в) резистивного сопротивления R_n , если известны задающее напряжение генератора U_r , его внутреннее сопротивление R_r и волновое сопротивление ρ .

14.12. Решить задачу 14.11 при условии, что $R_r = 0$.

14.13. Для различных значений $m = \rho/R_l$ найти распределение средней P и реактивной Q мощностей вдоль линии.

14.14. Линия без потерь нагружена резистивным сопротивлением R_n . Средняя мощность, подведенная ко входу линии в режиме гар-

монических колебаний, P_0 , Вт. Найти наибольшие и наименьшие значения действующих напряжений и токов в линии, если $R_n = 0,5\rho$.

14.15. Известно действующее значение тока $I = 10$ А в некотором сечении линии без потерь, в котором входное сопротивление в сторону нагрузки равно $Z_{вх} = 200 + j100$. Известно также, что $R_n = 100$ Ом и $R_n < \rho$. Чему равно напряжение на зажимах нагрузки и наибольшее значение напряжения в линии?

14.16. Линия с волновым сопротивлением $\rho_1 = 200$ Ом работает на нагрузку $R_n = 50$ Ом. Определить параметры L_0 и C_0 четвертьволнового трансформатора длиной 0,2 м, обеспечивающего согласование линии с нагрузкой на частоте 250 МГц.

14.17. Найти входное сопротивление четвертьволнового трансформатора длиной 0,1 м, если $L_0 = 0,5$ мкГн/м, $R_n = 200$ Ом, рабочая частота $f = 10^8$ Гц.

14.18. Найти длину четвертьволнового трансформатора, обеспечивающего согласование сопротивлений 1000 и 250 Ом на частоте 10^8 Гц, если известно, что $C_0 = 25$ пФ/м.

14.19р. Какой минимальной длины необходимо взять отрезок линии с параметрами $L_0 = 0,49$ мкГн, $C_0 = 25$ пФ/м, чтобы на частоте $f = 10^8$ Гц получить индуктивность $L = 0,223$ мкГн?

14.20. Решить задачу 14.19, если требуется реализовать емкость $C = 6,57$ пФ.

14.21. Какой минимальной длины необходимо взять отрезок линии с параметрами $L_0 = 0,36$ мкГн/м, $C_0 = 36$ пФ/м, чтобы реализовать последовательный колебательный контур с резонансной частотой $f_0 = 10^9$ Гц?

14.22. Условия задачи 14.21. При каких значениях параметров элементов L и C последовательного контура его сопротивление и сопротивление отрезка линии длиной $\lambda/4$ при холостом ходе совпадает на частоте $0,5\omega_0$?

14.23. Какой минимальной длины надо взять отрезок линии с параметрами $L_0 = 0,40$ мкГн/м и $C_0 = 40$ пФ/м, чтобы реализовать параллельный колебательный контур с резонансной частотой $f_0 = 10^9$ Гц?

Решения.

14.9. Распределение комплексных значений напряжения и тока вдоль линии описываются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}(y) &= \dot{U}_l \cos \beta y + j\rho \dot{I}_l \sin \beta y, \\ I(y) &= j\frac{\dot{U}_l}{\rho} \sin \beta y + \dot{I}_l \cos \beta y. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Напряжение и ток в нагрузке связаны законом Ома: $\dot{I}_l = \dot{U}_l / R_l$. Используя это соотношение, исключим из уравнений (14.1) ток \dot{I}_l :

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}(y) &= \dot{U}_l (\cos \beta y + j m \sin \beta y), \\ \dot{I}(y) &= \frac{\dot{U}_l}{\rho} (j \sin \beta y + m \cos \beta y), \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

где $m \equiv \rho/R_l$.

Теперь уже легко получить выражение, описывающее распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии:

$$U(y) = U_l \sqrt{1 - (1 - m^2) \sin^2 \beta y}, \quad (14.3)$$

$$I(y) = I_l \rho^{-1} \sqrt{1 - (1 - m^2) \cos^2 \beta y}. \quad (14.4)$$

Чтобы воспользоваться данными формулами, необходимо предварительно вычислить U_l по известному напряжению в начале линии U_0 . Формула для расчета U_l получается из первого уравнения системы (14.2) при условии, что $y = l$:

$$U_l = U_0 / \sqrt{\cos^2 \beta l + m^2 \sin^2 \beta l}. \quad (14.5)$$

Выполним вычисления $\beta = 2\pi f \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \cdot 10^8 \sqrt{0,48 \cdot 10^{-6} \cdot 75 \cdot 10^{-12}} = 1,2\pi$, рад/м, $\rho = \sqrt{L_0/C_0} = 80$ Ом, $m = \rho/R_l = 0,8$; $\beta l = 1,2\pi \cdot 1,5 = 18\pi$. Так как $\cos 18\pi = 1$, а $\sin 18\pi = 0$, то согласно (14.5) $U_l = U_0 = 1$ В. Из выражений (14.3) и (14.4) следует, что

$$U(y) = \sqrt{1 - 0,36 \sin^2 1,2\pi y}, \text{ В}, \quad (14.6)$$

$$I(y) = 12,5 \sqrt{1 - 0,36 \cos^2 1,2\pi y}, \text{ мА}. \quad (14.7)$$

Проанализируем полученные выражения. Максимум $U(y)$ достигается, когда $\sin 1,2\pi y$ равен нулю. Данное условие выполняется при $1,2\pi y = k\pi$ ($k = 0, 1, \dots$) или $y_{\max} = k/1,2$ м ($k = 0, 1, 2, \dots$). Из (14.6) следует, что максимальное значение напряжения U_{\max} равно 1. Минимальное значение напряжения получается при условии, что $|\sin 1,2\pi y| = 1$. Таким образом, минимумы $U(y)$ находятся по формуле:

$$y_{\min u} = \frac{2k-1}{2,4}, \text{ м } (k = 1, 2, \dots).$$

Минимальное значение напряжения $U_{\min} = 0,8$. Из (14.7) видно, что положения минимумов тока совпадают с положениями максимумов напряжения и положения максимумов тока совпадают с положениями минимумов напряжения. Максимальные и минимальные значения тока соответственно равны 12,5 и 10 мА. На рис. 14.2 показаны графики распределения мгновенных значений напряжения и тока вдоль линии.

14.19. Поскольку по условию задачи требуется реализовать индуктивность отрезком линии минимальной длины, необходимо

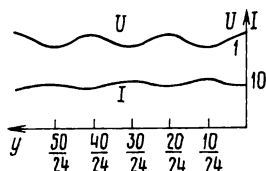


Рис. 14.2

выбрать короткозамкнутый отрезок. При этом длина отрезка будет меньше $\lambda/4$ (λ — длина волны). Входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания

$$Z_{\kappa} = j \rho \operatorname{tg} \omega l \sqrt{L_0 C_0}.$$

На частоте $f = 10^8$ Гц сопротивление должно равняться сопротивлению индуктивности $Z_L = j \omega L$. Из равенства $Z_{\kappa} = Z_L$ находим

$$\rho \operatorname{tg} \omega l \sqrt{L_0 C_0} = \omega L \text{ или } l = [\operatorname{arctg} (\omega L / \rho)] / \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Вычисляем: $\omega L / \rho = 2\pi \cdot 10^8 \cdot 0,223 \cdot 10^{-6} \sqrt{25 \cdot 10^{-12} / 0,49 \cdot 10^{-6}} = 1$;
 $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$; $l = \pi/4 \cdot 2 \cdot 10^8 \sqrt{25 \cdot 10^{-12} \cdot 0,49 \cdot 10^{-6}} = 0,347$ м.

14.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 14.1. Распределение действующих значений напряжений и токов вдоль линии.

К линии без потерь длиной $l = n$, км, с параметрами $L_0 = 0,1 \sqrt{m+n}$, мкГн/м, и $C_0 = \sqrt{n}$, пФ/м, подключен источник гармонических колебаний $u_0(t) = m \cos 2\pi \cdot 10^8 t$, В. Найти распределение действующих напряжений вдоль линии для пяти нагрузок R_n : $\rho = 2\rho, 0,5\rho, 0, \infty$ и построить их графики.

Т а б л и ц а 14.1

Номер параметра	1	2	3	4	5	6	7
Параметр	l , м	f_0 , Гц	L_0 , мкГн/м	C_0 , пФ/м	ρ , Ом	R_1 , Ом	R_2 , Ом
Значение параметра	$0,6/m$	$m \cdot 10^8$	$0,1\sqrt{m+n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{100n}{n+m}$	$\frac{200n}{n+m}$	$\frac{50n}{n+m}$

Т а б л и ц а 14.2

Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код	Вариант	Код
1	1 2 3 6	8	1 2 3 7	15	1 2 4 6	22	1 2 4 7
2	1 2 4 6	9	1 4 5 6	16	2 4 5 6	23	2 4 6 7
3	1 2 4 7	10	1 4 5 7	17	2 4 5 6	24	2 4 3 6
4	1 3 4 6	11	2 3 4 6	18	1 3 6 7	25	2 5 4 7
5	1 3 4 7	12	2 3 4 7	19	1 4 6 7	26	2 5 3 7
6	1 3 5 6	13	2 3 5 6	20	1 2 6 7	27	2 5 3 6
7	1 3 5 6	14	2 3 5 7	21	2 3 6 7	28	2 4 3 7

Задание 14.2. Применение отрезков линий без потерь.

Четвертьволновой трансформатор согласовывает нагрузки R_1 и R_2 на частоте ω_0 . Его можно характеризовать семью параметрами (табл. 14.1). Необходимо по четырем известным параметрам найти оставшиеся три. Известные параметры задаются четырехзначным кодом (табл. 14.2), каждая цифра кода соответствует номеру известного параметра.

15. ВХОДНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

15.1. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Нормирование переменных и параметров.
2. Классификация двухполюсников.
3. Энергетические функции.
4. Определение положительных вещественных функций (ПВФ) (две формулировки).

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

15.1р. Выполнить нормирование параметров элементов и частоты комплексного сопротивления последовательного RLC -двухполюсника. Параметры элементов следующие: $R = 50$ Ом, $L = 10^{-3}$ Гн, $C = 0,1$ мкФ.

15.2р. Пусть в результате синтеза некоторой цепи получены следующие нормированные параметры элементов: $\hat{R}_1 = 0,25$, $\hat{R}_2 = 0,75$, $\hat{L}_1 = 1$, $\hat{L}_2 = 0,5$, $\hat{C}_1 = 2$, $\hat{C}_2 = 0,5$. Рассчитать истинные параметры элементов, если сопротивление нормирования $R_0 = 10^3$ Ом, а частота нормирования $\omega_1 = 10^6 \text{ с}^{-1}$.

15.3. Найти формулы для расчета добротности последовательного RLC -контура, выраженные через нормированные параметры элементов, если частота нормирования равна резонансной частоте контура.

15.4. Пусть операторная передаточная функция некоторой цепи имеет вид: $H(p) = 10^{12} / (p^3 + 2 \cdot 10^4 p^2 + 2 \cdot 10^8 p + 10^{12})$. Выполнить нормирование данной функции, если частота нормирования $\omega_1 = 10^4 \text{ с}^{-1}$.

15.5. Указать, какие из приведенных дробно-рациональных функций являются ПВФ, а какие нет и почему:

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{p^2}{p^2 + p + 1}, & 2) \frac{p + 1}{p^2 + p + 1}, & 3) \frac{1}{p^2 + p + 1}, \\
 4) \frac{p^2 + p + 1}{p + 1}, & 5) \frac{p^2 + 1}{p^2 + p + 1}, & 6) \frac{p^2 + 2}{p^2 + 1}.
 \end{array}$$

15.6.* Считая ПФ задачи 15.5 сопротивлениями подобрать соответствующие схемы двухполюсников¹.

15.7.* Считая ПФ задачи 15.5 проводимостями, подобрать соответствующие схемы двухполюсников¹.

15.8. Некоторая дробная рациональная функция имеет нули при $p = -1$, $p = -3$ и $p = -5$ и полюсы $p = -2$ и $p = -4$. Является данная функция ПФ?

15.2. РЕАКТИВНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Реактивные двухполюсники и реактансные функции.
2. Положение нулей и полюсов реактансных функций на комплексной плоскости.
3. Частотные зависимости сопротивления реактивных двухполюсников; характеристическая строка.
4. Первая и вторая канонические схемы Фостера. Связь между числом элементов и числом нулей и полюсов.
5. Первая и вторая канонические схемы Кауэра.

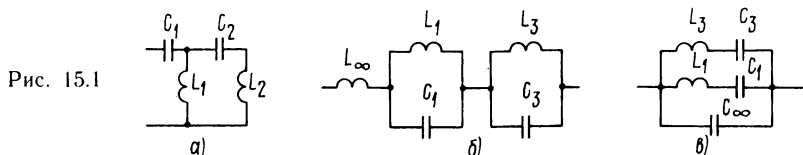
УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

15.9р. Для канонических схем двухполюсников (рис. 15.1, а...в) построить примерные графики и записать функции сопротивлений.

15.10. Для схем, изображенных на рис. 15.2, а...в, построить графики $Z(j\omega)/j$ и записать функции сопротивления.

15.11р. По графику $Z(j\omega)/j$, изображенному на рис. 15.3, построить четыре канонические схемы двухполюсников.

15.12. Построить четыре канонические схемы двухполюсников, сопротивление которых соответствует графику, изображенному на рис. 15.3, если ω_4 стремятся к ∞ .



¹ Задачи имеют множество вариантов решений. В ответах дан только один из возможных вариантов.

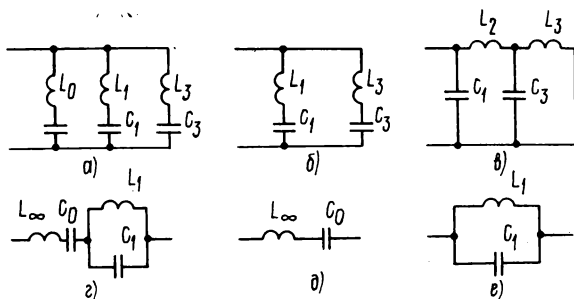


Рис. 15.2

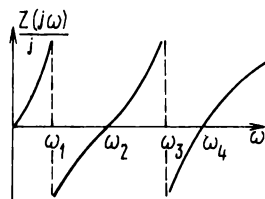


Рис. 15.3

15.13.* По заданной функции сопротивления $Z(p) = p(p^2 + 2)/[(p^2 + 1)(p^2 + 3)]$ найти четыре канонические схемы двухполюсников и рассчитать их элементы.

15.14. Входная проводимость $Y(p)$ имеет нули: $p_0 = 0$, $p_{2,2'} = \pm j\sqrt{2}$, $p_{4,4'} = \pm j2$ и полюсы $p_{1,1'} = \pm j$, $p_{3,3'} = \pm j\sqrt{3}$. Кроме этого, известно, что при $p \rightarrow 0$, $Y(p)/p \rightarrow 1$. Записать выражение для входной проводимости и найти канонические схемы двухполюсников.

15.3. ДВУХПОЛЮСНИКИ RC , RL И RLC

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Свойства сопротивлений пассивных RC -двухполюсников.
2. Разложение функции сопротивления RC -двухполюсника на простые дроби.
3. Свойства сопротивлений пассивных RL -двухполюсников.
4. Канонические схемы RC - и RL -двухполюсников.
5. Четыре свойства ПФФ, на которых основывается их реализация по методу Бруне.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

15.15р. Показать, что производная функции сопротивления RC -двухполюсника на вещественной оси не может принимать положительные значений, т. е. доказать, что $dZ_{RC}(\sigma)/d\sigma \leq 0$.

15.16. Известно, что функция сопротивления $Z(p)$ RC -двухполюсников представима в следующем виде: $Z(p) = A_\infty + A_0/p + \sum_{(k)} A_k/$

$(p + b_k)$. Считая известным операторное сопротивление $Z(p)$, найти коэффициенты $A_\infty, A_0, \dots, A_k$.

15.17.* Используя результаты решения задачи 15.16, найти схему и формулы для расчета элементов RC -двухполюсников.

15.18. Используя результаты решения задачи 15.17, рассчитать параметры элементов двухполюсников, функции сопротивлений которых имеют вид:

$$1) \frac{p^2 + 3p + 1}{p + 1}, \quad 2) \frac{5p^2 + 9p + 2}{2p(p + 1)(p + 2)}, \quad 3) \frac{4p + 1,25}{2(p + 0,25)(p + 0,5)}.$$

15.19.* Найти формулы для расчета параметров элементов схемы рис. 15.4.

Указание. Необходимо разложить на простые дроби функцию $Y(p)/p$.

15.20.* Доказать, что $dY_{RC}(\sigma)/d\sigma \geq 0$.

15.21.* Показать, что для RL -двухполюсников справедливы неравенства

$$\frac{dZ_{RL}(\sigma)}{d\sigma} \geq 0, \quad \frac{dY_{RL}(\sigma)}{d\sigma} \leq 0.$$

15.22.* Найти формулы для расчета параметров элементов RL -двухполюсников при реализации их в виде схем, аналогичных схемам Фостера LC -двухполюсников.

15.23.* Найти двухполюсник с сопротивлением $Z_2(p)$ так, чтобы при последовательном соединении с двухполюсником $Z_1(p)$, схема которого изображена на рис. 15.5, выполнялось условие $Z_1(p) + Z_2(p) = 1^1$. Для любого ли двухполюсника это возможно?

15.24. Доказать, что сопротивление последовательного соединения двухполюсников рис. 15.6 равно R при выполнении условия $^2 Z_1 \cdot Z_2 = R^2$. Другими словами, требуется доказать справедливость утверждения: если Z_1 и Z_2 являются обратными двухполюсниками, то двухполюсники рис. 15.6, a и b являются дополняющими по сопротивлению.

15.25. Доказать утверждение: последовательное соединение двухполюсников Z_1 и Z_2 является обратным параллельному соединению обратных двухполюсников Z'_1 и Z'_2 , т. е. требуется доказать,

$$\text{что } (Z_1 + Z_2) \frac{Z'_1 \cdot Z'_2}{Z'_1 + Z'_2} = R^2,$$

если $Z'_1 Z_1 = R^2$ и $Z'_2 Z_2 = R^2$.

¹ Двухполюсники, сопротивления которых Z_1 и Z_2 удовлетворяют условию $Z_1 + Z_2 = R$, называются *дополняющими по сопротивлению*.

² Двухполюсники, сопротивления которых Z_1 и Z_2 удовлетворяют условию $Z_1 Z_2 = R^2$, называются *обратными*.

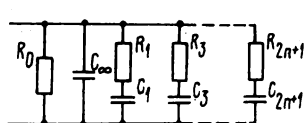


Рис. 15.4

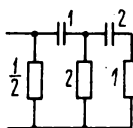


Рис. 15.5

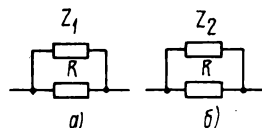


Рис. 15.6

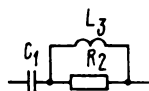


Рис. 15.7

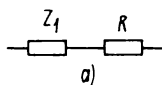


Рис. 15.8

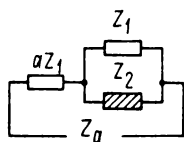
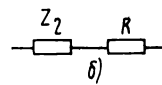


Рис. 15.9

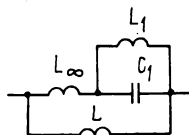
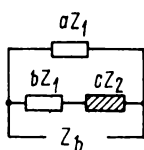


Рис. 15.10

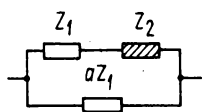


Рис. 15.11

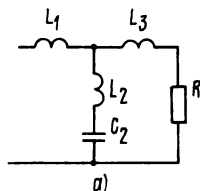
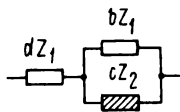


Рис. 15.12

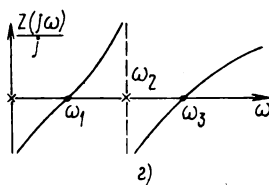
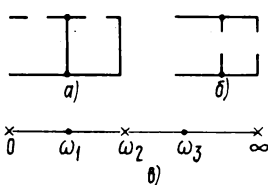
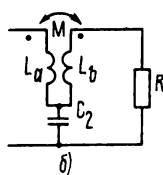


Рис. 15.13

15.26. Пользуясь сформулированным в зад. 15.25 утверждением, найти схему двухполюсника, обратного заданному на рис. 15.7.

15.27. Найти двухполюсники, обратные показанному на рис. 15.5.

15.28. Доказать, что проводимость параллельного соединения двухполюсников a и b , показанных на рис. 15.8, равна постоянной величине¹ $G = 1/R$, если $Z_1 Z_2 = R^2$.

15.29. Доказать, что если для двухполюсников рис. 15.9 выполняются условия $b = a(a+1)$, $c = (a+1)^2$, $d = a+1$, то они будут эквивалентными, т. е. $Z_a = Z_b$.

15.30.* Используя результаты решения задачи 15.29, привести схему двухполюсника рис. 15.10 к каноническому виду. Нормированные параметры элементов исходного двухполюсника имеют следующие значения: $\hat{L} = 0,75$; $\hat{L}_\infty = 0,5$; $\hat{L}_1 = 0,25$; $\hat{C}_1 = 1$.

15.31. Доказать, что если для двухполюсников рис. 15.11 выполняются условия $b = a^2/(1+a)$, $c = a^2/(1+a)^2$, $d = a/(1+a)$, то они являются эквивалентными.

15.32. Используя результаты решения задачи 15.31, привести двухполюсник рис. 15.10 к каноническому виду. Нормированные параметры элементов имеют следующие значения $\hat{L}_\infty = \hat{L} = 1$, $\hat{C}_1 = 4$, $\hat{L}_1 = 2$.

15.33. Найти схемы двухполюсников, реализующие заданные функции сопротивления:

$$1) \frac{2p^2 + p + 1}{2p^2 + 2p + 4}; \quad 2) \frac{p^2 + p + 2}{2p^2 + p + 1}; \quad 3) \frac{4p^2 + p + 1}{p^2 + p + 1}.$$

Указание. Реализацию выполнить по методу Бруне. Вначале получить схему (рис. 15.12, а), а затем индуктивности заменить трансформатором (рис. 15.12, б).

Решения.

15.1. Комплексное сопротивление последовательного RLC -двухполюсника выражается формулой

$$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C). \quad (15.1)$$

После подстановки параметров элементов данная формула имеет вид:

$$Z = 50 + j(10^{-3}\omega - 1/10^{-7}\omega).$$

Выполним нормирование в общем виде. Обозначим сопротивление нормирования R_0 , а частоту нормирования ω_1 . Разделим левую и правую части равенства (15.1) на R_0 , а частоту умножим и разделим на ω_1 :

$$\frac{Z}{R_0} = \frac{R}{R_0} + j\left(\frac{\omega}{\omega_1} \frac{\omega_1 L}{R_0} - 1/\left(\frac{\omega}{\omega_1} \omega_1 C R_0\right)\right). \quad (15.2)$$

Обозначим $Z = Z/R_0$ — нормированное комплексное сопротивление двухполюсника, $\hat{R} = R/R_0$ — нормированное резистивное со-

¹ Двухполюсники, для которых выполняется условие $Y_1 + Y_2 = G$, называются дополняющими по проводимости.

противление, $\hat{L} = \omega_1 L / R_0$ — нормированная индуктивность: $\hat{C} = \omega_1 C R_0$ — нормированная емкость, $\hat{\omega} = \omega / \omega_1$ — нормированная частота. С учетом введенных обозначений перепишем формулу (15.2): $\hat{Z} = \hat{R} + j(\hat{\omega}\hat{L} - 1/\hat{\omega}\hat{C})$. Пусть $R_0 = 100$ Ом, $\omega_1 = \omega_0 = 10^5$ с⁻¹, тогда нормированные параметры элементов будут следующими: $\hat{R} = 0,5$, $\hat{L} = 1$, $\hat{C} = 1$ и нормированное сопротивление описывается выражением:

$$\hat{Z} = 0,5 + j(\hat{\omega} + 1/\hat{\omega}).$$

Как видим, при удачном выборе сопротивления и частоты нормирования получаем все коэффициенты функции сопротивления одного порядка. В исходной формуле разброс между коэффициентами достигал восьми порядков. В приведенной формуле коэффициенты отличаются лишь в 2 раза. Это удобно при расчетах. Кроме того, нормированная резонансная частота равна 1 и нет необходимости в вычислениях учитывать 10^n , что также удобно при расчетах.

15.2. Из решения предыдущей задачи получаем формулы для расчета искомых параметров

$$R_i = \hat{R}_i R_0, L_i = \hat{L}_i R_0 / \omega_1, C_i = \hat{C}_i / \omega_1 R_0.$$

Подстановка численных значений дает следующие результаты: $R_1 = 250$ Ом, $R_2 = 750$ Ом, $L_1 = 1$ мГн, $L_2 = 0,5$ мГн, $C_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ Ф, $C_2 = 0,5 \cdot 10^{-9}$ Ф.

Заметим, что в синтезе цепей, как правило, имеют дело с нормированными элементами и нормированными функциями цепей, поэтому знак «тильда» над нормированными величинами часто не ставится.

15.9. Схема рис. 15.1, а. Прежде всего определим значения сопротивлений на нулевой и бесконечной частотах. Частоты $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ часто называют крайними частотами. Из схемы видно, что $Z(0) = \infty$ и $Z(\infty) = \infty$. Покажем, как найти эти сопротивления. Если частота гармонического воздействия стремится к нулю, то сопротивление емкости $1/j\omega C$ стремится к бесконечности, а сопротивление индуктивности $j\omega L$ стремится к нулю. С учетом сказанного получим схему замещения двухполюсника на постоянном токе (рис. 15.13, а). Здесь ясно видно, что $Z(0) = \infty$, так как нет пути для постоянного тока. Если же частота гармонического воздействия стремится к бесконечности, то сопротивление емкости стремится к нулю, а индуктивности к бесконечности. Схема замещения двухполюсника на бесконечной частоте показана на рис. 15.13, б. Из этой схемы видно, что $Z(\infty) = \infty$. Другими словами, нет пути для тока бесконечно большой частоты. Таким образом, в данном примере функция сопротивления имеет полюсы на нулевой и бесконечной частотах. Определим, далее, число конечных нулей и полюсов, включая нуль или полюс в нуле, которое равно числу элементов. В данном случае число конечных нулей

и полюсов равно 4. Учитывая, что нули и полюсы чередуются, строим характеристическую строку (рис. 15.13, а). При построении строки учитывалось, что на нулевой частоте $Z(j\omega)$ имеет полюс. Так как функция $Z(j\omega)/j$ возрастает, то построить ее график по характеристической строке не представляет труда (рис. 15.13, з).

Для записи функции сопротивления определим физический смысл коэффициентов $B_1 \dots B_4$ в формулах (16.11) учебника. Рассмотрим эти формулы при $\omega \rightarrow \infty$. Очевидно, что при $\omega \rightarrow \infty$ и числитель, и знаменатель стремятся к бесконечности. Получаем неопределенность ∞/∞ , которую необходимо раскрывать. Рассмотрим поочередно все четыре формулы (16.11), приведенные в учебнике. При $\omega \rightarrow \infty$ можно пренебречь конечными частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2v}$ по сравнению с частотой ω . В результате первая формула примет вид: $Z(j\omega) = B_1 j\omega (-\omega^2)^v / (-\omega^2)^v = j\omega B_1 \rightarrow \infty$. Таким образом, при $\omega \rightarrow \infty$, $Z(j\omega)$ носит индуктивный характер. Коэффициент B_1 равен эквивалентной индуктивности двухполюсника, если замкнуть накоротко зажимы всех емкостей.

Во второй формуле из (16.11) в отличие от первой степень числителя на единицу меньше степени знаменателя, поэтому при $\omega \rightarrow \infty$ получаем $Z(j\omega) = 1/j\omega B_2^{-1}$, т. е. двухполюсник носит емкостный характер. Коэффициент $1/B_2$ равен эквивалентной емкости, если оборвать зажимы всех индуктивностей.

В третьей формуле из (16.11), как и во второй, степень числителя на единицу меньше степени знаменателя, поэтому $Z(j\omega) = 1/j\omega B_3^{-1}$ и коэффициент $1/B_3$ равен эквивалентной емкости, если оборвать зажимы всех индуктивностей.

Четвертая формула, как и первая, имеет степень числителя больше степени знаменателя. Поэтому при $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление носит индуктивный характер, а B_4 представляет собой эквивалентную индуктивность, если замкнуть накоротко зажимы всех емкостей.

Множитель $j\omega$ определяет поведение сопротивления двухполюсника на близких к нулю частотах. Так, наличие $j\omega$ в числителе функции $Z(j\omega)$ обуславливает нуль сопротивления в нуле, а наличие $j\omega$ в знаменателе — полюс в нуле. В рассматриваемом примере из графика $Z(j\omega)/j$ следует, что полюс на нулевой частоте указывает на наличие множителя $j\omega$ в знаменателе функции сопротивления. Индуктивный характер сопротивления при $\omega > \omega_3$ говорит о том, что $B_1 = B_4 = L_1 L_2 / (L_1 + L_2)$. На основании изложенного запишем формулу комплексного сопротивления:

$$Z(j\omega) = \frac{B_4(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{j\omega(\omega_2^2 - \omega^2)}.$$

Схема рис. 15.1, б. Анализ схемы будем проводить по аналогии с предыдущим случаем. Схема замещения двухполюсника на нулевой частоте показана на рис. 15.14, а. Из нее следует, что

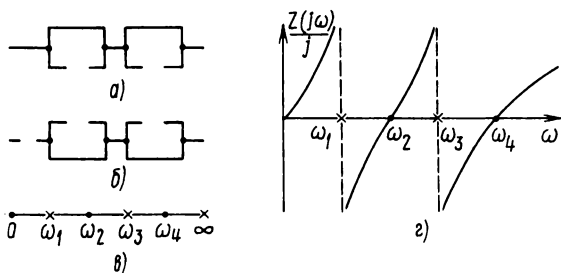


Рис. 15.14

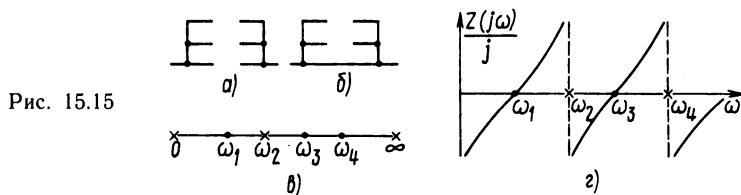


Рис. 15.15

$Z(0)=0$ и множитель $j\omega$ находится в числителе $Z(j\omega)$. Схема замещения двухполюсника на бесконечной частоте показана на рис. 15.14, б. Из нее следует, что $Z(\infty)=\infty$, а $B_i=B_1=L_\infty$. Учтя, что число элементов равно пяти, строим характеристическую строку и график функции $Z(j\omega)/j$ (рис. 15.14, в и г). Формула сопротивления следующая:

$$Z(j\omega) = \frac{B_1 j\omega (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}.$$

Схема рис. 15.1, в. Схема замещения рассматриваемого двухполюсника на нулевой и бесконечной частотах показаны на рис. 15.15, а и б соответственно. Из рисунков видно, что $Z(0)=\infty$, $Z(\infty)=0$, множитель $j\omega$ находится в знаменателе, а $B_i=B_2$, причем $1/B_2=C_\infty$. Характеристическая строка и график $Z(j\omega)/j$ показаны на рис. 15.15, в и г. Функция сопротивления записывается следующим образом:

$$Z(j\omega) = \frac{B_2 (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_3^2 - \omega^2)}{j\omega (\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_4^2 - \omega^2)}.$$

15.11. Построим первую схему Фостера. Данная схема в общем случае состоит из последовательного соединения индуктивности L_∞ , емкости C_0 и параллельных контуров. Индуктивность L_∞ определяет сопротивление двухполюсника на бесконечной частоте. Если $L_\infty \neq 0$, то $Z(\infty)=\infty$, если же $L_\infty=0$, то $Z(\infty)=0$. В данном примере $L_\infty \neq 0$. Емкость C_0 определяет сопротивление двухполюсника на нулевой частоте. При наличии в двухполюснике $C_0 Z(0)=\infty$, а при ее отсутствии $Z(0)=0$. В данном примере емкость C_0 должна отсутствовать в схеме. Общее число элементов

Рис. 15.16

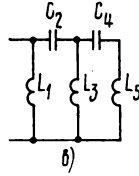
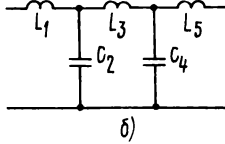
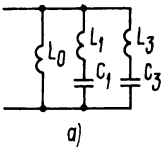
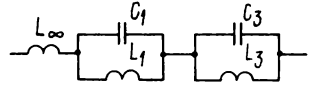


Рис. 15.17

в канонической схеме равняется числу конечных нулей и полюсов и в данном случае равно пяти. Таким образом, схема состоит из последовательного соединения индуктивности L_∞ и двух последовательных контуров (рис. 15.16). Из решения виден общий подход к построению схемы двухполюсника по функции $Z(j\omega)$. Вначале обеспечивается требуемое значение сопротивления при $\omega=0$ и $\omega \rightarrow \infty$, а число элементов определяется общим числом конечных нулей и полюсов (включая нуль или полюс в нуле).

Остальные три канонические схемы показаны на рис. 15.17.

15.15. Функция сопротивления RC -двухполюсника представима в виде суммы простых дробей:

$$Z(p) = A_\infty + \frac{A_0}{p} + \sum_{(k)} \frac{A_k}{p + \sigma_k}, \quad (15.3)$$

где

$$A_\infty, A_0, A_k, \sigma_k > 0.$$

Подставим в данное выражение $p = \sigma$ и затем продифференцируем:

$$\frac{dZ(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{A_0}{\sigma^2} + \sum_{(k)} \frac{-A_k}{(\sigma + \sigma_k)^2}.$$

Каждое слагаемое этой суммы является отрицательным, поэтому $dZ(\sigma)/d\sigma \leq 0$, что и требовалось доказать.

15.16. Из формулы (15.3) непосредственно следует, что

$$A_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p).$$

Для определения A_0 умножим левую и правую части (15.3) на p :

$$pZ(p) = A_\infty p + A_0 + \sum_{(k)} \frac{A_k p}{p + \sigma_k}.$$

Переходя к пределу $p \rightarrow 0$, получим

$$A_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pZ(p).$$

Умножив левую и правую части (15.5) на $p + \sigma_k$ и перейдя к пределу при $p \rightarrow -\sigma_k$, получим формулы для расчета A_k :

$$A_k = \lim_{p \rightarrow -\sigma_k} (p + \sigma_k) Z(p).$$

16. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

16.1. СВОЙСТВА ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Операторные передаточные функции и их свойства.
2. Свойства комплексных передаточных функций.
3. Свойства передаточных функций минимально-фазовых цепей.
4. Свойства передаточных функций неминимально-фазовых цепей.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

16.1. Какие из перечисленных функций удовлетворяют условиям физической осуществимости операторных передаточных функций, а какие нет и почему:

$$1) \frac{p^2}{p^2 + 0,5p + 1}, \quad 2) \frac{1}{p^2 + 3p + 1}, \quad 3) \frac{1}{p^2 - p + 1}, \quad 4) \frac{j5p}{p^2 + p + 1},$$

$$5) \frac{5p}{p^2 + j5p + 1}, \quad 6) \frac{\tanh p}{p + 2}, \quad 7) \frac{p^2 - p + 1}{p^2 + p + 1}, \quad 8) \frac{p^2 - 3p + 1}{p^2 + p - 1} ?$$

16.2. Для операторных передаточных функций зад. 16.1, удовлетворяющих условиям физической осуществимости, записать соответствующие комплексные передаточные функции, АЧХ и ФЧХ.

16.3. Почему приведенные функции не могут быть комплексными передаточными функциями электрических цепей

$$1) \frac{\omega^4 + 2\omega^3 - \omega^2 + 1 + j\omega(\omega^2 + 3)}{\omega^4 - 3\omega^2 + 1 + j2\omega(1 - \omega^2)},$$

$$2) \frac{1 - \omega^2 + j(2\omega^2 + 1)}{2 - \omega^2 + j8\omega}, \quad 3) \frac{1 - \omega^2 + j\omega}{2 - \omega^2 + j3} ?$$

16.4. Для операторных передаточных функций зад. 16.1, удовлетворяющих условиям физической осуществимости, показать на комплексной плоскости положение их нулей и полюсов и указать, какие из них являются минимально-фазовыми, а какие нет.

16.5. Заданную операторную передаточную функцию $H(p) = \frac{1}{(p^2 - p + 1)(p + 3)(p^2 + 4p + 2)(p^2 + 2p + 1)}$ неминимально-фа-

зового типа представить в виде произведения двух функций: минимально-фазового типа и неминимально-фазового с постоянной АЧХ.

16.6. По заданным квадратам модуля передаточных функций минимально-фазовых цепей найти их операторные передаточные функции:

$$1) \frac{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}{\omega^4 + 25\omega^2 + 144}, \quad 2) \frac{0,5\omega^4 + 5\omega^2 + 4,5}{\omega^4 + 20\omega^2 + 64}, \quad 3) \frac{\omega^4 + 13\omega^2 + 36}{\omega^4 + 17\omega^2 + 16}.$$

16.7.* Решить задачу 16.6 для следующих исходных данных:

$$1) \frac{\omega^4 - 7\omega^2 + 4 + 1}{\omega^4 - \omega^2 + 1}, \quad 2) \frac{0,5\omega^4 - 1,5\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4}, \quad 3) \frac{\omega^4 + 3\omega^2 + 9}{\omega^4 - 7\omega^2 + 16}.$$

16.8. Заданы операторные передаточные функции двух цепей $H_1(p) = (p^2 + 3p + 1)/(p^2 + p + 1)$ и $H_2(p) = (p^2 - 3p + 1)/(p^2 + p + 1)$. Сравнить АЧХ и ФЧХ данных цепей.

16.9.* Задана функция $(-\omega^2 + 2 + j2\omega)/(1 - \omega^2 - j\omega)$. Можно ли ее реализовать в виде передаточной функции некоторой пассивной цепи?

16.10. Сконструируйте все возможные операторные передаточные функции, удовлетворяющие условиям физической осуществимости, с такими же амплитудно-частотными характеристиками, что и у функции

$$H(p) = 2(p - 2)(p + 4)/(p^2 + 10p + 16).$$

16.2. РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Характеристические параметры симметричного четырехполюсника.
2. Характеристические параметры несимметричного четырехполюсника.
3. Четырехполюсники постоянного характеристического сопротивления.
4. Необходимые и достаточные условия реализуемости передаточных функций мостовыми четырехполюсниками постоянного характеристического сопротивления.
5. Реализация передаточных функций методами аналоговой вычислительной техники; достоинства и недостатки такой реализации.
6. Реализация передаточных функций каскадным соединением мостовых четырехполюсников постоянного характеристического сопротивления (каскадно-согласованная реализация).
7. Реализация передаточных функций каскадным соединением ARC-четырехполюсников (каскадно-развязанная реализация).

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

16.11. На рис. 16.1, *a...г* показаны пары двухполюсников Z_a и Z_b . Какие из данных пар двухполюсников могут быть использованы для образования мостового четырехполюсника постоянного сопротивления, а какие нет? Чему равны характеристические сопротивления полученных мостовых четырехполюсников постоянного характеристического сопротивления?

16.12.* Используя понятие обратного двухполюсника (задачи 15.25 и 15.26), для каждого из двухполюсников рис. 16.2, *a...в* найти двухполюсники Z_b , которые вместе с Z_a образуют мостовые четырехполюсники постоянного характеристического сопротивления $R_0=4$.

16.13. Задана операторная передаточная функция $H(p) = (p^2 - p + 1)/(p^2 + p + 1)$. Найти схему и величины элементов мостового четырехполюсника постоянного характеристического сопротивления, реализующего заданную функцию, если $R_0=1$. *Указание.* При решении учесть, что сопротивления Z_a и Z_b являются реактансными функциями.

16.14. Используя метод каскадной реализации передаточных функций мостовыми четырехполюсниками постоянного сопротивления, найти схему, реализующую передаточную функцию $H(p) = (p^2 - 3p + 1)(p^2 - 2p + 1)/[(p^2 + 3p + 1)(p^2 + 2p + 1)]$ при $R_0=1$. *Указание.* $H(p)$ разбить на произведение $H_1(p)H_2(p)$ так, чтобы $|H_1(j\omega)| = |H_2(j\omega)| = 1$.

16.15.* Реализовать $H(p)$ зад. 16.14 в виде одной мостовой схемы постоянного характеристического сопротивления.

Указание. Двухполюсник Z_a проще реализовать в виде второй схемы Фостера.

16.16.* Найти схему мостового четырехполюсника постоянного характеристического сопротивления, обладающего передаточной функцией $H(p) = 1/(p^2 + p + 1)$.

Указание. Обратите внимание, что $\max |H(j\omega)| > 1$.

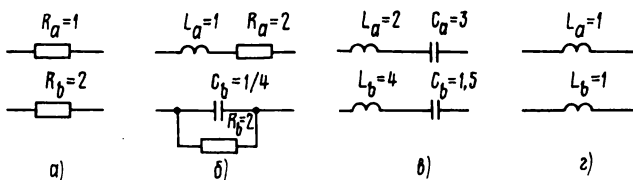


Рис. 16.1

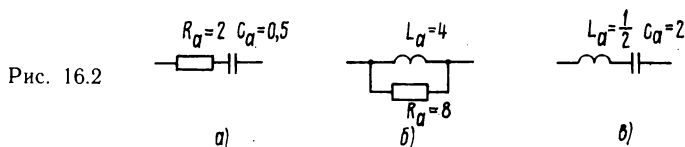


Рис. 16.2

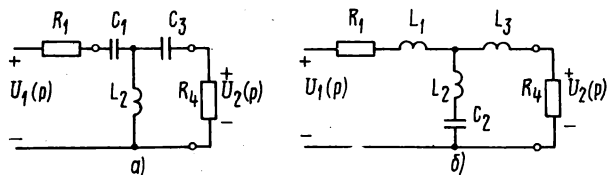


Рис. 16.3

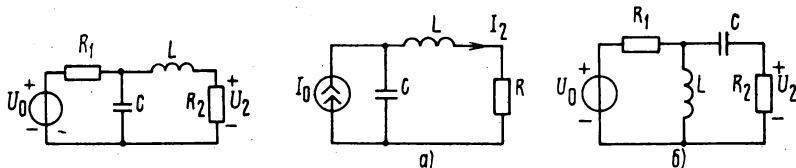
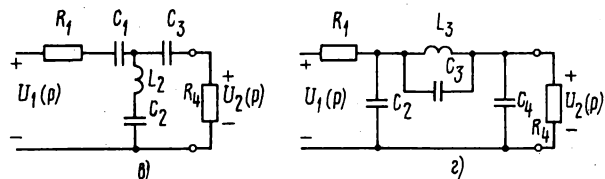


Рис. 16.4

Рис. 16.5

16.17. Решить задачи 16.13...16.15 при условии, что реализация осуществляется методом электронного моделирования (методом аналоговой вычислительной техники), если нормированные параметры \hat{R} и \hat{C} равны единице (см. рис. 17.6 учебника).

16.18. Изобразить схему ARC-цепи, реализующую методом аналоговой вычислительной техники (рис. 17.6 учебника) передаточную функцию $H(p) = (0,5p^2 + 10^4p + 10^8) / (p^2 + 10^4p + 2 \cdot 10^8)$ и рассчитать параметры элементов, если $R = 10^5$ Ом, $C = 10^{-6}$ Ф.

16.19. Решить задачу 16.18, если задана функция $H(p) = (p^2 - 10^4p + 10^8) / (p^2 + 10^4p + 10^8)$.

16.20. Пользуясь рекуррентной формулой (17.2, г) учебника, найти операторные передаточные функции $U_2(p)/U_1(p)$ цепей, схемы которых показаны на рис. 16.3.

16.21. Используя метод уравнивания коэффициентов, реализовать передаточную функцию $H(p) = U_2/U_0 = 0,5 / (p^2 + \sqrt{2}p + 1)$ цепью, схема которой приведена на рис. 16.4, если $R_1 = 1$.

16.22. Решить задачу 16.21 для двух функций: а) $H(p) = I_2/I_0 = 1 / (p^2 + p + 1)$ цепью со схемой рис. 16.5, а; б) $H(p) = U_2/U_0 = 0,5p^2 / (p^2 + \sqrt{2}p + 1)$ цепью со схемой рис. 16.5, б.

16.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 16.1. Операторные передаточные функции и их реализация.

Основное задание. Квадрат модуля передаточной функции имеет вид: $F(\omega^2) = (\omega^4 + n\omega^2 + 0,25n^2)/(\omega^4 + 2(n+m)\omega^2 + n^2)$.

Необходимо: 1) найти операторную передаточную функцию; 2) найти функции сопротивления Z_a и Z_b мостовой схемы с постоянным характеристическим сопротивлением $R_0=1$, соответствующие найденной операторной функции; 3) убедиться, что Z_a и Z_b — положительные вещественные функции.

Дополнительное задание I. Найти схемы двухполюсников Z_a и Z_b , функции сопротивления которых определены в основном задании.

Дополнительное задание II. Реализовать найденную в основном задании передаточную функцию методами аналоговой вычислительной техники.

17. ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

17.1. МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Этап аппроксимации в задачах синтеза электрических цепей.
2. Критерии близости.
3. Интерполирование заданных характеристик.
4. Аппроксимация методом разложения в ряд Тейлора.
5. Степенные методы аппроксимации.
6. Аппроксимация по Чебышеву; теорема о наилучшем приближении.
7. Теорема об экстремальных свойствах чебышевских приближений.
8. Полиномы Чебышева.
9. Дроби Чебышева.
10. Сведение задачи аппроксимации к задаче линейного программирования.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

17.1р. Необходимо на интервале $0,5 \leq x \leq 2$ методом интерполирования аппроксимировать зависимость $\xi(x) = e^{-0,5x}$ полиномом второй степени $f(x) = x^2 + A_1x + A_2$. Оценить погрешность $|\xi(x) - f(x)|$ при изменении положения узлов интерполирования. Оценить результат решения с точки зрения теоремы о наилучшем приближении.

17.2. Решить задачу 17.1, если $f(x)$ является линейной функцией $f(x) = A_1(x) + A$.

17.3. Решить задачу 17.1, если $f(x) = A_0x^2 + A_2$.

17.4.* Решить задачу 17.1, если $f(x) = A_0x^2 + A_1x + A_2$.

17.5.* Решить задачу 17.1, если $\xi(x) = \xi(\omega)$ и $f(\omega) = \kappa^2(\omega^2 + a_1^2)/(\omega^2 + b_1^2)$ — квадрат модуля передаточной функции при ограничениях: $\kappa^2 \leq 1$, $a_1^2 > b_1^2 > 0$. Найти минимально-фазовую операторную передаточную функцию и схему цепи, реализующую найденную функцию.

17.6. Найти полином Чебышева третьей степени, который изменяется между 1 и -1 в интервале $1 \leq x \leq 2$.

17.7. В каком интервале полином Чебышева $\cos n \arccos(4x - 1)$ наименее отличается от нуля?

17.8. Найти максимально возможное значение полинома третьей степени при $x = 0$, если его значения в интервале $1 \leq x \leq 2$ по абсолютной величине не превышает 0,1.

17.9. Найти полином третьей степени со свободным членом $a_3 = 50$, который в интервале $1 \leq x \leq 2$ наименее отличается от нуля; чему равно это отклонение?

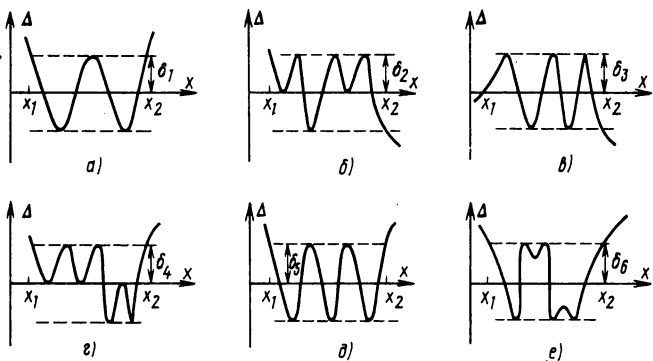


Рис. 17.1

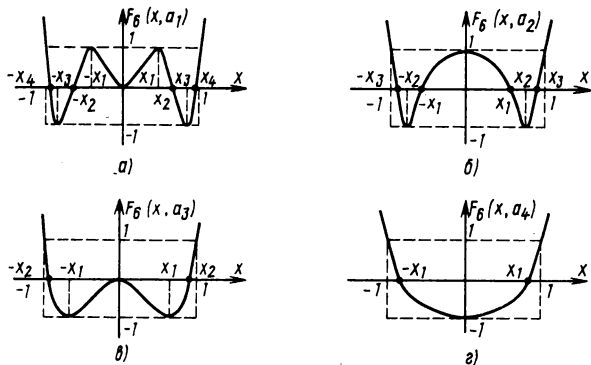


Рис. 17.2

17.10. Рассматривается шесть вариантов аппроксимации заданной на интервале (x_1, x_2) функции $\xi(x)$ полиномом пятой степени $f(x)$. На рис. 17.1, а...е показана полученная разность $\Delta = \xi(x) - f(x)$. Какой из вариантов аппроксимации соответствует наилучшему в смысле Чебышева приближению?

17.11. Рассматривается семейство, состоящее из четырех полиномов $F_6(x, a_k) = \cos 6 \arccos \sqrt{x^2(1 - a_k^2) + a_k^2}$, $a_k = \cos [(6 - k) \times \pi/12]$, $k = \overline{1, 4}$. Графики полиномов показаны на рис. 17.2, а...г. Убедиться, что полином Чебышева вне интервала $-1, 1$ принимает значения, превышающие значения любого из полиномов, $F_6(x, a_k)$.

Указание. Для решения задачи достаточно рассчитать полиномы Чебышева $P_6(x)$ и $F_6(x, a_k)$ в произвольной точке $|x| > 1$.

Ответ дан для $x = \sqrt{2}$. Убедиться, что экстремальные свойства Чебышевского полинома $P_6(x)$ сохраняются и для других $|x| > 1$.

17.12.* Найти положение минимумов, максимумов и нулей полиномов $F_6(x, a_k)$, приведенных в зад. 17.11. Графики полиномов показаны на рис. 17.2.

17.13. Найти коэффициенты полинома $a_0x + a_1$, у которого в интервале $0 \leq x \leq 1$ среднеквадратическое отклонение от функции $\xi(x) = x^2$ было бы минимально возможным.

17.14. Решите зад. 17.13 для интервала $-1 \leq x \leq 1$.

17.15. Найдите полином четвертой степени, который в точке $x = 0$ аппроксимировал бы по Тейлору функцию $\xi(x) = A \cos ax$.

17.16. Решить зад. 17.15, если $\xi = A \sin ax$.

17.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Назначение электрических фильтров.
2. Классификация электрических фильтров.
3. АЧХ фильтров нижних частот Баттерворта.¹
4. Расположение нулей и полюсов фильтра Баттерворта.
5. АЧХ полиномиальных ФНЧ Чебышева.
6. Фильтры нижних частот с характеристиками Золотарева (эллиптические фильтры).
7. Преобразование частоты и его применение при синтезе фильтров верхних частот (ФВЧ).
8. Преобразование частоты и его применение при синтезе полосовых фильтров (ПФ) с симметричными характеристиками.
9. Преобразование частоты и его применение при синтезе режекторных фильтров (РФ) с симметричными характеристиками.
10. Фазовые характеристики фильтров.

¹ Фильтры с характеристиками Баттерворта (Чебышева) для кратности будем называть фильтрами Баттерворта (Чебышева).

17.17. На рис. 17.3, а...г показаны требования к АЧХ $|H(j\omega)|$ различных типов фильтров. Определить типы фильтров. Найти требования к данным фильтрам по ослаблению, т. е. рассчитать Δa — неравномерность характеристики ослабления в полосе пропускания (ПП) и a_0 — минимально допустимое ослабление в полосе задерживания (ПЗ).

17.18. Изобразить примерные графики частотной зависимости $|H(j\omega)|$, удовлетворяющие требованиям к ФНЧ (рис. 17.3, б) при аппроксимации: а) полиномами Баттерворта, б) полиномами Чебышева седьмого порядка, в) дробями Золотарева пятого порядка.

17.19. Изобразить примерные графики частотной зависимости ослабления, удовлетворяющие требованиям к ФНЧ (рис. 17.4) при аппроксимации: а) полиномами Баттерворта; б) полиномами Чебышева пятого порядка, в) дробями Золотарева третьего порядка.

17.20р. Рассчитать параметры C_0 и n ФНЧ Баттерворта и найти операторную передаточную функцию, если неравномерность его характеристики ослабления в ПП $\Delta a = 1$ дБ, минимально допустимое ослабление в ПЗ $a_0 = 30$ дБ, граничная частота ПП $\omega_0 = 10^5$, граничная частота полосы задерживания $\omega_k = 2,5 \cdot 10^5$ с⁻¹.

17.21. Решить задачу 17.20, если $\Delta a = 2$ дБ, $a_0 = 25$ дБ, $f_0 = 15$ кГц, $f_k = 26$ кГц.

17.22. Известно, что на частоте $\hat{\omega}_k = 1,8$ у ФНЧ Баттерворта ослабление $a_0 = a(\hat{\omega}_k) = 30$ дБ, а коэффициент $C_0 = 0,06$. Рассчитать неравномерность Δa в ПП и порядок фильтра n . Записать операторную передаточную функцию.

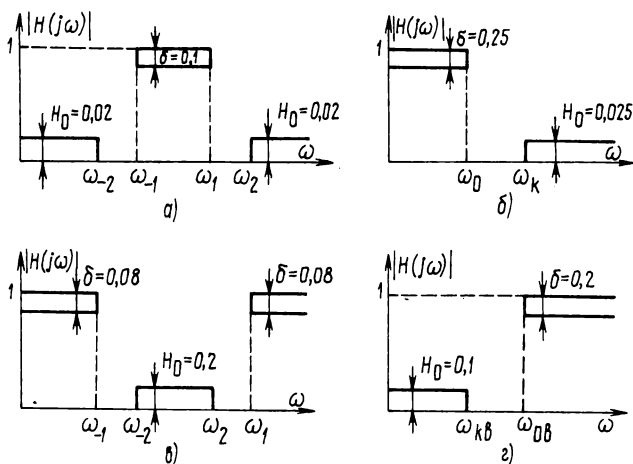


Рис. 17.3

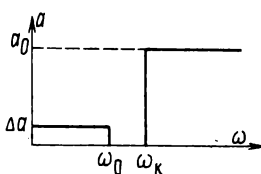


Рис. 17.4

17.23. Для фильтра Баттерворта по заданным в табл. 17.1 трем из пяти (Δa , a_0 , $\hat{\omega}_k$, n , C_0) параметров определить оставшиеся два. Записать соответствующую операторную передаточную функцию.

17.24.* Вывести формулы для расчета параметров n и C_0 передаточной функции ФНЧ Баттерворта, если заданы требования к модулю $|H(j\omega)|$ (см. рис. 17.3, б).

17.25.* Показать, что полюсы операторной передаточной функции фильтра Баттерворта лежат на окружности. Чему равен ее радиус?

17.26р. Рассчитать порядок ФНЧ Чебышева и найти операторную передаточную функцию, если $f_0 = 10^5$ Гц, $f_k = 2,5 \cdot 10^5$ Гц, $\Delta a = 1,25$ дБ, $a_0 = 30$ дБ.

17.27. Решить зад. 17.26, если $\Delta a = 2$ дБ, $a_0 = 23$ дБ, $f_0 = 15$ кГц, $f_k = 21$ кГц. Сравнить результаты решения данной задачи и 17.21.

17.28. Известно, что на частоте $\hat{\omega}_k = 2$ ослабление равно $a_0 = 25$ дБ, а коэффициент $\xi = 0,08$. Рассчитать неравномерность Δa в ПП и порядок фильтра n при аппроксимации полиномами Чебышева. Рассчитать коэффициенты и записать операторную передаточную функцию. Построить примерный график ослабления $a(\omega)$.

17.29. Для фильтра с характеристиками Чебышева найти два параметра по заданным в табл. 17.1 трем; записать соответствующую операторную передаточную функцию; построить примерную характеристику ослабления.

17.30.* Вывести формулы для расчета параметров n и ξ передаточных функций фильтров с характеристиками Чебышева, если заданы δ , $\hat{\omega}_k$ и H_0 (см. рис. 17.3, б).

17.31.* Показать, что полюсы операторной передаточной функции фильтров с характеристиками Чебышева лежат на эллипсе.

17.32р. Найти передаточную функцию ФНЧ с характеристиками Золотарева, удовлетворяющую следующим требованиям: $f_0 = 1000$ Гц, $f_k = 1250$ Гц, $\Delta a = 1,25$ дБ, $a_0 = 40$ дБ.

17.33. С помощью таблиц Приложения 3 найти операторные передаточные функции ФНЧ с характеристиками Золотарева, удовлетворяющие следующим требованиям (см. решение зад. 17.32):

а) $f_0 = 1$ кГц, $f_k = 1,4$ кГц, $\Delta a = 0,3$ дБ, $a_0 = 28$ дБ; б) $f_0 = 1$ кГц, $f_k = 1,5$ кГц, $\Delta a = 0,05$ дБ, $a_0 = 24$ дБ; в) $f_0 = 1$ кГц, $f_k = 1,4$ кГц, $\Delta a = 0,1$ дБ, $a_0 = 50$ дБ.

17.34. Решить задачу аппроксимации характеристики ослабления ФВЧ (рис. 17.5) с помощью преобразования частоты, если $\Delta a = 1,5$ дБ, $a_0 = 20$ дБ, $\omega_{кв} = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{0в} = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$.

17.35. Решить зад. 17.33, если аппроксимация выполняется с помощью полиномов Чебышева.

17.36. По заданным требованиям к ФВЧ: $\Delta a = 1$ дБ, $a_0 = 18$ дБ, $\omega_{0в} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{кв} = 10^5 \text{ с}^{-1}$ найти операторные пе-

Таблица 17.1

Вариант	Δa , дБ	a_0 , дБ	$\hat{\omega}_k$	n	C_0 , (€)
1	0,5	20	1,8		
2	0,6	25	2		
3	0,7	22	1,6		
4	0,8	24	1,5		
5	0,9	18		2	
6	1,0	26		4	
7	1,1	28		2	
8	1,2	30		4	
9	1,3	32		2	
10	1,4	34		4	
11	1,5		1,8	2	
12	1,6		1,6	4	
13	1,7		1,5	2	
14	1,8		1,4	4	
15	2,0		1,9	2	
16		20	2,5		0,06
17		21	2,4		0,07
18		22	2,3		0,08
19		23	2,2		0,09
20		24	2,0		0,1
21		25		2	0,06
22		26		4	0,07
23		27		2	0,08
24		28		4	0,09
25		29		2	0,1
26		30		4	0,06
27				2	0,07
28			1,6	4	0,08
29			2,0	2	0,09
30			1,5	4	0,1

передаточные функции при аппроксимации с помощью полиномов Баттерворта и Чебышева.

17.37.* Фильтр верхних частот порядка $n=6$ с максимальной плоской характеристикой ослабления (ФВЧ Баттерворта) и граничной частотой ПП $\omega_{0в}=10^6 \text{ с}^{-1}$ имеет неравномерность $\Delta a=1 \text{ дБ}$. Чему равна граничная частота ПЗ, если минимально допустимое ослабление в ПЗ a_0 равно 25 дБ? Как изменится эта частота (увеличится или уменьшится), если аппроксимацию выполнить с помощью полиномов Чебышева?

17.38р. Решить задачу аппроксимации характеристики ослабления ПФ (рис. 17.6) с помощью преобразования частоты, если $\Delta a=3 \text{ дБ}$, $a_0=26 \text{ дБ}$, $\omega_{-2}=0,5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{-1}=10^5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1=2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2=4 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$. Представить операторную передаточную функцию в виде сомножителей второго порядка.

17.39. Для заданных в табл. 17.2 требований к ПФ необходимо:

- 1) изобразить графически требования к ПФ;
- 2) найти требования к ФНЧ-прототипу;

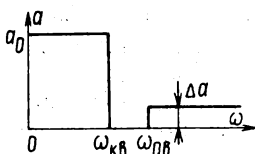


Рис. 17.5

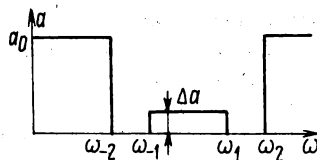
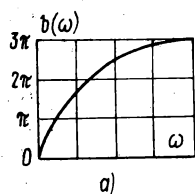
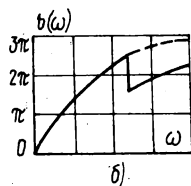


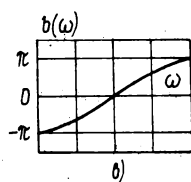
Рис. 17.6



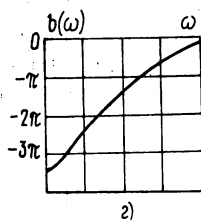
а)



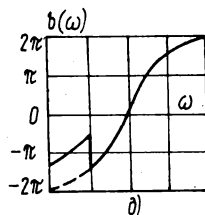
б)



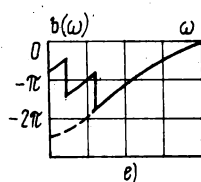
в)



г)



д)



е)

Рис. 17.7

Таблица 17.2

Параметры	Вариант ПФ					
	1	2	3	4	5	6
f_{-2} , кГц	8	8	8	9	7	10
f_{-1} , кГц	10	12	12	13	14	15
f_1 , кГц	12	14	16	18	20	22
f_2 , кГц	15	21	24	26	40	33
Δa , дБ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
a_0 , дБ	20	32	24	22	38	30

3) рассчитать порядок ФНЧ-прототипа при аппроксимации полиномами Баттерворта и Чебышева;

4) изобразить частотные характеристики ослабления ФНЧ-прототипов и ПФ при указанных видах аппроксимации.

17.40.* Найти операторные передаточные функции ПФ, требования к которым приведены в табл. 17.2, если аппроксимация выполняется с помощью полиномов Баттерворта.

17.41.* Решить задачу 17.40, если аппроксимация выполняется полиномами Чебышева.

17.42. На рис. 17.7 показаны фазовые характеристики фильтров. Необходимо определить: 1) тип фильтра (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ); 2) порядок полинома знаменателя операторной передаточной функции фильтра; 3) полиномиальный или с полюсами ослабления и для последних — число полюсов ослабления. Необходимо также вычертить графики ослабления, считая аппроксимацию в ПП равноволновой.

17.43. Сравнить между собой наибольшие значения добротности полюсов передаточных функций двух ФНЧ: одного — с характеристиками Чебышева, а другого — с характеристиками Баттерворта, если у обоих фильтров $\Delta a = 0,5$ дБ, $a_0 \geq 60$ дБ, $\hat{\omega}_k = 2$.

17.44. Сравнить между собой наибольшие значения добротности полюсов передаточных функций двух ФНЧ седьмого и восьмого порядков с характеристиками Чебышева, если оба фильтра имеют на частоте $\hat{\omega}_k = 2$ равные ослабления $a_0 = 60$ дБ.

17.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФНЧ

17.45. Разработать методику аппроксимации характеристик ФНЧ, если функция фильтрации представлена в виде $\varphi^2(\omega) = \xi^2 P_1^{n_1}(\omega) \dots P_k^{n_k}(\omega)$, где $P_i(\omega)$, $i = \overline{1, k}$ — полиномы Чебышева произвольных порядков.

17.46. Разработать методику аппроксимации характеристик ФНЧ, если функция фильтрации представлена в виде

$$\varphi^2(\omega) = \xi^2 (a\omega^{2n} + b\omega^2), \text{ где } a + b = 1, a > 0, b > 0.$$

17.47. Разработать методику аппроксимации характеристик ФНЧ с кратными полюсами, если квадрат модуля передаточной функции представим в виде:

$$a) |H(j\omega)|^2 = \left(\frac{1}{1 + c_0 \omega^4} \right)^m, \quad б) |H(j\omega)|^2 = \left(\frac{1}{1 + \xi^2 P_2^2(\omega)} \right)^m,$$

где $P_2(\omega)$ — полином Чебышева второго порядка. Найти предельные возможности аппроксимации при $m \rightarrow \infty$.

17.48. Задан полином

$$W_{n,k}(x) = x^s \left(\frac{x^2 - \tilde{x}_k^2}{1 - \tilde{x}_k^2} \right)^k \prod_{i=k+1}^l \frac{x^2 - x_i^2}{1 - x_i^2},$$

где n — порядок полинома, $s=0$ при n — четном и $s=1$ при n — нечетном, $0 \leq k \leq l$, $l = (n-s)/2$, $x_k = \cos [(2k-1)\pi/2n]$, $x_i = \cos [(2i-1)\pi/2n]$ — нули полинома Чебышева порядка n , $x_{k+1} < \tilde{x}_k \leq x_k$.

В частном случае при $k=0$ данный полином преобразуется в полином Чебышева. Необходимо:

1) убедиться, что $W_{n,k}$ удовлетворяет условиям

$$|W_{n,k}(1)| = 1, |W_{n,k}(x)| \leq 1 \text{ при } -1 \leq x \leq 1;$$

2) разработать методику аппроксимации характеристик ФНЧ, если в качестве функции фильтрации используется выражение $\xi^2 W_{n,k}^2(\omega)$.

17.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 17.1. Аппроксимация характеристик ФНЧ.

Основное задание. Исходные требования к ФНЧ выбираются следующим образом: $f_0 = (n+1)m$, кГц; $f_k = \sqrt[4]{m+n} \cdot f_0$, кГц; $\Delta a = 0,2\sqrt[4]{n}$, дБ; $a_0 = 20(n+m+15)/(n+m+10)$, дБ.

Необходимо: 1) с помощью таблиц Приложения 3¹ найти операторные передаточные функции ФНЧ с характеристиками: а) Баттерворта; б) Чебышева; в) Золотарева;

2) построить характеристику ослабления для каждого из фильтров;

3) рассчитать ослабление фильтра на граничных частотах ПП и ПЗ.

Дополнительное задание. По приведенным в основном задании требованиям найти аналитически (без таблиц) операторные передаточные функции ФНЧ с характеристиками Чебышева и Баттерворта. Сравнить полученные здесь и в основном задании результаты.

Задание 17.2. Аппроксимация характеристик ПФ на основе ФНЧ-прототипа.

Основное задание. Исходные данные к ПФ выбираются следующим образом: $f_{-2} = 0,5m$, кГц; $f_{-1} = m$, кГц; $f_1 = (n+1)m$, кГц; $f_2 = 2m(n+1)$, кГц; $\Delta a = 0,2\sqrt[4]{n+m}$, дБ; $a_0 = 20(n+m+15)/(n+m+10)$, дБ.

Необходимо:²

1) изобразить на рисунке требования к ПФ (см. рис. 17.6);

2) рассчитать операторную передаточную функцию ФНЧ-прототипа при аппроксимации полиномами Баттерворта;

3) используя результаты выполнения 2, найти операторную передаточную функцию ПФ. Построить графики $a(\omega)$ и $b(\omega)$ ПФ;

¹ Таблицы даны для дискретных значений Δa , a_0 и $\hat{\omega}_k$, поэтому при их использовании почти всегда получаем фильтры, которые удовлетворяют требованиям с некоторым запасом.

² Задачи решить либо с использованием таблиц (Приложение 3; [10]), либо аналитически.

4) рассчитать операторную передаточную функцию ФНЧ-прототипа при аппроксимации полиномами Чебышева;

5) используя результаты выполнения п. 4, найти операторную передаточную функцию ПФ. Построить (качественно) графики $a(\omega)$ и $b(\omega)$ ПФ;

6) найти операторную передаточную функцию ФНЧ-прототипа при аппроксимации дробями Золотарева и операторную передаточную функцию ПФ. Построить графики $a(\omega)$ и $b(\omega)$ ПФ.

Дополнительное задание. Полагая $f_2 = km(n+1)$ и $f_{-2} = = k^{-1}m$. Исследовать зависимость порядка n ПФ от k при нескольких значениях Δa и данном a_0 .

Решения.

17.1. Прежде всего определяем число узлов интерполирования. Так как аппроксимирующая функция содержит два независимых коэффициента A_1 и A_2 , то максимальное число узлов равно двум. Задавшись узлами интерполирования x_1 и x_2 , составляем два уравнения с двумя неизвестными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= \xi(x_1) \\ f(x_2) &= \xi(x_2) \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} A_1 x_1 + A_2 &= \xi(x_1) - x_1^2 \\ A_1 x_2 + A_2 &= \xi(x_2) - x_2^2 \end{aligned} \right\}$$

Решение данной системы не представляет труда:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\xi(x_1) - \xi(x_2) - x_1^2 + x_2^2}{x_1 - x_2}, \\ A_2 &= \frac{x_1(\xi(x_2) - x_2^2) - x_2(\xi(x_1) - x_1^2)}{x_1 - x_2} \end{aligned} \right\} \quad (17.1)$$

Выполним вычисления. Прежде всего рассчитаем $\xi(x)$. Результаты расчета даны в табл. 17.3. Рассмотрим несколько вариантов выбора узлов интерполирования.

Вариант 1: $x_1 = 0,8$; $x_2 = 1,6$. Из табл. 17.3 видно, что $\xi(0,8) = 0,67$, $\xi(1,6) = 0,45$. Подставив эти значения в (17.1) и выполнив вычисления, получим $A_1 = -2,675$, $A_2 = 2,17$. Найдем погрешность аппроксимации. Для этого рассчитаем $f(x)$ и разность $\Delta = f(x) - \xi(x)$. Результаты расчета приведены в третьем и четвертом столбцах табл. 17.3 и изображены в виде графиков на рис. 17.8.

Проанализируем полученный результат. Погрешность аппроксимации изменяется по диапазону частот. Модули максимумов погрешности следующие: 0,31 при $x = 0,5$; 0,22 при $x = 1,4$ и 0,45 при $x = 2$. В узлах интерполирования, как и следовало ожидать, $\Delta = 0$. При переходе через узел интерполирования погрешность изменяет знак. Модули максимумов отклонения существенно не равны между собой. Наибольший из максимумов 0,45, а наименьший — 0,22. Попытаемся путем изменения узлов интерполирования уменьшить модуль максимальной погрешности. Существует общее

Таблица 17.3

x	$\xi(x)$	$x_1 = 0,8$	$x_2 = 1,6$	$x_1 = 0,8$	$x_2 = 1,8$	$x_1 = 0,7$	$x_2 = 1,8$
		$f_1(x)$	Δ_1	$f_2(x)$	Δ_2	$f_3(x)$	Δ_3
0,5	0,78	1,09	0,31	1,14	0,36	1,03	0,25
0,6	0,74	0,96	0,22	0,97	0,23	0,85	0,11
0,7	0,71	0,79	0,08	0,81	0,1	0,71	0
0,8	0,67	0,67	0	0,67	0	0,58	0,09
0,9	0,64	0,57	-0,07	0,58	-0,06	0,47	-0,17
1	0,61	0,49	-0,12	0,46	-0,15	0,38	-0,23
1,2	0,55	0,40	-0,15	0,33	-0,22	0,27	-0,28
1,4	0,50	0,28	-0,22	0,28	-0,22	0,24	-0,26
1,6	0,45	0,45	0	0,31	-0,14	0,28	-0,17
1,8	0,41	0,59	0,18	0,41	0	0,41	0
2	0,37	0,82	0,45	0,6	0,23	0,6	0,23

правило направления смещения узлов интерполирования — они смещаются в сторону больших погрешностей.

Вариант II: Оставим без изменения $x_1 = 0,8$, а в качестве x_2 выберем 1,8. Учитывая, что $\xi(1,8) = 0,41$, рассчитаем по (17.1) коэффициенты A_1, A_2 . Они получились такими: $A_1 = -2,86$; $A_2 = 2,32$. Значения $f(x)$ и Δ при данных коэффициентах приведены в пятом и шестом столбцах табл. 17.3. Как и следовало ожидать, погрешность аппроксимации на правом конце диапазона существенно, почти в 2 раза, уменьшилась, а на левом конце несколько возросла (в 1,16 раза). Максимальная погрешность уменьшилась с 0,45 до 0,36. Теперь максимальная погрешность получается при $x = 0,5$. Сдвинем x_1 в сторону максимальной погрешности, оставляя без изменения $x_2 = 1,8$. Выберем $x_1 = 0,7$. Из табл. 17.3 видно, что $\xi(0,7) = 0,71$. Такой выбор узлов интерполирования составит третий вариант расчета.

Выполнив аналогичные вычисления, получим $A_1 = -2,78$; $A_2 = 2,16$. Значения $f(x)$ и Δ приведены в седьмом и восьмом столбцах табл. 17.3 и на графике рис. 17.8. Как видим, модуль

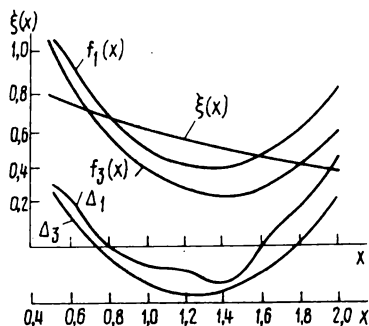


Рис. 17.8

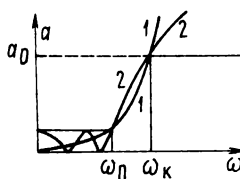


Рис. 17.9

максимальной погрешности уменьшился с 0,36 до 0,28 и достигается теперь при частоте $x = 1,2$.

Выводы. Путем изменения узлов интерполирования удалось уменьшить модуль максимальной погрешности с 0,45 до 0,28. При этом уменьшилась разность между модулями максимумов отклонения на интервале аппроксимации, т. е. путем изменения узлов интерполирования приблизились к равноволновой наилучшей в смысле Чебышева аппроксимации.

17.20. Выполняем нормирование по частоте. В качестве нормирующей частоты выбираем граничную частоту ПП ω_0 . Тогда $\hat{\omega}_0 = 1$, $\hat{\omega}_k = \omega_k/\omega_0 = 2,5^k$. Ослабление фильтра Баттерворта выражается формулой² $a(\hat{\omega}) = 10 \lg(1 + C_0 \hat{\omega}^{2n})$. Требования к АЧХ и примерный вид частотной зависимости ослабления фильтра Баттерворта показаны на рис. 17.9 (кривая 1). Как видно из данного графика, максимальное ослабление фильтра достигается при $\hat{\omega} = 1$. Поэтому, если выполняются требования по неравномерности на этой частоте, то они тем более выполняются при $\omega < \omega_0$. Таким образом, для удовлетворения требований по неравномерности достаточно выполнения равенства: $a(1) = \Delta a$ или $10 \lg(1 + C_0) = \Delta a$. Отсюда легко получаем

$$C_0 = 10^{0,1\Delta a} - 1. \quad (17.2)$$

Из того же графика видно, что выполнение требований по ослаблению на частоте $\hat{\omega}_k$ гарантирует их выполнение и при $\hat{\omega} > \hat{\omega}_k$. Поэтому параметр n находится из следующего равенства:

$$a(\hat{\omega}_k) \geq a_0 \text{ или } 10 \lg(1 + C_0 \hat{\omega}_k^{2n}) \geq a_0.$$

Решение данного неравенства с учетом (17.2) дает следующий результат:

$$n_B \geq \frac{\lg[(10^{0,1a_0} - 1)/(10^{0,1\Delta a} - 1)]}{2 \lg \hat{\omega}_k}. \quad (17.3a)$$

Учитывая, что $10^{0,1a_0} \gg 1$ порядок полинома Баттерворта можно вычислить и по приближенной формуле:

$$n_B \geq \frac{a_0 + 10 \lg|10^{0,1\Delta a} - 1|^{-1}}{20 \lg \hat{\omega}_k}. \quad (17.3b)$$

Так как n_B — порядок полинома, то полученное значение округляется до ближайшего большего целого числа. Вычисления по (17.2) и (17.3) дали следующие результаты: $C_0 = 0,26$, $n_B = 5$.

¹ На практике часто задаются частоты f_0 и f_k . В этом случае $\hat{\omega}_k = \omega_k/\omega_0 = f_k/f_0$.

² Ослабление фильтра при любой аппроксимации удобно представлять в виде: $a(\omega) = 10 \lg(1 + \varphi^2(\omega))$. Функцию $\varphi(\omega)$ называют функцией фильтрации, которая является четной или нечетной дробно-рациональной функцией с вещественными коэффициентами.

В учебнике даны формулы для расчета полюсов передаточной функции [формула (19.5)], а также сомножителей второго порядка полиномов знаменателя [формула (19.6)] при $C_0 = 1$. Необходимо найти аналогичные формулы при $C_0 \neq 1$. Как известно, квадрат модуля передаточной функции фильтра Баттерворта имеет вид:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + C_0 \omega^{2n}} = \frac{1/C_0}{1/C_0 + \omega^{2n}}. \quad (17.4)$$

Обычным образом найдем операторную передаточную функцию. Напомним, что при переходе от операторной передаточной функции к комплексной осуществляется замена $p = j\omega$. Здесь необходимо сделать обратную замену: $\omega = p/j = -jp$. После такой замены в выражении (17.4) находим полюсы передаточной функции в результате решения уравнения $1/C_0 + (-jp)^{2n} = 0$. Отсюда следует, что

$$\hat{p}_k = |^{2n}\sqrt{1/C_0}| \left(-\sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \right). \quad (17.5)$$

Сравнивая данное выражение с (19.5) учебника, видим, что они отличаются только множителем $|^{2n}\sqrt{1/C_0}|$, т. е. $\hat{p}_k = |^{2n}\sqrt{1/C_0}| p_k$. Рассмотрим, какие изменения произойдут из-за этого в знаменателе операторной передаточной функции. Полюсы могут быть как вещественными, так и комплексно-сопряженными. Можно показать, что при четных n полюсы \hat{p}_k всегда комплексно сопряженные, а при нечетном n будет только один вещественный полюс и в последнем случае полином знаменателя будет содержать множитель $(\hat{p} + |^{2n}\sqrt{1/C_0}|)$. Заметим, что вещественный полюс получается при $k = (n+1)/2$, когда $\cos [(2k-1)\pi/2n] = 0$.

Пара комплексных сопряженных полюсов (17.5) образует множитель второй степени:

$$\begin{aligned} (\hat{p} - \hat{p}_k)(\hat{p} - \hat{p}'_{n-k+1}) &= \hat{p}^2 = \\ &= 2\hat{p} |^{2n}\sqrt{1/C_0}| \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + |^n\sqrt{1/C_0}|. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Отличие полученного выражения от (19.6) учебника состоит в том, что здесь коэффициент при первой степени умножается на $|^{2n}\sqrt{1/C_0}|$, а свободный член на $|^n\sqrt{1/C_0}|$. Итак, операторная передаточная функция фильтра Баттерворта для нечетных n имеет вид:

$$H(\hat{p}) = \frac{\sqrt{1/C_0}}{(\hat{p} + |^{2n}\sqrt{1/C_0}|) \prod_{(k)} [\hat{p}^2 + 2\hat{p} |^{2n}\sqrt{1/C_0}| \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + |^n\sqrt{1/C_0}|]}, \quad (17.7a)$$

где $k=1, 2, \dots, (n-1)/2$. При четных n отсутствует первый сомножитель, а k принимает все значения от 1 до $n/2$. Таким образом, операторная функция в общем виде может быть представлена так:

$$H(\hat{p}) = \frac{\kappa_0}{(\hat{p} + \delta) \prod_{(k)} (\hat{p}^2 + \alpha_k \hat{p} + \beta_k)} . \quad (17.76)$$

Для некоторого облегчения расчетов предварительно вычислены полиномы знаменателя передаточной функции при $C_0 = 1$. Их называют полиномами Баттерворта, которые для $n = 1, 8$ приведены в Приложении 3. Учитывая, что в данном примере $n = 5$, запишем операторную передаточную функцию:

$$H(\hat{p}) = \frac{\sqrt[10]{1/C_0}}{(\hat{p} + \delta) (\hat{p}^2 + 0,618\delta\hat{p} + \delta^2) (\hat{p}^2 + 1,618\delta\hat{p} + \delta^2)} ,$$

где $\delta = |\sqrt[10]{1/C_0}|$. Подставив значение $C_0 = 0,26$, получим

$$H(\hat{p}) = \frac{1,9653}{(\hat{p} + 1,1447) (\hat{p}^2 + 0,7074\hat{p} + 1,3103) (\hat{p}^2 + 1,852\hat{p} + 1,3103)} .$$

Чтобы убедиться в правильности решения задачи аппроксимации, достаточно рассчитать ослабление фильтра на частотах $\hat{\omega} = 0$, $\hat{\omega} = 1$ и $\hat{\omega} = \hat{\omega}_k$. Так как передаточная функция представлена в виде (17.7, б), то ослабление

$$a(\omega) = 10 \lg \{ \kappa_0^{-2} [(\hat{\omega}^2 + \delta^2) \prod_{(k)} ((\beta_k - \hat{\omega}^2)^2 + \alpha_k^2 \hat{\omega}^2)] \} .$$

Напомним, что при нечетном n $k = 1, 2, \dots (n-1)/2$, а при четном — отсутствует множитель $\hat{\omega}^2 + \delta^2$ и $k = 1, 2, \dots, n/2$. При любом n $a(0) = 0$, $a(1) = \Delta a$, $a(\hat{\omega}_k) \geq a_0$.

В заключение сформулируем последовательность решения задачи аппроксимации АЧХ по методу Баттерворта:

1. Выбирая в качестве нормирующей граничную частоту полосы пропускания, выполняем нормирование частоты.

2. По формулам (17.2) и (17.3) рассчитываем C_0 и n .

3. Рассчитываем $\sqrt[10]{1/C_0}$, $|\sqrt[10]{1/C_0}|$, $|\sqrt[10]{1/C_0}|$.

4. Используя полиномы Баттерворта или формулу (17.7 а), записываем операторную передаточную функцию.

5. Путем расчета ослабления проверяем соответствие найденной функции поставленным требованиям.

Заметим, что для решения задачи аппроксимации можно воспользоваться таблицами, приведенными в Приложении 3, или, например, в [10]. При этом порядок n_B рассчитывают для Δa_s , которое является ближайшим меньшим или равным Δa . По найденному n_B из соответствующей таблицы выписывают коэффициенты, а по ним конструируют операторную передаточную функцию.

17.26. Ослабление фильтра Чебышева выражается формулой:

$$a(\hat{\omega}) = 10 \lg [1 + \xi P_n^2(\hat{\omega})] , \quad (17.8)$$

где $\xi = 10^{0,1 \Delta a} - 1$.

Примерный вид частотной зависимости ослабления показан на рис. 17.9 (кривая 2). Как видно из данного графика, выполнение требований на частоте $\hat{\omega}_k$ гарантирует выполнение их во всей ПЗ. Этот факт отражается неравенством:

$$a(\hat{\omega}_k) \geq a_0 \text{ или } P_n(\hat{\omega}_k) \geq \sqrt{\xi^{-1}(10^{0,1a_0}-1)}.$$

Учтя, что $P_n(\hat{\omega}_k) = \operatorname{ch} n \operatorname{Arch} \hat{\omega}_k$, получим формулу для определения порядка функции передаточной фильтра Чебышева:

$$n_{\text{ч}} \geq \frac{\operatorname{Arch} \sqrt{\xi^{-1}(10^{0,1a_0}-1)}}{\operatorname{Arch} \hat{\omega}_k}. \quad (17.9a)$$

При вычислении $n_{\text{ч}}$ удобно пользоваться соотношением $\operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Как и в случае аппроксимации максимально гладкими функциями можно предложить приближенную формулу для расчета порядка функции $n_{\text{ч}}$, основанную на неравенстве $10^{0,1a_0} \gg 1$. Приближенная формула может быть представлена в виде

$$n_{\text{ч}} \geq \frac{a_0 + 6 - 10 \lg(10^{0,1\Delta a} - 1)}{20 \lg(\hat{\omega}_k + \sqrt{\hat{\omega}_k^2 - 1})}. \quad (17.9б)$$

Результат вычислений округляется до ближайшего большего целого числа. После подстановки численных значений в (17.9б) получаем $n_{\text{ч}} = 3$. Осталось найти операторную передаточную функцию. Напомним, что полюсы передаточной функции определяются выражением:

$$\hat{\rho}_k = -\frac{1}{2} \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + j \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \cos \frac{2k-1}{2n} \pi,$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{10^{0,05\Delta a} + 1}{10^{0,05\Delta a} - 1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что при четном n все полюсы являются комплексными сопряженными, при нечетном n существует один вещественный корень $-\frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})$ при $k = (n+1)/2$. Учитывая формулы (19.10) и (19.11) учебника, операторную передаточную функцию при нечетном n можно представить в виде:

$$H(\hat{\rho}) = \frac{2^{-n+1} \sqrt{(10^{0,1\Delta a} - 1)^{-1}}}{\left[\hat{\rho} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]_k \prod_k (\hat{\rho}^2 + \alpha_k \hat{\rho} + \beta_k)}, \quad (17.10)$$

где $k = 1, 2, \dots, (n-1)/2$, $\alpha_k = (\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}) \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$, $\beta_k = \cos^2 \frac{2k-1}{2n} \pi + \frac{1}{4} (\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon})^2$;

для четных n в (17.10) отсутствует первый сомножитель, а k принимает целые значения от 1 до $n/2$. Вычисления по исходным данным задачи дали следующие результаты: $\varepsilon=1,551$, $\xi=0,3335$, передаточная функция записывается следующим образом:

$$H(\hat{p}) = \frac{0,433}{(\hat{p} + 0,4532)(\hat{p}^2 + 0,4532\hat{p} + 0,9554)}.$$

В заключение сформулируем последовательность решения задачи аппроксимации АЧХ ФНЧ с характеристиками Чебышева;

- 1) нормируем по ω_0 граничные частоты ПП и ПЗ;
- 2) по формулам (17.8) и (17.9) рассчитываем ξ и n_c ;
- 3) рассчитываем ε ;
- 4) используя (17.10), рассчитываем координаты полюсов операторной функции;
- 5) расчетом АЧХ проверяем правильность решения задачи аппроксимации (см. задачу 17.20).

При решении задачи аппроксимации можно воспользоваться (как и в зад. 17.20) таблицами Приложения 3 или справочником [10].

17.32. Прежде всего по приближенной формуле

$$n_3 \geq \frac{12 + a_0 - 10 \lg(10^{0,13a} - 1)}{10 \lg[2(\sqrt{\hat{\omega}_k} + \sqrt{\hat{\omega}_k^2 - 1}) / (\sqrt{\hat{\omega}_k} - \sqrt{\hat{\omega}_k^2 - 1})]} \quad (17.11)$$

рассчитаем минимально возможный порядок передаточной функции. В данном примере $n_3=5$. Для дальнейшего решения задачи воспользуемся данными табл. ПЗ.3 или справочником [10], из которого они заимствованы. Среди таблиц, составленных для фильтров пятого порядка, находим ту, которая соответствует граничной частоте ПЗ $\hat{\omega}_s \geq \hat{\omega}_k = f_k/f_0$. Далее в таблице находим строку, для которой удовлетворяется условие $\Delta a_s \geq \Delta a_0$. Если при этом получается, что $a_s \geq a_0$, то искомая передаточная функция, рассчитанная с помощью данной таблицы, будет удовлетворять требованиям. В большинстве случаев так и получается. Если окажется, что $a_s < a_0$, то увеличиваем порядок на единицу, т. е. с помощью конкретных таблиц невозможна реализация данных конкретных требований при минимальном порядке операторной передаточной функции. Такое положение вызвано тем, что любые таблицы составляются для дискретных значений Δa_s и $\hat{\omega}_s$. Чем меньше шаг изменения Δa_s и $\hat{\omega}_s$, выбранный при составлении таблиц, тем больше вероятность реализации фильтров минимального порядка. По исходным данным $n=5$, $\Delta a=1,25$ и $\hat{\omega}_k = f_k/f_0 = 1,25$ выбираем таблицу с $\hat{\omega}_s = 1,236 < 1,25$ и $\Delta a_s = \Delta a = 1,25$ дБ. При этом $a_s = 42,2$ дБ $> a_0$. Используя данные табл. ПЗ.3, записываем операторную передаточную функцию:

$$H(\hat{p}) = \frac{0,03744(\hat{p}^2 + 1,62)(\hat{p}^2 + 3,248)}{(\hat{p} + 0,3486)(\hat{p}^2 + 0,4068\hat{p} + 0,5706)(\hat{p}^2 + 0,0957\hat{p} + 0,9903)}.$$

17.34. Идея решения задачи аппроксимации характеристик любых типов фильтров (ФВЧ, ПФ, РФ) с помощью преобразования частоты заключается в следующем: 1) по заданным требованиям к ФВЧ, ПФ или РФ определяются требования к ФНЧ, т. е. находятся его граничные частоты ПП ω_0 и ПЗ ω_k . Неравномерность ослабления в ПП Δa и минимально допустимое ослабление в ПЗ a_0 остаются такими же, как и в исходном фильтре (рассматриваемый ФНЧ называют прототипом); 2) решается задача аппроксимации характеристики ФНЧ; 3) если реализация фильтра выполняется в виде LC -цепи, то синтезируется ФНЧ и затем все реактивные элементы заменяются в соответствии с применяемым преобразованием. Так, при использовании для синтеза ФВЧ преобразования $\omega = (\omega_0')^2 / \omega'$ [см. (19.16 б) учебника] индуктивности L_k ФНЧ преобразуются в емкости $C_k' = 1/(\omega_0')^2 L_k$, а емкости C_l — в индуктивности $L_l' = 1/(\omega_0')^2 C_l$; 4) если же реализация выполняется в виде ARC -цепи, то искомую операторную передаточную функцию получают из найденной операторной функции ФНЧ путем соответствующего преобразования частоты. Задачу будем решать в указанной последовательности.

1. В преобразовании $\omega = (\omega_0')^2 / \omega'$ положим $\omega_0' = \omega_{0в}$.

Тогда при $\omega' = \omega_{0в}$ получаем $\omega_0 = \omega_{0в}$, а если $\omega' = \omega_{2в}$, то $\omega_k = \omega_{0в}^2 / \omega_{кв}$. В данном случае $\omega_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\omega_k = 4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, получились следующие преобразования к ФНЧ-прототипу. Граничная частота ПП $\omega_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$; неравномерность ослабления в этой полосе $\Delta a = 1,5 \text{ дБ}$; граничная частота ПЗ $\omega_k = 4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$; минимально допустимое ослабление в этой полосе $a_0 = 20 \text{ дБ}$.

2. Решим задачу аппроксимации характеристики ФНЧ с помощью полиномов Баттерворта (см. зад. 17.20). Нормированные граничные частоты ФНЧ соответственно равны $\hat{\omega}_0 = 1$, $\hat{\omega}_k = 2$. По формулам (17.2) и (17.3) вычисляем C_0 и n ; $C_0 = 0,4125$, $n_b = 4$. Используя полиномы Баттерворта (см. Приложение 3), запишем операторную функцию ФНЧ в виде:

$$H(\hat{p}) = \frac{\sqrt{1/C_0}}{(\hat{p}^2 + 0,7854 \delta \hat{p} + \delta^2)(\hat{p}^2 + 1,8478 \delta \hat{p} + \delta^2)},$$

где $\delta = |\sqrt{1/C_0}|$. Вычислив δ и $\sqrt{1/C_0}$, имеем:

$$H(\hat{p}) = \frac{1,557}{(\hat{p}^2 + 0,8549\hat{p} + 1,2478)(\hat{p}^2 + 2,064\hat{p} + 1,2478)} \quad (17.12)$$

3. Осуществим переход к передаточной функции ФВЧ. Преобразование нормированных частот определяется формулой (19.17) учебника $\hat{p} = \omega_0/p = 1/p\omega_0^{-1} = 1/\hat{p}$. Заменим \hat{p} на $1/\hat{p}$ в выражении (17.12) и после алгебраических преобразований получим:

$$H(\hat{p}) = \frac{1,557\hat{p}^4}{(1,2478\hat{p}^2 + 0,8549\hat{p} + 1)(1,2478\hat{p}^2 + 2,064\hat{p} + 1)}.$$

Из каждого сомножителя знаменателя вынесем коэффициент при старшей степени \hat{p} и запишем операторную передаточную функцию в окончательном виде:

$$H(\hat{p}) = \frac{p^4}{(\hat{p}^2 + 0,6851\hat{p} + 0,8014)(\hat{p}^2 + 1,6541\hat{p} + 0,8014)}.$$

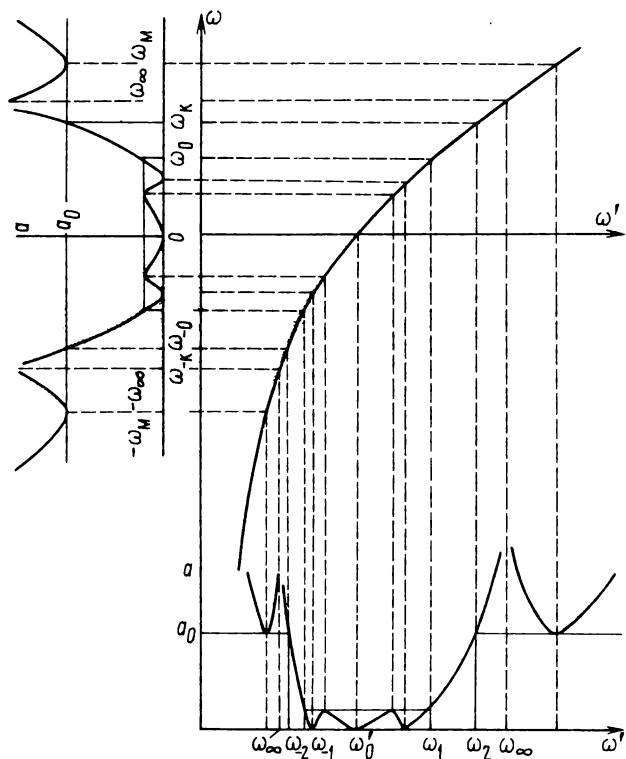
17.38. Данная задача решается в той же последовательности, что и 17.34.

1. Прежде всего отметим, что требования к ПФ удовлетворяют условиям геометрической симметрии: $\omega'_0 = \sqrt{\omega_{-1}\omega_1} = \sqrt{\omega_{-2}\omega_2}$. По заданным требованиям к ПФ определим требования к ФНЧ-прототипу. Для этого воспользуемся преобразованием:

$$\omega = \omega' - (\omega'_0)^2 / \omega'. \quad (17.13)$$

На рис. 17.10 слева показаны требования и характеристика ослабления ФНЧ третьего порядка с характеристиками Золотарева в диапазоне частот $-\infty, \infty$; справа вверху — преобразование (17.13), а справа внизу — требования и характеристика ослабле-

Рис. 17.10



ния ПФ. Из графиков данного рисунка следует, что граничные частоты ПП и ПЗ ФНЧ получаются, если в преобразование (17.13) подставить граничные частоты ПП и ПЗ ПФ:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \omega_1 - (\omega'_0)^2 / \omega_1 = \omega_1 - \omega_1, \\ \omega_k &= \omega_2 - (\omega'_0)^2 / \omega_2 = \omega_2 - \omega_{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.14)$$

В силу геометрической симметрии требований к ПФ автоматически выполняются равенства: $\omega_{-0} = -\omega_0$ и $\omega_{-k} = -\omega_k$ (см. также рис. 17.10).

Заметим, что при отсутствии геометрической симметрии требований к ПФ можно путем уменьшения ω_2 или увеличения ω_{-2} добиться выполнения желаемой симметрии, а затем применить рассматриваемое преобразование частоты. При этом требования к ПФ в ПЗ будут выполняться в более широкой полосе частот, что нарушает оптимальность решения задачи аппроксимации. Однако при относительно малом смещении ω_2 или ω_{-2} такой метод решения задачи аппроксимации часто применяется на практике.

Рассчитаем требования к ФНЧ: $\omega_0 = \omega_1 - \omega_{-1} = 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_k = \omega_2 - \omega_{-2} = 3,5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\Delta a = 3 \text{ дБ}$, $a_0 = 26 \text{ дБ}$.

Требования к ПФ могут задаваться с помощью частоты $f(f_{-2}, f_{-1}, f_1 \text{ и } f_2)$. Для этих частот справедливы (17.13) и (17.14). Чтобы убедиться в этом, достаточно левые и правые части этих формул разделить на 2л.

2. Применим для аппроксимации характеристики ФНЧ-прототипа полиномы Баттерворта. Принимая во внимание, что нормированная граничная частота ПЗ $\hat{\omega}_k$ равна $\hat{\omega}_k = \omega_k / \omega_0 = 3,5$, по (17.2) и (17.3) находим C_0 и n : $C_0 = 1$, $n_B = 3$. Используя полиномы Баттерворта (см. Приложение 3), запишем искомую операторную передаточную функцию ФНЧ

$$H(\hat{p}) = \frac{1}{(\hat{p} + 1)(\hat{p}^2 + \hat{p} + 1)}. \quad (17.15)$$

Так как $C_0 = 1$, то дополнительных преобразований $H(\hat{p})$ не требуется.

3. Перейдем от $H(\hat{p})$ ФНЧ к операторной передаточной функции ПФ. Преобразование (19.21а), приведенное в учебнике, устанавливает связь между нормированной частотой ФНЧ и ненормированной частотой ПФ. Это преобразование имеет вид

$$\hat{p} = \frac{p^2 + (\omega'_0)^2}{p(\omega_1 - \omega_{-1})}. \quad (17.16a)$$

При подстановке (17.16а) в (17.16) получится ненормированная по частоте операторная передаточная функция ПФ. Это не всегда удобно, поэтому числитель и знаменатель (17.16а) разделим на $(\omega'_0)^2$ и обозначим нормированную частоту ПФ через $\hat{p}' = p' / \omega'_0$; в результате получим

$$\hat{p} = \frac{1}{S} \frac{(\hat{p}')^2 + 1}{\hat{p}'}, \quad (17.166)$$

где

$$S = \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{\omega'_0} \frac{f_1 - f_{-1}}{f'_0}.$$

Передаточная функция ФНЧ может состоять из следующих сомножителей:

$$H(\hat{p}) = \frac{\kappa_0}{\hat{p} + \delta}, \quad (17.17)$$

$$H(\hat{p}) = \frac{\kappa_0}{\hat{p}^2 + \alpha\hat{p} + \beta}, \quad (17.18)$$

$$H(\hat{p}) = \frac{\kappa_0(\hat{p}^2 + \hat{\omega}_\infty^2)}{\hat{p}^2 + \alpha\hat{p} + \beta}. \quad (17.19)$$

Применим преобразование частоты (17.16 б) к сомножителю первого порядка (17.17). В результате получим

$$H(\hat{p}) = \frac{\kappa_0 S \hat{p}}{\hat{p}^2 + \delta S \hat{p} + 1}. \quad (17.20)$$

Если применить то же преобразование к сомножителю (17.18), то будем иметь:

$$H(\hat{p}) = \frac{\kappa_0 S^2 \hat{p}^2}{\hat{p}^4 + \alpha S \hat{p}^3 + (2 + \beta S^2) \hat{p}^2 + \alpha S \hat{p} + 1}. \quad (17.21)$$

Наконец, преобразуя с помощью замены переменных (17.166) последний третий сомножитель (17.19), приходим к передаточной функции вида:

$$H(\hat{p}) = \frac{\hat{p}^4 + (2 + S^2 \hat{\omega}_\infty^2) \hat{p}^2 + 1}{\hat{p}^4 + \alpha S \hat{p}^3 + (2 + \beta S^2) \hat{p}^2 + \alpha S \hat{p} + 1}. \quad (17.22)$$

При последующем решении задачи реализации полученной передаточной функции с помощью АРС-цепей часто бывает необходимо представить реализуемую функцию в виде множителей второго порядка, т. е. выражение (17.22) должно записываться следующим образом:

$$H(\hat{p}) = \frac{(\hat{p}^2 + \hat{\omega}_{\infty 1}^2)(\hat{p}^2 + \hat{\omega}_{\infty 2}^2)}{(\hat{p}^2 + \alpha_1 \hat{p} + \beta_1)(\hat{p}^2 + \alpha_2 \hat{p} + \beta_2)}.$$

Можно показать, что коэффициенты данной функции рассчитываются по формулам:

$$\hat{\omega}_{\infty 1,2}^2 = 1 + 0,5 S \hat{\omega}_\infty (S \hat{\omega}_\infty \pm \sqrt{S^2 \hat{\omega}_\infty^2 + 2});$$

$$\alpha_{1,2} = S(0,5\alpha \pm L_1); \quad \beta_{1,2} = 0,25S^2[\beta + M \pm (\alpha L_1 + 2\omega_1 L_2)];$$

где $\omega_1^2 = \beta - 0,25\alpha^2$, $L_{1,2} = \sqrt{0,5(M \pm b)}$, $M = \sqrt{b^2 + \alpha^2 \omega_1^2}$, $b = \beta - 0,5\alpha^2 + 4/S^2$;

β , α и $\hat{\omega}_\infty$ — коэффициенты передаточной функции ФНЧ (17.19). В данной задаче найденная передаточная функция ФНЧ (17.15) представляется в виде произведения двух сомножителей (17.17) и (17.18). При этом $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\kappa_0 = 1$, а $S = (\omega_1 - \omega_{-1})/\omega_0 = 1/\sqrt{2} = 0,7071$. Подставив численные значения коэффициентов в (17.20) и (17.21), получим передаточную функцию ПФ:

$$H(\hat{p}) = \frac{0,7071\hat{p}}{\hat{p}^2 + 0,7071\hat{p} + 1} \frac{0,5\hat{p}^2}{\hat{p}^4 + 0,7071\hat{p}^3 + 2,5\hat{p}^2 + 0,7071\hat{p} + 1}.$$

Воспользовавшись (17.23), представим полином знаменателя в виде произведения множителей второго порядка:

$$H(\hat{p}) = \frac{0,3536\hat{p}^3}{(\hat{p}^2 + 0,7071\hat{p} + 1)(\hat{p}^2 + 0,4584\hat{p} + 1,8436)(\hat{p}^2 + 0,2487\hat{p} + 0,5424)}.$$

18. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

18.1. ЛЕСТНИЧНЫЕ LC-ФИЛЬТРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Лестничные LC-фильтры, режим двухсторонней и односторонней нагрузок.
2. Определение порядка операторной передаточной функции, кратности нуля в нуле и бесконечности лестничных цепей с элементами L или C в продольных и соответственно с элементами C или L в поперечных ветвях.
3. Определение порядка передаточной функции лестничной LC-цепи общего вида.
4. Численные методы решения задачи реализации; виды целевых функций.
5. Идея аналитических методов решения задачи LC-реализации.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

18.1. На рис. 18.1, *а* показана схема лестничной цепи с индуктивностями в продольных и емкостями в поперечных ветвях. Определить порядок цепи и записать в общем виде ее передаточную функцию.

18.2. На рис. 18.1, *б* показана схема лестничной цепи с емкостями в продольных и индуктивностями в поперечных ветвях. Опре-

делить порядок цепи и записать в общем виде передаточную функцию.

18.3. Пользуясь приведенным в учебнике алгоритмом (17.22), найти рабочие операторные передаточные функции цепей рис. 18.1, а, б в режиме двухсторонней нагрузки $\hat{R}_1 = \hat{R}_2 = 1$, если нормированные параметры элементов имеют следующие значения: схема а) $\hat{C}_1 = 0,7654$; $\hat{L}_2 = 1,848$; $\hat{C}_3 = 1,848$; $\hat{L}_4 = 0,7654$; схема б) $\hat{C}_1 = \hat{C}_5 = 1,618$; $\hat{L}_2 = \hat{L}_4 = 0,618$; $\hat{C}_3 = 0,5$.

18.4. Найти порядок и записать в общем виде передаточные функции цепей, схемы которых изображены на рис. 18.2, а...г.

18.5.¹ В результате решения задачи аппроксимации характеристик ФНЧ полиномами Баттерворта получена операторная передаточная функция $H(\hat{p})$, квадрат модуля которой равен $1/(1 + \hat{\omega}^8)$. Решить задачу реализации в виде двухсторонне нагруженного четырехполюсника. Считая, что сопротивления нагрузок $R_1 = R_2 = 100$ Ом, а граничная частота ПП $\omega_0 = 10^6$ с⁻¹, найти ненормированные элементы четырехполюсника.

18.6.¹ Найти схему четырехполюсника и нормированные параметры элементов, реализующих передаточную функцию фильтра Баттерворта пятого порядка, если число индуктивностей в схеме меньше числа емкостей, а $\Delta\alpha = 3$ дБ.

18.7.¹ Решить задачу 18.6 для фильтра с характеристиками Чебышева пятого порядка и $\Delta\alpha = 0,099$ дБ, если число индуктивностей в схеме меньше числа емкостей.

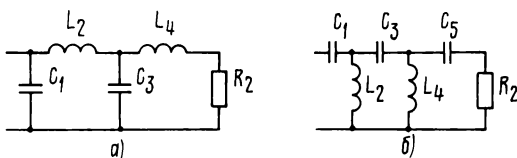


Рис. 18.1

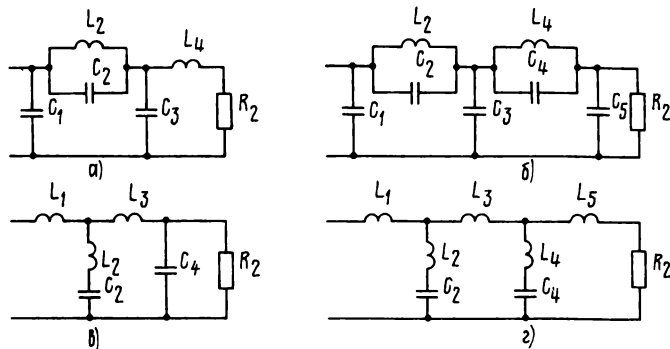


Рис. 18.2

¹ Задачу можно решить с использованием табл. ПЗ.8 и ПЗ.9.

18.8. Реализовать четырехполосник в виде лестничной цепи при заданном сопротивлении генератора $\hat{R}_1=1$ и холостом ходе на выходе, если $H(\hat{p})=1/(24\hat{p}^4+24\hat{p}^3+18\hat{p}^2+6\hat{p}+1)$.

18.9р. Используя справочник по расчету фильтров [11], найти схемы и величины элементов ФНЧ с характеристиками Золотарева, удовлетворяющие требованиям; $\Delta a=0,2$ дБ; $a_0=40$ дБ; $f_0=10$ кГц; $f_k=21$ кГц; $R_1=R_2=1000$ Ом.

18.10. С помощью справочников рассчитать LC-ФНЧ с характеристиками Золотарева, удовлетворяющий следующим требованиям: $f_0=10$ кГц; $f_k=15$ кГц, $\Delta a=0,18$ дБ, $a_0=45$ дБ, $R_1=R_2=1000$ Ом.

18.11р. Используя справочники, с помощью преобразования частоты рассчитать LC-ПФ с характеристиками Золотарева, удовлетворяющий следующим требованиям: $f_{-2}=0,85$ кГц, $f_{-1}=1$ кГц, $f_1=2$ кГц, $f_2=2,35$ кГц, $\Delta a=0,18$ дБ, $a_0=45$ дБ, $R_1=R_2=1000$ Ом.

18.12. Решить задачу 18.11, если $f_{-2}=80$ кГц, $f_{-1}=90$ кГц, $f_1=100$ кГц, $f_2=112,5$ кГц, $\Delta a=0,05$ дБ, $a_0=50$ дБ.

18.13*. Решить задачу 18.11, если $f_{-2}=6$ кГц, $f_{-1}=8$ кГц, $f_1=10$ кГц, $f_2=14$ кГц, $\Delta a=0,1$ дБ, $a_0=55$ дБ.

Указание. Первым шагом решения задачи должно быть такое изменение требований к характеристикам ПФ, чтобы они удовлетворяли условию геометрической симметрии и были более жесткими, чем заданные.

18.14.* В полосовом фильтре, полученном в зад. 18.11, поперечные ветви содержат как последовательные, так и параллельные контуры. Преобразовать эти ветви так, чтобы они состояли только из последовательных LC-контуров. Рассчитать величины элементов этих контуров (см. § 15.2).

18.15. При решении задачи 18.11 в качестве ФНЧ-прототипа использовалась правая схема рис. ПЗ.4. Найти схему и величины элементов ПФ, если в качестве ФНЧ-прототипа выбрана левая схема этой же таблицы. Преобразовать полученную схему так, чтобы она содержала только параллельные контуры.

18.2. ФИЛЬТРЫ ARC-КАСКАДНОЙ СТРУКТУРЫ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Типы передаточных функций ARC-звеньев.
2. Схемы, реализующие передаточные функции первого порядка.
3. Полиномиальные ARC-звенья, содержащие усилители с конечным усилением.
4. ARC-звенья с нулями передаточной функции, содержащие усилители с конечным усилением.
5. Схемы ARC-звеньев на операционных усилителях (ОУ).
6. Методика расчета элементов ARC-звеньев.
7. Чувствительность характеристик электрических цепей.
8. Чувствительность характеристик ARC-звеньев.

18.16р. Нормированная операторная передаточная функция фильтра Баттерворта третьего порядка имеет вид: $H(\hat{p}) = 1/[(\hat{p} + 1) \times (\hat{p}^2 + \hat{p} + 1)]$. Реализовать заданную функцию в виде каскадного соединения звеньев.

18.17. Операторная передаточная функция ФВЧ имеет вид: $H(\hat{p}) = \hat{p}^3/[(\hat{p} + 1)(\hat{p}^2 + \hat{p} + 1)]$. Реализовать заданную функцию в виде каскадного соединения звеньев. Денормировать элементы, если максимальное значение емкости не должно превышать 2000 пФ, а $\omega_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$. При решении задачи воспользоваться данными Приложения 4.

18.18. Реализовать в виде активного ARC-звена операторную передаточную функцию

$$H(\hat{p}) = \kappa(\hat{p}^2 + 1,44)/(\hat{p}^2 + 0,276\hat{p} + 1,275).$$

Примечание. Ответ дан для схемы 15 Приложения 4, если

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{C}_3 = \hat{C}_4 = \hat{R}_9 = 1.$$

18.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. СИНТЕЗ СХЕМ ARC-ФИЛЬТРОВ

18.19. В гл. 9 изложена методика нахождения операторных передаточных функций цепей, содержащих операционные усилители. Пользуясь этой методикой, найти множество схем, которые обладают передаточной функцией второго порядка

$$H(p) = \kappa(p^2 + \omega_\infty^2)/(p^2 + \alpha p + \beta) \quad (18.1)$$

и могут применяться в качестве ARC-звеньев фильтров. Показать, как по заданной передаточной функции найти величины элементов.

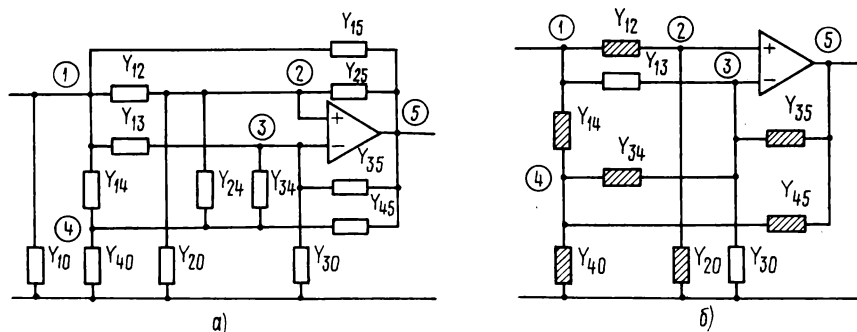


Рис. 18.3

Проанализировать полученные схемы с точки зрения возможности раздельной настройки нулей и полюсов. Попробуйте найти схемы с раздельной настройкой частоты и добротности полюсов.

Покажем ход решения задачи на примере. Рассмотрим цепь с шестью узлами, соединенными по принципу «каждый с каждым» и содержащую один ОУ (рис. 18.3,а). Узел 1 будем считать входным, а узел 5 выходным. Матричное уравнение цепи имеет вид:

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & -(Y_{12}+Y_{13}) & -Y_{14} & -Y_{15} \\ -Y_{12} & Y_{22} & -Y_{24} & -Y_{25} \\ -Y_{13} & Y_{33} & -Y_{34} & -Y_{35} \\ -Y_{14} & -(Y_{24}+Y_{34}) & Y_{44} & -Y_{45} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \\ U_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Операторная передаточная функция по напряжению записывается через алгебраические дополнения определителя матрицы Y следующим образом:

$$H(p) = -\Delta_{14}/\Delta_{11}. \quad (18.2)$$

Раскрыв алгебраические дополнения Δ_{11} и Δ_{14} , получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= Y_{22}Y_{34}Y_{45} + Y_{25}Y_{34}Y_{24} + Y_{25}Y_{34}^2 + Y_{35}Y_{22}Y_{44} - Y_{24}Y_{35} - \\ &- Y_{24}Y_{35}Y_{34} - Y_{25}Y_{33}Y_{44} - Y_{24}Y_{45}Y_{33}; \\ \Delta_{14} &= Y_{14}Y_{34}Y_{22} + Y_{13}Y_{22}Y_{44} + Y_{12}Y_{34}Y_{24} + Y_{12}Y_{34}^2 - Y_{12}Y_{33}Y_{44} - \\ &- Y_{13}Y_{24}^2 - Y_{24}Y_{13}Y_{34} - Y_{14}Y_{24}Y_{33}. \end{aligned}$$

Введем некоторые ограничения. Потребуем, чтобы в знаменателе все слагаемые были одного знака. В таком случае получается абсолютно устойчивая цепь. Для этого положим, например, $Y_{24} = Y_{25} = 0$. Тогда

$$\Delta_{11} = Y_{22}(Y_{34}Y_{45} + Y_{35}Y_{44}), \quad (18.3)$$

$$\Delta_{14} = Y_{22}Y_{34}Y_{14} + Y_{13}Y_{22}Y_{44} + Y_{12}Y_{34}^2 - Y_{12}Y_{33}Y_{44}. \quad (18.4)$$

Из (18.3) и (18.4) видно, что передаточная функция, кроме Y_{24} и Y_{25} , не содержит элементов Y_{11} и Y_{15} , поэтому можно дополнительно из схемы исключить Y_{10} и Y_{15} . Схема с исключенными проводимостями показана на рис. 18.3,б. На этом рисунке заштрихованы проводимости, участвующие в формировании знаменателя передаточной функции. Удаление незаштрихованных ветвей не изменяет полинома знаменателя. Этим же достигается независимость регулировки коэффициентов полинома числителя. Перейдем далее к выбору типов элементов.

Так как нас интересуют передаточные функции второго порядка с комплексно-сопряженными полюсами, то Y_{22} должна быть вещественным числом: $Y_{22} = G$. Отсюда следует, что

$$Y_{12} = G_{12} \text{ и } Y_{20} = G_{20}.$$

Заметим, что или G_{12} или G_{20} могут равняться нулю. Пусть схема содержит две емкости. Определитель Δ_{11} должен быть второго порядка. Необходимым условием этого является включение емкостей в ветви Y_{34} , Y_{45} , Y_{35} , Y_{14} и Y_{40} . Возможно 10 вариантов

включения емкостей. Часть вариантов приводит к полиному первой степени, а часть — к полиному второй степени, но с вещественными корнями. Пусть $Y_{34} = pC_{34}$, $Y_{45} = pC_{45}$, $G_{20} = 0$, а остальные проводимости являются вещественными, т. е. $Y_{ij} = G_{ij}$. При этих условиях Δ_{14} записывается следующим образом:

$$\Delta_{14} = -C_{34}C_{45}G_{12}p^2 + [(C_{34} + C_{45})(G_{13} - G_{30} - G_{35}) - G_{40}C_{34}] \times \\ \times G_{12}p + (G_{14} + G_{40})(G_{13} - G_{30} - G_{35})G_{12}. \quad (18.5)$$

Чтобы получить полюсы ослабления (нуль передаточной функции), необходимо приравнять нулю коэффициент при первой степени p в (18.5). Из этого следует, что

$$G_{13} = G_{30} + G_{35} + G_{40}C_{34} / (C_{34} + C_{45}). \quad (18.6)$$

При тех же допущениях на характер элементов выражение для Δ_{11} имеет вид:

$$\Delta_{11} = C_{34}C_{45}G_{12}p^2 + G_{12}G_{35}(C_{34} + C_{45})p + G_{12}G_{35}(G_{14} + G_{40}). \quad (18.7)$$

Подставив, с учетом равенства (18.6), алгебраические дополнения (18.5) и (18.7) и в (18.2), запишем выражения для операторной передаточной функции:

$$H(p) = \frac{p^2 + C^{-1}(G_{30} + G_{35} - G_{13}) + G_{40}C_{45}^{-1}}{p^2 + C^{-1}G_{35}p + G_{35}(G_{14} + G_{40})(C_{34}C_{45})^{-1}},$$

где $C = \frac{C_{34}C_{45}}{C_{34} + C_{45}}.$

Сравнив полученную передаточную функцию с заданной (18.1), получим систему уравнений, связывающую коэффициенты κ , ω_{∞}^2 , α и β с элементами цепи:

$$\omega_{\infty}^2 = C^{-1}(G_{30} + G_{35} - G_{13}) + G_{40}C_{45}^{-1}, \\ \alpha = C^{-1}G_{35}, \quad \beta = G_{35}(G_{14} + G_{40})(C_{34}C_{45}).$$

Полученные уравнения позволяют сделать дальнейший анализ схемы, а именно найти формулы для расчета элементов, определить настроечные элементы, рассчитать чувствительность и т. д.

18.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 18.1. Лестничные LC-фильтры нижних частот.

Основное задание. С помощью таблиц (например, Приложение 3) найти схемы ФНЧ, удовлетворяющие требованиям задания 17.1. Задачу решить для трех случаев: 1) фильтр Баттерворта; 2) фильтр Чебышева; 3) фильтр Золотарева — Кауэра¹. Сравнить

¹ Фильтры с характеристиками Золотарева часто называют фильтрами Золотарева — Кауэра, так как Кауэр первый применил результаты работ Золотарева в теории фильтров.

полученные результаты. Денормировать элементы, если $R_1 = R_2 = 100 \cdot n$ Ом.

Дополнительное задание. По полученным в задании 17.1 (основном или дополнительном) передаточным функциям найти схемы фильтров при односторонней и двухсторонней нагрузках.

Задание 18.2. Полосовые LC -фильтры.

С помощью преобразования частоты и таблиц найти схемы полосовых LC -фильтров, удовлетворяющие требованиям задания 17.2. Денормировать элементы, если $R_1 = R_2 = 100 \cdot n$ Ом.

Задание 18.3. ARC -фильтры нижних частот.

Найти схемы фильтров в виде каскадного соединения ARC -звеньев, операторные передаточные функции которых найдены в задании 17.1. Денормировать элементы полученных фильтров.

Задание 18.4. Полосовые ARC -фильтры.

Найти схемы ПФ в виде каскадного соединения ARC -звеньев, операторные передаточные функции которых найдены в задании 17.2. Денормировать элементы полученного фильтра.

При решении заданий воспользоваться Приложением 3.

Задание 18.5 (дополнительное). Чувствительность характеристик ARC -звеньев.

Выполнить поэлементный анализ чувствительности АЧХ и ФЧХ ARC -звеньев, схемы и передаточные функции которых приведены в Приложении 4.

Конкретные схемы для анализа выбрать самостоятельно.

Решения.

18.9. 1. После нормирования частоты ($\hat{\omega}_0 = 1, \hat{\omega}_\kappa = 2,1$) рассчитываем ориентировочный порядок фильтра по приближенной формуле (17.11), округляя полученное значение до ближайшего большего целого числа. В данном случае $n = 4$. На самом деле может оказаться, что порядок фильтра будет больше рассчитанного. Это обусловлено в основном двумя причинами. Во-первых, ограниченностью числа реализацией фильтра, связанной с тем, что при $\omega \rightarrow \infty$ ослабление фильтра будет конечным (см. стр. 455 и 456 учебника). Во-вторых, требования условия задачи $R_1 = R_2$ приводит к неоптимальности решения задачи аппроксимации для четных значений¹.

2. По справочнику отыскиваются таблицы, соответствующие найденному порядку фильтра. В Приложении 3 приведены нормированные параметры фильтров четвертого, пятого и шестого порядков² в предположении, что нормированные сопротивления генератора и

¹ Подробнее об этом можно прочитать в книге Зааль Р. Справочник по расчету фильтров.— М.: Радио и связь, 1983.

² Таблицы из [10]. Они содержат параметры элементов фильтров с модифицированными характеристиками.

нагрузки равны 1. В этих таблицах $\hat{\omega}_s$ — нормированная граничная частота ПЗ, \hat{L}_i , \hat{C}_i — нормированные параметры элементов фильтра (обозначения элементов вверху таблицы соответствует левой схеме, а внизу — правой), $\omega_{\infty i}$ — нормированные частоты полюсов ослабления, a_s — минимально допустимое ослабление в ПЗ, Δa_s — неравномерность ослабления в ПП.

В таблице, относящейся к фильтру четвертого порядка, находим значение Δa_s , которое является равным Δa или ближайшим меньшим числом. В задаче $\Delta a = 0,2$ дБ. Ближайшее меньшее значение $\Delta a_s = 0,177$ дБ. В таблице приведено несколько наборов параметров элементов фильтра, имеющих данную неравномерность. Выбирается та строка параметров, которая соответствует значению $\hat{\omega}_s$, равному $\hat{\omega}_k$, или ближайшее меньшее значение относительно $\hat{\omega}_k$. Выбираем $\hat{\omega}_s = 2,099 < 2,1$. Параметры элементов считаются выбранными, если $\hat{a}_s \geq a_0$. Здесь $a_s = 40,5$ дБ, что больше $a_0 = 40$ дБ. Выписываем из таблицы нормированные параметры элементов для левой схемы: $\hat{C}_1 = 0,904$, $\hat{C}_2 = 0,152$, $\hat{C}_3 = 1,394$, $\hat{L}_2 = 1,257$, $\hat{L}_4 = 1,041$ и для правой схемы: $\hat{L}_1 = 0,904$, $\hat{L}_2 = 0,152$, $\hat{L}_3 = 1,394$, $\hat{C}_2 = 1,257$, $\hat{C}_4 = 1,041$. Истинные (ненормированные) элементы находим по формулам: $L_i = \hat{L}_i R / 2\pi f_1$, $C_i = \hat{C}_i / 2\pi f_1 R$, $R_i = \hat{R}_i R$. Для левой схемы: $C_1 = 0,0144$ мкФ, $C_2 = 0,00242$ мкФ, $C_3 = 0,0222$ мкФ, $L_2 = 0,02$ Гн, $L_4 = 0,0166$ Гн. Для правой схемы: $L_1 = 0,0144$ Гн, $L_2 = 0,00242$ Гн, $L_3 = 0,0222$ Гн, $C_2 = 0,02$ мкФ, $C_4 = 0,0166$ мкФ. В использованных здесь таблицах приведены нормированные частоты полюсов ослабления. Зная их, можно по формуле $\hat{\omega}_{0i} = \hat{\omega}_s / \hat{\omega}_{\infty i}$ найти частоты, на которых ослабление обращается в нуль. Эти сведения полезны при построении графиков ослабления и при настройке фильтров. В данном примере $\omega_{\infty 2} = 2,286$, а частота нуля $\omega_{02} = 0,92$. На рис. 18.4 показан примерный график ослабления полученного фильтра.

18.11. 1. Требования к фильтру удовлетворяют геометрической симметрии, а именно, $f_0 = \sqrt{f_{-1}f_1} = \sqrt{f_{-2}f_2} = \sqrt{2}$ кГц. По формулам (17.14) находим граничные частоты ПП и ПЗ ФНЧ-прототипа

$$f_0 = f_1 - f_{-1} = 1 \text{ кГц}, f_k = f_2 - f_{-2} = 1,5 \text{ кГц}.$$

2. По найденным граничным частотам f_0 и f_k , а также заданным Δa и a_0 рассчитываем ФНЧ. Получается ФНЧ пятого порядка со схемой рис. 18.2, г и нормированными параметрами элементов:

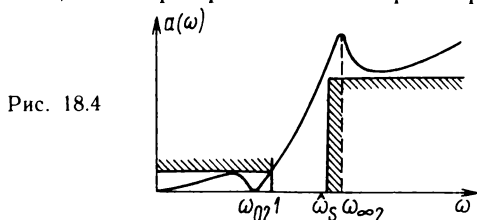


Рис. 18.4

$\hat{L}_1=1,178$, $\hat{L}_2=0,1553$, $\hat{L}_3=1,758$, $\hat{L}_4=0,4451$, $\hat{L}_5=0,9619$, $\hat{C}_2=$
 $=1,195$, $\hat{C}_4=0,9333$. Выпишем из таблицы остальные параметры
 ФНЧ: $\hat{\omega}_s=1,494$, $\hat{\omega}_{\infty 2}=2,321$, $\hat{\omega}_{\infty 4}=1,551$. Зная нормированные
 частоты полюсов, найдем нормированные частоты нулей: $\hat{\omega}_{02}=$
 $=0,6437$, $\hat{\omega}_{04}=0,9632$. По формулам $L_i=\hat{L}_i R_n / \omega_1$, $C_i=\hat{C}_i / R_n \omega_1$
 находим ненормированные элементы ФНЧ (индуктивности в мил-
 лигенри (мГн), емкости в нанофарадах (нФ)): $L_1=187,5$; $L_2=24,7$;
 $L_3=279,8$; $L_4=70,84$; $L_5=153,1$; $C_2=190,2$; $C_4=148,5$. Находим
 также ненормированные частоты нулей и полюсов ослабления:
 $f_{\infty 2}=2,321$ кГц, $f_{\infty 4}=1,551$ кГц, $f_{02}=644$ Гц, $f_{04}=963$ Гц.

3. Переходим к схеме ПФ. Для этого каждую индуктивность
 L_i ФНЧ заменяем последовательным соединением этой же индук-
 тивности L_i и емкости C'_i , значение которой выбирается из условия
 резонанса между ними на частоте f_0 . Каждая емкость C_i ФНЧ
 заменяется параллельным контуром, состоящим из этой же емкости
 и индуктивности L'_i , обеспечивающей резонанс на частоте f_0 , т. е.

$$C'_i = 1/4\pi^2 f_0^2 L_i, L_i = 1/4\pi^2 f_0^2 C_i. \quad (18.8)$$

Выполнив вычисления, по (18.8) найдем, что последовательно с
 индуктивностями L_1, \dots, L_5 включаются соответственно емкости, нФ:
 $C'_1=67,55$; $C'_2=512,4$; $C'_3=45,27$; $C'_4=178,8$; $C'_5=82,73$. Парал-
 лельно с емкостями C_2 и C_4 включаются соответственно индук-
 тивности, мГн: $L'_2=65,59$; $L'_4=85,26$.

Каждой частоте ФНЧ-прототипа f_n соответствует две частоты
 ПФ f_{-n} и f_n . Связь между частотами ФНЧ и ПФ выражается
 формулой

$$f_{-n, n} = \sqrt{(0,5f_n)^2 + f_0^2} \mp 0,5f_n. \quad (18.9)$$

Рассчитанные по (18.9) характерные частоты ПФ имеют следующие
 значения в килогерцах (кГц):

$f_{\infty -2}=0,669$, $f_{\infty 2}=3$; $f_{\infty -4}=0,837$; $f_{\infty 4}=2,39$; $f_{0-2}=1,128$; $f_{02}=$
 $=1,772$; $f_{0-4}=1,012$; $f_{04}=1,975$. Схема ПФ изображена на
 рис. 18.5, а, а график ослабления на рис. 18.5, б.

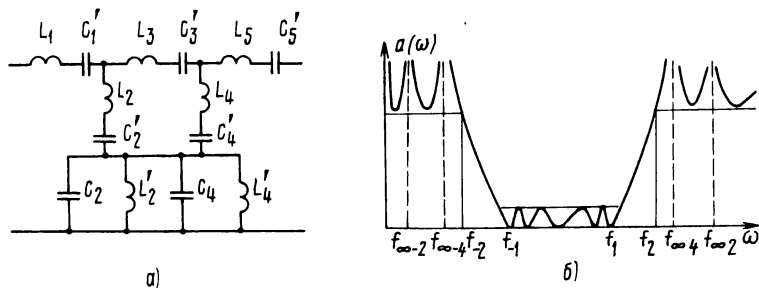


Рис. 18.5

Рис. 18.6

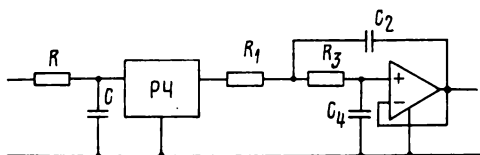
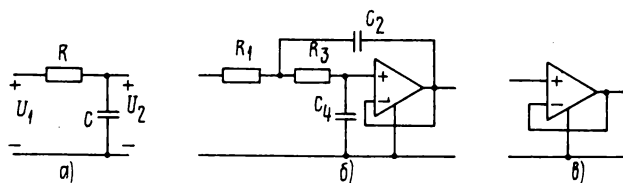


Рис. 18.7

18.16. Заданную передаточную функцию представим в виде произведения двух функций:

$$H(\hat{p}) = H_1(\hat{p})H_2(\hat{p}) = \frac{1}{\hat{p} + 1} \frac{1}{\hat{p}^2 + \hat{p} + 1}. \quad (18.10)$$

Первый из сомножителей можно реализовать пассивной RC -цепью (рис. 18.6, а). Для этой цепи отношение

$$U_2/U_1 = (\hat{R}\hat{C})^{-1}/(\hat{p} + (\hat{R}\hat{C})^{-1}). \quad (18.11)$$

Из сравнения (18.10) и (18.11) имеем $(\hat{R}\hat{C})^{-1} = 1$. Положив $\hat{R} = 1$, найдем $\hat{C} = 1$.

Второй сомножитель $H_2(\hat{p})$ реализуется ARC -звеном. В Приложении 4 даны наиболее употребительные схемы ARC -фильтров. По величине реализуемой добротности полюса передаточной функции звенья разделены на три категории: низкодобротные $Q_n \leq 2$, среднедобротные $2 < Q_n \leq 20$ и высокодобротные $Q_n > 20$.

Полиномиальная функция ФНЧ второго порядка представлена в виде $H(\hat{p}) = \kappa \hat{\omega}_n^2 / [\hat{p}^2 + (\hat{\omega}_n/Q_n)\hat{p} + \hat{\omega}_n^2]$. Из сравнения со вторым сомножителем (18.10) имеем $\omega_n = 1$, $Q_n = 1$ и $\kappa = 1$. Для реализации выбираем звено, приведенное в первой строке табл. П4.1, у которого

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega}_n^2 &= 1/\hat{R}_1\hat{R}_3\hat{C}_2\hat{C}_4, \\ Q_n &= \sqrt{\hat{R}_3\hat{C}_2/\hat{R}_1\hat{C}_4} / (1 + R_3/R_1). \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

При $\kappa = 1$, $R_{12} = \infty$ и, как следствие, в схеме звена должно отсутствовать R_{12} , а $R_1 = R_{11}$.

Зная ω_n и Q_n , из уравнений (18.12) необходимо найти параметры четырех элементов. Поскольку число неизвестных больше числа уравнений, система имеет бесчисленное множество решений. Задав двумя параметрами (например, C_2 и C_4), находим остав-

шиеся два — R_1 и R_3 . Формулы для расчета R_1 и R_2 следуют из уравнений (18.12) и имеют вид¹

$$\hat{R}_1 = 1/\hat{\omega}_n \sqrt{s \hat{C}_2 \hat{C}_4}, \quad \hat{R}_3 = s R_1, \quad (18.13)$$

где

$$s = \left(\frac{\hat{C}_2}{2Q_n^2 \hat{C}_4} - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{\hat{C}_2}{2Q_n^2 \hat{C}_4} - 1 \right)^2 - 1}. \quad (18.14)$$

Решение считается приемлемым, если R_1 и R_2 получаются вещественными и положительными. Важно, что приемлемое решение получается не всегда, т. е. существуют такие значения $\hat{C}_2 > 0$ и $\hat{C}_4 > 0$, при которых R_1 и R_2 будут или комплексными, или мнимыми. Из (18.13) и (18.14) видно, что коэффициент s , а значит, R_1 и R_3 будут вещественными и положительными тогда, когда выполняется условие $\hat{C}_2/2Q_n^2 \hat{C}_4 \geq 2$. Положим, $\hat{C}_2 = 4$, $\hat{C}_4 = 1$; при этом $s = 1$, $\hat{R}_1 = \hat{R}_3 = 0,5$.

Таким образом, реализован каждый из сомножителей заданной операторной функции (18.10) звеньями рис. 18.6, а, б. Эти звенья включаются через развязывающий четырехполюсник (РЧ) (рис. 18.7). Каким требованиям должен удовлетворять РЧ? Прежде всего он не должен изменять режима работы звеньев. Так, первое звено (рис. 18.6, а) рассчитывалось в предположении режима холостого хода на его выходе. Поэтому $Z_{вх}$ РЧ должно быть возможно большим. Выходное же сопротивление РЧ должно быть возможно малым, так как второе звено было рассчитано для режима заданного входного напряжения. Напряжение на выходе первого звена должно равняться напряжению на входе второго звена. Сформулированным условиям удовлетворяет ИНУН с $\kappa = 1$ (повторитель напряжения). Он приближенно реализуется на основе одного ОУ (рис. 18.6, в).

Последним этапом синтеза АРС-фильтра является денормирование элементов. *Особенностью денормирования является независимость сопротивления нормирования для каждого звена.* Например, пусть граничная частота ПП фильтра $\omega_0 = 10^6 \text{ с}^{-1}$ и удобно при реализации иметь емкость первого звена $C = 1000 \text{ пФ}$. Тогда из соотношения $C = \hat{C}/R_0 \omega_1$ находим сопротивление нормирования $R_0 = \hat{C}/C \omega_1 = 1/10^{-9} \cdot 10^6 = 1000$. Так как $\hat{R} = 1$, то $R = 1000 \text{ Ом}$. Денормируем элементы второго звена. Положим $C_2 = 1000 \text{ пФ}$. Емкость C_4 должна быть в 4 раза меньше, чем C_2 , т. е. $C_4 = 250 \text{ пФ}$. Находим сопротивление нормирования $R_0 = \hat{C}_2/C_2 \omega_1 = 4/10^{-9} \times 10^6 = 4 \text{ кОм}$, тогда $R_1 = R_2 = 2 \text{ кОм}$.

¹ Методика расчета заимствована из книги Мошиц Г., Хорн П. Проектирование активных фильтров: Пер. с англ./Под ред. И. Н. Теплюка.— Москва: Мир, 1984.— 320 с. Методика обеспечивает минимизацию коэффициента усиления ОУ при заданном диапазоне частот.

19. ФАЗОВРАЩАТЕЛИ, ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ И КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

19.1. ФАЗОВРАЩАТЕЛИ И ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Определение фазовращателя; операторная и комплексная передаточные функции фазовращателя.
2. Назначение фазовращателя.
3. Площадь, ограниченная функцией группового времени прохождения и полуосью абсцисс $\omega > 0$.
4. Фазовая характеристика $b(\omega)$ и групповое время прохождения $t_r(\omega)$ фазовых звеньев первого и второго порядков.
5. Мостовые LC-схемы фазовых звеньев.
6. Перекрытие T-схемы фазовых звеньев.
7. Примеры фазовых ARC-звеньев.
8. Линии задержки.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

19.1. Полиномы знаменателей операторных передаточных функций фазовращателей имеют вид: а) $p^2 + p + 1$; б) $p^3 + 6p^2 + 15p + 15$; в) $p^4 + 10p^3 + 45p^2 + 105p + 105$. Записать их операторные передаточные функции. Для случая а) показать расположение нулей и полюсов на комплексной плоскости.

19.2. Показать, что частотные зависимости $b(\omega)$ и $t_r(\omega)$ фазового звена второго порядка выражаются формулами:

$$b(\omega) = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega^2 - \beta}{\alpha\omega}, \quad t_r(\omega) = \frac{2\alpha(\beta + \omega^2)}{(\omega^2 - \beta^2) + \alpha^2\omega^2}$$

(см. формулы 21.9 а и 21.9 б учебника).

19.3.* Исследовать частотные зависимости $b(\omega)$ и $t_r(\omega)$ фазового звена второго порядка, если полином числителя операторной функции равен $p^2 - \alpha p + 1$ и α принимает значения $\alpha = 4$; $\sqrt{3}$; 1; 0,5. Построить примерные графики данных зависимостей.

19.4. Показать, что частотные зависимости $b(\omega)$ и $t_r(\omega)$ фазового звена второго порядка через координаты полюсов — σ_k и ω_k его передаточной функции выражаются формулами:

$$b(\omega) = 2\left(\operatorname{arctg} \frac{\omega + \omega_k}{\sigma_k} + \operatorname{arctg} \frac{\omega - \omega_k}{\sigma_k}\right), \quad t_r = \\ = \frac{2}{\sigma_k} \left\{ \left[1 + \frac{(\omega + \omega_k)^2}{\sigma_k^2} \right]^{-1} + \left[1 + \frac{(\omega - \omega_k)^2}{\sigma_k^2} \right]^{-1} \right\}.$$

19.5. Пусть операторная передаточная функция фазового звена второго порядка представлена в виде:

$$H(p) = [p^2 - (\omega_n/Q_n)p + \omega_n^2] / [p^2 + (\omega_n/Q_n)p + \omega_n^2].$$

Показать, что частотные зависимости $b(\omega)$ и $t_r(\omega)$ выражаются формулами:

$$b(\omega) = \pi + 2 \operatorname{arctg} Q_n \frac{\hat{\omega}^2 - 1}{\hat{\omega}}, \quad t_r = \frac{1}{\omega_n} \frac{2Q_n(1 + \hat{\omega}_n^2)}{\hat{\omega}^2 + Q_n^2(1 - \hat{\omega}^2)^2}, \quad (19.1)$$

где $\hat{\omega} = \omega/\omega_n$.

19.6. Считая, что фазовая характеристика и групповое время прохождения выражаются формулами (19.1), показать справедливость следующих равенств:

$$\omega_{max} = \omega_n \sqrt{\sqrt{4 - Q_n^{-2}} - 1}, \quad t_{r \max} = \frac{1}{\omega_n} \frac{2Q_n}{\sqrt{4Q_n^2 - 1}(2Q_n - \sqrt{4Q_n^2 - 1})} \quad (19.2)$$

где ω_{max} — частота максимума группового времени; $t_{r \max}$ — значение максимума группового времени.

19.7.* Используя формулы (19.2), показать, что при условии $Q_n \gg 1$ справедливы приближенные формулы:

$$\omega_{max} = \omega_n, \quad t_{r \max} = 4Q_n/\omega_n. \quad (19.3)$$

19.8. Рассчитать параметры элементов фазового мостового звена второго порядка (рис. 19.1), если его передаточная функция имеет вид: $H(\hat{p}) = (\hat{p}^2 - 0,2\hat{p} + 2)/(\hat{p}^2 + 0,2\hat{p} + 2)$, а частота нормирования $\omega_1 = 10^6 \text{ с}^{-1}$ и $R_0 = 100 \text{ Ом}$. Построить примерные графики частотных зависимостей $b(\omega)$ и $t_r(\omega)$.

19.9. Используя приближенные формулы (19.3), рассчитать параметры элементов фазового мостового звена второго порядка (рис. 19.1), если $\omega_{max} = 10^6 \text{ с}^{-1}$, $t_{r \max} = 100 \text{ мкс}$ и $R_0 = 75 \text{ Ом}$.

19.10р. Реализовать операторную передаточную функцию $H(\hat{p}) = (\hat{p}^2 - 0,5\hat{p} + 1)/(\hat{p}^2 + 0,5\hat{p} + 1)$ — фазовым звеном, если частота нормирования $\omega_1 = 10^6 \text{ с}^{-1}$ и $R_0 = 1000 \text{ Ом}$. Построить примерные графики АЧХ, $b(\omega)$ и $t_r(\omega)$.

19.11. Решить задачу 19.10 для следующих исходных данных:

- а) $\omega_n = 2$; $Q_n = 4$; $\omega_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$; $R_0 = 2000 \text{ Ом}$;
- б) $\omega_n = 1$; $Q_n = 5$; $\omega_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$; $R_0 = 4000 \text{ Ом}$;
- в) $\omega_n = 0,5$; $Q_n = 2$; $\omega_1 = 10^6 \text{ с}^{-1}$; $R_0 = 1000 \text{ Ом}$.

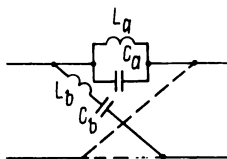


Рис. 19.1

19.12р. Рассчитать передаточную функцию линии задержки с максимально плоской характеристикой группового времени прохождения при условии, что задержка сигнала в диапазоне частот от $f=0$ до $f_1=100$ кГц составляет $t_r=18$ мкс, а погрешность аппроксимации $\Delta t/t_r$ не превышает 1%.

19.13. Реализовать ARC-цепью передаточную функцию задачи 19.8 линии задержки, полученную в предыдущей задаче.

Примечание. Напоминаем, что частота нормирования равна $\omega_0=0,1111 \cdot 10^6$ с⁻¹, а сопротивление нормирования выбирается самостоятельно. Реализацию рекомендуется выполнять в виде каскадного соединения звена первого порядка и четырех звеньев второго порядка, например схемы рис. 21.5 учебника.

19.14. Реализовать в виде ARC-схем набор линий задержки с максимально плоскими характеристиками группового времени со следующими параметрами: а) $t_r=0,2$ мс, $f_1=10^4$ Гц, $\delta=20\%$; б) $t_r=100$ мкс, $f_1=10^4$ Гц, $\delta=20\%$; в) $t_r=10$ мкс, $f_1=2,5 \cdot 10^4$ Гц, $\delta=1\%$.

19.15р. Рассчитать передаточную функцию линии задержки с равноволновой характеристикой группового времени прохождения при условии, что задержка сигнала в диапазоне частот от $f=0$ до $f_1=100$ кГц составляет $t_r=18$ мкс, а погрешность аппроксимации не превышает 1%.

19.16. Реализовать в виде ARC-схем набор линий задержки с равноволновыми характеристиками группового времени со следующими параметрами: а) $t_r=0,1$ мс; б) $t_r=0,05$ мс; в) $t_r=0,01$ мс, если во всех случаях $f_0=10$ кГц, $\delta=1\%$.

19.2. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Условия безыскаженной передачи.
2. Фазовые искажения.
3. Принцип корректирования фазовых искажений.
4. Исходные данные, необходимые для расчета фазового корректора.
5. Амплитудно-частотные искажения и принцип их корректирования.
6. Свойства перекрытых Т-образных амплитудных корректоров.
7. Косинусные корректоры, их назначение, функциональная схема и принцип работы.
8. Гармонические корректоры, их назначение, функциональная схема и принцип работы.

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ.

19.17. В табл. 19.1 показаны частотные зависимости фазовой характеристики $b_n(\omega)$, группового времени прохождения $t_r(\omega)$

Таблица 19.1

f , кГц	10	12	14	16	18	20	22
b_1 , рад	1,0	2,8	4,3	5,0	6,5	7,4	8,0
b_2 , рад	0,1	0,6	3,5	6,5	7,2	7,4	7,6
b_3 , рад	2,8	4,6	5,3	5,5	5,8	6,7	8,0
$t_{г.в}$, мкс	73	47	24	20	20	32	53
$t_{г.в}$, мкс	10	12	18	27	35	45	54
$t_{г.с}$, мкс	60	50	44	37	31	25	19
a_1 , дБ	5	16	24	30	35	38	41
a_{11} , дБ	20	16	12	10	12	17	25
a_{111} , дБ	5	6	7	10	16	30	45

Таблица 19.2

f , кГц	1	2,5	4	5	6	7	9	12,5	15
b_n , рад	0,8	1,99	2,8	1,3	0,2	0,6	2,2	5,2	7,4

и АЧХ некоторых четырехполосников. Найти фазовые характеристики, групповое время прохождения и АЧХ корректирующих четырехполосников.

19.18р. Некоторый четырехполосник (назовем его искажающим) имеет фазовую характеристику $b_n(f)$, заданную табл. 19.2. Рассчитать фазовый корректор с погрешностью корректирования не более $\pm 0,1$ рад.

19.19. В табл. 19.3 приведены фазовые характеристики трех искажающих четырехполосников. Рассчитать параметры фазовых корректоров и записать их операторные передаточные функции. Выполнить реализацию каждой функции мостовыми четырехполосниками, неуравновешенными четырехполосниками и АРС-цепями. Погрешность аппроксимации не должна превышать $\Delta b = \pm 0,1$ рад.

Указание. Рекомендуется в качестве суммарной фазовой характеристики (искажающий четырехполосник + фазовый корректор) выбирать следующие зависимости: $b(f) = 2,25 \cdot 10^{-3}f$ — для первого четырехполосника; $b(f) = 1,25 \cdot 10^{-3}f$ — для второго и $b(f) = 0,5 \cdot 10^{-3}f$ — для третьего.

19.20. На рис. 19.2, а...и даны двухполосники, Z_1 , входящие в схемы перекрытого Т-образного амплитудного корректора постоянного характеристического сопротивления (рис. 19.3). Найти схемы двухполосника Z_2 и построить примерные графики частотной зависимости ослабления корректоров¹.

¹ Напомним, что двухполосники Z_1 и Z_2 являются обратными (см. зад. 15.24 ... 15.27)

Таблица 19.3

f , кГц b_n , рад	0,2 0,4	1,0 2,0	1,6 2,6	2 1,4	2,4 0,3	2,8 0,7	3,6 2,2	5 5,2
f , кГц b_n , рад	0,8 0,9	1,6 1,9	3,2 3,5	4,8 0,4	6,0 1,5	8,0 3,9	10,0 6,4	12 8,8
f , кГц b_n , рад	1,6 0,6	3,2 1,1	6,4 1,5	9,6 0,4	12 0,8	16 2,4	20 4,2	24 6,1

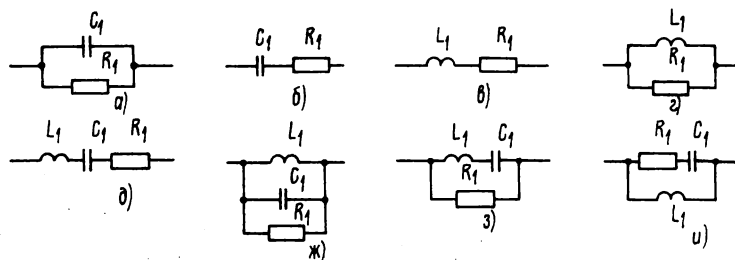
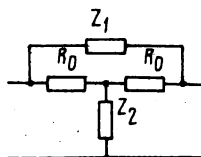


Рис. 19.2

Рис. 19.3



19.21р. Частотная зависимость ослабления некоторой линии, нагруженной на сопротивление $R=120$ Ом, задана табл. 19.4. Необходимо откорректировать амплитудно-частотные искажения, вносимые линией с точностью $\pm 0,5$ дБ, используя для коррекции перекрытые Т-образные четырехполюсники постоянного характеристического сопротивления.

19.22. По заданному в табл. 19.5 ослаблению трех искажающих четырехполюсников рассчитать три схемы перекрытых Т-образных корректоров, выполняющих корректирование с точностью $\pm 0,5$ дБ. Сопротивление нагрузки во всех случаях принять равным 1000 Ом.

Таблица 19.4

f , кГц	2	4	6	8	10	12	14	16
a_n , дБ	1,2	2,88	4,0	5,5	6,53	7,0	8,0	8,5

Таблица 19.5

f , кГц a_n , дБ	4 1,0	8 4	12 6,2	16 7,4	20 8,8	24 9,5	28 10	32 10,4
f , кГц a_n , дБ	10 0,3	15 2,1	20 3,6	25 4,8	30 5,7	35 6,5	40 7,0	45 7,5
f , кГц a_n , дБ	1 1	2 4,8	3 7,6	4 9,7	5 11,1	6 12,3	7 13,3	8 14

Указание. Рекомендуются в качестве $a_0 = a_n + a_k$ задаться 12 дБ для первого корректора, 10 дБ — для второго и 18 дБ — для третьего.

19.23.* Изобразить схему косинусного корректора, если его АЧХ выражается формулой: $|H(j\omega)| = |a_0 + 2 \sum_{k=1}^5 a_k \cos k\omega\tau|$.

При изображении схемы учесть, что сумматоры и умножители реализованы с помощью операционных усилителей и резисторов.

19.24.* Изобразить схему гармонического корректора, если он содержит восемь отводов. Умножители и сумматоры реализовать с помощью операционных усилителей.

19.25.* Пусть на интервале $-\omega_0 \dots \omega_0$ задана четная функция $\xi(\omega)$. Найти формулы для расчета коэффициентов a_k косинусного корректора.

19.26.* Почему требуется, чтобы фазовая характеристика $\omega\tau$ линий задержки, входящих в косинусный корректор, на границах диапазона корректирования равнялась бы π . Что будет, если $\omega_0\tau$ будет больше π ; меньше π ?

19.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ УИРС. ИССЛЕДОВАНИЕ КОСИНУСНОГО КОРРЕКТОРА

19.27. Найти формулы для расчета коэффициентов a_k косинусного корректора, предназначенного для корректирования в диапазоне частот $-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$ тракта передачи, АЧХ которого аппроксимируется выражением:

$$|H(j\omega)|_н = 1 / (1 + \sum_{i=1}^m c_i \omega^{2i}).$$

Считая, что погрешность корректирования оценивается чебышевским критерием, выполнить исследования:

1) зависимости точности корректирования Δ от числа отводов корректора $n+1$ при фиксированных значениях ω_0 , m и c_i ; 2) зави-

симости точности корректирования от диапазона корректирования при фиксированных значениях m , n и c_l .

19.28. Разработать принципиальную схему косинусного корректора, содержащего 11 регулируемых отводов ($n=10$) и предназначенного для корректирования канала с передаточной функцией $1/[1 + (\omega/\omega_0)^4]$, $\omega_0=10^5 \text{ с}^{-1}$ (погрешность реализации группового времени линии задержки выбрать самостоятельно). Рассмотреть возможность реализации линий задержки фазовращателя второго порядка.

19.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 19.1. Расчет линий задержки.

Рассчитать два варианта линий задержки с максимально плоской и равноволновой характеристиками группового времени. Исходные данные для расчета: $t_r=n$ мс, диапазон частот $0 \dots f_1=10/(m+n)$ кГц, погрешность аппроксимации 1%. Реализацию линий задержки выполнить в виде мостовых LC-четырёхполюсников, неуравновешенных LC-четырёхполюсников и ARC-цепей.

Задание 19.2. Корректирование линейных искажений.

Основное задание. Заданы логарифмическая АЧХ, фазовая характеристика и групповое время некоторого четырёхполюсника:

$$a(f) = \sqrt[3]{(m+n)} + 0,05 \sqrt[4]{m+n} \sqrt{f}, \quad b(f) = 3,5 \sqrt{m+n} \cdot 10^{-2} \sqrt{f} + \sqrt[3]{m+n} \cdot 10^{-5} f, \quad t_r(\omega) = db/d\omega \text{ (а(ф), дБ; b(ф), рад; f, Гц)}.$$

Найти требуемые характеристики амплитудного и фазового корректоров. Оценить сложность фазового корректора.

Дополнительное задание. По данным основного задания рассчитать амплитудный корректор.

Решения.

19.10. Для реализации применим звено, схема которого приведена в учебнике на рис. 21.5. В Приложении 4 дана эта же схема и формулы, связывающие элементы звена и коэффициенты передаточной функции $H(\hat{p}) = [\hat{p}^2 - (\hat{\omega}_n/Q_n)\hat{p} + \hat{\omega}_n^2]/[\hat{p}^2 + (\hat{\omega}_n/Q_n)\hat{p} + \hat{\omega}_n^2]$. Сравнив данное выражение с передаточной функцией, приведенной в условиях задачи, получим, что $\hat{\omega}_n^2=1$, $Q_n=2$. Из указанного приложения перепишем расчетные формулы: $\kappa = \hat{R}_6/(\hat{R}_5 + \hat{R}_6)$;

$$\hat{\omega}_n^2 = \frac{1}{\hat{C}_2 \hat{C}_3 \hat{R}_1 \hat{R}_4}; \quad Q_n \sqrt{\frac{\hat{R}_4}{\hat{R}_1}} \sqrt{\frac{\hat{C}_2 \hat{C}_3}{\hat{C}_2 + \hat{C}_3}}; \quad \frac{\hat{R}_5}{\hat{R}_6} = \frac{2 \hat{R}_1 (\hat{C}_2 + \hat{C}_3)}{\hat{R}_4 \hat{C}_3}.$$

Число уравнений меньше числа неизвестных, поэтому зададимся, например, \hat{C}_2 , \hat{C}_3 и \hat{R}_6 и найдем формулы для расчета остальных элементов:

$$\left. \begin{aligned} \hat{R}_1 &= 1/[Q_n \hat{\omega}_n (\hat{C}_2 + \hat{C}_3)], \quad \hat{R}_4 = Q_n (\hat{C}_2 + \hat{C}_3) / \hat{C}_2 \hat{C}_3 \hat{\omega}_n, \\ \hat{R}_5 &= 2\hat{R}_6 \hat{C}_2 / Q_n^2 (\hat{C}_2 + \hat{C}_3), \quad \kappa = Q_n^2 (\hat{C}_2 + \hat{C}_3) / [2\hat{C}_2 + \\ &+ Q_n^2 (\hat{C}_2 + \hat{C}_3)] \end{aligned} \right\}. \quad (19.4)$$

Пусть $\hat{C}_2 = \hat{C}_3 = 1$; $\hat{R}_6 = 1$, тогда согласно (19.4) $\hat{R}_1 = 0,25$; $\hat{R}_4 = 4,0$; $\hat{R}_5 = 0,25$; $\kappa = 0,8$. Денормируем элементы и получаем $R_1 = 250$ Ом; $R_4 = 4,0$ кОм; $R_5 = 250$ Ом; $R_6 = 1$ кОм; $C_2 = C_3 = 1$ нФ. График АЧХ представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс $|H(j\omega)| = \kappa = 0,8$. Для построения остальных графиков найдем по (19.1) $t_r(0)$, а по (19.2) ω_{max} — частоту максимума t_r , т. е. точку перегиба $b(\omega)$; $t_r(0) = 1$ мкс; $\omega_{max} = 0,9677 \cdot 10^6$ с $^{-1}$; $t_{rmax} = 8,13$ мкс. На рис. 19.4 показаны необходимые графики.

19.12. Данная задача решается с использованием полиномов Бесселя $v_B(p)$. Операторная передаточная функция линии задержки, сконструированная на основе полиномов Бесселя, имеет вид:

$$H(\hat{p}) = v_B(-\hat{p}) / v_B(\hat{p}). \quad (19.5)$$

При $p = j\hat{\omega}$ получим комплексную передаточную функцию $H(j\hat{\omega}) = v_B(-j\hat{\omega}) / v_B(j\hat{\omega})$. Из последнего выражения следует, что фазовая характеристика равна удвоенному аргументу полинома знаменателя. Полиномы Бесселя приведены в учебнике на стр. 517, а их нули в табл. ПЗ.5. Коэффициенты при старших членах полиномов приняты равными единице, а частота нормируется так, чтобы

$$\left. \frac{d}{d\hat{\omega}} \arg v_B(j\hat{\omega}) \right|_{\hat{\omega}=0} = \left. \frac{d\varphi_r(\hat{\omega})}{d\hat{\omega}} \right|_{\hat{\omega}=0} = 1. \quad (19.6)$$

Поэтому у линии задержки с операторной передаточной функцией (19.5) групповое время прохождения

$$t_r(\omega) = \frac{d}{d\omega} \arg \frac{v_B(-j\hat{\omega})}{v_B(j\hat{\omega})} = 2 \frac{d}{d\omega} \varphi_r(\hat{\omega}) = 2 \frac{d}{d\omega} \varphi_r(\hat{\omega}) \frac{d\hat{\omega}}{d\omega} = 2\varphi_r'(\hat{\omega}) / \omega_0$$

и согласно (19.6)

$$t_r(0) = 2 / \omega_0. \quad (19.7)$$

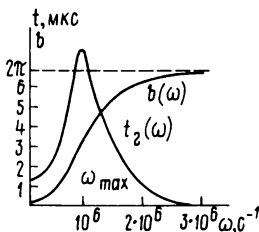


Рис. 19.4

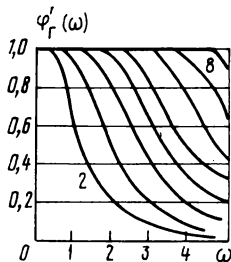


Рис. 19.5

Графики функций $\varphi_r'(\hat{\omega})$ полиномов Бесселя младших степеней показаны на рис. 19.5. Из данного рисунка следует, что при заданном порядке полинома n с ростом частоты отклонение группового времени прохождения от постоянной увеличивается, а с ростом степени n уменьшается.

По условиям задачи $t_r(0) = 18 \cdot 10^{-6}$ с. Поэтому согласно (19.7) $\omega_0 = 2/t_r(0) = 0,1111 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. Нормированная частота, при которой отклонение $t_r(\omega)$ от постоянной $t_r(0)$ не должна превышать 1%, равна $\hat{\omega}_1 = \omega_1/\omega_0 = 2\pi 10^5 / 0,1111 \cdot 10^6 = 5,65$. Из табл. ПЗ.4¹ следует, что при $\delta = 1\%$ частота $\hat{\omega}_1 = 5,65$ находится между граничными частотами линии задержки восьмого и девятого порядков. Выбираем больший порядок $n = 9$. Из табл. ПЗ.5 выписываем нормированные нули полинома Бесселя девятого порядка:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{1,2} &= -6,12937 \pm j 1,73785; \quad \hat{\omega}_{3,4} = -5,60442 \pm j 3,49816; \\ \hat{\omega}_{5,6} &= -4,63844 \pm j 5,31727; \quad \hat{\omega}_{7,8} = -2,97926 \pm j 7,29147; \\ \hat{\omega}_9 &= -6,29702,\end{aligned}$$

которые в соответствии с (19.6) являются полюсами операторной передаточной функции, а нули — зеркальным отражением полюсов на правую полуплоскость. Таким образом, нули операторной передаточной функции линии задержки, как и любых фазовращателей, отличаются от полюсов только знаком вещественной части. На основании сказанного запишем нормированную операторную передаточную функцию:

$$\begin{aligned}H(\hat{p}) &= \frac{(\hat{p} - 6,29702)(\hat{p}^2 - 12,2587\hat{p} + 40,5891)(\hat{p}^2 - 11,2088\hat{p} + 43,6466)}{(\hat{p} + 6,29702)(\hat{p}^2 + 12,2587\hat{p} + 40,5891)(\hat{p}^2 + 11,2088\hat{p} + 43,6466)} \times \\ &\times \frac{(\hat{p}^2 - 9,2769\hat{p} + 49,7885)(\hat{p}^2 - 5,9585\hat{p} + 62,0415)}{(\hat{p}^2 + 9,2769\hat{p} + 49,7885)(\hat{p}^2 + 5,9585\hat{p} + 62,0415)}.\end{aligned}\quad (19.8)$$

19.15. Методика расчета передаточных функций линий задержки с равноволновыми характеристиками группового времени совпадает с методикой, примененной при решении зад. 19.12, с той лишь разницей, что вместо полиномов Бесселя используются специальные полиномы, нули которых приведены в табл. ПЗ.7, а нормированные граничные частоты рабочей полосы, соответствующие различным значениям δ , — в табл. ПЗ.6.

Требования к линии задержки такие же, как и в зад. 19.12, при решении которой найдена нормированная частота $\hat{\omega} = 5,65$. Из табл. ПЗ.6 видно, что заданным требованиям ($\delta = 1\%$ и $\hat{\omega}_1 = 5,65$) удовлетворяет с некоторым запасом передаточная функция шестого порядка, что на три единицы меньше, чем при максимально плоской аппроксимации. Из табл. ПЗ.7 выписываем координаты полюсов $H(\hat{p})$:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{1,2} &= -1,62521 \pm j 6,05293; \quad \hat{\omega}_{3,4} = -2,07951 \pm j 3,75479; \\ \hat{\omega}_{5,6} &= 2,20167 \pm j 1,27041.\end{aligned}$$

¹ Таблицы ПЗ.4...ПЗ.7 заимствованы из [9].

Нормированная операторная передаточная функция записывается как и в зад. 19.12.

19.18. Зададимся требуемой фазовой характеристикой каскадного соединения искажающего четырехполюсника и корректора. Как известно, это должна быть линейная функция вида $b(f) = \tau f$ ($\tau = \text{const}$). Требуемая фазовая характеристика корректора рассчитывается по формуле

$$b_{\text{кт}}(f) = \tau f - b_{\text{н}}(f). \quad (19.9)$$

Как видим из (19.9), $b_{\text{кт}}(f)$ зависит от τ , значением которого необходимо задаться. Выбор τ является непростой задачей. С одной стороны, значение τ должно быть достаточно большим, чтобы $b_{\text{кт}}(f)$ являлась возрастающей функцией, а с другой — желательно выбирать значение τ возможно меньшим, так как от величины τ зависит число звеньев или, другими словами, порядок передаточной функции корректора. Выберем $\tau = 0,9 \cdot 10^{-3}$ с и по (19.9) рассчитаем требуемую характеристику корректора. Результаты расчета даны в табл. 19.6.

Как видим из этой таблицы, $b_{\text{кт}}(f_{\text{max}}) < 2\pi$, поэтому попытаемся решить задачу с помощью одного звена второго порядка. Воспользуемся следующей формулой:

$$b_{\kappa} = \pi + 2 \operatorname{arctg} Q_{\text{н}} \frac{\omega^2 - \omega_{\text{н}}^2}{\omega_{\text{н}} \omega} = \pi + 2 \operatorname{arctg} Q_{\text{н}} \frac{f^2 - f_{\text{н}}^2}{f_{\text{н}} f}. \quad (19.10)$$

Здесь неизвестными параметрами являются добротность $Q_{\text{н}}$ и частота $f_{\text{н}}$. Их можно найти методом интерполирования. Задавшись частотами f_1 и f_2 и зная $b_1 = b(f_1)$ и $b_2 = b(f_2)$, составим два уравнения:

$$b_1 = \pi + 2 \operatorname{arctg} Q_{\text{н}} \frac{f_1^2 - f_{\text{н}}^2}{f_{\text{н}} f_1}, \quad b_2 = \pi + 2 \operatorname{arctg} Q_{\text{н}} \frac{f_2^2 - f_{\text{н}}^2}{f_{\text{н}} f_2}.$$

Путем элементарных преобразований приходим к следующим уравнениям:

$$Q_{\text{н}} \frac{f_1^2 - f_{\text{н}}^2}{f_{\text{н}} f_1} = \operatorname{tg} \frac{b_1 - \pi}{2}, \quad Q_{\text{н}} \frac{f_2^2 - f_{\text{н}}^2}{f_{\text{н}} f_2} = \operatorname{tg} \frac{b_2 - \pi}{2},$$

решение которых не представляет труда:

$$f_{\text{н}}^2 = \frac{df_2^2 - f_1^2}{d - 1}, \quad Q_{\text{н}} = \frac{f_1 f_{\text{н}} \operatorname{tg} 0,5(b_1 - \pi)}{f_1^2 - f_{\text{н}}^2}, \quad d = \frac{f_1 \operatorname{tg} 0,5(b_1 - \pi)}{f_2 \operatorname{tg} 0,5(b_2 - \pi)}.$$

Зададимся узлами интерполирования $f_1 = 2,5$ кГц, $b(f_1) = b_1 = 0,26$ рад и $f_2 = 6$ кГц, $b(f_2) = b_2 = 5,28$ рад. В результате расчета получим: $f_{\text{н}} = 5$ кГц, $Q_{\text{н}} = 5$. Зная параметры фазового звена $f_{\text{н}}$ и $Q_{\text{н}}$, по (19.10) рассчитываем фазовую характеристику корректора $b_{\kappa}(f)$ и погрешность корректирования $\Delta b = b_{\text{кт}}(f) - b_{\kappa}(f)$. Результаты расчета сведены в табл. 19.6, а график $b_{\text{кт}}(f)$ показан на

Таблица 19.6

f , кГц	1	2,5	4	5	6	7	9	12,5	15
$b_{\text{кт}}$, рад	0,1	0,26	0,8	3,2	5,28	5,7	5,9	6,05	6,15
$b_{\text{к}}$, рад	0,083	0,26	0,84	3,14	5,28	5,72	5,96	6,09	6,13
Δb , рад	0,017	0	-0,04	0,06	0	-0,02	-0,04	-0,04	-0,02

Рис. 19.6

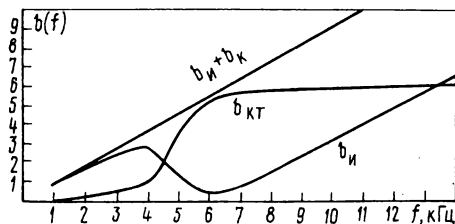


рис. 19.6. Как видим, погрешность не превышает заданной величины $\pm 0,1$ рад. На практике далеко не всегда можно так удачно, с первого раза, рассчитать фазовый корректор. Обычно приходится менять узлы интерполирования. По результатам расчета запишем операторную передаточную функцию:

$$H(p) = (p^2 - 2\pi 10^3 p + \pi^2 10^8) / (p^2 + 2\pi p + \pi^2 10^8).$$

19.21. 1. Задаемся требуемым ослаблением a_0 тракта передачи (линия + корректор). Обычно a_0 выбирают на 2...3 дБ большим, чем максимальное ослабление искажающего четырехполюсника. Пусть $a_0 = 11$ дБ.

2. Находим требуемое ослабление корректора по формуле $a_{\text{кт}} = a_0 - a_{\text{и}}$. Результаты расчета приведены в табл. 19.7.

3. Выбираем подходящую схему корректирующего звена. Прежде всего корректор выбирается по характеру его частотной зависимости ослабления. В данном случае требуется падающая характеристика ослабления. Таким характером ослабления обладают, например, цепи со схемой рис. 19.7, а или со схемой рис. 19.8, а в диапазоне частот $0 \dots \omega_0$. Частотные зависимости ослабления этих схем показаны на рис. 19.7, б и 19.8, б соответственно. Остановимся на первой из названных схем как более простой.

Таблица 19.7

f , кГц	2	4	6	8	10	12	14	16
$a_{\text{кт}}$, дБ	9,0	8,12	7,0	5,5	4,47	4,0	3,0	2,5
$a_{\text{к}}$, дБ	9,42	8,12	6,71	5,48	4,47	3,68	3,05	2,05
Δa , дБ	-0,42	0	0,29	0,02	0	0,32	-0,05	-0,45

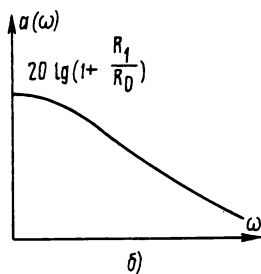
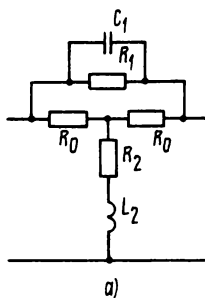
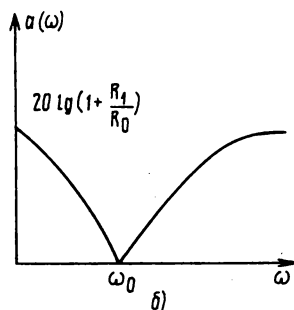
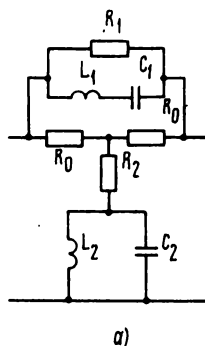


Рис. 19.7

Рис. 19.8



4. Рассчитываем элементы схемы методом интерполирования. Ослабление перекрытой Т-образной схемы выражается формулой

$$a(\omega) = 20 \lg \left| 1 + \frac{Z_1}{R_0} \right|, \quad (19.11)$$

где в данном случае $Z_1 = R_1 / (1 + j\omega R_1 C_1)$. После несложных преобразований формулу (19.11) можно представить в виде:

$$a(f) = 10 \lg [(x_1 + f^2 x_2) / (1 + f^2 x_2)], \quad (19.12)$$

где

$$x_1 = (1 + R_1/R_0)^2, \quad x_2 = 4\pi^2 C_1^2 R_1^2. \quad (19.13)$$

Задавшись частотами интерполирования f_1 , f_2 и ослаблением на этих частотах $a(f_1) = a_1$ и $a(f_2) = a_2$, составляем два уравнения с двумя неизвестными x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= 10 \lg [(x_1 + f_1^2 x_2) / (1 + f_1^2 x_2)], \\ a_2 &= 10 \lg [(x_1 + f_2^2 x_2) / (1 + f_2^2 x_2)]. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений дает искомые неизвестные

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{F_2 f_1^2 (F_1 - 1) - F_1 f_2^2 (F_2 - 1)}{f_1^2 (F_1 - 1) - f_2^2 (F_2 - 1)}, \\ x_2 &= \frac{F_2 - F_1}{f_1^2 (F_1 - 1) - f_2^2 (F_2 - 1)}, \end{aligned} \right\} \quad (19.14)$$

где $F_1 = 10^{0,1a_1}$, $F_2 = 10^{0,1a_2}$.

Пусть $f_1 = 4$ кГц, $f_2 = 10$ кГц, тогда $a_1 = 8,12$ дБ, $a_2 = 4,47$ дБ. Подставив эти значения в (19.14), получим $x_1 = 10$, $x_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ с². Путем расчета ослабления корректора a_k по (19.12) и определения погрешности $\Delta a = a_{кт} - a_k$ (см. табл. 19.7) делаем заключение о пригодности схемы с данными значениями элементов, т. е. найдена схема, обеспечивающая коррекцию АЧХ с точностью $|\Delta a| < < 0,5$ дБ. Если требования не выполнялись и частотная зависимость Δa не являлась бы равноволновой, то следует изменить узлы интерполирования и повторить расчет. Может случиться, что такой простой цепью не удастся достичь требуемой точности корректирования. Тогда применяют более сложную цепь, например рис. 19.8, a и (или) каскадное соединение цепей.

5. Зная x_1 и x_2 и положив $R_0 = R$, из (19.13) находим параметры элементов R_1 и C_1 :

$$R_1 = (\sqrt{x_1} - 1) R_0 = 259 \text{ Ом}, \quad C_1 = \sqrt{x_2} / 2\pi R_0 (\sqrt{x_1} - 1) = 0,123 \text{ мкФ}.$$

Параметры элементов двухполюсника Z_2 найдем по формулам

$$R_2 = R_0^2 / R_1 = 55,5 \text{ Ом}, \quad L_2 = R_0^2 C_1 = 1,77 \text{ мГн}.$$

В заключение отметим, что на x_1 и x_2 накладываются ограничения. Так, должны выполняться неравенства $x_1 > 1$ и $x_2 > 0$. В противном случае получатся нереализуемые элементы.

Приложение 1.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ¹

П 1.1. ПОДПРОГРАММА RKM

Эта подпрограмма предназначена для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dx} = 1, \\ \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_2, y_3, \dots, y_n), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т. е. } y_1 = x, f_1 = 1, \\ \text{где } i = \overline{2, n}, \end{array}$$

с начальными условиями $y_i(x_0) = y_{i0}$, $i = \overline{1, n}$ методом Рунге — Кутта четвертого порядка с модификацией Мерсона.

Обращение к подпрограмме осуществляется с помощью оператора

CALL RKM(N, Y1, H1, E, IER)

¹ Программное обеспечение разработано Л. И. Соколовым для кафедры высшей математики ОЭИС им. А. С. Попова.

Описание параметров:

- N — порядок системы, $1 < N < 21$;
 $Y1$ — входной и выходной вектор размерности N значений аргументов для вычисления правых частей, первый из которых является независимой переменной интегрирования; перед обращением к подпрограмме необходимо этому вектору присвоить начальные значения аргументов системы; этот вектор содержит результаты интегрирования на текущем шаге;
 $H1$ — шаг выдачи результатов интегрирования (не путать с шагом интегрирования!);
 E — абсолютная погрешность счета;
 IER — код ошибки: $IER = \emptyset$ — ошибок нет; $IER = 1$ — порядок системы недопустим; $IER = 2$ — шаг интегрирования меньше 10^{-10} .

Подпрограмма использует подпрограмму SP вычисления правых частей системы, обращение к которой имеет вид

$CALL SP(Y1, A1)$

Здесь $Y1$ — входной вектор размерности N , содержащий аргументы для вычисления правых частей системы;

$A1$ — выходной вектор размерности N результатов вычисления правых частей [$A(1) = 1$].

Пример. Пусть требуется решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = 1 \\ \frac{dx}{dz} = y \\ \frac{dz}{dx} = x + 2y + z \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $z(0) = -1$ на промежутке $[0; 1]$ с выдачей результатов интегрирования с шагом $h_1 = 0,05$.

Для контроля полученных результатов воспользуемся аналитическим решением системы: $y = e^x$, $z = 2xe^x - (x + 1)$.

Ниже приведена распечатка соответствующего задания с подпрограммой RKM .

```

REAL Y1(3)
DATA H1,E/0.05,1,E-5/
DATA Y1/0.,1.,-1./
N=3
GO TO 4
1  CALL RKM(N,Y1,H1,E,IER)
4  WRITE (1,2) (Y1(K),K=1,N)
2  FORMAT (5X,3F15.5)
   IF (ABS(Y1(1))-1.) 1,3,3
3  WRITE (1,6) IER
6  FORMAT (/5X,'IER =',I2//)
STOP
END
SUBROUTINE SP(Y1,A1)
DIMENSION Y1(1),A1(1)
A1(1)=1
A1(2)=Y1(2)
A1(3)=Y1(1)+2.*Y1(2)+Y1(3)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RKM(N,Y1,H1,E,IER)
DIMENSION Y1(20),Y2(20),A1(20),A2(20),A3(20),A4(20)
IER=0
IF (N.GT.1.OR.N.LE.20) GO TO 51
TYPE 50
50  FORMAT (' ПОРЯДОК СИСТЕМЫ НЕДОПУСТИМ')
IER=1
RETURN
51  H=H1/3.
E1=1.E-7
X=H1+Y1(1)
IF (H1) 14,1,14
1   H2=0.1E+11
2   DO 3 I=1,N
3   Y2(I)=Y1(I)
IF (ABS(H2).LT.ABS(H)) H=H2
CALL SP(Y1,A1)
DO 4 I=1,N
A2(I)=H*A1(I)
4   Y1(I)=Y2(I)+A2(I)
CALL SP(Y1,A1)
DO 5 I=1,N
5   Y1(I)=Y2(I)+0.5*(A2(I)+H*A1(I))
CALL SP(Y1,A1)
DO 6 I=1,N
A3(I)=H*A1(I)
6   Y1(I)=Y2(I)+0.375*(A2(I)+3.*A3(I))
CALL SP(Y1,A1)
DO 7 I=1,N
A4(I)=H*A1(I)
7   Y1(I)=Y2(I)+6.*(A4(I)+0.25*(A2(I)-3.*A3(I)))
CALL SP(Y1,A1)
D=0.0
DO 12 I=1,N
E2=ABS(A2(I)+4.*(A4(I)-0.125*(9.*A3(I)+H*A1(I))))
IF (E2.LT.E) GO TO 11
H=0.5*H
IF (ABS(H).LT.0.1-9) GO TO 9
DO 8 J=1,N
8   Y1(J)=Y2(J)
GO TO 2
9   TYPE 10
10  FORMAT ('1',10X,'ШАГ ИНТЕГРИРОВАНИЯ РАВЕН 0.1E-9')
IER=2
RETURN
11  IF (E2.GT.D) D=E2
12  CONTINUE
DO 13 I=1,N
13  Y1(I)=Y2(I)+(A1(I)*H+A4(I)*4.+A2(I))*0.5
IF (D.LT.E/32.) H=H*H
IF (H1.EQ.0.) RETURN
14  D=X-Y1(1)
ER=E1*ABS(X)
IF (ER.LE.0.1E-9) ER=0.1E-9
IF (ABS(D).GT.ER) GO TO 16
IF (ABS(HP).GT.ABS(H1/3.)) GO TO 15
H2=HP/3.
H=H2
RETURN
15  H2=H1/3.
H=H2
RETURN

```



```

NP=N
N2=D/3.
GO TO 2
END

```

П1.2. ПОДПРОГРАММА CSIMQ

Эта подпрограмма предназначена для решения системы линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами методом исключения неизвестных при помощи наибольшего ведущего делителя¹. Обращение к подпрограмме осуществляется с помощью оператора

```
CALL CSIMQ(N, KS)
```

Описание параметров:

N — порядок системы, $1 < N < 21$;

KS — код завершения: $KS = \emptyset$ — при нормальном решении; $KS = 1$ — для несовместных систем уравнений.

Комплексные коэффициенты матрицы A , расположенные по столбцам, и вектора B системы $AX = B$ необходимо передать через общую область оператором

```
COMMON A(4* $\emptyset$ ), B(2* $\emptyset$ ).
```

В конце вычислений вектор B содержит решение системы.

Пример. Решить систему уравнений, матрица A и вектор B которой соответственно равны:

$$A = \begin{pmatrix} 2+3j & 1-5j \\ -j & 1+j \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7+4j \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для контроля полученных результатов воспользуемся точным решением системы $x_1 = 1$, $x_2 = j$.

Ниже приведена распечатка соответствующего задания с подпрограммой CSIMQ.

```

COMPLEX A(4* $\emptyset$ ), B(2* $\emptyset$ )
COMMON A, B
N=2
DATA A/(2.,3.), (0.,-1.), (1.,-5.), (1.,1.),
* 396*(0.,0.)/
DATA B/(7.,4.), (-1.,0.), 16*(0.,0.)/
CALL CSIMQ(N, IER)
WRITE (1,2) IER, (B(K), K=1, N)
2 FORMAT (//4X, 'IER =', I2, 5X, 6F10, 5//)
STOP
END

```

¹ См. сборник научных программ на Фортране. Руководство для программиста. Выпуск 2. Матричная алгебра и линейная алгебра. — М.: Статистика, 1974.

```

SUBROUTINE CSIMQ(N,KS)
COMPLEX A,B,BIGA,SAVE
COMMON A(400),B(20)
TOL=1.E-30
KS=0
JJ=-N
DO 65 J=1,N
  JY=J+1
  JJ=JJ+N+1
  BIGA=0.
  IT=JJ-J
  DO 30 I=J,N
    IJ=IT+I
    AA=CABS(A(IJ))
    IF (CABS(BIGA)-AA) 20,30,30
20  BIGA=A(IJ)
    IMAX=I
30  CONTINUE
    IF (CABS(BIGA)-TOL) 35,35,40
35  KS=1
    RETURN
40  I1=J+N*(J-2)
    IT=IMAX-J
    DO 50 K=J,N
      I1=I1+N
      I2=I1+IT
      SAVE=A(I1)
      A(I1)=A(I2)
      A(I2)=SAVE
50  A(I1)=A(I1)/BIGA
      SAVE=B(IMAX)
      B(IMAX)=B(J)
      B(J)=SAVE/BIGA
      IF (J-N) 55,70,55
55  IQS=N*(J-1)
      DO 65 IX=JY,N
        IXJ=IQS+IX
        I1=J-IX
        DO 60 JX=JY,N
          IXJX=N*(JX-1)+IX
          JJX=IXJX+IT
60  A(IXJX)=A(IXJX)-A(IXJ)*A(JJX)
65  B(IX)=B(IX)-B(J)*A(IXJ)
70  NY=N-1
      IT=N*N
      DO 80 KY=1,NY
        IA=IT-KY
        IB=N-KY
        I0=N
        DO 80 K=1,KY
          B(IB)=B(IB)-A(IA)*B(I0)
          IA=IA-N
          I0=I0-1
80  RETURN
    END

```

П1.3. ПОДПРОГРАММА FORM

Эта подпрограмма предназначена для формирования системы линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, матрица **A** которой является матрицей узловых проводимостей, а ее свободные коэффициенты образуют вектор **B** узловых токов. Решив такую систему уравнений с помощью подпрограммы CSIMQ, получим вектор узловых напряжений.

Обращение к программе осуществляется с помощью оператора

CALL FORM(F)

Здесь *F* — частота, Гц. Передача других параметров осуществляется через общую область

COMMON A, B, NUE, PZIT, PNIT, NUH, GH,
* HE, TE, KU, KE, KZIT, KNIT.

Описание параметров:

- A* — выходной одномерный комплексный массив матрицы узловых проводимостей;
- B* — выходной комплексный вектор узловых токов;
- NUE* — комплексный вектор, содержащий номера узлов *RLC*-элементов цепи; между узлами допускается только параллельное соединение элементов;
- PZIT* — комплексный вектор, содержащий параметры зависимых источников тока, управляемых напряжением; каждый источник описывается тремя комплексными числами: первое — узлы включения, причем направление тока берется от вещественной к мнимой части комплексного числа; второе — узлы управляющего напряжения; третье — коэффициент усиления;
- PNIT* — комплексный вектор, содержащий параметры независимых источников тока, первый из которых является входным; каждый источник описывается двумя комплексными числами: первое — узлы включения, причем направление тока берется от мнимой к вещественной части комплексного числа (у зависимых источников наоборот); второе — параметры источника тока; элемент вектора *PNIT*(1) содержит номера узлов входа;
- NUH* — комплексное число, содержащее номера узлов нагрузки (выходные узлы);
- GH* — выходная комплексная величина, равная проводимости ветви нагрузки;
- HE* — вещественный вектор, содержащий номиналы *RLC*-элементов в международной системе единиц;
- TE* — целочисленный вектор, содержащий коды типов *RLC*-элементов: 1 — для *R*, 2 — для *C*, 3 — для *L*;
- KU* — число узлов электрической цепи, без учета базового (нулевого) узла; нумерация узлов выполняется от 1 без пропусков номеров; между узлами допускается только параллельное соединение любого числа *RLC*-элементов, зависимых и независимых источников тока; ограничение — $KU \leq 20$;
- KE* — число *RLC*-элементов; ограничение — $KE \leq 50$;
- KZIT* — число зависимых источников тока; ограничение $KZIT \leq 5$;
- KNIT* — число независимых источников тока; ограничение — $KNIT \leq 5$.

Ниже приведена распечатка подпрограммы FORM.

```

SUBROUTINE FORM(F)
INTEGER TE(50)
REAL HE(50)
COMPLEX A(400),B(20),NUE(50),PZIT(15),PNIT(10),
* NUH,Z,Z0,GH
COMMON A,B,NUE,PZIT,PNIT,NUH,GH,
* HE,TE,KU,KE,KZIT,KNIT
Z0=(0.,0.)
W=F*6.283186
KZIT3=3*KZIT
KNIT2=2*KNIT
GH=Z0
DO 1 I=1,KU
B(I)=Z0
DO 1 J=1,KU
1 A(I+(J-1)*KU)=Z0
DO 2 K=1,KE
IF (TE(K).EQ.1) Z=CMPLX(1./HE(K),0.)
IF (TE(K).EQ.2) Z=CMPLX(0.,W*HE(K))
IF (TE(K).EQ.3) Z=CMPLX(0.,-1./(W*HE(K)))
IF (NUE(K).EQ.NUH) GH=GH+Z
K1=REAL(NUE(K))
K2=AIMAG(NUE(K))
J1=K1+(K1-1)*KU
J2=K1+(K2-1)*KU
J3=K2+(K1-1)*KU
J4=K2+(K2-1)*KU
IF (K1.NE.0) A(J1)=A(J1)+Z
IF (K1.NE.0.AND.K2.NE.0) A(J2)=A(J2)-Z
IF (K1.NE.0.AND.K2.NE.0) A(J3)=A(J3)-Z
IF (K2.NE.0) A(J4)=A(J4)+Z
2 CONTINUE
IF (KZIT.LE.0) GO TO 4
DO 3 K=1,KZIT3,3
IF (PZIT(K).EQ.NUH) GH=GH+PZIT(K+2)
K1=REAL(PZIT(K))
K2=AIMAG(PZIT(K))
K3=REAL(PZIT(K+1))
K4=AIMAG(PZIT(K+1))
J1=K1+(K3-1)*KU
J2=K1+(K4-1)*KU
J3=K2+(K3-1)*KU
J4=K2+(K4-1)*KU
IF (K1.NE.0.AND.K3.NE.0) A(J1)=A(J1)+PZIT(K+2)
IF (K1.NE.0.AND.K4.NE.0) A(J2)=A(J2)-PZIT(K+2)
IF (K2.NE.0.AND.K3.NE.0) A(J3)=A(J3)-PZIT(K+2)
IF (K2.NE.0.AND.K4.NE.0) A(J4)=A(J4)+PZIT(K+2)
3 CONTINUE
4 IF (KNIT.LE.0) GO TO 6
DO 5 K=1,KNIT2,2
K1=REAL(PNIT(K))
K2=AIMAG(PNIT(K))
IF (K1.NE.0) B(K1)=B(K1)+PNIT(K+1)
IF (K2.NE.0) B(K2)=B(K2)-PNIT(K+1)
5 CONTINUE
6 RETURN
END

```

П1.4. ПОДПРОГРАММА AF4X

Эта подпрограмма предназначена для расчета передаточной функции и входного сопротивления линейной электрической цепи.

Обращение к подпрограмме осуществляется с помощью оператора

CALL AF4X(KF, F, KTT, ZBXM, ZBXA, ACH, FCH, IER)

Описание параметров:

- KF* — число частот;
F — вещественный вектор размерности *KF* частот (в герцах), для которых рассчитываются частотные характеристики цепи;
KTT — код типа передаточной функции: *KTT*=1— ток/ток; *KTT*=2— напряжение/напряжение; *KTT*=3— напряжение/ток; *KTT*=4— ток/напряжение;
ZBXM, *ZBXA* — выходные вещественные векторы размерности *KF*, содержащие соответственно модули, Ом, и аргументы, рад, входного сопротивления цепи;
ACH, *FCH* — выходные вещественные векторы размерности *KF*, содержащие соответственно амплитудно- и фазо-частотные характеристики цепи; модули передаточной функции при *KTT*=1 или 2 выдаются в размах, при *KTT*=3— в омах, при *KTT*=4— в сименсах; аргументы передаточной функции выдаются в радианах;
IER — код завершения: *IER*=0— при нормальном завершении; *IER*=1— неправильно заданы номера узлов *RLC*-элемента; *IER*=2— неправильно заданы номера узлов зависимого или независимого источников тока; *IER*=3— неправильно задан тип *RLC*-элемента; *IER*=4— матрица узловых проводимостей особенная; *IER*=5— неправильно заданы номера выходных узлов; проводимость ветви нагрузки равна нулю; неправильно задан входной источник тока; *IER*=6— неправильно задан код передаточной функции.

Передача других параметров осуществляется через общую область оператором *COMMON* (см. П1.3).

Подпрограмма *AF4X* в процессе выполнения использует подпрограммы *DIAGN*, *COPY*, *TOPOL*, *FORM*, *CSIMQ*, приведенные в данном Приложении.

Пример. Рассчитаем входное сопротивление и передаточную функцию цепи, схема которой изображена на рис. П1.1.

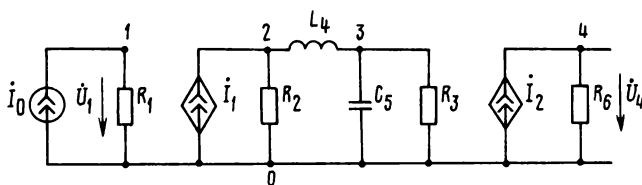


Рис. П1.1

Головная программа с именем *TAF4X*, исходные данные задачи и результаты расчета приведены ниже.

<< TAFX >>

РАСЧЕТ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ И ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
РЕЗУЛЬТАТЫ: ЗНАЧЕНИЯ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ВХОДНОГО СОПРО-
ТИВЛЕНИЯ В МАССИВАХ ZBXM, ZBXA; АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ
И ФАЗО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В МАССИВАХ A4X, F4X.

```

INTEGER TE(50),TE8(50)
REAL HE(50),HE8(50),NAME*8(4)
REAL F(64),ZBXM(64),ZBXA(64),A4X(64),F4X(64)
COMPLEX A(400),B(20),NUE(50),NUE8(50),PZIT(15),
* PZIT8(15),PNIT(10),PNIT8(10),NUM,NUM8,GH
COMMON A,B,NUE,PZIT,PNIT,NUM,GH,
HE,TE,KU,KE,KZIT,KNIT

```

МЕСТО КОРРЕКЦИИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

< ФИО И ГРУППУ ЗАДАВАТЬ 4-МЯ ЭЛЕМЕНТАМИ ПО 8 СИМВОЛОВ >

```

DATA NAME/'ИВАНОВ ','И.И. ','ГРУППА ','А-23 '/
DATA KU8,KE8,KF,KTT/4,6,25,2/,F0,HF/0.0,2000./
DATA TE8/1,1,1,3,2,1,44*0/
DATA HE8/1,,2,,10.E3,5.E-3,2.E-8,1.66666,
* 44*0./
DATA NUE8/(1,,0.),(2,,0.),(3,,0.),(2,,3.)/
* (3,,0.),(4,,0.)/44*(0.,0.)/
DATA PZIT8/(0.,2.),(1.,0.),(0.4,0.),(0.,4.),(3.,0.),(0.6,0.)
* 9*(0.,0.)/
DATA PNIT8/(1.,0.),(1.,0.)/8*(0.,0.)/
DATA NUM8/(4.,0.)/
KZIT=2
KNIT=1
KZIT3=KZIT*3
KNIT2=KNIT*2
DO 8 K=1,15
8 PZIT(K)=PZIT8(K)
DO 9 K=1,10
9 PNIT(K)=PNIT8(K)
KU=KU8
KE=KE8
NUM=NUM8
DO 10 K=1,KE
TE(K)=TE8(K)
HE(K)=HE8(K)
10 NUE(K)=NUE8(K)
DO 11 K=1,KF
11 F(K)=F0+(K-1)*HF
TYPE *, ' ИДЕТ СЧЕТ! ОЖИДАЙТЕ ПРИМЕРНО 5 МИНУТ!'
CALL AFA4X(KF,F,KTT,ZBXM,ZBXA,A4X,F4X,IER)
WRITE (1,13) NAME
WRITE (1,14)
WRITE (1,15) KU,KE,KF,KTT,F0,HF
WRITE (1,16) (TE(K),K=1,KE)
WRITE (1,17) (HE(K),K=1,KE)
WRITE (1,18) (NUE(K),K=1,KE)
IF (KZIT.LE.0) GO TO 30
WRITE (1,24) (PZIT(K),K=1,KZIT3)
30 WRITE (1,25) (PNIT(K),K=1,KNIT2)
WRITE (1,19) NUM
WRITE (1,20)
WRITE (1,21) IER
WRITE (5,21) IER
TYPE *, ' РЕЗУЛЬТАТЫ В ФАЙЛЕ FOR001.DAT'
IF (IER.NE.0) GO TO 12

```

```

WRITE (1,22) (F(K),ZBXM(K),ZBXA(K),A4X(K),F4X(K),K=1,KF)
WRITE (1,23)
12 STOP
13 FORMAT (///15X,4A8)
14 FORMAT(///10X,'ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ЗАДАЧИ')
15 FORMAT (/3X,'KU =',I2,3X,'KE =',I3,3X,'KF =',I3,3X,'КТТ =',

* I2//3X,'F0 =',E10.3,3X,'HF =',E10.3)
16 FORMAT (/3X,'TE = ',10I3/(8X,10I3))
17 FORMAT (/3X,'HE = ',5E11.3/ ( 8X,5E11.3))
18 FORMAT (/3X,'NUE = ',10(5('(',F3.0,',',F3.0,')')/9X:))
19 FORMAT (/3X,'NUH = ',('(',F3.0,',',F3.0,')')')
20 FORMAT (///10X,'РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА')
21 FORMAT (/3X,'КОД ЗАВЕРШЕНИЯ =',I3)
22 FORMAT(//3X,'ЗНАЧЕНИЯ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ',
* 'И ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ'//1X,61(' - ')/' I',2X,
* 'F, Гц',2X,'I',4X,'ZBXM, Ом',4X,'ZBXA, РАД',3X,
* 'A4X, РАЗ',4X,'F4X, РАД', ' I'/1X,61(' - ')/
* (' I',F8.0,' I',2(E14.5,F10.5),' I'))
23 FORMAT (1X,61(' - '),3(/))
24 FORMAT (/3X,'PZIT = ',5(2('(',F3.0,',',F3.0,')'),
* '(',E13.5,',',E13.5,')'/10X:))
25 FORMAT (/3X,'PNIT = ',5(1('(',F3.0,',',F3.0,')'),
* '(',E13.5,',',E13.5,')'/10X:))
END

```

ИВАНОВ И.И. ГРУППА А-23

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ЗАДАЧИ

KU = 4 KE = 6 KF = 25 КТТ = 2

F0 = 0.000E+00 HF = 0.200E+04

TE = 1 1 1 3 2 1

HE = 0.100E+01 0.200E+01 0.100E+05 0.500E-02 0.200E-07
 0.167E+01

NUE = (1., 0.) (2., 0.) (3., 0.) (2., 3.) (3., 0.)
 (4., 0.) (

PZIT = (0., 2.) (1., 0.) (0.40000E+00, 0.00000E+00)
 (0., 4.) (3., 0.) (0.60000E+00, 0.00000E+00)

PNIT = (1., 0.) (0.10000E+01, 0.00000E+00)

NUH = (4., 0.)

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

КОД ЗАВЕРШЕНИЯ = 0

ЗНАЧЕНИЯ ВХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

I	F, ГЦ	I	ZBXM, ОМ	ZBXA, РАД	A4X, РАЗ	F4X, РАД	I
I	0.	I	0.10000E+01	0.00000	0.00000E+00	0.00000	I
I	2000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.81265E+00	-0.00689	I
I	4000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.85366E+00	-0.01448	I
I	6000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.93205E+00	-0.02372	I
I	8000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.10695E+01	-0.03629	I
I	10000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.13193E+01	-0.05598	I
I	12000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.18449E+01	-0.09403	I
I	14000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.34579E+01	-0.20679	I
I	16000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.14471E+02	-1.76093	I
I	18000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.28020E+01	-2.92602	I
I	20000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.13724E+01	-3.02491	I
I	22000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.87564E+00	-3.05980	I
I	24000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.62678E+00	-3.07775	I
I	26000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.47879E+00	-3.08877	I
I	28000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.38148E+00	-3.09627	I
I	30000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.31312E+00	-3.10174	I
I	32000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.26278E+00	-3.10592	I
I	34000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.22438E+00	-3.10923	I
I	36000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.19427E+00	-3.11193	I
I	38000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.17013E+00	-3.11417	I
I	40000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.15043E+00	-3.11607	I
I	42000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.13410E+00	-3.11770	I
I	44000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.12040E+00	-3.11912	I
I	46000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.10877E+00	-3.12037	I
I	48000.	I	0.10000E+01	0.00000	0.98798E-01	-3.12148	I

Подпрограмма AF4X имеет следующий вид.

```

SUBROUTINE AF4X(KF,F,KTT,ZBXM,ZBXA,A4X,F4X,IER)
  INTEGER TE(50)
  REAL ME(50),F(KF),ZBXM(KF),ZBXA(KF),A4X(KF),F4X(KF)
  COMPLEX A(400),B(20),NUE(50),PZIT(15),PNIT(10),
  * NUH,Z,Z0,ZBX,GH,T
  COMMON A,B,NUE,PZIT,PNIT,NUH,GH,
  * ME,TE,KU,KE,KZIT,KNIT
  Z0=(0.,0.)
  FKR1=0.1
  CALL DIAGN(IER)
  IF (IER.NE.0) RETURN
  KTOP=0
  DO 26 NF=1,KF
    FR=F(NF)
    IF (FR.GE.FKR1) GO TO 11
    KTOP=1
    CALL COPY(KTOP)
    CALL TOPOL
    GO TO 12
  11 IF (KTOP.EQ.0) GO TO 12
    KTOP=0
    CALL COPY(KTOP)

```



```

12    CALL FORM(FR)
      CALL CSIMQ(KU,IER)
14    IF (IER.EQ.0) GO TO 16
      IER=4
      WRITE (1,15) IER
      WRITE (5,15) IER
15    FORMAT (////' МАТРИЦА    С Л А У    ОСОБЕННАЯ  IER =' ,I2////)
      RETURN
16    ZBX=Z0
      M=REAL(PNIT(1))
      N=AIMAG(PNIT(1))
      IF (M.GT.0) ZBX=ZBX+B(M)
      IF (N.GT.0) ZBX=ZBX-B(N)
      R1=REAL(ZBX)
      R2=AIMAG(ZBX)
      ZBXM(NF)=SQRT(R1*R1+R2*R2)
      IF (R1.EQ.0..AND.R2.EQ.0.) GO TO 17
      ZBXA(NF)=ATAN2(R2,R1)
      GO TO 18
17    ZBXA(NF)=0.
18    Z=Z0
      M=REAL(NUH)
      N=AIMAG(NUH)
      IF (PNIT(2).NE.Z0) GO TO 22
      WRITE (1,21)
      WRITE (5,21)
21    FORMAT (////' НЕПРАВИЛЬНО ЗАДАН ВХОДНОЙ ИСТОЧНИК'////)
      IER=5
      RETURN
22    IF (M.GT.0) Z=Z+B(M)
      IF (N.GT.0) Z=Z-B(N)
      IF (KTT.GT.0..AND.KTT.LT.5) GO TO 24
      WRITE (1,23)
      WRITE (5,23)
23    FORMAT (////' НЕПРАВИЛЬНО ЗАДАН КОД ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ'////)
      IER=6
      RETURN
24    IF (KTT.EQ.1) T=Z*GH/PNIT(2)
      IF (KTT.EQ.2) T=Z/ZBX
      IF (KTT.EQ.3) T=Z/PNIT(2)
      IF (KTT.EQ.4) T=Z*GH/ZBX
      Z1=REAL(T)
      Z2=AIMAG(T)
      A4X(NF)=SQRT(Z1*Z1+Z2*Z2)
      IF (Z1.EQ.0..AND.Z2.EQ.0.) GO TO 25
      F4X(NF)=ATAN2(Z2,Z1)
      GO TO 26
25    F4X(NF)=0.
26    CONTINUE
      IER=0
      RETURN
      END

```

П1.5. ПОДПРОГРАММА *DIAGN*

Эта подпрограмма является вспомогательной и предназначена для диагностики правильности задания электрической цепи. Обращение к подпрограмме осуществляется с помощью оператора

CALL DIAGN(IER)

, Здесь *IER* — код завершения (см. П1.4).

Передача других параметров осуществляется через общую область оператором *COMMON* (см. П1.3).

Ниже приведена распечатка подпрограммы *DIAGN*.

```

SUBROUTINE DIAGN( IER )
  INTEGER TE(50)
  REAL HE(50)
  COMPLEX A(400), B(20), NUE(50), PZIT(15), PNIT(10),
  * NUH, GH
  COMMON A, B, NUE, PZIT, PNIT, NUH, GH;
  * HE, TE, KU, KE, KZIT, KNIT
  KZIT3=3*KZIT
  KNIT2=2*KNIT
  DO 13 K=1, KE
    M=REAL( NUE(K) )
    N=AIMAG( NUE(K) )
    J=TE(K)
    IF ( J.GE.1.AND.J.LE.3 ) GO TO 11
    WRITE (1,10) K, J
    WRITE (5,10) K, J
10    FORMAT ( '///' ДЛЯ ЭЛЕМЕНТА', I6, 5X,
  * 'НЕПРАВИЛЬНО ЗАДАН ТИП ', I6, '/// )
    IER=3
    RETURN
11    IF ( M.NE.N.AND.M.LE.KU.AND.N.LE.KU.AND.M+N.GT.0 ) GO TO 13
    WRITE (1,12) K, NUE(K)
    WRITE (5,12) K, NUE(K)
12    FORMAT ( '///' ДЛЯ ЭЛЕМЕНТА', I6, 5X,
  * 'НЕПРАВИЛЬНО ЗАДАНЫ НОМЕРА УЗЛОВ', F6.0, F4.0, '/// )
    IER=1
    RETURN
13    CONTINUE
    M=REAL( NUH )
    N=AIMAG( NUH )
    IF ( M.LE.KU.AND.N.LE.KU ) GO TO 17
    WRITE (1,16)
    WRITE (5,16)
16    FORMAT ( '///' НЕПРАВИЛЬНО ЗАДАНЫ НОМЕРА ВЫХОДНЫХ УЗЛОВ'/// )
    IER=5
    RETURN
17    IF ( KZIT.LE.0 ) GO TO 22
    DO 21 K=1, KZIT3, 3
    M=REAL( PZIT(K) )
    N=AIMAG( PZIT(K) )
    I=REAL( PZIT(K+1) )
    J=AIMAG( PZIT(K+1) )
    IF ( M.NE.N.AND.M.LE.KU.AND.N.LE.KU.AND.M+N.GT.0 ) GO TO 20
    WRITE (1,18) K, PZIT(K)
    WRITE (5,18) K, PZIT(K)
18    FORMAT ( '///8X, 'ДЛЯ ЗАВИСИМОГО ИСТОЧНИКА ТОКА', I6, '///5X,
  * 'НЕПРАВИЛЬНО ЗАДАНЫ НОМЕРА УЗЛОВ', F6.0, F4.0, '/// )

```

```

19      IER=2
      RETURN
20      IF (I.NE.J.AND.I.LE.KU.AND.J.LE.KU.AND.I+J.GT.0) GO TO 21
      WRITE (1,18) K,PZIT(K+1)
      WRITE (5,18) K,PZIT(K+1)
      GO TO 19
21      CONTINUE
22      IF (KNIT.LE.0) GO TO 25
      DO 24 K=1,KNIT2,2
      M=REAL(PNIT(K))
      N=AIMAG(PNIT(K))
      IF (M.NE.N.AND.M.LE.KU.AND.N.LE.KU.AND.M+N.GT.0) GO TO 24
      WRITE (1,23) K,PNIT(K)
      WRITE (5,23) K,PNIT(K)
23      FORMAT (///6X,'ДЛЯ НЕЗАВИСИМОГО ИСТОЧНИКА ТОКА',I6//5X,
      * 'НЕПРАВИЛЬНО ЗАДАНЫ НОМЕРА УЗЛОВ',F6.0,F4.0//)
      IER=2
      RETURN
24      CONTINUE
25      IER=0
      RETURN

```

END

П1.6. ПОДПРОГРАММЫ COPY, TOPOL

Эти подпрограммы являются вспомогательными и предназначены для копирования (сохранения) исходной электрической цепи (подпрограмма COPY) и изменения ее топологии при нулевой частоте (подпрограмма TOPOL).

Обращение к подпрограмме COPY осуществляется с помощью оператора

CALL COPY(KTOP)

Здесь KTOP — код топологии: при KTOP=1 запоминается (сохраняется), а при KTOP=0 восстанавливается исходная топология цепи.

Обращение к подпрограмме TOPOL осуществляется с помощью оператора (без параметров) CALL TOPOL.

После выполнения этой подпрограммы все емкости из цепи удаляются, а индуктивности заменяются коротким замыканием. Узлы перенумеровываются. Таким образом, преобразованная цепь не содержит элементов C и L.

Передача параметров в этих подпрограммах осуществляется через общую область оператором COMMON (см. П1.3).

Ниже приведены распечатки подпрограмм COPY и TOPOL

```

SUBROUTINE COPY(KTOP)
INTEGER IE(50),TE8(50)
REAL HE(50),HE8(50)
COMPLEX A(400),B(20),NUE(50),NUE8(50),PZIT(15),PZIT8(15),
* PNIT(10),PNIT8(10),NUH,NUH8,GH
COMMON A,B,NUE,PZIT,PNIT,NUH,GH,
* HE,IE,KU,KE,KZIT,KNIT
IF (KTOP.EQ.0) GO TO 8
KU8=KU
KE8=KE
NUH8=NUH
DO 1 K=1,KE
TE8(K)=TE(K)
HE8(K)=HE(K)

```

```

1      NUE8(K)=NUE(K)
      IF (KZIT.LE.0) GO TO 3
      DO 2 K=1,15
2      PZIT8(K)=PZIT(K)
3      IF (KNIT.LE.0) GO TO 5
      DO 4 K=1,10
4      PNIT8(K)=PNIT(K)
5      RETURN
6      KU=KU8
      KE=KE8
      NUH=NUH8
      DO 11 K=1,KE
      TE(K)=TE8(K)
      HE(K)=HE8(K)
11     NUE(K)=NUE8(K)
      IF (KZIT.LE.0) GO TO 13
      DO 12 K=1,15
12     PZIT(K)=PZIT8(K)
13     IF (KNIT.LE.0) GO TO 15
      DO 14 K=1,10
14     PNIT(K)=PNIT8(K)
15     RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE TOPOL
INTEGER TE(50),NUE1(144)
REAL HE(50)
COMPLEX A(400),B(20),NUE(50),PZIT(15),PNIT(10),
* NUH,Z,Z0,GH
* COMMON A,B,NUE,PZIT,PNIT,NUH,GH,
HE,TE,KU,KE,KZIT,KNIT
Z0=(0.,0.)
KE2=KE+KE
KE3=KE2+4*KZIT
KE4=KE3+2*KNIT
KE5=KE4+2
DO 12 K=1,KE
K2=K+K-1
IF (TE(K).NE.2) GO TO 11
TE(K)=0
NUE(K)=Z0
11  NUE1(K2)=REAL(NUE(K))
12  NUE1(K2+1)=AIMAG(NUE(K))
      IF (KZIT.LE.0) GO TO 30
      DO 13 K=1,KZIT
      K3=1+(K-1)*3
      K4=1+(K-1)*4+KE2
      NUE1(K4)=REAL(PZIT(K3))
      NUE1(K4+1)=AIMAG(PZIT(K3))
      NUE1(K4+2)=REAL(PZIT(K3+1))
13  NUE1(K4+3)=AIMAG(PZIT(K3+1))
30  IF (KNIT.LE.0) GO TO 31
      DO 14 K=1,KNIT
      K2=K+K-1
      K4=K2+KE3
      NUE1(K4)=REAL(PNIT(K2))

```

```

14  NUE1(K4+1)=AIMAG(PNIT(K2))
31  NUE1(KE4+3)=REAL(NUH)
    NUE1(KE4+4)=AIMAG(NUH)
    DO 33 K=1,KE
      K2=K+K-1
      IF (TE(K).NE.3) GO TO 33
      NUR=MIN0(NUE1(K2),NUE1(K2+1))
      NU=MAX0(NUE1(K2),NUE1(K2+1))
      DO 16 J=1,KE5
        IF (NUE1(J).EQ.NU) NUE1(J)=NUR
16  CONTINUE
      TE(K)=0
      NUE(K)=Z0
      NUE1(K2)=0
      NUE1(K2+1)=0
33  CONTINUE
      NU=0
      DO 18 J=1,KU
        NMIN=100
        DO 17 K=1,KE5
          IF (NUE1(K).LT.NMIN.AND.NUE1(K).GT.NU) NMIN=NUE1(K)
17  CONTINUE
          IF (NMIN.EQ.100) GO TO 19
          NU=NU+1
          DO 18 K=1,KE5
            IF (NUE1(K).EQ.NMIN) NUE1(K)=NU
18  CONTINUE
19  NE=0
      DO 20 K=1,KE
        K2=K+K-1
        Z=CMPLX(NUE1(K2)+0.,NUE1(K2+1)+0.)
        IF (Z.EQ.Z0) GO TO 20
        NE=NE+1
        NUE(NE)=Z
        HE(NE)=HE(K)
        TE(NE)=TE(K)
20  CONTINUE
        IF (KZIT.LE.0) GO TO 22
        DO 21 K=1,KZIT
          K3=1+(K-1)*3
          K4=1+(K-1)*4+KE2
          PZIT(K3)=CMPLX(NUE1(K4)+0.,NUE1(K4+1)+0.)
21  PZIT(K3+1)=CMPLX(NUE1(K4+2)+0.,NUE1(K4+3)+0.)
22  IF (KNIT.LE.0) GO TO 24
          DO 23 K=1,KNIT
            K2=K+K-1
            K4=K2+KE3
            PNIT(K2)=CMPLX(NUE1(K4)+0.,NUE1(K4+1)+0.)
23  NUH=CMPLX(NUE1(KE4+3)+0.,NUE1(KE4+4)+0.)
24  KU=NU
      KE=NE
      RETURN
      END

```

П1.7. ПОДПРОГРАММА *FUR*

Эта подпрограмма предназначена для выполнения быстрого прямого и обратного дискретного преобразования Фурье (БПДПФ и БОДПФ) согласно алгоритму Кули и Таки¹. Обращение к подпрограмме *FUR* осуществляется с помощью оператора

CALL FUR(N, IFT, XR, XI)

Здесь

- N* — целая входная величина, кратная двум и равная числу отсчетов (число точек дискретизации);
IFT — целая входная величина, равная 1 при выполнении БПДПФ и равная -1 при выполнении БОДПФ;
XR, XI — входные и выходные вектора размерности *N* вещественных и мнимых частей дискретного преобразования Фурье.

Пример: Найти спектр вещественного сигнала

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{при } i = \overline{1,4}; \\ 0, & \text{при } i = \overline{5,16}. \end{cases}$$

Ниже приведена Фортран-программа головного модуля, результаты расчета спектра и подпрограмма *FUR*.

```

      DIMENSION X(16),XR(16),XI(16)
      DATA X/4*1.,12*0./
      N=16
      DO 8 K=1,N
        XR(K)=X(K)
      8  XI(K)=0.
      CALL FUR(N,1,XR,XI)
      WRITE (1,9) (K,X(K),XR(K),XI(K),K=1,N)
      9  FORMAT (15,3X,3E17.5)
      STOP
      END
  
```

1	0.10000E+01	0.25000E+00	0.00000E+00
2	0.10000E+01	0.18835E+00	-0.12585E+00
3	0.10000E+01	0.62500E-01	-0.15089E+00
4	0.10000E+01	-0.15519E-01	-0.78019E-01
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
6	0.00000E+00	0.52131E-01	0.10369E-01
7	0.00000E+00	0.62500E-01	-0.25888E-01
8	0.00000E+00	0.25034E-01	-0.37466E-01
9	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
10	0.00000E+00	0.25034E-01	0.37466E-01
11	0.00000E+00	0.62500E-01	0.25888E-01
12	0.00000E+00	0.52131E-01	-0.10369E-01
13	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
14	0.00000E+00	-0.15519E-01	0.78019E-01
15	0.00000E+00	0.62500E-01	0.15089E+00
16	0.00000E+00	0.18835E+00	0.12585E+00

¹ Введение в цифровую фильтрацию/Под ред. Р. Богнера и Константинодиса; Пер. с англ. под ред. Л. И. Филиппова.— М.: Мир, 1976.—216 с.

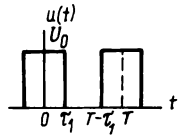
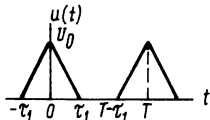
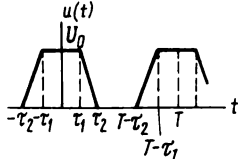
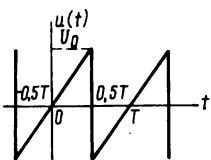
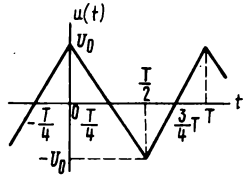
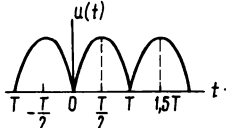
```

SUBROUTINE FUR(N,IF1,XR,XI)
DIMENSION XR(N),XI(N)
PI=3.141593
N1=N-1
N2=N/2
M=ALOG(N+1.)/0.693147
J=1
DO 5 I=1,N1
  IF(I-J)1,2,2
1  TR=XR(J)
  TI=XI(J)
  XR(J)=XR(I)
  XI(J)=XI(I)
  XR(I)=TR
  XI(I)=TI
2  K=N2
3  IF(K-J)4,5,5
4  J=J-K
  K=K/2
  GO TO 3
5  J=J+K
  L1=1
  DO 7 L=1,M
  L2=L1
  L1=L1*2
  WR=1.
  WI=0.
  PHI=PI/L2
  UR=COS(PHI)
  UI=-IFT* SIN(PHI)
  DO 7 J=1,L2
  DO 6 I=J,N,L1
  K=I+L2
  TR=XR(K)*WR-XI(K)*WI
  TI=XI(K)*WR+XR(K)*WI
  XR(K)=XR(I)-TR
  XI(K)=XI(I)-TI
  XR(I)=XR(I)+TR
6  XI(I)=XI(I)+TI
  TR=UR*WR-UI*WI
  WI=UI*WR+UR*WI
7  WR=TR
  IF (IFT.LT.0) RETURN
  DO 8 I=1,N
  XR(I)=XR(I)/N
8  XI(I)=XI(I)/N
  RETURN
END

```

Приложение 2.

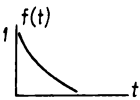
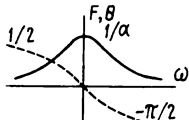
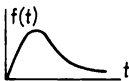
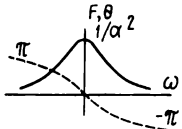
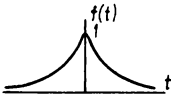
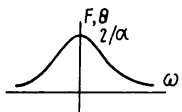
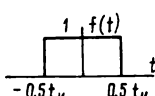
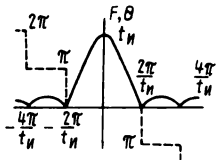
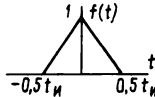
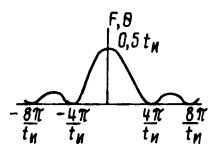
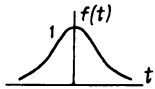
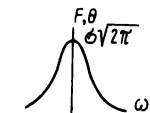
Таблица П2.1

№	Формы сигнала	Мгновенные значения сигналов
1		$u(t) = \frac{2U_0\tau_1}{T} + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega_1\tau_1}{k} \cos k\omega_1 t$
2		$u(t) = \frac{U_0\tau_1}{T} + \frac{2U_0}{\pi^2\tau_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k \frac{\pi\tau_1}{T}}{k^2} \cos k\omega_1 t$
3		$u(t) = U_0 \frac{\tau_1 + \tau_2}{T} + \frac{2U_0T}{\pi^2(\tau_2 - \tau_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k \times \\ \times \frac{\pi(\tau_1 + \tau_2)}{T} \sin k \frac{\pi(\tau_2 - \tau_1)}{T} \cos k\omega_1 t$
4		$u(t) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k} \cos(k\omega_1 t + \frac{\pi}{2})$
5		$u(t) = \frac{8U_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k \frac{\pi}{2}}{k^2} \cos k\omega_1 t$
6		$u(t) = \frac{2U_0}{\pi} + \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega_1 t + \pi)}{4k^2 - 1}$

Окончание табл. П2.1

№	Формы сигнала	Мгновенные значения сигналов
7		$u(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(k\omega_1 t + \frac{\pi}{2})$
8		$u(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(k\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$
9		$u(t) = \frac{U_0}{\pi} + \frac{U_0}{2\pi} \cos \omega_1 t + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega_1 t - \pi + k\frac{\pi}{2})}{4k^2 - 1}$
10		$u(t) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k} \cos(k\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$
11		$u(t) = U_0 \frac{2\tau_1 - T}{T} + \frac{4U_0}{k\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \times \times \frac{\omega_1 \tau_1}{2} \cos(k\omega_1 t - \frac{k\omega_1 \tau_1}{2})$
12		$u(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{4U_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k \frac{\pi}{2}}{k^2} \cos k\omega_1 t$

Таблица П2.2

№	$f(t)$	$F(j\omega) = Fe^{j\theta}$
1	 $f(t) = e^{-\alpha t}, t > 0$	$F(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$ 
2	 $f(t) = t e^{-\alpha t}, t > 0$	$F(j\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$ 
3	 $f(t) = e^{-\alpha t }$	$F(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ 
4	 $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq 0,5 t_n \\ 0 & \text{при } t > 0,5 t_n \end{cases}$	$F(j\omega) = t_n \frac{\sin 0,5 \omega t_n}{0,5 \omega t_n}$ 
5	 $f(t) = \begin{cases} 1-2 t /t_n, & \text{при } t \leq t_n/2 \\ 0, & \text{при } t > t_n/2 \end{cases}$	$F(j\omega) = 0,5 t_n \frac{\sin^2 0,25 \omega t_n}{(0,25 \omega t_n)^2}$ 
6	 $f(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$	$F(j\omega) = \sigma \sqrt{2\pi} e^{-0,5 \sigma^2 \omega^2}$ 

Приложение 3.

ТАБЛИЦЫ ПО РАСЧЕТУ ФИЛЬТРОВ И ЛИНИЙ ЗАДЕРЖКИ

Приведенные здесь таблицы служат для облегчения решения задачи аппроксимации характеристик ФНЧ и линий задержки, а также расчета параметров элементов лестничных LC-фильтров. В таблицах применены следующие обозначения:

- Δa_s — неравномерность ослабления в ПП ФНЧ;
 a_s — минимально допустимое ослабление в ПЗ ФНЧ;
 ω_s — нормированная граничная частота ПЗ ФНЧ;
 $\hat{\omega}_{\infty i}$ — нормированная частота нуля передаточной функции (всплеска ослабления);
 ω_{oi} — нормированная частота нуля ослабления (частота нормирования равна граничной частоте полосы пропускания);
 $\delta\%$ — неравномерность группового времени.

Таблица ПЗ.1. Коэффициенты полиномов знаменателей операторных передаточных функций ФНЧ Баттерворта

$\Delta a_s = 0,044$ дБ					$\Delta a_s = 0,1$ дБ			
n	κ	i	b_{1i}	b_{2i}	κ	i	b_{1i}	b_{2i}
2	9,94987	1	4,46091	9,94987	6,59124	1	3,63077	6,59124
3	9,94987	0	2,15083	—	6,59124	0	1,87495	—
		1	2,15083	4,62606		1	1,87495	3,51543
4	9,94987	1	1,35933	3,15434	6,59124	1	1,22634	2,56734
		2	3,28171	3,15434		2	2,96065	2,56734
5	9,94987	0	1,58330	—	6,59124	0	1,45812	—
		1	2,56184	2,50684		1	2,35929	2,12612
		2	0,97853	2,50684		2	0,90117	2,12612
6	9,94987	1	0,75915	2,15083	6,59124	1	0,70879	1,87495
		2	2,07404	2,15083		2	1,93646	1,87495
		3	2,83320	2,15083		3	2,64526	1,87495
7	9,94987	0	1,38850	—	6,59124	0	1,30917	—
		1	2,50199	1,92793		1	2,35904	1,71392
		2	1,73143	1,92793		2	1,63251	1,71392
		3	0,61794	1,92793		3	0,58263	1,71392
8	9,94987	1	0,51999	1,77605	6,59124	1	0,49390	1,60229
		2	1,48080	1,77605		2	1,40650	1,60229
		3	2,21617	1,77605		3	2,10497	1,60229
		4	2,61415	1,77605		4	2,48299	1,60229

Окончание табл. ПЗ.1

$\Delta a_s = 0,28 \text{ дБ}$					$\Delta a_s = 1,25 \text{ дБ}$			
n	κ	i	b_{1i}	b_{2i}	κ	i	b_{1i}	b_{2i}
2	3,87298	1	2,78316	3,87298	1,73205	1	1,86121	1,73205
3	3,87298	0	1,57042	—	1,73205	0	1,20094	—
		1	1,57042	2,46621		1	1,20094	1,44225
4	3,87298	1	1,07369	1,96799	1,73205	1	0,87803	1,31607
		2	2,59213	1,96799		2	2,11975	1,31607
5	3,87298	0	1,31102	—	1,73205	0	1,11612	—
		1	2,12127	1,71877		1	1,80592	1,24573
		2	0,81025	1,71877		2	0,68980	1,24573
6	3,87298	1	0,64868	1,57042	1,73205	1	0,56726	1,20094
		2	1,77224	1,57042		2	1,54978	1,20094
		3	2,42092	1,57042		3	2,11706	1,20094
7	3,87298	0	1,21341	—	1,73205	0	1,08163	—
		1	2,18648	1,47236		1	1,94904	1,16993
		2	1,51309	1,47236		2	1,34877	1,16993
		3	0,54002	1,47236		3	0,48137	1,16993
8	3,87298	1	0,46214	1,40285	1,73205	1	0,41791	1,14720
		2	1,31606	1,40285		2	1,19010	1,14720
		3	1,96962	1,40285		3	1,78113	1,14720
		4	2,32332	1,40285		4	2,10099	1,14720

В таблице ПЗ.1 приведены коэффициенты полиномов знаменателей операторных передаточных функций ФНЧ с характеристиками Баттерворта, а в табл. ПЗ.2 — с характеристиками Чебышева. В этих же таблицах указан постоянный множитель κ , при котором минимальное ослабление в полосе пропускания равно нулю. Операторные передаточные функции представляются следующим образом:

для нечетных n

$$H(\hat{p}) = \kappa / [(\hat{p} + b_{10}) \prod_{i=1}^{0,5(n-1)} (\hat{p}^2 + b_{1i}\hat{p} + b_{2i})],$$

для четных n

$$H(\hat{p}) = \kappa / \prod_{i=1}^{0,5n} (\hat{p}^2 + b_{1i}\hat{p} + b_{2i}).$$

В таблице ПЗ.3 приведены координаты полюсов $p_i = -\sigma_i \pm j\omega_i$ и нулей $\omega_{\infty i}$ операторных передаточных функций ФНЧ с характеристиками Золотарева четвертого, пятого и шестого порядков. В этой же таблице даны положения нулей ослабления ω_{0i} . Таблица составлена для немодифицированных характеристик, т. е. смещения нуля ослабления в нуль, а полюса в бесконечность не производилось (см. зад. 18.9).

Таблица П3.2. Коэффициенты полиномов знаменателей операторных передаточных функций ФНЧ Чебышева

$\Delta a_s = 0,044 \text{ дБ}$					$\Delta a_s = 0,1 \text{ дБ}$			
n	κ	i	b_{1i}	b_{2i}	κ	i	b_{1i}	b_{2i}
2	4,97494	1	3,0000	5,0000	3,29562	1	2,38048	3,33333
3	2,48747	0 1	1,17172 1,17172	— 2,12292	1,64781	0 1	0,97213 0,97213	— 1,69504
4	1,24373	1 2	0,62770 1,51539	1,52616 0,81905	0,82390	1 2	0,52968 1,27876	1,33250 0,62539
5	0,62187	0 1 2	0,63505 1,02753 0,39248	— 0,74878 1,30779	0,41195	0 1 2	0,54025 0,87414 0,33389	— 0,63736 1,19638
6	0,31093	1 2 3	0,26908 0,73514 1,00422	1,20323 0,77021 0,33720	0,20598	1 2 3	0,22994 0,62821 0,85815	1,13034 0,69732 0,26431
7	0,15547	0 1 2 3	0,44075 0,79421 0,54961 0,19615	— 0,38252 0,80552 1,14475	0,10299	0 1 2 3	0,37767 0,68055 0,47095 0,16808	— 0,33089 0,75390 1,09312
8	0,7773	1 2 3 4	0,14942 0,42550 0,63681 0,74717	1,10859 0,83799 0,45539 0,18321	0,05149	1 2 3 4	0,12826 0,36526 0,54665 0,64482	1,07000 0,79940 0,41672 0,14612
2	1,93649	1	1,73205	2,00000	0,86602	1	1,00000	1,00000
3	0,96825	0 1	0,74334 0,74334	— 1,30256	0,43301	0 1	0,45322 0,45322	— 0,95541
4	0,38730	1 2	1,07369 2,59213	1,96799 1,96799	0,17321	1 2	0,87803 2,11975	1,31607 1,31607
5	0,24206	0 1 2	0,42450 0,68686 0,26236	— 0,52569 1,08471	0,10825	0 1 2	0,26645 0,43112 0,16467	— 0,41649 0,97550
6	0,12103	1 2 3	0,18155 0,49600 0,67755	1,05602 0,62300 0,19000	0,054413	1 2 3	0,11453 0,31291 0,42744	0,98197 0,54896 0,11600

Окончание табл. ПЗ.2

$\Delta a_s = 0,28$ дБ					$\Delta a_s = 1,25$ дБ			
κ	κ	i	b_{1i}	b_{2i}	κ	i	b_{1i}	b_{2i}
7	0,06051	0	0,29906	—	0,02706	0	0,18925	—
		1	0,53889	0,27769		1	0,34101	0,22407
		2	0,37293	0,70070		2	0,23560	0,64708
		3	0,13310	1,03992		3	0,08422	0,98630
8	0,03030	1	0,10176	1,02996	0,01353	1	0,06452	0,98929
		2	0,28978	0,75936		2	0,18374	0,99668
		3	0,43369	0,37667		3	0,27499	1,00715
		4	0,51158	0,10608		4	0,32437	0,06541

Таблица ПЗ.3. Координаты полюсов и нулей передаточных функций ФНЧ
Золотарева

Δa_s , дБ	a_s , дБ	c	i	σ_i	ω_i	σ_{i+1}	ω_{i+1}
$\hat{\omega}_{oi} = 0,417609$, $0,937303$; $N = 4$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,8151008795$, $4,0739070691$; $\hat{\omega}_s = 1,70130$							
0,1	34,67	54,144941	1	0,1963912799	1,1139237046	0,6859773143	0,5724213462
0,28	39,29	92,146613	1	0,1609034412	1,0502515273	0,5314247163	0,5103199334
1,25	46,28	206,04609	1	0,1049263950	0,9833959491	0,3286131450	0,4531075598
$\hat{\omega}_{oi} = 0,424285$, $0,939644$; $N = 4$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,6910828882$, $3,7451629704$; $\hat{\omega}_s = 1,58902$							
0,1	31,66	38,287998	1	0,1851029696	1,1115025461	0,6934329524	0,5944823623
0,28	36,28	65,160462	1	0,1531994796	1,0499631846	0,5370727902	0,5255178248
1,25	43,27	145,70322	1	0,1008487785	0,9848228269	0,3319353926	0,4627844957
$\hat{\omega}_{oi} = 0,431726$, $0,942174$; $N = 4$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,5862005153$, $3,4616283819$; $\hat{\omega}_s = 1,49448$							
0,1	28,84	27,645859	1	0,1731365827	1,1086511916	0,7010697456	0,6196683339
0,28	33,45	47,049128	1	0,1449516451	1,0495148487	0,5430445193	0,5427411948
1,25	40,44	105,20505	1	0,0964413434	0,9863155159	0,3355178959	0,4736527200
$\hat{\omega}_{oi} = 0,437148$; $0,943965$; $N = 4$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,5250092449$; $3,2930641439$; $\hat{\omega}_s = 1,43956$							
0,1	27,04	22,470344	1	0,1648145496	1,1064878813	0,7061480901	0,6384000474
0,28	31,65	38,241174	1	0,1391630974	1,0491116466	0,5471660767	0,5554729985
1,25	38,64	85,509865	1	0,0933208816	0,9873408397	0,3380442459	0,4816243228
$\hat{\omega}_{oi} = 0,442954$; $0,945841$; $N = 4$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,4697639862$; $3,1383140055$; $\hat{\omega}_s = 1,39016$							
0,1	25,30	18,388520	1	0,1562422214	1,1040988367	0,7111083080	0,6588476032
0,28	29,91	31,294519	1	0,1331520667	1,0486145518	0,5513621118	0,5693045151
1,25	36,90	69,976671	1	0,0900551659	0,9883867831	0,3406743030	0,4902274393
$\hat{\omega}_{oi} = 0,449204$; $0,947799$; $N = 4$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,4197459120$; $2,9955964141$; $\hat{\omega}_s = 1,34563$							

Продолжение табл. П3.3

Δa_s , дБ	a_s , дБ	c	i	σ_i	ω_i	ω_{i+1}	ω_{i+1}
0,1	23,62	15,139025	1	0,1474454274	1,1014692089	0,7158306079	0,6811661007
0,28	28,23	25,764362	1	0,1269296132	1,0480123666	0,5555915481	0,5843335561
1,25	35,21	57,610864	1	0,0866465233	0,9894472218	0,3434020904	0,4995124062
$\hat{\omega}_{0i} = 0,628039;$ $0,960019;$ $N = 5$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,7721512356;$ $2,7089070662;$ $\hat{\omega}_s = 1,70130$							
0,1	50,44	43,376700	0	0,6186500613		0,4252401886	0,7468650053
			2	0,1274420837	1,0707152009		
0,28	55,06	73,820674	0	0,4800645451		0,3366195443	0,7018221037
			2	0,1033604421	1,0308494222		
1,25	62,05	165,06805	0	0,2977066395		0,2127374842	0,6572976222
			2	0,0669132182	0,9889692558		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,635531;$ $0,961574;$ $N = 5$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,6525154668;$ $2,5002963976;$ $\hat{\omega}_s = 1,58902$							
0,1	46,68	30,690979	0	0,6345790554		0,4218747300	0,7614457841
			2	0,1208766344	1,0687040952		
0,28	51,30	52,231468	0	0,4911758773		0,3346579210	0,7135722386
			2	0,0986427556	1,0302954830		
1,25	58,29	116,79311	0	0,3038630366		0,2118942128	0,6664163780
			2	0,0642437690	0,9897320633		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,643806;$ $0,963250;$ $N = 5$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,5514947922;$ $2,3213147403;$ $\hat{\omega}_s = 1,49448$							
0,1	43,15	22,177234	0	0,6527322658		0,4177134854	0,7774771497
			2	0,1138929955	1,0664592227		
0,28	47,76	37,742345	0	0,5037641240		0,3322254477	0,7265217130
			2	0,0935911052	1,0296475678		
1,25	54,75	84,394448	0	0,3107983664		0,2108407344	0,6764818612
			2	0,0613661115	0,9905333139		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,649782;$ $0,964433;$ $N = 5$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,4926447885;$ $2,2154420740;$ $\hat{\omega}_s = 1,43956$							
0,1	40,90	10,036855	0	0,6662334317		0,4144157225	0,7889966344
			2	0,1090200256	1,0648259528		
0,28	45,51	30,696037	0	0,5130753904		0,3302938611	0,7358507761
			2	0,0900449136	1,0291578825		
1,25	52,50	68,638426	0	0,3159020194		0,2100002782	0,6837460133
			2	0,0593338178	0,9910855567		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,656147;$ $0,965671;$ $N = 5$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,4395835264;$ $2,1186766287;$ $\hat{\omega}_s = 1,39016$							
0,1	38,72	14,771392	0	0,6809898745		0,4106299455	0,8011996005
			2	0,1039842217	1,0630805720		
0,28	43,34	25,138705	0	0,5232018156		0,3280720130	0,7457600282
			2	0,0863607535	1,0286202629		
1,25	50,33	56,211854	0	0,3214261847		0,2090292510	0,6914766276
			2	0,0572110796	0,9916526264		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,670117;$ $0,968302;$ $N = 5$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,3481390016;$ $1,9480280222;$ $\hat{\omega}_s = 1,30541$							

Продолжение табл. П3.3

Δa_i , дБ	a_i , дБ	c	i	σ_i	ω_i	σ_{i+1}	ω_{i+1}
0,1	34,55	10,084363	0	0,7148587645		0,4013174929	0,8276956721
			2	0,0934698244	1,0592320819		
0,28	39,17	17,162081	0	0,5462451788		0,3225896143	0,7673915057
			2	0,0786010210	1,0273812982		
1,25	46,16	38,375581	0	0,3338958209		0,2066193556	0,7084161835
			2	0,0527005638	0,9928165335		
$\hat{\omega}_{oi} = 0,694521$;				0,972631;		$N = 5$	
$\hat{\omega}_{\infty i} = 1,2401600563$;				1,7367618191;		$\hat{\omega}_s = 1,20622$	
0,1	28,67	5,8890887	0	0,7795947092		0,3816845772	0,8727132333
			2	0,0767900022	1,0525155136		
0,28	33,29	10,022351	0	0,5895212425		0,3109541899	0,8046505052
			2	0,0660820629	1,0250645430		
1,25	40,27	22,410657	0	0,3569317857		0,2014538001	0,7378790217
			2	0,0452987212	0,9946080855		
$\hat{\omega}_{oi} = 0,708482$;				0,974958;		$N = 5$	
$\hat{\omega}_{\infty i} = 1,1965997816$;				1,6466673573;		$\hat{\omega}_s = 1,16663$	
0,1	25,85	4,5522527	0	0,8203674320		0,3685069111	0,8975056556
			2	0,0681589254	1,0487087362		
0,28	30,46	7,7472550	0	0,6162668925		0,3030830985	0,8255581398
			2	0,0594886406	1,0236716984		
1,25	37,45	17,323389	0	0,3709187910		0,1979273305	0,7546323630
			2	0,0413306477	0,9955036694		
$\hat{\omega}_{oi} = 0,284866$;				0,743495;	0,972293;	$N = 6$	
$\hat{\omega}_{\infty i} = 1,7497803314$;				2,2882453548;	5,9722743805;	$\hat{\omega}_s = 1,70130$	
0,1	66,22	2045,7418	1	0,0891706326	1,0483931212	0,2887727694	0,8279611989
			3	0,4722946388	0,3302313057		
0,28	70,84	3481,5474	1	0,0719527192	1,0209624449	0,2302360324	0,7966859577
			3	0,3708462539	0,3129385994		
1,25	77,83	7784,9767	1	0,0463866265	0,9921819490	0,1466391117	0,7648907246
			3	0,2326682500	0,2959632620		
$\hat{\omega}_{oi} = 0,289899$;				0,750134;	0,973393;	$N = 6$	
$\hat{\omega}_{\infty i} = 1,6324504763$;				2,1183102299;	5,4812760169;	$\hat{\omega}_s = 1,58902$	
0,1	61,70	1216,4843	1	0,0848530764	1,0468221343	0,2835499761	0,8375257745
			3	0,4805194842	0,3398147191		
0,28	66,32	2070,2748	1	0,0687563800	1,0204395296	0,2265886721	0,8051486945
			3	0,3769352142	0,3206765586		
1,25	73,31	4629,2753	1	0,0445112476	0,9926539686	0,1446330095	0,7722537937
			3	0,2362560788	0,3020217079		
$\hat{\omega}_{oi} = 0,295532$;				0,757414;	0,974578;	$N = 6$	
$\hat{\omega}_{\infty i} = 1,5334597446$;				1,9731295186;	5,0569105987;	$\hat{\omega}_s = 1,49448$	
0,1	57,46	743,36558	1	0,0802486739	1,0450977282	0,2776070491	0,8478794165
			3	0,4896639106	0,3507408374		
0,28	62,08	1270,2029	1	0,0653312586	1,0198532525	0,2224404222	0,8143573988
			3	0,3837021571	0,3294431071		
1,25	69,07	2840,2600	1	0,0424916074	0,9931521505	0,1423529589	0,7803043923
			3	0,2402411507	0,3088377022		

Окончание табл. ПЗ.3

Δa_s , дБ	a_s , дБ	c	i	σ_i	ω_i	σ_{i+1}	ω_{i+1}
$\hat{\omega}_{0i} = 0,304081$; $0,768172$; $0,976288$; $N = 6$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,4239277157$; $1,8097026149$; $4,5716878772$; $\hat{\omega}_s = 1,39016$							
0,1	52,15	404,87856	1	0,0736927513	1,0425528488	0,2684173912	0,9628965687
			3	0,5034111824	0,3677444855		
0,28	56,76	689,04292	1	0,0604238869	1,0189662144	0,2160266238	0,8278144774
			3	0,3938731719	0,3429710602		
1,25	63,75	1540,7468	1	0,0395793780	0,9938526097	0,1388290900	0,7921504844
			3	0,2462279688	0,3192568564		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,313987$; $0,780205$; $0,978143$; $N = 6$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,3345758833$; $1,6731570853$; $4,1575165728$; $\hat{\omega}_s = 1,30541$							
0,1	47,15	227,72667	1	0,0667033178	1,0397175481	0,2575662296	0,8792560818
			3	0,5191108273	0,3881015973		
0,28	51,77	387,55683	1	0,0551497746	1,0179485492	0,2084480218	0,8426323816
			3	0,4054927003	0,3589898724		
1,25	58,76	866,60341	1	0,0364236256	0,9945871388	0,1346641970	0,8053219101
			3	0,2530658985	0,3314435485		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,325489$; $0,793605$; $0,980138$; $N = 6$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,2611155474$; $1,5575349699$; $3,7975748027$; $\hat{\omega}_s = 1,23607$							
0,1	42,39	131,69748	1	0,0593370326	1,0365838139	0,2447794915	0,8968715758
			3	0,5369749414	0,4126536326		
0,28	47,01	224,12947	1	0,0495399819	1,0167894685	0,1995010403	0,8588100615
			3	0,4187341068	0,3780652449		
1,25	54,00	501,16874	1	0,0330352937	0,9953469294	0,1297410056	0,8198806572
			3	0,2608622872	0,3457492269		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,331932$; $0,800848$; $0,981185$; $N = 6$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,2293476770$; $1,5061761435$; $3,6339317043$; $\hat{\omega}_s = 1,20622$							
0,1	40,08	100,96850	1	0,0555339418	1,0349026563	0,2375626375	0,9061060324
			3	0,5467897556	0,4268554694		
0,28	44,70	171,83333	1	0,0466213909	1,0161527862	0,1944399936	0,8674000104
			3	0,4260266701	0,3889826211		
1,25	51,69	384,23100	1	0,0312585467	0,9957322596	0,1269514743	0,8276980870
			3	0,2651619190	0,3538383460		
$\hat{\omega}_{0i} = 0,342601$; $0,812435$; $0,982815$; $N = 6$ $\hat{\omega}_{\infty i} = 1,1870327486$; $1,4359725539$; $3,4052302861$; $\hat{\omega}_s = 1,6663$							
0,1	36,69	68,304079	1	0,0497070955	1,0322373760	0,2255796373	0,9204187011
			3	0,5626833810	0,4511003176		
0,28	41,31	116,24335	1	0,0421174335	1,0151229124	0,1860120797	0,8808920603
			3	0,4378766738	0,4074338318		
1,25	48,30	259,92804	1	0,0284963757	0,9963133663	0,1222949689	0,8401191107
			3	0,2721617925	0,3673530937		

Передаточные функции записываются следующим образом:

а) для фильтра четвертого порядка

$$H(\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \prod_{i=1}^2 \frac{\hat{p}^2 + \hat{\omega}_{\infty i}^2}{\hat{p}^2 + 2\sigma_i \hat{p} + \sigma_i^2 + \omega_i^2}; \quad (\text{ПЗ.1})$$

б) для фильтров пятого порядка

$$H(\hat{p}) = \frac{1}{c(\hat{p} + a_0)} \prod_{i=1}^2 \frac{\hat{p}^2 + \hat{\omega}_{\infty i}^2}{\hat{p}^2 + 2\sigma_i \hat{p} + \sigma_i^2 + \omega_i^2}; \quad (\text{ПЗ.2})$$

в) для фильтров шестого порядка

$$H(\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \prod_{i=1}^3 \frac{\hat{p}^2 + \hat{\omega}_{\infty i}^2}{\hat{p}^2 + 2\sigma_i \hat{p} + \sigma_i^2 + \omega_i^2}. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Таблицы ПЗ.4...ПЗ.7 содержат данные, необходимые для расчета линий задержки. Так, в табл. ПЗ.4 приведены значения нормированных граничных частот рабочей полосы при различных порядках передаточной функции и отклонениях от единицы нормированного группового времени линии задержки с максимально плоской характеристикой. В табл. ПЗ.5 приведены нули $p_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ полиномов Бесселя (полюсы передаточной функции) (см. зад. 19.12). Таблица ПЗ.6 аналогична табл. ПЗ.4. В ней приведены значения граничных частот рабочей полосы при различных порядках передаточной функции и отклонениях от постоянной величины группового времени линии задержки с равноволновой ха-

Таблица ПЗ.4. Нормированные граничные частоты рабочей полосы линии задержки с максимально плоской характеристикой при различных n

$\delta, \%$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1	0,56	1,21	1,93	2,71	3,52	4,36	5,22	6,08	6,96
10	0,34	1,09	1,94	2,84	3,76	4,69	5,64	6,59	7,55	8,52
20	0,5	1,39	2,29	3,31	4,2	5,95	6,3	7,3	8,31	9,33

Таблица ПЗ.5. Координаты нулей полиномов Бесселя при различных n

2	3	4	5	6	7	8	9	10
—1,500000 0,866025	2,322184 —1,838906 1,754380	2,896211 0,867234 —2,103788 2,657417	3,646738 —3,351955 1,742661 —2,324674 3,571023	4,248359 0,867510 —5,735707 2,626271 —2,515931 4,492673	—4,971786 —4,758290 1,739285 —4,070139 3,517174 —2,685677 5,420693	—5,587886 0,867614 —2,838984 6,353910 —4,368289 4,414442 —5,204841 2,616175	—6,297018 —6,129368 1,737847 —5,604422 3,498157 —4,638439 5,317271 —2,979260 7,291464	—6,922045 0,867665 —3,108915 8,232699 —6,615292 2,611567 —5,967527 4,384947 —4,886220 6,224985

Таблица ПЗ.6. Нормированные граничные частоты рабочей полосы линии задержки с равноволновой характеристикой при различных n

$\delta, \%$	n								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,5	0,997	1,80	3,00	4,29	5,64	7,03	8,45	9,88	11,34
1,0	0,141	2,01	3,27	4,60	5,98	7,39	8,83	10,28	11,75
5,0	0,309	2,61	3,98	5,40	6,85	8,32	9,80	11,30	12,80
10,0	0,428	2,93	4,34	5,80	7,28	8,78	10,28	11,80	13,33

рактической, а в табл. ПЗ.7 — координаты нулей полиномов, обеспечивающих Чебышевскую (равноволновую) аппроксимацию группового времени (см. зад. 19.15).

Таблица ПЗ.8...ПЗ.13 предназначены для расчета лестничных LC-фильтров нижних частот. Таблицы позволяют рассчитать два варианта фильтров, схемы схемы которых приведены на рис. ПЗ.1...ПЗ.5. Обозначение элементов вверху таблицы соответствуют левой схеме, а внизу — правой. В таблице ПЗ.8 даны значения элементов фильтров Баттерворта, в табл. ПЗ.9 — фильтров Чебышева. Число элементов в схемах равно порядку передаточной функции. Таблицы ПЗ.10...ПЗ.13 служат для расчета фильтров с характеристиками Золотарева.

При решении задачи аппроксимации полезно знать полиномы Баттерворта и Чебышева, которые приводятся ниже.

Полиномы Баттерворта;

$$\begin{aligned}n &= 2, p^2 + 1,4142p + 1; \\n &= 3, (p + 1)(p^2 + p + 1); \\n &= 4, (p^2 + 0,7654p + 1)(p^2 + 1,8478p + 1); \\n &= 5, (p + 1)(p^2 + 0,6180p + 1)(p^2 + 1,6180p + 1); \\n &= 6, (p^2 + 0,5176p + 1)(p^2 + 1,4142p + 1)(p^2 + 1,9319p + 1); \\n &= 7, (p + 1)(p^2 + 0,4450p + 1)(p^2 + 1,2470p + 1)(p^2 + 1,8019p + 1);\end{aligned}$$

Полиномы Чебышева:

$$\begin{aligned}n &= 2, 2x^2 - 1; \\n &= 3, 4x^3 - 3x; \\n &= 4, 8x^4 - 8x^2 + 1; \\n &= 5, 16x^5 - 20x^3 + 5x; \\n &= 6, 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1; \\n &= 7, 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x; \\n &= 8, 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1.\end{aligned}$$

Т а б л и ц а ПЗ.7. Координаты нулей полиномов, обеспечивающих чебышевскую аппроксимацию группового времени при различных n

δ, %	2		3			4			
	σ ₁	ω ₁	σ ₁	σ ₂	ω ₂	σ ₁	ω ₁	σ ₂	ω ₂
0,5	1,40228	0,92318	1,90883	1,56939	2,01518	1,64990	3,23519	2,10510	1,10514
1,0	1,36301	0,94644	1,80613	1,50230	2,08023	1,56694	3,33886	1,96430	1,14599
5,0	1,20397	1,04169	1,47030	1,27654	2,29633	1,30795	3,65308	1,54601	1,26219
10,0	1,09188	1,11094	1,27607	1,13860	2,42941	1,15845	3,83406	1,32293	1,32350

δ, /	5					6			
	σ ₁	σ ₂	ω ₂	σ ₃	ω ₃	σ ₁	ω ₁	σ ₂	ω ₂
0,5	2,30822	1,69510	4,53638	2,19908	2,33653	1,72359	5,89051	2,25327	3,64622
1,0	2,12625	1,60279	4,67216	2,03811	2,41443	1,62521	6,05293	2,07951	3,75479
5,0	1,62182	1,32508	5,06422	1,57915	2,62422	1,33571	6,50841	1,59742	4,03895
10,0	1,36948	1,16928	5,28298	1,34305	2,73152	1,17600	6,75850	1,35410	4,18271

δ, %	6					7			
	σ ₃	ω ₃	σ ₁	σ ₂	ω ₂	σ ₃	ω ₃	σ ₄	ω ₄
0,5	2,40570	1,23394	2,50441	1,74288	7,28115	2,28733	5,00657	2,46110	2,54613
1,0	2,20167	1,27041	2,27773	1,64042	7,46611	2,10559	5,14071	2,24405	2,61270
5,0	1,65604	1,36285	1,68824	1,34298	7,98480	1,60887	5,48574	1,67333	2,77839
10,0	1,38948	1,40850	1,40941	1,18057	8,25172	1,36105	5,65984	1,40046	2,86016

Окончание табл. ПЗ.7

$\delta, \%$	8							
	σ_1	ω_1	σ_2	ω_2	σ_3	ω_3	σ_4	ω_4
0,5	1,75670	8,69837	2,31065	6,40169	2,49639	3,90888	2,56039	1,31284
1,0	1,65144	8,90256	2,12328	6,55787	2,27082	4,00016	2,32046	1,34279
5,0	1,34818	9,45680	1,61672	6,95380	1,68486	4,22591	1,70654	1,41573
10,0	1,18395	9,75749	1,36574	7,15428	1,40739	4,33766	1,42037	1,45177

$\delta, \%$	9									
	σ_1	σ_2	ω_2	σ_3	ω_3	σ_4	ω_4	σ_5	ω_5	
0,5	2,61686	1,76727	10,1354	2,32732	7,82270	2,52052	5,30588	2,59611	2,67616	
1,0	2,36324	1,65977	10,3565	2,13617	7,99703	2,28927	5,41881	2,34738	2,73100	
5,0	1,72483	1,35217	10,9504	1,62266	8,4371	1,69276	5,69463	1,71805	2,86342	
10,0	1,43129	1,18651	11,2726	1,36918	8,66097	1,41213	5,83246	1,42724	2,92942	

$\delta, \%$	10									
	σ_1	ω_1	σ_2	ω_2	σ_3	ω_3	σ_4	ω_4	σ_5	ω_5
0,5	1,77534	11,5877	2,34016	9,26316	2,53790	6,72768	2,62074	4,07435	2,65260	1,36361
1,0	1,66610	11,8240	2,14604	9,45348	2,30244	6,85920	2,36598	4,14998	2,39037	1,38837
5,0	1,35506	12,4533	1,62693	9,93209	1,69837	7,17881	1,72594	4,33231	1,73637	1,44776
10,0	1,18856	12,7954	1,37159	10,1758	1,41630	7,34131	1,43092	4,42284	1,43870	1,47772

Таблица ПЗ.8. Значения элементов фильтров Баттерворта второго — девятого порядков при $\Delta a_s = 3$ дБ

n	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8	C_9
3	1,000	2,000	1,000						
4	0,7654	1,848	1,849	0,7654					
5	0,6180	1,618	2,000	1,618	0,6180				
6	0,5176	1,414	1,932	1,932	1,414	0,5176			
7	0,4450	1,247	1,802	2,000	1,802	1,247	0,4450		
8	0,3902	1,111	1,663	1,962	1,962	1,663	1,111	0,3902	
9	0,3473	1,000	1,532	1,879	2,000	1,879	1,532	1,000	0,3473
n	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	L_6	L_7	C_8	L_9

Таблица ПЗ.9. Значения элементов фильтров Чебышева

n	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8	C_9
$\Delta a_s = 0,099$ дБ									
3	1,0285	1,1468	1,0285						
4	0,9277	1,434	1,434	0,9277					
5	1,144	1,372	1,972	1,372	1,144				
6	1,036	1,516	1,788	1,788	1,516	1,036			
7	1,178	1,423	2,094	1,574	2,094	1,423	1,178		
8	1,086	1,526	1,902	1,830	1,830	1,902	1,526	1,086	
9	1,193	1,443	2,132	1,618	2,203	1,618	2,132	1,443	1,193

Окончание табл. ПЗ.9

n	C_1	L_2	C_3	L_4	C_5	L_6	C_7	L_8	C_9
$\Delta a_s = 0,28$ дБ									
3	1,3451	1,1412	1,3451						
4	1,146	1,513	1,513	1,146					
5	1,456	1,307	2,283	1,307	1,456				
6	1,277	1,528	1,878	1,878	1,528	1,277			
7	1,488	1,343	2,388	1,451	2,388	1,343	1,488		
8	1,340	1,508	2,019	1,844	1,844	2,019	1,508	1,340	
9	1,502	1,357	2,420	1,481	2,480	1,481	2,420	1,357	1,502
n	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8	L_9

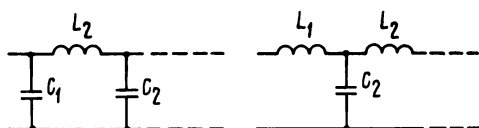


Рис. ПЗ.1

Таблица ПЗ.10. Значения элементов фильтров Золотарева третьего порядка

$\hat{\omega}_s$	a_s , дБ	C_1	C_2	L_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	C_3
$\Delta a_s = 0,028$ дБ						
4,44	40	0,7486	0,0374	1,0218	5,1166	0,7486
5,24	45	0,7561	0,0265	1,0351	6,0377	0,7561
6,39	50	0,7624	0,0176	1,0462	7,3700	0,7624
8,20	56	0,7674	0,0106	1,0551	9,4661	0,7674
$\Delta a_s = 0,044$ дБ						
4,13	40	0,8233	0,0420	1,0525	4,7552	0,8233
5,24	47	0,8348	0,0256	1,0721	6,0377	0,8348
6,39	52	0,8410	0,0170	1,0826	7,3700	0,8410
7,18	55	0,8436	0,0134	1,0871	8,2868	0,8436
$\Delta a_s = 0,099$ дБ						
3,62	40	0,9897	0,0529	1,0869	4,1688	0,9897
$\hat{\omega}_s$	a_s , дБ	C_1	C_2	L_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	C_3
4,44	46	1,0029	0,0345	1,1073	5,1166	1,0029
5,24	50	1,0102	0,0245	1,1186	6,0377	1,0102
6,39	55	1,0163	0,0163	1,1280	7,3700	1,0163
$\Delta a_s = 0,177$ дБ						
3,23	40	1,1395	0,0669	1,0844	3,7137	1,1395
3,86	45	1,1547	0,0458	1,1057	4,4423	1,1547
4,80	50	1,1672	0,0290	1,1231	5,5386	1,1672
5,75	55	1,1740	0,0200	1,1326	6,6370	1,1740
$\hat{\omega}_s$	a_s , дБ	L_1	L_2	C_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	L_3

Рис. ПЗ.2

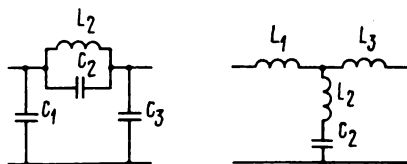
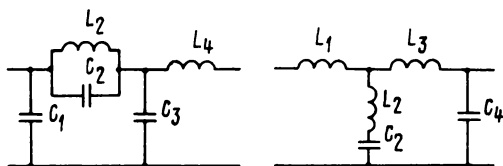


Таблица ПЗ.1.1. Значения элементов фильтров Золотарева четвертого порядка

$\hat{\omega}_s$	a_s , дБ	C_1	C_2	L_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	C_3	L_4
$\Delta a_s = 0,028$ дБ							
3,98	56	0,7020	0,04232	1,241	4,364244	1,282	0,7429
3,39	50	0,6871	0,05952	1,215	3,718173	1,272	0,7440
2,96	45	0,6697	0,08026	1,186	3,241901	1,261	0,7451
2,63	41	0,6497	0,1049	1,152	2,876673	1,248	0,7465
$\Delta a_s = 0,044$ дБ							
3,76	56	0,7575	0,04585	1,282	4,124781	1,326	0,8018
3,23	50	0,7422	0,06339	1,256	3,544141	1,316	0,8027
2,84	45	0,7245	0,08436	1,226	3,109875	1,305	0,8037
2,45	40	0,6988	0,1183	1,179	2,677264	1,287	0,8052
$\Delta a_s = 0,099$ дБ							
3,39	56	0,8775	0,05363	1,349	3,718173	1,400	0,9292
2,96	51	0,8612	0,07202	1,321	3,241901	1,390	0,9297
2,53	45	0,8357	0,1017	1,278	2,773213	1,373	0,9304
2,22	40	0,8057	0,1382	1,229	2,427221	1,354	0,9311
$\Delta a_s = 0,177$ дБ							
3,09	55	0,9807	0,06309	1,382	3,386078	1,443	1,041
2,73	50	0,9630	0,08273	1,353	2,988543	1,432	1,041
2,37	45	0,9356	0,1141	1,308	2,588050	1,414	1,041
2,09	40	0,9040	0,1522	1,257	2,286311	1,394	1,041
$\hat{\omega}_s$	a_s , дБ	L_1	L_2	C_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	L_3	C_4

Рис. ПЗ.3



Т а б л и ц а П3.12. Значения элементов фильтров Золотарева пятого порядка

$\hat{\omega}_s$	a_s , дБ	C_1	C_2	L_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	C_3	C_4	L_4	$\hat{\omega}_{\infty 4}$	C_5
$\Delta a_s = 0,028$ дБ										
2,36	61	0,8574	0,05047	1,302	3,9007	1,612	0,1380	1,182	2,4767	0,7790
2,13	56	0,8469	0,06403	1,288	3,4829	1,584	0,1773	1,137	2,2269	0,7486
1,88	50	0,8309	0,08512	1,265	3,0476	1,542	0,2409	1,070	1,9695	0,7023
1,74	46	0,8172	0,1034	1,246	2,7863	1,508	0,2985	1,015	1,8169	0,6632
1,58	41	0,7967	0,1315	1,216	2,5002	1,459	0,3922	0,9337	1,6525	0,6048
$\Delta a_s = 0,044$ дБ										
2,20	60	0,9265	0,05866	1,307	3,6118	1,666	0,1607	1,173	2,3038	0,8363
2,00	55	0,9151	0,07330	1,291	3,2508	1,635	0,2034	1,126	2,0892	0,8039
1,83	50	0,9024	0,08993	1,273	2,9552	1,601	0,2534	1,076	1,9153	0,7678
1,66	45	0,8833	0,1155	1,247	2,6356	1,552	0,3337	1,001	1,7299	0,7140
1,52	40	0,8613	0,1454	1,216	2,3780	1,498	0,4338	0,9195	1,5833	0,6533
$\Delta a_s = 0,099$ дБ										
2,06	60	1,089	0,06809	1,299	3,3628	1,803	0,1858	1,158	2,1556	0,9856
1,88	55	1,076	0,08396	1,282	3,0476	1,767	0,2317	1,112	1,9695	0,9509
1,70	50	1,057	0,1084	1,258	2,7089	1,715	0,3047	1,045	1,7721	0,8993
1,55	45	1,036	0,1369	1,229	2,4376	1,657	0,3939	0,9709	1,6169	0,8412
1,43	40	1,011	0,1702	1,197	2,2154	1,595	0,5044	0,8899	1,4926	0,7764
$\Delta a_s = 0,177$ дБ										
2,00	61	1,241	0,07446	1,271	3,2508	1,936	0,2024	1,132	2,0892	1,129
1,78	55	1,223	0,09732	1,249	2,8683	1,882	0,2682	1,072	1,8646	1,079
1,62	50	1,202	0,1241	1,224	2,5661	1,823	0,3479	1,006	1,6901	1,024
1,45	45	1,178	0,1553	1,195	2,3213	1,758	0,4451	0,9333	1,5514	0,9619
1,36	40	1,144	0,2017	1,153	2,0733	1,670	0,5990	0,8338	1,4149	0,8750
$\hat{\omega}_s$	a_s , дБ	L_1	L_2	C_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	L_3	L_4	C_4	$\hat{\omega}_{\infty 4}$	L_5

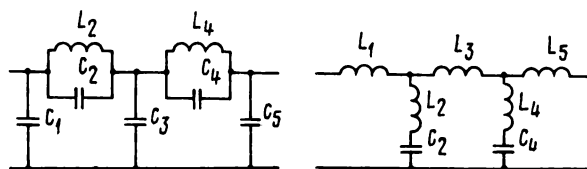
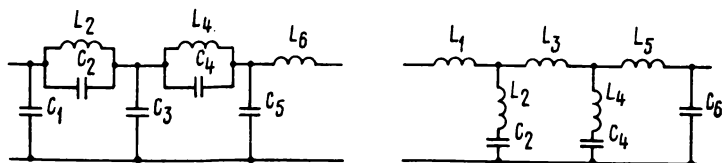


Рис. П3.4

Таблица П3.13. Значения элементов фильтров Золотарева шестого порядка

$\hat{\omega}_s$	a_s , дБ	C_1	C_2	L_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	C_3	C_4	L_4	$\hat{\omega}_{\infty 4}$	C_5	L_6
$\Delta a_s = 0,11$ дБ											
1,94	61	0,6319	0,1068	1,235	2,7537	1,414	0,1882	1,314	2,0103	1,235	0,7319
1,75	55	0,6061	0,1380	1,197	2,4610	1,365	0,2457	1,240	1,8119	1,198	0,7329
1,64	50	0,5844	0,1651	1,165	2,2801	1,326	0,2969	1,178	1,6906	1,167	0,7337
1,51	45	0,5520	0,2071	1,118	2,0777	1,270	0,3788	1,089	1,5568	1,121	0,7347
1,40	40	0,5153	0,2572	1,067	1,9093	1,210	0,4810	0,9923	1,4474	1,070	0,7357
$\Delta a_s = 0,028$ дБ											
1,79	60	0,7254	0,1220	1,283	2,5280	1,452	0,2162	1,341	1,8571	1,285	0,8390
1,67	56	0,7051	0,1461	1,253	2,3373	1,413	0,2609	1,282	1,7288	1,256	0,8392
1,54	50	0,6749	0,1832	1,209	2,1247	1,356	0,3315	1,197	1,5877	1,214	0,8395
1,43	45	0,6408	0,2270	1,160	1,9487	1,295	0,4178	1,103	1,4728	1,167	0,8396
1,34	40	0,6023	0,2789	1,106	1,8005	1,230	0,5253	1,002	1,3781	1,115	0,8396
$\Delta a_s = 0,044$ дБ											
1,75	61	0,7820	0,1266	1,305	2,4610	1,475	0,2239	1,360	1,8119	1,308	0,8996
1,60	55	0,7539	0,1597	1,264	2,2258	1,420	0,2856	1,279	1,6545	1,269	0,8995
1,51	51	0,7304	0,1883	1,230	2,0777	1,375	0,3401	1,213	1,5568	1,237	0,8993
1,40	46	0,6957	0,2323	1,181	1,9093	1,312	0,4268	1,118	1,4474	1,190	0,8989
1,30	40	0,6461	0,2989	1,112	1,7349	1,227	0,5656	0,9890	1,3370	1,125	0,8981
$\Delta a_s = 0,099$ дБ											
1,64	60	0,8982	0,1456	1,321	2,2801	1,497	0,2556	1,368	1,6906	1,327	1,032
1,54	56	0,8755	0,1717	1,290	2,1247	1,453	0,3042	1,304	1,5877	1,297	1,031
1,43	50	0,8420	0,2118	1,244	1,9487	1,389	0,3804	1,212	1,4728	1,254	1,030
1,34	45	0,8044	0,2588	1,192	1,8005	1,321	0,4735	1,112	1,3781	1,207	1,028
1,25	40	0,7509	0,3299	1,120	1,6452	1,229	0,6232	0,9764	1,2819	1,142	1,025
$\Delta a_s = 0,177$ дБ											
1,57	60	1,004	0,1601	1,321	2,1740	1,513	0,2772	1,374	1,6202	1,329	1,151
1,48	56	0,9798	0,1877	1,289	2,0328	1,466	0,3280	1,307	1,5274	1,299	1,149
1,38	50	0,9439	0,2298	1,242	1,8715	1,399	0,4078	1,211	1,4232	1,256	1,146
1,28	45	0,8929	0,2929	1,176	1,7039	1,308	0,5333	1,080	1,3178	1,197	1,142
1,22	40	0,8466	0,3541	1,116	1,5907	1,229	0,6629	0,9668	1,2491	1,145	1,138
$\hat{\omega}_s$	a_s	L_1	L_2	C_2	$\hat{\omega}_{\infty 2}$	L_3	L_4	C_4	$\hat{\omega}_{\infty 4}$	L_5	C_6

Рис. П3.5



Приложение 4.

ARC-СХЕМЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИХ РАСЧЕТУ

В данном приложении рассматриваются ARC-цепи с передаточной функцией вида:

$$H(\hat{p}) = k[a\hat{p}^2 \pm (\omega_n/Q_n)\hat{p} + \omega_n^2]/[\hat{p}^2 + (\omega_n/Q_n)\hat{p} + \omega_n^2]. \quad (\text{П4.1})$$

В зависимости от значения коэффициентов получаются фильтры различных типов или фазовые звенья, а именно:

полиномиальные ФНЧ —

$$H(\hat{p}) = k\omega_n^2/[\hat{p}^2 + (\omega_n/Q_n)\hat{p} + \omega_n^2], \quad (\text{П4.2})$$

полиномиальные ФВЧ —

$$H(\hat{p}) = k\hat{p}^2/[\hat{p}^2 + (\omega_n/Q_n)\hat{p} + \omega_n^2], \quad (\text{П4.3})$$

полиномиальные ПФ —

$$H(\hat{p}) = k(\omega_n/Q_n)\hat{p}/[\hat{p}^2 + (\omega_n/Q_n)\hat{p} + \omega_n^2], \quad (\text{П4.4})$$

фазовое звено ФЗ —

$$H(p) = k[\hat{p}^2 - (\omega_n/Q_n)\hat{p} + \omega_n^2]/[\hat{p}^2 + (\omega_n/Q_n)\hat{p} + \omega_n^2], \quad (\text{П4.5})$$

РФ или ФНЧ, или ФВЧ с нулем передачи —

$$H(\hat{p}) = k(\hat{p} + \omega_n^2)/[\hat{p}^2 + (\omega_n/Q_n)\hat{p} + \omega_n^2]. \quad (\text{П4.6})$$

Выбор схемы, реализующей ту или иную передаточную функцию, осуществляется прежде всего по добротности ее полюсов. Примем следующую классификацию схем: $Q_n < 2$ — низкодобротные цепи, $2 < Q_n \leq 20$ — среднедобротные цепи, $Q_n > 20$ — высокодобротные цепи. В табл. П4.1 приводятся схемы и расчетные формулы передаточных функций низкодобротных, среднедобротных и высокодобротных звеньев соответственно. Возле каждой схемы (в верхнем левом углу) указан тип звена: ФНЧ — П, ФВЧ — Н и т. д. Буква П означает то, что фильтр полиномиальный, а Н — наличие нуля передачи при $\omega \neq 0$, $\omega \neq \infty$. Буквой У отмечены универсальные схемы, позволяющие реализовать несколько видов передаточных функций. В третьем столбце таблицы приведены коэффициенты передаточной функции, выраженные через элементы схемы, а также некоторые соотношения между элементами.

На входе ряда включено Г-образное звено, состоящее из резисторов R_{11} и R_{12} или из емкостей C_{11} и C_{12} . С помощью этих элементов регулируется постоянный множитель k , который является необязательным параметром, т. е. значением k можно задаваться или не задаваться. Если k не задаемся, то схема реализуется при максимально возможном его значении, которое обозначим k_0 . Если же k задаемся, то не всегда получится реализуемая схема. Чтобы ее получить, необходимо уменьшить значение k .

Ниже приводятся рекомендации по расчету схем, если передаточная функция представлена одним из видов [(П4.1) ... (П4.6)].

Схема 1. Задаемся: C_2, C_4, k . Условие реализуемости: $k \leq 1$, $C_2/C_4 \geq 4Q_n^2$. Расчетные формулы: $R_1 = 1/\omega_n \sqrt{s C_2 C_4}$, $R_3 = s R_1$, $R_{11} = R_1/k$, $R_{12} = R_1/(1 - k)$, где

$$s = \frac{C_2}{4Q_n^2 C_4} - 1 + \sqrt{\left(\frac{C_2}{4Q_n^2 C_4} - 1\right)^2 - 1}.$$

Схема 2. Задаемся: C_2, C_3 и k . Условие реализуемости: $k \leq k_0 = Q_n^2[1 + (C_3/C_2)]$. Расчетные формулы: $R_1 = 1/\omega_n \sqrt{s C_2 C_3}$, $R_4 = s R_1$, $R_{11} = k_0 R_1/|k|$, $R_{12} = k_0 R_1/(k_0 - |k|)$, где $s = Q_n^2[2 + (C_2/C_3) + (C_3/C_2)]$.

Таблица П4.1

№	Схема	Расчетные формулы
ARC-цепи с $Q_n < 2$		
1	<p>ФНЧ-П</p>	$\omega_n^2 = 1/R_1 C_2 R_3 C_4$ $Q_n = \sqrt{R_3 C_2 / R_1 C_4} / (1 + R_3 / R_1)$ $k = R_{12} / (R_{11} + R_{12})$ $1/R_1 = 1/R_{11} + 1/R_{12}$
2	<p>ПФ-П</p>	$\omega_n^2 = 1/R_1 C_2 C_3 R_4$ $Q_n = \sqrt{R_4 C_2 / R_1 C_3} / (1 + C_2 / C_3)$ $k = -R_{12} k_0 / (R_{11} + R_{12})$ $k_0 = Q_n^2 [1 + C_3 / C_2]$ $1/R_1 = 1/R_{11} + 1/R_{12}$
3	<p>ПФ-П</p>	$\omega_n^2 = 1/C_1 R_2 R_3 C_4$ $Q_n = \sqrt{R_3 C_1 / R_2 C_4} / (1 + R_3 / R_2)$ $k = -C_{11} k_0 / (C_{11} + C_{12})$ $C_1 = C_{11} + C_{12}$ $k_0 = Q_n \sqrt{C_1 R_2 / C_4 R_3}$
4	<p>ФВЧ-П</p>	$\omega_n^2 = 1/C_1 R_2 C_3 R_4$ $Q_n = \sqrt{R_4 C_1 / R_2 C_3} / (1 + C_1 / C_3)$ $k = C_{11} / (R_{11} + C_{12})$ $C_1 = C_{11} + C_{12}$
5	<p>ФЗ</p>	$\omega_n^2 = 1/R_4 R_5 C_3 C_5 = 1/R_5 R_6 C_1 C_2$ $Q_n = 1/\omega_n (R_4 C_3 + R_5 C_2)$ $C_5 = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ $R_5 = R_4 + R_6$
6	<p>ФЗ</p>	

№	Схема	Расчетные формулы
7		$\omega_n^2 = 1/R_1 C_2 C_3 R_4$ $Q_n = \sqrt{R_4/R_1} / (\sqrt{C_2/C_3} + \sqrt{C_3/C_2})$ $k = R_6/(R_5 + R_6)$ $2[(1/R_4 C_2) + (1/R_4 C_3)] =$ $= (1/R_1 C_2) (R_6/R_6)$
8		$\omega_n^2 = 1/R_1 C_2 C_3 R_4,$ $Q_n = \sqrt{R_4/R_1} / (\sqrt{C_2/C_3} + \sqrt{C_3/C_2})$ $k = R_6/(R_5 + R_6)$ $(1/R_4 C_2) + (1/R_4 C_3) =$ $= (1/R_1 C_2) (R_6/R_6)$
ARS-цепи с $Q_n \leq 20$		
9		$\omega_n^2 = 1/R_1 C_2 R_3 C_4,$ $Q_n = \sqrt{R_3 C_2 / R_1 C_4} / [1 + (R_3/R_1) -$ $- (R_6 C_2 / R_5 C_4)],$ $k = [R_{12} / (R_{11} + R_{12})] [1 + (R_6/R_5)],$ $R_1 = R_{11} \parallel R_{12}$
10		$\omega_n^2 = 1/R_1 C_2 C_3 R_4,$ $Q_n = \sqrt{R_4 C_2 / R_1 C_3} / [1 + (C_2/C_3) -$ $- (R_4 R_5 / R_1 R_6)],$ $k = [R_{12} / (R_{11} + R_{12})] Q_n [1 +$ $+ (R_5/R_6)] \sqrt{R_4 C_3 / R_1 C_2}$ $R_1 = R_{11} / R_{12}$
11		$\omega_n^2 = 1/C_1 R_2 R_3 C_4,$ $Q_n = \sqrt{C_1 R_3 / C_4 R_2} / [1 + (R_3/R_2) -$ $- (C_1 R_5 / C_4 R_6)],$ $k = [C_{11} / (C_{11} + C_{12})] Q_n [1 +$ $+ (R_5/R_6)] \sqrt{C_1 R_2 / C_4 R_3},$ $C_1 = C_{11} + C_{12}.$
12		$\omega_n^2 = 1/C_1 R_2 C_3 R_4,$ $Q_n = \sqrt{R_4 C_1 / R_2 C_3} / [1 + (C_1/C_3) -$ $- (R_4 R_6 / R_2 R_5)],$ $k = (C_{11}/C_1) [1 + (R_6/R_5)],$ $C_1 = C_{11} + C_{12}.$

№	Схема	Расчетные формулы
13		$\omega_n^2 = 1/R_1 C_2 C_3 R_n,$ $Q_n = \omega_n / [(1/R_n C_2) (R_7/R_6) - (1/R_1 C_2) - (1/R_1 C_3)] =$ $= \omega_n / [(1/R_1 C_2) + (1/R_1 C_3) + (1/R_4 C_2) - (1/R_5 C_2) (R_7/R_6)],$ $R_n = R_4 \parallel R_5.$
14		$\omega_n^2 = 1/R_1 C_2 C_3 R_n = \omega_n^2$ $Q_n = \omega_n / [(1/R_1 C_2) + (1/R_1 C_3) + (1/R_1 C_2) - (1/R_5 C_2) (R_7/R_6)],$ $(1/R_1 C_2) + (1/R_1 C_3) = (1/R_n C_2) \times (R_7/R_6), R_n = R_4 \parallel R_5$
15		$\omega_n^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_3 C_4} \left[\frac{1}{R_5} - \frac{R_7 \cdot R_8}{R_6 R_9 (R_7 + R_8)} \right],$ $\omega_n^2 = \frac{(R_1 + R_2) (R_5 + R_6)}{R_1 R_2 C_3 C_4 R_5 \cdot R_6} (\Phi H \Psi)$ $\omega_n^2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_3 C_4} \left[\frac{1}{R_5} - \frac{R_7 (R_8 + R_9)}{R_6 R_8 R_9} \right],$ $(\Phi B \Psi)$ $Q_n = \frac{\omega_n}{\frac{C_3 + C_4}{C_3 \cdot C_4} \left[\frac{1}{R_5} - \frac{R_7 \cdot R_8}{R_6 R_9 (R_7 + R_8)} \right]} \rightarrow$
16		$\frac{R_7 R_8 (R_1 + R_2)}{C_3 R_1 R_2 R_9 (R_7 + R_8)}$ $\rightarrow \frac{R_8}{R_7 + R_8} \cdot \frac{C_4 + \frac{(C_3 + C_4) (R_5 + R_6)}{R_5 R_6}}{R_2} =$ $= \frac{C_4 R_7 (R_8 + R_9)}{R_1 \cdot R_8 \cdot R_9},$ $\frac{C_4}{R_2} + \frac{C_3 + C_4}{R_5} =$ $= \frac{R_7 (R_8 + R_9)}{R_8 \cdot R_9} \left(\frac{C_4}{R_1} + \frac{C_3 + C_4}{R_6} \right).$

№	Схема	Расчетные формулы
17	<p>РФ ФНЧ-Н ФВЧ-Н</p>	$\omega_n^2 = \frac{1}{R_5 R_6 C_5 C_3} = \frac{1}{R_5 R_7 C_1 C_2},$ $\omega_n = \omega_n \sqrt{\frac{1 + R_5/R_8}{1 + C_4/C_5}},$ $Q_n = \hat{Q} \frac{(1 + C_4/C_5)(\omega_n/\omega_n)}{\hat{Q} (1/R_8 C_5 \omega_n + \dots)} \rightarrow$ $\hat{Q} = \frac{1}{2\sqrt{(1 + C_2/C_1)(1 + C_2/C_3)}},$ $k = \frac{1 + R_{10}/R_9}{1 + C_4/C_5},$ $C_5 = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}, \quad R_5 = R_5 + R_6.$
ARC-цепи с $Q_n > 20$		
18	<p>ФНЧ — П</p>	$\omega_n^2 = R_6/R_2 R_3 R_7 C_1 C_4, \quad Q_n = \omega_n R_1 C_1$ $\kappa = 1 + (R_2/R_6), \quad [\text{Задаем: } C_1 = C_4 = C]$ $R_0 = (\omega_n C)^{-1}, \quad R_2 = R_3 = R_6 = R_7 = R_0, \quad R_1 = Q_n R_0,$ <p>Настройка: $\omega_n \rightarrow R_7, \quad Q_n \rightarrow R_1$</p>
19	<p>ПФ — П</p>	$\omega_n^2 = R_2/R_1 R_4 R_6 C_3 C_8,$ $Q_n = \omega_n R_7 C_8, \quad \kappa = 1 + (R_2/R_6),$ $[\text{Задаем: } C_3 = C_8 = C] \quad R_0 = (\omega_n C)^{-1},$ $R_1 = R_2 = R_4 = R_6 = R_0, \quad R_7 = Q_n R_0,$ <p>Настройка: $\omega_n \rightarrow R_4, \quad Q_n \rightarrow R_7$</p>
20	<p>ФВЧ — П</p>	$\omega_n^2 = R_2/R_1 R_4 R_6 C_3 C_7, \quad Q_n = \omega_n R_8 C_7,$ $\kappa = 1 + (R_2/R_6),$ $[\text{Задаем: } C_3 = C_7 = C] \quad R_0 = 1/\omega_n C,$ $R_1 = R_2 = R_4 = R_6 = R_0, \quad R_8 = Q_n \cdot R_0,$ <p>Настройка: $\omega_n \rightarrow R_4, \quad Q_n \rightarrow R_8.$</p>

№	Схема	Расчетные формулы
21	<p>ФЗ</p>	$\omega_n^2 = R_2 / R_1 R_4 R_5 C_3 C_7,$ $Q_n = \omega_n C_7 R_8, \quad R_2 = R_5,$ <p>Задаем: $C_8 = C_7 = C$ $R_0 = 1 / \omega_n C,$</p> $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R_0, \quad R_8 = Q_n \cdot R_0$
ARC-цепи с $Q_n > 0$		
22	<p>ФВЧ-Н</p>	$\omega_n^2 = R_3 / R_1 R_4 R_5 C_2 C_7,$ $\omega_n = \omega_n \sqrt{1 - (R_1 R_4 / R_3 R_8)},$ $Q_n = \omega_n C_7 R_8. \quad \text{Задаем: } C_2 = C_7 = C$ $R_0 = 1 / \omega_n C, \quad R_1 = R_3 = R_0, \quad R_8 = Q_n R_0,$ $R_4 = R_4 = R_8 [1 - (\omega_n^2 / \omega_n^2)], \quad R_5 = R_0^2 / R_4.$ <p>Настройка: $\omega_n \rightarrow R_4, \quad \omega_n \rightarrow R_5, \quad Q_n \rightarrow R_8$</p>
23	<p>ФНЧ-Н</p>	$\omega_n^2 = R_3 / R_1 R_4 R_5 C_2 C_7,$ $\omega_n = \omega_n \sqrt{1 + (R_4 / R_8)},$ $Q_n = \omega_n R_7 R_8. \quad \text{Задаем: } C_2 = C_7 = C$ $R_0 = 1 / \omega_n C, \quad R_1 = R_3 = R_0, \quad R_8 = Q_n R_0,$ $R_4 = R_8 [(\omega_n^2 / \omega_n^2) - 1], \quad R_5 = R_0^2 / R_4.$ <p>Настройка: $\omega_n \rightarrow R_4, \quad \omega_n \rightarrow R_5, \quad Q_n \rightarrow R_8$</p>
24	<p>РФ</p>	$\omega_n^2 = R_2 / R_1 R_4 R_5 C_3 C_7, \quad R_2 R_7 = R_5 R_8$ $Q_n = \omega_n C_7 [R_7 R_8 / (R_7 + R_8)].$ <p>Задаем: $C_3 = C_7 = C$ $R_0 = 1 / \omega_n C,$</p> $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R_0,$ $R_7 = R_8 = 2 Q_n R_0$ <p>Настройка: $\omega_n \rightarrow R_4, \quad N(\omega_n) = 0$ и $Q_n \rightarrow R_7$ и R_8</p>
25		$\omega_n^2 = R_4 / R_3 R_5 R_7 C_6 C_8,$ $Q_n = [(1 + R_2 / R_1) / (1 + R_4 / R_3)] \times$ $\times \sqrt{R_4 \cdot R_5 C_6 / R_3 R_7 C_8},$ $\kappa_{\text{вч}} = (1 + R_4 / R_3) / (R_1 / R_2 + 1),$ $\kappa_{\text{нч}} = R_2 / R_1,$ $\kappa_{\text{ср}} = (R_3 / R_4 + 1) / (R_1 / R_2 + 1),$ <p>Задаем: $C_6 = C_8 = C$ $R_0 = 1 / \omega_n C,$</p> $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = R_7 = R_0,$ $R_2 = R_0 \{ Q_n [(1 + R_4 / R_0) / \sqrt{R_4 / R_0}] - 1 \},$ <p>Настройка: $\omega_n \rightarrow R_4, \quad Q_n \rightarrow R_2$</p>

№	Схема	Расчетные формулы
26		$\omega_n^2 = R_6 / R_2 R_5 R_7 C_3 C_6$, $Q_n = R_4 C_3 \omega_n$, $\kappa_{пп} = R_4 / R_1$, $\kappa_{нч1} = R_2 R_7 / R_1 R_8$, $\kappa_{нч2} = R_2 / R_1$, Задаем: $C_3 = C_6 = C, \kappa$ $R_0 = 1 / \omega_n C$, $R_2 = R_5 = R_7 = R_8 = R_0$, $R_4 = Q_n R_0$, $I. R_1 = R_7 / \kappa$, $\kappa_{нд} = \kappa$, $\kappa_{нч1} = \kappa_{нч2} = R_2 / R_1$, $II. R_1 = R_2 / \kappa$, $\kappa_{нф} = R_4 / R_1$, $\kappa_{нч1} = \kappa_{нч2} = \kappa$.

Схема 3. Задаем: $C_1 = C_{11} + C_{12}$, C_4 , κ . Условие реализуемости: $\kappa \leq \kappa_0$, $C_1/C_4 \geq 4Q_n^2$. Расчетные формулы: $R_2 = 1/\omega_n \sqrt{s C_1 C_4}$, $R_3 = s R_2$, где $s = C_1/4Q_n^2 C_4 - 1 + \sqrt{(C_1/4Q_n^2 C_4 - 1)^2 - 1}$. Если $\kappa < \kappa_0 = Q_n \sqrt{C_1 R_2 / C_4 R_3}$, то $C_{11} = \kappa C_1 / \kappa_0$, $C_{12} = C_1(\kappa_0 - \kappa)/\kappa_0$, если $\kappa \geq \kappa_0$, то $\kappa = \kappa_0$, $C_{11} = C_1$, $C_{12} = 0$.

Схема 4. Задаем: $C_1 = C_{11} + C_{12}$, C_3 , κ . Условие реализуемости: $\kappa \leq 1$. Расчетные формулы: $R_2 = 1/\omega_n \sqrt{s C_1 C_3}$, $R_4 = s R_2$, $C_{11} = \kappa C_1$, $C_{12} = C_1(\kappa - 1)$, где $s = -Q_n^2[2 + (C_1/C_3) + (C_3/C_1)]$.

Схемы 5 и 6. Особенности: реализуются только функции, у которых $Q_n = 0.5$. Схема рис. 6 инвертирует напряжение, рис. 5 — нет. При заданных C_1 , C_2 и C_3 для остальных элементов существует два решения. Выбирается то решение, которое приводит к меньшему разбросу номиналов элементов. Задаем: C_1 , C_2 , C_3 . Условие реализуемости $s = 1 - 4Q_n(C_1 + C_2)(C_2 + C_3)/C_1 C_2 > 0$. Расчетные формулы: $R_4 = (1 \pm \sqrt{s})/2\omega_n^2 Q_n(C_2 + C_3)$, $R_5 = (C_1 + C_2)/R_4 \omega_n^2 C_1 C_2 C_3$, $R_6 = 1/\omega_n^2 C_1 C_2(R_4 + R_5)$.

Схема 7. Задаем: C_2 , C_3 , R_6 . Расчетные формулы: $R_1 = 1/\omega_n \sqrt{s C_2 C_3}$, $R_4 = s R_1$, $R_5 = 2R_6[1 + C_2/C_3]/s$, $\kappa = R_6/(R_5 + R_6)$, где $s = Q_n^2[2 + (C_2/C_3) + (C_3/C_2)]$.

Схема 8. Задаем: C_2 , C_3 , R_6 . Расчетные формулы: $R_1 = 1/\omega_n \sqrt{s C_2 C_3}$, $R_4 = s R_1$, $R_5 = R_6[1 + C_2/C_3]/s$, где $s = Q_n^2[2 + (C_2/C_3) + (C_3/C_2)]$.

Схема 9. Особенности: условия реализуемости являются громоздкими, однако при $Q_n > 2$ и $C_2 = C_4$ они, как правило, выполняются. Условия реализуемости: $\sqrt{C_4/C_2} > \sqrt{s/(1+s)} Q_n$, $\kappa \leq \kappa_0 = 1 + R_6/R_5$, где $s = (C_2/36Q_n^2 C_4)[\sqrt{1 + 12Q_n^2(1 + C_4/C_2)} + 1]^2$. Задаем: C_2 , C_4 , R_5 , κ . Расчетные формулы: $R_1 = 1/\omega_n \sqrt{s C_2 C_4}$,

$R_3 = s R_1$, $R_6 = \left[\frac{C_4(1+s)}{C_2} - \sqrt{\frac{s C_4}{C_2} \frac{1}{Q_n}} \right] R_5$, $\kappa_0 = 1 + \frac{R_6}{R_5}$. Если $\kappa < \kappa_0$, то $R_{11} = R_1 \kappa_0 / \kappa$, $R_{12} = R_1 \kappa_0 / (\kappa_0 - \kappa)$; если $\kappa > \kappa_0$, то $\kappa = \kappa_0$, $R_{12} = \infty$, $R_{11} = R_1$. Настройка: ω_n — резистором R_3 , Q_n — резистором R_6 .

Схема 10. Условие реализуемости: $Q_n/\sqrt{s} > \sqrt{C_2 C_3}/(C_2 + C_3)$, $\kappa \leq \kappa_0$, где $s = (C_2/4Q_n^2 C_3)[\sqrt{1 + 12Q_n^2(1 + C_3/C_2)} - 1]^2$. Задаем: C_2 , C_3 , R_6 , κ . Расчетные формулы: $R_1 = 1/\omega_n \sqrt{s C_2 C_3}$, $R_4 = s R_1$, $R_5 = R_6[(1/s)(1 + C_2/C_3) - \sqrt{C_2/s C_3}(1/Q_n)]$, $\kappa_0 = Q_n(1 + R_5/R_6)\sqrt{s C_3/C_2}$. Если $\kappa \leq \kappa_0$, то $R_{11} = \kappa_0 R_1 / \kappa$, $R_{12} = \kappa_0 R_1 / (\kappa_0 - \kappa)$; если $\kappa > \kappa_0$ или κ — не задан, то $R_{11} = R_1$, $R_{12} = \infty$. Настройка: ω_n — резистором R_4 , Q_n — резистором R_5 .

Схема 11. Условие реализуемости: $Q_n(1+s)/\sqrt{s} > \sqrt{C_1/C_4}$, $\kappa < \kappa_0$, где $s = (C_1/36Q_n^2 C_4)[\sqrt{1 + 12Q_n^2(1 + C_4/C_1)} + 1]^2$. Задаем: C_1 , C_4 , R_6 , κ . Расчетные

формулы: $R_2 = 1/\omega_n \sqrt{s C_1 C_4}$, $R_3 = s R_2$, $R_5 = R_6 [C_4/C_1(1+s) - \sqrt{s C_4/C_1/Q_n}]$, $\kappa_0 = Q_n [1 + (R_5/R_6)] \sqrt{C_1/s C_4}$. Если $\kappa < \kappa_0$, то $C_{11} = \kappa C_1/\kappa_0$, $C_{12} = C_1 - C_{11}$; если $\kappa \geq \kappa_0$, то $\kappa = \kappa_0$, $C_{11} = C_1$, $C_{12} = 0$. Настройка: ω_n — резистором R_2 или R_3 , Q_n — резистором R_5 .

Схема 12. Условие реализуемости $Q_n/\sqrt{s} > \sqrt{C_1 C_3/(C_1 + C_3)}$, $\kappa < \kappa_0$, где $s = (C_1/4Q_n^2 C_3) [\sqrt{1 + 12Q_n^2(1 + C_3/C_1)} - 1]^2$. Задаемся: C_1 , C_3 , κ , R_5 . Расчетные формулы: $R_2 = 1/\omega_n \sqrt{s C_1 C_3}$, $R_4 = s R_2$, $R_6 = R_5 [1 + C_1/C_3]/s + \sqrt{C_1/s C_3/Q_n}$, $\kappa_0 = 1 + R_6/R_5$. Если $\kappa < \kappa_0$, то $C_{11} = \kappa C_1/\kappa_0$, $C_{12} = C_1 - C_{11}$; если $\kappa \geq \kappa_0$, то $\kappa = \kappa_0$, $C_{11} = C_1$, $C_{12} = 0$. Настройка: ω_n — резистором R_2 или R_4 , Q_n — резистором R_6 .

Схема 13. Условие реализуемости: $s > 0$, $Q_n^2(1 + R_7/R_6) > 4sx$, где $x = C_2/C_3$, $s = A[\sqrt{1 + A^{-2}/3(1+x)^2} - 1]$, $A = [2Q_n^2(1+x) - x]/6Q_n^2(1+x)^2$. Расчетные формулы: $R_1 = 1/\omega_n \sqrt{s C_2 C_3}$, $R_n = s R_1$, $R_7 = R_6 [s(1+x) + \sqrt{sx/Q_n}]$, $\alpha = 1 - 2\sqrt{sx/Q_n^2(1 + R_7/R_6)}$, $R_5 = R_n/\alpha$, $R_4 = R_n/(1-\alpha)$. Настройка: ω_n — резистором R_1 , $|H(j\omega_n)| = 1$ — резистором R_4 , Q_n — резистором R_7 .

Схема 14. Условие реализуемости $4Q_n > x/(1+x)$, где $x = C_2/C_3$. Задаемся: C_2 , C_3 , R_6 . Расчетные формулы: $R_1 = 1/\omega_n \sqrt{C_2 C_3 s}$, $R_n = s R_1$, $R_7 = R_6/3$, $\alpha = 1 - \sqrt{x/4Q(1+x)}$, $R_4 = R_n/(1-\alpha)$, $R_5 = R_n/\alpha$, где $s = 1/3(1+x)$. Настройка: ω_n — резистором R_1 , $|H(j\omega_n)| = 0$ — резистором R_4 , Q_n — резистором R_7 .

Схема 15. Условие реализуемости: $\kappa \leq \kappa_0$, $\kappa < 1$. Задаемся: C_3 , C_4 , κ , R_9 , $0, 1 \leq s < 0,3$. Расчетные формулы: $G = (C_3 \omega_n / 2s Q_n) [\sqrt{1 + 4Q_n^2 s(1 + C_4/C_3)} - 1]$, $\kappa_0 = (1+s)/[1 + (1 + C_4/C_3)\omega_n^2(C_3^2/G^2)]$, $R_6 = G(1+s)(1 - \kappa^{-1})/C_3 C_4(\omega_n^2 - \omega_n^2)$. Если $\kappa < \kappa_0$, то $R_1 = \kappa_0/G\kappa$, $R_2 = \kappa_0/G(\kappa_0 - \kappa)$; если $\kappa \geq \kappa_0$, то $\kappa = \kappa_0$, $R_1 = 1/G$, $R_2 = \infty$, $R_5 = R_6 G/(C_3 C_4 R_6 \omega_n^2 + Gs)$, $R_7 = s R_9/\kappa$, $R_8 = s R_9/(1 - \kappa)$.

Схема 16. См. схему 15 за исключением $R_6 = G(1+s)/C_3 C_4(\omega_n^2 - \omega_n^2)$.

Схема 17. Условие реализуемости $C_4 \geq |(\omega_n^2/\omega_n^2) - 1|C_s$, где $C_s = C_1 C_2/(C_1 + C_2)$. Задаемся C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , R_9 . Расчетные формулы: $s = 1/2\sqrt{(1 + C_2/C_1)(1 + C_2/C_3)}$,

$$R_5 = 1/2\omega_n s(C_2 + C_3), H = |\omega_n^2(1 + C_4/C_s)/\omega_n^2 - 1|,$$

$$R_8 = (R_5 + R_6)/H \text{ (при } H=0, R_8=\infty),$$

$$R_6 = (1 + C_2/C_1)/R_5 \omega_n^2 C_2 C_3, R_s = R_5 + R_6,$$

$$R_7 = (\omega_n^2 C_1 C_2 R_s)^{-1},$$

$$R_{10} = R_9 s [(R_8 C_s \omega_n)^{-1} + R_s C_4 \omega_n - \omega_n (1 + C_4/C_s)/\omega_n s].$$

Формулы для расчета элементов схем 18...26 даны непосредственно в табл. П4.1.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА I

1.3. При согласном выборе положительных направлений напряжения и тока:

$$\begin{aligned} \text{а) } u_L(t) &= \omega L I_m \sin 2\omega t, \quad p(t) = I_m^2 \omega L \sin^2 \omega t \sin 2\omega t; \quad \text{б) } u_L(t) = \frac{I_0 L}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}}, \quad p(t) = \\ &= \frac{I_0^2 L}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}); \quad \text{в) } u_L(t) = \begin{cases} -\frac{2I_0 L}{t_0}, & 2kt_0 \leq t < (2k+1)t_0, \\ \frac{2I_0 L}{t_0}, & (2k+1)t_0 \leq t < 2(k+1)t_0, \end{cases} \quad p(t) = \\ &= \frac{2I_0^2 L}{t_0} \left[\frac{2}{t_0} (t - kt_0) - 1 \right], \quad kt_0 \leq t < (k+1)t_0. \end{aligned}$$

1.4. При согласном выборе положительных направлений напряжения и тока: а) $u_R(t) = I_m R \sin^2 \omega t$, $p(t) = I_m^2 R \sin^4 \omega t$; б) $u_R(t) = I_0 R (1 - e^{-t/\tau_0})$, $p(t) = I_0^2 R (1 - e^{-t/\tau_0})^2$, $t > 0$, $\tau_0 > 0$; в) $u_R(t) =$

$$= \begin{cases} -\frac{2I_0 R}{t_0} (t - 2kt_0) + I_0 R, & 2kt_0 \leq t < (2k+1)t_0, \\ \frac{2I_0 R}{t_0} [t - (2k+1)t_0] - I_0 R, & (2k+1)t_0 \leq t < 2(k+1)t_0, \end{cases} \quad p(t) = I_0^2 R \left[\frac{2}{t_0} (t - \right.$$

$\left. - kt_0) - 1 \right]^2$, $kt_0 \leq t < (k+1)t_0$. 1.5. При согласном выборе положительных направлений напряжения и тока: а) $i_C(t) = 3U_0 \omega C \sin^2 \omega t \cos \omega t$, $p(t) = 3U_0^2 \omega C \sin^5 \omega t \cos \omega t$,

$$\omega(t) = 0,5 U_0^2 C \sin^6 \omega t. \quad \text{б) } i_C(t) = \frac{U_0 C}{2\tau_0} e^{-\frac{t}{2\tau_0}}, \quad p(t) = \frac{U_0^2 C}{2\tau_0} e^{-\frac{t}{2\tau_0}} (1 - e^{-\frac{t}{2\tau_0}}), \quad \omega(t) = \frac{U_0^2 C}{2} (1 - e^{-t/2\tau_0})^2.$$

1.6. При согласном выборе положительных направлений напряжения и тока: а) $u_R(t) = \frac{U_0}{R} \sin^3 \omega t$, $p(t) = \frac{U_0^3}{R} \sin^6 \omega t$; б) $i_R(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{t}{2\tau_0}})$,

$$p(t) = \frac{U_0^2}{R} (1 - e^{-\frac{t}{2\tau_0}})^2. \quad 1.7.^1 \text{ Графики } u_R(t) \text{ показаны на рис. О.1.1, а г.} \quad 1.8.^1$$

Графики $u_L(t)$ показаны на рис. О.1.2.

1.9¹. Графики тока в емкости и напряжения на индуктивности качественно совпадают (рис. О.1.2).

1.10. а) емкость, встречные направления; б) резистор, встречные направления; в) емкость, согласные направления; г) индуктивность, согласные направления.

1.11. $u < 0$, $du/dt > 0$. 1.12. а) источники напряжения; б) источники тока. 1.13. Примеры деревьев: Д1 {B1, B2, B3}; Д2 {B1, B2, B4}; Д3 {B1, B2, B5}; Д4 {B1, B2, B6}; Д5 {B1, B3, B5} и т. д. Примеры сечений: С1 {B1, B4, B6}; С2 {B3, B4, B5, B6}; С3 {B1, B2, B3, B6}; С4 {B1, B2, B4, B5} и т. д. Здесь нумерация ветвей графа соответствует нумерации ветвей схемы рис. 1.5. 1.15. $N_{г.к} = N_* - N_y + 1$; $N_{г.с} = N_y - 1$.

¹ Сплошной линией показаны временные зависимости при согласном выборе положительных направлений напряжения и тока, а штриховой — при встречном.

Рис. 01.1

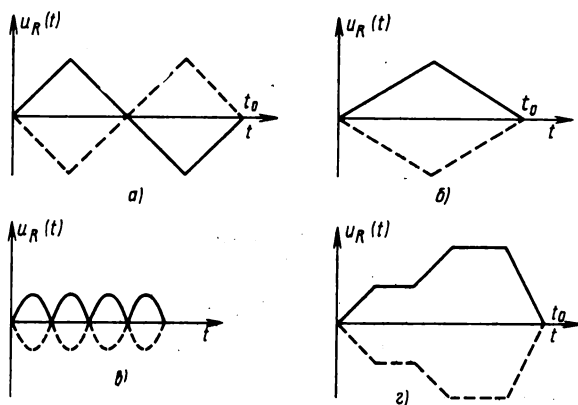
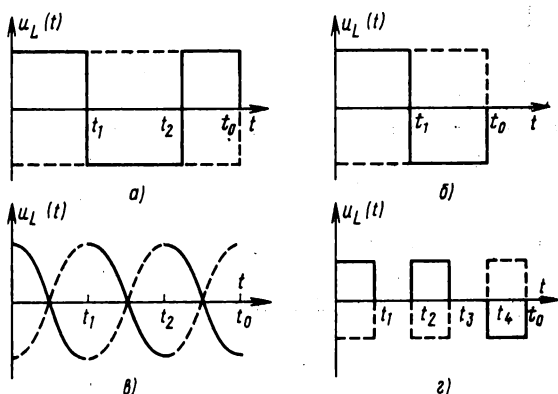


Рис. 01.2



1.16. B1 B2 B3 B4 B5 B6

$$\begin{array}{l} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \\ Y4 \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} +1 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Ответ дан для матрицы A_n . Матрица A получается из A_n путем вычеркивания любой строки. Нумерация узлов, ветвей и направление ветвей графа выбрано такое же, как и в схеме рис. 1.5. 1.17. Ответ дан для матриц A_n . Матрицы A получаются из A_n путем вычеркивания любой строки:

а) B1 B2 B3 B4 B5

$$\begin{array}{l} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \\ Y4 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccc} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & -1 \end{array} \right\|;$$

б) B1 B2 B3 B4 B5 B6 B7 B8 B9

$$\begin{array}{l} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \\ Y4 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccccccc} +1 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & +1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 \end{array} \right\|;$$

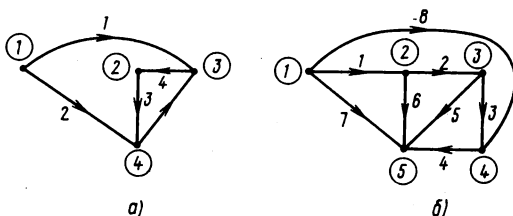


Рис. 01.3

в)

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
Y1	-1	+1	+1	0	0	0	0	0
Y2	0	0	-1	-1	+1	0	0	0
Y3	0	0	0	0	-1	-1	0	+1
Y4	+1	0	0	0	0	0	+1	-1
Y5	0	-1	0	+1	0	+1	-1	0

г)

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9
Y1	+1	-1	+1	0	0	0	0	0	0
Y2	0	+1	0	-1	+1	+1	0	0	0
Y3	-1	0	0	0	-1	0	+1	+1	0
Y4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	+1
Y5	0	0	-1	+1	0	0	-1	0	-1

1.18. Подграфы б) и г) являются деревьями. Остальные нет: в) не выполняется условие связности; д) не содержит всех узлов; е) содержит замкнутый путь.

1.19. Совокупности ветвей 1), 3), 4), 5) являются сечениями. Остальные нет: 2) содержит лишние ветви; 6) удаление ветвей не приводит к разбиению графа на две части. 1.20. а) C1 {B1, B8, B9}; C2 {B2, B6, B9}; C3 {B3, B4, B9}; C4 {B4, B5, B6}; C5 {B6, B7, B8}; K1 {B1, B7, B8}; K2 {B2, B5, B6, B7}; K3 {B3, B4, B5}; K4 {B1, B2, B3, B9}; б) C1 {B6, B7, B8}; C2 {B1, B6, B7, B9}; C3 {B2, B6, B9}; C4 {B3, B5, B6, B9}; C5 {B4, B5, B6}; K1 {B1, B7, B8}; K2 {B1...B4, B6, B8}; K3 {B3, B4, B5}; K4 {B1, B2, B3, B9}.

1.21. а) рис. 01.3, а; б) рис. 01.3, б.

1.22. $N_n = 0,5 N_y (N_y - 1)$; $N_{г.к} = 0,5 (N_y - 1) (N_y - 2)$.

ГЛАВА 2

2.2. а) $i_1 - i_6 - i_8 = 0$,
 $-i_2 + i_3 - i_3 = 0$,
 $i_4 + i_5 + i_6 + i_9 = 0$,
 $-i_{13} - i_5 + i_7 = 0$,
 $-i_7 + i_8 - i_9 = 0$;

б) $i_1 - i_5 - i_{11} = 0$,
 $-i_2 + i_3 - i_4 + i_8 = 0$,
 $i_6 - i_7 - i_{10} = 0$,
 $-i_1 + i_2 + i_7 = 0$,
 $-i_9 + i_{10} + i_{11} = 0$;

в) $i_1 + i_4 - i_8 = 0$,
 $-i_2 - i_3 + i_7 = 0$,
 $i_5 + i_6 - i_{11} = 0$,
 $-i_9 + i_{10} + i_{11} = 0$,
 $i_3 - i_4 - i_5 + i_9 = 0$;

г) $-i_1 - i_2 + i_9 = 0$,
 $i_1 - i_6 + i_7 = 0$,
 $i_3 + i_8 - i_4 = 0$,
 $-i_7 - i_8 - i_9 + i_{10} = 0$,
 $i_5 + i_6 - i_{10} = 0$.

2.3. а) $u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_6 = 0$,
 $-u_3 + u_4 + u_5 - u_{12} - u_{13} = 0$,
 $u_6 - u_7 - u_8 - u_9 = 0$,
 $-u_5 + u_9 - u_{10} - u_{11} = 0$;

б) $-u_1 + u_{12} + u_2 + u_3 - u_5 = 0$,
 $-u_1 + u_{12} + u_7 - u_6 + u_4 + u_3 - u_5 = 0$,
 $-u_4 + u_6 + u_{10} - u_9 - u_8 = 0$,
 $u_5 - u_3 - u_4 + u_6 + u_{10} + u_{11} = 0$;

в) $u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0$,
 $-u_3 + u_5 - u_6 - u_7 = 0$,
 $-u_4 + u_5 + u_{11} - u_{10} + u_8 = 0$,
 $u_5 + u_{11} - u_9 = 0$;

г) $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + u_6 = 0$,
 $u_6 + u_7 + u_{10} = 0$,
 $u_2 - u_3 + u_8 - u_9 = 0$,
 $u_4 - u_5 - u_{10} - u_8 = 0$.

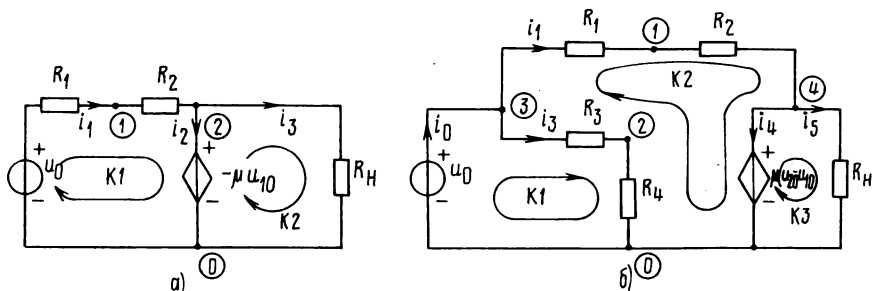


Рис. 02.1

2.4. Контуры для схем а), б) и в) образуют систему главных контуров на основе деревьев: а) {B3...B6, B9}; б) {B1, B12, B5, B3, B4, B6, B10}; в) {B3, B4, B5, B11}. Для случая г) невозможно выбрать соответствующее дерево, однако система уравнений ЗНК является линейно-независимой, так как в качестве контуров выбраны ячейки планарной схемы. 2.9. Ответ не является единственным. Приведены для каждого источника тока по одному возможному ответу:

а) $u_5 = -u_4 + u_3 + u_{13} + u_{12}$, $u_8 = -u_9 + u_6 - u_7$; б) $u_8 = -u_4 + u_6 + u_{10} - u_9$; в) $u_3 = u_4 - u_1 + u_2$, $u_9 = u_5 + u_{11}$; г) $u_5 = -u_{10} - u_8 + u_4$, $u_6 = -u_{10} - u_7$.

2.10. а) $i_4 = i_3$; б) $i_1 = i_{12}$, $i_5 = i_3$, $i_6 = i_4$, $i_9 = i_8$, $i_{10} = i_6 - i_7$; в) $i_1 = i_2$, $i_4 = i_8 - i_1$, $i_5 = i_3 - i_4 + i_9$, $i_6 = -i_7$, $i_{10} = i_8$, $i_{11} = i_9 - i_{10}$; г) $i_1 = i_6 - i_7$, $i_2 = i_3$, $i_4 = i_5$.

2.11. $u = u_0 - R_{\Gamma} i$. 2.12. $i = i_0 - u/R_{\Gamma}$. 2.13. $u_0 = u_x$, $i_0 = i_k$, $R_{\Gamma} = u_x/i_k$ (u_x — напряжение холостого хода ($R_H = \infty$), i_k — ток короткого замыкания ($R_H = 0$)).

2.14. $N_{\Gamma K} = 0,5 (N_Y - 1) (N_Y - 2)$. 2.16. а) рис. 0.2.1, а — $-i_0 + i_1 + i_2 + i_3 = 0$, $u_1 + u_2 - \mu u_{10} - u_0 = 0$, $u_n + \mu u_{10} = 0$; б) рис. 0.2.1, б — $-i_0 + i_1 + i_3 = 0$, $-i_1 + i_4 + i_5 = 0$, $u_3 + u_4 - u_0 = 0$, $u_1 + u_2 + \mu(u_{20} - u_{10}) - u_4 - u_3 = 0$, $-\mu(u_{20} - u_{10}) + u_n = 0$.

2.17. Источники u_0 — независимые; u_8 — источник напряжения, управляемый током; i_n — источник тока, управляемый током. а) $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$, $-i_3 + i_4 + i_5 = 0$, $-i_2 - i_4 + i_7 = 0$, $u_1 + u_2 + u_7 - u_0 = 0$, $-u_2 + u_3 + u_4 = 0$, $u_5 - u_8 + u_6 - u_7 - u_4 = 0$; б) $-i_1 + i_2 + i_5 = 0$, $-i_2 + i_3 + i_4 + i_8 = 0$; $-i_4 - i_5 - i_8 + i_6 = 0$, $u_1 + u_2 + u_3 - u_0 = 0$, $u_7 + u_5 + u_8 - u_2 = 0$, $u_8 + u_4 = 0$, $-u_3 + u_4 + u_6 = 0$.

2.19. Алгебраическая сумма токов ветвей сечения равна нулю. 2.20. При параллельном соединении резисторов общая проводимость равна сумме проводимостей

резисторов, составляющих это соединение, т. е. $G_{\Sigma} = \sum_{i=1} G_i$. 2.22. $i_c = C du_c / dt$;

$u_L = L di_L / dt$; $i = Gu$. 2.25. Каждая из указанных ветвей заменяется источником

тока. 2.26. $i = \frac{u_0}{R} - i_0$. 2.27. $u_n = Ri_0 + u_0$. 2.28. $u_1 = i_0 R_1 + u_0$; $u_2 = i_0 R_1 - u_0$.

2.29. в) $u_x = i_0 R_1 + u_0$, $R_{\Sigma K} = R_1$; г) $u_x = i_0 R_1 - u_0$, $R_{\Sigma K} = R_1 + R_2$. 2.32. а) R ; б) R ;

в) холостой ход; г) короткое замыкание. 2.33. $u_2 = R_2 R_4 U_0 / R_3 R_5$. 2.34. $R_{\Sigma K} = -R_1 R_2 / R_3$. 2.35. $u_0 = R_1 R_2 C_3 \frac{di_0}{dt}$.

ГЛАВА 3

3.1. а) 4600 Ом; б) 470,6 Ом; в) 1888,9 Ом; г) 1130,4 Ом; д) 1000 Ом; е) 470,6 Ом. 3.2. а) 311,7 Ом; б) 2888,9 Ом; в) 1310,6 Ом; г) 1368,9 Ом; д) 2600 Ом; е) 651,4 Ом; ж) 1285,7 Ом; з) 701,5 Ом. 3.3. 16; 0,3; 1/3; 0,5; 0,75; 5/6; 1; 1,2; 4/3; 2; 2,2; 2,75; 3; 10/3; 4; 5; 6. 3.5. а) $R_{x1} = 3300$ Ом, $R_{k1} = 2980$ Ом, $R_{x2} = 2000$ Ом, $R_{k2} = 1806,1$ Ом; б) $R_{x1} = 606,1$ Ом, $R_{x1} = 1111,1$ Ом, $R_{k2} = 480$ Ом, $R_{x2} = 880$ Ом; в) $R_{x1} = 1914,3$ Ом, $R_{k1} = 187,4$ Ом, $R_{x2} = 1817,1$ Ом, $R_{k2} = 177,9$ Ом; г) $R_{x1} = 1148,9$ Ом, $R_{k1} = 970,8$ Ом, $R_{x2} = 787,2$ Ом, $R_{k2} = 665,2$ Ом; д) $R_{x1} = 4500$ Ом, $R_{k1} = 3647,4$ Ом, $R_{x2} = 3800$ Ом, $R_{k2} = 3080$ Ом; е) $R_{x1} =$

$= 2685,7 \text{ Ом}, R_{k1} = 2676,7 \text{ Ом}, R_{x2} = 1842,9 \text{ Ом}, R_{k2} = 1836,7 \text{ Ом}; \text{ ж) } R_{x1} = 956,8 \text{ Ом}, R_{k1} = 699,6 \text{ Ом}, R_{x2} = 675 \text{ Ом}, R_{k2} = 493,5 \text{ Ом}. 3.6. R_{\text{вх}} = 6 \text{ при } k = 1, 2, 3, 5; R_{\text{вх}} = 10 \text{ при } k = 4. 3.7. \text{ а) } i_1 = i_2 = i = u/(R_1 + R_2), u_1 = iR_1; u_2 = iR_2; \text{ б) } i_1 = i_2 = i, u_1 = iR_1, u_2 = iR_2, u = u_1 + u_2 = i(R_1 + R_2); \text{ в) } u_1 = u = iR_1 R_2 / (R_1 + R_2), i_1 = iR_2 / (R_1 + R_2) = u/R_1, i_2 = \frac{iR_1}{(R_1 + R_2)} = \frac{u}{R_2}; \text{ г) } u_1 =$

$= u_2 = u, i_1 = u/R_1, i_2 = u/R_2, i = i_1 + i_2 = u(R_1 + R_2) / R_1 R_2. 3.9. \text{ а) } i_1, i_2, u_1, u_2 \text{ — уменьшаются; б) } i_1, u_1 \text{ — увеличатся, } u_2, i_2 \text{ — уменьшаются. 3.10. а) } i_1, i_2, u_1, u_2 \text{ — не изменятся, } u \text{ — увеличится; б) } i_1, u_1 \text{ — не изменятся, } i_2, u_2, u \text{ — уменьшаются. 3.11. а) } i_1, u \text{ — увеличатся, } i_2 \text{ уменьшится; б) } i_1, i_2, u \text{ — уменьшаются. 3.12. } i_1, u_1 \text{ — не изменятся, } i, i_2, u_2 \text{ — уменьшаются; б) } i_1, i_2, u_1, u_2 \text{ — не изменятся, } i \text{ — увеличится. 3.13. } R_1 = 993750 \text{ Ом}, R_2 = 6250 \text{ Ом}. 3.14. } R_1 = R_2 = 125 \text{ кОм}, R_3 = 50 \text{ кОм}, R_4 = 75 \text{ кОм}, R_5 = R_6 = 62,5 \text{ кОм}. 3.15. } 9,99 \text{ МОм}; 4,99 \text{ МОм}; 2,49 \text{ МОм}. 3.16. } 0,751 \text{ Ом}; 0,15 \text{ Ом}; 0,075 \text{ Ом}. 3.17. \text{ Цепь является уравновешенной мостовой. 3.18. } R_1 = 50 \text{ Ом}, R_2 = 100 \text{ Ом}. 3.19. } R_1 = 1,25 \text{ кОм}, R_2 = 4 \text{ кОм}, R_0 = 1 \text{ кОм}. 3.23. } i = 15 \text{ мА}, i_{12} = 10 \text{ мА}, i_{24} = i_{34} = 7,5 \text{ мА}, i_{13} = 5 \text{ мА}, i_{23} = 2,5 \text{ мА}, 3.24. } 40 \text{ мА}, 110 \text{ мА}, 10 \text{ мА}, 50 \text{ мА}, 100 \text{ мА}, 30 \text{ мА}, 80 \text{ мА}, 70 \text{ мА}. 3.25. } 13,2 \text{ мА}. 3.26. } 18 \text{ мА}. 3.28. \text{ а) } i_1 = 25,11 \text{ мА}, i_2 = 6,09 \text{ мА}, i_4 = 19,02 \text{ мА}, i_5 = 30,98 \text{ мА}, i_7 = 56,09 \text{ мА}, u_1 = 3,01 \text{ В}, u_2 = 0,49 \text{ В}, u_4 = 3,8 \text{ В}, u_5 = 6,82 \text{ В}, u_8 = 4,82 \text{ В}; б) } i_1 = i_2 = 20 \text{ мА}, i_3 = i_4 = 60 \text{ мА}, i_7 = 0; u_1 = 3 \text{ В}, u_2 = 6 \text{ В}, u_3 = 6 \text{ В}, u_4 = 3 \text{ В}, u_8 = 10 \text{ В}; в) } i_1 = 10 \text{ мА}, i_2 = 11,74 \text{ мА}, i_3 = 21,74 \text{ мА}, i_4 = 28,26 \text{ мА}, u_1 = 0,7 \text{ В}, u_2 = 1,17 \text{ В}, u_3 = 2,83 \text{ В}, u_6 = 3,52 \text{ В}, u_7 = 2,47 \text{ В}; г) } i_1 = 35,55 \text{ мА}, i_2 = 11,82 \text{ мА}, i_3 = 8,18 \text{ мА}, i_4 = 22,73 \text{ мА}, i_6 = 52,73 \text{ мА}, i_7 = 44,55 \text{ мА}, u_1 = 3,45 \text{ В}, u_2 = 1,18 \text{ В}, u_3 = 1,64 \text{ В}, u_4 = 4,55 \text{ В}, u_8 = 0,36 \text{ В}, u_9 = 4,64 \text{ В}. 3.29. \text{ а) } i_1 = 1,5 \text{ мА}, i_2 = 8,5 \text{ мА}, i_3 = 3,5 \text{ мА}, i_4 = 6,5 \text{ мА}, u_1 = 1,5 \text{ В}, u_2 = 17 \text{ В}, u_3 = 10,5 \text{ В}, u_4 = 26 \text{ В}, u_5 = 15,5 \text{ В}, u_6 = 26,5 \text{ В}; б) } i_1 = 7,14 \text{ мА}; i_2 = 7,86 \text{ мА}, i_3 = 15 \text{ мА}, i_4 = 2,14 \text{ мА}, u_1 = 7,14 \text{ В}, u_2 = 15,71 \text{ В}, u_3 = 45 \text{ В}, u_4 = 8,57 \text{ В}, u_5 = 52,14 \text{ В}, u_6 = 60,71 \text{ В}; в) } i_1 = 5,45 \text{ мА}, i_2 = 2,27 \text{ мА}, i_3 = 3,18 \text{ мА}, i_4 = 3,75 \text{ мА}, i_5 = 9,2 \text{ мА}, i_6 = 6,93 \text{ мА}, u_1 = 5,45 \text{ В}, u_2 = 4,55 \text{ В}, u_3 = 9,55 \text{ В}, u_4 = 15 \text{ В}; г) } i_1 = 5 \text{ мА}, i_2 = 0,19 \text{ мА}, i_3 = 1,54 \text{ мА}; i_4 = 1,35 \text{ мА}, i_5 = 6,54 \text{ мА}, i_6 = 5,19 \text{ мА}, u_1 = 5 \text{ В}, u_2 = 0,38 \text{ В}, u_3 = 4,62 \text{ В}, u_4 = 5,38 \text{ В}. 3.30. } i_1 = 5 \text{ мА}; i_2 = 10 \text{ мА}, i_3 = 14 \text{ мА}, i_5 = 5 \text{ мА}, i_6 = 24 \text{ мА}, u_1 = 25 \text{ В}, u_2 = 50 \text{ В}, u_3 = 56 \text{ В}, u_4 = 19 \text{ В}, u_5 = 6 \text{ В}, u_6 = 75 \text{ В}. 3.31. } i_1 = 80 \text{ мА}, i_2 = 40 \text{ мА}, i_3 = 120 \text{ мА}, i_4 = 40 \text{ мА}, i_7 = 80 \text{ мА}, i_8 = 40 \text{ мА}. 3.33. \text{ См. ответ к задаче 3.29. 3.39. См. ответ к задаче 3.29. 3.40. } i_1 = i_6 = 1,33 \text{ мА}, i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = 0,67 \text{ мА}, u_1 = u_6 = 1,33 \text{ В}, u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0,67 \text{ В}. 3.41. } i_3 = 4,11 \text{ мА}, i_4 = 2,27 \text{ мА}. 3.47. } 2 \text{ мА}. 3.48. } 5,6 \text{ мА}. 3.49. } 2,5 \text{ мА}. 3.50. } 3,75 \text{ В}. 3.51. } R_1 = 5 \text{ кОм}, u_4 = 15 \text{ В}. 3.52. } R_4 = 154 \text{ Ом}. 3.53. \text{ Первое число — напряжение, В, на выходе при источнике напряжения на входе; второе число — напряжение, В, на выходе при источнике тока на входе: а) } 0,13, 2,13; б) } 0,61, 2,84; в) } 0,88, 4,39; г) } 0,29, 1,68; д) } 0,185, 3; е) } 0,044, 0,362; ж) } 0,437, 2,03; 3.55. } i_3 = 1,12 \text{ мА}, i_4 = 1,52 \text{ мА}, i_5 = 0,4 \text{ мА}. 3.56. } i_1 = 5,11 \text{ мА}, i_2 = 5,56 \text{ мА}, i_4 = 4,89 \text{ мА}.$

3.59.
$$\left. \begin{aligned} (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_5) u_1 - (1/R_5) u_2 &= u_0/R_2, \\ - (1/R_5) u_1 + (1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5) u_2 &= u_0/R_4. \end{aligned} \right\}$$

3.61. 2 мА. 3.63. Рис. 3.16. 3.64. К проводимостям $Y_{kl}, Y_{lk}, Y_{kk}, Y_{ll}$ добавляется $1/R_0$, к правой части k -го уравнения добавляется u_0/R_0 , а к правой части l -го — $-u_0/R_0$. 3.65. Изменяются правые части k -го и l -го уравнений на $\pm i_0$. 3.76. $U_2/U_0 = R_2(1 + gR_1)/(R_1 + R_2 + gR_1 R_2), R_{\text{вх}} = R_1 + R_2 + gR_1 R_2, R_{\text{вых}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + gR_1 R_2); \text{ при } g \rightarrow \infty \frac{U_2}{U_0} = 1, R_{\text{вх}} = \infty, R_{\text{вых}} = 0. 3.80. R_1, R_3 / R_1. 3.81. \text{ а) } R_1 R_3 / (R_1 + R_3); \text{ б) } R_1 R_4 / (R_1 + R_4).$

ГЛАВА 4

4.5. Общий вид дифференциального уравнения и его решения для схем рис. 4.3: $dx/dt = -x/\tau + f(t)$, $x(t) = A \exp(-t/\tau) + x^{(c)}(t)$; а) $x = u_c$, $\tau = R_1 C$, $f = u/\tau$; б) $x = u_c$, $\tau = R_1 R_2 C / (R_1 + R_2)$, $f = u / CR_1$; в) $x = i_L$, $\tau = L / R_1$, $f = u / L$; г) $x = u_c$, $\tau = R_1 C_1$, $f = i / C_1$; д) $x = u_c$, $\tau = (R_1 + R_2) C$, $f = i R_1 / \tau$; е) $x = i_L$, $\tau = L / R_1$, $f = i / L$. 4.6. Для любой схемы рис. 4.4 система дифференциальных уравнений записывается так: $di_L/dt = a_{11} i_L + a_{12} u_C + f_1(t)$; $du_C/dt = a_{21} i_L + a_{22} u_C + f_2(t)$; характеристическое уравнение $p^2 + a_1 p + a_0 = 0$. Решение системы при $p_1 \neq p_2$: $i_L(t) = A_1 \exp(p_1 t) + A_2 \exp(p_2 t) + i_L^{(c)}(t)$; $u_C(t) = A_1 \beta_1 \exp(p_1 t) + A_2 \beta_2 \exp(p_2 t) + u_C^{(c)}(t)$. Выражения для a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , a_1 , a_0 , $f_1(t)$ и $f_2(t)$ даны ниже, в табл. О.4.1 и О.4.2.

Таблица О.4.1

a_{11}	Схема рис. 4.4	a_{12}, a_{21}	Схема рис. 4.4	a_{22}	Схема рис. 4.4	a_0	Схема рис. 4.4
0	а, з, о, т	$\frac{1}{L}, -\frac{1}{C}$	е, з, л, м о, т	$-\frac{1}{\tau C \delta}$	б, в, ж, н п, т	ω_0^2	а, д, з, и, о, р, с, т
$-\frac{1}{\tau L_a}$	б, в, ж, и н, п	$-\frac{1}{L}, \frac{1}{C}$	а, з, д, и, к, р, с	$-\frac{1}{\tau C_1}$	з, е, з, к л, м, о	$\frac{\omega_0^2 R_2}{R_6}$	б, в, ж, н п
$-\frac{1}{\tau L_2}$	м, с, к, л	$\frac{-1}{R_6 \tau_{12}}, \frac{R_2}{\tau C_6}$	б, в, п	$-\frac{1}{\tau C_a}$	а	$\frac{R_6 \omega_0^2}{R_1}$	з, е, к, н, м
$-\frac{1}{\tau L_2}$	д, с	$R_6 \tau_{L_2}, -\frac{R_2}{\tau C_6}$	ж, и	0	д, и, р, с		
$-\frac{1}{\tau L_6}$	р						

Таблица О.4.2

a_1	Схема рис. 4.4	f_1	Схема рис. 4.4	f_2	Схема рис. 4.4	Примечание
$1/\tau C_a$	а	u/L	а, в, з, д, е	$u/\tau C_2$	а	$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
$1/\tau C_6 + 1/\tau L_a$	б, в, ж, н, п	$u/R_6 \tau_{L_2}$	б, и	$u/\tau C_6$	б, ж	$R_6 = R_1 + R_2$
$1/\tau C_1 + 1/\tau L_2$	з, е, к, л, м	$u/R_6 \tau_{L_1}$	ж	0	в, д, и, к, р, с	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
$1/\tau L_1$	д, с	0	з, л, н, о, т	$u/\tau C_1$	з, е, з	$\tau C_1 = R_1 C$
$1/\tau C_1$	з, о	$i/\tau L_2$	к, м, р	i/C	л, м, н, о	$\tau C_2 = R_2 C$
$1/\tau L_a$	и	$i/\tau L_1$	с	$i R_1 / \tau C_6$	п	$\tau C_a = R_a C$
$1/\tau L_6$	р	$i/\tau L_a$	н	$i R_2 / \tau C_1$	т	$\tau C_6 = R_6 C$
$1/\tau C_6$	т					$\tau L_1 = L/R_1$
						$\tau L_2 = L/R_2$
						$\tau L_a = \frac{L}{R_a}$
						$\tau L_6 = \frac{L}{R_6}$

4.8. Схема состоит из двух последовательных соединенных резисторов R и $2R$. К резистору $2R$ подключается емкость. 4.9. а) $i_1 = 0$, $u_C = U_0$; б) $i_1 = i_2 = U_0 / (R_1 + R_2)$, $u_C = i_1 R_2$; в) $i_1 = i_L = U_0 / R_1$; г) $i_1 = I_0$, $u_C = R_1 I_0$; д) $i_1 = I_0$, $i_2 = 0$, $u_C = I_0 R_1$; е) $i_1 = 0$, $i_L = I_0$. 4.10. а) $i_1 = i_L = U_0 / R_1$, $i_2 = 0$, $u_C = U_0$; б) $i_1 = i_2 = i_L = 0$, $u_C = U_0$; в) $i_L = i_2 = U_0 / R_2$, $i_1 = 0$, $u_C = U_0$; г) $i_1 = i_2 = i_L = 0$, $u_C = U_0$; д) $i_1 = i_L = 0$, $u_C = U_0$; е) $i_1 = i_2 = i_L = U_0 / (R_1 + R_2)$, $u_C = U_0 R_2 / (R_1 + R_2)$; ж) $i_1 = 0$; $i_2 = i_L = U_0 / R_2$, $u_C = 0$; з) $i_1 = i_L = U_0 / R_1$, $u_C = 0$; и) $i_1 = i_2 = U_0 / (R_1 + R_2)$, $i_L = 0$, $u_C = U_0 R_2 / (R_1 + R_2)$; к) $i_1 = i_L = I_0 R_2 / (R_1 + R_2)$, $i_2 = I_0 R_1 / (R_1 + R_2)$, $u_C = \frac{I_0 R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}$; л) $i_1 = I_0 R_2 / (R_1 + R_2)$, $i_L = i_2 = I_0 R_1 / (R_1 + R_2)$, $u_C = I_0 R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$; м) $i_1 = i_2 = 0$, $i_L = I_0$, $u_C = 0$; н) $i_1 = i_L = I_0$, $i_2 = 0$, $u_C = I_0 R_1$; о) $i_1 = 0$, $i_L = I_0$, $u_C = 0$; п) $i_1 = I_0$, $i_2 = i_L = 0$, $u_C = I_0 R_1$; р) $i_1 = i_L = 0$, $i_2 = I_0$, $u_C = I_0 R_2$; с) $i_1 = I_0$, $i_L = 0$, $u_C = I_0 R_1$; т) $i_1 = i_L = I_0 R_2 / (R_1 + R_2)$, $i_2 = I_0 R_1 / (R_1 + R_2)$, $u_C = 0$.

ГЛАВА 5

$$\begin{aligned} 5.1. \quad s_1 &= S_{m1} \cos \omega t = S_{m1} \sin(\omega t + \pi/2), \\ s_2 &= S_{m2} \cos(\omega t - \pi/2) = S_{m2} \sin \omega t, \\ s_3 &= S_{m3} \cos(\omega t + \pi/2) = S_{m3} \sin(\omega t \pm \pi), \\ s_4 &= S_{m4} \cos(\omega t \pm \pi) = S_{m4} \sin(\omega t - \pi/2). \end{aligned}$$

5.2. Первое колебание отстает от второго на угол $\pi/4$. 5.3. См. рис. 5.1 учебника.

5.4. $s_1(t) = S_{m1} \cos 2\pi f_1 \sqrt{t}$; $s_2(t) = S_{m1} \cos 4\pi f_1 \sqrt{t}$; $s_3(t) = S_{m1} \cos \pi f_1 t$. 5.6. Амплитуды и начальные фазы суммы пар колебаний приведены в табл. О5.1

Т а б л и ц а О5.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_m	2,0	1,16	2	0,8	1	2	1,04	1	1	1
φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$

Продолжение табл. О5.1

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S_m	2	3	2	3	$\sqrt{3}$	1,55	2	1	1,93	1,93
φ	0	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$

Продолжение табл. О5.1

Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
S_m	2	2	1	2	0,5	1	0,6	1	2	1
φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$

5.8. Напряжение емкости в схемах а) б) з) д) и ток индуктивности в схемах е) ж) изменяются по гармоническому закону: $u_c = U_{mc} \cos(\omega t + \psi_{u0})$ и $i_L = I_{mL} \cos(\omega t + \psi_{i0})$; а) $U_{mc} = U_m / \sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}$, $\psi_0 = -\arctg \omega R_1 C$; б) $U_{mc} = U_m R_2 / \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}$, $\psi_0 = -\arctg [\omega C R_1 R_2 / (R_1 + R_2)]$; в) См. задачу 5.7; з) $U_{mc} = I_m R_1 / \sqrt{1 + (\omega C R_1)^2}$, $\psi_0 = -\arctg \omega C R_1$; д) $U_{mc} = I_m R_1 / \sqrt{1 + [\omega C (R_1 + R_2)]^2}$, $\psi_0 = -\arctg [\omega C (R_1 + R_2)]$; е) $I_{mL} = I_m R_1 / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\psi_0 = -\arctg (\omega L / R)$. 5.10. В случаях: а), б), д), е), л) — индуктивность; в), з), ж), и), к) — емкость; з) резистор. 5.13. Параллельные соединения $R = 1,41$ кОм и $C = 0,0707$ мкФ. 5.15. 1) емкость, 2) резистор, 3) резистор, 4) емкость. 5.16. Варианты 1...14 соответствуют RL —, 15 — R —, 16...29 — RC -двухполюсникам. Параметры элементов даны последовательно по вариантам R , Ом; L , мГн; C , мкФ; P , Вт: 1) 69,71; 66,30; 0,0063; 2) 124,8; 58,69; 0,0312; 3) 176,6; 54,35; 0,0865; 4) 226,0; 50,75; 0,183; 5) 272,7; 47,24; 0,33; 6) 316,5; 43,56; 0,5349; 7) 356,9; 39,63; 0,803; 8) 393,4; 35,42; 1,137; 9) 425,8; 30,94; 1,537; 10) 453,6; 26,19; 2,001; 11) 476,6; 21,22; 2,521; 12) 494,6; 16,07; 3,091; 13) 507,2; 10,78; 3,697; 14) 514,4; 5,406; 4,326; 15) 516,1; 4,96; 16) 512,3; 1,857; 5,579; 17) 503; 0,9353; 6,162; 18) 488,4; 0,6302; 6,686; 19) 468,5; 0,4794; 7,126; 20) 443,6; 0,3905; 7,457; 21) 413,9; 0,3325; 7,653; 22) 379,8; 0,2924; 7,692; 23) 341,7; 0,2635; 7,548; 24) 299,9; 0,2423; 7,201; 25) 254,9; 0,2265; 6,63; 26) 207,2; 0,2149; 5,821; 27) 157,3; 0,2065; 4,759; 28) 105,8; 0,2009; 3,437; 29) 53,17; 0,1978; 1,851. 5.17. Варианты 1...14 соответствуют RL —, 15 — R —, 16...25 — RC -двухполюсникам. Параметры элементов даны последовательно по вариантам R , Ом; L , мГн; C , нФ: 1) 6378; 67,03; 2) 2886; 61,34; 3) 1849; 60,08; 4) 1366; 60,81; 5) 1091; 62,98; 6) 916,1; 66,56; 7) 797,1; 71,77; 8) 712,4; 79,12; 9) 650,6; 89,54; 10) 604,8; 107,8; 11) 571,1; 128,3; 12) 546,8; 168,3; 13) 530,1; 249,4; 14) 520,0; 494,8; 15) 516,1; 16) 518,0; 20,29; 17) 525,8; 40,43; 18) 539,9; 60,18; 19) 561,4; 79,31; 20) 591,4; 97,62; 21) 632,4; 114,9; 22) 687,8; 130,9; 23) 763,1; 145,5; 24) 868,0; 158,6; 25) 1020; 169,9. 5.18. а), б), е), з), и), н) — последовательный RC -двухполюсник; в), г), д), ж), к), л), м) — последовательный RL -двухполюсник. 5.19. а), б), е), з), и), н) — параллельный RL -двухполюсник; в), г), д), ж), к), л), м) — параллельный RC -двухполюсник.

ГЛАВА 6

6.1. $0,1e^{j\pi/6}$; 0,2; $0,3e^{j\pi/4}$ и т. д. 6.2. $5 \cos(\omega t + \pi/3)$; $6 \cos(\omega t - \pi/3)$; $7 \cos(\omega t + \pi/2)$; и т. д. 6.3. См. табл. 6.1. 6.4. См. табл. 6.2.

Таблица 6.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_m	0,361	0,430	0,49	0,781	0,99	0,825	0,95	0,988	10
ψ , рад	0,983	2,19	−0,644	−2,27	$\pi/4$	1,82	−1,25	−1,99	0

Продолжение табл. 6.1

Вариант	10	11	12	13	14	15	16	17	18
S_m	1,41	224	500	300	2,5	2,5	2,5	2,12	8,54
ψ , рад	− $\pi/4$	−1,11	$\pi/2$	− $\pi/2$	0,927	2,21	−0,927	−2,36	−0,357

Окончание табл. 06.1

Вариант	19	20	21	22	23	24	25	26	27
S_m	8,06	8,54	13,4	13,6	32,5	2	2	5	6
φ , рад	-2,62	2,78	0,464	2,84	-2,16	0	π	$-\pi/2$	$\pi/2$

Таблица 06.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
a	2,5	3	0	0	7,79	8,66	0	0
b	4,33	-5,20	7	-8	4,5	-4,5	-11	12

Окончание табл. 06.2

Вариант	9	10	11	12	13	14	15	16
a	6,5	12,6	13,9	15,2	12,0	14,6	5,87	6,18
b	-11,3	6,07	-5,74	4,94	-12,0	10,6	18,0	-19,0

6.5. а) $8,23 - j1,23$; б) $30e^{j0,928}$; в) $1,91e^{-j1,78}$; г) $0,4e^{-j\pi/12}$. 6.7. а) $-j4$; $1/2 + j\sqrt{3}/2$; б) $10 - j2$; $-7/4 - j17/4$. 6.8. а) $5e^{j73^\circ 44'}$; б) $15e^{-j\frac{\pi}{4}}$; в) $1e^{-j116^\circ 35'}$; г) $630e^{-j57^\circ 10'}$; д) $3e^{j3^\circ 48'}$; е) $7,5e^{-j5^\circ 40'}$. 6.9. $i_3 = 5\cos(1000t + 1,452)$, $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$, $T = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ с}$; $f = 159 \text{ Гц}$, $\Delta\psi = -90^\circ$. 6.10. $u_4 = 19\cos(\omega t - 0,192)$. 6.11. а) $\frac{\pi}{4}$; $u(t) = 70\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$; б) $-\frac{3\pi}{4}$; $u(t) = 10\cos(\omega t - \frac{3\pi}{4})$; в) $u(t) = 64,78\cos(\omega t + 0,304)$; г) $3\pi/4$; $u(t) = 50\cos(\omega t + 1,713)$. 6.13. Для вариантов 1...15 — емкостной характер. Значения параметров R , кОм, C , мкФ, при последовательном и параллельном соединениях соответственно: 1) 0,0981; 0,1; 10,2; 0,0995; 2) 0,215; 0,0927; 5,64; 0,0892; 3) 0,348; 0,0871; 4,13; 0,0797; 4) 0,498; 0,0833; 3,4; 0,0711; 5) 0,66; 0,081; 2,97; 0,063; 6) 0,833; 0,0802; 2,7; 0,0554; 7) 1,02; 0,0809; 2,52; 0,0483; 8) 1,2; 0,0832; 2,4; 0,0416; 9) 1,39; 0,0876; 2,33; 0,0352; 10) 1,58; 0,0947; 0,0223; 0,0292; 11) 1,76; 0,106; 2,27; 0,0236; 12) 1,94; 0,124; 2,27; 0,0182; 13) 2,11; 0,0157; 2,3; 0,0132; 14) 2,26; 0,223; 2,35; 0,00848; 15) 2,39; 0,425; 2,41; 0,00408; 16) $R = 2,5$. Для вариантов 17...26 — индуктивный характер. Значения параметров R , кОм, L , Гн, при последовательном и параллельном соединениях соответственно: 17) 2,59; 0,0255; 2,61; 2,65; 18) 2,65; 0,0527; 2,75; 1,38; 19) 2,68; 0,0813; 2,93; 0,965; 20) 2,68; 0,111; 3,14; 0,758; 21) 2,65; 0,141; 3,4; 0,636; 22) 2,58; 0,172; 3,73; 5,58; 23) 2,47; 0,203; 4,14; 0,504; 24) 2,33; 0,233; 4,67; 0,467; 25) 2,16; 0,263; 5,36; 0,44; 26) 1,94; 0,291; 6,3; 0,421. 6.16. Комплексные сопротивления, Ом: а) $3161e^{j0,322}$; б) $447,2e^{j0,464}$; в) $2236e^{-j0,464}$; г) $784,5e^{-j0,197}$. 6.17. См. табл. 06.3. 6.18. а) См. табл. 06.4; б) см. табл. 06.5.

Таблица 06.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{Re}(Z), \text{кОм}$	1	1,22	2,40	4,00	20,0	0,129	7,00	6,09	7,20	2,00
$\text{Im}(Z), \text{кОм}$	∞	3,02	-2,10	-8,00	10,0	0,870	-117	12,6	-13,1	-2,00

Продолжение табл. 06.3

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\text{Re}(Z)$	0,32	0,037	4,00	4,00	4,15	21,3	20,6	0,30	10,0	4,81
$\text{Im}(Z)$	1,24	-0,33	∞	5,00	-8,34	7,93	16,3	-1,61	113	18,0

Окончание табл. 06.3

Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\text{Re}(Z)$	0,4	3,00	1,64	1,95	4,17	5,10	0,216	9,00	6,10	4,00
$\text{Im}(Z)$	-1,2	10,0	1,03	-1,56	-5,00	6,49	-1,30	40,0	4,12	-20,02

Таблица 06.4

Вариант	$i_1, \text{мА}$		$i_2 = i_3, \text{мА}$		$i_4, \text{мА}$	
	$I, \text{мА}$	$\varphi, \text{рад}$	$I, \text{мА}$	$\varphi, \text{рад}$	$I, \text{мА}$	$\varphi, \text{рад}$
1	0,0	0,0	0,5	-1,57	0,5	1,57
2	0,3067	-1,188	0,2395	-1,862	0,1916	-0,2915
3	0,3114	0,7266	0,1393	-0,3805	0,2785	1,190
4	0,1118	1,107	0,1118	-1,107	0,2000	1,571
5	0,0447	-0,4637	0,0894	1,107	0,1000	-1,571
6	1,137	-1,424	1,125	-1,571	0,1667	0,0
7	0,00856	1,511	0,07986	1,511	0,0713	-1,631
8	0,0715	-1,120	0,03494	-5,993	0,06239	-1,631
9	0,0670	1,067	0,0300	-0,040	0,0600	1,531
10	0,3536	0,7854	0,3536	-0,7854	0,5000	1,571
11	0,7809	-1,318	0,3124	0,8961	1,000	-1,571
12	3,018	1,46	3,000	1,571	0,3333	0,0
13	0,0	0,0	0,5	-1,57	0,5	1,57
14	0,1562	-0,896	0,06984	0,2111	0,1397	-1,36
15	0,1073	1,109	0,05952	0,1260	0,08928	1,697
16	0,04393	0,3556	0,0767	-1,004	0,0800	1,571
17	0,03807	-0,6698	0,0611	1,060	0,0769	-1,571
18	0,6102	1,388	0,6000	1,571	0,1111	0,0

Окончание табл. 06.4

Вариант	$i_1, \text{мА}$		$i_2 = i_3, \text{мА}$		$i_4, \text{мА}$	
	$I, \text{мА}$	$\varphi, \text{рад}$	$I, \text{мА}$	$\varphi, \text{рад}$	$I, \text{мА}$	$\varphi, \text{рад}$
19	0,0088	-1,483	0,0586	-1,483	0,04981	1,659
20	0,0536	-1,310	0,0525	-1,508	0,0105	0,0631
21	0,7906	1,249	0,7071	0,7854	0,3536	2,356
22	0,0958	-1,279	0,4789	-1,279	0,3831	1,862
23	0,5161	-0,5622	0,3304	-1,438	0,3965	0,1326
24	0,4002	0,6747	0,2500	1,570	0,3125	0,0
25	0,1536	0,8761	0,1280	-0,6947	0,200	1,571
26	0,1212	-0,9047	0,1035	0,761	0,1667	-1,571
27	0,7603	1,406	0,7500	1,571	0,1250	0,0
28	0,0244	-1,350	0,0976	1,792	0,1220	-1,35
29	0,1359	-0,5944	0,0849	0,3016	0,1061	-1,269
30	0,0485	1,376	0,0217	0,2684	0,0434	1,84

Таблица 06.5

Вариант	$u_1, \text{В}$		$u_2, \text{В}$		$u_3, \text{В}$		$u_4, \text{В}$	
	$V, \text{В}$	$\varphi, \text{рад}$	$V, \text{В}$	$\varphi, \text{рад}$	$V, \text{В}$	$\varphi, \text{рад}$	$V, \text{В}$	$\varphi, \text{рад}$
1	1,00	0,0	∞	—	0,0	—	∞	—
2	4,000	1,571	1,562	-0,6747	0,0	0,0	1,562	-0,6747
3	3,333	-1,571	2,683	0,4637	0,0	0,0	2,683	0,4637
4	0,00	0,00	4,000	-2,214	8,000	-0,6436	8,944	-1,107
5	0,00	0,0	10,00	1,571	20,00	0,0	22,36	0,4636
6	0,00	0,0	11,87	1,424	10,99	-1,718	0,8793	1,424
7	7,00	0,0	0,0	0,0	116,7	-1,571	116,7	-1,571
8	16,00	1,571	0,0	0,0	6,98	-0,5105	6,98	-0,5105
9	16,67	-1,571	0,0	0,0	8,05	0,4637	8,05	0,4637
10	0,0	0,0	2,00	0,8445	2,00	-1,571	2,828	-0,7854
11	0,0	0,0	1,00	0,6436	0,80	2,214	1,281	1,318
12	0,0	0,0	2,982	1,682	3,313	-1,460	0,3313	-1,46
13	1,00	0,0	∞	—	0,0	0,0	∞	—
14	7,00	1,571	4,472	-0,4637	0,0	0,0	4,472	-0,4637
15	11,11	-1,571	4,992	0,588	0,0	0,0	4,992	0,588
16	0,0	0,0	12,22	-1,36	19,21	0,2111	22,77	-0,3556
17	0,0	0,0	12,83	1,73	22,92	0,1694	26,27	0,6698
18	0,0	0,0	14,75	1,754	16,39	-1,388	1,639	-1,388
19	10,00	0,0	0,0	0,0	113,3	1,5710	113,3	1,5710
20	19,00	1,571	0,0	0,0	4,903	-0,1974	4,903	-0,1974
21	2,00	-1,571	0,0	0,0	0,8944	1,107	0,8944	1,107
22	3,0	0,0	10,00	1,571	0,0	0,0	10,00	1,571
23	3,0	1,571	2,561	-0,8761	0,0	0,0	2,561	-0,8761
24	4,0	-1,571	3,124	0,8961	0,0	0,0	3,124	0,8961
25	0,0	0,0	5,000	-1,571	4,167	0,0	6,509	-0,8761
26	0,0	0,0	5,689	0,095	5,973	1,666	8,248	0,9047
27	0,0	0,0	8,220	-1,406	6,905	1,736	1,315	-1,406
28	9,00	0,0	0,00	0,0	40,00	1,571	40,00	1,571
29	9,00	1,57	0,0	0,0	7,809	-0,6747	7,809	-0,6747
30	22,22	-1,57	0,0	0,0	4,472	0,4637	4,472	0,4637

6.19. а) 5 В; б) при увеличении частоты 15,5; 3; 18; 2,5 В; при уменьшении частоты 6,25; 3; 4,5; 10 В. 6.20. а) $L = \frac{R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}$; б) $\frac{R^2 \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} < \frac{1}{\omega C}$; в) $\frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} < \frac{1}{\omega C}$; г) $1/\omega L < \frac{\omega C}{1 + (\omega RC)^2}$. 6.21. 4,97 нФ; 0,132 А. 6.22. 8 нФ; 0,5 В. 6.23. а) $\dot{I}_R = 1 \cdot e^{j\pi/6}$ мА, $\dot{I}_C = 1 \cdot e^{j2\pi/3}$ мА, $\dot{I}_L = \sqrt{2} e^{j1,31}$ мА, $u_L = (1/\sqrt{2}) e^{j2,88}$ В, $\dot{U}_R = U_C$, $\dot{U} = 9,51 e^{j0,576}$ В. 6.24. $u_{ab}(t) = -26,7 \cos 10^3 t$, В. 6.25. $i_2(t) = 2,5 \cos(10^4 t + \pi/6)$. 6.27. $R_1/R_2 = 3/5$. 6.28. ЗТК справедлив для комплексных токов. 6.29. а) $I = 0$; б) $I = 2$ А. 6.30. а) 0; б) 20 В. 6.32. U_{a6} уменьшается от U до 0, начальная фаза $\pi/2$. 6.33. Рис. 6.10. $Z(0) = 0$, $Z(\infty) = R$; рис. 6.11 $Z(0) = Z(\infty) = 0$; рис. 6.12. $Z(0) Z(\infty) = \infty$. 6.38. $\dot{I}_1 = 0,693 e^{j13^\circ 50'}$, А; $\dot{I}_2 = 0,452 e^{-j85^\circ 20'}$, А; $\dot{I}_3 = 0,77 e^{-j21^\circ 50'}$, А. 6.39. Узловые напряжения $\dot{U}_1 = 5,51 e^{j0,122}$ В; $\dot{U}_2 = 8,98 e^{-j0,1\pi}$ В. 6.42. а) $j\omega CR$; б) $1 + j\omega CR$; в) $1 + 1/j\omega CR$. 6.47. См. ответ к зад. 6.38. 6.48. а) $40,96 e^{j0,96}$ мА; б) $193,8 e^{j0,12}$ мА. 6.49. 230 Ом. 6.50. См. ответ к зад. 6.38. 6.51. $i_0 = \omega C U_m \cos(\omega t - \pi/3)$. 6.55. $1 e^{-j36^\circ 50'}$, А; $7,8 e^{j13^\circ 20'}$, В. 6.56. 0,796 мкФ или 0,0442 мкФ. 6.58. $P = 226$ Вт, $Q = -210$ В·А, $S = 301,4$ В·А. 6.59. 13 Ом. 38,2 мГн. 6.60. 110 Вт. 6.62. 0,104 мВт; $(\sqrt{3} - j) 10^3$ Ом. 6.65. $I_A = I_B = I_C = 5$ А, $P = 750$ Вт. 6.67. $I_A = I_C = 4,32$ А; $I_B = 0$; $P = 375$ Вт. 6.68. а) напряжения фаз генератора, В: $\dot{U}_A = 100$, $\dot{U}_B = -50 - j50\sqrt{3}$, $\dot{U}_C = -50 + j50\sqrt{3}$; напряжения на нагрузках: $\dot{U}_a = 150 - j50\sqrt{3}$, $\dot{U}_b = -j100\sqrt{3}$, $\dot{U}_c = 0$; токи, А: $I_A = I_B = I_C = 10\sqrt{3}$; $I_0 = 0$; средняя мощность $P = 1500\sqrt{3}$, Вт; б) $\dot{U}_a = \dot{U}_A$, $\dot{U}_b = \dot{U}_B$, $\dot{U}_c = \dot{U}_C$; $\dot{I}_A = 10 e^{j30^\circ}$; $\dot{I}_B = 10 e^{-j210^\circ}$; $\dot{I}_C = 10 e^{j210^\circ}$; $\dot{I}_N = 10 e^{j150^\circ}$; $P = 865$ Вт. 6.69. 1. При включенном нейтральном проводе $I_A = I_B = I_C = 10$ А, $I_0 = 10$ А; без нейтрали $I_A = I_B = 10\sqrt{3}$ А. 2. $I_A = I_B = I_C = 10\sqrt{3}$ А. 6.70. $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = 5$ А; $I_A = I_B = I_C = 5\sqrt{3}$ А; $P = 1298$ Вт.

ГЛАВА 7

7.2. а) $j\omega CR/(1 + j\omega CR)$, $\omega CR/\sqrt{1 + (\omega CR)^2}$, $\pi/2 - \arctg \omega CR$; б) $1/(1 + j\omega CR)$, $1/\sqrt{1 + (\omega CR)^2}$, $-\arctg \omega CR$; в) $R/(R + j\omega L)$, $R/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $-\arctg(\omega L/R)$; г) $j\omega L/(R + j\omega L)$, $\omega L/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\pi/2 - \arctg(\omega L/R)$; колебания высоких частот подавляются цепями со схемами б) и в). 7.3. См. ответы к зад. 7.2. 7.4. а), б) $R + 1/j\omega C$, $\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$, $-\arctg 1/\omega CR$; в), г) $R + j\omega L$, $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\arctg(\omega L/R)$. 7.5. а), б) $1/R + j\omega C$; $\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}$, $\arctg \omega CR$; в), г) $1/R - j/\omega L$, $\sqrt{(1/R)^2 + (1/\omega L)^2}$, $-\arctg(R/\omega L)$. 7.6. а) $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = j\omega CRR_n/(R + R_n + j\omega CRR_n)$, $\omega CRR_n/\sqrt{(R + R_n)^2 + (\omega CRR_n)^2}$, $\pi/2 - \arctg[\omega CRR_n/(R + R_n)]$, $\dot{I}_2/\dot{U}_1 = \dot{U}_2/R_n \dot{U}_1$; б) $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = R_n/(R + R_n + j\omega CRR_n)$, $R_n/\sqrt{(R + R_n)^2 + (\omega CRR_n)^2}$, $-\arctg[\omega CRR_n/(R + R_n)]$, $\dot{I}_2/\dot{U}_1 = \dot{U}_2/R_n \dot{U}_1$, в) $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = RR_n/(RR_n + j\omega L(R + R_n))$, $RR_n/\sqrt{(RR_n)^2 + [\omega L(R + R_n)]^2}$, $-\arctg[\omega L(R + R_n)/RR_n]$, $\dot{I}_2/\dot{U}_1 = \dot{U}_2/R_n \dot{U}_1$; г) $\dot{U}_2/\dot{U}_1 = j\omega LR_n/(RR_n + j\omega L(R + R_n))$, $\omega LR_n/\sqrt{(RR_n)^2 + [\omega L(R + R_n)]^2}$, $0,5\pi/2 - \arctg[\omega L(R + R_n)/RR_n]$. 7.8. 1) схемы рис. 7.15. R_3 — задаем, $R_1 = 0$, $R_2 = R_3[1 - H(\infty)]/H(\infty)$, $L = [R_2 H(\infty)/\omega_1] \sqrt{(1 - H_1^2)/(H_1^2 - H^2(\infty))}$; схемы рис. 7.16 $R_1 = R_3 H(\infty)/[1 - H(\infty)]$, $R_2 = \infty$, $C = [H(\infty)/\omega_1 R_1 H(0)] \sqrt{(1 - H_1^2)/(H_1^2 - H^2(\infty))}$; 2) схемы рис. 7.15 $R_1 = R_3(1 - H(0))/H(0)$, $R_2 = \infty$, $L = [R_3/H(0)\omega_1] \sqrt{H^2(0)/H_1^2 - 1}$; схемы рис. 7.16 $R_1 = 0$, $R_2 = R_3 H(0)/[1 - H(0)]$, $C = [1/\omega_1 R_3 H(0)] \sqrt{H^2(0)/H_1^2 - 1}$. 7.9. Иско-

мые схемы получаются из схем рис. 7.15 и 7.16, если в каждой из них R_3 и Z поменять местами. При этом для схем, полученных на основе рис. 7.15 $R_1 = R_3 H(0) / |1 - H(0)|$, $R_2 = R_3 |H(\infty) - H(0)| / (|1 - H(\infty)| |1 - H(0)|)$, $L = \{R_2 [1 - H(\infty)] / \omega_1 |1 - H(0)|\} \sqrt{[H_1^2 - H^2(\infty)] / [H^2(\infty) - H_1^2]}$; для схем, полученных на основе рис. 7.16, $R_1 = R_3 [1 - H(\infty)] / H(\infty)$; $R_2 = R_3 |H(\infty) - H(0)| / H(\infty) H(0)$, $C = |H(\infty) / \omega_1 R_2 H(0)| \times \sqrt{[H_1^2 - H^2(0)] / [H^2(\infty) - H_1^2]}$. **7.10.** Схемы с индуктивностью $R_1 = 250$ Ом, $R_2 = 3,75$ кОм, $L = 46,9$ мГн; схемы с емкостью $R_1 = 250$ Ом, $R_2 = 3,75$ кОм, $C = 0,2$ мкФ. **7.11.** См. табл. О 7.1.

Т а б л и ц а О 7.1

ω_h	Схема а		Схема б		Схема в		Схема г	
	U_2 , В	Ψ_{u2} , рад	U_2 , В	Ψ_{u2} , рад	U_2 , В	Ψ_{u2} , рад	U_2 , В	Ψ_{u2} , рад
$1 \cdot 10^4$	0,26	1,77	4,30	0,20	1,19	-0,07	0,60	1,50
$2 \cdot 10^4$	0,56	1,98	1,39	0,40	1,06	0,00	1,06	1,57
$3 \cdot 10^4$	0,82	2,21	1,37	0,64	0,89	0,20	1,33	1,77
$4 \cdot 10^4$	1,04	2,46	1,30	0,90	0,75	0,46	1,49	2,03
$5 \cdot 10^4$	1,21	2,74	1,21	1,18	0,64	0,77	1,59	2,34
$6 \cdot 10^4$	1,34	3,05	1,12	1,48	0,55	1,11	1,66	2,68
$7 \cdot 10^4$	1,45	3,37	1,03	1,80	0,49	1,46	1,71	3,03
$8 \cdot 10^4$	1,53	3,70	0,95	2,13	0,44	1,81	1,75	3,38
$9 \cdot 10^4$	1,59	4,04	0,88	2,47	0,39	2,18	1,77	3,75
$10 \cdot 10^4$	1,64	4,39	0,82	2,82	0,36	2,55	1,80	4,12

7.12. См. ответ к зад. 7.11 $I_2 = 5U_2$, мА, $\Psi_{i2} = \Psi_{u2}$. **7.13.** $\dot{U}_n / \dot{U}_0 = -R_2 / R_1 (1 + j\omega CR_2)$, $Z_{вх} = R_1$, $Z_{вых} = 0$, $U_n / U_0 = R_2 / R_1 (\sqrt{1 + (\omega CR_2)^2})$, $\Theta(\omega) = \pi - \arctg \omega CR_2$. **7.14.** а) $H(j\omega) = j\omega CR_{вх}(\mu R - R_{вых}) / [j\omega CR_{вх}(R + R_{вых}) + R + R_{вх} + R_{вых} + \mu R_{вх}]$; б) $H(j\omega) = (j\omega C \mu R R_{вх} + \mu R_{вх} + R_{вых}) / [j\omega CR_{вх}(R + R_{вых}) + R + R_{вх} + R_{вых} + \mu R_{вх}]$; в) $H(j\omega) = [j\omega CR \mu R_{вх} + R_{вых}] + \mu R_{вх} / [j\omega C |R(R_{вх} + R_{вых}) + R_{вх} R_{вых}| + R + R_{вх}]$. **7.15.** См. табл. О 7.2. $A = -a$

Т а б л и ц а О 7.2

ω	0	$0,25\omega_c$	$0,5\omega_c$	$0,75\omega_c$	ω_c	$1,5\omega_c$	$2\omega_c$	$3\omega_c$
а, дБ Рис. 7.2, а, г	∞	12,30	7,00	4,44	3,01	1,60	0,97	0,46
а, дБ Рис. 7.2, б, в	0	0,26	0,97	1,94	3,01	5,2	7,00	10,0

7.16. 100. **7.17.** 10^5 с⁻¹; 0,1 мкФ; 10^3 с⁻¹; 99500 с⁻¹; 100500 с⁻¹. **7.18.** 160 пФ, 50 мА, 40 Вт, 49,6 В. **7.19.** а) 100; б) 5; в) 100. **7.20.** 125 В; 3,43. **7.22.** а) 50; 79,6 кОм; 0,253 мГн; б) 50; 31,0 Ом; 0,253 мГн. **7.23.** См. табл. О 7.3.

Т а б л и ц а О 7.3

$\Delta\omega / \omega_0$	-0,08	-0,06	-0,04	-0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08
$\omega 10^6$ с ⁻¹	9,2	9,4	9,6	9,8	10	10,2	10,4	10,6	10,8
$ H(j\omega) $	6,202	8,22	12,13	22,36	50	22,36	12,13	8,22	6,202
$\Theta(\omega)$, рад	4,588	4,547	4,467	4,249	3,142	2,034	1,816	1,736	1,695

7.24. $0,8 \omega_0/Q \text{ с}^{-1}$. 7.25. $\omega_0\sqrt{n-1}/Q, \text{ с}^{-1}$. 7.29. $R_1=R=3 \text{ кОм}$, $L=5,97 \text{ мкГн}$; $C=1,06 \text{ нФ}$. 7.32. $C_2=C_3=1 \text{ нФ}$; $R_1=80 \text{ Ом}$; $R_4=3,2 \text{ кОм}$. 7.33. См. Приложение 4.

ГЛАВА 8

8.2. Графики изменения тока индуктивности в цепях со схемами рис. 8.2, а, б, в, и, л показаны на рис. О 8.1, а; в цепях со схемами рис. 8.2, в, з, и, м — на рис. О 8.1, б; в цепях со схемами рис. 8.2, г, е, ж — на рис. О 8.1, в; в цепях со схемами рис. 8.2, д — на рис. О 8.1, г. 8.3. Графики изменения напряжения на емкости в цепях со схемами рис. 8.3, а, б, г, з, к показаны на рис. О 8.1, а; в цепях со схемами рис. 8.3, в, и, л — на рис. О 8.1, б; в цепи со схемой рис. 8.3, ж — на рис. О 8.1, в; в цепях со схемами рис. 8.3, д, е — на рис. О 8.1, д. 8.4. Обозначения: $i_{Rk}=i_k, \text{ мА}$; $\Delta u=|u_L(0-)-u_L(0+)|\text{В}$; а) $i_1(0+)=i_1(0-)=0$; $i_1(\infty)=2$; $\Delta u=2$; б) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_1(0+)=i_2(0+)=0$; $i_1(\infty)=i_2(\infty)=1$; $\Delta u=2$; в) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_2(0+)=1$; $i_1(0+)=i_1(\infty)=2$; $i_2(\infty)=0$; $\Delta u=1$; г) $i_1(0-)=i_2(0-)=1$; $i_1(\infty)=0$; $i_2(\infty)=2$; $\Delta u=1$; д) $i_1(0-)=i_1(0+)=i_2(0+)=2$; $i_2(0-)=0$; $i_1(\infty)=i_2(\infty)=1$; $\Delta u=2$; е) $i_1(0-)=i_1(0+)=4/3$; $i_2(0-)=i_2(0+)=i_3(0-)=2/3$; $i_1(\infty)=2$; $i_2(0+)=i_3(\infty)=i_2(\infty)=0$; $\Delta u=2/3$; ж) $i_1(0-)=i_3(0-)=1$; $i_2(0-)=i_3(0+)=i_2(\infty)=i_3(\infty)=0$; $i_1(0+)=1,5$; $i_2(0+)=0,5$; $i_1(\infty)=2$; $\Delta u=0,5$; з) $i_1(0-)=i_1(0+)=i_4(0+)=4/3$; $i_2(0-)=i_4(0-)=i_2(0+)=i_3(0+)=2/3$; $i_3(0-)=0$; $i_1(\infty)=i_2(\infty)=i_3(\infty)=i_4(\infty)=1$; $\Delta u=2/3$; и) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_3(0-)=i_2(0+)=0$; $i_1(0+)=i_3(0+)=1$; $i_1(\infty)=4/3$; $i_2(\infty)=i_3(\infty)=2/3$; $\Delta u=1$; к) $i_1(0-)=4/3$; $i_2(0-)=i_3(0-)=i_3(0+)=2/3$; $i_2(0-)=i_2(0+)=i_1(\infty)=i_2(\infty)=i_3(\infty)=0$; $\Delta u=4/3$; л) $i_1(0-)=10$; $i_2(0-)=i_3(0-)=i_3(0+)=0$; $i_1(0+)=i_2(0+)=5$; $i_1(\infty)=i_2(\infty)=i_3(\infty)=10/3$; $\Delta u=5$; м) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_3(0-)=i_3(0+)=10/3$; $i_2(0+)=i_1(0+)=10$; $i_1(\infty)=10$; $i_2(\infty)=i_3(\infty)=0$. 8.5. Обозначения: $i_{Rk}=i_k, \text{ мА}$, $\Delta i_c=|i_c(0-)-i_c(0+)|\text{мА}$; а) $i_1(0-)=i_1(\infty)=0$; $i_1(0+)=2$; $\Delta i_c=2$; б) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_1(0+)=i_2(0+)=0$; $i_1(\infty)=i_2(\infty)=1$; $\Delta i_c=1$; в) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_2(\infty)=0$; $i_1(0+)=i_2(0+)=i_1(\infty)=2$; $\Delta i_c=2$; г) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_2(0+)=0$; $i_1(0+)=2$; $i_1(\infty)=i_2(\infty)=1$; $\Delta i_c=2$; д) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_3(0-)=i_1(0+)=2/3$; $i_2(0+)=4/3$; $i_3(0+)=i_3(\infty)=0$; $i_1(\infty)=i_2(\infty)=1$; $\Delta i_c=2/3$; е) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_3(0-)=i_2(\infty)=0$; $i_1(0+)=i_2(0+)=2/3$; $i_3(0+)=4/3$; $i_1(\infty)=i_3(\infty)=1$; $\Delta i_c=2/3$; ж) $i_1(0-)=i_2(0-)=1$; $i_3(0-)=i_2(0+)=i_1(\infty)=i_2(\infty)=i_3(\infty)=0$; $i_1(0+)=i_3(0+)=0,5$; $\Delta i_c=0,5$; з) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_3(0-)=i_3(\infty)=0$; $i_1(0+)=4/3$; $i_2(0+)=i_3(0+)=2/3$; и) $i_1(0-)=i_2(0-)=i_3(0-)=1$; $i_3(0+)=i_1(0+)=i_1(\infty)=i_2(\infty)=i_3(\infty)=0$; $i_2(0+)=i_3(0+)=0,5$; $\Delta i_c=0,5$; к) $i_1(0-)=10$; $i_2(0-)=i_3(0-)=i_3(\infty)=0$; $i_1(0+)=i_2(0+)=i_3(0+)=10/3$; $i_1(\infty)=i_2(\infty)=5$; $\Delta i_c=10/3$; л) $i_1(0-)=i_2(0-)=5$; $i_3(0-)=i_2(\infty)=i_3(\infty)=0$; $i_1(0+)=i_1(\infty)=10$; $i_2(0+)=i_3(0+)=2,5$; $\Delta i_c=2,5$. 8.7. Для всех цепей $i_L(t)=i_L(\infty)+|i_L(0)-i_L(\infty)|e^{-t/\tau}$.

Ответы даны в такой последовательности: $i_L(0), \text{ мА}$; $i_L(\infty), \text{ мА}$; $\tau, \text{ мкс}$; а) 0, 2, 10; б) 0, 1, 5; в) 1, 0, 10; г) 1, 2, 10; д) 2, 1, 5; е) 2/3, 2, 20; ж) 1, 2, 20; з) 2/3, 0, 10; и) 0, 2/3, 20/3; к) 2/3, 0, 5; л) 0, 10/3, 20/3; м) 10/3, 0, 5. 8.8. Для всех цепей $u_c(t)=u_c(\infty)+|u_c(0)-u_c(\infty)|e^{-t/\tau}$.

Ответы даны в такой последовательности: $u_c(0), \text{ В}$; $u_c(\infty), \text{ В}$; $\tau, \text{ мс}$; а) 0, 2, 1; б) 0, 2, 2; в) 2, 0, 1; г) 0, 1, 0,5; д) 4/3, 1, 0,5; е) 2, 1, 1,5; ж) 1, 2, 2; з) 0, 1, 1,5; и) 1, 0, 2; к) 0, 5, 1,5; л) 5, 0, 2. 8.9. $\tau=0,621t_1$; $T=\tau \ln 10(1-e^{-1/\tau})$. 8.12. См. табл. О 8.1. 8.13. См. табл. О 8.2.

Рис. О 8.1

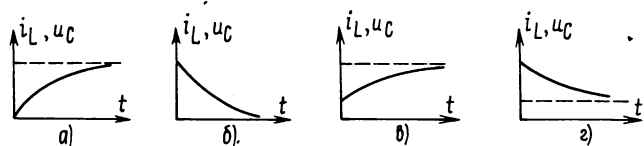


Таблица О 8.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R , кОм	0,5	1	0,5	2	5,2	1,5	3,0	2	1,2	3,2
C , мкФ	4	1	8	1,5	2	1,2	1,4	1,6	1,1	5
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U_0 , В	9,72	10,5	21,6	14,08	17,6	15,3	22,36	22,0	36,0	9,36
C , мкФ	9	4,5	4,8	3,6	4,2	3,8	9	6	2,2	2,4
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
U_0 , В	13,68	19,84	20,3	30,8	22	25,76	5,2	39,06	13,68	1,96
R , кОм	3,8	6,2	5,8	4,4	5,0	5,6	0,8	6,2	5,7	1,4

Таблица О8.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R , кОм	1	10	3	6	9	8	7	2	4	5
L , мГн	5	10	27	18	18	24	42	20	32	35

Окончание табл. О8.2

Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U_0 , В	3,3	22,8	11	37,5	18,2	40,5	15,3	17,6	46,8	0,6
R , кОм	2,2	2,4	4,4	4,2	5,2	5,4	3,4	3,2	7,2	1,2

8.14. т, мс; а) 5; б) 2,5; в) 5; г) 5; д) 2,5; е) 10; ж) 10; з) 5; и) $5/3$; к) 2,5; л) $10/3$; м) 2,5. 8.15. См. ответ к зад. 8.8. 8.16. 1) Критический, $t_3=22$ мкс; 2) апериодический, $t_3=11$ мкс; 3) колебательный, $\omega_1=3 \cdot 10^4$ с $^{-1}$; $t_3=27,5$ мкс; 4) колебательный, $\omega_1=4 \cdot 10^4$ с $^{-1}$; $t_3=36,8$ мкс. 8.17. а) 12,6 кОм; б) 6,3 кОм;

в) 5,5 кОм. 8.19. 1) $u_c = 10,774 \exp(-0,268 \cdot 10^5 t) - 0,774 \exp(-3,732 \cdot 10^5 t)$, В; 2) $u_c = 10(1 + 10^5 t) \exp(-10^5 t)$, В; 3) $u_c = 15,119 \exp(-0,75 \cdot 10^5 t) \cos(0,65 \cdot 10^5 t - 0,848)$, В. 8.20. $R_1 = 450$ Ом; $u_c = 4,54 \exp(-1,5 \cdot 10^5 t) \cos(2,78 \cdot 10^5 t - 0,495)$, В. 8.21. 1) $R_1 = 300$ Ом; $u_c = 4,22 \exp(-10^5 t) \cos(3 \cdot 10^5 t - 0,322)$, В; 2) $R_1 = 225$ Ом; $u_c = 4,12 \exp(-0,75 \cdot 10^5 t) \cos(3,07 \cdot 10^5 t - 0,239)$, В. 8.22. 1) апериодический; 2) критический; 3) колебательный, $\omega_1 = 3 \cdot 10^4$ с⁻¹; 4) колебательный, $\omega_1 = 4 \cdot 10^4$ с⁻¹. 8.23. $R_{\text{пол}} R_{\text{пар}} = L/C$. 8.24. $R = 272$ Ом, $C = 0,0184$ мкФ; $L = 5,44$ мГн; 8.25. 1) $i_L = -10,773 \exp(-0,134 \cdot 10^5 t) + 0,773 \exp(-1,866 \cdot 10^5 t) + 10$, мА; 2) $i_L = 10 - 10(1 + 0,5 \cdot 10^5 t) \exp(-0,5 \cdot 10^5 t)$, мА; 3) $i_L = 10 - 16,67 \exp(-4 \cdot 10^5 t) \cos(3 \cdot 10^4 t - 0,927)$. 8.27. Для схемы а) $du_1/dt = -2u_1/RC + u_2/RC + U_0/RC$; $du_2/dt = u_1/RC - u_2/RC$.

ГЛАВА 9

9.4 и 9.5 см. табл. 9.1 учебника. 9.6 1) последовательное соединение $R = 1$ кОм и $C = 4$ мкФ; 2) последовательное соединение $R = 2$ кОм и $L = 4$ Гн; 3) последовательное соединение $R = 1$ кОм и $L = 4$ Гн; 4) параллельное соединение $R = 10$ кОм и $L = 100$ Гн; 5) последовательное соединение $R = 1$ кОм и $C = 10$ мкФ; 6) $C = 500$ мкФ; 7) последовательное соединение $L = 20$ Гн, $R = 4$ кОм и $C = 2,5$ мкФ. 9.7. $Z(p) = 1,25(p^2 + 4p + 8)/(p^3 + 4p^2 + 14p + 20)$. 9.9. Заменяется U_0 на U_0/p и I_0 на I_0/p ; последовательно с индуктивностью включается источник напряжения $Li_L(0)$ или параллельно — источник тока $i_L(0)/p$ (см. рис. 9.9, б); значения $i_L(0)$ даны в ответах к зад. 8.7 (первое число). 9.10. Заменяется U_0 на U_0/p и I_0 на I_0/p ; параллельно с емкостью включается источник тока с $Cu_c(0)$ или последовательно — источник напряжения $u_c(0)/p$ (см. рис. 9.9, а); значения $u_c(0)$ даны в ответах к зад. 8.8 (первое число). 9.12. См. ответ к зад. 8.7 и 8.8. 9.13. $Z(p)$ равно: а), б) $R + 1/pC$; в), г) $R + pL$; $H(p)$ — см. ответы к зад. 7.2, если $j\omega = p$. 9.14. $Y(p)$ равно: а), б) $1/R + pC$; в) г) $1/R + 1/pL$; $H(p)$ — см. ответы к зад. 7.2, если $j\omega = p$. 9.15. См. ответы к зад. 7.6, если $j\omega = p$. 9.16. Для схемы 7.2, а: а) $u_2(t) = U_m f(t)$; б) $u_2(t) = [U_m/(\alpha - \beta)] \{ \alpha \exp(-\alpha t) - \beta \exp(-\beta t) \}$; в) $u_2(t) = U_m \omega (\beta^2 + \omega^2)^{-1/2} \{ -\beta(\beta^2 + \omega^2)^{-1/2} \times \exp(-\beta t) + \cos[\omega t - \arctg(\omega/\beta)] \}$; г) $u_2(t) = U_m f(t)$, при $0 \leq t \leq t_n$, $u_2(t) = U_m [f(t) - f(t - t_n)]$, при $t > t_n$, где $\beta = 1/RC$, $f(t) = \beta^2(\beta^2 + \omega^2)^{-1} \exp(-\beta t) + \omega(\beta^2 + \omega^2)^{-1/2} \times \cos[\omega t - \arctg(\beta/\omega)]$. 9.17. а) $U_2/U_1 = 1/(LCp^2 + RCp + 1)$; б) $U_2/U_1 = pL/(LCRp^2 + pL + R)$. 9.19. $u_2(t) = \exp(-10^4 t) \sin 10^6 t$ при $t \leq t_n$; $u_2(t) = \exp(-10^4 t) \times [\sin 10^5 t - e^{10} \sin(10^6 t - 10^3)]$ при $t > t_n$. 9.21. а) $\mu U_0 \exp(-t/RC)$; б) $\mu U_0 \times [\exp(-t/R_1 C_1) - \exp(-t/R_2 C_2)]$; в) $[\mu U_0 R_2/(R_1 + R_2)] \exp[-(R_1 + R_2 + R_3) \times t/CR_3(R_1 + R_2)]$. 9.22. $4U_0$. 9.23 и 9.24. $CR_1 = L/R_2$. 9.25. А₁ $\exp(-\delta_1 t) + A_2 \times \exp(-\delta_2 t) + A_3 \exp(-\delta_3 t) \cos(\omega_1 t - \varphi)$; режим покоя. 9.26. в) цепь неустойчива. 9.27. а) $k > -5$; б) $k < 1$; в) $K > 0$; г) $-2 < k < 1$. 9.28. а), е), ж) — неустойчивые.

ГЛАВА 10

10.5. Схемы а), з) — $h_u(t) = \exp(-10^3 t)$, $g_u(t) = \delta(t) - 10^3 \exp(-10^3 t)$, с⁻¹. Схемы б), в) — $h_u(t) = 1 - \exp(-10^3 t)$, $g_u(t) = 10^3 \exp(-10^3 t)$, с⁻¹. 10.9. а) $h_u(t) = 1,17 \exp(-2618 t) - 0,17 \exp(-382 t)$, $g_u(t) = \delta(t) - 3063 \exp(-2618 t) + 65 \exp(-382 t)$, с⁻¹; б) $h_u(t) = 1,17 \exp(-1309 t) - 0,17 \exp(-191 t)$, $g_u(t) = \delta(t) - 1531,5 \exp(-1309 t) - 32,5 \exp(-191 t)$, с⁻¹. 10.10. $1 - \exp(-10^3 t)$. 10.11 $\exp(-250 t)$. 10.12 $h_u(t) = (\omega_1 RC)^{-1} \exp(-\delta t) \sin \omega_1 t$; $g_u(t) = \omega_0 (\omega_1 RC)^{-1} \exp(-\delta t) \times \cos(\omega_1 t - \varphi)$, $\delta = 1/2RC$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\varphi = -\arctg \delta/\omega_1$. 10.13 $h(t) = 2\delta t \exp(-\delta t)$; $g(t) = 2\delta(1 - \delta t) \exp(-\delta t)$, $\delta = 1/2RC$, $t_3 = 1/\delta$. 10.14. а) $h(t) = 1/R$, $g(t) = \delta(t)/R$; б) $h(t) = 1 - 2 \exp(-t/\tau)$, $g(t) = -\delta(t) + (2/\tau) \exp(-t/\tau)$, $\tau = RC$. 10.15. а) $h(t) = 1/R$; $\delta(t)/R$; б) $h(t) = 2 \exp(-t/\tau) - 1$, $g(t) = \delta(t) - (2/\tau) \times \exp(-t/\tau)$, $\tau = RC$. 10.16. $h(t) = (R_2/R_1)[1 - \exp(-\alpha t)]$, $g(t) = (1/R_1 C) \exp(-\alpha t)$, $\alpha = 1/R_2 C$. 10.18. а) $1,0105 \exp(200 t)$, $t \geq 0,5$ мс; б) $2,7186 \exp(-200 t)$, $t \geq 1$ мс. 10.21. $L/C = R^2$. 10.25. а) $4 \exp(-t)$, $t \geq 0$; б) $4 \exp(-t) - 6 \exp(-t + 1)$, $t \geq 1$.

10.27. $aC[1 - \exp(-t/RC)]; (a/R)t + (aL/R^2)[\exp(-Rt/L) - 1]$. 10.28. а) $2 \exp(-2t) - 2 \exp(-4t)$. 10.29. б) $Et, 0 \leq t < \tau; E\tau, t \geq \tau$. 10.30. Схема а) $u_2(t) = t^2/RC, 0 \leq t \leq 1; u_2(t) = (1/RC)(4t - t^2 - 2), 1 \leq t \leq 2; u_2 = 2/RC, t \geq 2$; б) $u_2(t) = 1/RC \times [2t - t^2], 0 \leq t \leq 1; u_2 = 1/RC, t \geq 1$; в) $u_2(t) = t^2/RC, 0 \leq t \leq 1; u_2 = 1/RC, t \geq 1$.

ГЛАВА 11

11.7. $i_{\text{вх}}(t) = (8/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \{[(\sin 0,5k\pi)/\sqrt{1+k^2}] \cos[k\omega_1 t + \arctg(1/k)]\}, \text{ мА.}$

11.10. $f_2(t) = (20/\pi) \sum_{k=1}^{\infty} \{[(\sin 0,5k\pi)/\sqrt{k^4 - 1,75k^2 + 1}] \cos[k\omega_1 t + \arctg 2(k - k^{-1})]\}, \text{ мА.}$

11.12. $L = 0,375 \text{ мГн}; C = 0,0296 \text{ мкФ}$. 11.15. $C_2 = 10^{-3}/\pi^2, \Phi; C_1 = C_2/(k^2 - 1), \Phi$. 11.16. $C_2 = 10^{-3}/k^2\pi^2, \Phi; C_1 = (k^2 - 1)C_2, \Phi$. 11.17. $g(t) = \delta(t) - 2a_1(1 - 0,5a_1t) \times \exp(-0,5a_1t)$. 11.18. См. табл. П.2.2. 11.19. $F(j\omega) = A\sqrt{\pi/\beta} e^{-\omega^2/4\beta}$. 11.22. $0,5\omega t_n \operatorname{ctg} 0,25\omega t_n$. 11.25. $1/2f_0$. 11.26. а) $(1 + j\omega)/(2 + j\omega)$; б) $2/[(2 + j\omega)(4 + j\omega)]$; в) $A/[j\omega(2 + j\omega)^2]$.

ГЛАВА 12

12.6. а) рис. О 12.1, а; $L_{\text{эк}} = 0,5L; C_{\text{эк}} = C_{\text{эк1}} = 0,5C$; б) рис. О 12.1, а; $L_{\text{эк}} = 0,5L; C_{\text{эк}} = 2C + 0,5C_1, C_{\text{эк1}} = 0,5C_1$. в) рис. О 12.1, б. 12.7. См. рис. О 12.2 и 12.2, а; $Z_{1T} = Z_1, Z_{2T} = 0,5(Z_2 - Z_1), Z_2 = Z_{1T} + 2Z_{2T}$. 12.8. а) рис. О 12.1, в; $L_{\text{эк1}} = L_{\text{эк}} = 0,5L, C_{\text{эк}} = 0,5C$; б) рис. О 12.1, в; $L_{\text{эк1}} = 0,5L, L_{\text{эк}} = 2,5L, C_{\text{эк}} = 0,5C$; в) рис. О 12.1, в. 12.9 $Y_{11} = Y_{22} = (G^2 - \omega^2 C^2 + j\omega 4CG)/2(G + j\omega C), Y_{12} = Y_{21} = -(G^2 - \omega^2 C^2)/2(G + j\omega C)$. 12.10. $A_{11} = 13, A_{12} = 8R, A_{21} = 8/R, A_{22} = 5$. 12.11. $Y_{11} = Y_{22} = 0,01j, Y_{12} = Y_{21} = -1,26 \cdot 10^{-2} \exp(j1,25)$. 12.13. Нет. 12.14. Задача имеет множество решений. 12.17. $Z_{11} + j\omega L_1; Z_{12} + j\omega M, Z_{21} + j\omega M, Z_{22} + j\omega L_2$. 12.18. Проще найти H -параметры. 12.23. $j\omega CR/(j\omega CR + 1)$. 12.26. $g_1 = g_2 = g_0, C/g_0^2$. 12.29. Гиратор. 12.30. $-Y_{21}^{(1)} Z_{22}^{(2)}/(A_{22} + A_{11} Y_{22}^{(1)} Z_{11}^{(2)})$. 12.31. $\pm g_1 Y_{21}^{(1)} Z_{22}^{(2)}/(g_1 g_2 Z_{11}^{(2)} + Y_{11}^{(1)})$.

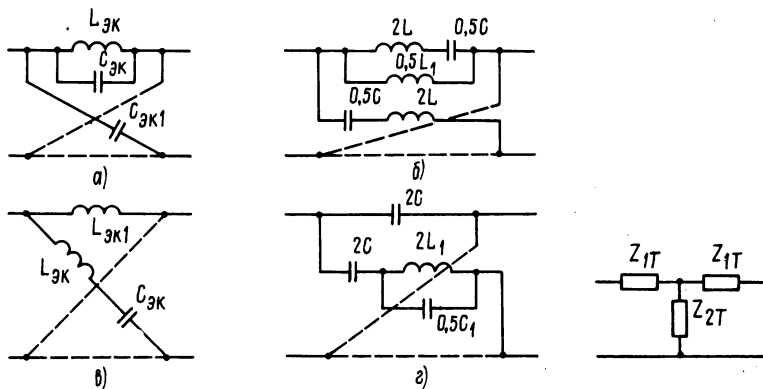


Рис. О12.1

Рис. О12.2

ГЛАВА 13

13.1. $L_0 = 2,57 \cdot 10^{-4}$ Гн/км, $C_0 = 47,5$ нФ/км, $R_0 = 4,1 \cdot 10^{-2} \sqrt{f}$, Ом/км, $G_0 = 1,8 \cdot 10^{-14}$ См/км. 13.3. $Z_8 = 73,5$ Ом, $\lambda = 0,286 \cdot 10^9/f$, м, $v_r = v_\phi = 286 \cdot 10^3$ км/с, $t_r = t_\phi = 3,49 \cdot 10^{-6}$ с. 13.4. $A_1 = 0,5$ ($\dot{U}_0 + Z_8 \dot{I}_0$), $A_2 = 0,5$ ($\dot{U}_0 - Z_8 \dot{I}_0$). 13.5. $|Z_8| = 167,2$ Ом, $\arg Z_8 = -0,552$ рад, $\lambda = 96,6$ км, $v_\phi = 154 \cdot 10^3$ км/с, $\alpha = 0,0157$, $\beta = -0,065$ (α и β даны для линии длиной 1 км). 13.6. $p = 1,07 \exp(-j0,114)$. 13.9. $\alpha \sqrt{0,5a_1 + a_2}$, $\beta = \sqrt{0,5a_1 - a_2}$, $a_1 = \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}$, $a_2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0$. 13.10. $R_0 = |Z_8| (\alpha \cos \varphi_8 - \beta \sin \varphi_8)$, $L_0 = |Z_8| \omega^{-1} (\beta \cos \varphi_8 + \alpha \sin \varphi_8)$, $G_0 = |Z_8|^{-1} [\alpha \cos \varphi_8 + \beta \sin \varphi_8]$, $C_0 = (|Z_8| \omega)^{-1} [\beta \cos \varphi_8 - \alpha \sin \varphi_8]$.

ГЛАВА 14

14.2. Начальной фазой. 14.3. а) Согласованная нагрузка $u(t, l_1) = U_m \cos(\omega t + \beta l_1)$, $u(t, l_2) = U_m \cos(\omega t + \beta l_2)$; б) холостой ход; в) короткое замыкание; г), д) реактивная нагрузка; е) резистивная нагрузка, превышающая волновое сопротивление. 14.4. Холостом ходе, коротком замыкании, реактивной нагрузке. 14.6. $-0,117; 0,79$. 14.7. 54 Ом. 14.8. 150 Ом. 14.10. $U(y) = \sqrt{\cos^2 l, 2\pi y + 4 \sin^2 l, 2\pi y}$, В, $I(y) = 12,5 \sqrt{4 \cos^2 l, 2\pi y + \sin^2 l, 2\pi y}$, мА, $U_{max} = 2$ В, $U_{min} = 1$ В, $I_{max} = 25$ мА, $I_{min} = 12,5$ мА. 14.11. $\dot{U}_l = j\rho U_r / (R_r + \rho^2 Y_n)$, $\dot{I}_l = j\dot{U}_r Z_n / (\rho^2 + R_r Z_n)$, $U_0 = U_r \rho^2 / (\rho^2 + R_r Z_n)$; $\dot{I}_0 = \dot{U}_r / (R_r + \rho^2 Y_n)$. 14.12. См. ответ к зад. 14.11. 14.13. $P = U_r^2 m / \rho = I_r^2 \rho / m$, $Q = U_r^2 (m^2 - 1) \sin 2\beta y / 2\rho = I_r^2 \rho (m^2 - 1) \sin 2\beta y / 2m^2$; при $m = 1$, $P = U_r^2 / \rho = I_r^2 \rho$, $Q = 0$; при $m = 0$ (х.х), $P = 0$, $Q = -U_r^2 \sin 2\beta y / 2\rho$; при $m = \infty$, $P = 0$, $Q = I_r^2 \rho \sin 2\beta y$. 14.14. $U_{max} = 2U_l$, $U_{min} = U_l$, $I_{max} = 2U_l / \rho$, $I_{min} = U_l / \rho$, $U_l = \sqrt{0,5\rho P}$. 14.15. 447,2 В; 774,6 В. 14.16. 0,5 мкГн/м; 50 пФ/м. 14.17. 2 Ом. 14.18. 0,2 м. 14.20. 0,238 м. 14.21. 0,07 м. 14.22. 0,0175 мкГн; 1,75 пФ. 14.23. 0,0625 м.

ГЛАВА 15

15.3. $Q = \hat{L} / \hat{R}$. 15.4. $H(\hat{p}) = 1 / (\hat{p}^3 + 2\hat{p}^2 + 2\hat{p} + 1)$. 15.5. 1. Нет; 2. Да; 3. Нет; 4. Да; 5. Да. 6. Нет. 15.6. 2. Параллельное соединение $C=1$ и последовательного соединения $R=1$ и $L=1$; 4. Последовательное соединение $L=1$ и параллельное соединения $R=1$ и $C=1$; 5. Параллельное соединение $R=1$ и последовательного соединения $L=1$ и $C=1$. 15.7. 2. Последовательное соединение $L=1$ и параллельного соединения $R=1$ и $C=1$; 4. Параллельное соединение $C=1$ и последовательного соединения $R=1$ и $L=1$; 5. Последовательное соединение $R=1$ и параллельного соединения $L=1$ и $C=1$. 15.8. Да. 15.13. Первая схема Фостера: $C_1=2$, $L_1=1/2$, $C_3=2$, $L_3=1/6$; вторая схема Фостера: $L_0=2/3$, $C_\infty=1$, $L_2=2$, $C_2=1/4$; первая схема Кауэра: $C_1=1$, $L_2=0,5$, $C_3=4$, $L_4=1/6$; вторая схема Кауэра: $L_1=2/3$, $C_2=5/4$, $L_3=2/25$, $C_4=5$. 15.14. $3\rho(p^2+2)(p^2+4)/[8(p^2+1)(p^2+3)]$; первая схема Фостера: $C_0=1$, $C_2=3/2$, $L_2=1/3$, $C_4=1$, $L_4=1/4$; вторая схема Фостера: $C_\infty=3/8$, $L_1=16/9$, $C_1=9/16$, $C_3=1/16$, $L_3=16/3$; первая схема Кауэра: $C_1=3/8$, $L_2=4/3$, $C_3=1/2$, $L_4=4$, $C_5=1/8$; вторая схема Кауэра: $C_1=1$, $L_2=7/12$, $C_3=33/49$, $L_4=7/121$, $C_5=11/2$. 15.16. $A_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p)$, $A_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pZ(p)$, $A_k = \lim_{p \rightarrow -\sigma_k} (p + \sigma_k) Z(p)$. 15.17. Схема рис. О 15.1. 15.18. Схема рис. О 15.1: 1. $R_\infty = R_1 = 1$, $C_0 = C_1 = 1$; 2. $R_\infty = 0$, $R_1 = 1$, $R_3 = 1/2$, $C_0 = 2$, $C_1 = C_3 = 1$; 3. $R_\infty = 0$, $C_0 = \infty$, $R_1 = 2$, $C_1 = 2$, $R_3 = 3$, $C_3 = 2/3$. 15.19. $R_0 = \lim_{p \rightarrow 0} Y_{RC}(p)$, $C_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} Y_{RC}(p)/p$, $R_k^{-1} = \lim_{p \rightarrow \sigma_k} \frac{Y_{RC}(p)(p + \sigma_k)}{p}$, $C_k = 1/\sigma_k R_k$. 15.23. См. рис. О 15.2. 15.26. Параллельное соединение индуктивности и последовательного RC-контура. 15.27. Лестничная цепь с резисторами R_1 , R_3 и R_5 в продольных ветвях и индуктивностях L_2 и L_4 в поперечных ветвях. 15.30. Один из возможных ответов: параллельное соединение $L_0=0,375$ и последовательного контура $L_2=1,5$, $C_2=1/9$. 15.32. Последова-

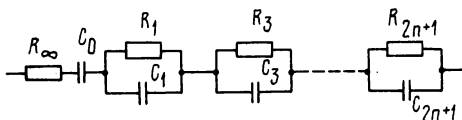


Рис. 015.1

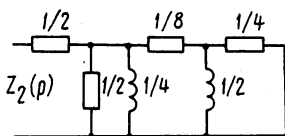


Рис. 015.2

тельное соединение индуктивности $L'_\infty = 1/2$ и параллельного контура $L'_1 = 1/4$ и $C'_1 = 1$. 15.33. рис. 15.12: 1. $L_1 = L_2 = 1/2$, $L_3 = -1/4$, $C_2 = 2$, $R = 1/4$, $L_a = 1$, $L_b = 1/4$; 2. $L_1 = -1$, $L_2 = 2$, $L_3 = 2$, $C_2 = 1/2$, $R = 2$, $L_a = 1$, $L_b = 4$; 3. $L_1 = L_2 = 2$, $L_3 = -1$, $C_2 = 1$, $R = 1$, $L_a = 4$, $L_b = 1$.

ГЛАВА 16

16.1. 1. Да; 2. Да; 3. Нет; 4. Нет; 5. Нет; 6. Нет; 7. Да; 8. Да. 16.3. 1. Вещественная часть числителя имеет слагаемое нечетной степени. 2. Мнимая часть числителя — четная. 3. Мнимая часть знаменателя четная. 16.4. 1. Нет; 2. Нет; 7. Да; 8. Да. 16.6. 1. $(p^2 + 3p + 2)/(p^2 + 7p + 12)$; 2. $(p^2 + 4p + 3)/(p^2 + 6p + 8)$; 3. $(p^2 + 5p + 6)/(p^2 + 5p + 4)$. 16.7. 1. $(p^2 + 0,5p + 1)/(p^2 + p + 1)$, 2. $(p^2 + p + 2)/(p^2 + 2p + 2)$, 3. $(p^2 + 3p + 3)/(p^2 + p + 4)$. 16.9. Нет. 16.10. $\pm 2(p + 4)/(p + 8)$, $\pm 2(p - 4)/(p + 8)$, $-2(p - 4)(p + 4)/(p^2 + 10p + 16)$, $\pm 2(p - 2)(p - 4)/(p^2 + 10p + 16)$. 16.11. а) Да, $\sqrt{2}$; б) Да, 2; в) Нет. г) Нет. 16.12. а) Параллельно $R_b = 8$, $L_b = 8$; б) последовательно $R_b = 2$, $C_b = 1/4$; в) параллельно $L_b = 32$, $C_b = 1/32$. 16.13. Z_a — параллельно $C_a = 1$, $L_a = 1/2$, Z_b — последовательно $C_b = 1/2$, $L_b = 1$. 16.15. Двухполюсник Z_a — параллельно элементы $C_\infty = 1/5$, $L_0 = 5$ и последовательный контур $C_1 = 8,5$, $L_1 = 5/6$. 16.21. $R_1 = R_2 = 1$, $L = \sqrt{2}$, $C = \sqrt{2}$. 16.22. а) $L = C = 1$; б) см. ответ к зад. 16.21.

ГЛАВА 17

17.6. $\cos 3\arccos(2x - 3) = 32x^3 - 144x^2 + 210x - 99$. 17.7. $0 \leq x \leq 0,5$. 17.8. 9,9. 17.9. $(-50/99)\cos 3\arccos(2x - 3)$; 55/99. 17.10. д) 17.11. $a_1 = 0,9659$; 85,57; $a_2 = 0,8660$; 55; $a_3 = 0,7071$, 26; $a_4 = 0,5$; 9. 17.12. $a_k = a_1$, $x_1 = 0,443$, $x_2 = 0,681$, $x_3 = 0,856$, $x_4 = 0,963$; $a_k = a_2$, $x_1 = 0,577$, $x_2 = 0,846$, $x_3 = 0,954$; $a_k = a_3$, $x_1 = 0,7071$, $x_2 = 0,931$; $a_k = a_4$, $x_1 = 0,856$. 17.13. $x = -1/6$. 17.14. $a_0 = 0$, $a_1 = 1/3$. 17.15. $A - a^2 A x^2 / 2 + a^4 A x^4 / 4!$. 17.16. $Aax - Aa^3 x^3 / 3!$. 17.17. а) ПФ, $\Delta a = 0,915$ дБ, $a_0 = 34$ дБ; б) ФНЧ, $\Delta a = 2,5$ дБ, $a_0 = 32$ дБ; в) РФ, $\Delta a = 0,446$ дБ, $a_0 = 14$ дБ; г) ФВЧ, $\Delta a = 1,94$ дБ, $a_0 = 20$ дБ. 17.21. $C_0 = 0,5849$, $n = 6$, $H(\hat{p}) = 1,3076 / [(\hat{p}^2 + 0,5413\hat{p} + 1,094)(\hat{p}^2 + 1,479\hat{p} + 1,094) \times (\hat{p}^2 + 2,02\hat{p} + 1,094)]$. 17.22. $\Delta a = 0,253$ дБ, $n = 9$. 17.24. $C_0(1 - \delta)^2 - 1$. $n_b = -\lg C_0 H_0^2 / 21 \lg \hat{\omega}_k$. 17.27. $n_\psi = 5$, $H(\hat{p}) = 0,081723 / [(\hat{p} + 0,218308)(\hat{p}^2 + 0,134925\hat{p} + 0,952167)(\hat{p}^2 + 0,35323\hat{p} + 0,39115)]$. 17.28. 0,334; 4. 17.30. $\xi = (1 - \delta)^{-2} - 1$; $n_\psi = [6 - 10 \lg(\xi H_0^2)] / [20 \lg(\hat{\omega}_k + \sqrt{\omega_k^2 - 1})]$. 17.33. а) $[(\hat{p}^2 + 2,160206)(\hat{p}^2 + 9,849015)] / [31,2945(\hat{p}^2 + 0,266304\hat{p} + 1,117323)(\hat{p}^2 + 1,102724\hat{p} + 0,628107)]$; б) $(\hat{p}^2 + 2,516033) \times (\hat{p}^2 + 11,982868) / [27,6459(\hat{p}^2 + 0,346274\hat{p} + 1,259083)(\hat{p}^2 + 1,40214\hat{p} + 0,875488)]$. 17.36. Аппроксимация по Баттерворту: $H(\hat{p}) = \hat{p}^6 / [(\hat{p}^2 + 4,625\hat{p} + 0,7983)(\hat{p}^2 + 1,2636\hat{p} + 0,7988)(\hat{p}^2 + 1,726\hat{p} + 0,7983)]$. 17.37. $\hat{\omega}_k = 0,553 \cdot 10^3$ кГц, увеличится. 17.39. ФНЧ — прототип по Баттерворту: 1) $C_0 = 0,122$, $n = 3$, $\delta = \alpha_1 = 1,42$, $\beta_1 = 2,016$; 2) $C_0 = 0,1482$, $n = 3$, $\delta = \alpha_1 = 1,3747$, $\beta_1 = 1,8883$; 3) $C_0 = 0,1749$, $n = 3$, $\delta = \alpha_1 = 1,3372$, $\beta_1 = 1,788$; 4) $C_0 = 0,2023$, $n = 3$, $\delta = \alpha_1 = 1,305$, $\beta_1 = 1,703$; 5) $C_0 = 0,2303$, $n = 3$, $\delta = \alpha_1 = 1,2773$, $\beta_1 = 1,6315$; 6) $C_0 = 0,2589$, $n = 4$, $\alpha_1 = 0,9062$, $\beta_1 = 1,402$, $\alpha_2 = 2,188$, $\beta_2 = 2,188$ [См. (17.76)]. 17.42. а) ФНЧ, 6, полиномиальный; б) ФНЧ, 6, один полюс ослабления; в) ПФ, 4, полиномиальный; г) ФВЧ, 7, полиномиальный; д) ПФ, 8, один полюс ослабления; е) ФВЧ, 7, два полюса ослабления.

ГЛАВА 18

18.1. $n=4$, $H(p) = 1/(a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_5)$. **18.2.** $n=5$, $H(p) = p^5/(a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5)$. **18.3.** а) $H(p) = 1/(p^4 + 2,6132p^3 + 3,4143p^2 + 2,6132p + 1)$; б) $H(p) = p^5/(p^5 + 3,236p^4 + 5,236p^3 + 5,236p^2 + 3,236p + 1)$. **18.4.** а), в) $n=4$, $H(p) = (p^2 + \omega_\infty^2)/(a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4)$; г), д) $n=5$, $H(p) = (p^2 + \omega_\infty^2)(p^2 + \omega_\infty^2)/(a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5)$. **18.5.** Схема рис. 18.1, а; $C_1=7,654$ нФ, $C_3=18,48$ нФ, $L_2=0,1848$ мГн, $L_4=0,07654$ мГн. **18.6.** Схема является лестничной; $\hat{C}_1=\hat{C}_5=0,6180$, $\hat{C}_3=2,0$, $\hat{L}_2=\hat{L}_4=1,618$. **18.7.** Схема является лестничной; $\hat{C}_1=\hat{C}_5=1,144$, $\hat{C}_3=1,972$, $\hat{L}_2=\hat{L}_4=1,372$. **18.8.** $\hat{L}_1=1$, $\hat{C}_2=2$, $\hat{L}_3=3$, $\hat{C}_4=4$. **18.10.** $n_3=5$, схема к табл. ПЗ.12 (правая), $L_1=18,75$ мГн, $L_2=2,47$ мГн, $L_3=27,98$ мГн, $L_4=7,08$ мГн, $L_5=15,31$ мГн, $C_2=19,02$ нФ, $C_4=14,85$ нФ. **18.12.** Параметры ФНЧ: $f_0=10$ кГц, $f_k=32,5$ кГц, $n_3=4$, схема к табл. ПЗ. 11 (левая), $\hat{C}_1=0,7422$, $\hat{C}_2=0,06339$, $\hat{L}_2=1,256$, $\hat{C}_3=1,316$, $\hat{L}_4=0,8027$. **18.13.** Принять $f_2=13,33$ кГц; параметры ФНЧ: $f_0=2$ кГц, $f_k=7,33$ кГц, $n_3=4$. **18.17.** Звено 1-го порядка: $C=2000$ пФ; $R=1$ кОм; звено 2-го порядка схема 4 Приложения 4: $C_1=C_3=2000$ пФ, $R_2=0,5$ кОм, $R_4=2$ кОм. **18.18.** $\hat{R}_5=0,8333$, $\hat{R}_6=1,6667$, $\hat{R}_7=0,2778$, $\hat{R}_8=3,2432$, $\hat{R}_{10}=0,706$, $\kappa=0,856$.

ГЛАВА 19

19.1. Числители передаточных функций: а) $p^2 - p + 1$; б) $-p^3 + 6p^2 - 15p + 15$; в) $p^4 - 10p^3 + 45p^2 - 105p + 105$. **19.8.** Схема рис. 19.1. $L_a=10$ мкГн, $C_a=50$ нФ, $L_b=0,5$ мГн, $C_b=1$ нФ. **19.9.** Схема рис. 19.1; $L_a=3$ мкГн, $C_a=1/3$ мкФ, $L_b=1,875$ мГн, $C_b=8/15$ нФ. **19.11.** Схема 7 Приложения 4: а) $R_1=R_5=125$ Ом, $R_4=8$ кОм, $R_6=2$ кОм, $C_2=C_3=0,25$ нФ, $\kappa=0,9412$; б) $R_1=400$ Ом, $R_4=40$ кОм, $R_5=160$ Ом, $R_6=4$ кОм, $C_2=C_3=62,5$ пФ, $\kappa=0,9615$; в) $R_1=500$ Ом, $R_4=8$ кОм, $R_5=250$ Ом, $C=1$ нФ, $R_6=1$ кОм, $\kappa=0,8$. **19.14.** а) $n=7$; б) $n=4$; в) $n=3$. **19.20.** а) последовательно R_2 и L_2 ; б) параллельно R_2 и L_2 ; в) параллельно R_2 и C_2 ; г) последовательно R_2 и C_2 ; д) параллельно C_2 и L_2 , R_2 ; е) последовательно C_2 , L_2 и R_2 ; ж) R_2 последовательно с параллельным контуром L_2 , C_2 ; з) C_2 последовательно с

параллельным контуром R_2 , L_2 . **19.25.** $a_0 = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \xi(\omega) d\omega$, $a_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \xi(\omega) \cos(k\omega\tau) d\omega$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белецкий А. Ф.** Теория линейных электрических цепей.— М.: Радио и связь, 1986.— 543 с.
2. **Нейман Л. Р., Демирчян К. С.** Теоретические основы электротехники. Т. 1.— Л.: Энергоиздат, 1981.— 536 с.
3. **Матханов П. Н.** Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи.— М.: Высшая школа, 1981.— 333 с.
4. **Теория** линейных электрических цепей/Б. П. Афанасьев, О. Е. Гольдин, И. Г. Кляцкин и др.; Под ред. И. Г. Кляцкина.— М.: Высшая школа, 1975.— 592 с.
5. **Попов В. П.** Основы теории цепей.— М.: Высшая школа, 1985.— 496 с.
6. **Бирюков В. Н., Попов В. П., Семенцов В. И.** Сборник задач по теории цепей.— М.: Высшая школа, 1985.— 239 с.
7. **Шебес М. Р.** Задачник по теории линейных электрических цепей.— М.: Высшая школа, 1982.— 487 с.
8. **Сборник** задач по теории электрических цепей/Л. В. Данилов, П. Н. Матханов, Ю. Б. Мерзлутин и др.; Под ред. П. Н. Матханова и Л. В. Данилова.— М.: Высшая школа, 1980.— 224 с.
9. **Справочник** по расчету и проектированию ARC-схем/Б. Ф. Змий, А. И. Колякин, С. Г. Крутчинский и др.; Под ред. А. А. Ланнэ.— М.: Радио и связь, 1984.— 368 с.
10. **Христиан Э., Эйзман Е.** Таблицы и графики по расчету фильтров: Пер. с англ./Под ред. А. Ф. Белецкого.— М.: Связь, 1975.— 408 с.
11. **Ханзел Г.** Справочник по расчету фильтров: Пер. с англ./Под ред. А. Е. Знаменского.— М.: Сов. радио, 1974.— 288 с.
12. **Кисель В. А.** Аналоговые и цифровые корректоры: Справочник.— М.: Радио и связь, 1986.— 184 с.
13. Методические указания к курсовой работе по курсу ТЛЭЦ/Л. О. Бутусова, З. Г. Гетманская, Н. И. Голубенко и др.; Под ред. В. И. Котова. Ч.1.— Л.: ЛЭИС, 1984.— 36 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	5
1.1. Элементы электрических цепей	5
1.2. Основные понятия топологии электрических цепей	8
2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	13
2.1. Законы Кирхгофа. Составление уравнений по законам Кирхгофа	13
2.2. Законы Кирхгофа. Зависимые источники	16
2.3. Основные теоремы и принципы	17
2.4. Задачи для УИРС. Аномальные элементы	19
2.5. Задачи для индивидуальных заданий	22
3. КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	27
3.1. Параллельно-последовательные резистивные электрические цепи с одним источником и их расчет	27
3.2. Простейшие эквивалентные преобразования цепей	31
3.3. Основные методы расчета сложных электрических цепей	32
3.4.* Расчет сложных цепей с использованием основных теорем	36
3.5. Особенности применения методов узловых напряжений и контурных токов	38
3.6. Цепи с зависимыми источниками и операционными усилителями	39
3.7. Машинные методы анализа резистивных цепей	41
3.8. Задачи для индивидуальных заданий	42
4. КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ	72
4.1.* Уравнения переменного состояния электрических цепей	72
4.2. Расчет цепей при постоянном воздействии	77
5. РЕЖИМ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	78
5.1. Гармонические напряжения и токи в электрических цепях	78
5.2. Гармонические колебания в элементах электрических цепей. Мгновенная и средняя мощность гармонических колебаний	80
6. СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	89
6.1. Основные определения и понятия символического метода анализа колебаний в электрических цепях. Расчет простейших цепей	89
6.2. Анализ сложных цепей символическим методом	96
6.3. Расчет цепей с индуктивными связями	99
6.4. Средняя (активная), реактивная, полная и комплексная мощности	100
6.5. Трехфазные цепи	101
6.6. Задачи для индивидуальных заданий	102
	325

7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	113
7.1. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики электрических цепей с одним реактивным элементом	113
7.2. Частотные характеристики колебательных контуров	116
7.3.* Частотные характеристики цепей с транзисторами и операционными усилителями	118
7.4. Задачи для УИРС. Исследование влияния паразитных параметров активных элементов и технологического разброса параметров пассивных элементов на частотные характеристики цепей	119
7.5. Задачи для индивидуальных заданий	120
8. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ	131
8.1. Переходные колебания в цепях с одним реактивным элементом	131
8.2. Переходные колебания в последовательном и параллельном RLC -контуре	135
8.3.* Классический метод анализа переходных колебаний в сложных линейных электрических цепях	137
8.4. Задачи для УИРС. Численные методы расчета переходных колебаний	138
8.5. Задачи для индивидуальных заданий	138
9. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ	147
9.1. Основные положения операторного метода анализа переходных процессов	147
9.2. Расчет переходных процессов операторным методом. Операторные входные и передаточные функции	149
9.3. Устойчивость электрических цепей. Критерии устойчивости	151
9.4. Задачи для УИРС. Определение передаточных функций для цепей, содержащих операционные усилители	152
9.5. Задачи для индивидуальных заданий	155
10. ВРЕМЕННОЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ	159
10.1. Переходные и импульсные характеристики	159
10.2. Временной метод анализа переходных процессов	161
10.3. Задачи для УИРС. Обобщенные функции ¹	163
10.4. Задачи для индивидуальных заданий	165
11. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ	172
11.1. Анализ спектрального состава периодических колебаний	172
11.2. Анализ режима периодических колебаний в электрических цепях ¹	173
11.3. Анализ режима непериодических колебаний в электрических цепях	175
11.4. Задачи для УИРС ¹ . Свойства преобразования Фурье. Спектральные плотности некоторых колебаний	177
11.5. Задачи для индивидуальных заданий	178
12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА	183
12.1. Уравнения и параметры четырехполюсника	183
12.2. Внешние характеристики четырехполюсника. Идеальные активные преобразователи сопротивлений	187
12.3. Задачи для УИРС. Анализ RC -цепей, содержащих гиратор	188

13. КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	195
13.1. Параметры линий. Расчет напряжений и токов	195
13.2. Задачи для индивидуальных заданий	198
14. КОЛЕБАНИЯ В ЛИНИЯХ БЕЗ ПОТЕРЬ	199
14.1. Параметры линий. Расчет напряжений и токов	199
14.2. Задачи для индивидуальных заданий	203
15. ВХОДНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ	204
15.1. Положительные вещественные функции	204
15.2. Реактивные двухполюсники и их реализация	205
15.3. Двухполюсники RC , RL и RLC	206
16. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ	214
16.1. Свойства передаточных функций	214
16.2. Реализация передаточных функций	215
16.3. Задачи для индивидуальных заданий	217
17. ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ ЗАДАННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК	218
17.1. Методы аппроксимации заданных характеристик	218
17.2. Частотные характеристики электрических фильтров	220
17.3. Задачи для УИРС. Аппроксимация характеристик ФНЧ	225
17.4. Задачи для индивидуальных заданий	226
18. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ	238
18.1. Лестничные LC -фильтры	238
18.2. Фильтры ARC -каскадной структуры	240
18.3. Задачи для УИРС. Синтез схем ARC -фильтров	241
18.4. Задачи для индивидуальных заданий	243
19. ФАЗОВРАЩАТЕЛИ, ЛИНИИ ЗАДЕРЖКИ И КОРРЕКТИРУЮЩИЕ ЦЕПИ	249
19.1. Фазовращатели и линии задержки	249
19.2. Корректирующие цепи	251
19.3. Задачи для УИРС. Исследование косинусного корректора	254
19.4. Задачи для индивидуальных заданий	255
Приложение 1	261
Приложение 2	279
Приложение 3	282
Приложение 4	296
Ответы	304
Список литературы	324

Учебное издание

Петр Петрович Воробийченко

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

Учебное пособие

Заведующий редакцией *В. Н. Вальцев*

Отв. редактор *А. Ф. Белецкий*

Редактор *В. К. Старикова*

Переплет художника *С. Ю. Архангельского*

Художественный редактор *А. В. Проценко*

Технический редактор *Т. Н. Зыкина, Т. Г. Родина*

Корректор *Т. В. Покатова*

ИБ № 1658

Сдано в набор 13.05.88. Подписано в печать 21.11.88. Т-21822. Формат 60×88¹/₁₆. Бумага **лпс**чая № 1. Гарнитура литературная. Печать офсет. Усл. печ. л. 20,09. Усл. кр.-отт. 20,09. Уч.-изд. л. 19,58. Тираж 20 000 экз. Изд. № 22083. Зак. № 3132. Цена 95 к.

Издательство «Радио и связь». 101000 Москва, Почтамт, а/я 693

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли: 113054, Москва, Валовая, 28.

Общ.